

Printscreenem jsem vystříhal věty a definice z různých skript.

Kalenda 09/10

Skripta Kalendy na komplexku z 2014 přikládám.

Skripta Malého na míru z 2016 přikládám.

Skripta na funkcionálu ze stránek Spurného Spurný 19/20 a přikládám seznam vět.

Na Furirku přikládám seznamy vět z analýzy od Hencla a odkaz na skripta Analýza 2020 Samozřejmě za nic neručím a vlastně ani nedoporučuju se učit jen z tohoto, ale jako přehled co byste měli znát k ssz to snad bude stačit. pis

## 1 Lebesgueův integrál

$\sigma$ -algebra je definována jako  $\sigma$ -okruh obsahující celý prostor  $X$ .

Je to nejdůležitější množinový systém pro teorii míry. K ověření, že množinový systém  $\mathcal{S}$  je  $\sigma$ -algebra stačí tyto axiomy:

$$(S1-1) \quad \emptyset \in \mathcal{S},$$

$$(S2-2) \quad A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S},$$

$$(S3-3) \quad A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \dots \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{S}.$$

Je-li  $\mathcal{S}$   $\sigma$ -algebra na  $X$ , dvojice  $(X, \mathcal{S})$  se nazývá *měřitelný prostor*. Množiny  $A \in \mathcal{S}$  se nazývají  $\mathcal{S}$ -měřitelné množiny. Nehrozí-li nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných množinách*.

**1.10. Definice** (Generování množinových systémů). Je-li  $\mathcal{F}$  libovolný systém podmnožin  $X$ , potom existuje nejmenší  $\sigma$ -algebra obsahující  $\mathcal{F}$ . Tuto  $\sigma$ -algebru dostaneme jako průnik všech  $\sigma$ -algeber obsahujících  $\mathcal{F}$  a značíme ji  $\sigma(\mathcal{F})$ .

**1.11. Definice** (Borelovské množiny). Nechť  $X$  je topologický prostor a  $\mathcal{G}$  je systém všech jeho otevřených podmnožin. Potom definujeme  $\mathcal{B}(X)$  jako nejmenší  $\sigma$ -algebru obsahující  $\mathcal{G}$  (viz [definice 1.10](#)).  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(X)$  obsahuje kromě otevřených množin též všechny uzavřené množiny.  $\mathcal{B}(X)$  se nazývá *borelovská  $\sigma$ -algebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny*.

V  $\mathbb{R}$  jsou borelovské všechny intervaly, množina všech racionálních čísel, atd. Příklady neborelovských množin se konstruují velmi těžko.

Někdy je výhodné generovat  $\mathcal{B}(X)$  jinak než systémem všech otevřených množin. Na  $\overline{\mathbb{R}}$  je přirozená topologie generovaná intervaly  $(a, b)$ ,  $(a, \infty)$  a  $[-\infty, b)$ . Tudíž  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  je  $\sigma$ -algebra na  $\overline{\mathbb{R}}$  generovaná intervaly. Podobně  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  je generovaná intervaly.

**1.12. Definice** (Míra). Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor. Množinová funkce  $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  se nazývá *míra*, jestliže splňuje

$$(M1-1) \quad \mu(\emptyset) = 0,$$

$$(M2-2) \quad (\sigma\text{-additivita}) \text{ jestliže } A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \dots, \text{ jsou po dvou disjunktní, potom}$$

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j \mu(A_j).$$

Trojice  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  se nazývá *prostor s mírou*.

Zdůrazněme, že definice míry zahrnuje, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je  $\sigma$ -algebra.

1.14. **Definice** (Terminologie teorie míry). Míra  $\mu$  na měřitelném prostoru  $(X, \mathcal{S})$  se nazývá

- (a) *konečná*, jestliže  $\mu(X) < \infty$ ,
- (b)  *$\sigma$ -konečná*, jestliže existují  $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{S}$  tak, že  $\mu(X_j) < \infty$  a  $X = \bigcup_j X_j$ ,
- (c) *pravděpodobnostní*, jestliže  $\mu(X) = 1$ ,
- (d) *úplná*, jestliže každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná (a tudíž také míry nula).

Fráze *skoro všude* nebo  *$\mu$ -skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny  $X$ . Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina  $N \in \mathcal{S}$  míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny  $X \setminus N$ . Používá se zejména pro rovnost a nerovnosti mezi funkcemi a pro bodovou konvergenci posloupnosti funkcí.

2.1. **Definice** (Lebesgueova vnější míra). Nechť  $A \subset \mathbb{R}^n$  je libovolná množina. Definujme

$$(2) \quad \ell^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j) : Q_j \in \mathcal{I}_n, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset A \right\}.$$

Množinová funkce  $\ell^*: A \mapsto \ell^*(A)$ , definovaná na potenční množině  $2^{\mathbb{R}^n}$ , se nazývá *Lebesgueova vnější míra*. Součty, vyskytující se na pravé straně (2) se nazývají *horní součty* k  $\ell^*(A)$ .

Množinová funkce  $\ell^*$  umí měřit všechny množiny, ale není aditivní. Proto v dalším se budeme snažit z ní vytvořit aditivní funkci (dokonce míru, viz [definice 1.12](#)), za což zaplatíme zúžením definičního oboru. Výsledný obor všech měřitelných množin však již bude dostatečně bohatý pro všechny aplikace.

2.2. **Měřitelné množiny a Lebesgueova míra.** Řekneme, že množina  $A \subset \mathbb{R}^n$  je (*Lebesgueovsky měřitelná*, jestliže pro každý interval  $Q \in \mathcal{I}_n$  platí

$$(3) \quad \ell(Q) = \ell^*(Q \cap A) + \ell^*(Q \setminus A).$$

Množinu všech Lebesgueovsky měřitelných množin budeme značit  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$  a množinová funkce

$$\lambda: A \mapsto \ell^*(A), \quad A \in \mathfrak{M}$$

bude *Lebesgueova míra*.

2.3. **Oznámení věty.** Nechť  $Q \in \mathcal{I}_n$ . Potom  $Q \in \mathfrak{M}$  a  $\lambda(Q) = \ell^*(Q) = \ell(Q)$ .

2.4. **Oznámení věty.**  $\mathfrak{M}$  je  $\sigma$ -algebra obsahující všechny borelovské podmnožiny  $\mathbb{R}^n$  a  $\lambda$  je míra na  $\mathfrak{M}$ .

3.3. **Definice** (Měřitelné funkce). Nechť  $D \in \mathcal{S}$ . Řekneme, že funkce  $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  je  *$\mathcal{S}$ -měřitelná*, jestliže pro každý interval  $I \subset \overline{\mathbb{R}}$  je  $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$ . Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných funkciích*.

3.7. **Větička** (Měřitelnost vzoru). Nechť  $f$  je měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$  a  $A \subset \mathbb{R}$  je borelovská množina. Potom  $\{f \in A\} \in \mathcal{S}$ .

3.8. **Větička** (Měřitelnost složené funkce). Nechť  $f$  je měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$  a  $\varphi$  je spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině  $M \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Potom množina  $D' := \{f \in M\}$  je měřitelná a složená funkce  $\varphi \circ f$  je měřitelná na  $D'$ .

3.9. **Varování.** Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelný. Také není obecně pravda, že inverzní funkce k měřitelné funkci by byla měřitelná funkce. Viz [priklad 19.5](#)

3.10. **Věta** (Operace s měřitelnými funkcemi). Nechť funkce  $f, f_j$  jsou měřitelné funkce na  $D \in \mathcal{S}$ . Pak platí následující:

- (a) Funkce  $|f|, f^+, f^-, f^2$  jsou měřitelné na  $D$ ,  $1/f$  je měřitelná na  $\{f \neq 0\}$ .
- (b) Funkce  $f_1 + f_2, f_1 - f_2, f_1 f_2, f_1/f_2$  jsou měřitelné vždy na množině, kde učiněná operace dává smysl podle [úmluvy 3.2](#).
- (c) Funkce  $\sup_j f_j, \inf_j f_j, \limsup_j f_j, \liminf_j f_j$  jsou měřitelné na  $D$ .
- (d) Množina  $D'$  všech bodů, kde existuje  $\lim_j f_j$  je měřitelná a  $\lim_j f_j$  je měřitelná na  $D'$ .

**3.11. Jednoduché funkce.** Funkci  $f$  na  $D \in \mathcal{S}$  nazveme  $\mathcal{S}$ -jednoduchou, jestliže  $f$  je lineární kombinace charakteristických funkcí množin z  $\mathcal{S}$ , tj. existují-li množiny  $A_j \in \mathcal{S}$  a  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , tak, že

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Pokud bude jasné, jakou  $\sigma$ -algebru máme na mysli, budeme mluvit prostě o jednoduchých funkciích.

**3.12. Aproximace jednoduchými funkciemi.** Nechť  $(X, \mathcal{S})$  je měřitelný prostor. Nechť  $f$  je nezáporná měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$ . Potom existují nezáporné jednoduché funkce  $f_k \nearrow f$ . Navíc,  $f$  lze vyjádřit ve tvaru

$$(5) \quad f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j},$$

kde  $E_j \in \mathcal{S}$ .

**4.1. Definice** (Rozklad). Konečný soubor množin  $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{S}$  nazveme *rozkladem* nebo *Lebesgueovským dělením* množiny  $D \in \mathcal{S}$ , jestliže množiny  $A_j$  jsou po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{j=1}^m A_j = D.$$

**4.2. Terminologická poznámka.** Rozdíl mezi obyčejným “riemannovským” dělením a lebesgueovským spočívá hlavně v tom, že riemannovské dělení je pouze na intervaly, u lebesgueovského se dělí na libovolné měřitelné množiny. Tento rozdíl podstatně přispívá k bohatství třídy lebesgueovský integrovatelných funkcí.

**4.4. Definice** (Konstrukce integrálu). Nechť  $D, D' \in \mathcal{S}$  a  $f: D' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  je měřitelná funkce. Integrál  $\int_D f d\mu$  vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme  $D' = D$ .

1. Je-li  $f$  nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$(6) \quad \int_D f d\mu = \sup \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D, \right. \\ \left. 0 \leq \alpha_j \leq f \text{ na } A_j, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Součty vyskytující se v (6) nazýváme *dolními součty* k funkci  $f$ . Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován *vždy*, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy  $f$  je měřitelná funkce na  $D$ , definujeme

$$(7) \quad \int_D f d\mu = \int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu,$$

pokud rozdíl v (7) má smysl. Pokud

$$\int_D f^+ d\mu = \int_D f^- d\mu = \infty,$$

zůstává integrál funkce  $f$  nedefinován.

3. Je-li  $f$  měřitelná (přesně:  $\mathcal{S}$ -měřitelná) funkce na  $D' \neq D$  a  $\mu(D \setminus D') = 0$ , je účelné definovat

$$\int_D f d\mu = \int_{D \cap D'} f d\mu.$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě  $D'$ .

Je-li integrál  $\int_D f d\mu$  definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce  $f$  *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že  $\int_D f d\mu$  *konverguje* nebo že  $f$  je *integrovatelná*.

**4.7. Oznámení věty** (Lebesgueův integrál a Newtonův integrál). Nechť funkce  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  má na intervalu  $(a, b)$  primitivní funkci  $F$ .

(a) Je-li  $f$   $\lambda$ -integrovatelná na  $(a, b)$ , potom existují vlastní jednostranné limity  $F(b-)$  a  $F(a+)$  a platí

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a+).$$

(b) Jestliže  $f \geq 0$  a existují vlastní jednostranné limity  $F(b-)$  a  $F(a+)$ , pak  $f$  je  $\lambda$ -integrovatelná na  $(a, b)$ .

**4.8. Věta** (Různé vlastnosti Lebesgueova integrálu). Nechť  $D \in \mathcal{S}$  a  $f, g$  jsou měřitelné funkce na  $D$ .

(a) Je-li  $f \geq 0$ ,  $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$  a  $D_1 \subset D_2 \subset D$ , pak

$$\int_{D_1} f d\mu \leq \int_{D_2} f d\mu.$$

(b) Jestliže  $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$ ,  $D_1 \cap D_2 = \emptyset$  a  $D_1 \cup D_2 = D$ , pak

$$\int_D f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu.$$

(c) Je-li  $\int_D |f| d\mu < \infty$ , pak  $|f| < \infty$  skoro všude.

(d) Je-li  $\int_D |f| d\mu = 0$ , pak  $f = 0$  skoro všude.

(e) (monotonie) Jestliže  $f, g$  mají integrál a  $f \leq g$  skoro všude, pak

$$\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu.$$

(f) Je-li  $\int_D g d\mu < \infty$  a  $|f| \leq g$  skoro všude, pak  $f$  je integrovatelná.

**4.14. Důsledek** (Spojitá závislost na integračním oboru). Nechť  $D, E_k \in \mathcal{S}$ ,  $E_1 \subset E_2 \subset \dots, \bigcup_k E_k = D$ . Nechť  $f$  je nezáporná měřitelná funkce na  $D$ . Potom

$$\int_D f d\mu = \lim_k \int_{E_k} f d\mu.$$

**4.15. Věta** (Linearita integrálu). (a) Nechť  $f, g$  jsou měřitelné funkce na  $D \in \mathcal{S}$ . Potom

$$\int_D (f + g) d\mu = \int_D f d\mu + \int_D g d\mu,$$

má-li pravá strana smysl. (b) Nechť  $f$  je měřitelná funkce na  $D \in \mathcal{S}$  a  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Pokud  $f$  má integrál, pak

$$\int_D \gamma f d\mu = \gamma \int_D f d\mu.$$

**5.4. Věta** (vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). Nechť  $f$  je nezáporná spojitá funkce na intervalu  $(a, b)$ . Potom  $(N) \int_a^b f(x) dx$  konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce  $f$ . V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.

**5.5. Důsledek** (Diskuse vztahu mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). Nechť  $f$  je spojitá funkce na intervalu  $(a, b)$ .

(a) Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z  $f$  od  $a$  do  $b$ , konverguje i Newtonův a to absolutně.

(b) Jestliže Newtonův integrál z  $f$  od  $a$  do  $b$  konverguje absolutně, pak konverguje i Lebesgueův.

(c) Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce  $f$ , pak oba mají stejnou hodnotu.

(d) Jestliže Newtonův integrál z  $f$  od  $a$  do  $b$  konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.

**5.6. Věta** (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem). Nechť  $f$  je Riemannovsky integrovatelná funkce na  $[a, b]$ . Potom Lebesgueův integrál funkce  $f$  od  $a$  do  $b$  konverguje a je roven integrálu Riemannovu.

4.13. **Věta** (Levi, Lebesgue, monotone convergence theorem). Nechť  $\{f_j\}$  je posloupnost měřitelných funkcí na  $D \in \mathcal{S}$ ,  $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$ , a  $f = \lim f_j$ . Potom

$$(11) \quad \int_D f d\mu = \lim_j \int_D f_j d\mu.$$

6.1. **Lemma** (Fatouovo). Nechť  $D \in \mathcal{S}$  a  $\{f_j\}$  je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na  $D$ . Potom

$$(15) \quad \int_D \liminf_j f_j \leq \liminf_j \int_D f_j.$$

6.2. **Věta** (Lebesgueova, dominated convergence theorem). Nechť  $D \in \mathcal{S}$  a  $f, f_j, j = 1, 2, \dots$ , jsou měřitelné funkce na  $D$ . Nechť posloupnost  $\{f_j\}$  konverguje skoro všude k  $f$ . Nechť existuje integrovatelná funkce  $g$  (takzvaná majoranta) tak, že

$$(16) \quad |f_j(x)| \leq g(x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad x \in D.$$

Potom

$$(17) \quad \int_D f = \lim_j \int_D f_j.$$

14.1. **Definice** (Součin měr). Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$ , a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou. Nechť míry  $\mu, \nu$  jsou  $\sigma$ -konečné. Uvažujme systém  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$  všech podmnožin  $X \times Y$  tvaru  $A \times B$ , kde  $A \in \mathcal{S}$ ,  $B \in \mathcal{T}$ . Takovým množinám budeme říkat *měřitelné obdélníky*. Na  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$  definujeme množinovou funkci  $\mu \times \nu$  předpisem

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B).$$

Systém množin  $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$  generuje tzv. *součinovou  $\sigma$ -algebrou*  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} := \sigma(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$ . V dalším ([věta 14.5](#)) uvidíme, že existuje právě jedna míra  $\rho$  na  $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$  tak, že

$$\rho(A \times B) = \mu(A) \nu(B), \quad A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}.$$

Tuto míru budeme nazývat *součin měr*  $\mu$  a  $\nu$  a značit  $\mu \otimes \nu$ . Její zúplnění budeme nazývat *úplný součin měr* a značit  $(\mathcal{S} \overline{\otimes} \mathcal{T}, \mu \overline{\otimes} \nu)$ .

14.9. **Definice** (Řezy). Nechť  $M \subset X \times Y$ . Značíme

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in Y : (x, y) \in M\}, & x \in X, \\ M^{*,y} &= \{x \in X : (x, y) \in M\}, & y \in Y. \end{aligned}$$

Tyto množiny se nazývají *řezy*.

14.11. **Věta** (Fubiniova). Nechť  $(X, \mathcal{S}, \mu)$  a  $(Y, \mathcal{T}, \nu)$  jsou prostory s mírou. Nechť míry  $\mu$  a  $\nu$  jsou úplné a  $\sigma$ -konečné. Buď  $(\mathcal{R}, \rho)$  součin měr  $\mu$  a  $\nu$  a  $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\rho})$  jejich úplný součin. Nechť  $f$  je  $\overline{\rho}$ -měřitelná funkce na  $\overline{\rho}$ -měřitelné množině  $M \subset X \times Y$ . Předpokládejme, že integrál

$$\int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y)$$

má smysl. Potom pro  $\mu$ -skoro všechna  $x$  má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y),$$

funkce  $g$  má integrál

$$\int_X g d\mu$$

a

$$(33) \quad \int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y) = \int_X g d\mu = \int_X \left( \int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

**15.3. Věta** (o substituci). Nechť  $G \subset \mathbb{R}^n$  je otevřená množina a  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  je prosté regulární zobrazení. Nechť  $u$  je funkce na  $M \subset \varphi(G)$ . Potom

$$\int_M u(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t)) |J\varphi(t)| dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

## 2 Banachovy a Hilbertovy prostory

**Definice 1.** Nechť  $X$  je vektorový prostor nad  $\mathbb{K}$ . Funkci  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  nazýváme *normou* na  $X$ , pokud

- (i)  $\|x\| = 0$  právě tehdy, když  $x = 0$ ,
- (ii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  pro všechna  $x, y \in X$ ,
- (iii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$  pro všechna  $x \in X$  a  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

Dvojici  $(X, \|\cdot\|)$  nazýváme *normovaný lineární prostor*.

**Tvrzení 2.** Nechť  $(X, \|\cdot\|)$  je normovaný lineární prostor nad  $\mathbb{K}$ .

(a) Funkce  $\rho(x, y) = \|x - y\|$  pro  $x, y \in X$  je translačně invariantní metrika na  $X$ .

**Definice 3.** *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

**Tvrzení 4.** Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y$  jeho podprostor.

- (a) Je-li  $Y$  Banachův, pak  $Y$  je uzavřený v  $X$ .
- (b) Je-li  $X$  Banachův, pak  $Y$  je Banachův, právě když  $Y$  je uzavřený v  $X$ .

**Definice 7** (ekvivalentní normy). Nechť  $X$  je vektorový prostor a  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  jsou normy na  $X$ . Řekneme, že normy  $\|\cdot\|_1$  a  $\|\cdot\|_2$  jsou *ekvivalentní*, pokud existují  $A, B > 0$  takové, že pro každé  $x \in X$  platí  $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$ .

**Věta 8.** Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

**Definice 65.** *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru  $X$  nad  $\mathbb{K}$  rozumíme funkci  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  s následujícími vlastnostmi:

- (i) funkce  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  je lineární pro každé  $y \in X$ ,
- (ii)  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  pro každé  $x, y \in X$ ,
- (iii)  $\langle x, x \rangle \geq 0$  pro každé  $x \in X$ ,
- (iv)  $\langle x, x \rangle = 0$  právě tehdy, když  $x = 0$ .

Dvojici  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  nazýváme *prostor se skalárním součinem*.

**Definice 67.** Prostor se skalárním součinem  $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud  $(X, \|\cdot\|)$  je Banachův prostor, kde  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ .

**Důsledek 72.** Nechť  $X, Y$  jsou prostory se skalárním součinem a  $T : X \rightarrow Y$  je lineární izometrie do. Pak  $T$  zachovává skalární součin, tj.  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$  pro každé  $x, y \in X$ .

**Věta 73.** Nechť  $X, Y$  jsou prostory se skalárním součinem nad  $\mathbb{K}$ . Pak na prostoru  $X \oplus_2 Y$  existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na  $X$  a  $Y$ , a který indukuje normu  $\|\cdot\|_2$ . Speciálně, jsou-li  $X, Y$  Hilbertovy prostory, pak  $X \oplus_2 Y$  je Hilbertův prostor.

Jsou-li  $(X, \|\cdot\|_X)$  a  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normované lineární prostory nad  $\mathbb{K}$  a  $1 \leq p \leq \infty$ , pak funkce  $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$ , kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

je norma na vektorovém prostoru  $X \times Y$ .

**Definice 52.** Nechť  $(X, \|\cdot\|_X)$  a  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  jsou normované lineární prostory a  $1 \leq p \leq \infty$ . Pak prostorem  $X \oplus_p Y$  rozumíme normovaný lineární prostor  $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$ , kde norma  $\|\cdot\|_p$  je daná vzorcem (1).

Připomeňme si, že zobrazení  $T: X \rightarrow Y$  mezi vektorovými prostory  $X, Y$  nad  $\mathbb{K}$  se nazývá *lineární*, pokud  $T(x + y) = T(x) + T(y)$  a  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$  pro všechna  $x, y \in X$  a  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

**Tvrzení 37.** Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T: X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i)  $T$  je spojité.
- (ii)  $T$  je spojité v jednom bodě.
- (iii)  $T$  je spojité v 0.
- (iv) Existuje  $C \geq 0$  tak, že  $\|T(x)\| \leq C\|x\|$  pro každé  $x \in X$ .
- (v)  $T$  je lipschitzovské.
- (vi)  $T$  je stejnomořně spojité.
- (vii)  $T(A)$  je omezená pro každou omezenou  $A \subset X$ .
- (viii)  $T(B_X)$  je omezená.
- (ix)  $T(U(0, \delta))$  je omezená pro nějaké  $\delta > 0$ .

Prostor  $\mathcal{L}(X, Y)$  s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

**Věta 41.** Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor a  $Y$  je Banachův prostor. Pak  $\mathcal{L}(X, Y)$  je Banachův prostor.

**Definice 42.** Nechť  $X$  je normovaný lineární prostor nad  $\mathbb{K}$ . Prostor  $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$  značíme  $X^*$  a nazýváme jej *duálním prostorem* k prostoru  $X$ .

**Definice 45.** Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Říkáme, že  $T$  je

- *izomorfismus*  $X$  na  $Y$  (nebo jen izomorfismus), pokud  $T$  je bijekce  $X$  na  $Y$  a inverzní operátor  $T^{-1}$  je spojity;
- *izomorfismus*  $X$  do  $Y$  (nebo jen *izomorfismus do*), pokud  $T$  je izomorfismus  $X$  na  $\text{Rng } T$ ;
- *izometrie*  $X$  na  $Y$  (nebo jen izometrie), pokud  $T$  je na a  $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$  pro všechna  $x, y \in X$ ;
- *izometrie*  $X$  do  $Y$  (nebo jen *izometrie do*), pokud  $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$  pro všechna  $x, y \in X$ .

Říkáme, že prostory  $X$  a  $Y$  jsou

- *izomorfní*, pokud existuje lineární izomorfismus  $X$  na  $Y$ ;
- *izometrické*, pokud existuje lineární izometrie  $X$  na  $Y$ .

Říkáme, že prostor  $X$  je

- *izomorfně vnořen* do  $Y$ , pokud existuje lineární izomorfismus  $X$  do  $Y$ ;
- *izometricky vnořen* do  $Y$ , pokud existuje lineární izometrie  $X$  do  $Y$ .

**Tvrzení 47.** Nechť  $X, Y$  jsou normované lineární prostory.

- (a)  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty  $C_1, C_2 > 0$  takové, že  $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$  pro každé  $x \in X$ .
- (b) Je-li  $X$  izomorfní s  $Y$  a  $X$  je Banachův, je i  $Y$  Banachův.
- (c) Je-li  $X$  Banachův a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je izomorfismus do, pak  $\text{Rng } T$  je uzavřený v  $Y$ .

**Věta 49.** Nechť  $X, \widehat{X}$  a  $Y$  jsou normované lineární prostory,  $X$  je hustý v  $\widehat{X}$  a  $Y$  je úplný. Nechť dále  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pak existuje právě jeden operátor  $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$  rozšiřující  $T$ , tj.  $\widehat{T}|_X = T$ . Navíc platí  $\|\widehat{T}\| = \|T\|$ .

**Věta 124** (Princip stejnoměrné omezenosti). Nechť  $X$  je Banachův prostor,  $Y$  je normovaný lineární prostor a  $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i)  $\sup\{\|T\|; T \in \mathcal{A}\} < +\infty$ .
- (ii) Pro každé  $x \in X$  je  $\sup\{\|T(x)\|; T \in \mathcal{A}\} < +\infty$ .

**Definice 126.** Zobrazení  $f: X \rightarrow Y$  mezi metrickými prostory  $X, Y$  se nazývá otevřené, pokud  $f(G)$  je otevřená množina v  $Y$  pro každou otevřenou množinu  $G \subset X$ .

**Věta 127** (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930). Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  je na. Pak  $T$  je otevřené zobrazení.

**Důsledek 129** (S. Banach, 1929). Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Pak  $T$  je izomorfismus  $X$  na  $Y$ , právě když  $T$  je prostý a na.

**Věta 132** (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932). Nechť  $X, Y$  jsou Banachovy prostory a  $T: X \rightarrow Y$  je lineární zobrazení. Pak  $T$  je spojitý, právě když má uzavřený graf.

### 3 Hilbertovy prostory

**Definice 74.** Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem. Prvky  $x, y \in X$  se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud  $\langle x, y \rangle = 0$ . Tento fakt značíme též  $x \perp y$ . Prvek  $x$  je ortogonální (kolmý) k množině  $A \subset X$ , pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme  $x \perp A$ . Množiny  $A, B \subset X$  jsou ortogonální, pokud  $x \perp y$  pro každé  $x \in A, y \in B$ , což značíme  $A \perp B$ . Množina  $A^\perp = \{x \in X; x \perp A\}$  se nazývá ortogonální doplněk  $A$ .

**Věta 81.** Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem a  $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$  je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada  $\sum_{n=1}^\infty x_n$  konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.

**Definice 82.** Je-li  $X$  prostor se skalárním součinem a  $A \subset X$ , řekneme, že množina  $A$  je

- ortonormální, pokud  $A \subset S_X$  a  $x \perp y$  pro všechna  $x, y \in A, x \neq y$ ;
- maximální ortonormální, pokud  $A$  je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující  $A$  různá od  $A$ ;
- ortonormální báze, pokud  $A = \{e_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$  je ortonormální množina a každé  $x \in X$  lze vyjádřit jako  $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$  pro nějaké skaláry  $x_\gamma$ .

**POZNÁMKA** (důležitá). Uvědomme si, že v definici ortonormální báze lze podle Věty 102 v případě  $\Gamma = \mathbb{N}$  podmítku  $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$  (tj. předpoklad, že řada  $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$  konverguje bezpodmínečně) nahradit podmírkou  $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$  (tj. obyčejnou konvergencí). Podobně lze v následujících tvrzeních všude, kde předpokládáme konvergenci závěrné řady  $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ , kde  $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  je ortonormální systém, tento předpoklad v případě  $\Gamma = \mathbb{N}$  nahradit předpokladem obyčejné konvergence řady  $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ .

**Věta 84.** Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.

**Důsledek 87.** Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.

**Věta 89** (Besselova nerovnost). Je-li  $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  ortonormální soustava v prostoru  $X$  se skalárním součinem, platí  $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$  pro každé  $x \in X$ .

**Věta 90.** Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem a  $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  je ortonormální systém v  $X$ . Uvažujme následující tvrzení:

- (i)  $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$  pro každé  $x \in X$  (tzv. Parsevalova rovnost).
- (ii)  $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$  pro každé  $x \in X$ .
- (iii)  $\{e_\gamma\}$  je ortonormální báze.
- (iv)  $X = \overline{\text{span}}\{e_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ .
- (v)  $\{e_\gamma\}$  je maximální ortonormální systém.

Pak (i)  $\Leftrightarrow$  (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (v). Je-li  $X$  Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

- Pro Hilbertův prostor  $L_2([0, 2\pi])$  je systém  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx); n \in \mathbb{N} \right\}$  ortonormální bází. Ortonormalita plyne z klasické teorie Fourierových řad. Hustota lineárního obalu plyne z Fejérový<sup>19</sup> věty zkombinované s důsledkem Luzinovy věty. Alternativně lze ukázat, že trigonometrický ortonormální systém je maximální: Nechť  $f \in L_2([0, 2\pi])$  je kolmé ke všem prvkům tohoto systému. Protože též  $f \in L_1([0, 2\pi])$ , můžeme spočítat Fourierovy koeficienty příslušné funkci  $f$ . Ty jsou ovšem díky kolmosti rovny 0. Podle věty o jednoznačnosti to znamená, že  $f = 0$  s. v., a tedy  $f = 0$  v  $L_2([0, 2\pi])$ .

Nyní též vidíme, proč se řadě v (ii) ve Větě 112 říká abstraktní Fourierova řada: Pro bázi popsanou výše je to totiž formálně klasická Fourierova řada a čísla  $\langle x, e_\gamma \rangle$  jsou přesně klasické Fourierovy koeficienty. Tato Fourierova řada ovšem konverguje ve smyslu prostoru  $L_2([0, 2\pi])$ , nikoli bodově, jak se studuje v klasické teorii.

**Důsledek 91.** Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

**Věta 92** (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). Je-li  $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$  ortonormální báze Hilbertova prostoru  $H$ , je zobrazení  $T: H \rightarrow \ell_2(\Gamma)$ ,  $T(x) = \{\langle x, e_\gamma \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$  izometrie  $H$  a  $\ell_2(\Gamma)$ . Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru  $\ell_2(\Gamma)$  pro vhodnou množinu  $\Gamma$ .

**Tvrzení 93.** Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem. Je-li  $\dim X = n \in \mathbb{N}$ , pak každá ortonormální báze má  $n$  prvků. Je-li  $\dim X = \infty$  a  $X$  je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.

**Věta 78** (Frigyes Riesz, 1934). Nechť  $C$  je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru  $H$ . Pak pro každé  $x \in H$  existuje právě jedno  $y \in C$  tak, že  $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$ .

**Lemma 79** (F. Riesz, 1934). Nechť  $X$  je prostor se skalárním součinem,  $Y$  je jeho podprostor a  $x \in X$ . Pak  $y \in Y$  splňuje  $\|x - y\| = \text{dist}(x, Y)$  právě tehdy, když  $x - y \in Y^\perp$ .

## 4 Fourierovy řady

**Značení:** Symbolem  $\mathcal{P}_{2\pi}$  značíme množinu všech lokálně integrovatelných  $2\pi$ -periodických funkcí na  $\mathbf{R}$ .

**Definice.** Nechť  $a_k$ ,  $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  a  $b_k$ ,  $k \in \mathbf{N}$ , jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*. Je-li navíc  $n \in \mathbf{N}$ , pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickým polynomem stupně  $n$* .

**Věta L 17.1** (Fourierovy vzorce). Nechť  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  a  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$  jsou posloupnosti reálných čísel a řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

konverguje stejnoměrně k funkci  $f$  na  $\mathbf{R}$ . Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

**Definice.** Nechť  $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ . Pak posloupnosti reálných čísel  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  a  $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ , definované předpisy

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbf{N},$$

nazýváme *Fourierovými koeficienty* funkce  $f$ . Trigonometrickou řadu

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Fourierovou řadou* funkce  $f$ . Vztah mezi funkcí  $f$  a její Fourierovou řadou  $Sf$  značíme symbolem  $f \sim Sf$ . Pro  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$  dále definujeme *částečný součet Fourierovy řady* funkce  $f$  předpisem

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbf{R}.$$

**Věta L 17.9** (Fourierovy koeficienty určují funkci). Nechť  $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$  mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom  $f = g$  skoro všude.

**Důsledek Vět 11.10 a 11.12:** Nechť  $f \in L^2(0, 2\pi)$  a  $a_k, b_k$  jsou Fourierovy koeficienty  $f$ . Pak platí

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve smyslu rovnosti rovnosti  $L^2$  funkcí. Tedy v příslušném metrickém prostoru platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Navíc platí Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

**Definice.** Nechť  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ . Potom funkci

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Dirichletovým jádrem*.

**Věta T 17.3** (Riemannovo–Lebesgueovo lemma). Nechť  $(a, b) \subset \mathbf{R}$  je omezený interval a nechť  $f \in L^1(a, b)$ . Potom

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0.$$

**Důsledek:** Jsou-li posloupnosti  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  a  $\{b_n\}_{n=1}^\infty$  Fourierovými koeficienty nějaké funkce  $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ , pak  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ .

**Věta L 17.5** (Diniovo kritérium). Nechť  $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$  a nechť  $x \in \mathbf{R}$ . Nechť existují vlastní limity  $f(x+)$  a  $f(x-)$  a nechť dále existují vlastní limity

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}.$$

Potom řada  $Sf$  konverguje v bodě  $x$  a platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, má-li funkce  $f$  konečné jednostranné derivace v bodě  $x$ , potom  $Sf(x) = f(x)$ .

**Definice.** Nechť  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  je uzavřený interval a nechť  $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ . Definujme veličiny

- $V^+(f; a, b) := \sup_D \{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+\}$  (kladná variace),
- $V^-(f; a, b) := \sup_D \{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-\}$  (záporná variace),
- $V(f; a, b) := \sup_D \{\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|\}$  (totální variace),

kde supremum bereme přes všechna dělení  $D = \{x_i\}_{i=0}^n$  intervalu  $[a, b]$  tvaru  $a = x_0 < \dots < x_n = b$ . Dále zaveme značení

$$\begin{aligned} V_f^+(x) &= V^+(f; a, x), \\ V_f^-(x) &= V^-(f; a, x), \\ V_f(x) &= V(f; a, x). \end{aligned}$$

Řekneme, že funkce  $f$  má na intervalu  $I \subset \mathbf{R}$  omezenou variaci, jestliže  $V(f; a, b) < \infty$ . Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu  $[a, b]$  značíme  $\text{BV}([a, b])$ .

**Věta T 17.6** (Jordanovo–Dirichletovo kritérium). Nechť  $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$  a nechť  $f \in \text{BV}([0, 2\pi])$ . Potom

(a) pro každé  $x \in [0, 2\pi]$  konverguje Fourierova řada  $Sf(x)$  a platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2};$$

(b) je-li funkce  $f$  navíc spojitá na  $(a, b) \subset [0, 2\pi]$ , potom

$$S_n f \xrightarrow{\text{loc}} f \quad \text{na } [a, b].$$

**Definice.** Nechť  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že  $a_n$  konverguje k  $a \in \mathbf{R}$  v Cesarově smyslu, pokud pro posloupnost

$$\sigma_n = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n+1} \quad \text{konverguje k } a.$$

**Definice.** Nechť  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ . Potom funkci

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme Fejérovým jádrem.

**Definice.** Nechť  $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ ,  $x \in \mathbf{R}$  a nechť  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ . Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme  $n$ -tým částečným Fejérovým součtem funkce  $f$ .

**Věta T 17.7** (Fejérova). Nechť  $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ .

(a) Jestliže pro nějaké  $x \in \mathbf{R}$  existují vlastní limity  $f(x+)$  a  $f(x-)$ , potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

(b) Je-li funkce  $f$  spojitá na nějakém intervalu  $(a, b) \subset \mathbf{R}$ , potom

$$\sigma_n f \xrightarrow{\text{loc}} f \quad \text{na } (a, b).$$

**Věta L 17.8** (Weierstrassova - trigonometrická verze). Nechť  $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$  je spojitá na  $\mathbf{R}$ . Nechť  $\varepsilon > 0$ . Potom existuje trigonometrický polynom  $T \in \mathcal{T}$  splující

$$\|f - T\|_{C(\mathbf{R})} < \varepsilon.$$

## 5 Funkce komplexní proměnné

**Definice:**

- (1) **Komplexní funkci komplexní proměnné** rozumíme zobrazení  $f : M \rightarrow \mathbf{C}$ , kde  $M \subset \mathbf{C}$ .
- (2) Nechť  $f$  je komplexní funkce komplexní proměnné a  $a \in \mathbf{C}$ . **Derivaci funkce  $f$  podle komplexní proměnné v bodě  $a$**  (stručněji **derivaci funkce  $f$  v bodě  $a$** ) rozumíme (komplexní) číslo

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud limita na pravé straně existuje (v  $\mathbf{C}$ ).

**Poznámka:**

- (1) Pro derivaci podle komplexní proměnné platí věty o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce ve stejném podobě jako pro derivaci v  $\mathbf{R}$ .
- (2) Má-li  $f$  v bodě  $a \in \mathbf{C}$  derivaci podle komplexní proměnné, je v bodě  $a$  spojitá.
- (3) Je-li  $f$  komplexní funkce komplexní proměnné,  $g$  komplexní funkce reálné proměnné a  $x \in \mathbf{R}$ , pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

pokud obě derivace na pravé straně existují.

### Věta 3:

Nechť  $f$  je komplexní funkce komplexní proměnné. Označme  $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$  funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v  $\mathbb{R}^2$  odpovídající  $f$  při ztotožnění  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{R}^2$ ; tj. takovou, že

$$f(x + iy) = \tilde{f}_1(x, y) + i\tilde{f}_2(x, y)$$

pro  $x + iy$  z definičního oboru  $f$ .

- (1) **(Cauchy-Riemannovy podmínky)** Nechť  $z = a + ib$ , kde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Pak  $f$  má v bodě  $z$  derivaci podle komplexní proměnné, právě když  $\tilde{f}$  má v bodě  $(a, b)$  totální diferenciál a platí

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a, b) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b).$$

- (2) Existuje-li  $f'(z)$ , je Jacobiho determinant  $\tilde{f}$  v bodě  $(a, b)$  roven  $|f'(z)|^2$ . Speciálně, Jakobiho matice  $\tilde{f}$  v bodě  $(a, b)$  je regulární, právě když  $f'(z) \neq 0$ .

### Definice:

- Nechť  $M \subset \mathbb{C}$ . Řekneme, že funkce  $f$  je **holomorfní na množině  $M$** , jestliže existuje otevřená množina  $G \supset M$  taková, že  $f$  má derivaci (podle komplexní proměnné) v každém bodě množiny  $G$ .
- Funkce holomorfní na  $\mathbb{C}$  se nazývá **celá funkce**.

**Cestou** neboli **po částech hladkou křivkou** v  $\mathbb{C}$  rozumíme křivku  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , pro kterou existuje takové dělení  $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ , že pro každé  $j = 1, \dots, n$  je funkce  $\varphi$  třídy  $C^1$  na  $[s_{j-1}, s_j]$  (tj. derivace  $\varphi'$  je spojitá na  $(s_{j-1}, s_j)$  a má v krajních bodech  $s_{j-1}$  a  $s_j$  vlastní jednostranné limity).

Je-li navíc  $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  spojitá funkce, definujeme **integrál funkce  $f$  podél cesty  $\varphi$**  vzorcem

$$\int_{\varphi} f = \int_{\varphi} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt,$$

kde integrál na pravé straně je základní Riemannův, tj. roven

$$\sum_{j=1}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

### Věta 3:

Nechť  $G \subset \mathbb{C}$  je otevřená,  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  je spojitá funkce a  $F$  je primitivní funkce k  $f$  na  $G$ . Pak pro každou cestu  $\varphi : [a, b] \rightarrow G$  platí  $\int_{\varphi} f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$ .

Speciálně, je-li  $\varphi$  uzavřená cesta v  $G$ , pak  $\int_{\varphi} f = 0$ .

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená.  $\Omega$  je **souvislá** (tj. pro každou neprázdnou  $G \subset \Omega$  takovou, že  $G$  i  $\Omega \setminus G$  jsou otevřené množiny, platí  $G = \Omega$ ).

### Definice:

Otevřenou souvislou podmnožinu  $\mathbb{C}$  nazýváme **oblast**.

**Definice:**

Nechť  $\varphi$  je uzavřená cesta a  $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ . Pak **index bodu  $a$  vzhledem ke křivce  $\varphi$**  je definován vzorcem

$$\text{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z-a} dz.$$

**Definice.** Nechť  $M \subset \mathbb{C}$  je množina a  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Říkáme, že bod  $z_0$  je **hromadným bodem množiny  $M$** , jestliže každé okolí bodu  $z_0$  obsahuje nějaký bod množiny  $M$  různý od  $z_0$ . Je-li navíc  $\Omega \subset \mathbb{C}$  množina obsahující  $M$ , říkáme, že  $M$  je **izolovaná v  $\Omega$** , jestliže nemá v  $\Omega$  žádný hromadný bod.

**Definice.** Nechť  $G \subset \overline{\mathbb{C}}$  je neprázdná otevřená množina.

- (i) Symbolem  $H(G)$  budeme značit množinu všech komplexních funkcí holomorfních na  $G$ .
- (ii) Funkce  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  se nazývá **meromorfni**, jestliže je spojitá na  $G$  a existuje množina  $M \subset G$ , která je izolovaná v  $G$  (tj. nemá v  $G$  hromadný bod), taková, že  $f$  je holomorfní na  $G \setminus M$ .
- (iii) Množinu všech funkcí meromorfních na  $G$  značíme  $M(G)$ .

**Poznámka.** V bodech výjimečné množiny  $M$  z definice má meromorfní funkce **nejvýše pól** (tj. buď pól nebo odstranitelnou singularitu).

**Definice.** **Řetězcem** rozumíme výraz tvaru

$$(*) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n,$$

kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  jsou cesty. Řetězec  $(*)$  se nazývá **cykl**, pokud jsou cesty  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  uzavřené.

- **obraz řetězce  $\Gamma$  jako**

$$\langle \Gamma \rangle = \langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle \cup \cdots \cup \langle \varphi_n \rangle;$$

- je-li  $f : \langle \Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  spojitá, pak **integrál funkce  $f$  podél  $\Gamma$**  jako

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f + \cdots + \int_{\varphi_n} f;$$

Je-li  $\Gamma$  cykl a  $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$ , pak **index bodu  $a$  vzhledem k cyklu  $\Gamma$**  je

$$\text{ind}_{\Gamma} a = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z-a} dz.$$

**Věta 2** (globální Cauchyova věta). Nechť  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená množina,  $\Gamma$  cykl takový, že  $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$  a pro každé  $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  je  $\text{ind}_\Gamma a = 0$ . Pak pro každou funkci  $f$  holomorfní na  $\Omega$  platí

$$\int_\Gamma f = 0$$

a

$$f(z) \cdot \text{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw, \quad z \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle.$$

**Věta 14** (Cauchyův vzorec pro vyšší derivace). Nechť  $f$  je holomorfní na  $\overline{U(a, r)}$  (kde  $a \in \mathbb{C}$  a  $r > 0$ ). Pak  $f$  má na  $U(a, r)$  derivace všech řádů a pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $z \in U(a, r)$  platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw,$$

kde  $\varphi$  je kladně orientovaná kružnice o středu  $a$  a poloměru  $r$ .

**Důsledek.** Je-li  $f$  holomorfní na množině  $M \subset \mathbb{C}$ , je i  $f'$  holomorfní na  $M$ .

### Věta 21: O jednoznačnosti

Nechť  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je oblast a  $f, g$  jsou funkce holomorfní na  $\Omega$ . Jestliže množina

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v  $\Omega$  (tj. není izolovaná v  $\Omega$ ), pak  $f = g$  na  $\Omega$ .

### Definice:

Laurentovou řadou o středu  $a \in \mathbb{C}$  rozumíme symbol

$$(*) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

kde  $a_n \in \mathbb{C}$  pro každé  $n \in \mathbb{Z}$ . Regulární částí řady  $(*)$  rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n,$$

hlavní částí řady  $(*)$  rozumíme symbol

$$(**) \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - a)^n.$$

Říkáme, že **hlavní část řady (\*) konverguje (v bodě  $z$ , absolutně, stejnoměrně na množině  $M$ , lokálně stejnoměrně na množině  $M$ , atp.)**, pokud příslušnou vlastnost má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}.$$

Součet této řady nazveme **součtem hlavní části řady (\*)** a značíme jej rovněž (\*\*).

Říkáme, že **řada (\*) konverguje (v bodě  $z$ , absolutně, stejnoměrně na množině  $M$ , lokálně stejnoměrně na množině  $M$ , atp.)**, pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. **Součtem řady (\*)** rozumíme součet součtu regulární části a součtu hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n.$$

### Definice:

Nechť  $0 \leq r < R \leq +\infty$  a  $a \in \mathbb{C}$ . Pak označme

$$P(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Tuto množinu nazveme **mezikružím o středu  $a$ , vnitřním poloměru  $r$  a vnějším poloměru  $R$** .

### Věta 3:

Mějme Laurentovu řadu (\*). Pak existují  $r, R \in [0, +\infty]$ , pro která platí:

- Regulární část řady (\*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na  $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$  a diverguje pro  $|z-a| > R$ .
- Hlavní část řady (\*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na  $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$  a diverguje pro  $|z-a| < r$ .

Je-li  $r < R$ , pak řada (\*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na mezikruží  $P(a, r, R)$  a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží pak nazýváme **mezikružím konvergence řady (\*)**.

### Věta 6:

Nechť  $f$  je holomorfní funkce v mezikruží  $P(a, r, R)$ , kde  $a \in \mathbb{C}$  a  $r < R$ . Pak  $f$  je v  $P(a, r, R)$  součtem Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

o středu  $a$ , která na  $P(a, r, R)$  konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde  $\rho \in (r, R)$  je libovolné a  $\varphi_\rho$  je jako ve Větě 4.

**Definice:**

Nechť  $f$  je holomorfní funkce v  $P(a, R)$ , kde  $a \in \mathbb{C}$  a  $R > 0$ . Nechť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

je Laurentova řada funkce  $f$  v  $P(a, R)$ . Pak **reziduem funkce  $f$  v bodě  $a$**  rozumíme číslo

$$\text{res}_a f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} f,$$

kde  $\rho \in (0, R)$  a  $\varphi_\rho$  je jako ve Větě 4.

**Věta 3** (obecná reziduová věta). Nechť  $\Omega \subset \mathbb{C}$  je otevřená množina,  $\Gamma$  cykl takový, že  $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$  a pro každé  $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$  je  $\text{ind}_\Gamma a = 0$ . Nechť  $M \subset \Omega$  je izolovaná v  $\Omega$ ,  $M \cap \langle \Gamma \rangle = \emptyset$  a  $f$  je funkce holomorfní v  $\Omega \setminus M$ . Pak platí:

$$\int_{\Gamma} f = 2\pi i \sum_{a \in M} \text{ind}_\Gamma a \cdot \text{res}_a f.$$

V sumě na pravé straně přitom je jen konečně mnoho nenulových sčítanců.