1a) $\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -2 & 7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$

$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = (\vec{q}_1, \vec{q}_2) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}$

$\underset{①}{\vec{a}_1 = r_{11} \vec{q}_1}$ and $\underset{②}{r_{12} \vec{q}_1 + r_{22} \vec{q}_2}$

①: $r_{11} = \left\| \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (4)^2} = \sqrt{36} = \underline{6}$

$r_{11} = 6 \longrightarrow \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

②: $r_{12} = \vec{q}_1^{\,T} \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} = \underline{-3}$

$r_{12} = -3 \longrightarrow r_{22} \vec{q}_2 = \vec{a}_2 - r_{12} \vec{q}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} - (-3) \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$

$r_{22} = \left\| \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} \right\| = 9$ $\quad \vec{q}_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -2 & 7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Thick

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -2 & 7 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

QR Factorization:

$$Q = \begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

16) $$\begin{bmatrix} -2/3 & -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\begin{aligned} x_1 &= -11/18 \\ x_2 &= 4/9 \end{aligned}}$$

Answer:

$$x^{LS} = \begin{bmatrix} -11/18 \\ 4/9 \end{bmatrix}$$

Minimum Residual:

$$= \sqrt{(-11/18)^2 + (4/9)}$$

$$= \sqrt{121/324 + 16/81}$$

$$= \sqrt{185/324}$$

$$\boxed{\approx 0.755637}$$

$$w = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Minimum Residual:

$$w = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= \sqrt{(-5)^2 + (4)^2 + (-7)^2}$$
$$= \sqrt{25 + 16 + 49}$$
$$= \sqrt{90}$$
$$\boxed{\approx 9.48683981}$$