5. Taylorův polynom a mocninné řady

5.1. Taylorův polynom

Motivace: Chceme nahradit komplikovanou funkci polynomem s co největší přesností. Lze aplikovat například při přibližném řešení diferenciálních rovnic, nebo při integrování. Používá se i v informatice při reprezentaci funkci na počítači, nebo na kalkulačce.

Definice. Nechť f je reálná funkce, $a \in \mathbf{R}$ a existuje vlastní n-tá derivace f v bodě a. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovým polynomem řadu n funkce f v bodě a.*

Poznámky: a) pro stupeň Taylorova polynomu platí $\operatorname{st} T_n^{f,a} \leq n$.
b) $(T_n^{f,a})'(x) = T_{n-1}^{f',a}(x)$.

Věta T 5.1 (o nejlepší aproximaci Taylorovým polynomem)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(a) \in \mathbf{R}$ a P je polynom stupně nejvýše n. Pak*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 \Leftrightarrow P = T_n^{f,a}.$$

Lemma. *Nechť Q je polynom, $a \in \mathbf{R}$,* $\operatorname{st} Q \leq n$ a $\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$. Pak $Q \equiv 0$.

Věta T 5.2 (Taylor)**.** *Nechť funkce f má vlastní $(n+1)$-ní derivaci v intervalu $[a,x]$, a nechť φ je spojitá funkce v $[a,x]$ a má vlastní derivaci v (a,x), která je v každém bodě tohoto intervalu různá od nuly. Pak existuje $\xi \in (a,x)$ tak, že*

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Důsledek: (Lagrangeův tvar zbytku). Specielně existuje $\xi_1 \in (a,x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_1)(x-a)^{n+1}.$$

Důsledek: (Cauchyův tvar zbytku). Specielně existuje $\xi_2 \in (a,x)$ tak, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_2)(x-\xi_2)^n(x-a).$$

Příklad: Spočtěte $e^{0,1}$ s chybou menší než 10^{-5}.

Konec 1. přednášky 20.2.

5.2. Symbol o a Taylorovy řady elementárních funkcí

Taylorovy řady elementárních funkcí: Platí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \text{ a } (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Definice. Nechť f, g jsou funkce a $a \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že funkce f je v bodě a *malé o od g* , jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Píšeme $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to a$.

Teoretické příklady: a) Taylorova věta nám říká, že $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
b) Nechť $k, l \in \mathbf{N}$. Dokažte, že pro $x \to 0$ platí

$$(i)\ x^k o(x^l) = o(x^{k+l}), \quad (ii)\ o(x^k)o(x^l) = o(x^{k+l}), \quad (iii)\ o(x^k + o(x^l)) = o(x^k) \text{ pro } k < l.$$

Příklady: a) $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.
b) Nalezněte a, $b \in \mathbf{R}$ tak, aby limita existovala vlastní limita $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)e^x - ax - bx^2}{x^3}$ a tuto limitu spočtěte.
c) Nalezněte $T_3^{f,0}(x)$ pro $f(x) = e^{\sin x}$.

5.3 Mocninné řady

Definice. Nechť $x_0 \in \mathbf{R}$ a $a_n \in \mathbf{R}$ pro $n \in \mathbf{N}_0$. Řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazýváme *mocninnou řadou* s koeficienty a_n o středu x_0.

Definice. *Poloměrem konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazveme

$$R = \sup\Big\{r \in [0,\infty) : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ konverguje pro všechna } x \in (x_0-r, x_0+r)\Big\}.$$

Příklady: a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (= \frac{1}{1-x})$ je mocninná řada se středem v 0 a poloměrem konvergence $R=1$.
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (= e^x)$ je mocninná řada se středem v 0 a poloměrem konvergence $R=\infty$.

Věta L 5.3 (výpočet poloměru konvergence)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada a* $R \in [0,\infty]$ *její poloměr konvergence. Pak platí*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Navíc pro všechna x *s* $|x-x_0| > R$ *řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *diverguje a pro všechna* x *s* $|x-x_0| < R$ *řada konverguje absolutně.*

Poznámka: Pokud dokonce existuje $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, pak $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Příklady: a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{2n+1} x^{2n+1} = \arctan x$ má poloměr konvergence $R=1$.
b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ má poloměr konvergence $R=\infty$.
Konec 2. přednášky 21.2.

Lemma. Nechť $x \in \mathbf{R}$. Pak $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall \delta > 0$ a $\forall h \in (-\delta,\delta)$ platí

$$\big|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\big| \le \frac{h^2}{\delta^2}(|x|+\delta)^n.$$

Věta L 5.4 (o derivaci mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R>0$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ *je také mocninná řada se stejným středem a poloměrem konvergence. Navíc pro* $x \in (x_0-R, x_0+R)$ *(*$\mathbf{R}$ *pro* $R=\infty$*) platí*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}.$$

Příklad: Pro všechna $x \in (-1,1)$ platí $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Platí to i pro $x = \pm 1$?

Věta T 5.5 (Abelova)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *je mocninná řada s poloměrem konvergence* $R>0$. *Nechť navíc* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ *konverguje. Pak platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = \lim_{r\to R-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Konec 3. přednášky 27.2.

6. Primitivní funkce

Motivace: Obsah, objem, délka křivky, obsah povrchu ...

6.1. Základní vlastnosti

Definice. Nechť je funkce f definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je *primitivní funkce* k funkci f, pokud pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a $F'(x) = f(x)$. Množinu všech primitivních funkcí k f na I značíme $\int f(x)\,dx$.

Věta L 6.1 (o jednoznačnosti primitivní funkce až na konstantu)**.** *Nechť* F *a* G *jsou primitivní funkce k* f *na otevřeném intervalu* I. *Pak existuje* $c \in \mathbf{R}$ *tak, že* $F(x) = G(x) + c$ *pro všechna* $x \in I$.

Poznámka: 1. Značíme $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$, nebo $\int x\,dx \stackrel{C}{=} \frac{x^2}{2}$.
2. Nechť F je primitivní k f. Pak F je spojitá.
3. Funkce $\operatorname{sgn} x$ nemá na $\mathbf{R}$ primitivní funkci.
4. Funkce $F(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ pro $x \neq 0$ a $F(0) = 0$ je diferencovatelná na $\mathbf{R}$, ale její derivace není spojitá na $\mathbf{R}$.

Věta T 6.2 (o vztahu spojitosti a existence primitivní funkce)**.** *Nechť* I *je otevřený interval a* f *je spojitá funkce na* I. *Pak* f *má ma* I *primitivní funkci.*

Věta L 6.3 (linearita primitivní funkce)**.** *Nechť f má primitivní funkci F a g má primitivní funkci G na otevřeném intervalu I a nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Pak $\alpha f + \beta g$ má na I primitivní funkci $\alpha F + \beta G$.*

Tabulkové integrály:

$$\int x^n\,dx \overset{C}{=} \frac{x^n}{n+1} \text{ na } \mathbf{R} \text{ pro } n \in \mathbf{N} \text{ a na } (-\infty, 0) \text{ a } (0, \infty) \text{ pro } n \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx \overset{C}{=} \log|x| \text{ na } (-\infty, 0) \text{ a na } (0, \infty), \qquad \int e^x\,dx \overset{C}{=} e^x \text{ pro } x \in \mathbf{R}$$

$$\int \sin x\,dx \overset{C}{=} -\cos x \text{ pro } x \in \mathbf{R}, \qquad \int \cos x\,dx \overset{C}{=} \sin x \text{ pro } x \in \mathbf{R}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \overset{C}{=} \tan x \text{ pro } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x}\,dx \overset{C}{=} \operatorname{cotg} x \text{ pro } x \in (0, \pi) + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{C}{=} \arctan x \text{ pro } x \in \mathbf{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{C}{=} \arcsin x \text{ pro } x \in (-1, 1), \qquad \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{C}{=} \arccos x \text{ pro } x \in (-1, 1)$$

Příklad: Spočtěte $\int |x|\,dx$ na $\mathbf{R}$.

Věta T 6.4 (nutná podmínka existence primitivní funkce)**.** *Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak f má na I Darbouxovu vlastnost, tedy pro každý interval $J \subset I$ je $f(J)$ interval.*

Konec 4. přednášky 28.2.

Věta L 6.5 (integrace per partes)**.** *Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce k g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)dx \text{ na } I.$$

Příklad: Spočtěte $\int xe^{2x}\,dx$ na $\mathbf{R}$.

Věta L 6.6 (první věta o substituci)**.** *Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě z (α, β) vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Příklad: Spočtěte $\int xe^{x^2}\,dx$ na $\mathbf{R}$.

Věta L 6.7 (druhá věta o substituci)**.** *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) vlastní nenulovou derivaci a $\varphi\big((\alpha, \beta)\big) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)dx = G\big(\varphi^{-1}(t)\big) \text{ na } (a, b).$$

Poznámka: Při použití druhé věty o substituci je vždy nutné ověřit, že φ je prostá a na!

Příklady: 1. Spočtěte $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ na $(-1, 1)$.
2. Nechť F je primitivní k f. Spočtěte $\int f(ax+b)\,dx$ pro $a, b \in \mathbf{R}$.
3. Spočtěte $\int e^x \cos x\,dx$ na $\mathbf{R}$.
4. Spočtěte $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}$ na $\mathbf{R}$ pro $n \in \mathbf{N}$.

Konec 5. přednášky 6.3.

6.2. Integrace racionálních funkcí

Definice. Racionální funkcí rozumíme podíl dvou polynomů P/Q, kde Q není nulový polynom.

Věta (základní věta algebry). *Nechť $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_j \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$. Pak existují čísla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$ tak, že*

$$P(x) = a_n(x - x_1) \cdots (x - x_n),\ x \in \mathbf{R}.$$

Lemma (o komplexních kořenech polynomu) Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbf{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbf{N}$. Pak i $\overline{z}$ je kořen násobnosti k.

Věta T 6.8 (o rozkladu na parciální zlomky). *Nechť P a Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) stupeň P je ostře menší než stupeň Q,

(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1}\cdots(x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}\cdots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,

(v) žádné dva z mnohočlenů $x-x_1, \dots, x-x_k, x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají společný kořen.

(vi) mnohočleny $x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A^i_j \in \mathbf{R}$, $i \in \{1,\dots,k\}$, $j \in \{1,\dots,p_i\}$ a B^i_j, $C^i_j \in \mathbf{R}$, $i \in \{1,\dots,l\}$, $j \in \{1,\dots,q_i\}$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A^1_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A^1_{p_1}}{(x-x_1)^{p_1}} + \ldots + \frac{A^k_1}{x-x_k} + \ldots + \frac{A^k_{p_k}}{(x-x_k)^{p_k}} \\ &+ \frac{B^1_1 x + C^1_1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \ldots + \frac{B^1_{q_1} x + C^1_{q_1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \ldots \\ &+ \frac{B^l_1 x + C^l_1}{x^2+\alpha_l x+\beta_l} + \ldots + \frac{B^l_{q_l} x + C^l_{q_l}}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}.\end{aligned}$$

Postup při integraci racionální funkce:

1. Vydělit polynomy

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int P_1(x)\,dx + \int \frac{P_2(x)}{Q(x)}\,dx,$$

kde stupeň $P_2 <$ stupeň Q.

2. Rozklad na parciální zlomky podle předchozí věty.

3. Integrace parciálních zlomků. Stačí umět integrovat x^n, $\frac{1}{x^n}$, $\frac{2x}{(1+x^2)^k}$, $\frac{1}{(1+x^2)^k}$ a použít lineární substituci.

Příklady: 1. Vydělte polynomy $\frac{x^4+1}{x^2+2x}$.
2. Zintegrujte $\frac{1}{x+1}$ a $\frac{x+1}{x^2+x+1}$.
3. Spočtěte primitivní funkci $\int \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2+x+1)}$.

6.3 Substituce, převádějící na racionální funkce

(1) Nechť $a \in \mathbf{R}$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\left(e^{ax}\right)\,dx$$

používáme substituci

$$t = e^{ax}.$$

(2) Při integraci funkcí typu

$$\int R\left(\log x\right)\frac{1}{x}\,dx$$

používáme substituci

$$t = \log x.$$

Příklady: 1. Spočtěte $\int \frac{1}{x(\log^2 x - 5\log x + 6)}\,dx$.
2. Spočtěte $\int \frac{1}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}\,dx$.

Konec 6. přednášky 7.3.

6.4. Integrace trigonometrických funkcí

Definice. Racionální funkcí dvou proměnných rozumíme podíl dvou polynomů $R(a,b) = \frac{P(a,b)}{Q(a,b)}$, kde $P(a,b)$ a $Q(a,b)$ jsou polynomy dvou proměnných a Q není identicky nulový.

(3) Při integraci funkcí

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

používáme substituce:
(i) pokud $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \cos x$

(ii) pokud $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \sin x$
(iii) pokud $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak užíváme substituci $t = \tan x$
(iv) vždy funguje substituce $t = \tan \frac{x}{2}$.
Dobrá rada: Pokud je možné použít (i) nebo (ii), je výpočet většinou nejsnazší. Substituci (iv) je dobré používat jen, když nelze použít (i), (ii) ani (iii).
Poznámka: Po substituci $t = \tan x$ a $t = \tan \frac{x}{2}$ je většinou nutné primitivní funkci po formálním spočtení ještě 'lepit'.

Příklady: 1. Spočtěte $\int \frac{1}{\cos x \sin^2 x}\, dx$.
2. Spočtěte $\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\, dx$.

6.5. Integrace funkcí obsahujících odmocniny

(4) Nechť $q \in \mathbf{N}$ a $ad \neq bc$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}\right)$$

používáme substituci

$$t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(5) (Eulerovy substituce) Nechť $a \neq 0$. Při integraci funkcí typu

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\, dx$$

používáme následující substituce:
a) Polynom $ax^2 + bx + x$ má dvojnásobný kořen α a $a > 0$, pak

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}|x-\alpha|$$

a jedná se v podstatě o integraci běžné racionální funkce.
b) Polynom $ax^2 + bx + x$ má dva reálné kořeny α_1 a α_2. Pak úpravou převedeme na tvar (4) pro odmocninu $\sqrt{a\frac{x-\alpha_1}{x-\alpha_2}}$ nebo $\sqrt{a\frac{\alpha_1-x}{x-\alpha_2}}$.
c) Polynom $ax^2 + bx + x$ nemá reálný kořen a $a > 0$. Pak použijeme substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t.$$

Poznámka: Substituce (3) (iii), (iv) a (5) c) jsou substituce 2. druhu a je vždy potřeba ověřit, že vnitřní funkce je monotónní a na.

Příklady: 1. Spočtěte $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\, dx$.
2. Spočtěte $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\, dx$.
Konec 7. přednášky 13.3.

7. Určitý integrál

7.1. Riemannův integrál

Definice. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme *dělením* intervalu $[a, b]$, jestliže $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Řekneme, že dělení D' intervalu $[a, b]$ *zjemňuje* dělení D intervalu $[a, b]$, jestliže každý bod dělení D je i bodem dělení D'.

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a D je dělení $[a, b]$. Definujme *horní a dolní součty*

$$S(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \sup\{f(x);\ x \in [x_{j-1}, x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$

$$s(f, D) = \sum_{j=1}^{n} \inf\{f(x);\ x \in [x_{j-1}, x_j]\}(x_j - x_{j-1}),$$

horní Riemannův integrál

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\, dx = \inf\Big\{S(f, D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\Big\}$$

a *dolní Riemannův integrál*

$$(R)\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \sup\Big\{s(f, D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\Big\}.$$

Pokud $(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, pak řekneme, že f je Riemannovsky integrovatelná a klademe

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Množinu funkcí majících Riemannův integrál značíme $R([a,b])$.

Poznámka: Omezenost f je nutně potřeba.

Příklady: 1. $(R)\int_0^1 1\,dx = 1$.

2. Nechť D je Dirichletova funkce, pak $(R)\overline{\int_0^1} D(x)\,dx = 1$ a $(R)\underline{\int_0^1} D(x)\,dx = 0$.

Věta L 7.1 (o zjemnění dělení). *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$, D a D' jsou dělení intervalu $[a,b]$ a D' zjemňuje D. Pak*

$$s(f,D) \le s(f,D') \le S(f,D') \le S(f,D).$$

Věta L 7.2 (o dvou děleních). *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a,b]$. Pak*

$$s(f,D_1) \le S(f,D_2).$$

Důsledek: Nechť f je omezená na $[a,b]$, D_1 a D_2 jsou dělení $[a,b]$,

$$m := \inf\{f(x) :\ x \in [a,b]\} \text{ a } M := \sup\{f(x) :\ x \in [a,b]\}\ .$$

Pak

$$m(b-a) \le s(f,D_1) \le (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le (R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f,D_2) \le M(b-a).$$

Definice. Nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a,b]$. Číslo $\nu(D) = \max_{j=1,\dots,n} |x_j - x_{j-1}|$ nazveme *normou dělení D.*

Konec 8. přednášky 14.3.

Věta T 7.3 (aproximace R integrálu pomocí součtů). *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$ a $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost dělení $[a,b]$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$. Potom*

$$(R)\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{n\in\mathbf{N}} S(f,D_n) \ \text{ a } (R)\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{n\in\mathbf{N}} s(f,D_n).$$

Příklad: Spočtěte $(R)\int_0^1 x^2\,dx$.

Věta L 7.4 (kritérium existence R integrálu). *Nechť f je omezená funkce na $[a,b]$. Pak*

$$f \in R([a,b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ dělení } D\ [a,b] :\ S(f,D) - s(f,D) < \varepsilon.$$

Definice. Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in I :\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Poznámky: 1. Spojitost a stejnoměrná spojitost na intervalu I se liší pořadím kvantifikátorů:

$$\text{Spojitost: } \forall x \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in I :\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon;$$
$$\text{Stejnoměrná spojitost: } \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x\ \forall y \in I :\ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

2. Nechť f je stejnoměrně spojitá na I, pak f je spojitá na I.
3. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je spojitá na $(0,1)$, ale není tam stejnoměrně spojitá.

Věta T 7.5 (o vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti). *Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a,b]$, pak f je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.*

Konec 9. přednášky 20.3.

Věta L 7.6 (o vztahu spojitosti a Riemannovské integrovatelnosti). *Nechť f je spojitá na $[a,b]$, pak $f \in R([a,b])$.*

Věta L 7.7 (vztah monotonie a Riemannovské integrovatelnosti). *Nechť f je (omezená) monotónní funkce na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in R([a,b])$.*

Věta T 7.8 (vlastnosti R integrálu). *a) Linearita:* $f, g \in R([a,b])$, $\alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow f + g \in R([a,b])$, $\alpha f \in R([a,b])$ *a*

$$(R)\int_a^b f+g = (R)\int_a^b f + (R)\int_a^b g \quad \text{a} \quad (R)\int_a^b \alpha f = \alpha (R)\int_a^b f.$$

b) Monotonie: $f, g \in R([a,b])$, $f \le g$, *pak* $(R)\int_a^b f \le (R)\int_a^b g$.
c) Aditivita vzhledem k intervalům: Nechť $a < b < c$. *Pak*

$$f \in R([a,c]) \Leftrightarrow f \in R([a,b]) \text{ a } f \in R([b,c]),$$

$$(R)\int_a^c f = (R)\int_a^b f + (R)\int_b^c f.$$

Úmluva: 1. Nechť $b < a$, pak definujeme $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
2. Dále definujeme $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.
Konec 10. přednášky 21.3.

Věta T 7.9 (o derivaci integrálu podle horní meze). *Nechť J je neprázdný interval a $f \in R([\alpha,\beta])$ pro každé $\alpha, \beta \in J$. Nechť $c \in J$ je libovolný pevný bod. Definujme na J funkci*

$$F(x) = (R)\int_c^x f(t)\,dt.$$

Pak platí

(i) F je spojitá na J,

(ii) Jestliže je f spojitá v bodě $x_0 \in J$, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důsledek:
(i) Je-li f spojitá na (a,b), pak má na (a,b) primitivní funkci (**Věta T 6.2**).
(ii) Nechť f je spojitá na intervalu $[\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$. Pak

$$(R)\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim_{x\to\beta-} F(x) - \lim_{x\to\alpha+} F(x),$$

kde F je primitivní funkce k f na (α,β).

7.2. Newtonův integrál

Definice. Řekneme, že funkce f má na intervalu (a,b) *Newtonův integrál*, jestliže má na (a,b) primitivní funkci F a $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$ jsou vlastní. Hodnotou Newtonova integrálu rozumíme číslo

$$(N)\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

Množinu funkcí majících Newtonův integrál značíme $N(a,b)$.

Poznámky:1. Jestliže f je spojitá na $[a,b]$, pak existují oba integrály a rovnají se $(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx$.
2. Existuje $(N)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, ale neexistuje Riemannův integrál, protože f není omezená.
3. Existuje $(R)\int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x)\,dx$, ale neexistuje Newtonův integrál, protože $\operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci.

Věta L 7.10 (per partes pro určitý integrál). *Nechť f, f', g, g' jsou spojité na intervalu $[a,b]$. Potom*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

kde $[fg]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$ *a obecněji* $= \lim_{x\to b+} f(x)g(x) - \lim_{x\to a-} f(x)g(x)$.

Příklad: $\int_0^1 \log x\,dx$
Konec 11. přednášky 27.3.

Věta BD 7.11 (o substituci pro určitý integrál). (i) *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je funkce, která má na intervalu $[\alpha,\beta]$ spojitou první derivaci. Pak*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

(ii) *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ je na a má na $[\alpha,\beta]$ vlastní spojitou nenulovou derivaci. Pak*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\Phi(\varphi^{-1}(t))]_a^b = [\Phi(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

kde Φ *je primitivní funkce k* $f \circ \varphi \cdot \varphi'$.

Příklady: 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \, dx$.
2. obsah kruhu: $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \, dx$.

Pozorování: Nechť f je spojitá funkce na (a, b) a $a < c < b$. Pak

$$(i) \ f \in N(a, c) \text{ a } f \in N(c, b) \Rightarrow f \in N(a, b).$$

$$(ii) \ f \in N(a, b) \Rightarrow f \in N(a, c).$$

7.3. Konvergence integrálu

Cílem této kapitoly je určit, kdy je integrál $(N) \int_a^b f(x) \, dx$ konečný. V tomto případě říkáme, že $(N) \int_a^b f(x) \, dx$ konverguje.

Připomeň: Je-li $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ spojitá funkce na omezeném uzavřeném intervalu, pak $(N) \int_a^b f(x) \, dx$ konverguje.

Příklady: 1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} \, dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$
2. $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^\alpha(x)} \, dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$
3. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha < 1$
4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x |\log x|^\alpha} \, dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Věta L 7.12 (srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu)**.** *Nechť* $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ *a* $a < b$. *Nechť jsou funkce* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *spojité na* $[a, b)$ *a nechť* $0 \le f(x) \le g(x)$ *pro všechna* $x \in [a, b)$. *Potom*

$$g \in N(a, b) \Rightarrow f \in N(a, b).$$

Příklad: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} \, dx$ konverguje

Věta L 7.13 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci integrálu)**.** *Nechť* $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ *a* $a < b$. *Nechť jsou funkce* $f, g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *spojité a nezáporné funkce na* $[a, b)$. *Jestliže existuje* $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} \in (0, \infty)$, *pak*

$$g \in N(a, b) \Leftrightarrow f \in N(a, b).$$

Příklad: $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x^3 + x^2} \, dx$ konverguje

Konec 12. přednášky 28.3.

Lemma (odhad Newtonova integrálu součinu dvou funkcí) Nechť $a, b \in \mathbf{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$ a $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ je nerostoucí, nezáporná a spojitá. Potom

$$g(a) \inf_{x \in [a,b]} \int_a^x f(t) \, dt \le \int_a^b f(t) g(t) \, dt \le g(a) \sup_{x \in [a,b]} \int_a^x f(t) \, dt.$$

Speciálně platí

$$\Big| \int_a^b f(t) g(t) \, dt \Big| \le g(a) \sup_{x \in [a,b]} \Big| \int_a^x f(t) \, dt \Big|.$$

Věta T 7.14 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence integrálu)**.** *Nechť* $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}^*$ *a* $a < b$. *Nechť* $f : [a, b) \to \mathbf{R}$ *je spojitá a* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a, b). *Dále nechť* $g : [a, b) \to \mathbf{R}$ *je na* $[a, b)$ *monotónní a spojitá. Pak platí*

$$(A) \ \textit{Jestliže } f \in N(a, b) \textit{ a } g \textit{ je omezená, pak } fg \in N(a, b).$$

$$(D) \ \textit{Je-li } F \textit{ omezená na } (a, b) \textit{ a } \lim_{x \to b-} g(x) = 0, \ \textit{pak } fg \in N(a, b).$$

Příklad: $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ konverguje, ale nekonverguje absolutně.

Konec 13. přednášky 3.4.

Příklady: 1. Stirlingova formule

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n} = 1.$$

2. Wallisova formule

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{m \to \infty} \frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)! \sqrt{2m}}.$$

Věta L 7.15 (věta o střední hodnotě integrálního počtu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$ a $a < b$. Nechť f je spojitá funkce na $[a, b]$, g je nezáporná na $[a, b]$, $g \in N(a, b)$ a $fg \in N(a, b)$. Potom existuje $c \in [a, b]$ takové, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

7.4. Aplikace určitého integrálu

Definice. Nechť $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je nezáporná spojitá funkce, pak *obsahem plochy* pod grafem funkce f nazveme

$$\text{Obsah}(f, [a, b]) = (R)\int_a^b f(x)\,dx. = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Konec 14. přednášky 4.4.

Definice. Nechť $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je spojitá funkce a nechť $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení intervalu $[a, b]$. Označme

$$L(f, D) = \sum_{j=1}^n \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}.$$

Délkou křivky f nazveme

$$L\big(f([a, b])\big) = \sup\big\{L(f, D);\ D \text{ je dělení } [a, b]\big\}.$$

Věta T 7.16 (délka křivky)**.** *Nechť f má na intervalu $[a, b]$ spojitou první derivaci. Pak*

$$L\big(f([a, b])\big) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Věta BD 7.17 (délka křivky v $\mathbf{R}^n$)**.** *Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je spojitá a má spojitou první derivaci. Pak*

$$L\big(\varphi([a, b])\big) = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(x))^2 + (\varphi_2'(x))^2 + \ldots + (\varphi_n'(x))^2}\,dx$$

Příklad: Spočtete délku kružnice.

Věta BD 7.18 (objem a povrch rotačního tělesa - bez důkazu)**.** *Nechť $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ je spojitá a nezáporná. Označme*

$$T = \big\{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 :\ x \in [a, b] \text{ a } \sqrt{y^2 + z^2} \le f(x)\big\}.$$

Pak

$$\text{Objem}(T) = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Je-li navíc f' spojitá na $[a, b]$, pak

$$\text{Obsah povrchu}(T) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Příklad: Spočtete objem a obsah povrchu koule.

Poznámka: Stejná křivka může mít různé parametrizace. Je vhodné ukázat, že délka křivky nezávisí na parametrizaci.

Konec 15. přednášky 10.4.

Věta L 7.19 (integrální kritérium konvergence řad)**.** *Nechť f je nezáporná, nerostoucí a spojitá na intervalu $[n_0 - 1, \infty)$ pro nějaké $n_0 \in \mathbf{N}$. Nechť pro posloupnost a_n platí $a_n = f(n)$ pro všechna $n \ge n_0$. Pak*

$$(N)\int_{n_0}^\infty f(x)\,dx < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty a_n \text{ konverguje.}$$

Příklady: 1. $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$
2. $\int_2^\infty \frac{1}{x\log^\alpha(x)}\,dx$ konverguje $\Leftrightarrow \alpha > 1$

8. Funkce více proměnných

8.1. Úvodní definice a spojitost

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. *Funkcí více reálných proměnných* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$. *Vektorovou funkcí více reálných proměnných* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbf{R}^m$, kde $m \in \mathbf{N}$.

Definice. *Vzdálenost dvou bodů* $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \in \mathbf{R}^n$ je

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Nechť $c \in \mathbf{R}^n$ a $r > 0$. *Otevřená koule* se středem v c o poloměru r je množina

$$B(c, r) := \{x \in \mathbf{R}^n : \ |x - c| < r\}.$$

Prstencová okolí c je definováno jako $P(c, r) := B(c, r) \setminus \{c\}$.

Příklad: Trojúhelníková nerovnost. Pro libovolné $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ platí

$$|x - z| \le |x - y| + |y - z|.$$

Definice. Řekneme, že množina $G \subset \mathbf{R}^n$ je *otevřená*, pokud pro každé $x \in G$ existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset G$.

Definice. Nechť $f : G \to \mathbf{R}$, kde $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená. Řekneme, že f má v bodě $a \in G$ *limitu* rovnou $A \in \mathbf{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : \quad f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Značíme $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

Řekneme, že funkce f je bodě $a \in G$ *spojitá*, jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Limitu (a spojitost) vektorové funkce $f = [f_1, f_2, \dots, f_m] : G \to \mathbf{R}^m$ definujeme po složkách. Tedy

$$\lim_{x \to a} f(x) = [\lim_{x \to a} f_1(x), \lim_{x \to a} f_2(x), \dots, \lim_{x \to a} f_m(x)].$$

Příklad: Pro funkci $f(x, y) = x$ platí v bodě $a = [a_1, a_2]$, že $\lim_{[x,y] \to a} f(x, y) = a_1$. Tedy f je spojitá na $\mathbf{R}^2$.

Zřejmě platí aritmetika limit, věta o dvou policajtech i věta o spojitosti složené funkce, a proto je budeme používat na cvičení.

Příklad: Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

je spojitá na $\mathbf{R}^2$.

Definice. Mějme posloupnost bodů $x_j \in \mathbf{R}^n$ pro $j \in \mathbf{N}$. Řekneme, že *limita posloupnosti* x_j je rovna $a \in \mathbf{R}^n$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists j_0 \in \mathbf{N}\ \forall j \ge j_0 : \ |x_j - a| < \varepsilon.$$

Poznámka: Konvergence posloupnosti bodů $x_j = [(x_j)_1, (x_j)_2, \dots, (x_j)_n] \in \mathbf{R}^n$ pro $j \in \mathbf{N}$ je ekvivalentní konvergenci po složkách, tedy

$$\lim_{j \to \infty} x_j = \big[\lim_{j \to \infty} (x_j)_1, \lim_{j \to \infty} (x_j)_2, \dots, \lim_{j \to \infty} (x_j)_n\big].$$

Příklad: $\lim_{j \to \infty} [\frac{1}{j}, \frac{3j^2+1}{j^2+j}] = [0, 3]$.

Věta T 8.1 (Heine). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$, $a \in G$, $A \in \mathbf{R}^*$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Pak je ekvivalentní:*

(*i*) $\lim_{x \to a} f(x) = A$,

(*ii*) *pro každou posloupnost* $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ *splňující*

$$x_j \in G \setminus \{a\} \text{ a } \lim_{j \to \infty} x_j = a \text{ platí } \lim_{j \to \infty} f(x_j) = A.$$

Příklad: Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

není spojitá v bodě $[0, 0]$.

Konec 16. přednášky 11.4.

8.2. Parciální derivace a totální diferenciál

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \dots, n\}$, $f : G \to \mathbf{R}$ a $x \in G$. *Parciální derivací funkce f v bodě x podle i-té proměnné* nazveme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + t, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t},$$

pokud limita existuje.

Příklad: Spočtěte parciální derivace funce $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$ na $\mathbf{R}^2$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $f : M \to \mathbf{R}$ a $x_0 \in M$. Řekneme, že f nabýva v bodě x_0 svého *minima (lokálního minima) vzhledem k M*, pokud

$$\text{pro všechna } x \in M \text{ platí } f(x) \geq f(x_0)$$

$$\big(\text{existuje } \delta > 0, \text{ že pro všechna } x \in M \cap B(x_0, \delta) \text{ platí } f(x) \geq f(x_0)\big).$$

Analogicky definujeme *maximum (lokální maximum).*

Věta L 8.2 (nutná podmínka existence extrému)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $i \in \{1, \dots, n\}$, $a \in G$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Má-li f v bodě a lokální minimum (maximum) a existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.*

Příklady: 1. Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $M := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. *Metoda nejmenších čtverců (Lineární regrese)*: Mějme zadány body $[x_i, y_i] \in \mathbf{R}^2$, $i = 1, \dots, n$. Chceme nalézt $a, b \in \mathbf{R}$, abychom měli co nejmenší

$$\sum_{i=1}^{n} \big(y_i - (ax_i + b)\big)^2.$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}$, $x \in G$ a $0 \neq v \in \mathbf{R}^n$. *Derivací funkce f v bodě $x \in G$ ve směru v* nazveme

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t},$$

pokud limita existuje.

Příklady: 1. Z existence $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ neplyne existence $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$. Stačí mít $f(x, y) = 1$ na osách a 0 jinde.
2. Z existence všech $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ neplyne spojitost v x. Položme $f = 1$ na $\{[x, y] : \ x \neq 0, y = x^2\}$ a 0 jinde.

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je *totální diferenciál funkce f v bodě a*, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Značíme $Df(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbf{R}^n$ značíme $Df(a)(h)$.

Poznámka: 1. Lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lze reprezentovat jako $L(h) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n$.
2. Ekvivalentně lze definovat jako $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{|x-a|} = 0$.
3. Geometricky význam je, že lineární funkce $f(a) + L(x - a)$ je velmi blízko původní funkce $f(x) \sim f(a) + L(x - a)$.
Konec 17. přednášky 17.4.

Věta L 8.3 (o tvaru totálního diferenciálu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a, pak existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ a pro všechna $h \in \mathbf{R}^n$ platí*

$$Df(a)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) h_n.$$

Navíc pro $0 \neq v \in \mathbf{R}^n$ platí

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Df(a)(v).$$

Příklady: 1. Funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

nemá totální diferenciál v $[0, 0]$.
2. Funkce

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

má totální diferenciál v $[0,0]$.

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}$ a $a \in G$. Nechť f má v bodě a totální diferenciál. Pak definujeme *gradient* funkce f v bodě a jako vektor

$$\nabla f(a) = \Big[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\Big].$$

Můžeme tedy psát $Df(a)(h) = \langle \nabla f(a), h\rangle$.

Věta L 8.4 (o vztahu spojitosti a totálního diferenciálu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Nechť existuje totální diferenciál f v bodě a, pak je f v bodě a spojitá.*

Věta T 8.5 (postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f : G \to \mathbf{R}$. Nechť f má v bodě $a \in \mathbf{R}^n$ spojité parciální derivace, tedy funkce*

$$x \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),\ j = 1, \dots, n$$

jsou spojité v a. Pak $Df(a)$ existuje.

Poznámka: Nechť existuje totální diferenciál f v a. Pak $|Df(a)(h)| = |\langle \nabla f(a), h\rangle| \leq |\nabla f(a)| \cdot |h|$.

Věta L 8.6 (o aritmetice totálního diferenciálu)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}^n$, $f, g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ a $Df(a)$, $Dg(a)$ existují. Pak existují i $D(f+g)(a)$, $D(cf)(a)$ ($c \in \mathbf{R}$), $D(fg)(a)$, a pokud $g(a) \neq 0$ pak i $D(f/g)(a)$ a platí*

$$\begin{aligned}
&(i)\ D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a),\\
&(ii)\ D(cf)(a) = cD(f)(a),\\
&(iii)\ D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + Df(a)g(a),\\
&(iv)\ D(f/g)(a) = \frac{Df(a)g(a) - f(a)Dg(a)}{g(a)^2}.
\end{aligned}$$

Konec 18. přednášky 18.4.

Věta L 8.7 (o přírůstku funkce)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbf{R}$ má totální diferenciál v každém bodě G. Nechť $a, b \in G$ a nechť úsečka L spojující a, b je obsažena v G, tj. $L = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\} \subset G$. Pak existuje $\xi \in L$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = Df(\xi)(b-a).$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}^k$ a $a \in G$. Řekneme, že lineární zobrazení $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je *derivací funkce f v bodě a*, jestliže

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L(h)|}{|h|} = 0.$$

Značíme $Df(a)$ a hodnotu v bodě $h \in \mathbf{R}^n$ značíme $Df(a)(h)$.

Poznámka: Nechť $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení. Potom existuje právě jedna $n \times k$ matice A tak, že $L(h) = Ah$.

Věta L 8.8 (reprezentace derivace maticí)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f = [f_1, f_2, \dots, f_k] : G \to \mathbf{R}^k$ má derivaci v bodě $a \in G$. Pak $Df(a)$ je reprezentováno maticí*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Poznámky: 1. Matice $Df(a)$ se nazývá Jakobiho matice. Pokud $k = n$ tak se determinant této matice nazývá Jakobián a značí se $J_f(a)$.
2. Derivace $Df(a)$ existuje právě tehdy, když existují totální diferenciály $Df_1(a), \dots, Df_k(a)$.
3. Z 2. bodu a Věty 8.5. dostáváme, že jsou-li všechny parciální derivace f spojité v bodě a, pak existuje derivace $Df(a)$.

Poznámka: Nechť $L = Ah : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení reprezentované maticí A. Pak existuje $C > 0$ tak, že

$$|Ah| \leq C|h|.$$

Lemma Nechť $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ má derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}^n$. Pak existuje $\delta_0 > 0$ a $C \in \mathbf{R}$ tak, že

$$|f(a+h) - f(a)| \leq C|h| \text{ pro všechna } h \in B(0, \delta_0).$$

Věta T 8.9 (derivace složeného zobrazení). *Nechť* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$, $g : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^s$, *f má derivaci v* $a \in \mathbf{R}^n$ *a g má derivaci v* $b = f(a) \in \mathbf{R}^k$. *Pak existuje derivace* $Dg \circ f(a)$ *a platí*

$$Dg \circ f(a) = Dg(b) \cdot Df(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a).$$

Příklad: Nechť $F = (F_1, F_2) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je zobrazení definováné

$$F(x,y) = \begin{cases} [(x^2+y^2)(e^x-1), \frac{x^2}{x^2+y^2}] & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ [0,0] & \text{pro } [x,y] \neq [0,0], \end{cases}$$

a $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ je zobrazení definované $G(s,t) = [st, s^2, t^2]$. Spočtěte $D(G \circ F)(1,0)$.

Konec 19. přednášky 24.4.

Věta L 8.10 (řetízkové pravidlo). *Nechť* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ *má derivaci v* $a \in \mathbf{R}^n$ *a* $g : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ *má totální diferenciál v bodě* $b = f(a) = [f_1(a), \dots, f_k(a)]$. *Pak funkce*

$$h(x) = g(f_1(x), \dots, f_k(x))$$

má totální diferenciál v a a platí

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).$$

9. Metrické prostory I

9.1. Základní pojmy

Definice. *Metrickým prostorem* budeme rozumět dvojici (P, ϱ), kde P je množina bodů a $\varrho : P \times P \to \mathbf{R}$ splňuje

$$(i)\ \forall x, y \in P : \ \varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$
$$(ii)\ \forall x, y \in P : \ \varrho(x,y) = \varrho(y,x), \text{ (symetrie)}$$
$$(iii)\ \forall x, y, z \in P : \ \varrho(x,z) \leq \varrho(x,y) + \varrho(y,z). \text{ ($\triangle$-nerovnost)}$$

Funkci ϱ nazýváme *metrika*.

Příklady:
1) Euklidovská metrika na $\mathbf{R}^n$. Pro $x, y \in \mathbf{R}^n$ definujeme $\varrho_e(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.
2) Maximová metrika na $\mathbf{R}^n$. Definujeme $\varrho_\infty(x,y) = \max_{i=1\dots n} |x_i - y_i|$.
3) Součtová metrika na $\mathbf{R}^n$. Definujeme $\varrho_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$.
4) Diskrétní metrika na libovolné množině P je definována jako $\varrho(x,x) = 0$ pro všechna $x \in P$ a $\varrho(x,y) = 1$ pro všechna $x \neq y$.
5) Supremová metrika na $C([0,1])$ je definována $\varrho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$.
6) Metrika na $L^2([0,2\pi]) = \{f : [0,2\pi] \to \mathbf{R} : \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx < \infty\}$ je definována

$$\varrho(f,g) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2\, dx}.$$

7) Definujme prostor obrázků $Obr = \{x \in \mathbf{R}^{1280\times 1024} : \ x_i \in [0,1]\}$ s metrikou $|x - y| = \varrho_e(x,y)$.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $x \in P$, $r > 0$. *Otevřenou koulí se středem x a poloměrem r* nazveme

$$B(x,r) := \{y \in P : \ \varrho(x,y) < r\}.$$

Uzavřenou koulí se středem x a poloměrem r nazveme

$$\overline{B(x,r)} := \{y \in P : \ \varrho(x,y) \leq r\}.$$

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množina $G \subset P$ je *otevřená (v (P,ϱ))*, jestliže pro každý bod $x \in G$ existuje $r > 0$, že $B(x,r) \subset G$. Řekneme, že množina $F \subset P$ je *uzavřená (v (P,ϱ))*, pokud je $P \setminus F$ otevřená.

Příklady: 1. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak $B(x,r)$ je otevřená množina a $\overline{B(x,r)}$ je uzavřená množina.
2. Je $[0,1]$ otevřená množina v $\mathbf{R}$ s diskrétní metrikou?

Věta L 9.1 (vlastnosti otevřených množin)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor. Pak*

(i) $\emptyset$ *a* P *jsou otevřené.*

(ii) *Jsou-li* $G_1, \dots, G_n$ *otevřené, pak* $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ *je otevřená.*

(iii) *Nechť* A *je libovolná (i nekonečná) indexová množina.*

Jsou-li $G_\alpha,\ \alpha \in A$ *otevřené, pak* $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ *je otevřená.*

Věta L 9.2 (vlastnosti uzavřených množin)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor. Pak*

(i) $\emptyset$ *a* P *jsou uzavřené.*

(ii) *Jsou-li* $F_1, \dots, F_n$ *uzavřené, pak* $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ *je uzavřená.*

(iii) *Jsou-li* $F_\alpha,\ \alpha \in A$ *uzavřené, pak* $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *je uzavřená.*

Příklad: $\bigcap_{i=1}^{\infty}(-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}) = \{0\}$ není otevřená v $\mathbf{R}$.
$\bigcup_{i=1}^{\infty}[\frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}] = (0, 1)$ není uzavřená v $\mathbf{R}$.
Konec 20. přednášky 25.4.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $A \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je *vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subset A$. Množinu všech vnitřních bodů A nazýváme *vnitřkem* A a značíme $\operatorname{int} A$.

Příklad: Co je vnitřek $[0, 1)$ v $(\mathbf{R}, |.|)$, $Q(0, 1)$ v $(\mathbf{R}^2, |.|)$ a $\mathbf{Q}$ v $(\mathbf{R}, |.|)$?

Věta L 9.3 (charakterizace vnitřku)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Potom* $\operatorname{int} A$ *je největší (vzhledem k množinové inkluzi) otevřená množina obsažená v* A*.*

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor, $M \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že x je *hraničním bodem* množiny M, jestliže pro každé $r > 0$ platí

$$M \cap B(x, r) \neq \emptyset \text{ a } (P \setminus M) \cap B(x, r) \neq \emptyset.$$

Množinu všech hraničních bodů M nazýváme *hranicí* M a značíme ji ∂M.
Uzávěr množiny M je definován jako $\overline{M} = M \cup \partial M$.

Příklad: Co je hranice a uzávěr $[0, 1)$ v $(\mathbf{R}, |.|)$, $Q(0, 1)$ v $(\mathbf{R}^2, |.|)$ a $\mathbf{Q}$ v $(\mathbf{R}, |.|)$?

Věta L 9.4 (uzávěr a uzavřené množiny)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Pak*

$$A \text{ je uzavřená v } P \Leftrightarrow \overline{A} = A.$$

Věta L 9.5 (vlastnosti uzávěru)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor a* $A \subset P$*. Potom platí*

(i) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$,

(ii) *nechť* $A \neq \emptyset$, *pak* $\overline{A} = \{x \in P : \ \varrho(x, A) = 0\}$,

(iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, *tedy* $\overline{A}$ *je uzavřená množina.*

9.2. Konvergence a spojitá zobrazení v metrických prostorech

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků P a $x \in P$. Řekneme, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje k* x *(v* (P, ϱ)*)*, pokud $\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, x) = 0$. Značíme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, nebo $x_n \xrightarrow{\varrho} x$.

Konec 21. přednášky 2.5.

Věta L 9.6 (vlastnosti konvergence)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je metrický prostor. Pak platí*

(i) *Nechť pro posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *z* P *existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *a* $x \in P$ *tak, že pro všechna* $n \geq n_0$ *platí* $x_n = x$*. Pak* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*.*

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *a* $\lim_{n\to\infty} x_n = y \Rightarrow x = y$*. (Jednoznačnost limity)*

(iii) *Nechť* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *je vybraná posloupnost z* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a nechť* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$*. Pak* $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$*.*

Definice. Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory. Nechť $M\subset P$, $f:M\to Q$ a $x_0\in M$. Řekneme, že f je *spojitá v bodě x_0 (vzhledem k M)*, jestliže

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in B_\varrho(x_0,\delta)\cap M:\ \ f(x)\in B_\sigma(f(x_0),\varepsilon).$$

Řekneme, že f je *spojitá na M (vzhledem k M)*, jestliže je spojitá v každém bodě M (vzhledem k M). Nechť pro každé $\delta>0$ platí $B_\varrho(x_0,\delta)\cap M\setminus\{x_0\}\neq\emptyset$. Řekneme, že f má v bodě x_0 *limitu (vzhledem k M) rovnou $y\in Q$*, jestliže

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in B_\varrho(x_0,\delta)\cap M\setminus\{x_0\}:\ \ f(x)\in B_\sigma(y,\varepsilon).$$

Poznámky: 1. Pojem konvergence a spojitosti v $(\mathbf{R}^n,|.|)$ je shodný s dříve zavedeným pojmem.
2. Definice spojitosti lze zapsat jako $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ f(B_\varrho(x_0,\delta))\subset B_\sigma(f(x_0),\varepsilon)$.

Věta L 9.7 (charakterizace spojitosti)**.** *Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory a $f:P\to Q$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f je spojitá na P,

(ii) $\forall G\subset Q$ otevřenou, je $f^{-1}(G)$ otevřená,

(iii) $\forall F\subset Q$ uzavřenou, je $f^{-1}(F)$ uzavřená.

Příklady: 1. Množina $\{[x,y]\in\mathbf{R}^2:\ x^2+y^2<1\}$ je otevřená.
2. Množina $\{[x,y,z]\in\mathbf{R}^3:\ x+y+z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2\leq 1\}$ je uzavřená.

Věta L 9.8 (spojitost složeného zobrazení)**.** *Nechť (P,ϱ), (Q,σ) a (Z,τ) jsou metrické prostory. Nechť $f:P\to Q$ je spojité zobrazení a $g:Q\to Z$ je spojité zobrazení. Pak $g\circ f:P\to Z$ je spojité zobrazení.*

Příklad: Funkce $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá z $\mathbf{R}^2$ do $\mathbf{R}$.

Věta T 9.9 (Heine)**.** *Nechť (P,ϱ) a (Q,σ) jsou metrické prostory. Nechť $M\subset P$, $x_0\in M$, $A\in Q$ a $f:M\to Q$. Pak je ekvivalentní:*

(i) $\lim\limits_{x\to x_0,\ x\in M} f(x)=A$,

(ii) pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ splňující

$x_n\in M,\ x_n\neq x_0$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ *platí* $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

Důsledek: Jako speciální případ dostáváme Větu 8.1.

Konec 22. přednášky 9.5.

9.3. Kompaktní množiny

Věta L 9.10 (charakterizace uzavřených množin)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $F\subset P$. Pak*

$$F\ \textit{je uzavřená}\ \Leftrightarrow\ \big(x_n\xrightarrow{\varrho}x\ \textit{a}\ x_n\in F\Rightarrow x\in F\big).$$

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $K\subset P$. Řekneme, že K je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků K lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v K.

Příklad: $[0,1]$ je kompaktní v $\mathbf{R}$.

Věta L 9.11 (vlastnosti kompaktních množin)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $K\subset P$ je kompaktní. Pak platí*

(i) K je uzavřená,

(ii) Je-li $F\subset K$ uzavřená, pak je F kompaktní,

(iii) K je omezená (tedy $\exists x\in P,\ r>0,$ že $K\subset B(x,r)$).

Věta T 9.12 (charakterizace kompaktních množin $\mathbf{R}^n$)**.** *Množina $K\subset\mathbf{R}^n$ je kompaktní, právě když je omezená a uzavřená.*

Příklady: 1. $\overline{B(0,1)}$ je kompaktní v $\mathbf{R}^n$.
2. $\overline{B(0,1)}$ není kompaktní v $C([0,1])$.

Věta L 9.13 (nabývání extrémů na kompaktu)**.** *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $K\subset P$ je kompaktní. Nechť $f:K\to\mathbf{R}$ je spojitá. Pak f nabývá na K svého maxima i minima. Speciálně je tedy f na K omezená.*

Konec 23. přednášky 15.5.

Věta L 9.14 (spojitý obraz kompaktu). *Nechť (P, ϱ), (Q, τ) jsou metrické prostory a nechť $f : P \to Q$ je spojité zobrazení. Nechť $K \subset P$ je kompaktní množina, pak $f(K) \subset Q$ je kompaktní množina.*

Definice. Nechť (P, ϱ), (Q, τ) jsou metrické prostory, $K \subset P$ a $f : K \to Q$. Řekneme, že f je stejnoměrně spojitá na K, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in K : \ \Big[\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow \tau(f(x), f(y)) < \varepsilon\Big].$$

Věta T 9.15 (o vztahu spojitosti a stejnoměrné spojitosti na metrickém prostoru). *Nechť (P, ϱ), (Q, τ) jsou metrické prostory, $K \subset P$ je kompaktní a nechť $f : K \to Q$ je spojité zobrazení. Pak f je stejnoměrně spojitá na K.*

Příklad: 1. Nalezněte maximum a minimum funkce $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ na množině $M := \{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9.4. Úplné metrické prostory

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost bodů z P. Řekneme, že x_n *splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku* (případně, že je cauchyovská), jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall m, n \in \mathbf{N},\ \ m, n \geq n_0 : \ \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Poznámka: Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní.

Příklady: 1. $(\mathbf{R}, |.|)$ je úplný (viz Věta 2.14).
2. $((0, 1), |.|)$ není úplný.
3. $(\mathbf{Q}, |.|)$ není úplný.
4. $(\mathbf{R}^n, |.|)$ je úplný.

Věta L 9.16 (vztah kompaktnosti a úplnosti). *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a P je kompaktní. Pak P je úplný metrický prostor.*

Konec 24. přednášky 22.5.

Věta T 9.17 (úplnost a prostor spojitých funkcí). *Metrický prostor $C([0, 1])$ se supremovou metrikou je úplný.*

Příklad: Metrický prostor $C([0, 1])$ s metrikou $\varrho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ není úplný.

Věta T 9.18 (Banachova věta o kontrakci). *Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $T : P \to P$ je kontrakce, tedy*

$$\exists \gamma \in [0, 1)\ \forall x, y \in P : \ \varrho(T(x), T(y)) \leq \gamma \varrho(x, y).$$

Pak existuje právě jedno $x \in P$ tak, že $T(x) = x$.

Poznámka: 1. Předchozí věta nám příští rok ukáže, že každá "hezká" diferenciální rovnice má řešení.
2. Fractal compression

Konec 25. přednášky 23.5.