Funkcionální analýza

Michal Johanis
Jiří Spurný

2020/1/20

Obsah

Kapitola 1

Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

Budeme pracovat s vektorovými prostory výhradně nad tělesy $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Pokud nebude řečeno jinak, budou tvrzení platit jak pro reálné, tak pro komplexní prostory. Bude-li třeba použité těleso označit, použijeme symbol $\mathbb{K}$[1], tj. $\mathbb{K}$ značí buď těleso $\mathbb{R}$, nebo těleso $\mathbb{C}$. Ještě jinak a formálněji: Před každým tvrzením obsahujícím symbol $\mathbb{K}$ si lze představit větu „Nechť $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.“. Jestliže se v definici nebo tvrzení objeví více vektorových prostorů, pak budeme automaticky předpokládat, že jsou všechny nad stejným tělesem, pokud nebude řečeno jinak.

Je-li X komplexní vektorový prostor, pak jej lze chápat také jako reálný vektorový prostor (operaci násobení skalárem zúžíme pouze na $\mathbb{R}$). Tuto „reálnou verzi“ budeme označovat $X_{\mathbb{R}}$.

DEFINICE 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0, +\infty)$ nazýváme normou na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaným lineárním prostorem.

Vlastnost (ii) se nazývá *trojúhelníková nerovnost*. Snadno z ní odvodíme následující verzi:

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

pro všechna $x, y \in X$. Indukcí též obdržíme $\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$ pro libovolná $x_1, \dots, x_n \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.

TVRZENÍ 2. *Nechť* $(X, \|\cdot\|)$ *je normovaný lineární prostor nad* $\mathbb{K}$.

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ *pro* $x, y \in X$ *je translačně invariantní metrika na* X.
(b) Norma je 1*-lipschitzovská*[2] *(a tedy spojitá) funkce na* X.
(c) Zobrazení $+\colon X \times X \to X$ *a* $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ *jsou spojitá.*

Všimněme si, že tvrzení (c) lze chápat jako větu o aritmetice limit pro posloupnosti v normovaných lineárních prostorech.

DŮKAZ. (a) Funkce $\rho\colon X \times X \to [0, +\infty)$ je translačně invariantní metrika, neboť

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x),$$
$$\rho(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \text{a}$$
$$\rho(x + z, y + z) = \|x + z - (y + z)\| = \|x - y\| = \rho(x, y)$$

pro libovolná $x, y, z \in X$. Též snadno vidíme, že $0 = \rho(x, y) = \|x - y\|$, právě když $x = y$.

(b) Máme $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| = \rho(x, y)$ pro libovolná $x, y \in X$.

(c) Připomeňme, že v součinu metrických prostorů funguje konvergence posloupností „po souřadnicích“. Chceme tedy ukázat, že pokud $\{x_n\} \subset X$ a $\{y_n\} \subset X$ splňují $x_n \to x \in X$ a $y_n \to y \in X$, pak $x_n + y_n \to x + y$. To je ovšem snadné: $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$. Podobně,

[1] Z německého *der Körper*, tj. těleso.

[2] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz

předpokládejme, že $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{K}$ a $\{x_n\} \subset X$ splňují $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{K}$ a $x_n \to x \in X$. Pak $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\| \leq |\alpha_n| \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \|x\| \to 0$.

□

Nechť X je normovaný lineární prostor. Budeme používat následující značení:

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Nebude-li hrozit nedorozumění, v jakém prostoru se koule bere, budeme zpravidla index X u koulí $B_X(x, r)$ a $U_X(x, r)$ vynechávat.

Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pro $A, B \subset X$, $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ definujeme $\alpha A = \{\alpha y;\ y \in A\}$, $x + A = \{x + y;\ y \in A\}$ a $A + B = \{y + z;\ y \in A, z \in B\}$. Je snadné si rozmyslet, že platí $B(x, r) = x + B(0, r)$ a $B(0, r) = rB(0, 1) = rB_X$ pro libovolné $x \in X$, $r > 0$ a analogicky pro otevřené koule. Dále není obtížné si rozmyslet, že pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí $\overline{U(x, r)} = B(x, r)$ a $\operatorname{Int} B(x, r) = U(x, r)$.

Definice 3. Banachův[3] prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Příklady 4.

a) Prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normami $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, +\infty)$, případně $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou Banachovy prostory.

b)
- Nechť K je kompaktní prostor a $C(K)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ všech spojitých funkcí z K do $\mathbb{K}$. Na $C(K)$ zavedeme normu předpisem $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$ pro $f \in C(K)$. Pak $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor. Platí, že $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, právě když $f_n \rightrightarrows f$. Důkaz úplnosti je stejný jako pro prostor $C([a, b])$ známý z přednášky z matematické analýzy.
- Prostor všech konvergentních posloupností $c = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n \text{ existuje vlastní}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je Banachův prostor. Důkaz lze vést přímo, nebo lze využít faktu, že c je lineárně izometrický prostoru $C(K)$, kde $K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty \{\frac{1}{n}\}$ s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}$ (viz Tvrzení 60(b)).
- Prostor $c_0 = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n = 0\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor Banachova prostoru c (viz Tvrzení 5(b)).
- Prostor $c_{00} = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ (x_n)_{n=1}^\infty \text{ má pouze konečně mnoho nenulových členů}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je normovaný lineární prostor, který není Banachův: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků c_{00}, kde $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, je cauchyovská, ale není konvergentní v c_{00}.
- Je-li Γ libovolná neprázdná množina, pak prostor
$$c_0(\Gamma) = \left\{(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathbb{K};\ \forall \varepsilon > 0 \text{ je } \{\gamma \in \Gamma;\ |x_\gamma| \geq \varepsilon\} \text{ konečná}\right\}$$
se supremovou normou $\|(x_\gamma)\|_\infty = \sup_{\gamma \in \Gamma} |x_\gamma|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor prostoru $\ell_\infty(\Gamma)$ níže. Vskutku, je-li $x \in \ell_\infty(\Gamma) \setminus c_0(\Gamma)$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že množina $A = \{\gamma \in \Gamma;\ |x_\gamma| \geq \varepsilon\}$ je nekonečná. Pak pro každé $y \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ a $\gamma \in A$ platí, že $|y_\gamma| \geq |x_\gamma| - |x_\gamma - y_\gamma| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \ell_\infty(\Gamma) \setminus c_0(\Gamma)$.
Všimněme si též, že z definice snadno plyne, že je-li $(x_\gamma) \in c_0(\Gamma)$, pak množina $\{\gamma \in \Gamma;\ x_\gamma \neq 0\}$ je spočetná.
- Prostor $\ell_p = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\right\}$, $1 \leq p < \infty$ s normou $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ je Banachův prostor. (Je to speciální případ prostorů uvedených níže.)

[3] Stefan Banach

- Nechť $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je prostor s mírou. Potom $L_p(\mu) = L_p(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$ pro $1 \le p < \infty$, resp. $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f|$ pro $p = \infty$. (Připomeňme, že $\operatorname{ess\,sup} g = \inf\{\eta \in \mathbb{R};\ \mu(\{x \in \Omega;\ g(x) > \eta\}) = 0\}$. V případě, že $p = \infty$ navíc předpokládáme, že μ není identicky nulová.) Bude-li jasné z kontextu, jaká míra se na prostoru Ω rozumí, budeme pro prostor $L_p(\mu)$ též používat značení $L_p(\Omega)$.
- Je-li $\Omega = \Gamma$ libovolná neprázdná množina, $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Gamma)$ a μ je aritmetická míra na Γ, pak máme
$$L_p(\mu) = \ell_p(\Gamma) = \Big\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sum_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma|^p < +\infty\Big\} = \Big\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sup_{\substack{F\subset\Gamma\\ F \text{ konečná}}} \sum_{\gamma\in F}|x_\gamma|^p < +\infty\Big\}$$
a
$$L_\infty(\mu) = \ell_\infty(\Gamma) = \Big\{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma};\ \sup_{\gamma\in\Gamma}|x_\gamma| < +\infty\Big\}.$$
Pro $\Gamma = \mathbb{N}$ je $\ell_p(\mathbb{N}) = \ell_p$.

c) Nechť K je kompaktní prostor, pak prostor $M(K)$ regulárních borelovských[4] komplexních či znaménkových měr na K s normou $\|\mu\| = |\mu|(K)$ je Banachův prostor. Připomeňme, že nezáporná míra μ na kompaktním metrickém prostoru leží v $M(K)$, pokud je definovaná na σ-algebře borelovských množin, je vnitřně i zevně regulární a má konečné hodnoty na kompaktech. Znaménková či komplexní míra leží v $M(K)$, pokud je definována na borelovských množinách a její variace $|\mu|$ leží v $M(K)$.

Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Je-li Y podprostor X, pak $(Y, \|\cdot\|)$, kde uvažujeme restrikci normy $\|\cdot\|$ na Y, je zjevně též normovaný lineární prostor. Následující tvrzení je speciálním případem tvrzení o (metrických) podprostorech metrických prostorů.

TVRZENÍ 5. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.
(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

DEFINICE 6. Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou ekvivalentní, pokud $x_n \overset{\rho}{\to} x$, právě když $x_n \overset{\sigma}{\to} x$ pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset P$ a $x \in P$. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou skoro stejné, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x,y) \le \rho(x,y) \le B\sigma(x,y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Zjevně skoro stejné metriky jsou ekvivalentní.

PŘÍKLAD 7. Metriky $\rho(x,y) = |x-y|$ a $\sigma(x,y) = \operatorname{arctg}|x-y|$ na $\mathbb{R}$ jsou ekvivalentní, ale nikoli skoro stejné (všimněte si, že $\mathbb{R}$ je v σ omezená). Metriky $\rho(x,y) = |x-y|$ a $\sigma(x,y) = |x-y| + \operatorname{arctg}|x-y|$ na $\mathbb{R}$ jsou skoro stejné, neboť $\rho(x,y) \le \sigma(x,y) \le 2\rho(x,y)$.

TVRZENÍ 8. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a ρ_1, ρ_2 jsou příslušné metriky. Pak ρ_1 a ρ_2 jsou skoro stejné, právě když jsou ekvivalentní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá.

$\Leftarrow$ Sporem: Předpokládejme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $x_n, y_n \in X$ splňující $\rho_1(x_n, y_n) > n\rho_2(x_n, y_n)$, tedy $\|x_n - y_n\|_1 > n\|x_n - y_n\|_2$. Položme $z_n = \frac{x_n - y_n}{\|x_n - y_n\|_1}$. Pak $\rho_1(z_n, 0) = \|z_n\|_1 = 1$, ale $\rho_2(z_n, 0) = \|z_n\|_2 < \frac{1}{n} \to 0$, což je spor s ekvivalencí ρ_1 a ρ_2.

□

Díky předchozímu tvrzení je následující definice konzistentní s Definicí 6.

DEFINICE 9 (ekvivalentní normy). Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le B\|x\|_2$.

[4]Félix Édouard Justin Émile Borel

PŘÍKLAD 10. Na prostoru ℓ_1 uvažme normu $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. Pak normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_\infty$ nejsou ekvivalentní. Položíme-li $z_n = (\underbrace{1,\dots,1}_{n\text{ krát}},0,0,\dots)$, pak $\|z_n\|_\infty = 1$, ale $\|z_n\|_1 = n$.

POZNÁMKA. Ekvivalentní normy na prostoru X zachovávají konvergenci posloupností. Různé ekvivalentní normy tedy mohou mít různé geometrické vlastnosti (neboť se mění tvar jednotkové koule), ale topologické vlastnosti (tj. vlastnosti závisející jen na konvergenci posloupností) zůstávají nezměněny.

VĚTA 11. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Důkaz bychom mohli provést ihned, nicméně my jej odložíme do Věty 66, kde stejným argumentem dokážeme více věcí najednou.

LEMMA 12. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a,b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Vezměme $x \in B_2$. Pak $\|x\|_1 \le b\|x\|_2 \le b$, tedy $x \in B_{(X,\|\cdot\|_1)}(0,b) = bB_1$. Na druhou stranu, nechť $x \in aB_1$. Pak $\|x\|_2 \le \frac{1}{a}\|x\|_1 \le \frac{1}{a}a = 1$, tedy $x \in B_2$.

$\Leftarrow$ Je-li $x \in X$ nenulový vektor, je $\frac{x}{\|x\|_2} \in B_2 \subset bB_1$, a tedy $\left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\|_1 \le b$. Podobně, $a\frac{x}{\|x\|_1} \in aB_1 \subset B_2$, a tedy $a\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\|_2 \le 1$. Odtud již plynou požadované odhady.

□

TVRZENÍ 13. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.
(ii) Existují $a,b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.
(iii) Zobrazení $Id\colon (X,\|\cdot\|_1) \to (X,\|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.
(iv) Otevřené množiny v $(X,\|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X,\|\cdot\|_2)$.

DŮKAZ. Ekvivalence (i) a (ii) plyne z Lemmatu 12. Ekvivalence (i) a (iii) plyne z Tvrzení 8. Ekvivalence (iii) a (iv) plyne z definice homeomorfismu a vlastností spojitých zobrazení.

□

DEFINICE 14. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je konvexní, pokud pro každé $x,y \in M$ a $\lambda \in [0,1]$ platí, že $\lambda x + (1-\lambda)y \in M$.

Nechť $x_1,\dots,x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je konvexní kombinací vektorů $x_1,\dots,x_n$ s koeficienty $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1,\dots,\lambda_n \ge 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Snadno se dokáže indukcí, že konvexní množina M je uzavřená na konvexní kombinace svých prvků, tj. $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M$ kdykoli $x_1,\dots,x_n \in M$, $\lambda_1,\dots,\lambda_n \ge 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Z vlastností normy snadno plyne následující fakt:

FAKT 15. *Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.*

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Připomeňme, že lineární obal množiny $M \subset X$ je definován jako $\bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ podprostor } X\}$. Budeme jej značit span M. Dále připomeňme, že platí

$$\operatorname{span} M = \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i;\ x_1,\dots,x_n \in M, \alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

DEFINICE 16. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Povšimněme si, že výše uvedená definice je smysluplná, neboť systém, který se proniká, obsahuje alespoň celý prostor X. Snadno se nahlédne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní, a tedy konvexní obal je konvexní množina.

TVRZENÍ 17. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak*

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

DŮKAZ. Označme $C = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}$. Inkluze $C \subset \operatorname{conv} M$ je zjevná, neboť konvexní množina $\operatorname{conv} M$ obsahuje všechny konvexní kombinace svých prvků. Na druhou stranu, $M \subset C$. Stačí tedy ukázat, že C je konvexní, protože pak $\operatorname{conv} M \subset C$ dle definice $\operatorname{conv} M$.

Nechť $x, y \in C$ a $\alpha \in [0, 1]$. Pak $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ pro nějaká $x_1, \dots, x_n \in M$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ a obdobně $y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i y_i$ pro nějaká $y_1, \dots, y_m \in M$, $\mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$. Pak

$$\alpha x + (1-\alpha) y = \sum_{i=1}^{n} \alpha \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha) \mu_i y_i \in C,$$

neboť $\sum_{i=1}^{n} \alpha \lambda_i + \sum_{i=1}^{m} (1-\alpha) \mu_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m} \mu_i = \alpha + (1-\alpha) = 1$.

□

DEFINICE 18. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Všimněme si, že pro symetrii M stačí ověřit $-M \subset M$. Dále si všimněme, že koule B_X a U_X v normovaném lineárním prostoru X jsou symetrické množiny.

FAKT 19. *Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$, resp. $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.*

DŮKAZ. Zvolme libovolné $y \in U(0, r)$ a položme $u = x + y$, $v = x - y$. Pak $u, v \in U(x, r) \subset M$. Ze symetrie M plyne $-v \in M$ a z konvexity M dostáváme $y = \frac{1}{2}(-v + u) \in M$. Pro $B(x, r)$ je důkaz totožný.

□

DEFINICE 20. Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako $\overline{\operatorname{span}} M = \bigcap \{ Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X \}$ a uzavřený konvexní obal M jako $\overline{\operatorname{conv}} M = \bigcap \{ C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní} \}$.

Povšimněme si, že výše uvedené definice jsou smysluplné, neboť v definujících systémech množin se vždy vyskytuje alespoň celý prostor X. Dále je zřejmé, že uzavřený lineární obal je uzavřený podprostor a uzavřený konvexní obal je uzavřená konvexní množina.

FAKT 21. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.*

DŮKAZ. Nechť $x, y \in \overline{C}$ a $\lambda \in [0, 1]$. Pak existují posloupnosti $\{x_n\} \subset C$, $\{y_n\} \subset C$ splňující $x_n \to x$, $y_n \to y$. Protože C je konvexní, pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \in C$. Protože sčítání a násobení skalárem jsou spojité operace, máme $\lambda x_n + (1-\lambda) y_n \to \lambda x + (1-\lambda) y$, a tedy $\lambda x + (1-\lambda) y \in \overline{C}$. Důkaz pro podprostor je analogický.

□

TVRZENÍ 22. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}} M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}} M = \overline{\operatorname{conv} M}$.*

DŮKAZ. Inkluze $\overline{\operatorname{span}} M \subset \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}} M \subset \overline{\operatorname{conv} M}$ plynou z definic a Faktu 21. Pro opačné inkluze si uvědomme, že $\overline{\operatorname{span}} M$ je podprostor obsahující M a $\overline{\operatorname{conv}} M$ je konvexní množina obsahující M. Tedy $\operatorname{span} M \subset \overline{\operatorname{span}} M$ a $\operatorname{conv} M \subset \overline{\operatorname{conv}} M$. Protože $\overline{\operatorname{span}} M$ a $\overline{\operatorname{conv}} M$ jsou uzavřené množiny, dostáváme, že $\overline{\operatorname{span} M} \subset \overline{\operatorname{span}} M$ a $\overline{\operatorname{conv} M} \subset \overline{\operatorname{conv}} M$.

□

Poznamenejme, že součet uzavřených množin nemusí být uzavřená množina. Stačí uvažovat $A = \left\{ (x, \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0 \right\}$ a $B = \mathbb{R} \times \{0\}$. Pak $A + B = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Dokonce ani součet uzavřených podprostorů nemusí být uzavřený, viz Příklad 53. Nicméně platí následující tvrzení:

TVRZENÍ 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $F \subset X$ je uzavřená a $K \subset X$ je kompaktní. Pak $F + K$ je uzavřená. Je-li navíc F kompaktní, pak je i $F + K$ kompaktní.*

DŮKAZ. Nechť $\{z_n\} \subset F + K$ je posloupnost konvergující k nějakému $z \in X$. Pak $z_n = x_n + y_n$, kde $x_n \in F$ a $y_n \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in K$. Pak $x_{n_k} = z_{n_k} - y_{n_k} \to z - y$ dle Tvrzení 2(c). Protože F je uzavřená, je $z - y \in F$. Tedy $z = (z - y) + y \in F + K$. Odtud plyne, že $F + K$ je uzavřená.

Nechť je nyní navíc F kompaktní a $\{z_n\} \subset F + K$ je libovolná posloupnost. Pak $z_n = x_n + y_n$, kde $x_n \in F$ a $y_n \in K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože K je kompaktní, existuje podposloupnost $\{y_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $y \in K$. Protože F je kompaktní, posloupnost $\{x_{n_k}\}$ má podposloupnost $\{x_{n_{k_l}}\}$, která konverguje k nějakému $x \in F$. Tedy $z_{n_{k_l}} = x_{n_{k_l}} + y_{n_{k_l}} \to x + y \in F + K$. Odtud plyne, že $F + K$ je kompaktní.

□

VĚTA 24. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak* $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor nad $\mathbb{K}$. Nejprve ukážeme, že $\operatorname{span}\{Y \cup \{e\}\}$ je uzavřený pro libovolné $e \in X$. Obecné tvrzení pak snadno plyne pomocí matematické indukce dle $\dim Z$.

Je-li $e \in Y$, pak není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že $e \notin Y$. Nechť $\{x_n\} \subset \operatorname{span}(Y \cup \{e\})$ je posloupnost konvergující k $x \in X$. Pak $x_n = y_n + t_n e$ pro nějaká $y_n \in Y$ a $t_n \in \mathbb{K}$. Nejdříve ukážeme, že posloupnost $\{t_n\}$ je omezená. Kdyby tomu tak nebylo, pak by existovala podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ splňující $|t_{n_k}| \to +\infty$. Pak ale

$$\left\| \frac{y_{n_k}}{t_{n_k}} - (-e) \right\| = \left\| \frac{x_{n_k}}{t_{n_k}} \right\| = \frac{1}{|t_{n_k}|} \|x_{n_k}\| \to 0 \cdot \|x\| = 0,$$

tedy $y_{n_k}/t_{n_k} \to -e$. Ale $y_{n_k}/t_{n_k} \in Y$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a Y je uzavřený, tudíž $e \in Y$, což je spor.

Posloupnost $\{t_n\}$ je tedy omezená, takže z ní můžeme vybrat podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $t \in \mathbb{K}$. Pak $y_{n_k} \to y = x - te$ a $y \in Y$, neboť Y je uzavřený. Tedy $x = y + te \in \operatorname{span}\{Y \cup \{e\}\}$.

□

DŮSLEDEK 25. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

VĚTA 26.

(a) Prostory c_0 a ℓ_p, $1 \le p < \infty$ jsou separabilní.
(b) Prostor ℓ_∞ je neseparabilní.
(c) Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $C(K)$ separabilní.
(d) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky[5] měřitelná a $1 \le p < \infty$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

DŮKAZ. (a) Nechť $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je množina vektorů z c_{00} s racionálními souřadnicemi (v případě komplexního prostoru jsou reálná i imaginární složka racionální). Pak $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je spočetná. Tvrdíme, že je hustá v c_0: Vezměme libovolné $x \in c_0$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_i| < \varepsilon$ pro $i > n$. Pro $i = 1, \dots, n$ nalezneme racionální (případně „komplexně racionální“) q_i tak, aby $|x_i - q_i| < \varepsilon$. Položme $y = (q_1, \dots, q_n, 0, 0, \dots)$. Pak $y \in c_{00}^{\mathbb{Q}}$ a $\|x - y\| = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i - q_i| \le \varepsilon$.

Podobně ověříme, že $c_{00}^{\mathbb{Q}}$ je hustá v ℓ_p pro $1 \le p < \infty$. Vezměme libovolné $x \in \ell_p$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $i = 1, \dots, n$ nalezneme racionální (případně „komplexně racionální“) q_i tak, aby $|x_i - q_i| < \left(\frac{\varepsilon}{2n}\right)^{1/p}$. Položme $y = (q_1, \dots, q_n, 0, 0, \dots)$. Pak $y \in c_{00}^{\mathbb{Q}}$ a $\|x - y\|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(b) Uvažujme množinu $\mathcal{A} = \{\chi_A;\ A \subset \mathbb{N}\} \subset \ell_\infty$. Pak pro $A, B \subset \mathbb{N}$, $A \neq B$ platí $\|\chi_A - \chi_B\| = 1$, neboť existuje $n \in \mathbb{N}$ které leží právě v jedné z množin A, B. Tedy $\mathcal{A}$ je 1-separovaná podmnožina ℓ_∞. Tato množina je ovšem nespočetná (např. pomocí Cantorovy diagonální metody[6]).

[5] Henri Léon Lebesgue

[6] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1891)

(c) Prostor $C(K)$ je podprostorem prostoru $\ell_\infty(K)$ všech omezených funkcí na K. Ukážeme, že existuje spočetná množina $\mathcal{A} \subset \ell_\infty(K)$ taková, že $C(K) \subset \overline{\mathcal{A}}$. Odtud plyne separabilita $C(K)$, neboť pak $C(K)$ je (metrický) podprostor separabilního metrického prostoru $\overline{\mathcal{A}}$.

Kompakt K je totálně omezený, tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje konečný systém $\mathcal{B}_n$ otevřených koulí o poloměru $\frac{1}{n}$ pokrývající K. Zafixujme $n \in \mathbb{N}$ a položme $D_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$, kde $\mathcal{B}_n = \{B_1, B_2, \dots\}$. Pak $\mathcal{D}_n = \{D_1, D_2, \dots\}$ je konečný systém disjunktních množin s diametrem nejvýše $\frac{2}{n}$ pokrývající K. Nechť $\mathcal{A}_n$ je množina funkcí konstantních na prvcích $\mathcal{D}_n$ s racionálními (resp. „komplexně racionálními") hodnotami. Pak $\mathcal{A}_n$ je spočetná. Tedy i množina $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_n$ je spočetná. Tvrdíme, že $C(K) \subset \overline{\mathcal{A}}$.

Nechť $f \in C(K)$ a $\varepsilon > 0$. Pak f je stejnoměrně spojitá na K, a tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ kdykoli $x, y \in K$, $\rho(x, y) < \delta$, kde ρ je metrika prostoru K. Nalezněme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{2}{n} < \delta$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ je takové, že $\mathcal{D}_n = \{D_1, \dots, D_k\}$. Bez újmy na obecnosti (po eventuálním přečíslování) můžeme předpokládat, že všechny množiny D_i jsou neprázdné. V každé množině D_i zvolíme prvek x_i a nalezneme q_i racionální tak, aby $|q_i - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Konečně položíme $g = \sum_{i=1}^k q_i \chi_{D_i}$. Pak $g \in \mathcal{A}$. Dále, je-li $x \in K$ libovolné, pak $x \in D_j$ pro nějaké j. Máme $\rho(x, x_j) \le \frac{2}{n} < \delta$, a tedy $|f(x) - g(x)| = |f(x) - q_j| \le |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - q_j| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Tedy $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$.

(d) Prostor $L_p(\Omega)$ lze přirozeně chápat jako podprostor $L_p(\mathbb{R}^n)$, tedy stačí ukázat separabilitu $L_p(\mathbb{R}^n)$. Pro $j \in \mathbb{N}$ označme $K_j = B_{\mathbb{R}^n}(0, j)$. Pak dle (c) existuje spočetná množina $\mathcal{A}_j$ spojitých funkcí na K_j která je hustá v prostoru $(C(K_j), \|\cdot\|_\infty)$. Rozšiřme funkce z $\mathcal{A}_j$ nulou mimo K_j a chápejme je jako funkce na celém $\mathbb{R}^n$. Ukážeme, že spočetná množina $\bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{A}_j$ je hustá v prostoru $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Nechť $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ a $\varepsilon > 0$. Podle důsledku Luzinovy věty[7], [R, Věta 3.14], je množina $C_c(\mathbb{R}^n)$ spojitých funkcí s kompaktním nosičem hustá v prostoru $L_p(\mathbb{R}^n)$. Tedy existuje $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ splňující $\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $j \in \mathbb{N}$ je takové, že K_j obsahuje nosič g. Pak existuje $h \in \mathcal{A}_j$ taková, že $\|g - h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K_j)^{1/p}}$. Máme $\|g - h\|_p^p = \int_{K_j} |g - h|^p \, d\lambda \le \frac{\varepsilon^p}{2^p \lambda(K_j)} \lambda(K_j) = (\frac{\varepsilon}{2})^p$. Tedy dohromady $\|f - h\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - h\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

Později uvidíme, že pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor (Věta 2.28).

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

DEFINICE 27. Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N x_n$. Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$.

Uvědomme si, že v normovaných lineárních prostorech platí stejná nutná podmínka konvergence řady jako pro řady reálných čísel: je-li $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konvergentní, pak $x_n \to 0$. (Důkaz je stejný: $x_n = \sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^{n-1} x_k \to 0$.)

FAKT 28. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní řada v X. Pak*

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty x_n \right\| \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|.$$

DŮKAZ. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\left\|\sum_{n=1}^N x_n\right\| \le \sum_{n=1}^N \|x_n\| \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$ pro každé $N \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti normy (Tvrzení 2(b)) tedy dostáváme $\left\|\sum_{n=1}^\infty x_n\right\| = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^N x_n\right\| \le \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|$.

□

[7] Nikolaj Nikolajevič Luzin (Николай Николаевич Лузин) (1912)

PŘÍKLAD 29. Vektory $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ v prostorech c_0 a ℓ_p, $1 \le p < \infty$, kde pouze n-tá souřadnice je rovna 1, budeme nazývat kanonické bázové vektory. Pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ v c_0, resp. ℓ_p platí $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, kde konvergenci řady chápeme v příslušné normě. Vskutku, pro $x \in c_0$ máme $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_{\infty} = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_{\infty} = \sup_{k>n} |x_k| \to 0$ z definice limity. Podobně pro $x \in \ell_p$ máme $\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\|_p = \|(0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$.

VĚTA 30 (Test úplnosti). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť je řada $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ absolutně konvergentní. Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ její částečné součty. Pak pro indexy $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ platí

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|.$$

Z platnosti Bolzanovy[8]-Cauchyovy[9] podmínky pro řadu $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ tedy dostáváme platnost Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro posloupnost $\{s_n\}$. Ta je proto konvergentní, neboť X je Banachův.

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Nejprve ukážeme, že $\{x_n\}$ má konvergentní podposloupnost. S využitím cauchyovskosti nalezneme rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ tak, že $\|x_l - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ pro všechna $k, l \in \mathbb{N}$ splňující $l \ge n_k$. Speciálně platí $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ je tedy absolutně konvergentní, takže existuje $z \in X$ takové, že $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = z$. To ale znamená, že

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = \lim_{j\to\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_1}.$$

Tedy $\{x_{n_k}\}$ konverguje k $x = z + x_{n_1}$.

Na závěr zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská, tedy existuje $m_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \ge m_0$. Pak pro všechna $n, k \ge m_0$ platí $\|x_n - x_{n_k}\| < \varepsilon$. Zafixujeme-li nyní $n \ge m_0$, pak $\|x_n - x\| = \lim_{k\to\infty} \|x_n - x_{n_k}\| \le \varepsilon$. Tedy $\|x_n - x\| \le \varepsilon$ pro každé $n \ge m_0$, což znamená, že $x_n \to x$.

□

DEFINICE 31. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme zobecněnou řadou. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F : \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Je-li zobecněná řada konvergentní, pak symbolem $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ rozumíme též její součet (který je určen jednoznačně, viz Větu 33).

DEFINICE 32. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset : \left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

[8] Bernard Bolzano (Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano)

[9] Augustin-Louis Cauchy

VĚTA 33. *Nechť* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ *je zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru* X *konvergující k* x*. Pak platí:*

(a) Její součet je určen jednoznačně.
(b) Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
(c) $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ *pro každou permutaci (tj. bijekci)* $\pi\colon \Gamma\to\Gamma$*.*
(d) $\big(\|x_\gamma\|\big)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$*.*
(e) Je-li $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \Gamma$ *libovolná prostá posloupnost taková, že* $\{\gamma\in\Gamma;\ x_\gamma\neq 0\}\subset\{\gamma_n;\ n\in\mathbb{N}\}$*, pak* $\sum_{n=1}^\infty x_{\gamma_n} = x$*.*

DŮKAZ. (a) Nechť $x, y \in X$, $x\neq y$ jsou součty naší zobecněné řady. Položme $\varepsilon = \|x-y\| > 0$. Pak dle definice existují konečné množiny $F_x, F_y \subset \Gamma$ splňující $\big\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\big\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $F\in\mathcal{F}(\Gamma)$, $F\supset F_x$ a $\big\|y-\sum_{\gamma\in F} x_\gamma\big\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $F\in\mathcal{F}(\Gamma)$, $F\supset F_y$. Dále položme $F = F_x\cup F_y$. Pak $\varepsilon = \|x-y\| \le \big\|x-\sum_{\gamma\in F} x_\gamma\big\| + \big\|y-\sum_{\gamma\in F} x_\gamma\big\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, což je spor.

(b) Je-li $\varepsilon > 0$, pak z definice konvergence existuje $F\in\mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\big\|x-\sum_{\gamma\in H} x_\gamma\big\| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každou $H\in\mathcal{F}(\Gamma)$, $H\supset F$. Pak pro $F'\in\mathcal{F}(\Gamma)$ disjunktní s F platí

$$\Big\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\Big\| = \Big\|\sum_{\gamma\in F'\cup F} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma\Big\| \le \Big\|x - \sum_{\gamma\in F'\cup F} x_\gamma\Big\| + \Big\|x-\sum_{\gamma\in F} x_\gamma\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(c) Nechť $\pi\colon\Gamma\to\Gamma$ je permutace. Je-li $\varepsilon>0$, pak z definice konvergence existuje $F\in\mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\big\|x-\sum_{\gamma\in H} x_\gamma\big\| < \varepsilon$ pro každou $H\in\mathcal{F}(\Gamma)$, $H\supset F$. Množina $\pi^{-1}(F)$ je konečná a pro $F'\supset\pi^{-1}(F)$ konečnou platí $\pi(F')\supset F$, a tedy $\big\|x-\sum_{\gamma\in F'} x_{\pi(\gamma)}\big\| = \big\|x-\sum_{\gamma\in\pi(F')} x_\gamma\big\| < \varepsilon$. To znamená, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$.

(d) Dle (b) zobecněná řada splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Nechť $\varepsilon>0$ a nechť $F\subset\Gamma$ je příslušná konečná množina z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky pro toto ε. Je-li $\gamma\notin F$, pak $\{\gamma\}\cap F=\emptyset$, a tedy $\|x_\gamma\| < \varepsilon$. To znamená, že $\{\gamma\in\Gamma;\ \|x_\gamma\|\ge\varepsilon\}\subset F$, tedy speciálně je to množina konečná.

(e) Označme $s_n = \sum_{k=1}^n x_{\gamma_k}$. Nechť $\varepsilon>0$. Pak existuje $F\in\mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\big\|x-\sum_{\gamma\in H} x_\gamma\big\| < \varepsilon$ pro každou $H\in\mathcal{F}(\Gamma)$, $H\supset F$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $F\subset\{\gamma\in\Gamma;\ x_\gamma\neq 0\}$ a že $F\neq\emptyset$. Položme $n_0 = \max\{n\in\mathbb{N};\ \gamma_n\in F\}$. Pak pro každé $n\in\mathbb{N}$, $n\ge n_0$ je $\{\gamma_1,\dots,\gamma_n\}\supset F$, takže $\|x-s_n\| < \varepsilon$.

□

TVRZENÍ 34. *Nechť* $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ *je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když* $\sup\big\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathcal{F}(\Gamma)\big\} < +\infty$*. Potom platí* $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\big\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathcal{F}(\Gamma)\big\}$*.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Nechť $x = \sup\big\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathcal{F}(\Gamma)\big\}\in\mathbb{R}$ a nechť $\varepsilon>0$. Pak existuje $F\in\mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\sum_{\gamma\in F} a_\gamma > x-\varepsilon$. Pro každou $F'\in\mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $F'\supset F$ tedy máme $\big|x-\sum_{\gamma\in F'} a_\gamma\big| = x-\sum_{\gamma\in F'} a_\gamma \le x - \sum_{\gamma\in F} a_\gamma < \varepsilon$. Odtud plyne $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = x$.

$\Rightarrow$ Je-li $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = x$, pak existuje $H\in\mathcal{F}(\Gamma)$ taková, že $\big|x-\sum_{\gamma\in H'} a_\gamma\big| < 1$ pro každou $H'\in\mathcal{F}(\Gamma)$, $H'\supset H$. Pro každou $F\in\mathcal{F}(\Gamma)$ pak máme $\sum_{\gamma\in F} a_\gamma \le \sum_{\gamma\in H\cup F} a_\gamma < x+1$, tedy $\sup\big\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathcal{F}(\Gamma)\big\} < +\infty$.

Závěrečné tvrzení pak bylo dokázáno v první části důkazu.

□

TVRZENÍ 35. *Nechť* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$*,* $\sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ *jsou konvergentní zobecněné řady v normovaném lineárním prostoru nad* $\mathbb{K}$ *a nechť* $c\in\mathbb{K}$*. Pak* $\sum_{\gamma\in\Gamma}(x_\gamma+y_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$ *a* $\sum_{\gamma\in\Gamma} c x_\gamma = c\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$*.*

DŮKAZ. Označme $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ a $y = \sum_{\gamma\in\Gamma} y_\gamma$. Nechť $\varepsilon>0$. Pak existují $F_x, F_y\subset\mathcal{F}(\Gamma)$ takové, že $\big\|x-\sum_{\gamma\in H} x_\gamma\big\| < \varepsilon$ pro každou $H\in\mathcal{F}(\Gamma)$, $H\supset F_x$, resp. $\big\|y-\sum_{\gamma\in H} y_\gamma\big\| < \varepsilon$ pro každou $H\in\mathcal{F}(\Gamma)$, $H\supset F_y$. Pro libovolnou $H\in\mathcal{F}(\Gamma)$, $H\supset F_x\cup F_y$ je tedy $\big\|x+y-\sum_{\gamma\in H}(x_\gamma+y_\gamma)\big\| \le$

$\left\| x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma \right\| + \left\| y - \sum_{\gamma\in H} y_\gamma \right\| < 2\varepsilon$. Podobně, $\left\| cx - \sum_{\gamma\in H} cx_\gamma \right\| = |c| \left\| x - \sum_{\gamma\in H} x_\gamma \right\| \le |c|\varepsilon$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $H \supset F_x$.

□

VĚTA 36. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.
(b) Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.
(c) Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ konvergentní.

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ plyne z Věty 33(b). $\Leftarrow$ Najdeme množiny $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$ v $\mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F_n = \emptyset\colon \left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \frac{1}{n}.$$

Položme $y_n = \sum_{\gamma\in F_n} x_\gamma$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{y_n\}$ je cauchyovská posloupnost: Pro dané $\varepsilon > 0$ totiž nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Pak pro libovolná $m > n \ge n_0$ máme $\|y_m - y_n\| = \left\| \sum_{\gamma\in F_m} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F_n} x_\gamma \right\| = \left\| \sum_{\gamma\in F_m\setminus F_n} x_\gamma \right\| < \frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tedy $\{y_n\}$ konverguje k nějakému $x \in X$. Ukážeme, že $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\|y_{n_0} - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Potom pro $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ obsahující F_{n_0} platí

$$\left\| x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma \right\| \le \left\| x - \sum_{\gamma\in F_{n_0}} x_\gamma \right\| + \left\| \sum_{\gamma\in F} x_\gamma - \sum_{\gamma\in F_{n_0}} x_\gamma \right\| = \|x - y_{n_0}\| + \left\| \sum_{\gamma\in F\setminus F_{n_0}} x_\gamma \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Tvrzení (b) ověříme pomocí Bolzanovy-Cauchyovy podmínky a tvrzení (a). Nechť $s = \sum_{\gamma\in\Gamma} \|x_\gamma\| = \sup\left\{ \sum_{\gamma\in F} \|x_\gamma\|;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} < +\infty$ (Tvrzení 34). Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $\sum_{\gamma\in F} \|x_\gamma\| > s - \varepsilon$. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ neprotínající F platí

$$\left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| \le \sum_{\gamma\in F'} \|x_\gamma\| = \sum_{\gamma\in F\cup F'} \|x_\gamma\| - \sum_{\gamma\in F} \|x_\gamma\| < s - (s - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Obdobně dokážeme (c). Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme množinu $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$, $F' \cap F = \emptyset$. Pak $F \cap \Lambda \in \mathcal{F}(\Lambda)$ a každá $F' \in \mathcal{F}(\Lambda)$ neprotínající $F \cap \Lambda$ je též disjunktní s F. Tedy $\left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon$ a Bolzanova-Cauchyova podmínka pro zobecněnou řadu $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ je ověřena.

□

Zobecněné řady jsou definovány bez jakékoliv struktury na indexové množině Γ. Ve speciálním případě $\Gamma = \mathbb{N}$ máme na $\mathbb{N}$ strukturu uspořádání, pomocí které jsou definovány „obyčejné“ řady. Nyní se tedy podíváme na vztah řad $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ a zobecněných řad $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

TVRZENÍ 37.

(a) Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k x.
(b) Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x \in X$ a nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.
(c) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (a obě pak mají stejný součet).

DŮKAZ. (a) Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ neprázdná taková, že $\left\| x - \sum_{n\in F'} x_n \right\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$. Položme $n_0 = \max F$. Pak pro $n \ge n_0$ platí $F \subset F' = \{1, \dots, n\}$, a tedy $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| = \left\| x - \sum_{i\in F'} x_i \right\| < \varepsilon$. To dokazuje, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

(b) Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $F \subset \mathbb{N}$ konečnou neprázdnou takovou, že $\left\| \sum_{n\in H} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$ pro každou $H \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ disjunktní s F. Dále nalezneme $n_0 \ge \max F$ takové, že $\left\| x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak pro každou

$F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$ platí

$$\Big\|x - \sum_{n\in F'} x_n\Big\| \le \Big\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\Big\| + \Big\|\sum_{n=1}^{n_0} x_n - \sum_{n\in F} x_n\Big\| + \Big\|\sum_{n\in F'} x_n - \sum_{n\in F} x_n\Big\| =$$
$$= \Big\|x - \sum_{n=1}^{n_0} x_n\Big\| + \Big\|\sum_{n\in\{1,\dots,n_0\}\setminus F} x_n\Big\| + \Big\|\sum_{n\in F'\setminus F} x_n\Big\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

To znamená, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.

(c) Platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} a_i$. Je-li $F \subset \mathbb{N}$ konečná neprázdná, pak $\sum_{i\in F} a_i \le \sum_{i=1}^{\max F} a_i$, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{\sum_{n\in F} a_n;\ F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\}$. Zbytek plyne z Tvrzení 34.

□

DŮSLEDEK 38. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je absolutně konvergentní.*

DEFINICE 39. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

VĚTA 40. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje bezpodmínečně.*
(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci* $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ke stejnému součtu.*
(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci* $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Je-li π permutace na $\mathbb{N}$, pak dle Věty 33(c) je $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)} = x$. Díky Tvrzení 37(a) tedy máme $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$.

(ii)⇒(iii) je zjevná.

(iii)⇒(i) Podle Tvrzení 37(b) stačí ukázat, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Není-li tomu tak, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každou konečnou $F \subset \mathbb{N}$ existuje konečná $F' \subset \mathbb{N}$, $F' \cap F = \emptyset$ taková, že $\|\sum_{n\in F'} x_n\| \ge \varepsilon$. Můžeme tedy indukcí zkonstruovat posloupnost $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ konečných neprázdných podmnožin $\mathbb{N}$ splňující $\max F_k < \min F_{k+1}$ a $\|\sum_{n\in F_k} x_n\| \ge \varepsilon$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Položme ještě $F_0 = \{0\}$ a $D_k = \{\max F_{k-1} + 1, \dots, \max F_k\} \setminus F_k$ pro $k \in \mathbb{N}$. Nechť nyní π je permutace $\mathbb{N}$, která postupně v rostoucím pořadí vyjmenovává prvky množin D_1, F_1, D_2, F_2, atd. Pak existují rostoucí posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a posloupnost $\{p_k\} \subset \mathbb{N}_0$ tak, že $\pi(\{n_k, n_k + 1, \dots, n_k + p_k\}) = F_k$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme $\|\sum_{n=n_k}^{n_k+p_k} x_{\pi(n)}\| = \|\sum_{n\in F_k} x_n\| \ge \varepsilon$, což znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ nesplňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. To je spor s předpokladem.

□

VĚTA 41. *Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní. Každá řada v $\mathbb{R}$ je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.*

DŮKAZ. První tvrzení plyne z Důsledku 38 a Věty 36(b). V $\mathbb{R}$ plyne opačná implikace z Věty 40 a z Riemannovy[10] věty o přerovnávání neabsolutně konvergentních řad.

□

PŘÍKLAD 42. Pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ v c_0, resp. ℓ_p, $1 \le p < \infty$, platí, že řada v jeho vyjádření $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ konverguje dokonce bezpodmínečně. Vskutku, mějme dán $x \in c_0$ a použijme Tvrzení 37(b). Fakt, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ již víme z Příkladu 29. Stačí tedy ověřit Bolzanovu-Cauchyovu podmínku pro zobecněnou řadu $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$. Je-li tedy $\varepsilon > 0$, pak nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \varepsilon$ pro každé $n \ge n_0$. Položíme-li $F = \{1, \dots, n_0\}$, máme pro $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ disjunktní s F odhad $\|\sum_{n\in F'} x_n e_n\| \le \sup_{n\ge n_0} |x_n| \le \varepsilon$. Tedy $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$.

[10] Georg Friedrich Bernhard Riemann

Podobně pro $x \in \ell_p$ a $\varepsilon > 0$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=n_0}^{\infty}|x_n|^p < \varepsilon^p$. Položíme-li $F = \{1,\dots,n_0\}$, máme pro $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ disjunktní s F odhad $\left\|\sum_{n\in F'} x_n e_n\right\|^p = \sum_{n\in F'}|x_n|^p \le \sum_{n=n_0}^{\infty}|x_n|^p < \varepsilon^p$. Tedy $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku a zároveň $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ dle Příkladu 29. Proto $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$.

3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá lineární, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Dále $\operatorname{Ker} T = T^{-1}(0)$ a $\operatorname{Rng} T = T(X)$ jsou podprostory X, resp. Y. Zobrazení T je prosté, právě když $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Lineární zobrazení z X do $\mathbb{K}$ se nazývá lineární forma na X.

Snadno si lze rozmyslet následující fakt.

FAKT 43. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní.*

TVRZENÍ 44. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je spojité.
(ii) T je spojité v jednom bodě.
(iii) T je spojité v 0.
(iv) Existuje $C \ge 0$ tak, že $\|T(x)\| \le C\|x\|$ pro každé $x \in X$.
(v) T je lipschitzovské.
(vi) T je stejnoměrně spojité.
(vii) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
(viii) $T(B_X)$ je omezená.
(ix) $T\big(U(0,\delta)\big)$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.

DŮKAZ. Zjevně (i)$\Rightarrow$(ii).

(ii)$\Rightarrow$(iii) Nechť T je spojité v $x \in X$ a nechť $x_n \to 0$. Pak $x_n + x \to x$, a tedy $T(x_n + x) \to T(x)$. Odtud $T(x_n) = T(x_n + x - x) = T(x_n + x) - T(x) \to T(x) - T(x) = 0 = T(0)$.

(iii)$\Rightarrow$(iv) Existuje $\delta > 0$ takové, že $\|T(y)\| = \|T(y) - T(0)\| \le 1$, kdykoli $\|y\| = \|y - 0\| \le \delta$. Pak pro $x \in X$ nenulové platí, že

$$\|T(x)\| = \frac{\|x\|}{\delta}\left\|T\left(\delta\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \frac{1}{\delta}\|x\|.$$

Nerovnost ve (iv) tedy platí pro $C = \frac{1}{\delta}$.

(iv)$\Rightarrow$(v) Pro libovolná $x, y \in X$ platí $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \le C\|x-y\|$, tedy T je C-lipschitzovské.

(v)$\Rightarrow$(vi)$\Rightarrow$(i) a (iv)$\Rightarrow$(vii)$\Rightarrow$(viii) jsou zřejmé.

(viii)$\Rightarrow$(iv) Nechť $C \ge 0$ je takové, že $\|T(x)\| \le C$ kdykoli $x \in B_X$. Potom pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ platí $\|T(x)\| = \|x\|\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le C\|x\|$.

(viii)$\Leftrightarrow$(ix) Z linearity plyne, že $\|T(x)\| \le C$ pro každé $x \in B_X$, právě když $\|T(y)\| \le \delta C$ pro každé $y \in B(0,\delta)$.

$\square$

Zobrazením splňujícím (vii) se někdy říká omezená. Tedy lineární zobrazení je spojité, právě když je omezené.

V kontextu funkcionální analýzy se lineárním zobrazením říká též lineární *operátory* a lineárním formám lineární *funkcionály*. Nás budou především zajímat spojité lineární operátory a spojité lineární funkcionály.

Všimněme si, že je-li $T\colon X \to Y$ spojitý lineární operátor mezi normovanými lineárními prostory X a Y, pak $\operatorname{Ker} T$ je uzavřený podprostor X. Na druhou stranu, $\operatorname{Rng} T$ nemusí být uzavřený.

Připomeňme, že množina všech lineárních zobrazení mezi vektorovými prostory X a Y tvoří vektorový prostor s operacemi uvažovanými bodově. Jsou-li nyní X, Y normované lineární prostory, pak součet spojitých lineárních zobrazení z X do Y je opět spojité lineární zobrazení a podobně pro násobek skalárem (Tvrzení 2). Tedy množina všech spojitých lineárních zobrazení z X do Y tvoří vektorový prostor, který značíme $\mathcal{L}(X,Y)$. Dále pro každé $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ položíme

$$\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|T(x)\|.$$

Díky Tvrzení 44 je $\|T\|$ konečné nezáporné číslo. Nyní si rozmyslíme, že $T \mapsto \|T\|$ je norma na $\mathcal{L}(X,Y)$:

(i) Je-li $T \neq 0$, pak existuje $x \in X$, $x \neq 0$ takové, že $T(x) \neq 0$. Tedy $T(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{1}{\|x\|}T(x) \neq 0$, takže $\|T\| > 0$.

(ii) Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\|S+T\| = \sup_{x\in B_X}\|(S+T)(x)\| = \sup_{x\in B_X}\|S(x)+T(x)\| \le \sup_{x\in B_X}\|S(x)\| + \sup_{x\in B_X}\|T(x)\| = \|S\| + \|T\|$.

(iii) Nechť $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $\|\alpha T\| = \sup_{x\in B_X}\|(\alpha T)(x)\| = \sup_{x\in B_X}\|\alpha(T(x))\| = \sup_{x\in B_X}|\alpha|\|T(x)\| = |\alpha|\cdot\|T\|$.

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s výše uvedenou normou je tedy normovaný lineární prostor.

LEMMA 45. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(a) $\|T(x)\| \le \|T\|\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(b) $\|T\| = \sup_{x\in S_X}\|T(x)\| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\in U_X}\|T(x)\|$.

(c) $\|T\| = \inf\{C \ge 0;\ \|T(x)\| \le C\|x\|$ *pro každé* $x \in X\}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in X \setminus \{0\}$. Pak $\|T(x)\| = \|x\| \cdot \|T\big(\frac{x}{\|x\|}\big)\| \le \|T\|\|x\|$, neboť $\frac{x}{\|x\|} \in B_X$.

(b) Zjevně $\|T\| = \sup_{x\in B_X}\|T(x)\| \ge \sup_{x\in S_X}\|T(x)\|$. Je-li $x \in X\setminus\{0\}$, je $\frac{x}{\|x\|} \in S_X$ a

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \le \sup_{y\in S_X}\|T(y)\|.$$

Tedy $\sup_{x\in S_X}\|T(x)\| \ge \sup_{x\in X\setminus\{0\}}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$. Dále, je-li $x \in U_X \setminus \{0\}$, pak $\|T(x)\| < \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$. Tedy

$$\sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \ge \sup_{x\in U_X}\|T(x)\|.$$

Je-li $x \in B_X$, je $(1-\frac{1}{n})x \in U_X$ a $\big\|T\big((1-\frac{1}{n})x\big)\big\| \to \|T(x)\|$. Tedy $\sup_{x\in U_X}\|T(x)\| \ge \sup_{x\in B_X}\|T(x)\| = \|T\|$ a důkaz (b) je hotov.

(c) Označme $A = \{C \ge 0;\ \|T(x)\| \le C\|x\|$ pro každé $x \in X\}$. Díky (a) platí $\|T\| \in A$ a tedy $\inf A \le \|T\|$. Dokažme nyní opačnou nerovnost. Vezměme libovolné $\varepsilon > 0$. Z definice infima najdeme $C \in A$, $C < \inf A + \varepsilon$. Pak

$$\|T\| = \sup_{x\in B_X}\|T(x)\| \le \sup_{x\in B_X} C\|x\| = C < \inf A + \varepsilon.$$

Jelikož ε bylo libovolné, je $\|T\| \le \inf A$.

□

FAKT 46. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.*

DŮKAZ. Pro libovolné $x \in X$ díky Lemmatu 45 platí $\|T_n(x) - T(x)\| = \|(T_n - T)(x)\| \le \|T_n - T\|\|x\| \to 0$.

□

FAKT 47. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $\|T \circ S\| \le \|T\|\|S\|$.*

DŮKAZ. Pro libovolné $x \in X$ platí $\|T(S(x))\| \leq \|T\|\|S(x)\| \leq \|T\|\|S\|\|x\|$. Tedy $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$. □

VĚTA 48. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.*

DŮKAZ. Vezměme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{T_n\}$ v $\mathcal{L}(X, Y)$. Pro libovolné pevné $x \in X$ platí $\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$. Tedy posloupnost $\{T_n(x)\}$ je cauchyovská v Y a protože Y je úplný, existuje limita $\lim_{n\to\infty} T_n(x)$, kterou označíme $T(x)$. Máme tak definované zobrazení $T : X \to Y$.

Ukažme, že T je lineární. Mějme $x, y \in X$. Pak

$$T(x + y) = \lim_{n\to\infty} T_n(x + y) = \lim_{n\to\infty} \big(T_n(x) + T_n(y)\big) = T(x) + T(y)$$

dle Tvrzení 2. Podobně, $T(\alpha x) = \lim T_n(\alpha x) = \lim\big(\alpha T_n(x)\big) = \alpha T(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dále pro $x \in B_X$ platí

$$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \leq (\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|)\|x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|.$$

Protože $\big|\|T_n\| - \|T_m\|\big| \leq \|T_n - T_m\|$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$, je číselná posloupnost $\{\|T_n\|\}$ cauchyovská, a tedy omezená. Tudíž máme $\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|T(x)\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < +\infty$, tj. $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Zbývá dokázat, že $T_n \to T$ v normě prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$ pro každé $n, m \geq n_0$. Pak pro $x \in B_X$ a pevné $n \geq n_0$ máme

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m\geq n_0} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \sup_{m\geq n_0} \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \varepsilon.$$

Tedy $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ pro libovolné $n \geq n_0$. Proto $T_n \to T$. □

DEFINICE 49. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej duálním prostorem k prostoru X.

Prvky X^* jsou tedy spojité lineární funkcionály na X. Prostor X^* je normovaný lineární prostor s normou $\|f\| = \sup_{x\in B_X} |f(x)|$. Uvědomme si, že je-li X reálný, pak ze symetrie jednotkové koule plyne, že $\|f\| = \sup_{x\in B_X} f(x)$.

Protože jak $\mathbb{R}$, tak $\mathbb{C}$ jsou úplné prostory, důsledkem Věty 48 je následující věta.

VĚTA 50. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

PŘÍKLAD 51. Nechť $X = \ell_p$, $1 \leq p \leq \infty$, nebo $X = c_0$, nebo $X = c$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme funkci $f_n : X \to \mathbb{K}$ danou předpisem $f_n(x) = x_n$ pro $x = (x_k) \in X$. Pak je snadno vidět, že f je lineární forma a $|f_n(x)| = |x_n| \leq \|x\|$ pro každé $x \in X$. Tedy $f_n \in X^*$ a $\|f\| \leq 1$. Protože $f_n((0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)) = 1$, kde 1 je pouze na n-té souřadnici, je $\|f_n\| = 1$. Funkcionálům f_n budeme říkat kanonické souřadnicové funkcionály.

LEMMA 52. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| = \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $f \neq 0$. Zvolme $x \in X$ pevné. Je-li $y \in \operatorname{Ker} f$ libovolné, pak $|f(x)| = |f(x - y)| \leq \|f\|\|x - y\|$. Tedy $|f(x)| \leq \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$. Pro důkaz obrácené nerovnosti zvolme $0 < \varepsilon < \|f\|$ libovolně. Najděme $y \in S_X$ tak, že $|f(y)| \geq \|f\| - \varepsilon$. Pak $x - \frac{f(x)}{f(y)} y \in \operatorname{Ker} f$, a tedy

$$\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) \leq \left\| x - \left(x - \frac{f(x)}{f(y)} y \right) \right\| = \frac{|f(x)|}{|f(y)|} \leq \frac{|f(x)|}{\|f\| - \varepsilon}.$$

Jelikož bylo ε libovolné, je důkaz dokončen. □

Následující příklad ukazuje, že součet uzavřených podprostorů nemusí být uzavřený (srv. Tvrzení 23 a poznámka před).

PŘÍKLAD 53. Uvažujme prostor ℓ_2 a jeho následující dva podprostory: $Y = \{x \in \ell_2;\ x_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$ a $Z = \overline{\operatorname{span}}\{e_{2n} + ne_{2n-1};\ n \in \mathbb{N}\}$, kde e_n jsou kanonické bázové vektory. Pak $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{Ker} f_{2n}$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály, tedy Y i Z jsou uzavřené podprostory ℓ_2. Tvrdíme, že $Y + Z$ je hustý podprostor ℓ_2, který není uzavřený.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $e_{2n-1} \in Y$ a $e_{2n} = (e_{2n} + ne_{2n-1}) - ne_{2n-1} \in Z + Y$. Tedy podprostor $Y + Z$ obsahuje všechny kanonické bázové vektory i jejich lineární kombinace, tudíž je hustý v ℓ_2 (Příklad 29). Dále si všimněme, že je-li $z \in Z$, pak $z_{2n-1} = f_{2n-1}(z) = nf_{2n}(z) = nz_{2n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Vskutku, pro $z \in \operatorname{span}\{e_{2n} + ne_{2n-1};\ n \in \mathbb{N}\}$ je $z = \sum_{j=1}^{k} c_j(e_{2j} + je_{2j-1})$, a tedy $f_{2j-1}(z) = jc_j = jf_{2j}(z)$ pro $1 \leq j \leq k$ a $f_{2j-1}(z) = 0 = jf_{2j}(z)$ pro $j > k$. Je tedy $f_{2n-1}(z) - nf_{2n}(z) = 0$ pro všechna z z husté podmnožiny Z, a protože funkce $f_{2n-1} - nf_{2n}$ je spojitá na Z, je nutně nulová na celém Z.

Položme konečně $x = \left(0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \dots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_{2n}$. Předpokládejme, že $x = y + z$, kde $y \in Y$ a $z \in Z$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{n} = x_{2n} = y_{2n} + z_{2n} = z_{2n}$, a tedy $z_{2n-1} = 1$. To ovšem nelze, neboť $z \in \ell_2$. Tedy $x \notin Y + Z$.

Připomeňme, že je-li T lineární bijekce mezi vektorovými prostory X a Y, pak inverzní zobrazení T^{-1} je též lineární.

DEFINICE 54. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen izometrie do), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- izomorfní, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- izometrické, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- izomorfně vnořen do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- izometricky vnořen do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

POZNÁMKA 55. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$. Pro libovolná $x, y \in X$ pak totiž máme $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\|$.

PŘÍKLAD 56. Prostor c je izomorfní prostoru c_0. Definujme zobrazení $T\colon c_0 \to c$ předpisem

$$(x_1, x_2, x_3 \dots) \mapsto (x_2 + x_1, x_3 + x_1, x_4 + x_1, \dots).$$

Pak T je dobře definováno, neboť $\lim(x_n + x_1) = x_1$. Snadno je vidět, že T je lineární. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|x_n + x_1| \leq |x_n| + |x_1| \leq \|x\|_{c_0} + \|x\|_{c_0} = 2\|x\|_{c_0}$, a tedy $\|T(x)\|_c = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_{n+1} + x_1| \leq 2\|x\|_{c_0}$. Zobrazení T je tedy spojité lineární zobrazení.

Dále definujme zobrazení $S\colon c \to c_0$ předpisem

$$(y_1, y_2, y_3, \dots) \mapsto (\lim y_n, y_1 - \lim y_n, y_2 - \lim y_n, y_3 - \lim y_n, \dots).$$

Pak S je dobře definováno, neboť $\lim_{k \to \infty}(y_k - \lim_{n \to \infty} y_n) = \lim_{k \to \infty} y_k - \lim_{n \to \infty} y_n = 0$. Snadno je vidět, že $T \circ S = Id_c$ a $S \circ T = Id_{c_0}$. Odtud plyne, že T je bijekce a S je lineární zobrazení inverzní k T. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $|y_k - \lim y_n| \leq |y_k| + |\lim y_n| = |y_k| + \lim |y_n| \leq |y_k| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n| \leq 2\|y\|_c$ a také $|\lim y_n| \leq \|y\|_c \leq 2\|y\|_c$. Tedy $\|S(y)\|_{c_0} \leq 2\|y\|_c$, takže zobrazení S je spojité.

Na závěr si ještě všimněme, že c_0 je vlastní podprostor c, který je izomorfní c.

PŘÍKLAD 57. Prostor $L_1 = L_1([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1, tj. prostor ℓ_1 je izometricky vnořen do L_1. Vskutku, označme $f_n = n(n+1)\chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})} \in L_1$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\|f_n\|_{L_1} = 1$. Definujme zobrazení $T: \ell_1 \to L_1$ předpisem $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$, kde konvergence řady je míněna jako bodová konvergence funkcí na $[0,1]$. Pak zjevně $T(x)$ je dobře definovaná funkce na $[0,1]$, která je měřitelná, neboť je bodovou limitou měřitelných funkcí. Podle věty o záměně integrálu a řady pro nezáporné funkce máme

$$\int_0^1 |T(x)| = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |x_n| f_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty,$$

tedy $T(x) \in L_1$ a zároveň vidíme, že $\|T(x)\|_{L_1} = \|x\|_{\ell_1}$. Zobrazení T je zjevně lineární, takže dle Poznámky 55 je to lineární izometrie do.

PŘÍKLAD 58. Prostor $C([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický prostoru c_0, tj. prostor c_0 je izometricky vnořen do $C([0,1])$. Vskutku, pro $n \in \mathbb{N}$ označme f_n funkci, která je rovna 0 na $[0,1] \setminus \left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n}\right)$, je afinní na $\left(\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}\right)$ a na $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$ a splňuje $f_n\left(\frac{1}{2n+1}\right) = 1$. Pak $\|f_n\|_{C([0,1])} = 1$. Definujme zobrazení $T: c_0 \to C([0,1])$ předpisem $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, kde konvergence řady je míněna jako bodová konvergence funkcí na $[0,1]$. Nechť $x \in c_0$. Pak zjevně $f = T(x)$ je dobře definovaná funkce na $[0,1]$, která je afinní na každém intervalu $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ a splňuje $f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = x_n$. Je tedy spojitá na $(0,1]$. Abychom ukázali spojitost v 0 zprava, všimněme si, že $f(0) = 0$ a zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Položme $\delta = \frac{1}{2n_0}$. Nechť $t \in (0,\delta)$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ takové, že $t \in \left[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n}\right]$. Tedy $|f(t)| \leq |x_n| < \varepsilon$. Ukázali jsme, že $f \in C([0,1])$, neboli zobrazení T vskutku zobrazuje do prostoru $C([0,1])$. Dále T je zjevně lineární a platí $\|T(x)\|_{C([0,1])} = \sup_{t\in[0,1]} |T(x)(t)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|x\|_{c_0}$, takže dle Poznámky 55 je to lineární izometrie do.

PŘÍKLAD 59. Prostor $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2,)$ obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_∞, a není tedy separabilní. Toto vnoření $I: \ell_\infty \to \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ je dáno předpisem $I(y) = T_y$, kde $T_y(x) = (y_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ pro $x \in \ell_2$.

Vskutku je-li $y \in \ell_\infty$, pak pro $x \in \ell_2$ je $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n x_n|^2 \leq \|y\|_\infty^2 \|x\|_2^2$, tedy T_y zobrazuje do ℓ_2. Snadno nahlédneme, že T_y je lineární a z předchozího odhadu plyne, že je spojité a $\|T_y\| \leq \|y\|$. Pro opačný odhad zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $|y_n| > \|y\| - \varepsilon$. Pak pro kanonický bázový vektor $e_n \in B_{\ell_2}$ platí, že $\|T_y(e_n)\| = \|y_n e_n\| = |y_n| > \|y\| - \varepsilon$. Tedy $\|T_y\| = \|y\|$. Linearitu zobrazení I si lze snadno rozmyslet. Protože $\|I(y)\| = \|T_y\| = \|y\|$, je I izometrie do. Neseparabilita $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ pak plyne z Věty 26(b).

TVRZENÍ 60. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.

(c) Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený v Y.*

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ Máme $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$. Dále $T^{-1}\colon \operatorname{Rng} T \to X$ je spojité, platí tedy pro každé $y \in \operatorname{Rng} T$ nerovnost $\|T^{-1}(y)\| \leq \|T^{-1}\|\|y\|$. Tudíž $\|x\| = \|T^{-1}(T(x))\| \leq \|T^{-1}\|\|T(x)\|$ pro každé $x \in X$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $X \neq \{0\}$, a tedy $\|T^{-1}\| > 0$. Požadovaná nerovnost tak platí s konstantami $C_1 = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ a $C_2 = \|T\|$.

$\Leftarrow$ Splňují-li kladné konstanty C_1, C_2 požadované nerovnosti, je T spojité a prosté: Je-li $T(x) = 0$, pak $\|x\| \leq \frac{1}{C_1}\|T(x)\| = 0$, tedy $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Existuje tedy inverzní operátor $T^{-1}\colon \operatorname{Rng} T \to X$, který je lineární. Pro libovolné $y \in \operatorname{Rng} T$ pak máme $\|T^{-1}(y)\| \leq \frac{1}{C_1}\|T(T^{-1}(y))\| = \frac{1}{C_1}\|y\|$. Tedy i T^{-1} je spojité.

(b) Vezměme libovolnou cauchyovskou posloupnost $\{y_n\}$ v Y. Díky odhadu $\|T^{-1}(y_n) - T^{-1}(y_m)\| \leq \|T^{-1}\|\|y_n - y_m\|$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ je cauchyovská i posloupnost $\{T^{-1}(y_n)\}$. Vzhledem k tomu, že X je úplný, konverguje $\{T^{-1}(y_n)\}$ k nějakému $x \in X$. Pak ovšem ze spojitosti operátoru T plyne $y_n = T(T^{-1}y_n) \to T(x)$, tedy i $\{y_n\}$ je konvergentní. Proto je Y úplný.

(c) Podle (b) je $\operatorname{Rng} T$ Banachův prostor. Tedy je uzavřený v Y dle Tvrzení 5(a).

$\square$

FAKT 61. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$.*
(a) Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.
(b) Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

DŮKAZ. (a) Podle Tvrzení 60(a) existují konstanty $C > 0$ a $D > 0$ takové, že $C\|x\| \leq \|T(x)\|$ pro každé $x \in X$ a $D\|y\| \leq \|S(y)\|$ pro každé $y \in Y$. Pro každé $x \in X$ tedy máme $CD\|x\| \leq D\|T(x)\| \leq \|S(T(x))\| = \|S \circ T(x)\| \leq \|S\|\|T\|\|x\|$. Podle Tvrzení 60(a) to znamená, že $S \circ T$ je izomorfismus do.

(b) Pro každé $x \in X$ máme $\|S \circ T(x)\| = \|S(T(x))\| = \|T(x)\| = \|x\|$ a aplikujeme Poznámku 55.

$\square$

VĚTA 62. *Nechť X, $\widehat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\widehat{X}$ a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X},Y)$ rozšiřující T, tj. $\widehat{T}\restriction_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

DŮKAZ. Dle Věty 13.8 existuje jednoznačně určené spojité zobrazení $\widehat{T}\colon \widehat{X} \to Y$, které rozšiřuje T. Ukážeme, že $\widehat{T}$ je lineární. Nechť $x, y \in \widehat{X}$. Pak existují posloupnosti $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ v X splňující $x_n \to x$, $y_n \to y$. Ze spojitosti sčítání (Tvrzení 2) plyne $x_n + y_n \to x + y$. Využijeme-li spojitost $\widehat{T}$, máme $\widehat{T}(x+y) = \lim \widehat{T}(x_n + y_n) = \lim T(x_n + y_n) = \lim\big(T(x_n) + T(y_n)\big) = \lim\big(\widehat{T}(x_n) + \widehat{T}(y_n)\big) = \widehat{T}(x) + \widehat{T}(y)$, kde poslední rovnost plyne opět z Tvrzení 2. Podobně pro $\alpha \in \mathbb{K}$ máme $\alpha x_n \to \alpha x$ a tedy $\widehat{T}(\alpha x) = \lim \widehat{T}(\alpha x_n) = \lim T(\alpha x_n) = \lim \alpha T(x_n) = \lim \alpha \widehat{T}(x_n) = \alpha \widehat{T}(x)$.

Konečně, $\|x_n\| \to \|x\|$ a tedy $\|\widehat{T}(x)\| = \lim\|\widehat{T}(x_n)\| = \lim\|T(x_n)\| \leq \lim\|T\|\|x_n\| = \|T\|\|x\|$. Odtud plyne $\|\widehat{T}\| \leq \|T\|$. Jelikož obrácená nerovnost platí díky tomu, že $\widehat{T}$ je rozšířením T, máme $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

$\square$

4. Konečněrozměrné prostory

LEMMA 63 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918)). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x,Y) > 1 - \varepsilon$.*

DŮKAZ. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolme $u \in X \setminus Y$ a označme $d = \operatorname{dist}(u,Y)$. Protože Y je uzavřený, je $d > 0$ a můžeme nalézt $\eta > 0$ tak, aby $\frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$. Dále existuje $v \in Y$ takové, že $\|u - v\| \leq d + \eta$. Položme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Pak $x \in S_X$. Je-li $y \in Y$ libovolné, je $v + \|u-v\|y \in Y$, a tedy

$$\|x - y\| = \left\| \frac{u-v}{\|u-v\|} - y \right\| = \frac{\big\|u - \big(v + \|u-v\|y\big)\big\|}{\|u-v\|} \geq \frac{d}{d+\eta}.$$

Dostáváme tak, že $\operatorname{dist}(x,Y) = \inf_{y \in Y}\|x - y\| \geq \frac{d}{d+\eta} > 1 - \varepsilon$.

$\square$

POZNÁMKA. Není-li Y uzavřený, nemusí předchozí tvrzení platit: podprostor c_{00} je hustý v c_0 a tedy pro každé $x \in c_0$ platí $\operatorname{dist}(x, c_{00}) = 0$. Pokud je Y uzavřený, nemusí existovat $x \in S_X$ s vlastností $\operatorname{dist}(x,Y) = 1$. To ukážeme v Příkladu 65.

LEMMA 64. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in S_{X^*}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Existuje $x \in S_X$ splňující $|f(x)| = 1$.
(ii) Existuje $x \in S_X$ splňující $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) = 1$.
(iii) Existují $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ a $v \in \operatorname{Ker} f$ taková, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$.
(iv) Pro každé $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$ existuje $v \in \operatorname{Ker} f$ takové, že $\|u - v\| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$.

DŮKAZ. Ekvivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) ihned plyne z Lemmatu 52 a zjevně (iv)$\Rightarrow$(iii).

(iii)$\Rightarrow$(ii) Položme $x = \frac{u-v}{\|u-v\|}$. Pak pro každé $y \in \operatorname{Ker} f$ platí

$$\|x - y\| = \frac{\big\|u - \big(v + \|u - v\|y\big)\big\|}{\|u - v\|} \geq \frac{\operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)}{\|u - v\|} = 1.$$

Protože $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) \leq \|x\| = 1$, platí $\operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f) = 1$.

(i)$\Rightarrow$(iv) Nechť $u \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Položme $v = u - \frac{f(u)}{f(x)}x$. Pak $v \in \operatorname{Ker} f$ a $\|u - v\| = \big\|\frac{f(u)}{f(x)}x\big\| = |f(u)| = \operatorname{dist}(u, \operatorname{Ker} f)$ dle Lemmatu 52.

□

PŘÍKLAD 65. Nechť $Y = \big\{x \in c_0;\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = 0\big\}$. Ukážeme, že Y je uzavřený podprostor c_0 a že neexistuje $x \in S_{c_0}$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$. Dále pro žádné $x \in c_0 \setminus Y$ neexistuje $y \in Y$ takové, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$.

Uvažme funkci $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ pro $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Pak zřejmě f je lineární forma na c_0 a $Y = \operatorname{Ker} f$. Dále pro každé $x \in B_{c_0}$ máme $|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, tedy f je spojitý lineární funkcionál. Navíc pro $x = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ krát}}, 0, 0, \dots)$ máme $x \in B_{c_0}$ a $f(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^k}$, tedy $\|f\| = 1$. K důkazu tvrzení nyní stačí podle Lemmatu 64 ověřit, že neexistuje $x \in S_{c_0}$ s vlastností $|f(x)| = 1$. Ale to je ihned vidět z pozorování, že pro každé $x \in S_{c_0}$ existuje index $j \in \mathbb{N}$ takový, že $|x_j| < 1$. Pak totiž

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|}{2^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

VĚTA 66. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.
(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
(iii) B_X je kompaktní.
(iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.
(v) Každá lineární forma na X je spojitá.
(vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze X. Definujeme zobrazení $T : \mathbb{K}^n \to X$ předpisem

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Snadno je vidět, že T je lineární zobrazení, a díky vlastnostem báze je to bijekce. Protože „projekce“ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost T.

Ukažme nyní i spojitost inverze T^{-1}. Množina $S = S_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$ je kompaktní, neboť je uzavřená a omezená (viz Větu 13.2). Protože T je spojitý, je množina $T(S)$ také kompaktní. Norma $\|\cdot\|_X$ je spojitá na X, a tedy nabývá na $T(S)$ minima $C > 0$ ($T(S)$ neobsahuje 0 díky prostotě T). Pro libovolné $y \in X \setminus \{0\}$ je $\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2} \in S$, takže $C \leq \Big\|T\Big(\frac{T^{-1}(y)}{\|T^{-1}(y)\|_2}\Big)\Big\|_X = \frac{\|y\|_X}{\|T^{-1}(y)\|_2}$, odkud $\|T^{-1}(y)\|_2 \leq \frac{1}{C}\|y\|_X$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Je-li $T : \mathbb{K}^n \to X$ izomorfismus, je $T^{-1}(B_X)$ uzavřená omezená podmnožina $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, takže je kompaktní. Tedy i $B_X = T(T^{-1}(B_X))$ je kompaktní.

(iii)$\Rightarrow$(i) Nechť X je nekonečné dimenze. Indukcí najdeme posloupnost prvků $\{x_n\}$ v S_X tak, že $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$: V prvním kroku najdeme libovolné $x_1 \in S_X$. Máme-li $x_1, \dots, x_n$, je $\operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ vlastní a uzavřený podprostor X (Důsledek 25). Tedy dle Lemmatu 63 existuje x_{n+1} splňující $\operatorname{dist}(x_{n+1}, \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}) \geq \frac{1}{2}$. Tím je konstrukce dokončena. Zkonstruovaná posloupnost $\{x_n\}$ pak nemá konvergentní podposloupnost, neboť jsou všechny její prvky od sebe navzájem vzdáleny alespoň o $\frac{1}{2}$. Tedy B_X není kompaktní.

(i)⇒(vi) Nechť $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Zafixujme nějakou bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru X. Označme eukleidovskou[11] normu na $\mathbb{K}^n$ jako $\|\cdot\|_e$. Nechť $T_1\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$ a $T_2\colon (X, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_e)$ jsou izomorfismy z důkazu (i)⇒(ii). Pak $T_2^{-1} \circ T_1 = Id_X$, a tedy $Id_X\colon (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus (Fakt 61), tj. normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní dle Tvrzení 13.

(vi)⇒(v) Předpokládejme, že na $(X, \|\cdot\|)$ existuje nespojitá lineární forma f. Pro každé $x \in X$ položíme $\|x\|_0 = \|x\| + |f(x)|$. Snadno je vidět, že $\|\cdot\|_0$ je norma na X, která je ovšem neomezená na $B_{(X,\|\cdot\|)}$. Tedy normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_0$ nejsou ekvivalentní.

(v)⇒(i) Není-li X konečněrozměrný, má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že všechny vektory e_γ mají normu 1. Vyberme nekonečnou spočetnou množinu $\{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$ a položme $f(e_{\gamma_n}) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(e_\gamma) = 0$ pro $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak f lze jednoznačně rozšířit na lineární formu na X, která ovšem není omezená na B_X.

(i)⇒(iv) Nechť Y je nějaký normovaný lineární prostor a $T\colon (X, \|\cdot\|) \to Y$ je lineární zobrazení. Zvolme bázi $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostoru X a uvažujme normu $\|x\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^n x_i e_i\right\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. Díky tvrzení (vi) stačí dokázat, že $T\colon (X, \|\cdot\|_1) \to Y$ je spojité. To je ale zřejmé z odhadu

$$\|T(x)\| = \left\|\sum_{i=1}^n x_i T(e_i)\right\| \le \sum_{i=1}^n |x_i| \|T(e_i)\| \le \max\bigl\{\|T(e_1)\|, \dots, \|T(e_n)\|\bigr\} \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

(iv)⇒(v) je triviální.

□

Všimněme si, že podle předchozí věty jsou všechny uzavřené omezené množiny v konečněrozměrném prostoru X kompaktní. Vskutku, každá taková množina je uzavřenou podmnožinou nějaké koule $B(0, r)$, která je kompaktní, neboť je to spojitý obraz kompaktní koule B_X při zobrazení $x \mapsto rx$ (Tvrzení 2(c)).

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$. Na kartézském součinu $X \times Y = \{(x, y);\ x \in X, y \in Y\}$ se zavádí struktura vektorového prostoru nad $\mathbb{K}$ tak, že operace se provádějí po složkách. Identifikujeme-li prostor X, resp. Y s podprostorem $\{(x, 0);\ x \in X\}$, resp. $\{(0, y);\ x \in Y\}$, pak vektorový prostor $X \times Y$ je direktním součtem $X \oplus Y$.

Jsou-li nyní $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \le p \le \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} \bigl(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\bigr)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$: Nechť $|\cdot|_p$ značí příslušnou kanonickou normu na $\mathbb{R}^2$. Pak zjevně $\|(x, y)\|_p = \bigl|\bigl(\|x\|_X, \|y\|_Y\bigr)\bigr|_p$. Nechť (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou prvky $X \times Y$. Pak $\|(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\|_p = \|(x_1 + x_2, y_1 + y_2)\|_p = \bigl|\bigl(\|x_1 + x_2\|_X, \|y_1 + y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p$. Protože $\|x_1 + x_2\|_X \le \|x_1\|_X + \|x_2\|_X$ a $\|y_1 + y_2\|_Y \le \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y$, je snadno vidět z definice $|\cdot|_p$, že

$$\begin{aligned}\bigl|\bigl(\|x_1 + x_2\|_X, \|y_1 + y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p &\le \bigl|\bigl(\|x_1\|_X + \|x_2\|_X, \|y_1\|_Y + \|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p = \\ &= \bigl|\bigl(\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\bigr) + \bigl(\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p.\end{aligned}$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro $|\cdot|_p$ pak dostaneme

$$\bigl|\bigl(\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\bigr) + \bigl(\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p \le \bigl|\bigl(\|x_1\|_X, \|y_1\|_Y\bigr)\bigr|_p + \bigl|\bigl(\|x_2\|_X, \|y_2\|_Y\bigr)\bigr|_p.$$

[11]Eukleides (Ευκλείδης)

Tedy dohromady $\|(x_1, y_1)+(x_2, y_2)\|_p \leq \|(x_1, y_1)\|_p+\|(x_2, y_2)\|_p$. Pro $\alpha \in \mathbb{K}$ a $(x, y) \in X\times Y$ pak máme $\|\alpha(x, y)\|_p = \|(\alpha x, \alpha y)\|_p = \big|\big(\|\alpha x\|_X, \|\alpha y\|_Y\big)\big|_p = \big|\big(|\alpha|\|x\|_X, |\alpha|\|y\|_Y\big)\big|_p = \big||\alpha|\big(\|x\|_X, \|y\|_Y\big)\big|_p = |\alpha|\big|\big(\|x\|_X, \|y\|_Y\big)\big|_p = |\alpha|\|(x, y)\|_p$.

Definice 67. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Je vidět, že prostor X je izometrický podprostoru $\{(x, 0) \in X \oplus_p Y;\ x \in X\}$ a prostor Y je izometrický podprostoru $\{(0, y) \in X \oplus_p Y;\ y \in Y\}$.

Protože $\|(x, y)\|_p = \big|\big(\|x\|_X, \|y\|_Y\big)\big|_p$ a všechny normy na $\mathbb{R}^2$ jsou ekvivalentní (Věta 11), plyne odtud snadno, že normy $\|\cdot\|_p$ na $X \times Y$ jsou ekvivalentní, neboli prostory $X \oplus_p Y$ a $X \oplus_q Y$ jsou izomorfní pro libovolná $1 \leq p, q \leq \infty$ (Tvrzení 13).

Všimněme si, že metrika indukovaná normou $X \oplus_\infty Y$ odpovídá součinové metrice na metrickém prostoru $X \times Y$. Protože součin úplných metrických prostorů je úplný (Věta 13.6), plyne odtud, že jsou-li X a Y Banachovy prostory, pak i $X \oplus_\infty Y$ je Banachův prostor. Vzhledem k výše zmíněné ekvivalenci norem tedy z Tvrzení 60(b) plyne, že jsou-li X a Y Banachovy prostory, pak i $X \oplus_p Y$ je Banachův prostor pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$.

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Jako nulový vektor slouží prvek $\widehat{0} = Y$. Uvědomme si, že operace jsou dobře definovány, neboť nezáleží na výběru reprezentantů příslušných tříd: Jsou-li totiž $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ takové, že $\widehat{x_1} = \widehat{x_2}$ a $\widehat{y_1} = \widehat{y_2}$, pak $x_1 - x_2 \in Y$ a $y_1 - y_2 \in Y$. Proto $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in Y$, což znamená, že $\widehat{x_1 + y_1} = \widehat{x_2 + y_2}$. Podobně, $\alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha(x_1 - x_2) \in Y$, a tedy $\widehat{\alpha x_1} = \widehat{\alpha x_2}$.

S výše zmíněnými operacemi tvoří X/Y vektorový prostor.

Definice 68. Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme faktorprostorem prostoru X podle Y nebo též kvocientem X podle Y. Dále definujeme tzv. kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Snadno je z definice vidět, že kanonické kvocientové zobrazení je lineární a na.

Nechť nyní X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Položíme-li

$$\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y\in\widehat{x}}\|y\| = \inf_{y\in Y}\|x + y\| = \inf_{y\in Y}\|x - y\| = \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y),$$

je $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ normovaný lineární prostor: Je-li $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, máme

$$\begin{aligned}\|\alpha\widehat{x}\|_{X/Y} = \|\widehat{\alpha x}\|_{X/Y} &= \inf_{z\in Y}\|\alpha x + z\| = \inf_{z\in Y}\|\alpha x + \alpha z\| = \\ &= \inf_{z\in Y}|\alpha|\|x + z\| = |\alpha| \inf_{z\in Y}\|x + z\| = |\alpha|\|\widehat{x}\|_{X/Y}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\|\widehat{x} + \widehat{y}\|_{X/Y} = \|\widehat{x + y}\|_{X/Y} &= \inf_{z\in Y}\|x + y + z\| = \inf_{z_1,z_2\in Y}\|x + y + z_1 + z_2\| \leq \\ &\leq \inf_{z_1,z_2\in Y}\big(\|x + z_1\| + \|y + z_2\|\big) = \inf_{z_1\in Y}\inf_{z_2\in Y}\big(\|x + z_1\| + \|y + z_2\|\big) = \\ &= \inf_{z_1\in Y}\|x + z_1\| + \inf_{z_2\in Y}\|y + z_2\| = \|\widehat{x}\|_{X/Y} + \|\widehat{y}\|_{X/Y}.\end{aligned}$$

Konečně, pro $x \in X$ platí, že $\|\widehat{x}\|_{X/Y} = \operatorname{dist}(x, Y) = 0$ právě tehdy, když $x \in \overline{Y} = Y$, tedy právě když $\widehat{x} = 0$. (Všimněme si, že kvůli poslední vlastnosti je nutná uzavřenost Y.)

Výše zmíněná norma se nazývá kanonická kvocientová norma a v kontextu normovaných lineárních prostorů budeme vždy chápat faktorprostor X/Y jako normovaný lineární prostor opatřený touto normou.

TVRZENÍ 69. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

DŮKAZ. Již víme, že q je lineární a na. Dále $\|q(x)\|_{X/Y} = \|\widehat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y\in Y}\|x + y\| \leq \|x\|$ pro každé $x \in X$, tedy q je spojité. Odtud také dostáváme, že $q(U_X) \subset U_{X/Y}$. Obráceně, je-li $\widehat{x} \in U_{X/Y}$ libovolné, pak $1 > \|\widehat{x}\|_{X/Y}$, a tedy z definice normy existuje $y \in \widehat{x}$ splňující $\|y\| < 1$. Toto y splňuje $q(y) = \widehat{x}$. Odtud plyne $U_{X/Y} \subset q(U_X)$ a dohromady dostáváme $q(U_X) = U_{X/Y}$. Konečně, je-li Y vlastní, pak je X/Y netriviální a $\sup_{z\in U_{X/Y}}\|z\| = 1$. Aplikací Lemmatu 45(b) tak dostaneme $\|q\| = 1$.

□

VĚTA 70. *Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

DŮKAZ. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady Věty 30. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x_n}$ je absolutně konvergentní řada v X/Y. Z definice normy najdeme prvky $y_n \in \widehat{x_n}$ splňující $\|y_n\| \leq \|\widehat{x_n}\| + \frac{1}{2^n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ je absolutně konvergentní řada v X, a tedy je konvergentní (Věta 30). Ze spojitosti kanonického kvocientového zobrazení q dostáváme $q\left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} q(y_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{y_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x_n}$, tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{x_n}$ je konvergentní.

□

DEFINICE 71. Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je direktním (též algebraickým) součtem A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá algebraický doplněk A v X.

Připomeňme, že $X = A \oplus B$, právě když pro každé $x \in X$ existují jednoznačně určené vektory $x_A \in A$ a $x_B \in B$ splňující $x = x_A + x_B$.

DEFINICE 72. Nechť X je množina. Zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá projekce, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

FAKT 73. *Nechť X je množina.*

(a) Je-li $P\colon X \to X$ projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.

(b) Je-li $Y \subset X$ a $P\colon X \to Y$ zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.

DŮKAZ. (a) Pro $y \in \operatorname{Rng} P$ existuje $x \in X$ splňující $y = P(x)$, a tedy $P(y) = P(P(x)) = P(x) = y$.

(b) Pro $x \in X$ je $P(x) \in Y$, a tedy $P(P(x)) = P\restriction_Y(P(x)) = P(x)$.

□

Zásadní význam mají projekce lineární (tj. projekce, které jsou zároveň lineárními zobrazeními). Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Je-li $X = A \oplus B$, pak můžeme definovat zobrazení $P_A\colon X \to X$ a $P_B\colon X \to X$ pomocí $P_A(x) = x_A \in A$ a $P_B(x) = x_B \in B$, kde $x = x_A + x_B$ je výše zmíněný jednoznačný rozklad. Pak P_A i P_B jsou lineární projekce: Nechť $x, y \in X$ a $x = x_A + x_B$, $y = y_A + y_B$ jsou příslušné rozklady. Pak $x + y = (x_A + x_B) + (y_A + y_B) = (x_A + y_A) + (x_B + y_B)$. Jelikož $x_A + y_A \in A$ a $x_B + y_B \in B$, z jednoznačnosti rozkladu plyne $P_A(x + y) = x_A + y_A = P_A(x) + P_A(y)$ a $P_B(x + y) = x_B + y_B = P_B(x) + P_B(y)$. Podobně, pro $\alpha \in \mathbb{K}$ máme $\alpha x = \alpha(x_A + x_B) = \alpha x_A + \alpha x_B$. Protože $\alpha x_A \in A$ a $\alpha x_B \in B$, z jednoznačnosti rozkladu plyne $P_A(\alpha x) = \alpha x_A = \alpha P_A(x)$ a $P_B(\alpha x) = \alpha x_B = \alpha P_B(x)$. Konečně, $P_A(P_A(x)) = P_A(x_A) = x_A = P_A(x)$, neboť $x_A = x_A + 0$ je jednoznačný rozklad x_A. Analogicky dostaneme, že i P_B je projekce.

Projekce P_A a P_B nazýváme projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$. Vzhledem k následujícímu tvrzení se též projekce P_A nazývá projekce na A rovnoběžná s B (a analogicky pro projekci P_B).

TVRZENÍ 74. *Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$,* $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ *a* $\operatorname{Ker} P_B = A$. *Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.*

DŮKAZ. Je $(P_A + P_B)(x) = P_A(x) + P_B(x) = x_A + x_B = x$. Dále zjevně platí $\operatorname{Rng} P_A \subset A$. Na druhou stranu, je-li $x \in A$, pak $x = x_A + 0$ je jednoznačný rozklad a tedy $P_A(x) = x$ a $P_B(x) = 0$. To znamená, že $\operatorname{Rng} P_A = A$ a $A \subset \operatorname{Ker} P_B$. Konečně, je-li $P_B(x) = 0$, pak $x = x_A + 0$, a tedy $x \in A$. Ostatní dvě rovnosti se dokážou analogicky.

Nechť nyní $P: X \to X$ je lineární projekce. Pak pro každé $x \in X$ platí $x = P(x) + \big(x - P(x)\big)$, kde $P(x) \in \operatorname{Rng} P$ a $x - P(x) \in \operatorname{Ker} P$, a tedy $A + B = X$. Je-li $x \in A \cap B$, pak $x = P(y)$ pro nějaké $y \in X$ a zároveň $0 = P(x) = P \circ P(y) = P(y) = x$, tj. $A \cap B = \{0\}$. Proto $X = A \oplus B$. Z rozkladu $x = P(x) + \big(x - P(x)\big)$, který je díky $X = A \oplus B$ nutně jednoznačný, je pak ihned vidět, že $P = P_A$.

□

VĚTA 75. *Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Prostor Y má algebraický doplněk v X.
(b) Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y; speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

DŮKAZ. (a) Nechť $B \subset Y$ je báze Y. Pak B lze doplnit na bázi celého prostoru, existuje tedy lineárně nezávislá množina $C \subset X$ taková, že $B \cup C$ je báze X. Položme $Z = \operatorname{span} C$. Pak je ihned vidět, že $X = Y + Z$. Pokud by $Y \cap Z$ obsahoval nenulový prvek x, pak x je netriviální lineární kombinací prvků B a zároveň netriviální lineární kombinací prvků C. To je spor s jednoznačností vyjádření pomocí lineární kombinace prvků $B \cup C$.

(b) Nechť $q: X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Ukažme, že $q\restriction_A$ je algebraický izomorfismus A na X/Y. Ověřme nejprve prostotu: Je-li $q\restriction_A(a) = q(a) = \widehat{a} = 0$ pro nějaké $a \in A$, pak $a \in Y$, a tedy $a = 0$. K důkazu surjektivity vezměme $\widehat{x} \in X/Y$ a rozložme $x = x_Y + x_A$, kde $x_Y \in Y$ a $x_A \in A$. Pak $x - x_A = x_Y \in Y$, a tedy $q\restriction_A(x_A) = q(x_A) = q(x) = \widehat{x}$.

□

DEFINICE 76. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak kodimenzí Y v X (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

DEFINICE 77. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá topologický doplněk A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je komplementovaný (v X).

POZNÁMKA. Protože $P_B = Id - P_A$ (Tvrzení 74), k tomu, aby platilo $X = A \oplus_t B$, stačí spojitost jen jedné z projekcí (druhá je pak spojitá automaticky). Díky Tvrzení 74 je tedy podprostor A komplementovaný v X, právě když existuje spojitá lineární projekce z X na A.

Všimněme si také, že pro nenulovou spojitou lineární projekci P v normovaném lineárním prostoru X vždy platí, že $\|P\| \geq 1$, neboť existuje $x \in X$ takový, že $y = P(x) \neq 0$, a protože $P(y) = P(x) = y$, je $\left\| P\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = \frac{\|P(y)\|}{\|y\|} = 1$.

VĚTA 78. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.*

(a) Je-li $X = Y \oplus_t Z$, jsou Y a Z uzavřené.
(b) Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y a Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_t Z$.

DŮKAZ. (a) $Y = \operatorname{Ker} P_Z$ a $Z = \operatorname{Ker} P_Y$ (Tvrzení 74), jejich uzavřenost tedy plyne ze spojitostí projekcí P_Y a P_Z. (b) bude dokázáno později, konkrétně na str. 56.

□

Díky předchozí větě a Větě 75 vidíme, že neuzavřené podprostory mají algebraický, ale nemají topologický doplněk (tj. nejsou komplementované).

VĚTA 79. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ je izomorfismus.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Je-li $(y,z) \in Y \oplus_1 Z$, pak $T(y+z) = (y,z)$, tedy T je na. Dále pro každé $x \in X$ máme

$$\begin{aligned}\|x\| = \|P_Y(x) + P_Z(x)\| \le \|P_Y(x)\| + \|P_Z(x)\| = \|\big(P_Y(x), P_Z(x)\big)\|_1 = \|T(x)\|_1 \le\\ \le \big(\|P_Y\| + \|P_Z\|\big)\|x\|,\end{aligned}$$

tedy T je izomorfismus dle Tvrzení 60(a).

$\Leftarrow$ Pro každé $x \in X$ platí $\|P_Y(x)\| \le \|P_Y(x)\| + \|P_Z(x)\| = \|T(x)\|_1 \le \|T\|\|x\|$, což znamená, že P_Y je spojitá projekce.

□

6. Hilbertovy prostory

DEFINICE 80. Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,
(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,
(iii) $\langle x, x\rangle \ge 0$ pro každé $x \in X$,
(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme prostor se skalárním součinem.

Uvědomme si, že z (i) a (ii) plyne, že $\langle 0, y\rangle = \langle y, 0\rangle = 0$ pro každé $y \in X$. Dále si uvědomme, že ve druhé proměnné je skalární součin „sdruženě lineární“, tj. $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\langle x, z\rangle$ pro libovolná $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. V reálném případě je to tedy bilineární forma na X.

TVRZENÍ 81 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost[12]). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak*

(i) $|\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ pro každé $x, y \in X$.
(ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X.

DŮKAZ. K důkazu (i) zvolme $x, y \in X$. Pokud $y = 0$, nerovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že $y \ne 0$, tj. $\langle y, y\rangle > 0$. Pak je funkce

$$t \mapsto \langle x - ty, x - ty\rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

kvadratický polynom nezáporný na $\mathbb{R}$, protože

$$\begin{aligned}0 \le \langle x - ty, x - ty\rangle = \langle x, x\rangle - t\langle y, x\rangle - t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle - t\big(\langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle}\big) + t^2\langle y, y\rangle =\\ = t^2\langle y, y\rangle - 2t\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle.\end{aligned}$$

Tento polynom tedy musí mít nekladný diskriminant, tj. $4(\operatorname{Re}\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \le 0$. Dostáváme tak

$$|\operatorname{Re}\langle x, y\rangle| \le \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$$

pro každou dvojici $x, y \in X$.

Mějme nyní opět dány vektory $x, y \in X$ a vezměme $\alpha \in \mathbb{C}$ z jednotkové kružnice splňující $\alpha\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$. Pak z právě dokázané nerovnosti použité pro αx a y máme

$$\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \ge |\operatorname{Re}\langle \alpha x, y\rangle| = |\operatorname{Re}\alpha\langle x, y\rangle| = |\langle x, y\rangle|.$$

[12] Verzi v eukleidovských prostorech používali Joseph-Louis Lagrange (roz. Giuseppe Luigi Lagrangia) a Augustin-Louis Cauchy, integrální verzi dokázal Cauchyův žák Viktor Jakovlevič Buňakovskij (Виктор Яковлевич Буняковский) (1859) a též Karl Hermann Amandus Schwarz (1885), obecnou verzi dokázal John von Neumann (János Lajos Neumann) (1930).

(ii) Vlastnosti normy plynou z vlastností skalárního součinu a tvrzení (i), neboť trojúhelníkovou nerovnost odvodíme pomocí výpočtu

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \\
&= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|x\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \leq \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2.
\end{aligned} \tag{2}
$$

□

Na prostoru skalárním součinem je dle předchozího tvrzení přirozeně indukována norma. Pokud nebude řečeno jinak, budeme tedy vždy chápat prostor se skalárním součinem zároveň jako normovaný lineární prostor s touto kanonickou normou.

DEFINICE 82. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá Hilbertův[13] prostor, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$.

PŘÍKLAD 83. Snadno se ověří, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normou $\|\cdot\|_2$ jsou Hilbertovy prostory se skalárním součinem $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$. Obecněji, je-li μ míra, pak prostor $L_2(\mu)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f,g\rangle = \int_X f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$. Speciálně, ℓ_2 je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i\overline{y_i}$.

Podprostor ℓ_2 tvořený vektory pouze s konečně mnoha nenulovými souřadnicemi je prostor se skalárním součinem, který není Hilbertův.

TVRZENÍ 84. *Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$.*

(a) Pro libovolné $y \in X$ je $f_y\colon x \mapsto \langle x,y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na X a $\|f_y\| = \|y\|$.

(b) Funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).

DŮKAZ. (a) Protože skalární součin je lineární v první souřadnici a $|f_y(x)| = |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ pro každé $x \in X$ (Cauchyova-Schwarzova nerovnost, Tvrzení 81), je $f_y \in X^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|$. Je-li navíc $y \neq 0$, pak $\frac{y}{\|y\|} \in S_X$ a $f_y\big(\frac{y}{\|y\|}\big) = \big\langle \frac{y}{\|y\|}, y\big\rangle = \|y\|$, a tedy $\|f_y\| = \|y\|$.

(b) Připomeňme, že na $X\times X$ uvažujeme součinovou metriku $\rho((x,y),(u,v)) = \max\{\|x-u\|, \|y-v\|\}$. Zvolme $R > 0$ a $(x,y),(u,v) \in X\times X$ splňující $\rho((x,y),0) \leq R$, $\rho((u,v),0) \leq R$. Pak díky Tvrzení 81 máme

$$
\begin{aligned}
|\langle x,y\rangle - \langle u,v\rangle| &\leq |\langle x,y\rangle - \langle x,v\rangle| + |\langle x,v\rangle - \langle u,v\rangle| = |\langle x, y-v\rangle| + |\langle x-u, v\rangle| \leq \\
&\leq \|x\|\|y-v\| + \|v\|\|x-u\| \leq R\big(\|x-u\| + \|y-v\|\big) \leq 2R\rho\big((x,y),(u,v)\big).
\end{aligned}
$$

□

Při počítání s normou v prostorech se skalárním součinem budeme často používat výpočet z (2), zformulujme jej proto explicitně:

FAKT 85. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x,y \in X$. Pak*

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x,y\rangle.$$

Následující tvrzení je okamžitým důsledkem tohoto faktu.

TVRZENÍ 86 (rovnoběžníkové pravidlo). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x,y \in X$ platí*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Je-li norma indukovaná skalárním součinem, pak tento skalární součin lze vyjádřit pouze pomocí normy:

TVRZENÍ 87 (polarizační vzorec). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x,y \in X$ platí*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

[13] David Hilbert

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

DŮKAZ. Vzorec pro reálný prostor plyne ihned z Faktu 85. V komplexním případě máme

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2 = \\
&\quad = 4\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + i\big(\|x\|^2 + \|iy\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, iy\rangle\big) - i\big(\|x\|^2 + \|{-iy}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, -iy\rangle\big) = \\
&\quad = 4\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + 4i\,\mathrm{Re}\langle x, iy\rangle = 4\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + 4i\,\mathrm{Re}\big(-i\,\langle x, y\rangle\big) = 4\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + 4i\,\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = 4\langle x, y\rangle,
\end{aligned}$$

neboť pro $a, b \in \mathbb{R}$ je $\mathrm{Re}\big(-i(a+ib)\big) = \mathrm{Re}(b - ia) = b = \mathrm{Im}(a+ib)$.

□

DŮSLEDEK 88. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

DŮKAZ. Díky polarizačnímu vzorci je $\langle T(x), T(y)\rangle_Y = \frac{1}{4}\big(\|T(x) + T(y)\|_Y^2 - \|T(x) - T(y)\|_Y^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|T(x+y)\|_Y^2 - \|T(x-y)\|_Y^2\big) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|_X^2 - \|x-y\|_X^2\big) = \langle x, y\rangle_X$, pokud jsou prostory reálné. V komplexním případě je výpočet analogický.

□

VĚTA 89. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak na prostoru $X \oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y, a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X \oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

DŮKAZ. Pro (x, y), $(u, v) \in X \times Y$ definujme $\langle (x, y), (u, v)\rangle = \langle x, u\rangle_X + \langle y, v\rangle_Y$. Tento vzorec definuje skalární součin na $X \times Y$: Pro (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(u, v) \in X \times Y$ máme

$$\begin{aligned}
\big\langle (x_1, y_1) + (x_2, y_2), (u, v)\big\rangle &= \big\langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (u, v)\big\rangle = \langle x_1 + x_2, u\rangle_X + \langle y_1 + y_2, v\rangle_Y = \\
&= \langle x_1, u\rangle_X + \langle x_2, u\rangle_X + \langle y_1, v\rangle_Y + \langle y_2, v\rangle_Y = \\
&= \langle (x_1, y_1), (u, v)\rangle + \langle (x_2, y_2), (u, v)\rangle.
\end{aligned}$$

Dále pro (x, y), $(u, v) \in X \times Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ máme

$$\langle \alpha(x, y), (u, v)\rangle = \langle (\alpha x, \alpha y), (u, v)\rangle = \langle \alpha x, u\rangle_X + \langle \alpha y, v\rangle_Y = \alpha\langle x, u\rangle_X + \alpha\langle y, v\rangle_Y = \alpha\langle (u, v), (x, y)\rangle,$$

$$\langle (x, y), (u, v)\rangle = \langle x, u\rangle_X + \langle y, v\rangle_Y = \overline{\langle u, x\rangle_X} + \overline{\langle v, y\rangle_Y} = \overline{\langle u, x\rangle_X + \langle v, y\rangle_Y} = \overline{\langle (u, v), (x, y)\rangle}.$$

Konečně, $\langle (x, y), (x, y)\rangle = \langle x, x\rangle_X + \langle y, y\rangle_Y = \|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2 = \|(x, y)\|_2^2$, což dokazuje i poslední dvě vlastnosti skalárního součinu a též to, že výše uvedený skalární součin na $X \times Y$ indukuje normu $X \oplus_2 Y$.

□

DEFINICE 90. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá ortogonální doplněk A.

Všimněme si, že $\{0\}^\perp = X$. Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^\perp = \{0\}$ (je-li $x \in Y \cap Y^\perp$, pak $\langle x, x\rangle = 0$, tedy $x = 0$). Speciálně, $X^\perp = X \cap X^\perp = \{0\}$. Dále si lze snadno rozmyslet, že $A^\perp = (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$.

FAKT 91 (Pythagorova[14] věta, asi 500 p.n.l.). *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \dots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

[14] Pythagoras ze Samu (Πυθαγόρας ο Σάμιος)

DŮKAZ. První vzorec ihned plyne z Faktu 85. Druhý vzorec plyne z prvního snadno indukcí, uvědomíme-li si, že $x_{i+1} \perp (x_1 + \ldots + x_i)$ pro $i = 1, \ldots, n-1$.

□

TVRZENÍ 92. *Nechť X je prostor se skalárním součinem.*
(a) Je-li Y podprostor X, pak $Y \cap Y^\perp = \{0\}$.
(b) $\{0\}^\perp = X$ a $X^\perp = \{0\}$.
(c) Pro $A \subset X$ je $A^\perp = (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$.
(d) Pro $A \subset X$ je $A^\perp$ uzavřený podprostor X.
(e) Je-li $X = Y + Z$ pro nějaké podprostory $Y, Z \subset X$ takové, že $Y \perp Z$, pak $Z = Y^\perp$, $Y = Z^\perp$ a $X = Y \oplus Z$.

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in Y \cap Y^\perp$, pak $\langle x, x\rangle = 0$, tedy $x = 0$.

(b) První rovnost je zřejmá, druhá plyne z (a), neboť $X^\perp = X \cap X^\perp$.

(c) Zjevně $A^\perp \supset (\overline{\operatorname{span}} A)^\perp$. Na druhou stranu nechť $y \in A^\perp$. Pak $f_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ je spojitý lineární funkcionál na X (Tvrzení 84(a)) a $A \subset \operatorname{Ker} f$. Tedy $\overline{\operatorname{span}} A \subset \operatorname{Ker} f$, což znamená, že $\langle x, y\rangle = 0$ pro každé $x \in \overline{\operatorname{span}} A$.

(d) Pro libovolné $y \in X$ je $f_y : x \mapsto \langle x, y\rangle$ spojitý lineární funkcionál na X. Tedy $A^\perp = \bigcap_{y\in A}\{y\}^\perp = \bigcap_{y\in A} \operatorname{Ker} f_y$ je uzavřený podprostor X.

(e) Dle předpokladu je $Z \subset Y^\perp$. Na druhou stranu, je-li $x \in Y^\perp$, pak $x = y + z$, kde $y \in Y$ a $z \in Z \subset Y^\perp$. Tedy $y = x - z \in Y^\perp$, což znamená, že $y \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, neboli $x = z \in Z$. Tudíž $Y^\perp = Z$. Záměnou rolí Y a Z obdržíme rovnost $Z^\perp = Y$. Konečně, poslední tvrzení plyne z (a).

□

LEMMA 93. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.*

DŮKAZ. Máme $\langle x - z, y\rangle = 0$ pro každé $y \in X$, takže speciálně $\|x - z\|^2 = \langle x - z, x - z\rangle = 0$.

□

VĚTA 94 (Frigyes Riesz, 1934). *Nechť C je neprázdná uzavřená konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

DŮKAZ. Je-li $x \in C$, stačí volit $y = x$. Není-li x v C, užijeme rovnost $\operatorname{dist}(x, C) = \operatorname{dist}(0, C - x)$ k pozorování, že lze bez újmy na obecnosti předpokládat $x = 0 \notin C$. Označme $d = \operatorname{dist}(0, C)$ a najděme posloupnost $\{y_n\}$ v C splňující $\|y_n\| \to d$. Tato posloupnost je cauchyovská: Nechť $0 < \varepsilon \le 1$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|y_n\| < d + \varepsilon$ pro každé $n \ge n_0$. Pro libovolná $n, k \ge n_0$ pak z rovnoběžníkového pravidla plyne, že

$$\begin{aligned}\|y_n - y_k\|^2 &= 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - \|y_n + y_k\|^2 = 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - 4\left\|\frac{y_n + y_k}{2}\right\|^2 \le \\ &\le 2\big(\|y_n\|^2 + \|y_k\|^2\big) - 4d^2 < 4(d + \varepsilon)^2 - 4d^2 = 4\varepsilon^2 + 8d\varepsilon \le (4 + 8d)\varepsilon.\end{aligned}$$

(Ve výpočtu jsme použili fakt, že C je konvexní, a tedy $\frac{1}{2}(y_n + y_k) \in C$.) Posloupnost $\{y_n\}$ tudíž konverguje k nějakému prvku $y \in H$, který však leží v C díky uzavřenosti C. Pak $\|y\| = \lim\|y_n\| = d$.

Předpokládejme nyní, že $y_1, y_2 \in C$ splňují $\|y_1\| = \|y_2\| = d$. Z rovnoběžníkového pravidla a faktu $\frac{y_1+y_2}{2} \in C$ dostáváme

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 2\big(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2\big) - \|y_1 + y_2\|^2 = 4d^2 - 4\left\|\frac{y_1 + y_2}{2}\right\|^2 \le 0.$$

Tedy $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, tj. $y_1 = y_2$. Tím je důkaz jednoznačnosti dokončen.

□

PŘÍKLAD 95. Není-li H Hilbertův pak, Věta 94 nemusí platit: Nechť C je jednotková koule v $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ a $x = (2, 0) \in \mathbb{R}^2$. Pak pro každé $t \in [-1, 1]$ je $\|x - (1, t)\|_\infty = 1 = \operatorname{dist}(x, C)$, tedy nejbližší prvek není určen jednoznačně. Dokonce nejbližší prvek nemusí ani existovat, viz Příklad 65.

LEMMA 96 (F. Riesz, 1934). *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x,Y)$ právě tehdy, když $x-y \perp Y$.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Pro každé $z \in Y$ platí $y-z \in Y$, a tedy $x-y \perp y-z$. Z Pythagorovy věty (Fakt 91) tak máme $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$. Odtud $\|x-y\| = \min\{\|x-z\|;\ z \in Y\} = \operatorname{dist}(x,Y)$.

$\Rightarrow$ Nechť $z \in Y$ je libovolné. Chceme dokázat, že $\langle x-y, z\rangle = 0$. Zřejmě lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\|z\| = 1$. Položme $\alpha = \langle x-y, z\rangle$. Pak $y + \alpha z \in Y$, a tedy

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &\leq \|x-(y+\alpha z)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|\alpha z\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x-y, \alpha z\rangle = \\ &= \|x-y\|^2 + |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}\big(\overline{\alpha}\langle x-y,z\rangle\big) = \|x-y\|^2 + |\alpha|^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha}\alpha) = \|x-y\|^2 - |\alpha|^2.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $|\alpha|^2 \leq 0$, a tedy $\alpha = 0$.

$\square$

DEFINICE 97. Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je projekce. Pokud $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální.

TVRZENÍ 98. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je zobrazení takové, že $x - P(x) \perp \operatorname{Rng} P$ pro každé $x \in X$. Pak P je ortogonální lineární projekce.*

DŮKAZ. Položme $Y = \operatorname{span}\operatorname{Rng} P$. Je-li $z \in \operatorname{Rng} P$, pak $z - P(z) \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, a tedy $P(z) = z$. Dle Faktu 73(b) to znamená, že P je projekce. Dále nechť $x, y \in X$. Pak $x - P(x) \in Y^\perp$ a $y - P(y) \in Y^\perp$. Tedy $x + y - P(x) - P(y) \in Y^\perp$. Protože podle předpokladu je i $x + y - P(x+y) \in Y^\perp$, dostáváme, že $P(x+y) - P(x) - P(y) = x + y - P(x) - P(y) - \big(x + y - P(x+y)\big) \in Y^\perp$. Tedy $P(x+y) - P(x) - P(y) \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$, neboli $P(x+y) = P(x) + P(y)$. Analogicky pro $\alpha \in \mathbb{K}$ je $\alpha(x - P(x)) \in Y^\perp$ a $\alpha x - P(\alpha x) \in Y^\perp$, a tedy $P(\alpha x) - \alpha P(x) \in Y \cap Y^\perp = \{0\}$.

$\square$

VĚTA 99. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $P\colon X \to X$ je lineární projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *P je ortogonální.*
(ii) $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Rng} P$.
(iii) $\operatorname{Ker} P = (\operatorname{Rng} P)^\perp$ *a* $\operatorname{Rng} P = (\operatorname{Ker} P)^\perp$.
(iv) $\|x - P(x)\| = \operatorname{dist}(x, \operatorname{Rng} P)$ *pro každé* $x \in X$.
(v) $x - P(x) \perp P(x)$ *pro každé* $x \in X$.
(vi) $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), x\rangle$ *pro každé* $x \in X$.
(vii) *P je spojitá a* $\|P\| \leq 1$ *(tj. $P = 0$, nebo $\|P\| = 1$).*

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) plyne z toho, že pro $x \in \operatorname{Ker} P$ je $x = x - P(x)$, (ii)$\Rightarrow$(i) plyne z toho, že $x - P(x) \in \operatorname{Ker} P$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) plyne z Tvrzení 74 a 92(e), (iii)$\Rightarrow$(ii) je triviální.

(i)$\Leftrightarrow$(iv) plyne z Lemmatu 96.

(i)$\Rightarrow$(v) je triviální.

(v)$\Rightarrow$(vi) $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), P(x)\rangle = \langle P(x), x\rangle - \langle P(x), x - P(x)\rangle = \langle P(x), x\rangle$.

(vi)$\Rightarrow$(vii) Pro libovolné $x \in X$ je $\|P(x)\|^2 = \langle P(x), x\rangle = |\langle P(x), x\rangle| \leq \|P(x)\|\|x\|$. Odtud plyne, že $\|P(x)\| \leq \|x\|$.

(vii)$\Rightarrow$(ii) Zvolme libovolně $x \in \operatorname{Rng} P$ a $z \in \operatorname{Ker} P$ a položme $Y = \operatorname{span}\{z\}$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$ je $\|x\| = \|P(x)\| = \|P(x - \alpha z)\| \leq \|x - \alpha z\|$, což znamená, že $\|x\| = \operatorname{dist}(x, Y)$. Podle Lemmatu 96 je tedy $x \perp z$.

$\square$

VĚTA 100 (F. Riesz, 1934). *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_{\mathrm{t}} Y^\perp$.*

DŮKAZ. Již víme, že $Y \cap Y^\perp = \{0\}$. Dále, pro každé $x \in H$ existuje dle Věty 94 prvek $y \in Y$ splňující $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$, což dle Lemmatu 96 znamená, že $x - y \in Y^\perp$. Protože $x = y + (x - y)$, plyne odtud, že $H = Y + Y^\perp$. Tudíž $H = Y \oplus Y^\perp$. Konečně, dle Tvrzení 74 je projekce $P_Y : H \to Y$ příslušná tomuto rozkladu ortogonální, tedy je spojitá dle Věty 99.

□

Poznamenejme, že není-li H úplný, pak předchozí věta nemusí platit (viz Příklad 116).

DŮSLEDEK 101. *Nechť H je Hilbertův prostor a $A \subset H$. Pak $(A^\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}} A$.*

DŮKAZ. Položme $Y = \overline{\operatorname{span}} A$. Dle Tvrzení 92(c) je $(A^\perp)^\perp = (Y^\perp)^\perp$. Dle Věty 100 existuje ortogonální projekce $P : H \to Y$ s $\operatorname{Rng} P = Y$. Věta 99 pak dává, že $(Y^\perp)^\perp = (\operatorname{Ker} P)^\perp = Y$.

□

VĚTA 102. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z Tvrzení 37(a).

$\Leftarrow$ Podle Tvrzení 37(b) stačí ukázat, že zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Mějme tedy $\varepsilon > 0$ dáno. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\left\|\sum_{n=k}^{l} x_n\right\| < \varepsilon$ pro libovolná $l \geq k \geq n_0$. Položme $F = \{1, \dots, n_0\}$ a nechť $F' \subset \mathbb{N}$ je konečná a disjunktní s F. Položme dále $k = \min F'$, $l = \max F'$. Pak $l \geq k > n_0$, a tedy s pomocí Pythagorovy věty (Fakt 91) máme

$$\left\|\sum_{n\in F'} x_n\right\|^2 = \sum_{n\in F'} \|x_n\|^2 \leq \sum_{n=k}^{l} \|x_n\|^2 = \left\|\sum_{n=k}^{l} x_n\right\|^2 < \varepsilon^2.$$

□

DEFINICE 103. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Ortonormální množině se též někdy říká ortonormální soustava či ortonormální systém. Všimněme si, že A je ortonormální, právě když pro všechna $x, y \in A$ platí

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \neq y, \\ 1 & \text{pokud } x = y. \end{cases}$$

Dále si uvědomme, že ortonormální A je maximální, právě když $A^\perp = \{0\}$.

POZNÁMKA (důležitá). Uvědomme si, že v definici ortonormální báze lze podle Věty 102 v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ podmínku $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ (tj. předpoklad, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ konverguje bezpodmínečně) nahradit podmínkou $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ (tj. obyčejnou konvergencí). Podobně lze v následujících tvrzeních všude, kde předpokládáme konvergenci zobecněné řady $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém, tento předpoklad v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ nahradit předpokladem obyčejné konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$.

FAKT 104. *Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.*

DŮKAZ. Podle Pythagorovy věty máme $\|x - y\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 = 2$.

□

VĚTA 105. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Uvažujme množinu

$$\mathcal{A} = \{A \subset X;\ A \text{ je ortonormální množina}\}$$

uspořádanou inkluzí. Pak $(\mathcal{A}, \subset)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná (obsahuje prázdnou množinu). Navíc má každý řetězec horní závoru, totiž sjednocení všech prvků daného řetězce: Nechť $\mathcal{B}$ je řetězec v $\mathcal{A}$ a $B = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} A$. Pak zjevně $B \subset S_X$. Jsou-li $x, y \in B$, $x \neq y$, pak $x \in A_1 \in \mathcal{B}$ a $y \in A_2 \in \mathcal{B}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A_1 \subset A_2$. Pak ovšem $x, y \in A_2$, což je ortonormální množina, a tedy $x \perp y$. To dokazuje, že B je ortonormální, takže patří do $\mathcal{A}$. Podle Zornova lemmatu[15] tedy v $\mathcal{A}$ existuje maximální prvek.

□

POZNÁMKA 106. Je-li prostor se skalárním součinem separabilní, pak neobsahuje nespočetnou ortonormální množinu, jelikož separabilní metrický prostor neobsahuje nespočetnou diskrétní množinu (viz Fakt 104). Tedy každý maximální ortonormální systém je v něm (nejvýše) spočetný.

LEMMA 107. *Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde x_γ jsou skaláry. Pak $x_\gamma = \langle x, e_\gamma \rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.*

DŮKAZ. Nechť $\alpha \in \Gamma$ a $\varepsilon > 0$. Najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ splňující $\left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma e_\gamma \right\| < \varepsilon$ pro každou $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ obsahující F. Pak pro $F' = F \cup \{\alpha\}$ platí

$$\varepsilon \geq \left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma e_\gamma \right\| \cdot \|e_\alpha\| \geq \left| \left\langle x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma e_\gamma, e_\alpha \right\rangle \right| = \left| \langle x, e_\alpha \rangle - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \langle e_\gamma, e_\alpha \rangle \right| = |\langle x, e_\alpha \rangle - x_\alpha|.$$

Tedy $x_\alpha = \langle x, e_\alpha \rangle$.

□

Jako důsledek dostáváme, že je-li $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ ortonormální báze v X a $x \in X$, pak koeficienty x_γ ve vyjádření $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ jsou určeny jednoznačně (a platí $x_\gamma = \langle x, e_\gamma \rangle$).

Snadným důsledkem Pythagorovy věty (Fakt 91) je následující fakt:

FAKT 108. *Nechť $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak $\left\| \sum_{i \in F} a_i e_i \right\|^2 = \sum_{i \in F} |a_i|^2$ pro libovolné skaláry a_i, $i \in F$.*

Okamžitým důsledkem předchozího faktu je následující pozorování:

DŮSLEDEK 109. *Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.*

LEMMA 110. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i \in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i \in Y^\perp$.*

DŮKAZ. Označme $x_Y = \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle e_i$. Pro každé $j \in F$ máme $\langle x_Y, e_j \rangle = \sum_{i \in F} \langle x, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$, tj. $\langle x - x_Y, e_j \rangle = 0$. Odtud snadno plyne, že $x - x_Y \perp Y$.

□

VĚTA 111 (Besselova nerovnost[16]). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, pak pro každé $x \in X$ platí, že $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.*

DŮKAZ. Mějme dánu libovolnou konečnou množinu $F \subset \Gamma$. Položme $x_F = \sum_{\gamma \in F} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$. Podle Lemmatu 110 je $x - x_F \perp \operatorname{span}\{e_\gamma;\ \gamma \in F\}$ a speciálně $x - x_F \perp x_F$. Z Pythagorovy věty a Faktu 108 tedy dostaneme $\|x\|^2 = \|x - x_F + x_F\|^2 = \|x - x_F\|^2 + \|x_F\|^2 \geq \|x_F\|^2 = \sum_{\gamma \in F} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$. Podle Tvrzení 34 tak obdržíme

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} \leq \|x\|^2.$$

□

VĚTA 112. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:*

[15] Zornovo lemma dokázal Kazimierz Kuratowski (1922) a nezávisle Max August Zorn (1935).

[16] Pro trigonometrické funkce používal podobnou nerovnost Friedrich Wilhelm Bessel (1828).

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé* $x \in X$ *(tzv. Parsevalova rovnost*[17]*).*
(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé* $x \in X$.
(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*
(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.
(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

Poznamenejme, že řadě v (ii) se říká abstraktní Fourierova[18] řada a čísla $\langle x, e_\gamma\rangle$ se nazývají abstraktní Fourierovy koeficienty. Proč, bude osvětleno v Příkladu 115.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $x \in X$. Pro dané $\varepsilon > 0$ najdeme $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ tak, že $\sum_{\gamma\in F} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 > \|x\|^2 - \varepsilon$. Pak pro $F' \in \mathcal{F}(\Gamma)$ obsahující F dostáváme s pomocí Faktů 85 a 108

$$\begin{aligned}\Big\|x - \sum_{\gamma\in F'} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\Big\|^2 &= \|x\|^2 + \sum_{\gamma\in F'} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\Big\langle x, \sum_{\gamma\in F'} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\Big\rangle = \\ &= \|x\|^2 + \sum_{\gamma\in F'} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 - 2\operatorname{Re}\sum_{\gamma\in F'} \overline{\langle x, e_\gamma\rangle}\langle x, e_\gamma\rangle = \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F'} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \le \\ &\le \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tedy vskutku $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$.

(ii)⇒(iii) je zřejmá a (iii)⇒(iv) plyne snadno z definic.

(iv)⇒(i) Nechť $x \in X$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Pak existuje $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$ a skaláry x_γ, $\gamma \in F$ tak, že $\|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$. Položme $Y = \operatorname{span}\{e_\gamma;\ \gamma \in F\}$. Pak $\operatorname{dist}(x, Y) \le \|x - \sum_{\gamma\in F} x_\gamma e_\gamma\| < \varepsilon$. Z Lemmatu 110 plyne, že $x - \sum_{\gamma\in F} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma \in Y^\perp$, a tedy podle Lemmatu 96 platí $\|x - \sum_{\gamma\in F} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\| = \operatorname{dist}(x, Y) < \varepsilon$. Z toho pomocí stejného výpočtu jako v důkazu (i)⇒(ii) dostáváme

$$\varepsilon^2 > \Big\|x - \sum_{\gamma\in F} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma\Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\gamma\in F} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2,$$

a tedy $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \ge \sum_{\gamma\in F} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \ge \|x\|^2 - \varepsilon^2$. Protože tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, dostáváme $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \ge \|x\|^2$. Opačná nerovnost je přímo Besselova nerovnost (Věta 111).

(ii)⇒(v) Nechť $\{e_\gamma\}$ není maximální, tj. existuje nenulový vektor x splňující $\langle x, e_\gamma\rangle = 0$ pro každé $\gamma \in \Gamma$. Ale $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma = 0$, což je spor.

Konečně, je-li X Hilbertův, ukážeme, že (v)⇒(iv). Není-li splněna (iv), pak je $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ vlastní uzavřený podprostor X. Podle Věty 100 je $Y^\perp$ netriviální, což je spor s maximalitou $\{e_\gamma\}$.

□

Z Vět 105 a 112 ihned plyne následující důsledek:

DŮSLEDEK 113. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

DŮSLEDEK 114. *Je-li* $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ *ortonormální soustava v Hilbertově prostoru* H*, pak zobrazení* $P\colon H \to H$, $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *je ortogonální lineární projekce na* $\overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$*. Dále je* $\|P(x)\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé* $x \in X$.

DŮKAZ. Označme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ a nechť $P\colon H \to Y$ je ortogonální lineární projekce na Y z Věty 100. Nechť $x \in H$. Pak $x = P(x) + z$, kde $z \in Y^\perp$. Odtud plyne, že $\langle x, e_\gamma\rangle = \langle P(x), e_\gamma\rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$. Použijeme-li Větu 112 na prostor Y, pak obdržíme, že $P(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle P(x), e_\gamma\rangle e_\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ a $\|P(x)\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle P(x), e_\gamma\rangle|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$.

□

[17] Marc-Antoine Parseval des Chênes (1799)

[18] Jean-Baptiste Joseph Fourier

PŘÍKLAD 115.

- Kanonické bázové vektory $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvoří ortonormální bázi v Hilbertově prostoru ℓ_2 (Příklad 29).
- Obecněji, je-li Γ libovolná neprázdná množina, pak kanonické bázové vektory $e_\gamma = \chi_{\{\gamma\}}$, $\gamma \in \Gamma$ tvoří ortonormální bázi v Hilbertově prostoru $\ell_2(\Gamma)$. (Snadno to plyne např. z Věty 112, neboť je z definice splněna Parsevalova rovnost.)
- Pro Hilbertův prostor $L_2([0,2\pi])$ je systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx);\ n \in \mathbb{N}\right\}$ ortonormální bází. Ortonormalita plyne z klasické teorie Fourierových řad. Hustota lineárního obalu plyne z Fejérovy[19] věty zkombinované s důsledkem Luzinovy věty. Alternativně lze ukázat, že trigonometrický ortonormální systém je maximální: Nechť $f \in L_2([0,2\pi])$ je kolmé ke všem prvkům tohoto systému. Protože též $f \in L_1([0,2\pi])$, můžeme spočítat Fourierovy koeficienty příslušné funkci f. Ty jsou ovšem díky kolmosti rovny 0. Podle věty o jednoznačnosti to znamená, že $f = 0$ s. v., a tedy $f = 0$ v $L_2([0,2\pi])$.

  Nyní též vidíme, proč se řadě v (ii) ve Větě 112 říká abstraktní Fourierova řada: Pro bázi popsanou výše je to totiž formálně klasická Fourierova řada a čísla $\langle x, e_\gamma\rangle$ jsou přesně klasické Fourierovy koeficienty. Tato Fourierova řada ovšem konverguje ve smyslu prostoru $L_2([0,2\pi])$, nikoli bodově, jak se studuje v klasické teorii.

PŘÍKLAD 116. Není-li ve Větě 112 prostor X úplný, pak tvrzení (v) nemusí být ekvivalentní ostatním tvrzením. Nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v prostoru ℓ_2. Dále položme $e = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, $A = \{e_n;\ n \geq 2\}$ a $X = \operatorname{span}(\{e\} \cup A)$. Pak A je maximální ortonormální množina v X: Je-li $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in X$ splňující $x \perp A$, pak $0 = \langle x, e_n\rangle = x_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Je-li tedy $x = \alpha e + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i e_i$, pak $0 = x_{k+1} = \alpha\frac{1}{k+1}$, tj. $\alpha = 0$. Proto i $\alpha_i = x_i = 0$ pro $i = 2, \dots, k$, neboli $x = 0$. Nicméně není pravda, že $X = \overline{\operatorname{span}}\, A$, neboť pro každý $x \in \operatorname{span} A$ je $x_1 = 0$, tedy i pro každý $x \in \overline{\operatorname{span}}\, A$ je $x_1 = 0$, což znamená, že $e \notin \overline{\operatorname{span}}\, A$.

VĚTA 117 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T\colon H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

DŮKAZ. Zjevně T je lineární. Z Parsevalovy rovnosti (Věta 112) plyne, že $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ pro každé $x \in H$, a tedy T je izometrie do $\ell_2(\Gamma)$. Všimněme si, že $\{T(e_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ je množina kanonických bázových vektorů v $\ell_2(\Gamma)$. Díky linearitě tedy $\operatorname{Rng} T$ obsahuje všechny vektory v $\ell_2(\Gamma)$, které mají jen konečně mnoho nenulových souřadnic. Tyto vektory tvoří hustou podmnožinu v $\ell_2(\Gamma)$. Podle Tvrzení 60(c) je ovšem $\operatorname{Rng} T$ uzavřený, tudíž je roven celému $\ell_2(\Gamma)$.

□

TVRZENÍ 118. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li* $\dim X = n \in \mathbb{N}$, *pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li* $\dim X = \infty$ *a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

DŮKAZ. Nechť A je nějaká ortonormální báze X. Je-li $\dim X = n$, pak z Důsledku 109 a z definice ortonormální báze plyne, že A je (algebraickou) bází vektorového prostoru X. Tedy A má n prvků.

Je-li $\dim X = \infty$ a X je separabilní, pak A je spočetná podle Poznámky 106. Kdyby A byla konečná, pak dle definice ortonormální báze $\operatorname{span} A = X$, což je spor s $\dim X = \infty$.

□

Později uvidíme, že pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor (Věta 2.28).

[19] Lipót Fejér, roz. Leopold Weisz

VĚTA 119 (Heinrich Löwig[20] (1934), F. Riesz (1934)[21]). *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I : H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.*

K důkazu se nám bude hodit následující pozorování:

LEMMA 120. *Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy* $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

DŮKAZ. Zjevně $\operatorname{span}\{x\} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ a každý vektor $y \in X$ lze rozepsat jako

$$y = \left(y - \frac{f(y)}{f(x)}x\right) + \frac{f(y)}{f(x)}x,$$

kde $y - \frac{f(y)}{f(x)}x \in \operatorname{Ker} f$ a $\frac{f(y)}{f(x)}x \in \operatorname{span}\{x\}$.

□

DŮKAZ VĚTY 119. Nechť H je nad $\mathbb{K}$ a $y \in H$. Dle Tvrzení 84(a) je $f_y \in H^*$ a $\|f_y\| = \|y\|$. Protože skalární součin je sdruženě lineární ve druhé souřadnici, je i zobrazení I sdruženě lineární. Rovnost $\|I(y)\| = \|f_y\| = \|y\|$ tedy říká, že I je izometrie do, neboť $I(u) - I(v) = I(u - v)$. Ukažme, že je na. Je-li $f \in H^*$ nenulové dáno, pak $\operatorname{Ker} f$ je vlastní uzavřený podprostor H. Tedy dle Věty 100 platí, že $X = \operatorname{Ker} f \oplus Z$, kde $Z \perp \operatorname{Ker} f$. Ovšem $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$ (Lemma 120), tedy $\dim Z = 1$. To znamená, že $Z = \operatorname{span}\{z\}$ pro nějaké $z \in S_H$. Položme $y = \overline{f(z)}z$. Pak pro každé $x \in H$ máme $x = u + \alpha z$, kde $u \in \operatorname{Ker} f$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, takže

$$f_y(x) = \langle x, y\rangle = \big\langle u + \alpha z, \overline{f(z)}z\big\rangle = f(z)\big(\langle u, z\rangle + \alpha\langle z, z\rangle\big) = \alpha f(z)\|z\| = f(u + \alpha z) = f(x).$$

Tedy $I(y) = f_y = f$.

□

[20]roz. Jindřich František Josef Löwi

[21]Reprezentaci dokázal pro ℓ_2 D. Hilbert (1906), pro $L_2([0, 1])$ Maurice Fréchet (1907) a F. Riesz (1907). Proto se tato věta někdy nazývá Fréchetova-Rieszova.

Kapitola 2

Hahnova-Banachova věta a dualita

1. Hahnova-Banachova věta

Nejprve se podíváme blíže na to, jak vypadají komplexní lineární funkcionály. Připomeňme si, že pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a $t \in \mathbb{R}$ platí $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) = \operatorname{Re}\alpha + \operatorname{Re}\beta$, $\operatorname{Re}(t\alpha) = t \operatorname{Re}\alpha$ a podobně $\operatorname{Im}(\alpha + \beta) = \operatorname{Im}\alpha + \operatorname{Im}\beta$, $\operatorname{Im}(t\alpha) = t \operatorname{Im}\alpha$. Pro funkci $f : A \to \mathbb{C}$ označíme $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ její reálnou, resp. imaginární složku, tj. $(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ pro $x \in A$ a podobně pro $\operatorname{Im} f$.

TVRZENÍ 1. *Nechť X je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f : X \to \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když* $\operatorname{Re} f$ *je reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$ a platí* $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Fakt, že $\operatorname{Re} f$ je reálně-lineární je snadno vidět. Pro libovolné $x \in X$ máme $\operatorname{Re} f(ix) + i \operatorname{Im} f(ix) = f(ix) = if(x) = i \operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Im} f(x)$, a tedy $\operatorname{Re} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x)$.

$\Leftarrow$ Snadno je vidět, že $\operatorname{Im} f$ je také reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$, odkud ihned plyne aditivita f. Dále, pro libovolné $x \in X$ je

$$f(ix) = \operatorname{Re} f(ix) + i \operatorname{Im} f(ix) = -\operatorname{Im} f(x) - i \operatorname{Re} f(i^2x) = i\big(\operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)\big) = if(x).$$

Konečně, pro $\alpha = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, a $x \in X$ pak máme $f(\alpha x) = f(ax + ibx) = f(ax) + f(ibx) = af(x) + ibf(x) = \alpha f(x)$.

□

DEFINICE 2. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá sublineární funkcionál, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p\colon X \to [0, +\infty)$ se nazývá pseudonorma, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Zřejmě každá pseudonorma je sublineárním funkcionálem a pro každý sublineární funkcionál je $p(0) = 0$. Všimněme si, že pseudonorma se od normy liší pouze v jedné vlastnosti, a to, že mohou existovat nenulové vektory, na nichž je pseudonorma nulová.

VĚTA 3 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929)). *Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.*

(a) Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

DŮKAZ. (a) *1. krok.* Nejprve ukážeme, že f lze rozšířit na podprostor $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x\}$, kde $x \in X \setminus Y$. Uvědomme si, že vzorec $F(y + tx) = f(y) + t\alpha$ dobře definuje lineární rozšíření formy f na Z a že každé lineární rozšíření je tohoto tvaru a je jednoznačně určeno hodnotou $\alpha = F(x) \in \mathbb{R}$. Naším cílem je tedy nalézt $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $f(y) + t\alpha \le p(y + tx)$ pro každé $y \in Y$ a $t \in \mathbb{R}$. To je ekvivalentní tomu, že α musí splňovat $\alpha \le \frac{1}{t}\big(p(y + tx) - f(y)\big) = p(\frac{y}{t} + x) - f(\frac{y}{t})$ pro každé $y \in Y$ a $t > 0$ a zároveň

$\alpha \geq \frac{1}{t}\big(p(y+tx) - f(y)\big) = f(-\frac{y}{t}) - p(-\frac{y}{t} - x)$ pro každé $y \in Y$ a $t < 0$. Snadno je vidět, že to nastane, právě když

$$\sup_{z \in Y}\big(f(z) - p(z-x)\big) \leq \alpha \leq \inf_{y \in Y}\big(p(y+x) - f(y)\big).$$

Existence požadovaného $\alpha \in \mathbb{R}$ tedy bude zřejmá, jakmile ukážeme, že supremum na levé straně je nejvýše rovno infimu na straně pravé. K tomuto účelu zvolme pevně libovolné $z \in Y$. Pak pro každé $y \in Y$ platí $f(z) + f(y) = f(z+y) \leq p(z+y) = p(z-x+y+x) \leq p(z-x) + p(y+x)$ (zde jsme opět podstatně využili linearitu f), neboli $f(z) - p(z-x) \leq p(y+x) - f(y)$. Máme tedy $f(z) - p(z-x) \leq \inf_{y \in Y}\big(p(y+x) - f(y)\big)$ pro každé $z \in Y$, odkud již požadovaná nerovnost ihned plyne.

2. krok. Uvažujme množinu

$$\mathcal{P} = \big\{(Z,g);\ Y \subset Z \subset X \text{ je podprostor } X,\ g \text{ je lineární forma na } Z \text{ rozšiřující } f \text{ a } g \leq p \text{ na } Z\big\}.$$

Definujme na $\mathcal{P}$ uspořádání takto: $(Z,g) \leq (W,h)$, pokud $Z \subset W$ a $g = h$ na Z. Pak $(\mathcal{P}, \leq)$ je částečně uspořádaná množina, která je neprázdná, neboť $(Y,f) \in \mathcal{P}$. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady Zornova lemmatu: Je-li $\mathcal{R} = \{(Y_\gamma, f_\gamma);\ \gamma \in \Gamma\}$ řetězec v $\mathcal{P}$, pak je snadno vidět, že $Z = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$ je podprostor X obsahující Y. Funkce g na Z daná předpisem $g(x) = f_\gamma(x)$ pro $x \in Y_\gamma$ je zřejmě dobře definována, je lineární a splňuje $g \leq p$ na Z. Navíc (Z,g) majorizuje všechny prvky $\mathcal{R}$. Tedy (Z,g) je horní závora $\mathcal{R}$.

Podle Zornova lemmatu tedy existuje maximální prvek $(W,F) \in \mathcal{P}$. Pak nutně $W = X$, jinak bychom mohli F rozšířit na větší podprostor pomocí prvního kroku, což by byl spor s maximalitou (W,F). Tedy F je hledané rozšíření.

(b) Je-li X reálný, nalezneme rozšíření pomocí tvrzení (a). Pak ovšem $-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$, a tedy $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.

Je-li X komplexní, pak podle Tvrzení 1 je $f(x) = g(x) - ig(ix)$, kde $g = \operatorname{Re} f : Y_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ je reálně-lineární forma. Protože $|g(x)| = |\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, můžeme použít předchozí případ na formu g a rozšířit ji na reálně-lineární formu $G\colon X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ splňující $|G(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$. Položíme-li $F(x) = G(x) - iG(ix)$, pak F je lineární forma na X (Tvrzení 1), která zjevně rozšiřuje f. Dále, nechť $x \in X$. Najdeme $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ takové, že $|F(x)| = \alpha F(x)$. Pak $|F(x)| = \alpha F(x) = F(\alpha x) = G(\alpha x) - iG(i\alpha x)$, což je reálné číslo, a proto $G(i\alpha x) = 0$. Tedy $|F(x)| = G(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x)$. Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 4 (Hahnova-Banachova). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

DŮKAZ. Položme $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ pro $x \in X$. Pak p je pseudonorma na X splňující $|f| \leq p$ na Y. Dle Věty 3(b) existuje lineární forma F na X rozšiřující f taková, že $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$ pro každé $x \in X$. Tedy F je spojitý lineární funkcionál na X a $\|F\| \leq \|f\|$. Protože F rozšiřuje f, platí $\|F\| = \sup_{x \in B_X} |F(x)| \geq \sup_{x \in B_Y} |F(x)| = \sup_{x \in B_Y} |f(x)| = \|f\|$, tedy $\|F\| = \|f\|$.

□

Hahnova-Banachova věta je jedním z nejzásadnějších tvrzení funkcionální analýzy. Dále uvedeme několik z jejích mnoha přímých důsledků. Velkou důležitost mají zejména různé oddělovací věty.

DŮSLEDEK 5. *Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).*

DŮKAZ. Pro důkaz první části stačí bez újmy na obecnosti uvažovat $x \neq 0$. Uvažujme podprostor $Y = \operatorname{span}\{x\}$ a funkcionál na Y daný vzorcem $g(tx) = t\|x\|$ pro $t \in \mathbb{K}$. Pak zjevně $g \in Y^*$ a $\|g\| = 1$ (Lemma 1.45(b)). Dle Věty 4 existuje funkcionál $f \in X^*$ o normě 1, který rozšiřuje g. Tedy $f(x) = g(x) = \|x\|$. Pro důkaz druhé části použijeme první část na vektor $x - y$.

□

DŮSLEDEK 6 (Duální vyjádření normy). *Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak* $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.

DŮKAZ. Pro $f \in B_{X^*}$ máme $|f(x)| \leq \|f\|\|x\| \leq \|x\|$. Na duhou stranu, dle Důsledku 5 existuje $f \in B_{X^*}$ takový, že $f(x) = \|x\|$, a tedy $|f(x)| = f(x) = \|x\|$.

□

VĚTA 7 (Oddělování bodu a podprostoru). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f \restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

DŮKAZ. Položme $Z = Y \oplus \operatorname{span}\{x\}$ a $d = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$ a definujme $g\colon Z \to \mathbb{K}$ předpisem $g(y+\alpha x) = \alpha d$ pro $y \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak g je lineární forma na Z a pro každé $y \in Y$ a $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ máme

$$|g(y + \alpha x)| = |\alpha| d \leq |\alpha| \left\| x - \left(-\frac{y}{\alpha}\right) \right\| = \|y + \alpha x\|$$

a $|g(y)| = 0 \leq \|y\|$. Tedy $g \in Z^*$ a $\|g\| \leq 1$. Vezměme nyní posloupnost $\{y_n\}$ v Y splňující $\|x - y_n\| \to d$. Pak $g\left(\frac{x-y_n}{\|x-y_n\|}\right) = \frac{d}{\|x-y_n\|} \to 1$, a tedy $\|g\| = 1$. Podle Věty 4 existuje $f \in X^*$ rozšiřující g a splňující $\|f\| = \|g\| = 1$. Pak $f = 0$ na Y a $f(x) = g(x) = d$.

□

VĚTA 8. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.
(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

DŮKAZ. (a) Nechť Y je konečněrozměrný podprostor X a $\{e_1, \dots, e_n\}$ je jeho báze. Definujme lineární funkcionály $f_1, \dots, f_n$ na Y pomocí hodnot na bázi: $f_j(e_i) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_i(e_i) = 1$. Protože Y je konečné dimenze, jsou funkcionály $f_1, \dots, f_n$ spojité na Y (Věta 1.66). Lze je tedy podle Hahnovy-Banachovy věty rozšířit na spojité lineární funkcionály $g_1, \dots, g_n$ na X (Věta 4). Pak zobrazení $P\colon X \to Y$ dané předpisem

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) e_j$$

je spojitá lineární projekce X na Y: Spojitost a linearita jsou zřejmé. Pro $y \in Y$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ máme $P(y) = P\left(\sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n y_i P(e_i) = \sum_{i=1}^n y_i e_i = y$, tedy P je projekce dle Faktu 1.73.

(b) Nechť $\dim(X/Y) = n$ a $\{e_1, \dots, e_n\} \subset X$ jsou vybrány tak, že $\{q(e_1), \dots, q(e_n)\}$ je báze X/Y, kde $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení. Definujme lineární funkcionály $f_1, \dots, f_n$ na X/Y pomocí hodnot na bázi: $f_j(q(e_i)) = 0$ pro $i \neq j$ a $f_i(q(e_i)) = 1$. Všimněme si, že je-li $z = \sum_{i=1}^n z_i q(e_i) \in X/Y$, pak $f_j(z) = z_j$ pro $j = 1, \dots, n$. Protože X/Y je konečné dimenze, jsou funkcionály $f_1, \dots, f_n$ spojité na X/Y (Věta 1.66). Položme $g_j = f_j \circ q$, $j = 1, \dots, n$. Pak $g_1, \dots, g_n$ jsou spojité lineární funkcionály na X a zobrazení dané předpisem $P(x) = \sum_{j=1}^n g_j(x) e_j$ pro $x \in X$ je spojitá lineární projekce na $\operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, která je nulová na Y. (Fakt, že je to projekce, plyne z $P(e_i) = \sum_{j=1}^n g_j(e_i) e_j = e_i$ jako v případě (a).) Naopak, je-li $P(x) = 0$, pak $0 = g_i(P(x)) = \sum_{j=1}^n g_j(x) g_i(e_j) = g_i(x)$ pro $i = 1, \dots, n$. Tedy $f_i(q(x)) = 0$ pro $i = 1, \dots, n$, neboli $q(x) = 0$, tj. $x \in Y$. Dohromady tedy máme $Y = \operatorname{Ker} P$, což dle Tvrzení 1.74 znamená, že $Id_X - P$ je spojitá lineární projekce X na Y.

□

VĚTA 9. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li X^* separabilní, pak i X je separabilní.*

DŮKAZ. Množina S_{X^*} je metrický podprostor metrického prostoru X^*, tedy je separabilní. Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je hustá podmnožina S_{X^*}. Z vlastností duální normy pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in S_X$ splňující $|f_n(x_n)| > \frac{1}{2}$ (Lemma 1.45(b)). Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak Y je separabilní, neboť lineární kombinace s racionálními koeficienty jsou husté v Y. Tvrdíme, že $X = Y$. Pokud tomu tak není, pak podle Věty 7 existuje $f \in S_{X^*}$ takový, že $f \restriction_Y = 0$. Nechť nyní $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $\|f - f_n\| < \frac{1}{4}$. Pak $0 = |f(x_n)| = |f_n(x_n) - f_n(x_n) + f(x_n)| \geq |f_n(x_n)| - |f(x_n) - f_n(x_n)| \geq |f_n(x_n)| - \|f - f_n\|\|x_n\| > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, což je spor.

□

DEFINICE 10. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. anihilátor množiny A jako

$$A^\perp = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. zpětný anihilátor jako

$$B_\perp = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

POZNÁMKA 11. Pro prostor X se skalárním součinem zde máme kolizi ve značení, neboť symbolem $A^\perp$ značíme též ortogonální doplněk, což je podmnožina X (zatímco anihilátor $A^\perp$ je podmnožina X^*). Díky identifikaci z Věty 1.119 jsou tato tradiční značení naštěstí v případě Hilbertova prostoru relativně konzistentní a ve skutečnosti jsou anihilátory v jistém smyslu zobecněním ortogonálních doplňků: Je-li H Hilbertův prostor, $A \subset H$ a $I : H \to H^*$ identifikace z Věty 1.119, pak

$$\begin{aligned} I^{-1}(A^\perp) = \{y \in H;\ I(y) \in A^\perp\} = \{y \in H;\ I(y)(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\} = \\ = \{y \in H;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro každé } x \in A\}, \end{aligned}$$

tedy $I^{-1}(A^\perp)$ je roven ortogonálnímu doplňku A. Podobně,

$$\begin{aligned} I(A)_\perp = \{x \in H;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in I(A)\} = \{x \in H;\ I(y)(x) = 0 \text{ pro každé } y \in A\} = \\ = \{x \in H;\ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro každé } y \in A\}, \end{aligned}$$

tedy $I(A)_\perp$ je též roven ortogonálnímu doplňku A.

Uvědomme si, že z definice snadno plynou následují vztahy: $\{0\}^\perp = X^*$, $X^\perp = \{0\}$ a $\{0\}_\perp = X$. Pomocí Hahnovy-Banachovy věty (Důsledek 5) pak odvodíme, že $(X^*)_\perp = \{0\}$.

LEMMA 12. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*
(a) $A^\perp$ je uzavřený podprostor X^*,
(b) $B_\perp$ je uzavřený podprostor X,
(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}\, A$,
(d) $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\operatorname{span}}\, B$.

DŮKAZ. (a) Snadno je vidět, že $A^\perp$ je podprostor X^*. Jestliže $\{f_n\}$ je posloupnost v $A^\perp$ konvergující k $f \in X^*$ a $x \in A$, pak $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (Fakt 1.46). Tedy $f \in A^\perp$.

(b) Zde si stačí uvědomit, že $B_\perp = \bigcap_{f\in B} \operatorname{Ker} f$.

(c) Je-li $x \in A$, pak pro každé $f \in A^\perp$ máme $f(x) = 0$, a tedy $x \in (A^\perp)_\perp$. To znamená, že $A \subset (A^\perp)_\perp$. Protože je $B_\perp$ uzavřený podprostor X pro každou $B \subset X^*$ dle (b), platí $\overline{\operatorname{span}}\, A \subset (A^\perp)_\perp$. Je-li $x \in X \setminus \overline{\operatorname{span}}\, A$, existuje $f \in X^*$ splňující $f(x) > 0$ a $f = 0$ na $\overline{\operatorname{span}}\, A$ (Věta 7). Tedy $f \in A^\perp$ a $f(x) \neq 0$. Proto $x \notin (A^\perp)_\perp$.

(d) Je-li $f \in B$, pak pro každé $x \in B_\perp$ máme $f(x) = 0$, a tedy $f \in (B_\perp)^\perp$. To znamená, že $B \subset (B_\perp)^\perp$. Protože je $A^\perp$ uzavřený podprostor X^* pro každou $A \subset X$ dle (a), platí $\overline{\operatorname{span}}\, B \subset (B_\perp)^\perp$.

□

V Příkladu 23 ukážeme, že v (d) v lemmatu výše nemusí nastat rovnost. „Správné znění“ lemmatu uvedeme v oddílu 7.9 (Lemma 7.106).

2. Reprezentace duálů

V tomto oddílu si ukážeme, jakým způsobem lze interpretovat duální prostory k některým prostorům. Nejdůležitější jsou zejména konkrétní reprezentace duálů ke konkrétním klasickým Banachovým prostorům.

TVRZENÍ 13. *Nechť X a Y jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory X^* a Y^* jsou izometrické.*

Důkaz odložíme až do oddílu 4.1, kde jej provedeme přirozeně pomocí tam zavedených pojmů. Tvrzení je pak přímým důsledkem Věty 4.6.

DEFINICE 14. Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme sdruženým exponentem k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Sdruženým exponentem k 1 je ∞, sdruženým exponentem k ∞ je 1 a sdruženým exponentem ke 2 je 2. Všimněme si ještě následujících vztahů: Jsou-li p, q sdružené exponenty, $1 \leq p < \infty$, pak $pq = p + q$, $q = \frac{p}{p-1}$ a $q = (q-1)p$.

POZNÁMKA. Připomeňme, že prostor všech lineárních forem na $\mathbb{K}^n$ je algebraicky izomorfní opět prostoru $\mathbb{K}^n$. Protože všechny lineární formy na $\mathbb{K}^n$ jsou spojité (Věta 1.66), je prostor $(\mathbb{K}^n)^*$ algebraicky izomorfní prostoru $\mathbb{K}^n$ a tento algebraický izomorfismus je dán lineárním zobrazením $I\colon \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^*$, $I(y)(x) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Protože každé lineární zobrazení z konečněrozměrného prostoru je spojité (Věta 1.66), je zobrazení I izomorfismus normovaných lineárních prostorů, a to ať bereme na $\mathbb{K}^n$ jakoukoli normu. Způsobem stejným jako v důkazu Věty 15(a), (b) níže lze ukázat, že I je izometrie prostoru $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_q)$ na prostor $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)^*$, kde p, q jsou sdružené exponenty, $1 \leq p \leq \infty$.

VĚTA 15 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům[1]).

(a) Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I\colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(b) Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I\colon \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Všimněme si, že ve skutečnosti je tvrzení (b) speciálním případem tvrzení (c) a (d). Nicméně z pedagogických důvodů je vhodné tvrzení (b) zformulovat i dokazovat zvlášť, neboť je výrazně jednodušší.

Obvykle se funkce sgn rozšiřuje na komplexní čísla vzorcem $\operatorname{sgn}\alpha = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Je tedy $\alpha = |\alpha| \operatorname{sgn}\alpha$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$. Nám se ovšem v následujícím důkazu bude hodit převrácená hodnota $\operatorname{sgn}\alpha$, což je shodou okolností též komplexně sdružené číslo $\overline{\operatorname{sgn}\alpha}$, proto budeme používat označení cgn. Definujeme tedy $\operatorname{cgn}\alpha = \frac{|\alpha|}{\alpha}$ pro $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $\operatorname{cgn} 0 = 0$. Platí $|\alpha| = \alpha \operatorname{cgn}\alpha$ a $|\operatorname{cgn}\alpha| \leq 1$ pro každé $\alpha \in \mathbb{C}$. Všimněme si též, že je-li f měřitelná funkce (vzhledem k nějaké míře), pak funkce $\operatorname{sgn} f$ i $\operatorname{cgn} f$ jsou měřitelné.

DŮKAZ. (a) Nechť $y \in \ell_1$ je dáno. Pro každé $x \in c_0$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|_\infty |y_n| = \|x\|_\infty \|y\|_1.$$

[1]Pro ℓ_p, $1 < p < \infty$ Edmund Georg Hermann Landau (1907), pro $L_p([0,1])$, $1 < p < \infty$ F. Riesz (1909), pro $L_1([0,1])$ Hugo Dyonizy Steinhaus (1919).

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in c_0^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_1$. Pro opačnou nerovnost uvažujme vektory

$$x^n = (\operatorname{cgn} y_1, \dots, \operatorname{cgn} y_n, 0, 0, \dots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak $x^n \in B_{c_0}$ a platí

$$f_y(x^n) = \sum_{k=1}^{n} y_k \operatorname{cgn} y_k = \sum_{k=1}^{n} |y_k| \to \|y\|_1.$$

Tedy $\|f_y\| = \|y\|_{\ell_1}$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do.

Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in c_0^*$ a nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v c_0. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Vektor $x^n = (\operatorname{cgn} y_1, \dots, \operatorname{cgn} y_n, 0, 0, \dots)$ je v B_{c_0} pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k| = \sum_{k=1}^{n} y_k \operatorname{cgn} y_k = \sum_{k=1}^{n} f(e_k) \operatorname{cgn} y_k = f\left(\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{cgn} y_k) e_k\right) = f(x^n) \leq \|f\| \|x^n\| \leq \|f\|.$$

Jelikož je $n \in \mathbb{N}$ libovolné, je $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_1$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in c_0$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

(b) Nejprve předpokládejme, že $1 < p < \infty$. Nechť $y \in \ell_q$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_p$ platí z Hölderovy nerovnosti[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in \ell_p^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_q$. Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $y \neq 0$. Uvažujme vektor

$$x = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{-1/p} \left(|y_1|^{q-1} \operatorname{cgn} y_1, |y_2|^{q-1} \operatorname{cgn} y_2, \dots\right).$$

Je

$$\|x\|_p = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{p(q-1)}\right)^{1/p} = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/p} = 1,$$

a tedy $x \in B_{\ell_p}$. Proto

$$\|f_y\| \geq |f_y(x)| = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/p}} \left|\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^{q-1} (\operatorname{cgn} y_n) y_n\right| = \frac{1}{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{1/p}} \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q = \|y\|_q,$$

což znamená, že $\|f_y\| = \|y\|_q$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do.

Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in \ell_p^*$ a nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v ℓ_p. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} (\operatorname{cgn} y_k) e_k.$$

Pak

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = \sum_{k=1}^{n} |y_k|^{q-1} (\operatorname{cgn} y_k) f(e_k) = |f(x^n)| \leq \|f\| \|x^n\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/p}.$$

[2]Nerovnost dokázali v jiné formě Leonard James Rogers (1888) a Otto Ludwig Hölder (1889), který dokonce cituje Rogerse; v současné formě jak pro sumy, tak pro integrály ji pak zformuloval F. Riesz (1910).

Odtud dostáváme $\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_q$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in \ell_p$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

Zbývá případ $p = 1$. Nechť $y \in \ell_\infty$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_1$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n y_n| \leq \|y\|_\infty \|x\|_1.$$

Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $f_y \in \ell_1^*$ a $\|f_y\| \leq \|y\|_\infty$. Pro opačnou nerovnost uvažujme kanonické bázové vektory $e_n, n \in \mathbb{N}$ v ℓ_1. Máme $\|f_y\| \geq |f_y(e_n)| = |y_n|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboli $\|f_y\| \geq \|y\|_\infty$. Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do. Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in \ell_1^*$. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $|y_n| \leq \|f\|\|e_n\| = \|f\|$, tedy $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_\infty$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in \ell_1$. Podle Příkladu 1.29 máme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = f_y(x).$$

(c), (d) Nechť $g \in L_q(\mu)$ je dáno. Pro každé $f \in L_p(\mu)$ platí z Hölderovy nerovnosti (pro $p > 1$), případně jednoduchým odhadem (pro $p = 1$)

$$\int_\Omega |fg| \,\mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Odtud plyne, že φ_g je dobře definovaná funkce. Dále φ_g je zjevně lineární a nerovnost výše implikuje, že $\varphi_g \in L_p(\mu)^*$ a $\|\varphi_g\| \leq \|g\|_q$. Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $g \neq 0$. V případě $p > 1$ uvažujme funkci

$$f = \left(\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{-1/p} |g|^{q-1} \operatorname{cgn} g.$$

Je

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{-1/p} \left(\int_\Omega |g|^{p(q-1)} \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{-1/p} \left(\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = 1,$$

a tedy $f \in B_{L_p(\mu)}$. Proto

$$\|\varphi_g\| \geq |\varphi_g(f)| = \left(\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{-1/p} \left|\int_\Omega |g|^{q-1} (\operatorname{cgn} g) g \,\mathrm{d}\mu\right| = \left(\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{-1/p} \int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_q,$$

což znamená, že $\|\varphi_g\| = \|g\|_q$. V případě, že $p = 1$ (a μ je tak dle předpokladu σ-konečná) vezměme $\varepsilon > 0$ libovolné a uvažujme množinu $A = \{x \in \Omega;\ |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$. Pak A je kladné míry, a tedy díky σ-konečnosti μ existuje $B \subset A$ splňující $0 < \mu(B) < +\infty$. Je $f = \frac{1}{\mu(B)} \chi_B \operatorname{cgn} g \in B_{L_1(\mu)}$, a proto

$$\|\varphi_g\| \geq |\varphi_g(f)| = \frac{1}{\mu(B)} \left|\int_B (\operatorname{cgn} g) g \,\mathrm{d}\mu\right| = \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{\mu(B)} \int_B \big(\|g\|_\infty - \varepsilon\big) \,\mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty - \varepsilon.$$

Odtud plyne $\|\varphi_g\| = \|g\|_\infty$.

Linearita zobrazení I je zřejmá, tedy je to lineární izometrie do. Ukažme nyní, že je na. Předpokládejme nejprve, že $\mu(\Omega) < +\infty$. Nechť je dán $\varphi \in L_p(\mu)^*$. Pro každou $A \in \mathcal{S}$ položme

$$\nu(A) = \varphi(\chi_A).$$

Poznamenejme, že díky předpokladu konečnosti míry je ν dobře definována. Funkce ν je komplexní (případně znaménková) míra na Ω. Vskutku, je-li $\{A_j;\ j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}$ systém po dvou disjunktních měřitelných množin a označíme-li $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, pak $\left\| \chi_A - \chi_{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} \right\|_p = \mu\big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\big)^{1/p} \to 0$ (zde opět využíváme faktu, že μ je konečná). Tedy díky spojitosti φ máme

$$\nu(A) = \varphi(\chi_A) = \lim_{n\to\infty} \varphi\big(\chi_{\bigcup_{j=1}^{n} A_j}\big) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \varphi(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j).$$

Zřejmě je ν absolutně spojitá vzhledem k μ (tj. $\nu(A) = 0$ pro každou $A \in \mathcal{S}$ splňující $\mu(A) = 0$), dle Radonovy-Nikodymovy věty[3] tedy existuje $g \in L_1(\mu)$ splňující $\nu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. To znamená, že $\varphi(\chi_A) = \nu(A) = \int_\Omega \chi_A g \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. Z linearity φ a z linearity integrálu tedy ihned plyne, že

$$\varphi(s) = \int_\Omega sg \,\mathrm{d}\mu \tag{1}$$

pro každou jednoduchou měřitelnou funkci s na Ω.

Ukážeme, že platí $g \in L_q(\mu)$. Je-li $p > 1$, zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$ a položme $A_n = \{x \in \Omega;\ |g(x)| \le n\}$ a $f = \chi_{A_n} |g|^{q-1} \operatorname{cgn} g$. Existuje posloupnost $\{s_k\}$ jednoduchých měřitelných funkcí na Ω takových, že $s_k \to f$ bodově a navíc $|s_k(x)| \le 4|f(x)|$ pro každé $x \in \Omega$ a $k \in \mathbb{N}$ (použijeme větu [R, Věta 1.17] na rozklad $f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-$). Protože $|s_k - f|^p \le 5^p |f|^p$, funkce $|f|$ je omezená a μ je konečná, máme podle Lebesgueovy věty $\|s_k - f\|_p \to 0$. Podobně, $|s_k g| \le 4|f||g| \le 4n^q$, tedy dle Lebesgueovy věty $\int_\Omega s_k g \,\mathrm{d}\mu \to \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$. Zkombinujeme-li oba tyto fakty se spojitostí φ a platností (1), dostaneme

$$\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega s_k g \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \varphi(s_k) = \varphi(f) \le \|\varphi\| \|f\|_p = \|\varphi\| \left(\int_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}.$$

Úpravou obdržíme $\int_\Omega \chi_{A_n} |g|^q \,\mathrm{d}\mu \le \|\varphi\|^q$, a to platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Leviovy věty[4] o monotónní konvergenci tedy dostáváme $\|g\|_q \le \|\varphi\|$.

V případě $p = 1$ díky (1) máme $\left|\int_A g \,\mathrm{d}\mu\right| = |\varphi(\chi_A)| \le \|\varphi\| \|\chi_A\|_1 = \|\varphi\| \mu(A)$ pro každou $A \in \mathcal{S}$. Podle věty [R, Věta 1.40] tedy platí $|g(x)| \le \|\varphi\|$ pro s. v. $x \in \Omega$, odkud $\|g\|_\infty \le \|\varphi\|$.

Protože $g \in L_q(\mu)$, je podle první části důkazu φ_g spojitý lineární funkcionál na $L_p(\mu)$. Protože $\varphi(s) = \varphi_g(s)$ pro každou jednoduchou měřitelnou funkci s na Ω (viz (1)) a protože množina všech jednoduchých měřitelných funkcí na Ω je hustá v prostoru $L_p(\mu)$ ([R, Věta 3.13]), platí $\varphi = \varphi_g$ (Věta 13.3).

Dále uvažujme případ, kdy Ω má nekonečnou, ale σ-konečnou míru. Nechť $w \in L_1(\mu)$ je funkce splňující $0 < w(x) < 1$ pro všechna $x \in \Omega$ ([R, Lemma 6.9]). Definujme míru μ_1 na $\mathcal{S}$ vztahem $\mu_1(A) = \int_A w \,\mathrm{d}\mu$ pro $A \in \mathcal{S}$. Pak μ_1 je konečná míra. Definujme nyní funkcionál $\psi \in L_p(\mu_1)^*$ předpisem $\psi(h) = \varphi(w^{1/p} h)$ pro $h \in L_p(\mu_1)$. Funkcionál ψ je dobře definovaný, neboť

$$\int_\Omega |w^{1/p} h|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |h|^p w \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |h|^p \,\mathrm{d}\mu_1 < +\infty \tag{2}$$

pro každou $h \in L_p(\mu_1)$, a dále ψ je zjevně lineární a dle (2) máme $|\psi(f)| = |\varphi(w^{1/p} f)| \le \|\varphi\| \|w^{1/p} h\|_{L_p(\mu)} = \|\varphi\| \|h\|_{L_p(\mu_1)}$. Podle první části důkazu tedy existuje funkce $g_1 \in L_q(\mu_1)$ taková, že $\psi(f) = \int_\Omega f g_1 \,\mathrm{d}\mu_1$ pro každou $f \in L_p(\mu_1)$. Položme $g = w^{1/q} g_1$, pokud $p > 1$, resp. $g = g_1$, pokud $p = 1$. Pak pro $p > 1$ máme $\int_\Omega |g|^q \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |g_1|^q w \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |g_1|^q \,\mathrm{d}\mu_1 < +\infty$, zatímco pro $p = 1$ máme $\operatorname{ess\,sup}_\mu |g| = \operatorname{ess\,sup}_\mu |g_1| = \operatorname{ess\,sup}_{\mu_1} |g_1| < +\infty$, neboť míry μ a μ_1 mají přesně stejné nulové množiny. Tedy $g \in L_q(\mu)$. Konečně, pro každé $f \in L_p(\mu)$ máme $h = w^{-1/p} f \in L_p(\mu_1)$ (viz (2)), takže

$$\varphi(f) = \psi(h) = \int_\Omega h g_1 \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_\Omega w^{-1/p} f g_1 w \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu = \varphi_g(f).$$

Nyní se budeme věnovat případu, kdy $\mu(\Omega)$ není σ-konečná a $1 < p < \infty$. Pro $A \in \mathcal{S}$ lze prostor $L_p(A)$ přirozeným způsobem chápat jako podprostor $L_p(\Omega)$ sestávající z funkcí rovných 0 mimo A. Označme φ^A restrikci funkcionálu φ na podprostor $L_p(A)$. Zřejmě $\|\varphi^B\| \le \|\varphi^A\| \le \|\varphi\|$ pro každé $A, B \in \mathcal{S}$,

[3] V $\mathbb{R}^n$ větu dokázal Johann Karl August Radon (1913), obecný případ pak Otton Marcin Nikodym (1930).

[4] Beppo Levi

$B \subset A$. Označme $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{S};\ A \text{ má } \sigma\text{-konečnou míru}\}$. Položme $\gamma = \sup_{A\in\mathcal{A}} \|\varphi^A\| \leq \|\varphi\|$, nalezněme posloupnost množin $\{E_n\} \subset \mathcal{A}$ splňující $\lim_{n\to\infty} \|\varphi^{E_n}\| = \gamma$ a položme $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pak $E \in \mathcal{A}$ a $\gamma \geq \|\varphi^E\| \geq \|\varphi^{E_n}\| \to \gamma$, tedy $\|\varphi^E\| = \gamma$. Poznamenejme, že nakonec se ukáže, že platí $\varphi(f) = \varphi^E(f\restriction_E)$ pro každé $f \in L_p(\Omega)$.

Podle předchozí části důkazu existuje pro každé $A \in \mathcal{A}$ jednoznačně určená funkce $g_A \in L_q(A)$ splňující $\varphi^A = \varphi_{g_A}$ a $\|\varphi^A\| = \|g_A\|_q$. Jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, $B \subset A$, pak snadno vidíme, že $\varphi_{g_B}(f) = \varphi^B(f) = \varphi(f) = \varphi^A(f) = \varphi_{g_A}(f) = \varphi_{g_A\restriction_B}(f)$ pro každou $f \in L_p(B)$, přičemž $g_A\restriction_B \in L_q(B)$. Tedy z jednoznačnosti vyjádření funkcionálu φ^B dostáváme $g_B = g_A$ s. v. na B. Položme $g = g_E$ a rozšiřme ji nulou na doplňku E. Pak $g \in L_q(\Omega)$. Ukážeme, že $\varphi = \varphi_g$. Nechť $A \in \mathcal{A}$, $A \cap E = \emptyset$. Protože $A \cup E \in \mathcal{A}$ a dále $g_{E\cup A} = g_E$ s. v. na E a $g_{E\cup A} = g_A$ s. v. na A, dostáváme

$$\begin{aligned}\gamma^q \geq \|\varphi^{E\cup A}\|^q &= \|g_{E\cup A}\|_q^q = \int_{E\cup A} |g_{E\cup A}|^q \,\mathrm{d}\mu = \int_E |g_{E\cup A}|^q \,\mathrm{d}\mu + \int_A |g_{E\cup A}|^q \,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_E |g_E|^q \,\mathrm{d}\mu + \int_A |g_A|^q \,\mathrm{d}\mu = \|\varphi^E\|^q + \|g_A\|_q^q = \gamma^q + \|g_A\|_q^q,\end{aligned}$$

což znamená, že $g_A = 0$. (Poznamenejme, že toto je klíčové místo důkazu, a jediné, kde využíváme fakt $q < \infty$.) Pro každé $A \in \mathcal{A}$ a $f \in L_p(A)$ tedy máme

$$\begin{aligned}\varphi(f) = \varphi^A(f) &= \int_A f g_A \,\mathrm{d}\mu = \int_{A\setminus E} f g_A \,\mathrm{d}\mu + \int_{A\cap E} f g_A \,\mathrm{d}\mu = \int_{A\setminus E} f g_{A\setminus E} \,\mathrm{d}\mu + \int_{A\cap E} f g_{A\cap E} \,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_{A\cap E} f g_E \,\mathrm{d}\mu = \int_{A\cap E} f g \,\mathrm{d}\mu = \int_A f g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\mu = \varphi_g(f),\end{aligned}$$

přičemž předposlední dvě rovnosti platí proto, že $g = 0$ mimo E a $f = 0$ mimo A. Rovnost $\varphi(f) = \varphi_g(f)$ tedy speciálně platí pro každou jednoduchou měřitelnou funkci f na Ω splňující $\mu\big(\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}\big) < +\infty$. Množina všech těchto funkcí je ovšem hustá v $L_p(\Omega)$ ([R, Věta 3.13]), odkud plyne $\varphi = \varphi_g$ (Věta 13.3).

$\square$

Poznámka. Všimněme si, že pro prostor ℓ_2 (nebo obecněji $L_2(\mu)$) máme dvě reprezentace duálu: „hilbertovskou" reprezentaci pomocí sdruženě lineárního zobrazení $I_H\colon \ell_2 \to \ell_2^*$ z Věty 1.119 a „banachovskou" reprezentaci pomocí lineárního zobrazení $I\colon \ell_2 \to \ell_2^*$ z Věty 15(b). Rozdíl je v tom, jak vypadá akce prvku $y \in \ell_2$ reprezentujícího funkcionál na prvek $x \in \ell_2$:

$$I_H(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n},$$
$$I(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

V případě reálného prostoru obě reprezentace splývají, v případě komplexního prostoru platí $I_H(y) = I(\overline{y})$. Pro prostor $L_2(\mu)$ je interpretace obou reprezentací analogická.

Důkaz následujícího tvrzení je podobný důkazu Věty 15(a), (b).

Věta 16. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p. Pak zobrazení $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

Důkaz. Nechť X, Y jsou nad $\mathbb{K}$. Označme $Z = X \oplus_p Y$. Zobrazení $Q_X\colon Z \to X$, $Q_X(x, y) = x$ a $Q_Y\colon Z \to Y$, $Q_Y(x, y) = y$ jsou zjevně spojité lineární operátory. Proto $I(f, g) = f \circ Q_X + g \circ Q_Y$ je spojitý lineární funkcionál na Z, a tedy I je dobře definováno. Zjevně I je lineární. Ukážeme, že I je na: Je-li $h \in Z^*$, pak položíme $f(x) = h(x, 0)$ pro $x \in X$ a $g(y) = h(0, y)$ pro $y \in Y$. Snadno je vidět, že $f \in X^*$ a $g \in Y^*$. Máme $I(f,g)(x,y) = f(x) + g(y) = h(x,0) + h(0,y) = h(x,y)$ pro každé $(x,y) \in Z$, tedy $I(f,g) = h$.

Nakonec ukažme, že I je izometrie. Nechť $(f,g) \in X^* \oplus_q Y^*$. Předpokládejme nejprve, že $1 < p < \infty$. Pak s využitím Hölderovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |I(f,g)(x,y)| = \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \le \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\big) \le \\ &\le \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}^q + \|g\|_{Y^*}^q\big)^{\frac{1}{q}} \big(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\big)^{\frac{1}{p}} = \big(\|f\|_{X^*}^q + \|g\|_{Y^*}^q\big)^{\frac{1}{q}} = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $(f,g) \neq 0$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Položme $c = \big(\|f\|^q + \|g\|^q\big)^{\frac{1}{p}}$ a $\eta = \frac{c}{\|f\|^{q-1}+\|g\|^{q-1}}\varepsilon$. Nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \eta$, a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, aby $|f(x)| = \alpha f(x)$. Analogicky nalezneme $y \in B_Y$ tak, aby $|g(y)| > \|g\| - \eta$, a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$, aby $|g(y)| = \beta g(y)$. Položme $u = \frac{1}{c}\big(\|f\|^{q-1}\alpha x, \|g\|^{q-1}\beta y\big) \in Z$. Pak

$$\|u\| = \frac{1}{c}\big(\|f\|^q\|x\|^p + \|g\|^q\|y\|^p\big)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{c}\big(\|f\|^q + \|g\|^q\big)^{\frac{1}{p}} = 1$$

a

$$\begin{aligned}I(f,g)(u) &= \frac{1}{c}\big(\|f\|^{q-1}f(\alpha x) + \|g\|^{q-1}g(\beta y)\big) = \frac{1}{c}\big(\|f\|^{q-1}|f(x)| + \|g\|^{q-1}|g(y)|\big) > \\ &> \frac{\|f\|^q + \|g\|^q}{c} - \frac{\|f\|^{q-1} + \|g\|^{q-1}}{c}\eta = \big(\|f\|^q + \|g\|^q\big)^{\frac{1}{q}} - \varepsilon = \|(f,g)\| - \varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

Je-li $p = 1$, pak

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \le \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\big) \le \\ &\le \sup_{(x,y)\in B_Z} \max\big\{\|f\|_{X^*}, \|g\|_{Y^*}\big\}\big(\|x\|_X + \|y\|_Y\big) = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $\|f\| \ge \|g\|$. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \varepsilon$. Pak $\|I(f,g)\| \ge |I(f,g)(x,0)| = |f(x)| > \|f\| - \varepsilon = \|(f,g)\| - \varepsilon$. Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

Konečně, je-li $p = \infty$, pak

$$\begin{aligned}\|I(f,g)\| &= \sup_{(x,y)\in B_Z} |f(x)+g(y)| \le \sup_{(x,y)\in B_Z} \big(\|f\|_{X^*}\|x\|_X + \|g\|_{Y^*}\|y\|_Y\big) \le \\ &\le \sup_{(x,y)\in B_Z} \max\big\{\|x\|_X, \|y\|_Y\big\}\big(\|f\|_{X^*} + \|g\|_{Y^*}\big) = \|(f,g)\|.\end{aligned}$$

Pro opačnou nerovnost zvolme $\varepsilon > 0$ libovolné a nalezněme $x \in B_X$ tak, aby $|f(x)| > \|f\| - \varepsilon$, a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, aby $|f(x)| = \alpha f(x)$. Analogicky nalezneme $y \in B_Y$ tak, aby $|g(y)| > \|g\| - \varepsilon$, a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$, aby $|g(y)| = \beta g(y)$. Položme $u = (\alpha x, \beta y) \in Z$. Pak $\|u\| = \max\big\{|\alpha|\|x\|, |\beta|\|y\|\big\} \le 1$ a

$$I(f,g)(u) = f(\alpha x) + g(\beta y) = |f(x)| + |g(y)| > \|f\| + \|g\| - 2\varepsilon = \|(f,g)\| - 2\varepsilon.$$

Odtud snadno plyne, že $\|I(f,g)\| = \|(f,g)\|$.

□

DEFINICE 17. Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je nezáporný, jestliže $\Lambda(f) \ge 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

FAKT 18. *Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \le \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \le g$. Dále Λ je automaticky spojitý a pro reálnou $f \in C(K)$ platí $|\Lambda(f)| \le \Lambda(|f|)$. Tedy v reálném případě platí $\|\Lambda\| = \Lambda(1)$.*

DŮKAZ. Máme $\Lambda(g) - \Lambda(f) = \Lambda(g - f) \geq 0$, neboť $g - f \geq 0$. Pro reálnou $f \in C(K)$ platí $f \leq |f|$ a $-f \leq |f|$, odkud s použitím monotonie dostaneme $\Lambda(f) \leq \Lambda(|f|)$ a $-\Lambda(f) = \Lambda(-f) \leq \Lambda(|f|)$, což dohromady dává $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Odtud v reálném případě platí $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(1)$ pro $f \in B_{C(K)}$. V komplexním případě pak máme $|\Lambda(f)| = |\Lambda(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)| \leq |\Lambda(\operatorname{Re} f)| + |\Lambda(\operatorname{Im} f)| \leq \Lambda(|\operatorname{Re} f|) + \Lambda(|\operatorname{Im} f|) \leq 2\Lambda(|f|)$, a tedy $\|\Lambda\| \leq 2\Lambda(1)$.

□

Poznamenejme, že ve skutečnosti výše uvedená nerovnost $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$ platí i v komplexním případě, což ihned plyne z reprezentace níže.

VĚTA 19 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$). *Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.*

Všimněme si, že předchozí věta říká, že existuje bijekce mezi množinou všech regulárních borelovských *nezáporných* měr na K a množinou všech spojitých lineárních *nezáporných* funkcionálů na $C(K)$.

K důkazu budeme potřebovat Lemma 13.12 a Větu 13.13.

DŮKAZ. Důkaz je poměrně technický, proto nejprve nastíníme základní strategii. Předpokládejme, že míra μ má požadované vlastnosti. Z regularity plyne, že μ je jednoznačně určena svými hodnotami na otevřených, případně uzavřených, množinách. Zvolme například otevřené množiny. Pro každou otevřenou množinu $G \subset K$ platí $\mu(G) = \int_K \chi_G \,\mathrm{d}\mu$, kde na pravé straně je „evaluace funkcionálu Λ na funkci χ_G“. Zdálo by se tedy vhodné definovat $\mu(G) = \Lambda(\chi_G)$, ovšem hodnota $\Lambda(\chi_G)$ obvykle není definována, neboť χ_G není spojitá funkce (pokud G není obojetná). Přirozeným nápadem tedy je funkci χ_G aproximovat pomocí spojitých funkcí. Pro každou $f \in C(K)$, $0 \leq f \leq 1$ se $\operatorname{supp} f \subset G$ platí $\Lambda(f) = \int_G f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_G 1 \,\mathrm{d}\mu = \mu(G)$. Na druhou stranu, zvolíme-li libovolné $\varepsilon > 0$, pak z vnitřní regularity plyne existence uzavřené $F \subset G$ takové, že $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Dle Lemmatu 13.12 existuje $f \in C(K)$, $0 \leq f \leq 1$, která je rovna 1 na F a $\operatorname{supp} f \subset G$. Pak $\Lambda(f) = \int_G f \,\mathrm{d}\mu \geq \int_F f \,\mathrm{d}\mu = \mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Platí tedy

$$\mu(G) = \sup\bigl\{\Lambda(f);\ f \in C(K), 0 \leq f \leq 1, \operatorname{supp} f \subset G\bigr\}. \tag{3}$$

Vztah (3) je tedy nutnou podmínkou, kterou musí míra μ splňovat, a proto je přirozené vyjít při konstrukci μ právě z tohoto vzorce. Hodnoty μ na borelovských množinách jsou pak jednoznačně určeny pomocí vnější regularity. Konstrukci lze tedy vést tak, že definujeme μ na otevřených množinách vzorcem (3) a na borelovských množinách vzorcem

$$\mu(E) = \inf\bigl\{\mu(G);\ G \supset E, G \text{ otevřená}\bigr\}, \tag{4}$$

ukážeme, že definice je konzistentní a že takto definovaná μ je regulární míra, a že tato míra reprezentuje funkcionál Λ. Kvůli technickým obtížím nicméně zkonstruujeme nejprve vnější míru tak, že definujeme hodnoty μ vzorcem (4) na *všech* podmnožinách K, a pak pomocí Carathéodoryovy[5] konstrukce ukážeme, že restrikce μ na borelovské množiny je míra. Konstrukce bude rozdělena do několika technických kroků:

1. krok: Konstrukce vnější míry μ na K pomocí vzorců (3) a (4).
2. krok: Ukážeme, že borelovské množiny jsou carathéodoryovsky měřitelné vzhledem k μ, a tedy restrikce μ na borelovské množiny je regulární borelovská míra.
3. krok: Ukážeme, že μ reprezentuje funkcionál Λ.
4. krok: Ukážeme jednoznačnost μ.

1. krok. Pro každou otevřenou $G \subset K$ definujme $\mu(G)$ pomocí vzorce (3). Dále pro každou $E \subset K$, která není otevřená, definujme $\mu(E)$ pomocí vzorce (4). Je ihned vidět, že jsou-li $U, V \subset K$ otevřené a $U \subset V$, pak $\mu(U) \leq \mu(V)$. Odtud plyne, že vzorec (4) platí pro všechny $E \subset K$. Dále je zřejmé, že μ je nezáporná, konečná (Fakt 18), $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(E) \leq \mu(F)$ pro libovolné $E, F \subset K$, $E \subset F$. Zbývá ukázat σ-subaditivitu.

Nechť je dána posloupnost množin $\{E_n\}$ v K. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle (4) existují otevřené množiny $G_n \supset E_n$ splňující $\mu(G_n) < \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Pak G je

[5] Constantin Carathéodory (Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή) (1914)

otevřená množina a podle (3) existuje $f \in C(K)$ splňující $0 \le f \le 1$, $\operatorname{supp} f \subset G$ a $\Lambda(f) > \mu(G) - \varepsilon$. Množina $\operatorname{supp} f$ je uzavřená podmnožina K, tedy je kompaktní. Proto existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^m G_i$. Položme $U_{m+1} = K \setminus \operatorname{supp} f$ a $U_i = G_i$, $i = 1, \dots, m$. Pak $\{U_1, \dots, U_{m+1}\}$ je otevřené pokrytí K, a tedy dle Věty 13.13 existují $g_1, \dots, g_{m+1} \in C(K)$ splňující $0 \le g_i \le 1$ a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, m + 1$ a $\sum_{i=1}^{m+1} g_i = 1$. Protože $g_{m+1} = 0$ na $\operatorname{supp} f$, platí $\sum_{i=1}^m g_i = 1$ na $\operatorname{supp} f$. Položme $h_i = f g_i$, $i = 1, \dots, m$. Pak $h_i \in C(K)$, $0 \le h_i \le 1$ a $\operatorname{supp} h_i \subset U_i = G_i$ pro $i = 1, \dots, m$ a $f = \sum_{i=1}^m h_i$. Tedy

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \mu(G) < \Lambda(f) + \varepsilon = \varepsilon + \sum_{i=1}^m \Lambda(h_i) \le \varepsilon + \sum_{i=1}^m \mu(G_i) \le \varepsilon + \sum_{i=1}^m \Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) \le$$
$$\le 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Protože nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, je μ σ-subaditivní. Tedy μ je vnější míra na K.

2.krok. Nechť $\mathcal{S}$ je množina všech carathéodoryovsky měřitelných podmnožin K vzhledem k μ, tj. množin $E \subset K$ splňujících $\mu(T) = \mu(T \cap E) + \mu(T \setminus E)$ pro každou testovací $T \subset K$. Pak dle Caratheódoryovy věty je $\mathcal{S}$ σ-algebra a μ zúžená na $\mathcal{S}$ je míra (dokonce úplná). Je třeba ukázat, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny borelovské podmnožiny K. K tomu stačí ověřit, že $\mathcal{S}$ obsahuje všechny otevřené množiny.

Nejprve ukážeme, že μ je aditivní na otevřených množinách. Nechť tedy $U, V \subset K$ jsou disjunktní otevřené množiny. Díky subaditivitě μ stačí ukázat, že $\mu(U \cup V) \ge \mu(U) + \mu(V)$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Dle (3) existují $f, g \in C(K)$ splňující $0 \le f \le 1$, $\operatorname{supp} f \subset U$ a $0 \le g \le 1$, $\operatorname{supp} g \subset V$ takové, že $\Lambda(f) \ge \mu(U) - \varepsilon$ a $\Lambda(g) \ge \mu(V) - \varepsilon$. Protože U a V jsou disjunktní, platí $0 \le f + g \le 1$ a $\operatorname{supp}(f + g) \subset U \cup V$, a tedy

$$\mu(U \cup V) \ge \Lambda(f + g) = \Lambda(f) + \Lambda(g) \ge \mu(U) + \mu(V) - 2\varepsilon.$$

Protože to platí pro každé $\varepsilon > 0$, dostáváme $\mu(U \cup V) \ge \mu(U) + \mu(V)$.

Nyní již relativně snadno dostaneme, že každá otevřená podmnožina K je carathéodoryovsky měřitelná vzhledem k μ. Nechť tedy $G \subset K$ je otevřená a $T \subset K$ je libovolná. Díky subaditivitě stačí ukázat, že $\mu(T) \ge \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Podle (4) existuje $U \supset T$ otevřená splňující $\mu(U) < \mu(T) + \varepsilon$. Ze (3) najdeme $f \in C(K)$ takovou, že $0 \le f \le 1$, $\operatorname{supp} f \subset U \cap G$ a $\Lambda(f) > \mu(U \cap G) - \varepsilon$. Podle Lemmatu 13.12 existuje otevřená množina V splňující $\operatorname{supp} f \subset V \subset \overline{V} \subset U \cap G$. Pak $\mu(V) \ge \Lambda(f) \ge \mu(U \cap G) - \varepsilon$. Množiny V a $U \setminus \overline{V}$ jsou disjunktní a otevřené. Z aditivity μ na otevřených množinách tedy dostáváme

$$\mu(T) > \mu(U) - \varepsilon \ge \mu\big(V \cup (U \setminus \overline{V})\big) - \varepsilon = \mu(V) + \mu(U \setminus \overline{V}) - \varepsilon \ge$$
$$\ge \mu(U \cap G) - \varepsilon + \mu(U \setminus G) - \varepsilon \ge \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G) - 2\varepsilon.$$

Tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $\mu(T) \ge \mu(T \cap G) + \mu(T \setminus G)$.

Na závěr tohoto kroku si uvědomme, že z monotonie Λ plyne $\mu(K) = \Lambda(1) < +\infty$, speciálně μ je konečná na kompaktních podmnožinách K. Dále μ je zevně regulární přímo podle (4). Ovšem každá konečná zevně regulární míra je automaticky regulární i zevnitř. Tedy restrikce μ na borelovské množiny je regulární borelovská míra.

3. krok. Ukážeme, že $\Lambda(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$ pro každou $f \in C(K)$. S využitím rozkladu na reálnou a imaginární část a díky linearitě Λ a integrálu stačí dokázat reprezentaci pro reálné funkce. Dále si všimněme, že stačí dokázat nerovnost $\Lambda(f) \le \int_K f \, \mathrm{d}\mu$ pro každou reálnou $f \in C(K)$. Pak totiž aplikací této nerovnosti na $-f$ obdržíme opačnou nerovnost pro f.

Nechť je tedy dána reálná $f \in C(K)$ a nechť $a, b \in \mathbb{R}$ splňují $a \le f \le b$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a = 0$. Vskutku, máme-li požadovanou nerovnost dokázánu pro všechny nezáporné $g \in C(K)$, pak díky rovnosti $\Lambda(1) = \mu(K) = \int_K \chi_K \, \mathrm{d}\mu$ máme $\Lambda(f) = \Lambda(f - a\chi_K + a\chi_K) = \Lambda(f - a\chi_K) + a\Lambda(\chi_K) \le \int_K (f - a\chi_K) \, \mathrm{d}\mu + a \int_K \chi_K \, \mathrm{d}\mu = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$. Zvolme libovolné $0 < \varepsilon < 1$ a reálná čísla $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{n-1} \le b < y_n$ splňující $y_i - y_{i-1} \le \varepsilon$ pro $i = 1, \dots, n$. Protože f je

spojitá, množiny
$$E_i = \{x \in K;\ y_{i-1} \le f(x) < y_i\}, \quad i = 1, \dots, n$$
tvoří borelovský rozklad K. Dále množiny $\{x \in K;\ f(x) < y_i + \varepsilon\}$ jsou otevřené. Díky regularitě μ tedy existují otevřené množiny U_i, $i = 1, \dots, n$ splňující $\mu(U_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$ a $E_i \subset U_i \subset \{x \in K;\ f(x) < y_i + \varepsilon\}$. Systém $\{U_1, \dots, U_n\}$ tvoří otevřené pokrytí K, a tedy podle Věty 13.13 existují funkce $g_1, \dots, g_n \in C(K)$ splňující $0 \le g_i \le 1$ a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, n$ a $\sum_{i=1}^n g_i = 1$. Pak máme $g_i f \le (y_i + \varepsilon) g_i$ na K a $f \ge y_{i-1} \ge y_i - \varepsilon$ na E_i pro $i = 1, \dots, n$, a tedy
$$\begin{aligned}
\Lambda(f) &= \Lambda\left(f \sum_{i=1}^n g_i\right) = \sum_{i=1}^n \Lambda(g_i f) \le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Lambda(g_i) \le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\mu(U_i) \le \\
&\le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)\Big(\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\Big) = \sum_{i=1}^n (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon \sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) \le \\
&\le \sum_{i=1}^n \int_{E_i} (y_i - \varepsilon)\, \mathrm{d}\mu + 2\varepsilon\mu(K) + \frac{\varepsilon}{n} n(b + 2\varepsilon) \le \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f\, \mathrm{d}\mu + \varepsilon\big(2\mu(K) + b + 2\varepsilon\big) \\
&= \int_K f\, \mathrm{d}\mu + \varepsilon\big(2\mu(K) + b + 2\big),
\end{aligned}$$
přičemž první nerovnost plyne z monotonie Λ a druhá plyne z (3). Protože nerovnost platí pro libovolné $0 < \varepsilon < 1$, je tím důkaz 3. kroku dokončen.

4. krok. Nechť μ, ν jsou dvě regulární borelovské míry reprezentující funkcionál Λ. Vzhledem k vnější regularitě stačí ukázat, že se shodují na otevřených množinách. Nechť $G \subset K$ je otevřená množina. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Díky vnitřní regularitě existuje uzavřená množina $F \subset U$ splňující $\mu(F) > \mu(G) - \varepsilon$. Podle Lemmatu 13.12 existuje $f \in C(K)$ splňující $0 \le f \le 1$, $f = 1$ na F a $\operatorname{supp} f \subset G$. Pak
$$\mu(G) < \mu(F) + \varepsilon \le \int_K f\, \mathrm{d}\mu + \varepsilon = \int_K f\, \mathrm{d}\nu + \varepsilon \le \nu(G) + \varepsilon.$$
Toto platí pro každé $\varepsilon > 0$, a tedy $\mu(G) \le \nu(G)$. Prohozením rolí μ a ν dostaneme opačnou nerovnost.

□

Před studiem následující věty je nezbytné se seznámit s integrací vzhledem ke komplexním mírám, viz např. Dodatek, pododdíl 13.3.2.

VĚTA 20 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$[6]). *Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I : M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*
$$\varphi_\mu(f) = \int_K f\, \mathrm{d}\mu.$$

Tuto reprezentační větu dokážeme s pomocí Věty 19 a následujícího lemmatu.

LEMMA 21. *Nechť K je kompaktní prostor a $\varphi \in C(K)^*$. Pak existuje nezáporný $\Lambda \in C(K)^*$ takový, že $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$.*

DŮKAZ. Nechť $C^+(K)$ značí nezáporné spojité funkce na K. Pro $f \in C^+(K)$ a $h \in C(K)$ splňující $|h| \le f$ platí $|\varphi(h)| \le \|\varphi\|\|h\| \le \|\varphi\|\|f\|$. Můžeme tedy definovat nezápornou funkci $\Lambda\colon C^+(K) \to \mathbb{R}$ předpisem
$$\Lambda(f) = \sup\big\{|\varphi(h)|;\ h \in C(K), |h| \le f\big\}.$$
Snadno je vidět, že $\Lambda(f) \le \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C^+(K)$ splňují $f \le g$, a dále $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$ kdykoli $f \in C^+(K)$ a $c \ge 0$. Též ihned vidíme, že Λ splňuje náš požadavek $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$. Zbývá nám ukázat, že Λ lze rozšířit na všechny funkce z $C(K)$ tak, aby to byl lineární funkcionál.

[6] F. Riesz větu ukázal pro $C([a, b])$ pomocí Stieltjesova integrálu (1909-11), J. Radon zavedl míru a zobecnil větu na $\mathbb{R}^n$ (1913), pro kompaktní metrické prostory reprezentaci dokázal S. Banach (1937).

Ukažme nejprve, že Λ je aditivní na $C^+(K)$, tj. $\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$ pro libovolné $f_1, f_2 \in C^+(K)$. Nechť $f_1, f_2 \in C^+(K)$ jsou dány. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Dle definice existují $h_1, h_2 \in C(K)$ takové, že $|h_i| \le f_i$ a $|\varphi(h_i)| > \Lambda(f_i)-\varepsilon$, $i = 1, 2$. Nechť $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ splňují $|\alpha_i| = 1$ a $\alpha_i\varphi(h_i) = |\varphi(h_i)|$, $i = 1, 2$. Pak $|\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2| \le |h_1| + |h_2| \le f_1 + f_2$, takže

$$\Lambda(f_1)+\Lambda(f_2) < |\varphi(h_1)|+|\varphi(h_2)|+2\varepsilon = \varphi(\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2)+2\varepsilon \le \Lambda(|h_1|+|h_2|)+2\varepsilon \le \Lambda(f_1+f_2)+2\varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud $\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) \le \Lambda(f_1 + f_2)$.

Pro opačnou nerovnost uvažujme libovolnou funkci $h \in C(K)$ splňující $|h| \le f_1 + f_2$. Položme $V = \{x \in K;\ f_1(x) + f_2(x) > 0\}$ a pro $i = 1, 2$ definujme

$$h_i(x) = \begin{cases} \frac{f_i(x)h(x)}{f_1(x)+f_2(x)} & \text{pro } x \in V, \\ 0 & \text{pro } x \in K \setminus V. \end{cases}$$

Funkce h_i jsou zjevně spojité v bodech množiny V. Je-li $x \in K \setminus V$, pak $h(x) = 0$, a protože h je spojitá a platí $0 \le |h_i| \le |h|$, jsou i h_i spojité v x. Tedy $h_i \in C(K)$, $i = 1, 2$. Protože $h_1 + h_2 = h$ a $|h_i| \le f_i$, máme

$$|\varphi(h)| = |\varphi(h_1) + \varphi(h_2)| \le |\varphi(h_1)|+|\varphi(h_2)| \le \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2).$$

Protože tato nerovnost platí pro všechna $h \in C(K)$ splňující $|h| \le f_1 + f_2$, dostáváme $\Lambda(f_1 + f_2) \le \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$.

Na závěr dodefinujeme $\Lambda(f) = \Lambda(f^+) - \Lambda(f^-)$ pro reálnou $f \in C(K)$ a v komplexním případě dále $\Lambda(f) = \Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f)$ pro obecnou $f \in C(K)$. (Poznamenejme, že definice jsou konzistentní, neboť $\Lambda(0) = 0$.) Zbývá nám ověřit linearitu Λ. Nechť nejprve $f, g \in C(K)$ jsou reálné. Položme $h = f + g$. Pak $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, neboli $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Z aditivity Λ pro nezáporné funkce tak dostáváme $\Lambda(h^+) + \Lambda(f^-) + \Lambda(g^-) = \Lambda(h^-) + \Lambda(f^+) + \Lambda(g^+)$, odkud již snadno obdržíme $\Lambda(h) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$. Komplexní případ pak snadno plyne z reálného a z aditivity Re a Im.

Konečně, snadno je vidět, že pro každou $f \in C(K)$ je $\Lambda(cf) = c\Lambda(f)$ pro $c \ge 0$ a $\Lambda(-f) = -\Lambda(f)$. V komplexním případě pak $\Lambda(if) = \Lambda(-\operatorname{Im} f) + i\Lambda(\operatorname{Re} f) = i\big(\Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f)\big) = i\Lambda(f)$. Tím je dokázáno, že Λ je lineární funkcionál na $C(K)$.

□

DŮKAZ VĚTY 20. Nechť $\mu \in M(K)$ je dáno. Pro každé $f \in C(K)$ platí

$$\int_K |f|\,\mathrm{d}|\mu| \le \|f\|\,|\mu|(K) = \|\mu\|\,\|f\|.$$

Odtud plyne, že φ_μ je dobře definovaná funkce a platí $|\varphi_\mu(f)| \le \int_K |f|\,\mathrm{d}|\mu| \le \|\mu\|\,\|f\|$. Dále φ_μ je zjevně lineární, a tedy $\varphi_\mu \in C(K)^*$ a $\|\varphi_\mu\| \le \|\mu\|$.

Na druhou stranu, dle Tvrzení 13.36 existuje borelovská funkce $h\colon K \to \mathbb{C}$ splňující $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in K$ a $\int_K f\,\mathrm{d}\mu = \int_K fh\,\mathrm{d}|\mu|$ pro každou $f \in L_1(|\mu|)$. Podle důsledku Luzinovy věty ([R, str. 71] nebo Důsledek 13.24) existuje posloupnost $\{f_n\} \subset B_{C(K)}$ taková, že $f_n(x) \to \overline{h}(x)$ pro $|\mu|$-s. v. $x \in K$. Pak z Lebesgueovy věty plyne

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_\mu(f_n)| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_K f_n\,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \int_K f_n h\,\mathrm{d}|\mu|\right| = \left|\int_K \overline{h}h\,\mathrm{d}|\mu|\right| = \int_K 1\,\mathrm{d}|\mu| = |\mu|(K) = \|\mu\|.$$

Tedy $\|\varphi_\mu\| = \|\mu\|$. Linearita zobrazení I je zřejmá, takže je to lineární izometrie do.

Ukažme, že I je na. Nechť $\varphi \in C(K)^*$. Dle Lemmatu 21 existuje nezáporný lineární funkcionál Λ na $C(K)$ splňující $|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|)$ pro každou $f \in C(K)$. Dle Věty 19 existuje na K (konečná) regulární borelovská nezáporná míra λ splňující $\Lambda(f) = \int_K f\,\mathrm{d}\lambda$ pro každou $f \in C(K)$. Máme tedy

$$|\varphi(f)| \le \Lambda(|f|) = \int_K |f|\,\mathrm{d}\lambda = \|f\|_{L_1(\lambda)}$$

pro každou $f \in C(K)$. Odtud plyne, že jsou-li $f, g \in C(K)$ takové, že $f = g$ λ-s. v. na K, pak $|\varphi(f) - \varphi(g)| \le \|f - g\|_{L_1(\lambda)} = 0$, neboli $\varphi(f) = \varphi(g)$. Můžeme tedy chápat funkcionál φ jako lineární funkcionál

$\tilde{\varphi}$ na prostoru $(C(K), \|\cdot\|_{L_1(\lambda)})$ jakožto podprostoru $L_1(\lambda)$. Navíc nerovnost výše ukazuje, že $\tilde{\varphi}$ je spojitý a $\|\tilde{\varphi}\| \leq 1$. Protože $C(K)$ je hustý podprostor $L_1(\lambda)$ v normě prostoru $L_1(\lambda)$ ([R, Věta 3.14]), existuje jednoznačné rozšíření $\tilde{\varphi}$ na funkcionál $\psi \in L_1(\lambda)^*$ (Věta 1.62). Tedy dle Věty 15(d) existuje $g \in L_\infty(\lambda)$ taková, že $\psi(f) = \int_K fg \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou $f \in L_1(\lambda)$. Definujme komplexní borelovskou míru μ předpisem

$$\mu(E) = \int_E g \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $E \subset K$ borelovskou. Dle Věty 13.32 je μ regulární. Pak díky Větě 13.35 máme $\varphi_\mu(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu = \int_K fg \,\mathrm{d}\lambda = \psi(f) = \tilde{\varphi}(f) = \varphi(f)$ pro každou $f \in C(K)$.

□

VĚTA 22 (Felix Hausdorff). *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.*

(a) Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

(b) Zobrazení $I\colon X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^\perp$.

DŮKAZ. (a) Je-li $f \in Y^\perp$ a jsou-li $x, y \in X$ takové, že $\widehat{x} = \widehat{y}$ v X/Y, pak $x - y \in Y$, a tedy $f(x) = f(y)$. Zobrazení I je tedy dobře definované. Zjevně I je lineární. Ukažme, že I je izometrie do: Nechť $f \in Y^\perp$. Pak $\|I(f)\| = \sup_{\widehat{x} \in U_{X/Y}} |I(f)(\widehat{x})| = \sup_{x \in U_X} |I(f)(\widehat{x})| = \sup_{x \in U_X} |f(x)| = \|f\|$, přičemž druhá rovnost plyne z faktu $U_{X/Y} = q(U_X)$, kde $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení (Tvrzení 1.69). Konečně, je-li $g \in (X/Y)^*$, pak $g \circ q \in X^*$ a navíc $g \circ q \in Y^\perp$. Zjevně $I(g \circ q) = g$, tedy I je na.

(b) Nejprve si uvědomme, že $Y^\perp$ je uzavřený podprostor X^* (Lemma 12(a)), a tedy $X^*/Y^\perp$ je normovaný lineární prostor. Dále, I je dobře definováno, neboť jsou-li $f, g \in X^*$ takové, že $\widehat{f} = \widehat{g}$ v $X^*/Y^\perp$, pak $f - g \in Y^\perp$, neboli $f = g$ na Y. Zjevně I je lineární. Ukažme, že I je izometrie do: Nechť $f \in X^*$. Je-li $h \in \widehat{f}$, pak $h\restriction_Y = f\restriction_Y$, tedy $\|h\| \geq \|f\restriction_Y\|$, odkud plyne $\|\widehat{f}\| = \inf_{h \in \widehat{f}} \|h\| \geq \|f\restriction_Y\| = \|I(\widehat{f})\|$. Na druhou stranu, dle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 4) existuje rozšíření $g \in X^*$ funkcionálu $f\restriction_Y \in Y^*$ splňující $\|g\| = \|f\restriction_Y\|$. Pak $g - f \in Y^\perp$, tj. $g \in \widehat{f}$. Proto $\|I(\widehat{f})\| = \|f\restriction_Y\| = \|g\| \geq \|\widehat{f}\|$. Konečně, je-li $g \in Y^*$ a $f \in X^*$ je rozšíření g z Hahnovy-Banachovy věty, pak $I(\widehat{f}) = f\restriction_Y = g$, a tedy I je na.

□

POZNÁMKA. Reprezentační věty z tohoto oddílu hovoří o tom, jak lze reprezentovat duální prostor pro konkrétní Banachovy prostory X v tom smyslu, že existuje izometrie mezi nějakým Banachovým prostorem Y a duálem X^*. Nejdůležitější částí těchto reprezentačních vět jsou ovšem popisy toho, jakým způsobem prvek Y, který reprezentuje funkcionál na X, působí na prvky prostoru X.

Obvykle se prostory X^* a Y ztotožňují, říkáme tedy například „ℓ_1 je duálem k c_0“. Vždy je ovšem třeba mít na paměti, že toto ztotožnění je realizováno pomocí příslušné izometrie, a je důležité vědět, jak vypadá příslušná „akce“ konkrétního prvku prostoru Y na daný prvek prostoru X.

PŘÍKLAD 23. Uvažujme $X = \ell_1$ a $B = c_0 \subset \ell_\infty = \ell_1^*$. Pak B je uzavřený podprostor ℓ_1^* a $B_\perp = \{0\} \subset \ell_1$. Označíme-li totiž f_n kanonické bázové vektory v c_0, pak pro $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in B_\perp$ máme $x_n = f_n(x) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $(B_\perp)^\perp = \{0\}^\perp = \ell_1^* = \ell_\infty \supsetneq c_0 = B$.

3. Druhý duál a reflexivita

DEFINICE 24. Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme druhým duálem.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. evaluační funkcionál $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$. Z definice je zřejmé, že ε_x je lineární, spojitost pak plyne z odhadu $|f(x)| \leq \|x\|\|f\|$.

DEFINICE 25. Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá kanonické vnoření X do X^{**}.

TVRZENÍ 26. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}*

DŮKAZ. Pro libovolná $x, y \in X$, $f \in X^*$ a skalár α máme $\varepsilon_{x+y}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \varepsilon_x(f) + \varepsilon_y(f) = (\varepsilon_x + \varepsilon_y)(f)$ a podobně $\varepsilon_{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha(\varepsilon_x(f)) = (\alpha\varepsilon_x)(f)$. Tedy zobrazení ε je lineární. Dále $\|\varepsilon(x)\| = \sup_{f\in B_{X^*}}|\varepsilon_x(f)| = \sup_{f\in B_{X^*}}|f(x)| = \|x\|$ dle duálního vyjádření normy (Důsledek 6). Tedy ε je izometrie do. Je-li X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený dle Tvrzení 1.60(c).

□

Pomocí vnoření do druhého duálu snadno dokážeme následující pozorování.

TVRZENÍ 27. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak* $\dim X^* = \dim X$, *a to i v případě, že* $\dim X = \infty$.

DŮKAZ. Je-li $\dim X = n < \infty$, pak dimenze prostoru všech lineárních forem na X je rovna n. Podle Věty 1.66 je ovšem každá lineární forma na X spojitá, a tedy $\dim X^* = n$.

Nechť nyní $\dim X = \infty$. Ukážeme, že pak také $\dim X^* = \infty$. Předpokládejme, že to není pravda, tj. $\dim X^* < \infty$. Pak dle předchozí části je $\dim X^{**} < \infty$. Prostor X je ovšem izomorfní podprostoru X^{**}, a tedy $\dim X = \dim \varepsilon(X) \leq \dim X^{**} < \infty$, což je spor.

□

VĚTA 28. *Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.*

DŮKAZ. Položme $\widehat{X} = \overline{\varepsilon(X)} \subset X^{**}$. Protože X^{**} je úplný (Věta 1.50), je i $\widehat{X}$ úplný (Tvrzení 1.5(b)) a zřejmě $\varepsilon(X)$ je v něm hustý. Podle Tvrzení 26 lze prostor X identifikovat s prostorem $\varepsilon(X)$.

Nechť nyní X je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Podle první části existuje jeho zúplnění $\widehat{X}$ jakožto normovaného lineárního prostoru. Pak metrický prostor $\widehat{X} \times \widehat{X}$ je též úplný (Věta 13.6) a snadno je vidět, že $X \times X$ je v něm hustý. Funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ je dle Tvrzení 1.84(b) stejnoměrně spojitá na omezených podmnožinách $X \times X$, tedy existuje její spojité rozšíření $s\colon \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{K}$ (Věta 13.9). Funkce $(x, y, z) \mapsto s(x+y, z)$ a $(x, y, z) \mapsto s(x, z) + s(y, z)$ jsou spojité na prostoru $\widehat{X} \times \widehat{X} \times \widehat{X}$ a jsou si rovny na jeho husté podmnožině $X \times X \times X$ (z linearity skalárního součinu $\langle\cdot,\cdot\rangle$). Tedy dle Věty 13.3 platí $s(x+y, z) = s(x, z) + s(y, z)$ pro každé $x, y, z \in \widehat{X}$. Analogicky ověříme i ostatní vlastnosti skalárního součinu a též rovnost $s(x, x) = \|x\|^2_{\widehat{X}}$ pro každé $x \in \widehat{X}$. Tedy s je skalární součin na $\widehat{X}$ indukující úplnou normu na $\widehat{X}$.

K důkazu jednoznačnosti předpokládejme, že X_1 a X_2 jsou zúplnění X. Pak zobrazení Id_X chápané jako prvek $\mathcal{L}(X, X_2)$ lze rozšířit na spojitý lineární operátor $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$ (Věta 1.62). Je-li $x \in X_1$ a $\{x_n\}$ posloupnost v X konvergující k x, pak platí

$$\|T(x)\|_{X_2} = \lim_{n\to\infty}\|T(x_n)\|_{X_2} = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{X_2} = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_X = \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_{X_1} = \|x\|_{X_1},$$

a tedy T je izometrie do. Podle Tvrzení 1.60(c) je $T(X)$ uzavřený v X_2. Zároveň ale $T(X)$ obsahuje X, což je hustý podprostor X_2, takže $T(X) = X_2$.

□

DEFINICE 29. Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Povšimněme si, že je-li $X^{**} = \varepsilon(X)$ pro normovaný lineární prostor X, pak X je izometrický úplnému prostoru X^{**}. Tedy je úplný dle Věty 1.60(b). Podmínka $X^{**} = \varepsilon(X)$ ve výše zmíněné definici tedy nemůže být splněna pro prostory, které nejsou Banachovy.

VĚTA 30. *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

DŮKAZ. Nechť H je Hilbertův prostor nad $\mathbb{K}$. Mějme $F \in H^{**}$ dáno. Položme $f(x) = \overline{F(I(x))}$ pro $x \in H$, kde $I\colon H \to H^*$ je identifikace z Věty 1.119. Snadno je vidět, že $f \in H^*$, čili dle Věty 1.119 existuje $y \in H$ takové, že $f(x) = \langle x, y\rangle$ pro každé $x \in H$. Vezměme libovolné $g \in H^*$ a nalezněme $x \in H$ splňující $I(x) = g$. Pak

$$F(g) = F(I(x)) = \overline{\overline{F(I(x))}} = \overline{f(x)} = \overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle = g(y) = \varepsilon_y(g).$$

Tedy $F = \varepsilon_y = \varepsilon(y)$, odkud plyne, že ε je na.

Alternativně můžeme argumentovat následovně: Dle Věty 1.117 je H lineárně izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$, který je reflexivní podle Příkladu 33(b). Tedy je H reflexivní dle Věty 31(a).

□

VĚTA 31. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.
(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.
(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.
(d) Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \le p \le \infty$.
(e) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

DŮKAZ. (a) Nechť Y je reflexivní Banachův prostor, $T\colon X \to Y$ je lineární izomorfismus a je dán $F \in X^{**}$. Všimněme si, že $g \circ T \in X^*$ pro každé $g \in Y^*$, takže můžeme definovat

$$G(g) = F(g \circ T) \quad \text{pro } g \in Y^*.$$

Snadno je vidět, že G je lineární a $|G(g)| \le \|F\|\|g \circ T\| \le \|F\|\|T\|\|g\|$ (Fakt 1.47), tedy $G \in Y^{**}$. Protože Y je reflexivní, existuje $y \in Y$ splňující $\varepsilon_y = G$. Tvrdíme, že $x = T^{-1}(y)$ splňuje $\varepsilon_x = F$. Zvolme $f \in X^*$ libovolně. Pak $g = f \circ T^{-1} \in Y^*$, a tedy

$$F(f) = F(f \circ T^{-1} \circ T) = F(g \circ T) = G(g) = \varepsilon_y(g) = g(y) = f \circ T^{-1}(T(x)) = f(x) = \varepsilon_x(f).$$

Tedy kanonické vnoření ε je na.

(b) Nechť Y je uzavřený podprostor reflexivního prostoru X a nechť $\varepsilon_1\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2\colon Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Zafixujme $G \in Y^{**}$ a položme

$$F(f) = G(f\restriction_Y) \quad \text{pro } f \in X^*.$$

Pak $F \in X^{**}$, neboť $|F(f)| \le \|G\|\|f\restriction_Y\| \le \|G\|\|f\|$, a tedy existuje $x \in X$ splňující $\varepsilon_1(x) = F$. Dokonce $x \in Y$, protože v opačném případě by existoval funkcionál $f \in X^*$ splňující $f = 0$ na Y a $f(x) > 0$ (Věta 7), což by znamenalo, že

$$0 < f(x) = \varepsilon_1(x)(f) = F(f) = G(f\restriction_Y) = G(0) = 0.$$

Nakonec ukažme, že $\varepsilon_2(x) = G$. Dané $g \in Y^*$ rozšiřme pomocí Hahnovy-Banachovy věty na $f \in X^*$ a počítejme

$$\varepsilon_2(x)(g) = g(x) = f(x) = \varepsilon_1(x)(f) = F(f) = G(f\restriction_Y) = G(g).$$

(c) Nechť $\varepsilon_1\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2\colon X^* \to X^{***}$ jsou příslušná kanonická vnoření.

$\Rightarrow$ Je-li $\Phi \in X^{***}$ dáno, je $f = \Phi \circ \varepsilon_1 \in X^*$. Tvrdíme, že platí $\varepsilon_2(f) = \Phi$. Pro libovolné $F \in X^{**}$ totiž z reflexivity X najdeme $y \in X$ splňující $\varepsilon_1(y) = F$. Pak

$$\Phi(F) = \Phi(\varepsilon_1(y)) = f(y) = \varepsilon_1(y)(f) = F(f) = \varepsilon_2(f)(F).$$

Tedy ε_2 je na, což znamená, že X^* je reflexivní.

$\Leftarrow$ Z předchozí implikace plyne, že X^{**} je reflexivní. Podle Tvrzení 26 je $\varepsilon_1(X)$ uzavřený podprostor X^{**}, a tedy je reflexivní podle (b). Prostor X je izometrický prostoru $\varepsilon(X)$ (opět Tvrzení 26), a tedy je reflexivní podle (a).

(d) Nechť $1 \leq p \leq \infty$. Označme $\varepsilon\colon X \oplus_p Y \to (X \oplus_p Y)^{**}$, $\varepsilon_1\colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_2\colon Y \to Y^{**}$ příslušná kanonická vnoření a $I: X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ identifikaci z Věty 16. Nechť $H \in (X \oplus Y)^{**}$ je dáno. Položme $F(f) = H(I(f,0))$ pro $f \in X^*$ a $G(g) = H(I(0,g))$ pro $g \in Y^*$. Potom $F \in X^{**}$, neboť $|F(f)| \leq \|H\|\|(f,0)\| \leq \|H\|\|f\|$, a podobně $G \in Y^{**}$. Protože X a Y jsou reflexivní, existují prvky $x \in X$ a $y \in Y$ tak, že $\varepsilon_1(x) = F$ a $\varepsilon_2(y) = G$. Tvrdíme, že $\varepsilon(x,y) = H$. Je-li totiž $h \in (X \oplus_p Y)^*$, pak položíme $f(x) = h(x,0)$ pro $x \in X$ a $g(y) = h(0,y)$ pro $y \in Y$. Pak $h = I(f,0) + I(0,g)$, a dostáváme tedy

$$\begin{aligned} H(h) &= H\big(I(f,0) + I(0,g)\big) = F(f) + G(g) = \varepsilon_1(x)(f) + \varepsilon_2(y)(g) = \\ &= f(x) + g(y) = h(x,y) = \varepsilon_{(x,y)}(h). \end{aligned}$$

Odtud plyne $\varepsilon_{(x,y)} = H$, čili ε je na.

(e) Nechť $q\colon X \to X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení a $I: Y^\perp \to (X/Y)^*$ je identifikace z Věty 22. Nechť $\Phi \in (X/Y)^{**}$ je dáno. Položme $G(f) = \Phi(I(f))$ pro $f \in Y^\perp$. Pak $G \in (Y^\perp)^*$ a dle Hahnovy-Banachovy věty existuje jeho spojité rozšíření $F \in X^{**}$. Protože X je reflexivní, existuje $x \in X$ splňující $\varepsilon_x = F$. Chceme ukázat, že $\varepsilon_{\widehat{x}} = \Phi$. Nechť tedy $\varphi \in (X/Y)^*$ je libovolné. Pak $f = \varphi \circ q \in Y^\perp$ a $I(f) = \varphi$, neboť $I(f)(\widehat{x}) = f(x) = \varphi \circ q(x) = \varphi(\widehat{x})$ pro každé $\widehat{x} \in X/Y$. Tedy

$$\Phi(\varphi) = \Phi(I(f)) = G(f) = F(f) = \varepsilon_x(f) = f(x) = \varphi(\widehat{x}) = \varepsilon_{\widehat{x}}(\varphi).$$

□

TVRZENÍ 32. *Je-li X separabilní reflexivní Banachův prostor, pak i X^* je separabilní.*

DŮKAZ. Prostor X^{**} je izometrický separabilnímu X, tedy je separabilní. Pak X^* je separabilní dle Věty 9. □

PŘÍKLADY 33.

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.
(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.
(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.
(d) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor[7]), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

DŮKAZ. (a) Dle Věty 1.66 je každý konečněrozměrný prostor izomorfní prostoru $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, který je reflexivní, neboť je Hilbertův (Věta 30). Izomorfismus ovšem zachovává reflexivitu (Věta 31(a)).

(b) Nechť $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$ označuje identifikaci z Věty 15(c). Je-li $\Phi \in L_p(\mu)^{**}$ dáno, je $\Phi \circ I \in L_q(\mu)^*$. Opět podle Věty 15(c) tedy existuje $f \in L_p(\mu)$ splňující

$$\int gf \,\mathrm{d}\mu = \Phi \circ I(g) \quad \text{pro každé } g \in L_q(\mu).$$

Pak $\Phi = \varepsilon_f$, protože pro libovolné $\varphi \in L_p(\mu)^*$ nalezneme $g \in L_q(\mu)$ s vlastností $I(g) = \varphi$ a spočteme

$$\Phi(\varphi) = \Phi(I(g)) = \Phi \circ I(g) = \int gf \,\mathrm{d}\mu = \int fg \,\mathrm{d}\mu = I(g)(f) = \varepsilon_f(I(g)) = \varepsilon_f(\varphi).$$

(c) Prostor c_0^{**} je izometrický prostoru ℓ_∞ (Věta 15(a), Tvrzení 13 a Věta 15(b)). Prostor c_0 je ovšem separabilní, zatímco prostor ℓ_∞ je neseparabilní (Věta 1.26). Tedy c_0^{**} není izomorfní c_0, proto c_0 není reflexivní.

Prostor ℓ_1 není reflexivní podle Věty 31(a) a (c), neboť je izometrický c_0^*. Podobně, prostor ℓ_∞ není reflexivní, neboť je izometrický ℓ_1^* (případně proto, že nereflexivní c_0 je jeho uzavřeným podprostorem (Věta 31(b))). Prostor $L_1([0,1])$ není reflexivní podle Věty 31(b), neboť podle Příkladu 1.57 obsahuje podprostor izometrický prostoru ℓ_1, který není reflexivní. Prostor $L_\infty([0,1])$ není reflexivní, neboť je izometrický duálu k nereflexivnímu prostoru $L_1([0,1])$ (Věta 15(d)).

Prostor $C([0,1])$ není reflexivní dle Tvrzení 32, neboť je separabilní (Věta 1.26(c)), zatímco jeho duál není separabilní. Vskutku, všimněme si, že duál obsahuje nespočetnou množinu Diracových[8] měr $\{\delta_x;$

[7] Robert Clarke James (1951)
[8] Paul Adrien Maurice Dirac

$x \in [0,1]\}$. Tato množina je ovšem 2-separovaná: Jsou-li $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$, pak snadno vyrobíme spojitou funkci $f : [0,1] \to [-1,1]$, která splňuje $f(x) = 1$, $f(y) = -1$. Pak $f \in B_{C([0,1])}$, a tedy $\|\delta_x - \delta_y\| \geq (\delta_x - \delta_y)(f) = \delta_x(f) - \delta_y(f) = f(x) - f(y) = 2$.

Alternativně lze argumentovat tím, že $C([0,1])$ obsahuje podprostor izometrický nereflexivnímu prostoru c_0 (Příklad 1.58).

(d) Konstrukce Jamesova prostoru je mimo rámec těchto skript.

$\square$

Kapitola 3

Úplnost v Banachových prostorech

VĚTA 1 (Princip stejnoměrné omezenosti[1]). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

DŮKAZ[2]. (i)$\Rightarrow$(ii) je zřejmá.

(ii)$\Rightarrow$(i) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_n = \{x \in X;\ \|T(x)\| \le n \text{ pro každé } T \in \mathcal{A}\}.$$

Pak jsou F_n uzavřené množiny pokrývající díky (ii) celé X. Podle Baireovy věty[3] (Důsledek 13.11) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že F_{n_0} má neprázdný vnitřek. Existuje tedy koule $B(x_0, r) \subset F_{n_0}$. Nechť nyní $T \in \mathcal{A}$ je libovolný. Pro každé $x \in B_X$ je $x_0 + rx \in B(x_0, r)$, a tedy $\|T(rx)\| = \|T(x_0 + rx - x_0)\| \le \|T(x_0 + rx)\| + \|T(x_0)\| \le 2n_0$. Odtud $\|T(x)\| \le \frac{2n_0}{r}$, což znamená, že $\|T\| \le \frac{2n_0}{r}$. Proto je $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} \le \frac{2n_0}{r}$.

□

DŮSLEDEK 2. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T\| \le$* $\liminf \|T_n\|$.

DŮKAZ. Nejprve ukážeme, že T je lineární. Zvolme $x, y \in X$ a skalár α libovolně. Pak díky spojitosti vektorových operací platí $T(x + y) = \lim T_n(x + y) = \lim\bigl(T_n(x) + T_n(y)\bigr) = \lim T_n(x) + \lim T_n(y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \lim T_n(\alpha x) = \lim \alpha T_n(x) = \alpha \lim T_n(x) = \alpha T(x)$. Dále, pro pevné $x \in X$ ze spojitosti normy plyne $\lim \|T_n(x)\| = \|T(x)\|$, speciálně posloupnost $\{\|T_n(x)\|\}$ je omezená. Z principu stejnoměrné omezenosti (Věta 1) plyne, že posloupnost $\{\|T_n\|\}$ je omezená. Pak pro libovolné $x \in B_X$ platí $\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| = \liminf_{n\to\infty} \|T_n(x)\| \le \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \in \mathbb{R}$. Tedy T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \le \liminf \|T_n\|$.

□

DEFINICE 3. Zobrazení $f : X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení (ne nutně spojité), které je otevřené. Pak T je na. Vskutku, $T(X)$ je otevřená množina obsahující 0, tedy existuje $\delta > 0$ takové, že $U(0, \delta) \subset T(X)$. Protože $T(X)$ je podprostor Y, obsahuje speciálně všechny násobky $U(0, \delta)$, a tedy $T(X) = Y$. Jedním z nejzákladnějších výsledků teorie Banachových prostorů je fakt, že pro spojité lineární operátory platí i věta obrácená. Zásadní roli zde ovšem hraje úplnost.

VĚTA 4 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

K důkazu použijeme následující lemma.

[1] Větu dokázal pro $C([0, 1])$ Eduard Helly (1912). Jeho důkaz funguje i v obecném případě. Obecné verze podali S. Banach (1922), H. Hahn (1922) a Theophil Henry Hildebrandt (1923). Nejznámější verzi publikovali S. Banach a H. Steinhaus (1927), proto se věta často nazývá Banachova-Steinhausova.

[2] Důkaz využívající Baireovu větu pochází od Stanisława Sakse (1927).

[3] René-Louis Baire ji zformuloval pro $\mathbb{R}$ (1899), základní myšlenka pochází ovšem už od Williama Fogga Osgooda (1897).

LEMMA 5 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0, s) \subset \overline{T(U(0, r))}$, pak dokonce $U(0, s) \subset T(U(0, r))$.*

DŮKAZ. Nejprve si povšimněme, že lze bez újmy na obecnosti uvažovat pouze případ $r = s = 1$. Vskutku, máme-li již dokázané tvrzení v tomto případě a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ splňuje předpoklady pro nějaká $r, s > 0$, pak operátor $\frac{r}{s}T$ splňuje $U(0, 1) \subset \overline{(\frac{r}{s}T)(U(0, 1))}$, a tedy podle případu $r = s = 1$ platí $U(0, 1) \subset (\frac{r}{s}T)(U(0, 1))$, odkud $U(0, s) \subset T(U(0, r))$.

Nechť tedy $r = s = 1$ a nechť je dáno $z \in U_Y$. Najdeme $\delta \in (0, 1)$ takové, že $\|z\| < 1 - \delta$. Ukážeme, že $y = \frac{1}{1-\delta}z \in T\left(\frac{1}{1-\delta}U_X\right)$. Pak totiž $z = (1 - \delta)y \in (1 - \delta)T\left(\frac{1}{1-\delta}U_X\right) = T(U_X)$. Pomocí matematické indukce najdeme $y_0, y_1, y_2 \ldots \in Y$ takové, že

(i) $y_0 = 0$,
(ii) $\|y - y_n\| < \delta^n$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
(iii) $y_n - y_{n-1} \in T(\delta^{n-1}U_X)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Je $\|y\| < 1$, a tedy je volbou $y_0 = 0$ podmínka (ii) splněna. Předpokládejme nyní, že $n \in \mathbb{N}$ a již máme nalezeny prvky $y_0, \ldots, y_{n-1}$. Pak

$$y - y_{n-1} \in \delta^{n-1}U_Y \subset \delta^{n-1}\overline{T(U_X)} = \overline{\delta^{n-1}T(U_X)} = \overline{T(\delta^{n-1}U_X)},$$

a tedy existuje $w \in T(\delta^{n-1}U_X)$ splňující $\|y - y_{n-1} - w\| < \delta^n$. Pak $y_n = y_{n-1} + w$ splňuje požadované podmínky. Tím je konstrukce završena.

Nyní pro každé $n \in \mathbb{N}$ ze (iii) zvolíme $x_n \in \delta^{n-1}U_X$ takové, že $y_n - y_{n-1} = T(x_n)$. Protože $\delta < 1$, je řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ absolutně konvergentní, a díky úplnosti X je tedy konvergentní (Věta 1.30). Označme $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Pak dle Faktu 1.28 máme $\|x\| \le \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} = \frac{1}{1-\delta}$. Tedy $x \in \frac{1}{1-\delta}U_X$. Ukážeme, že $T(x) = y$, čímž bude důkaz završen:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(y_n - y_{n-1}) = \lim_{N\to\infty} y_N = y,$$

přičemž poslední rovnost platí díky (ii).

□

DŮKAZ VĚTY 4. Stačí ukázat, že $T(U_X)$ obsahuje kouli $U(0, \delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Vskutku, nechť $G \subset X$ je otevřená a $y \in T(G)$ je libovolný. Nechť dále $x \in G$ splňuje $y = T(x)$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $U(x, r) \subset G$. Máme tedy $U(y, \delta r) = y + rU(0, \delta) \subset y + rT(U_X) = T(x + rU_X) = T(U(x, r)) \subset T(G)$.

Protože T je na, platí

$$Y = T(X) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nU_X\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(nU_X) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{T(nU_X)}.$$

Z Baireovy věty (Důsledek 13.11) plyne existence $n \in \mathbb{N}$ takového, že $\overline{T(nU_X)}$ má neprázdný vnitřek, tedy obsahuje nějakou kouli $U(x, r)$. Množina $\overline{T(nU_X)}$ je konvexní a symetrická (Fakty 1.43 a 1.21), proto je $U(0, r) \subset \overline{T(nU_X)}$ (Fakt 1.19). Podle Lemmatu 5 ovšem platí $U(0, r) \subset T(nU_X)$, a tedy $U(0, \frac{r}{n}) \subset T(U_X)$.

□

DŮSLEDEK 6 (S. Banach, 1929). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá. $\Leftarrow$ Spojitost T^{-1} plyne z otevřenosti T, tedy z Věty 4.

□

DŮSLEDEK 7. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí:*

(a) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \le c\|y\|$.
(b) Zobrazení $\widehat{T}: X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.

DŮKAZ. (a) Díky Větě 4 existuje $r > 0$ takové, že $T(B_X) \supset B_Y(0,r)$. Nechť nyní $y \in Y \setminus \{0\}$ je dáno. Pak $\frac{r}{\|y\|} y \in B_Y(0,r)$, a tedy existuje $x \in B_X$ splňující $T(x) = \frac{r}{\|y\|} y$. Protože $T\bigl(\frac{\|y\|}{r} x\bigr) = y$ a $\bigl\|\frac{\|y\|}{r} x\bigr\| \le \frac{1}{r}\|y\|$, tvrzení platí s konstantou $c = \frac{1}{r}$.

(b) Je-li $\widehat{x} = \widehat{y}$, pak $x - y \in \operatorname{Ker} T$, a tedy $T(x) = T(y)$. Proto je $\widehat{T}$ dobře definované lineární zobrazení. Ukažme, že $\widehat{T}$ je spojité. Nechť $\widehat{x} \in U_{X/\operatorname{Ker} T}$. Pak existuje $y \in \widehat{x}$ takové, že $\|y\| < 1$. Proto $\|\widehat{T}(\widehat{x})\| = \|T(y)\| \le \|T\|\|y\| \le \|T\|$. Odtud plyne, že $\|\widehat{T}\| \le \|T\|$. Dále zjevně $\widehat{T}$ je na. Konečně, je-li $\widehat{x} \in \operatorname{Ker} \widehat{T}$, pak $x \in \operatorname{Ker} T$, což znamená, že $\widehat{x} = 0$, a tedy $\widehat{T}$ je prosté. Zobrazení $\widehat{T}$ je tedy lineární izomorfismus dle Důsledku 6.

□

Jak ukazují následující příklady, předpoklady na úplnost zdrojového i cílového prostoru ve větě o otevřeném zobrazení jsou naprosto podstatné.

PŘÍKLAD 8. Položme $X = c_0$ a uvažujme operátor $T\colon X \to c_0$ definovaný předpisem $T(x) = \bigl(\frac{1}{n} x_n\bigr)_{n=1}^{\infty}$ pro $x = (x_n) \in X$. Ihned je vidět, že T je prostý spojitý lineární operátor a $\|T\| \le 1$. Položme dále $Y = T(X)$. Pak $T\colon X \to Y$ je na, X je úplný, ale ukážeme, že T není otevřené zobrazení. Nejprve si všimněme, že $c_{00} \subset Y$, neboť pro libovolný $y = \sum_{n=1}^{k} y_n e_n \in c_{00}$, kde e_n jsou kanonické bázové vektory, je $T\bigl(\sum_{n=1}^{k} n y_n e_n\bigr) = y$. Předpokládejme nyní, že T je otevřené zobrazení. Pak $B(0,r) \subset T(U_X)$ pro nějaké $r > 0$. Protože $c_{00} \subset Y$, je speciálně $z_k = \sum_{n=1}^{k} r e_n \in T(U_X)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ splňuje $k > \frac{1}{r}$. Protože T je prostý, jediný prvek, který se zobrazí na z_k, je prvek $\sum_{n=1}^{k} n r e_n \in X$, jehož norma je ovšem rovna $kr > 1$, a tím pádem tento prvek nepatří do U_X. To je spor.

PŘÍKLAD 9. Nechť $Y = (Y, \|\cdot\|_1)$ je libovolný nekonečněrozměrný Banachův prostor. Podle Věty 1.66 existuje na Y norma $\|\cdot\|_2$, která není ekvivalentní normě $\|\cdot\|_1$. Z důkazu Věty 1.66 je vidět, že můžeme předpokládat, že $\|x\|_1 \le \|x\|_2$ pro každé $x \in Y$. Protože normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ nejsou ekvivalentní, existuje posloupnost $\{x_n\} \subset Y$ splňující $\|x_n\|_1 = 1$ a $\|x_n\|_2 > n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $X = (Y, \|\cdot\|_2)$ a uvažujme lineární operátor $T\colon X \to Y$, $T = Id_X$. Pak T je spojitý, neboť $\|T(x)\|_1 = \|x\|_1 \le \|x\|_2$ pro každé $x \in X$. Zjevně Y je úplný a T je na. Ukážeme sporem, že T není otevřené zobrazení. Předpokládejme, že $B(0,r) \subset T(U_X)$ pro nějaké $r > 0$. Nechť $k \in \mathbb{N}$ splňuje $k > \frac{1}{r}$. Pak $\|r x_k\|_1 = r$, $T^{-1}(r x_k) = \{r x_k\}$, ale $\|r x_k\|_2 > rk > 1$, tedy $r x_k \notin U_X$. To je spor.

DEFINICE 10. Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Je-li $f\colon X \to Y$ spojité zobrazení mezi metrickými prostory X a Y, pak má uzavřený graf. Vskutku, nechť $\{(x_n, y_n)\}$ je posloupnost v množině graf f konvergující k $(x,y) \in X \times Y$. Pak $x_n \to x$, a tedy $f(x_n) \to f(x)$. Zároveň ovšem $f(x_n) = y_n \to y$, tedy dle jednoznačnosti limity $y = f(x)$, což znamená, že $(x,y) \in \operatorname{graf} f$. Lineární zobrazení mezi Banachovými prostory mají tu významnou vlastnost, že pro ně platí i opačná implikace:

VĚTA 11 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932). *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z poznámky před větou.

$\Leftarrow$ Snadno je vidět, že kanonické „projekce“ $P\colon X \oplus_\infty Y \to X$, $P(x,y) = x$ a $Q\colon X \oplus_\infty Y \to Y$, $Q(x,y) = y$ jsou spojité lineární operátory, a že zobrazení $S\colon X \to X \oplus_\infty Y$, $S(x) = (x, T(x))$ je lineární. Proto je $G = \operatorname{graf} T = S(X)$ lineární podprostor $X \oplus_\infty Y$, který je dle předpokladu uzavřený. Tedy G je Banachův prostor (Tvrzení 1.5(b)). Dále uvažujme zobrazení $\tilde{S}\colon X \to G$, $\tilde{S} = S$. Pak $\tilde{S}$ je bijekce a $P \restriction_G$ je inverzní k $\tilde{S}$. Zobrazení $P \restriction_G$ je spojité lineární zobrazení, které je prosté a na. Dle Důsledku 6 je jeho inverze $\tilde{S}$ spojitá. Proto je i $T = Q \circ \tilde{S}$ spojité.

□

DůKAZ VĚTY 1.78(B). Nechť $P_Y : X \to Y$ je projekce příslušná rozkladu $X = Y \oplus Z$. Protože Y je uzavřený podprostor Banachova prostoru X, je to také Banachův prostor, takže díky Větě 11 stačí ukázat, že P_Y má uzavřený graf. Nechť tedy $\{(x_n, y_n)\}$ je posloupnost v graf P_Y konvergující k $(x, y) \in X \oplus_\infty Y$. Pak $x_n \to x$ a $y_n \to y$. Dále $x_n - y_n = x_n - P_Y(x_n) \in Z$ (Tvrzení 1.74) a díky uzavřenosti Z tak máme $x - y = \lim(x_n - y_n) \in Z$. Tedy $x = y + (x - y)$, kde $y \in Y$ a $x - y \in Z$, je jednoznačný rozklad x, což znamená, že $y = P_Y(x)$, neboli $(x, y) \in$ graf P_Y.

$\square$

Kapitola 4

Lineární operátory

1. Duální operátory

Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Abychom zlepšili přehlednost některých komplikovanějších výrazů, které by obsahovaly příliš mnoho závorek, budeme často výrazy typu $T(x)$ zkracovat jako Tx.

DEFINICE 1. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá duální (nebo též adjungovaný) operátor k T. (Ve Větě 2 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

VĚTA 2. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.
(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.
(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.

DŮKAZ. (a) Pro dané $f \in Y^*$ je funkce $x \mapsto f(Tx)$ zjevně lineární a spojitá na X, tudíž se jedná o prvek X^*. Zobrazení $T^*\colon Y^* \to X^*$ je tedy dobře definované. Snadno je vidět, že T^* je lineární operátor. Dále platí

$$\begin{aligned}\|T^*\| &= \sup_{f \in B_{Y^*}} \|T^* f\| = \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} |T^* f(x)| = \sup_{f \in B_{Y^*}} \sup_{x \in B_X} |f(Tx)| = \\ &= \sup_{x \in B_X} \sup_{f \in B_{Y^*}} |f(Tx)| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \|T\|,\end{aligned}$$

přičemž předposlední rovnost plyne z duálního vyjádření normy (Důsledek 2.6). Tedy $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(b) Linearita zobrazení $T \mapsto T^*$ se snadno ověří: Nechť $S, T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a α je skalár. Zvolme $f \in Y^*$ libovolně. Pak $(S+T)^* f(x) = f\big((S+T)x\big) = f(Sx+Tx) = f(Sx)+f(Tx) = S^* f(x)+T^* f(x) = (S^* f + T^* f)(x)$ a $(\alpha T)^* f(x) = f\big((\alpha T)x\big) = f\big(\alpha(Tx)\big) = \alpha f(Tx) = \alpha\big(T^* f(x)\big) = \big(\alpha(T^* f)\big)(x)$ pro každé $x \in X$, neboli $(S+T)^* f = S^* f + T^* f = (S^* + T^*) f$ a $(\alpha T)^* f = \alpha(T^* f) = (\alpha T^*) f$. Odtud $(S+T)^* = S^* + T^*$ a $(\alpha T)^* = \alpha T^*$. Izometrie pak plyne z (a).

(c) Nechť $f \in Z^*$ je libovolné. Pak pro každé $x \in X$ platí $(S \circ T)^* f(x) = f(S \circ Tx) = f\big(S(Tx)\big) = S^* f(Tx) = T^*(S^* f)(x)$, tedy $(S \circ T)^* f = T^*(S^* f) = (T^* \circ S^*) f$. Odtud $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Konečně, pro $f \in X^*$ a $x \in X$ máme $Id_X^* f(x) = f(Id_X x) = f(x) = Id_{X^*} f(x)$.

□

PŘÍKLAD 3. Nechť $X = \mathbb{K}^n$ a $Y = \mathbb{K}^m$ s libovolnými normami a nechť $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Z lineární algebry víme, že T je reprezentován jistou maticí $A \in M(m \times n)$ tak, že $T(x) = Ax$ pro $x \in \mathbb{K}^n$. Zkoumejme, jak vypadá duální operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$. Použijeme-li standardní reprezentaci duálu z lineární algebry spolu s Větou 1.66, pak $X^* = \mathbb{K}^n$ a $Y^* = \mathbb{K}^m$, přičemž $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j x_j$ pro $f = (f_j)_{j=1}^n \in X^*$ a $x = (x_j)_{j=1}^n \in X$ a analogicky pro Y^*. V této reprezentaci je tedy $T^*\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$. Nechť $f \in Y^* = \mathbb{K}^m$.

Pro každé $x \in X = \mathbb{K}^n$ platí, že

$$T^* f(x) = f(Tx) = f(Ax) = \sum_{j=1}^{m} f_j (Ax)_j = \sum_{j=1}^{m} f_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} f_j \right) x_k = \sum_{k=1}^{n} (A^{\mathrm{T}} f)_k x_k = (A^{\mathrm{T}} f) x,$$

kde A^{T} je matice transponovaná k matici A. Tedy $T^*(f) = A^{\mathrm{T}} f$, neboli T^* je reprezentován maticí A^{T}.

Je-li na X a Y eukleidovská norma, pak X a Y jsou Hilbertovy prostory. Vedle reprezentace duálů použité výše tedy máme k dispozici ještě reprezentaci z Věty 1.119 (která se v komplexním případě liší). Podívejme se, jak vypadá T^* v této reprezentaci. Opět je $X^* = \mathbb{K}^n$ a $Y^* = \mathbb{K}^m$, ale $f(x) = \sum_{j=1}^n \overline{f_j} x_j$ pro $f = (f_j)_{j=1}^n \in X^*$ a $x = (x_j)_{j=1}^n \in X$ (a analogicky pro Y^*). Pro $T^* \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ v této reprezentaci tedy pro každé $f \in Y^* = \mathbb{K}^m$ a $x \in X = \mathbb{K}^n$ platí, že

$$T^* f(x) = f(Tx) = f(Ax) = \sum_{j=1}^{m} \overline{f_j} (Ax)_j = \sum_{j=1}^{m} \overline{f_j} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} \overline{f_j} \right) x_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{\left(\sum_{j=1}^{m} \overline{a_{jk}} f_j \right)} x_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{(\overline{A}^{\mathrm{T}} f)_k} x_k = (\overline{A}^{\mathrm{T}} f) x,$$

kde $\overline{A}^{\mathrm{T}} = (\overline{a_{kj}})$ pro $A = (a_{jk})$. Tedy $T^*(f) = \overline{A}^{\mathrm{T}} f$, neboli T^* je reprezentován maticí $\overline{A}^{\mathrm{T}}$.

VĚTA 4. *Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí, že*

(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^{\perp}$,
(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_{\perp}$,
(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_{\perp}$,
(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.
(e) Jsou-li navíc X, Y Banachovy a $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak* $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

DŮKAZ. Tvrzení (a) dostaneme z ekvivalencí

$$f \in \operatorname{Ker} T^* \;\Leftrightarrow\; T^* f = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X \colon T^* f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall x \in X \colon f(Tx) = 0 \;\Leftrightarrow\; f \in (\operatorname{Rng} T)^{\perp}.$$

Tvrzení (b) dokážeme obdobně, přičemž pro druhou ekvivalenci používáme Hahnovu-Banachovu větu (Důsledek 2.5):

$$x \in \operatorname{Ker} T \;\Leftrightarrow\; Tx = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall f \in Y^* \colon f(Tx) = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall f \in Y^* \colon (T^* f)(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (\operatorname{Rng} T^*)_{\perp}.$$

(c) Díky (a) a Lemmatu 2.12(c) platí $(\operatorname{Ker} T^*)_{\perp} = \big((\operatorname{Rng} T)^{\perp}\big)_{\perp} = \overline{\operatorname{Rng} T}$.

(d) Díky (b) a Lemmatu 2.12(d) platí $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} = \big((\operatorname{Rng} T^*)_{\perp}\big)^{\perp} \supset \overline{\operatorname{Rng} T^*}$.

(e) Díky (d) stačí dokázat inkluzi $(\operatorname{Ker} T)^{\perp} \subset \operatorname{Rng} T^*$. Nechť $f \in (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$ je dáno. Zobrazení $\widehat{T} \colon X/\operatorname{Ker} T \to \operatorname{Rng} T$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je dle Důsledku 3.7(b) lineárním izomorfismem, a tedy k němu existuje inverze $\widehat{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Rng} T, X/\operatorname{Ker} T)$. Pro $y \in \operatorname{Rng} T$ položme $g(y) = I(f)(\widehat{T}^{-1} y)$, kde $I \colon (\operatorname{Ker} T)^{\perp} \to (X/\operatorname{Ker} T)^*$ je identifikace z Věty 2.22(a). Pak $g \in (\operatorname{Rng} T)^*$ a podle Hahnovy-Banachovy věty existuje jeho rozšíření $\tilde{g} \in Y^*$. Tvrdíme, že $T^* \tilde{g} = f$. Nejprve si všimněme, že pro každé $x \in X$ platí $\widehat{T}^{-1}(Tx) = \widehat{x}$. Proto $T^* \tilde{g}(x) = \tilde{g}(Tx) = g(Tx) = I(f)\big(\widehat{T}^{-1}(Tx)\big) = I(f)(\widehat{x}) = f(x)$ pro každé $x \in X$.

□

Poznamenejme, že „správné znění“ tvrzení (d) uvedeme v oddílu 7.9 (Věta 7.107).

TVRZENÍ 5 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X \colon X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y \colon Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tedy $T^{**}(\varepsilon_X(X)) \subset \varepsilon_Y(Y)$ a označíme-li $\varepsilon\colon Y \to \varepsilon_Y(Y)$, $\varepsilon = \varepsilon_Y$, a $S\colon \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)}$, pak $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$.

Ztotožníme-li prostory X, Y s jejich kanonickými vnořeními v X^{**}, Y^{**}, pak výše uvedené tvrzení neformálně říká, že $T = T^{**}\restriction_X$.

DŮKAZ. Nechť $x \in X$. Pro každé $f \in Y^*$ platí

$$(\varepsilon_Y(Tx))(f) = f(Tx) = T^*f(x) = (\varepsilon_X(x))(T^*f) = \big(T^{**}(\varepsilon_X(x))\big)(f),$$

tedy $\varepsilon_Y(Tx) = T^{**}(\varepsilon_X(x))$. Odtud $\varepsilon_Y \circ T = T^{**} \circ \varepsilon_X$.

□

VĚTA 6. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*
(a) T^* je prostý, právě když Rng T *je hustý v Y.*
(b) Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
(c) Je-li T izometrie na, pak T^* je izometrie na.
Je-li X úplný, pak v (b) a (c) platí i opačné implikace.

DŮKAZ. (a) Díky Větě 4(c) je $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$. Je-li tedy T^* prostý, pak $\overline{\operatorname{Rng} T} = \{0\}_\perp = Y$. Na druhou stranu, je-li Rng T je hustý v Y, pak $\operatorname{Ker} T^* \subset \big((\operatorname{Ker} T^*)_\perp\big)^\perp = Y^\perp = \{0\}$ dle Lemmatu 2.12(d).

(b) Nechť $f \in Y^*$. Pro každé $y \in Y$ platí

$$\big((T^{-1})^*(T^*f)\big)(y) = T^*f(T^{-1}y) = f\big(T(T^{-1}y)\big) = f(y),$$

tedy $(T^{-1})^*(T^*f) = f$. Obráceně, nechť $g \in X^*$. Pro každé $x \in X$ platí

$$T^*\big((T^{-1})^*g\big)(x) = (T^{-1})^*g(Tx) = g\big(T^{-1}(Tx)\big) = g(x),$$

tedy $T^*\big((T^{-1})^*g\big) = g$. To znamená, že $(T^{-1})^*$ je inverzním operátorem k T^*, a tedy T^* je izomorfismus na.

(c) Pro $f \in Y^*$ máme $\|T^*f\| = \sup_{x\in B_X}|T^*f(x)| = \sup_{x\in B_X}|f(Tx)| = \sup_{y\in B_Y}|f(y)| = \|f\|$. Z (b) pak plyne, že T^* je na.

Nechť nyní X a Y jsou úplné. Je-li T^* izomorfismus na, pak dle (b) je T^{**} též izomorfismus na. Podle Tvrzení 5 je tedy T složením izomorfismů do, proto je to izomorfismus do (Fakt 1.61). Je tedy Rng T uzavřený v Y (Tvrzení 1.60(c)). Podle (a) to ovšem znamená, že T je na. Je-li T^{**} navíc izometrie, pak z Tvrzení 5 a Faktu 1.61 plyne, že T je izometrie.

□

2. Kompaktní operátory

Nechť X je metrický prostor. Připomeňme, že množina $M \subset X$ se nazývá relativně kompaktní v X, pokud $\overline{M}$ je kompaktní, a že M je relativně kompaktní, právě když z každé posloupnosti prvků M lze vybrat podposloupnost konvergující v X. Je-li X úplný, pak M je relativně kompaktní, právě když je totálně omezená. Je-li Y metrický prostor takový, že X je jeho podprostor a M je relativně kompaktní v X, pak M je i relativně kompaktní v Y.

PŘÍKLAD 7 (Hilbertova krychle). Položme

$$Q = \big\{x = (x_n) \in \ell_2;\ |x_n| \le \tfrac{1}{n} \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Pak Q je kompaktní podmnožina ℓ_2: Platí, že $Q = \bigcap_{n=1}^\infty \big\{x \in \ell_2;\ |f_n(x)| \le \frac{1}{n}\big\}$, kde f_n jsou kanonické souřadnicové funkcionály, proto je Q je uzavřená podmnožina ℓ_2. Stačí tedy ukázat, že je totálně omezená.

Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{n=m+1}^\infty \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$, a tedy $\sum_{n=m+1}^\infty |x_n|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$ pro každé $x \in Q$. Označme $R\colon \ell_2 \to \mathbb{K}^m$ restrikci na prvních m souřadnic, tj. $R(x) = (x_n)_{n=1}^m$ pro $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_2$, a všimněme si, že $\|R(x)\|_2 \le \|x\|_2$ pro každé $x \in \ell_2$. Speciálně, $\|R(x)\|_2 \le$

$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2} < +\infty$ pro $x \in Q$. Čili množina $R(Q)$ je omezená v prostoru $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_2)$, tedy je tam totálně omezená a existuje k ní konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-síť $A \subset \mathbb{K}^m$. Rozšiřme vektory z A zpět do ℓ_2 pomocí nulových souřadnic: položíme $\tilde{A} = \{x = (x_n) \in \ell_2;\ R(x) \in A \text{ a } x_n = 0 \text{ pro } n > m\}$. Pak $\tilde{A}$ je konečná množina a tvrdíme, že tvoří ε-síť pro Q. Nechť tedy $x \in Q$. Pak existuje $y \in A$ takové, že $\|R(x) - y\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Nechť $z \in \tilde{A}$ je takový, že $R(z) = y$. Pak

$$\|x - z\|_2 = \left(\|R(x) - R(z)\|_2^2 + \sum_{n=m+1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} < \left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

DEFINICE 8. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá kompaktní operátor, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá konečněrozměrný, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tradičně se též používají poněkud nekonzistentní zkratky $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$, $\mathcal{K}(X) = \mathcal{K}(X, X)$ a $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(X, X)$.

TVRZENÍ 9. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.

(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.

(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

DŮKAZ. Je-li $T \in \mathcal{K}(X, Y)$, je $T(B_X)$ relativně kompaktní, a tedy omezená. Tudíž T je spojitý dle Tvrzení 1.44.

Nechť nyní $T\colon X \to Y$ je lineární. (i)$\Rightarrow$(ii) je zřejmá.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Je-li $r > 0$ takové, že $\{x_n\} \subset B(0, r)$, pak $\frac{1}{r}x_n \subset B_X$. Je $\{T(\frac{1}{r}x_n)\} \subset T(B_X)$, tedy existuje rostoucí posloupnost indexů $\{n_k\}$ taková, že $\{T(\frac{1}{r}x_{n_k})\}$ je konvergentní. Pak ovšem i $\{T(x_{n_k})\} = \{rT(\frac{1}{r}x_{n_k})\}$ je konvergentní.

(iii)$\Rightarrow$(i) Nechť $A \subset X$ je omezená a $\{y_n\}$ je posloupnost v $T(A)$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in A$ takové, že $y_n = T(x_n)$. Tedy $\{x_n\}$ je omezená a dle předpokladu lze z $\{y_n\} = \{T(x_n)\}$ vybrat konvergentní podposloupnost. To znamená, že $T(A)$ je relativně kompaktní.

□

PŘÍKLAD 10. Definujme $T \in \mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ předpisem $T(x) = \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ pro $x = (x_n)$. Snadno je vidět, že T je lineární operátor. Protože $T(B_{\ell_2}) \subset Q$, kde Q je Hilbertova krychle (Příklad 7), je T kompaktní dle Tvrzení 9. Nicméně T není konečněrozměrný, neboť $T(\ell_2)$ obsahuje lineárně nezávislou množinu $\{e_n\}$ kanonických bázových vektorů.

Na druhou stranu, identita na ℓ_2 je příkladem spojitého lineárního operátoru, který není kompaktní, neboť obraz jednotkové koule obsahuje množinu $\{e_n\}$ kanonických bázových vektorů, která je $\sqrt{2}$-separovaná (tj. $\|e_k - e_n\| \geq \sqrt{2}$ pro $k \neq n$), takže není relativně kompaktní.

Uvědomme si, že lineární operátor T můžeme chápat jako lineární zobrazení do libovolného nadprostoru $\operatorname{Rng} T$. Kompaktnost lineárního operátoru ovšem může zásadně záviset na tom, jaký cílový prostor bereme, neboť v definici se bere uzávěr $T(A)$ v cílovém prostoru, a pro různé prostory můžeme dostat různé uzávěry. Viz též následující tvrzení.

TVRZENÍ 11. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

(a) Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

(b) Je-li Z uzavřený podprostor Y a $\operatorname{Rng} T \subset Z$, *pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.*

DŮKAZ. (a) Pro $A \subset X$ omezenou je $T(A)$ relativně kompaktní v Y, a tedy i relativně kompaktní v Z.

(b) Nechť $A \subset X$ je omezená. Protože Z je uzavřený v Y, je množina $\overline{T(A)}^Z = Z \cap \overline{T(A)}^Y$ uzavřená v Y, a tedy $\overline{T(A)}^Z = \overline{T(A)}^Y$. Proto je $\overline{T(A)}^Z$ kompaktní.

□

VĚTA 12. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.
(b) $\mathcal{K}(X,Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X,Y)$ a $\mathcal{F}(X,Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X,Y)$.
(c) Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X,Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X,Y)$.
(d) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.
(e) Pokud X a Y jsou úplné, $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ a $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak $T \in \mathcal{F}(X,Y)$.*

Všimněme si, že poslední tvrzení nám říká, že „netriviální“ (tj. nikoli konečněrozměrné) kompaktní lineární operátory mezi Banachovými prostory nemají nikdy uzavřený Rng.

DŮKAZ. (a) $\Leftarrow$ je zřejmá, neboť v tom případě $\operatorname{Rng} T \subset \operatorname{span}\{y_1, \dots, y_n\}$.

$\Rightarrow$ Nechť $\{y_1, \dots, y_n\}$ je nějaká báze $\operatorname{Rng} T$. Definujme lineární formy $g_1, \dots, g_n$ na $\operatorname{Rng} T$ hodnotami na bázi následovně:

$$g_i(y_j) = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j, \\ 1 & \text{pro } i = j. \end{cases}$$

Protože $\operatorname{Rng} T$ je konečněrozměrný, jsou $g_1, \dots, g_n$ spojité lineární funkcionály (Věta 1.66). Všimněme si, že pro každý prvek $y \in \operatorname{Rng} T$ platí

$$y = \sum_{i=1}^n g_i(y) y_i.$$

Vskutku, máme-li $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$ pro nějaké skaláry $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, pak $g_j(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_j(y_i) = \alpha_j$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$. Položme $f_i = g_i \circ T \in X^*$ pro $i = 1, \dots, n$. Pak $T(x) = \sum_{i=1}^n g_i(T(x)) y_i = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$.

(b) Kompaktní lineární operátory jsou spojité, je tedy $\mathcal{K}(X,Y)$ podmnožinou $\mathcal{L}(X,Y)$. Jsou-li $S, T \in \mathcal{K}(X,Y)$ pak $(S+T)(B_X) \subset S(B_X) + T(B_X) \subset \overline{S(B_X)} + \overline{T(B_X)}$, přičemž množina vpravo je kompaktní dle Tvrzení 1.23. Tedy $(S+T)(B_X)$ je relativně kompaktní v Y, což znamená, že $S+T$ je kompaktní operátor (Tvrzení 9). Podobně, pro α skalár a $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ je $\overline{(\alpha T)(B_X)} = \alpha \overline{T(B_X)}$, tedy je to kompakt, neboť je to spojitý obraz kompaktu $\overline{T(B_X)}$ (Tvrzení 1.2(c)). Opět díky Tvrzení 9 je tak operátor αT kompaktní. To dokazuje, že $\mathcal{K}(X,Y)$ je podprostorem $\mathcal{L}(X,Y)$.

Dále, nechť $S, T \in \mathcal{F}(X,Y)$ a $\alpha \neq 0$ je skalár. Pak $\operatorname{Rng}(S+T) \subset \operatorname{Rng} S + \operatorname{Rng} T$ a $\operatorname{Rng}(\alpha T) = \operatorname{Rng} T$, tedy $\operatorname{Rng}(S+T)$ i $\operatorname{Rng}(\alpha T)$ jsou konečněrozměrné. Konečně, $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený v Y (Důsledek 1.25), takže $\overline{T(B_X)} \subset \operatorname{Rng} T$. Množina $\overline{T(B_X)}$ je tedy omezená uzavřená podmnožina konečněrozměrného prostoru, takže je kompaktní (Věta 1.66). Proto je $\mathcal{F}(X,Y)$ podprostorem $\mathcal{K}(X,Y)$.

(c) Nechť $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{K}(X,Y)$ konvergující k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dále nalezneme množinu $\{x_1, \dots, x_k\} \subset B_X$ takovou, že $\{T_n(x_1), \dots, T_n(x_k)\}$ je konečná $\frac{\varepsilon}{3}$-síť pro $T_n(B_X)$. Ukážeme, že $\{T(x_1), \dots, T(x_k)\}$ je konečná ε-síť pro $T(B_X)$. Pro $x \in B_X$ totiž nalezneme $i \in \{1, \dots, k\}$ tak, že $\|T_n(x) - T_n(x_i)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pak

$$\|T(x)-T(x_i)\| \leq \|T(x)-T_n(x)\| + \|T_n(x)-T_n(x_i)\| + \|T_n(x_i)-T(x_i)\| < \|T-T_n\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_n-T\| < \varepsilon.$$

Tedy $T(B_X)$ je totálně omezená, a protože Y je úplný, je T kompaktní dle Tvrzení 9.

(d) Nechť Z je normovaný lineární prostor, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $T \in \mathcal{K}(Y,Z)$. Pak $S(B_X)$ je omezená, a tedy $T \circ S(B_X) = T(S(B_X))$ je relativně kompaktní, neboli $T \circ S \in \mathcal{K}(X,Z)$.

Obráceně, nechť $T \in \mathcal{K}(X,Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Položme $A = T(B_X)$. Pak $\overline{A}$ je kompaktní, tedy $S(\overline{A})$ je také kompaktní. Proto je $S \circ T(B_X) = S(A) \subset S(\overline{A})$ relativně kompaktní, což znamená, že $S \circ T \in \mathcal{K}(X,Y)$.

(e) Označme $Z = \operatorname{Rng} T$. Pak Z je uzavřený podprostor Y, tedy je Banachův a podle věty o otevřeném zobrazení (Věta 3.4) je $T: X \to Z$ otevřené zobrazení. Relativně kompaktní množina $T(B_X)$ tedy obsahuje $B_Z(0,r)$ pro nějaké $r > 0$, což znamená, že $B_Z(0,r)$, a tedy i B_Z, je kompaktní. Díky Větě 1.66 tedy platí, že $\dim \operatorname{Rng} T = \dim Z < \infty$.

□

VĚTA 13 (J. P. Schauder, 1930). *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Položme $K = \overline{T(B_X)}$ a $\mathcal{F} = \{f \restriction_K;\ f \in B_{Y^*}\}$. Pak K je kompaktní a $\mathcal{F} \subset C(K)$. Dále pro každé $f \in B_{Y^*}$ díky spojitosti f platí $\|f\restriction_K\|_{C(K)} = \sup_{y\in K}|f(y)| = \sup_{y\in T(B_X)}|f(y)| = \sup_{x\in B_X}|f(T(x))| \le \|f\|\|T\| \le \|T\|$. Tedy $\mathcal{F} \subset C(K)$ je omezená množina stejně spojitých (dokonce 1-lipschitzovských) funkcí na kompaktním prostoru K. Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty[1] to znamená, že $\mathcal{F}$ je relativně kompaktní v $C(K)$.

Nechť nyní $\{f_n\}$ je posloupnost v B_{Y^*}. Položme $g_n = f_n\restriction_K$. Pak $\{g_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{F}$, a tedy existuje podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ konvergentní v $C(K)$. Tvrdíme, že pak $\{T^* f_{n_k}\}$ je cauchyovská: Pro $k, l \in \mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\|T^* f_{n_k} - T^* f_{n_l}\| &= \|T^*(f_{n_k} - f_{n_l})\| = \sup_{x\in B_X}\left|T^*(f_{n_k} - f_{n_l})(x)\right| = \sup_{x\in B_X}|(f_{n_k} - f_{n_l})(Tx)| \le \\ &\le \sup_{z\in K}|(f_{n_k} - f_{n_l})(z)| = \|g_{n_k} - g_{n_l}\|_{C(K)}.\end{aligned}$$

Protože $\{g_{n_k}\}$ je cauchyovská, je i $\{T^* f_{n_k}\}$ cauchyovská, a tedy konvergentní v X^*. Odtud plyne, že $T^*(B_{Y^*})$ je relativně kompaktní v X^*.

$\Rightarrow$ Nechť $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření. Podle první části důkazu je T^{**} kompaktní, takže je kompaktní i $T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)} : \varepsilon_X(X) \to Y^{**}$. Označme $S : \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)}$. Podprostor $\varepsilon_Y(Y)$ je uzavřený v Y^{**} (Tvrzení 2.26), tedy $S \in \mathcal{K}(\varepsilon_X(X), \varepsilon_Y(Y))$ dle Tvrzení 11(b). Podle Tvrzení 5 a Věty 12(d) je tedy $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$ kompaktní.

□

Poznamenejme, že z důkazu je vidět, že implikace $\Leftarrow$ v předchozí větě platí i pro Y neúplný.

PŘÍKLAD 14. Nechť $K \in L_2([0,1]^2)$. Ukážeme, že operátor $T: L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ definovaný předpisem

$$Tf(t) = \int_0^1 K(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s$$

je kompaktní lineární operátor. Takovýto operátor se nazývá integrální operátor. Funkce K se nazývá jádro integrálního operátoru.

Nejprve si uvědomme, že podle Fubiniovy věty[2] pro s. v. $t \in [0,1]$ patří funkce $s \mapsto K(t,s)$ do $L_2([0,1])$. Tedy z Hölderovy nerovnosti plyne, že hodnota $Tf(t)$ je dobře definována pro s. v. $t \in [0,1]$. Dále, opět s využitím Hölderovy nerovnosti a Fubiniovy věty,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |Tf(t)|^2\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left|\int_0^1 K(t,s) f(s)\,\mathrm{d}s\right|^2 \mathrm{d}t \le \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}t \le \\ &\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s \int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t = \|f\|^2\|K\|^2.\end{aligned}$$

Tedy vskutku $Tf \in L_2([0,1])$ pro každou $f \in L_2([0,1])$. Ihned je vidět, že T je lineární operátor, a nerovnost výše implikuje, že T je spojitý a $\|T\| \le \|K\|$. Níže ukážeme, že T je kompaktní.

[1]Pro $C([0,1])$ dokázal postačující podmínku pro relativní kompaktnost (v jiném jazyce) Giulio Ascoli (1883), že je to podmínka nutná ukázal Cesare Arzelà (1889).

[2]Guido Fubini (1907)

Nejprve předpokládejme, že jádro K je spojité. Ukážeme, že pak T zobrazuje do $C([0,1])$ a je to kompaktní operátor z $L_2([0,1])$ do $C([0,1])$. Nechť $\varepsilon > 0$. Ze stejnoměrné spojitosti K plyne existence $\delta > 0$ takového, že $|K(t,s)-K(u,s)| < \varepsilon$ kdykoli $s,t,u \in [0,1]$, $|t-u| < \delta$. Pak pro každou $f \in B_{L_2([0,1])}$ a libovolná $t,u \in [0,1]$ splňující $|t-u| < \delta$ platí

$$
\begin{aligned}
|Tf(t)-Tf(u)| &= \left|\int_0^1 K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^1 K(u,s)f(s)\,\mathrm{d}s\right| \le \int_0^1 |K(t,s)-K(u,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s \le \\
&\le \int_0^1 \varepsilon|f(s)|\,\mathrm{d}s \le \varepsilon\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2}\left(\int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} = \varepsilon\|f\|_2 \le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tedy $Tf \in C([0,1])$. Navíc jsme ukázali, že $T(B_{L_2([0,1])})$ je stejně spojitá podmnožina $C([0,1])$. Protože pro každou $f \in B_{L_2([0,1])}$ a libovolné $t \in [0,1]$ platí

$$
|Tf(t)| \le \int_0^1 |K(t,s)||f(s)|\,\mathrm{d}s \le \int_0^1 \|K\|_\infty |f(s)|\,\mathrm{d}s \le \|K\|_\infty \left(\int_0^1 |f(s)|^2\,\mathrm{d}s\right)^{1/2} \le \|K\|_\infty,
$$

je množina $T(B_{L_2([0,1])})$ omezená v $C([0,1])$. Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty je tedy $T(B_{L_2([0,1])})$ relativně kompaktní v $C([0,1])$.

Nechť dále $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $L_2([0,1])$. Pak z ní lze vybrat podposloupnost $\{f_{n_k}\}$ tak, že $\{Tf_{n_k}\}$ je konvergentní v $C([0,1])$, neboli stejnoměrně konvergentní. Protože míra $[0,1]$ je konečná, plyne odtud, že $\{Tf_{n_k}\}$ je konvergentní i v prostoru $L_2([0,1])$. Ukázali jsme tedy, že pokud jádro K je spojité, pak je operátor $T\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ kompaktní (Tvrzení 9).

Konečně, nechť jádro K je obecné. Pak dle důsledku Luzinovy věty ([R, Věta 3.14]) existuje posloupnost spojitých funkcí $\{K_n\} \subset C([0,1]^2)$ takových, že $\|K_n - K\|_2 \to 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme operátor $T_n\colon L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ předpisem $T_n f(t) = \int_0^1 K_n(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$. Pak podle předchozí části jsou operátory T_n kompaktní. Máme $(T_n - T)f = \int_0^1 \big(K_n(t,s) - K(t,s)\big)f(s)\,\mathrm{d}s$, tedy operátor $T_n - T$ je integrální operátor s jádrem $K_n - K$. Na začátku jsme si spočetli, že pro takovéto operátory platí $\|T_n - T\| \le \|K_n - K\|_2$, odkud plyne, že $T_n \to T$ v prostoru $\mathcal{L}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$. Jeho podprostor $\mathcal{K}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$ je ovšem uzavřený (Věta 12(c)), tedy $T \in \mathcal{K}(L_2([0,1]), L_2([0,1]))$.

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů[3]

Nechť X je normovaný lineární prostor. V tomto oddílu se budeme zabývat studiem operátorů z $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$, kterým budeme říkat operátory na X. Označíme-li $O\colon X \to X$, $O(x) = 0$ a $I = Id_X$, pak snadno nahlédneme, že $(\mathcal{L}(X), +, -, \circ, O, I)$, kde za operaci násobení $\circ$ bereme skládání operátorů, tvoří (nekomutativní) okruh s jednotkou. (Distributivita zleva platí díky linearitě operátorů z $\mathcal{L}(X)$.) V dalším bude I (případně I_X) vždy značit identitu na příslušném prostoru (na prostoru X).

Podívejme se nyní blíže na invertibilní prvky (vzhledem k násobení, neboli skládání) okruhu $\mathcal{L}(X)$. Prvek $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní, právě když k němu existuje inverzní prvek $S \in \mathcal{L}(X)$, tj. prvek splňující $T \circ S = I$ a $S \circ T = I$. Z první rovnosti plyne, že T je nutně na, zatímco ze druhé rovnosti plyne, že T je prostý. Dohromady pak dostáváme, že S je inverzním zobrazením k bijekci T. Vidíme tedy, že T je invertibilní, právě když je to bijekce a inverzní zobrazení T^{-1} je prvkem $\mathcal{L}(X)$. Inverzní zobrazení k lineárnímu je ovšem automaticky lineární, stačí tedy testovat pouze spojitost inverzního zobrazení T^{-1}. (Vidíme též, že algebraické značení inverzního prvku k T v okruhu $\mathcal{L}(X)$ jako T^{-1} není v kolizi se značením pro inverzní zobrazení.) Podle dřívějších definic je tedy T invertibilním prvkem v $\mathcal{L}(X)$, právě když T je izomorfismus X na X. Pro Banachovy prostory je ovšem každá bijekce izomorfismem (Důsledek 3.6). Dostáváme tedy následující tvrzení:

[3]Tato teorie se zabývá řešením lineárních rovnic $T(x) = y$ pro jistou třídu lineárních operátorů T. Základy položil Erik Ivar Fredholm (1903), který se zabýval integrálními rovnicemi souvisejícími s operátorem z Příkladu 14. Moderní obecnou formu této teorii dal F. Riesz (1916), kterému ovšem chyběla Hahnova-Banachova věta, takže o záležitosti vyžadující dualitu ji doplnil J. P. Schauder (1930). Proto se tato teorie někdy nazývá Rieszova-Schauderova teorie.

TVRZENÍ 15. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.*

Připomeňme ještě, že invertibilní prvky v okruhu tvoří grupu, tj. jsou-li $S, T \in \mathcal{L}(X)$ invertibilní, pak i $S \circ T$ je invertibilní a $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

Poznamenejme nakonec, že z Věty 12 plyne, že $\mathcal{K}(X)$ tvoří ideál v $\mathcal{L}(X)$.

DEFINICE 16. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme vlastním číslem operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme vlastním prostorem příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají vlastní vektory příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá bodové spektrum operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Je-li X Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$, pak $\lambda I - T$ není invertibilní, právě když $\lambda I - T$ není prostý nebo není na (Tvrzení 15). Tedy λ je ve spektru T, právě když rovnice $T(x) - \lambda x = 0$ má více řešení nebo rovnice $T(x) - \lambda x = y$ nemá řešení pro nějakou pravou stranu $y \in X$.

Následující větu si dokážeme až v oddílu 10.2 (Věty 10.36 a 10.46(b)). Důkaz neprázdnosti vyžaduje netriviální znalosti z komplexní analýzy.

VĚTA 17. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

LEMMA 18. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že $0 \notin \sigma(T)$. Dále zjevně stačí dokázat pouze implikaci $\Leftarrow$ a tu pak aplikovat na T^{-1} a $\frac{1}{\lambda}$. Nechť tedy $\lambda \notin \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$. Pak $\lambda I - T$ je invertibilní. Položíme-li $S = \left(\frac{1}{\lambda} I - T^{-1}\right) \circ T$, pak $S = \frac{1}{\lambda} T - I = -\frac{1}{\lambda}(\lambda I - T)$, a tedy S je invertibilní. Proto je invertibilní i operátor $S \circ T^{-1} = \frac{1}{\lambda} I - T^{-1}$. Odtud plyne, že $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(T^{-1})$.

□

TVRZENÍ 19. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je izomorfismus na. Pak $\sigma(T) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{1}{\|T^{-1}\|} \le |\lambda| \le \|T\|\right\}$.*

DŮKAZ. Nechť $\lambda \in \sigma(T)$. Pak $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1}) \subset B(0, \|T^{-1}\|)$ dle Lemmatu 18 a Věty 17. Tedy $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \le \|T^{-1}\|$, neboli $|\lambda| \ge \frac{1}{\|T^{-1}\|}$. Druhá nerovnost plyne přímo z Věty 17.

□

VĚTA 20. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.*

DŮKAZ. Podle Věty 2 je $\lambda I_{X^*} - T^* = (\lambda I_X - T)^*$, a tedy podle Věty 6 je $\lambda I_{X^*} - T^*$ invertibilní, právě když $\lambda I_X - T$ je invertibilní.

□

Poznamenejme, že na neúplném prostoru platí pouze $\sigma(T^*) \subset \sigma(T)$.

TVRZENÍ 21. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$. Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$, pak $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

DŮKAZ. Nechť $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$. Předpokládejme, že $0 \notin \sigma(T)$. Pak operátor $-T = 0I - T$ je invertibilní, a tedy i T je invertibilní. Podle Věty 12(d) to znamená, že $I = T^{-1}T$ je kompaktní operátor. Tedy $B_X = I(B_X)$ je kompaktní podmnožina X. To je spor s předpokladem, že $\dim X = \infty$ (Věta 1.66).

Nechť nyní $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$. Dle známé věty z lineární algebry platí, že $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Rng} T = \dim X$, a tedy $\dim \operatorname{Ker} T > 0$. To znamená, že $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

□

VĚTA 22. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$. Je-li X Banachův, pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.*

DŮKAZ. Označme $Y = \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Pak $T = \lambda I$ na Y, a tedy $\lambda B_Y = T(B_Y)$ je relativně kompaktní množina v X. Protože ovšem Y je uzavřený v X, je λB_Y uzavřená v X, a tedy kompaktní v Y. Z Věty 1.66 potom plyne, že $\dim Y < \infty$.

Dále, podle Tvrzení 2.8(a) existuje Z uzavřený podprostor X takový, že $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$. Označme $S = (\lambda I - T)\restriction_Z$ a všimněme si, že S je prostý: Je-li $S(x) = 0$ pro $x \in Z$, pak $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T) = Y$, tedy $x = 0$. Dále pro každé $x \in X$ máme $(\lambda I - T)(x) = (\lambda I - T)(P_Y x + P_Z x) = (\lambda I - T)(P_Z x) = S(P_Z x)$. Odtud plyne, že $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = S(Z) = \operatorname{Rng} S$. Ukážeme, že S je izomorfismus do.

Pokud S není izomorfismus do, pak z Tvrzení 1.60(a) plyne existence posloupnosti $\{x_n\} \in S_Z$ takové, že $S(x_n) \to 0$. Protože T je kompaktní, existuje podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ taková, že $T(x_{n_k}) \to x$ pro nějaké $x \in X$. Pak ovšem také $\lambda x_{n_k} = (\lambda I - T)(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) = S(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) \to 0 + x = x$. Odtud plyne, že $\frac{x}{\lambda} \in S_Z$, neboť Z je uzavřený. Díky tomu máme $S(x_{n_k}) \to S(\frac{x}{\lambda})$, což znamená, že $S(\frac{x}{\lambda}) = 0$. To je ale ve sporu s prostotou S.

Je-li tedy X úplný, pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T) = \operatorname{Rng} S$ je uzavřený dle Tvrzení 1.60(c).

□

VĚTA 23 (Fredholmova alternativa). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Tvrzení věty lze interpretovat následujícím způsobem: Rovnice $(\lambda I - T)x = y$ má řešení pro každou pravou stranu $y \in X$, právě když příslušná homogenní rovnice $(\lambda I - T)x = 0$ má pouze triviální řešení. Protože na konečněrozměrném prostoru je každý lineární operátor kompaktní, lze každý lineární operátor na konečněrozměrném prostoru zapsat ve tvaru $I - T$, T kompaktní. Fredholmova alternativa je tedy zobecněním známé věty o řešitelnosti soustav n lineárních rovnic o n neznámých.

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Označme $S = \lambda I - T$ a předpokládejme, že S není na. Nejprve si všimněme následujícího pozorování: Nechť A je libovolná množina a $f\colon A \to A$ je prosté zobrazení, které není na. Označíme-li $B = f(A) \subsetneq A$, pak $f\restriction_B\colon B \to B$ je opět prosté zobrazení, které není na. Vskutku, $f(B) \subset f(A) = B$, tedy $f\restriction_B$ zobrazuje do B. Dále, je-li $f\restriction_B\colon B \to B$ na, pak $f(B) = f\restriction_B(B) = B = f(A)$, tedy z prostoty f plyne $A = B$, což je spor.

Aplikujme nyní toto pozorování iterativně na S: Položme $X_0 = X$ a $X_n = \operatorname{Rng} S\restriction_{X_{n-1}}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 22 je $\operatorname{Rng} S$ Banachův, takže S je izomorfismus do (Důsledek 3.6). Tedy i restrikce S na libovolný podprostor X je izomorfismus do, odkud indukcí plyne, že každý podprostor X_n je uzavřený v X (Tvrzení 1.60(c)). Dále díky pozorování výše indukcí obdržíme, že $X_n \subsetneq X_{n-1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že to je ve sporu s kompaktností T.

Pro každé $n \geq 0$ existuje $x_n \in S_{X_n}$ splňující $\operatorname{dist}(x_n, X_{n+1}) \geq \frac{1}{2}$ (Lemma 1.63). Pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ máme $T(x_m) - T(x_n) = S(x_n) - S(x_m) + \lambda x_m - \lambda x_n$. Protože $S(x_n) \in X_{n+1}$ a $S(x_m) \in X_{m+1} \subset X_{n+1}$, je $u = S(x_n) - S(x_m) + \lambda x_m \in X_{n+1}$. Proto

$$\|T(x_m) - T(x_n)\| = |\lambda| \left\| \frac{u}{\lambda} - x_n \right\| \geq \frac{|\lambda|}{2}.$$

Tedy posloupnost $\{T(x_n)\}$ nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T.

$\Rightarrow$ Z Vět 2 a 6(a) plyne, že operátor $\lambda I_{X^*} - T^* = (\lambda I_X - T)^*$ je prostý. Podle Schauderovy věty (Věta 13) je T^* kompaktní, takže podle první části důkazu je $\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = X^*$. Věta 4(b) pak dává

$$\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \Big(\operatorname{Rng}\big((\lambda I_X - T)^*\big)\Big)_\perp = \big(\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp = (X^*)_\perp = \{0\},$$

tedy $\lambda I_X - T$ je prostý.

□

Poznamenejme, že z důkazu (s využitím poznámky za Větou 13) je vidět, že implikace $\Rightarrow$ v předchozí větě platí i pro neúplný prostor X.

DŮSLEDEK 24. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

DŮKAZ. Je-li $\lambda \notin \sigma_p(T)$, pak $\lambda I - T$ je prostý. Je-li navíc $\lambda \neq 0$, pak z Fredholmovy alternativy (Věta 23) plyne, že $\lambda I - T$ je bijekce. Podle Tvrzení 15 to znamená, že $\lambda I - T$ je invertibilní, a tedy $\lambda \notin \sigma(T)$.

□

LEMMA 25. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

DŮKAZ. Důkaz provedeme indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme tedy, že platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ jsou různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_{n+1}$ jsou k nim příslušející vlastní vektory. Nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ jsou skaláry splňující $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = 0$. Pak $0 = T\big(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\big) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k T(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \lambda_k x_k$, a tedy

$$0 = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k \lambda_k x_k - \lambda_{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) x_k.$$

Díky indukčnímu předpokladu platí, že $\alpha_k(\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0$ pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Tím pádem i $\alpha_{n+1} = 0$.

□

VĚTA 26. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.*

DŮKAZ. Zvolme $r > 0$. Předpokládejme, že množina $\{\lambda \in \sigma(T);\ |\lambda| > r\}$ je nekonečná. Pak v ní podle Důsledku 24 existuje posloupnost $\{\lambda_n\}$ navzájem různých vlastních čísel. Nechť $\{x_n\}$ jsou k nim příslušné vlastní vektory. Položme $X_n = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ díky Lemmatu 25 platí $X_n \subsetneq X_{n+1}$ a X_n je uzavřený v X_{n+1} (Důsledek 1.25). Podle Rieszova lemmatu (Lemma 1.63) existují $z_n \in S_{X_n}$ takové, že $\operatorname{dist}(z_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Tvrdíme, že platí $T(z_n) \in X_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda_n z_n - T(z_n) \in X_{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Vskutku, nechť $z_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ pro nějaká $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Pak $T(z_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i \in X_n$ a $\lambda_n z_n - T(z_n) = \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_n - \lambda_i) x_i \in X_{n-1}$. Pak pro libovolná $m, k \in \mathbb{N}$, $m > k$ máme $\lambda_m z_m - T(z_m) + T(z_k) \in X_{m-1}$, a tedy

$$\begin{aligned}\|T(z_m) - T(z_k)\| &= \big\|\lambda_m z_m - \big(\lambda_m z_m - T(z_m) + T(z_k)\big)\big\| \geq \\ &\geq \operatorname{dist}(\lambda_m z_m, X_{m-1}) = |\lambda_m| \operatorname{dist}(z_m, X_{m-1}) \geq r\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{T(z_n)\}$ nemá konvergentní podposloupnost, což je spor s kompaktností T.

□

Zkombinujeme-li Tvrzení 21, Větu 26, Důsledek 24 a Větu 22, obdržíme následující shrnutí:

DŮSLEDEK 27. *Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.*

Na druhou stranu, následující příklad ukazuje, že pro nekompaktní operátory může spektrum vypadat téměř jakkoli.

PŘÍKLAD 28. Nechť $R\colon \ell_\infty \to \mathcal{L}(\ell_2)$ je izometrické vnoření z Příkladu 1.59 (všechny prostory jsou nad $\mathbb{K}$). Pak pro každé $y \in \ell_\infty$ je $\sigma_p(R(y)) = \operatorname{Rng} y = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a $\sigma(R(y)) = \overline{\operatorname{Rng} y}$. Dále je $R(c_0) \subset \mathcal{K}(\ell_2)$. Odtud plyne, že pro každou $K \subset \mathbb{K}$ neprázdnou kompaktní existuje $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$ takový, že $\sigma(T) = K$, a pro každou posloupnost $\{y_n\} \subset \mathbb{K}$ konvergující k 0 existuje $T \in \mathcal{K}(\ell_2)$ takový, že $\sigma_p(T) = \{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

Vskutku, je-li $y \in \ell_\infty$, pak zjevně $y_n \in \sigma_p(T_y)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť $T_y(e_n) = y_n e_n$. Na druhou stranu, pokud $\lambda \notin \operatorname{Rng} y$, pak rovnice $T_y(x) = \lambda x$, neboli $(y_n x_n)_{n=1}^\infty = (\lambda x_n)_{n=1}^\infty$, nemá nenulové řešení v ℓ_2. Dále, jelikož $\sigma(T_y)$ je uzavřená množina (Věta 17), platí $\overline{\operatorname{Rng} y} = \overline{\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}} \subset \sigma(T_y)$. Na druhou stranu, je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \overline{\operatorname{Rng} y}$ pak $v = \left(\frac{1}{\lambda - y_n}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Označíme-li $u = (\lambda - y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$, pak $T_v \circ T_u = T_u \circ T_v = I$, a tedy $T_u = \lambda I - T_y$ je invertibilní. Tedy $\lambda \notin \sigma(T_y)$, z čehož plyne inkluze $\sigma(T_y) \subset \overline{\operatorname{Rng} y}$.

Dále snadno nahlédneme, že $R(c_{00}) \subset \mathcal{F}(\ell_2)$, odkud dle Věty 12(b), (c) plyne, že $R(c_0) \subset \overline{\mathcal{F}(\ell_2)} \subset \mathcal{K}(\ell_2)$. Konečně, je-li $K \subset \mathbb{K}$ neprázdná kompaktní, pak existuje spočetná hustá množina $\{y_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ v K. Pak pro $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ je $\sigma(T_y) = \overline{\operatorname{Rng} y} = K$.

Z Vět 22, 4 a 2 okamžitě plyne následující tvrzení, které popisuje, jak nalézt prostor všech pravých stran, pro které je rovnice $(\lambda I - T)x = y$ řešitelná, pomocí prostoru řešení příslušné adjungované (duální) homogenní rovnice.

VĚTA 29 (Druhá Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Poslední věta popisuje vztahy mezi velikostmi prostoru všech pravých stran, pro které je rovnice $(\lambda I - T)x = y$ řešitelná, a prostoru všech řešení příslušné homogenní rovnice.

VĚTA 30 (Třetí Fredholmova věta). *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

Všimněme si, že první rovnost je zobecněním Fredholmovy alternativy. Nicméně my Fredholmovu alternativu využijeme v důkazu.

DŮKAZ. Označme $S = \lambda I_X - T$. Dokážeme nejprve nerovnost

$$\dim \operatorname{Ker} S \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S. \tag{1}$$

Předpokládejme opak, tj. $\dim \operatorname{Ker} S > \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S$. Dle Věty 22 je $\operatorname{Ker} S$ konečněrozměrný a $\operatorname{Rng} S$ uzavřený. Podle předpokladu je tedy $\operatorname{Rng} S$ konečné kodimenze. Díky Větě 2.8 platí

$$X = \operatorname{Ker} S \oplus_t E = \operatorname{Rng} S \oplus_t F,$$

kde E, F jsou uzavřené podprostory X a $\dim \operatorname{Ker} S > \dim F$. Nechť $A\colon \operatorname{Ker} S \to F$ je lineární zobrazení, které je na a $Ay = 0$ pro nějaké nenulové $y \in \operatorname{Ker} S$ (stačí definovat A pomocí bází). Zobrazení A je spojité díky konečné dimenzi prostoru $\operatorname{Ker} S$ (Věta 1.66). Nechť $P : X \to \operatorname{Ker} S$ je spojitá lineární projekce příslušná prvnímu rozkladu. Položme $U = T - A \circ P$. Pak $A \circ P \in \mathcal{F}(X)$, a tedy $U \in \mathcal{K}(X)$ díky Větě 12(b).

Podívejme se nyní na operátor $\lambda I_X - U$. Platí, že $\lambda I_X - U = S + A \circ P$. Je-li $z \in X$, pak existují $z_1 \in \operatorname{Rng} S$ a $z_2 \in F$ splňující $z = z_1 + z_2$. Všimněme si, že $\operatorname{Rng} S = S(E + \operatorname{Ker} S) = S(E) + S(\operatorname{Ker} S) = S(E)$. Tedy existují $x_1 \in E$ a $x_2 \in \operatorname{Ker} S$ splňující $S(x_1) = z_1$ a $A(x_2) = z_2$. Pak $(\lambda I_X - U)(x_1 + x_2) = (S + A \circ P)x_1 + (S + A \circ P)x_2 = Sx_1 + A(Px_1) + Sx_2 + A(Px_2) = z_1 + z_2 = z$. Tedy $\lambda I_X - U$ je na. Z Fredholmovy alternativy (Věta 23) plyne, že $\lambda I_X - U$ je prostý. To je ale ve sporu s faktem, že $(\lambda I_X - U)y = Sy + A(Py) = Ay = 0$. Tím máme dokázánu nerovnost (1).

Uvědomme si, že $\lambda I_{X^*} - T^* = S^*$ (Věta 2). Podle Věty 13 je $T^* \in \mathcal{K}(X^*)$. Podle první části důkazu aplikované na $T^* \in \mathcal{K}(X^*)$ je tedy

$$\dim \operatorname{Ker} S^* \leq \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^*.$$

Dále, podle druhé Fredholmovy věty (Věta 29) je $X^*/\operatorname{Rng} S^* = X^*/(\operatorname{Ker} S)^\perp$. Tento prostor je ovšem izomorfní prostoru $(\operatorname{Ker} S)^*$ (Věta 2.22(b)). Tedy

$$\operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^* = \dim(\operatorname{Ker} S)^* = \dim \operatorname{Ker} S.$$

Podobně, $\operatorname{Ker} S^* = (\operatorname{Rng} S)^\perp$ (Věta 4(a)). Protože $\operatorname{Rng} S$ je uzavřený, je $(\operatorname{Rng} S)^\perp$ izomorfní s $(X/\operatorname{Rng} S)^*$ (Věta 2.22(a)). Tedy $\dim \operatorname{Ker} S^* = \dim(X/\operatorname{Rng} S)^* = \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S$ (viz Tvrzení 2.27). Dáme-li nyní dohromady dokázané rovnosti a nerovnosti spolu s nerovností (1), dostaneme

$$\dim \operatorname{Ker} S \le \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S = \dim \operatorname{Ker} S^* \le \operatorname{codim} \operatorname{Rng} S^* = \dim \operatorname{Ker} S.$$

□

Kapitola 5

Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

1. Konvoluce funkcí

V tomto oddílu budeme pracovat s funkcemi na prostoru $\mathbb{R}^d$ pro nějaké $d \in \mathbb{N}$ a s mírou μ, která je nějakým kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Normu na $\mathbb{R}^d$ budeme uvažovat eukleidovskou, tj. $\|\cdot\|_2$.

DEFINICE 1. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Konvoluce funkce f s funkcí g je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Správnější by bylo označovat konvoluci symbolem $f *_\mu g$, neboť výsledek závisí na míře μ. Tradiční značení vyžaduje, abychom z kontextu věděli, jaká míra je použita. Funkce g se někdy nazývá jádrem konvoluce.

VĚTA 2. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.

(b) Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran.

(c) Nechť $1 \le p, q, r \le \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 2$. Je-li $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ a $h \in L_r(\mu)$, pak $(f * g) * h = f * (g * h)$ μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$.

Důležitým speciálním případem v (c) je $p = q = r = 1$.

DŮKAZ. (a) Nechť $\mu = C\lambda$ a $x \in \mathbb{R}^d$. Definujme $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ předpisem $\varphi(z) = x - z$. Pak φ je diferencovatelná bijekce a $|J_\varphi|(z) = 1$ v každém bodě $z \in \mathbb{R}^d$. Tedy dle věty o substituci

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)C\,\mathrm{d}\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\varphi(z))g(x-\varphi(z))C\,\mathrm{d}\lambda(z) = \\ = \int_{\mathbb{R}^d} g(z)f(x-z)\,\mathrm{d}\mu(z),$$

pokud jeden z integrálů konverguje. Odtud již tvrzení (a) plyne.

(b) Nechť $x \in \mathbb{R}^d$ je takové, že $f * g(x)$ a $f * h(x)$ jsou definovány. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\cdot(g+h)(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) + f(y)h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \\ = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d} f(y)h(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y),$$

a tedy $f * (g+h)(x) = f * g(x) + f * h(x) = \big(f * g + f * h\big)(x)$. Druhá rovnost plyne z právě dokázané rovnosti a tvrzení (a).

Důkaz (c) odložíme na později (str. 73), až se o konvoluci dozvíme více.

□

Nyní se zaměříme na otázku, kdy je konvoluce definována.

LEMMA 3. *Nechť* $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ *je lebesgueovsky měřitelná.*
(a) Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ *je funkce* $y \mapsto f(x-y)$ *lebesgueovsky měřitelná na* $\mathbb{R}^d$*.*
(b) Funkce $(x,y) \mapsto f(y)$ *a* $(x,y) \mapsto f(x-y)$ *jsou lebesgueovsky měřitelné na* $(\mathbb{R}^d)^2$*.*

DŮKAZ. V celém důkazu bude měřitelná znamenat lebesgueovsky měřitelná.

(a) Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $h(y) = f(x-y)$ pro $y \in \mathbb{R}^d$. Je-li $G \subset \mathbb{K}$ otevřená, pak je snadno vidět, že $h^{-1}(G) = x - f^{-1}(G)$. Množina $f^{-1}(G)$ je měřitelná, a protože Lebesgueova míra je symetrická a translačně invariantní, je i množina $h^{-1}(G)$ měřitelná. Funkce h je tedy měřitelná.

(b) Označme $\varphi(x,y) = f(y)$ a $\psi(x,y) = f(x-y)$. Nechť $G \subset \mathbb{K}$ je otevřená. Položme $A = f^{-1}(G)$. Pak $A \subset \mathbb{R}^d$ je měřitelná a $\varphi^{-1}(G) = \mathbb{R}^d \times A \subset (\mathbb{R}^d)^2$. Je to tedy měřitelný obdélník, a tím pádem měřitelná množina. Dále definujme $T: (\mathbb{R}^d)^2 \to (\mathbb{R}^d)^2$ předpisem $T(x,y) = (x-y, y)$. Pak zjevně T je prosté lineární zobrazení, a tedy bijekce $(\mathbb{R}^d)^2$ na $(\mathbb{R}^d)^2$. Platí, že $\psi^{-1}(G) = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2;\ x-y \in A\} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2;\ T(x,y) \in A \times \mathbb{R}^d\} = T^{-1}(A \times \mathbb{R}^d)$. Množina $A \times \mathbb{R}^d$ je měřitelný obdélník v $(\mathbb{R}^d)^2$, a tedy měřitelná množina, proto i její obraz při lineárním zobrazení T^{-1} je měřitelná množina (viz např. [R, str. 175]).

□

LEMMA 4. *Nechť* μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f, g \in L_1(\mu)$*. Položíme-li* $F(x,y) = f(y)g(x-y)$ *pro* $x, y \in \mathbb{R}^d$*, pak* $F \in L_1(\mu \times \mu)$ *a* $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$*.*

DŮKAZ. Podle Lemmatu 3(b) je funkce F měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. S využitím věty o substituci jako v důkazu Věty 2(a) obdržíme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|F(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\mu(y) &= \int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\mathrm{d}\mu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|f(y)|\cdot\|g\|_1\,\mathrm{d}\mu(y) = \|g\|_1\|f\|_1 < +\infty,\end{aligned}$$

odkud podle Fubiniovy věty plyne, že $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

□

DEFINICE 5. Nechť $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x-y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Všimněme si, že je-li $y \in \mathbb{R}^d$, pak pro libovolné $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ platí $\tau_y(f+g) = \tau_y f + \tau_y g$ a $\tau_y(\alpha f) = \alpha \tau_y f$, tj. τ_y je lineární zobrazení mezi vektorovými prostory všech funkcí na $\mathbb{R}^d$.

VĚTA 6. *Nechť* μ *je kladným násobkem Lebesgueovy míry na* $\mathbb{R}^d$ *a* $f \in L_p(\mu)$*,* $1 \le p < \infty$*. Pak zobrazení* $\tau: \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ *dané předpisem* $\tau(x) = \tau_x f$ *je stejnoměrně spojité.*

DŮKAZ. Uvědomme si, že díky větě o substituci pro libovolné $g \in L_p(\mu)$ a $y \in \mathbb{R}^d$ platí, že $\|\tau_y g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d}|\tau_y g(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d}|g(x-y)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d}|g(u)|^p\,\mathrm{d}\mu(u) = \|g\|_p^p$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle důsledku Luzinovy věty ([R, Věta 3.14]) existuje $g \in C(\mathbb{R}^d)$ s kompaktním nosičem K taková, že $\|f-g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Nechť $r > 0$ je takové, že $K \subset B(0,r)$, a položme $B = B(0, r+1)$. Protože g je stejnoměrně spojitá a $\mu(B) < +\infty$, existuje $0 < \delta \le 1$ takové, že $|g(u) - g(v)| < \frac{\varepsilon}{3\mu(B)^{1/p}}$ kdykoli $u, v \in \mathbb{R}^d$, $\|u - v\| < \delta$. Nechť nyní $x, y \in \mathbb{R}^d$ jsou takové, že $\|x-y\| < \delta$. Je-li $u + x - y \in K$, pak $\|u\| \le \|u + x - y\| + \|x - y\| \le r + 1$, tedy $u \in B$. S využitím věty o substituci tedy máme

$$\begin{aligned}\|\tau_x g - \tau_y g\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^d}|\tau_x g(z) - \tau_y g(z)|^p\,\mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d}|g(z-x) - g(z-y)|^p\,\mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|g(u) - g(u+x-y)|^p\,\mathrm{d}\mu(u) = \int_B |g(u) - g(u+x-y)|^p\,\mathrm{d}\mu(u) \le \\ &\le \int_B \frac{\varepsilon^p}{3^p\mu(B)}\,\mathrm{d}\mu(z) = \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p.\end{aligned}$$

Dohromady tak dostáváme

$$\begin{aligned}\|\tau(x)-\tau(y)\|_p &= \|\tau_x f-\tau_y f\|_p \le \|\tau_x f-\tau_x g\|_p+\|\tau_x g-\tau_y g\|_p+\|\tau_y g-\tau_y f\|_p \le \\ &\le \|\tau_x(f-g)\|_p+\frac{\varepsilon}{3}+\|\tau_y(g-f)\|_p = \|f-g\|_p+\frac{\varepsilon}{3}+\|g-f\|_p<\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Připomeňme, že $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega,\mu)$ je vektorový prostor lokálně integrovatelných funkcí definovaných na měřitelné $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, tj. funkcí $f\colon\Omega\to\mathbb{K}$ takových, že pro každé $x\in\Omega$ existuje okolí $U\subset\Omega$ bodu x takové, že $f\restriction_U$ je integrovatelná. Poznamenejme, že z Lindelöfovy[1] vlastnosti množiny Ω plyne, že funkce z $L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega,\mu)$ jsou automaticky měřitelné. Z vlastností kompaktních množin pak plyne, že je-li $f\in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega,\mu)$ a $K\subset\Omega$ kompaktní, pak $f\restriction_K$ je integrovatelná. Dále se snadno nahlédne, že $C(\mathbb{R}^d)\subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d,\mu)$ a $L_p(\mathbb{R}^d,\mu)\subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d,\mu)$ pro každé $1\le p\le\infty$.

VĚTA 7. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f,g\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{K}$.*

(a) Je-li $f\in L_p(\mu)$ a $g\in L_q(\mu)$, kde $1\le p,q\le\infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f*g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f*g\|_\infty\le\|f\|_p\|g\|_q$.

(b) Je-li $f\in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g\in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f*g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí $\operatorname{supp} f*g\subset\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$.

(c) Jsou-li f,g měřitelné, $D\subset\mathbb{R}^d$ měřitelná a $f*g$ je definována alespoň na D, pak $f*g$ je měřitelná na D.

(d) Jsou-li $f,g\in L_1(\mu)$, pak $f*g$ je definována μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f*g\in L_1(\mu)$ a platí $\|f*g\|_1\le\|f\|_1\|g\|_1$.

(e) Nechť $1\le p,q\le\infty$ splňují $\frac1p+\frac1q\ge1$. Je-li $f\in L_p(\mu)$ a $g\in L_q(\mu)$, pak $f*g$ je definovaná μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f*g\in L_r(\mu)$ a platí $\|f*g\|_r\le\|f\|_p\|g\|_q$, kde $\frac1r=\frac1p+\frac1q-1$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x\in\mathbb{R}^d$. Funkce $y\mapsto f(y)g(x-y)$ je μ-měřitelná dle Lemmatu 3(a) a $\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\le\|f\|_p\|g\|_q$ (pro $1<p,q<\infty$ to plyne z Hölderovy nerovnosti, jinak je odhad přímočarý; též využíváme větu o substituci). Tedy $f*g$ je definována na celém $\mathbb{R}^d$ a $|f*g(x)|\le\|f\|_p\|g\|_q$ pro každé $x\in\mathbb{R}^d$. Dále díky Větě 2(a) můžeme bez újmy na obecnost předpokládat, že $q<\infty$. Položme $h(z)=g(-z)$ pro $z\in\mathbb{R}^d$. Dle věty o substituci je $h\in L_q(\mu)$. Pro libovolná $x,y\in\mathbb{R}^d$ pomocí Hölderovy nerovnosti (resp. přímočarého odhadu pro $p=\infty$) dostáváme

$$\begin{aligned}|f*g(x)-f*g(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\big(g(x-z)-g(y-z)\big)\,\mathrm{d}\mu(z)\right| = \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\big(h(z-x)-h(z-y)\big)\,\mathrm{d}\mu(z)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\big(\tau_x h-\tau_y h\big)(z)\,\mathrm{d}\mu(z)\right| \le \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|\big|\big(\tau_x h-\tau_y h\big)(z)\big|\,\mathrm{d}\mu(z)\le\|f\|_p\|\tau_x h-\tau_y h\|_q.\end{aligned}$$

Věta 6 nyní implikuje stejnoměrnou spojitost $f*g$.

(b) Nechť $x\in\mathbb{R}^d$. Pak $y\mapsto f(y)g(x-y)$ je μ-měřitelná dle Lemmatu 3(a). Položme $K=\operatorname{supp} g$. Pak

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y)=\int_{x-K}|f(y)||g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\le\|g\|_\infty\int_{x-K}|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y),$$

přičemž poslední integrál je konečný, neboť množina $x-K$ je kompaktní. Tedy hodnota $f*g(x)$ je definována.

Nechť nyní $x\in\mathbb{R}^d\setminus(\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g)$. Pak pro $y\in\operatorname{supp} f$ platí $x-y\notin\operatorname{supp} g$, a tedy

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{R}^d}f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)=\int_{\operatorname{supp} f}f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)=0.$$

Odtud plyne, že $\{x\in\mathbb{R}^d;\ f*g(x)\ne0\}\subset\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$. Podle Tvrzení 1.23 je ovšem množina $\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$ uzavřená, a tedy $\operatorname{supp} f*g\subset\operatorname{supp} f+\operatorname{supp} g$.

[1] Ernst Leonard Lindelöf

Konečně, ukažme spojitost. Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $L = B(x,1) - K$. Pak L je kompaktní (Tvrzení 1.23). Položme $h(z) = (\chi_L f)(-z)$ pro $z \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_1(\mu)$. Nechť $y \in B(x,1)$ je libovolné. Pak s využitím Věty 2 dostáváme

$$
\begin{aligned}
|f*g(x) - f*g(y)| &= |g*f(x) - g*f(y)| = \left|\int_K g(z)\big(f(x-z) - f(y-z)\big)\,\mathrm{d}\mu(z)\right| = \\
&= \left|\int_K g(z)\big(h(z-x) - h(z-y)\big)\,\mathrm{d}\mu(z)\right| \le \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)|\big|h(z-x) - h(z-y)\big|\,\mathrm{d}\mu(z) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |g(z)|\big|\big(\tau_x h - \tau_y h\big)(z)\big|\,\mathrm{d}\mu(z) \le \|g\|_\infty \|\tau_x h - \tau_y h\|_1,
\end{aligned}
$$

přičemž třetí rovnost platí proto, že je-li $z \in K$, pak $x - z, y - z \in L$, a tedy $g(z)\big(f(x-z) - f(y-z)\big) = g(z)\big((\chi_L f)(x-z) - (\chi_L f)(y-z)\big)$ pro každé $z \in \mathbb{R}^d$. Věta 6 nyní implikuje spojitost $f * g$ v bodě x.

(c) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $A_n = \{y \in \mathbb{R}^d;\ |f(y)| \le n\} \cap B(0,n)$ a $B_n = \{y \in \mathbb{R}^d;\ |g(y)| \le n\} \cap B(0,n)$. Pak A_n i B_n jsou měřitelné množiny. Položme dále $f_n = \chi_{A_n} f$ a $g_n = \chi_{B_n} g$. Pak zjevně $f_n \to f$ a $g_n \to g$ bodově na $\mathbb{R}^n$ a $|f_n(x)| \le |f(x)|$, $|g_n(x)| \le |g(x)|$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Odtud plyne, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^d$ platí $f_n(y)g_n(x-y) \to f(y)g(x-y)$ a $|f_n(y)g_n(x-y)| \le |f(y)g(x-y)|$. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n, g_n \in L_1(\mu) \cap L_\infty(\mu)$, a tedy dle (a) je $f_n * g_n$ definována a spojitá na celém $\mathbb{R}^d$. Pro $x \in D$ je podle předpokladu $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty$, takže dle Lebesgueovy věty $f_n * g_n(x) \to f * g(x)$. Funkce $f * g$ je tedy na D bodovou limitou spojitých funkcí, a proto je tam měřitelná.

(d) Položíme-li $F(x,y) = f(y)g(x-y)$, pak dle Lemmatu 4 je $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$. Podle Fubiniovy věty tedy platí, že $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ konverguje pro μ-s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ a $f * g \in L_1(\mu)$. Použijeme-li Fubiniovu větu ještě jednou, dostaneme

$$
\begin{aligned}
\|f*g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right| \mathrm{d}\mu(x) \le \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x,y)|\,\mathrm{d}\mu \times \mu = \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}
$$

(e) Případ sdružených exponentů je (a), případ $p = q = 1$ je (d). Zbývají případy, kdy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ a $1 < \max\{p,q\} < \infty$, což znamená, že $r < \infty$. Dle Lemmatu 3(b) je funkce $F(x,y) = |f(y)|^p |g(x-y)|^q$ nezáporná měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$, a tedy dle Fubiniovy věty (a věty o substituci) platí

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^q\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \|g\|_q^q\,\mathrm{d}\mu(y) = \|f\|_p^p \|g\|_q^q < +\infty. \quad (1)
\end{aligned}
$$

To znamená, že integrál $\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)$ je konečný pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Dále, je-li $p = 1$, pak $r = q > 1$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ dostáváme pomocí Hölderovy nerovnosti

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{1-\frac{1}{r}} \big(|f(y)|^{\frac{1}{r}} |g(x-y)|\big)\,\mathrm{d}\mu(y) \le \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}} = \|f\|_1^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}
$$

Je-li $q = 1$, pak obdržíme analogicky $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \le \|g\|_1^{1-\frac{1}{r}} \big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y)\,\mathrm{d}\mu(y)\big)^{\frac{1}{r}}$. Konečně, je-li $p, q > 1$, pak $\frac{1}{r} < \frac{1}{p}$, $\frac{1}{r} < \frac{1}{q}$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ tak dostáváme pomocí Hölderovy nerovnosti

(Věta 13.16 pro $\alpha_1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$, $\alpha_2 = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$ a $\alpha_3 = \frac{1}{r}$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)g(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^{1-\frac{p}{r}} |g(x-y)|^{1-\frac{q}{r}} \big(|f(y)|^{\frac{p}{r}} |g(x-y)|^{\frac{q}{r}}\big) \,\mathrm{d}\mu(y) \leq \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|^q \,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}} = \\ &= \|f\|_p^{1-\frac{p}{r}} \|g\|_q^{1-\frac{q}{r}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \,\mathrm{d}\mu(y)\right)^{\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že díky předchozím výpočtům je tento odhad platný i pro $p = 1$ nebo $q = 1$. Protože poslední číslo v tomto odhadu je konečné pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$, je funkce $f * g$ je definována skoro všude na $\mathbb{R}^d$ a platí $|f * g(x)| \leq \|f\|_p^{1-p/r} \|g\|_q^{1-q/r} \big(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \,\mathrm{d}\mu(y)\big)^{1/r}$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Podle (c) je funkce $f * g$ měřitelná a můžeme tedy s pomocí (1) odhadnout

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^r \,\mathrm{d}\mu(x) \leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(x,y) \,\mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \|f\|_p^r \|g\|_q^r.$$

□

Důkaz Věty 2(c). Pomocí Lemmatu 3 snadno odvodíme, že funkce $F_x(y,z) = f(z)g(y-z)h(x-y)$ je měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dále je $|f| \in L_p(\mu)$, $|g| \in L_q(\mu)$ a $|h| \in L_r(\mu)$. Z předpokladu na p, q, r plyne, že $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ nebo $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$. Předpokládejme nejprve, že nastane první případ. Pak dle Věty 7(e) je $|f| * |g| \in L_u(\mu)$, kde $\frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Protože $\frac{1}{u} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 + \frac{1}{r} \geq 1$, opětovným použitím Věty 7(e) dostáváme, že $\big(|f| * |g|\big) * |h|(x)$ je definována pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. To znamená, že

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)g(y-z)h(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(z)\right) \mathrm{d}\mu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)||g(y-z)| \,\mathrm{d}\mu(z)\right) |h(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f| * |g|(y) |h(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty\end{aligned}$$

pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Z Fubiniovy věty tedy plyne, že $F_x \in L_1(\mu \times \mu)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Podobně, jestliže $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$, pak dle Věty 7(e) je $|g| * |h| \in L_u(\mu)$, kde $\frac{1}{u} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$. Protože $\frac{1}{p} + \frac{1}{u} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1 \geq 1$, opětovným použitím Věty 7(e) dostáváme, že $|f| * \big(|g| * |h|\big)(x)$ je definována pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. S využitím věty o substituci to znamená, že

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(z)g(y-z)h(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(y-z)||h(x-y)| \,\mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(z) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(u)||h(x-z-u)| \,\mathrm{d}\mu(u)\right) \mathrm{d}\mu(z) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| \big(|g| * |h|\big)(x-z) \,\mathrm{d}\mu(y) < +\infty\end{aligned}$$

pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$. Z Fubiniovy věty tedy i ve druhém případě plyne, že $F_x \in L_1(\mu \times \mu)$ pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$.

Konečně, opětovným použitím Fubiniovy věty spolu s větou o substituci tedy pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
(f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(y-z) \,\mathrm{d}\mu(z) \right) h(x-y) \,\mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F_x(y,z) \,\mathrm{d}\mu(z) \right) \mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F_x(y,z) \,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(z) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y-z) h(x-y) \,\mathrm{d}\mu(y) \right) \mathrm{d}\mu(z) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u) h(x-z-u) \,\mathrm{d}\mu(u) \right) \mathrm{d}\mu(z) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g * h(x-z) \,\mathrm{d}\mu(z) = f * (g * h)(x).
\end{aligned}
$$

□

DEFINICE 8. Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme multiindexem délky d. Řádem multiindexu α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$
D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}
$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme). Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ a $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$. Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina. Je-li f funkce na Ω s komplexními hodnotami, pak $D^\alpha f(x) = D^\alpha(\operatorname{Re} f)(x) + i D^\alpha(\operatorname{Im} f)(x)$ pro $x \in \Omega$. Připomeňme, že symbolem $C^k(\Omega, \mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ značíme funkce z Ω do $\mathbb{K}$ takové, že mají spojité všechny parciální derivace všech řádů až do k včetně (resp. všech řádů pokud $k = \infty$) na Ω. Obvykle používáme zkratku $C^k(\Omega, \mathbb{K}) = C^k(\Omega)$ a těleso skalárů je nutné poznat z kontextu.

Uvědomme si, že ne každá parciální derivace je tvaru D^α pro nějaký multiindex α (např. $\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}$). Nicméně pokud derivujeme funkce z $C^k(\Omega)$, pak si díky větě o záměně parciálních derivací vystačíme pouze s parciálními derivacemi D^α. Díky Větě 13.1 lze tedy obvykle pracovat pouze s parciálními derivacemi D^α.

DEFINICE 9. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$
\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K});\ \operatorname{supp} \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}
$$

se nazývá prostor testovacích funkcí na A.

Obvykle používáme zkratku $\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \mathcal{D}(A)$ a těleso skalárů je nutné poznat z kontextu.

Uvědomme si, že $\mathcal{D}(A)$ je podprostor vektorového prostoru $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{D}(A)$ je podprostor $\mathcal{D}(B)$, pokud $A \subset B$. Snadno je vidět, že pro každou $f \in \mathcal{D}(A)$ a každý multiindex α je $D^\alpha f \in \mathcal{D}(A)$, neboť $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f$.

PŘÍKLAD 10. Funkce $p(x) = \|x\|^2$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ patří do $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Platí totiž $\frac{\partial p}{\partial x_i}(x) = 2x_i$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}(x) = 2$ a $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}(x) = 0$ pro $i \neq j$ a všechny ostatní parciální derivace jsou nulové.

Definujme funkci $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$
\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & \text{pro } t \in (-1, 1), \\ 0 & \text{pro } t \notin (-1, 1). \end{cases}
$$

Pak není obtížné spočítat, že $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ (jediná potíž je v bodech ± 1), a zjevně $\operatorname{supp} \varphi = [-1, 1]$. Tedy $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Konečně, položíme-li $\psi = \varphi \circ p$, pak ihned vidíme, že $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\operatorname{supp} \psi = B(0, 1)$.

Vzhledem k tomu, že nosič funkce lze posouvat a měnit jeho velikost pomocí transformace $x \mapsto ax + b$, která zachovává hladkost, předchozí příklad ukazuje, že pro libovolnou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ prostor $\mathcal{D}(\Omega)$ obsahuje netriviální nezápornou funkci.

VĚTA 11. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α délky d.*

DŮKAZ. Dle Věty 7(b) jsou funkce $f * g$ i $f * D^\alpha g$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ definovány a spojité na celém $\mathbb{R}^d$. Dále ukážeme platnost vzorce $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ indukcí podle $|\alpha|$. Odtud plyne, že $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ pomocí Věty 13.1.

Nechť nejprve $k = 1$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Funkce $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ je spojitá s kompaktním nosičem, a tedy existuje $C > 0$ takové, že $\left|\frac{\partial g}{\partial x_j}(y)\right| \le C$ pro každé $y \in \mathbb{R}^d$. Zvolme pevně $x \in \mathbb{R}^d$ a položme $\varphi(t) = f * g(x + te_j)$ pro $t \in (-1, 1)$. Dále položme $F(t, y) = f(y)g(x + te_j - y)$ pro $t \in (-1, 1)$ a $y \in \mathbb{R}^d$ a všimněme si, že $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} F(t, y)\,\mathrm{d}\mu(y)$. Pak pro každé $t \in (-1, 1)$ je funkce $y \mapsto F(t, y)$ měřitelná. Dále pro každé $y \in \mathbb{R}^d$ a $t \in (-1, 1)$ je $\frac{\partial F}{\partial t}(t, y) = f(y)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y)$. Položme $K = B(x, 1) - \operatorname{supp} g$. Pak K je kompaktní (Tvrzení 1.23) a je-li $t \in (-1, 1)$ a $y \in \mathbb{R}^d \setminus K$, pak $x + te_j - y \notin \operatorname{supp} g$, takže $\frac{\partial g}{\partial x_j}(x + te_j - y) = 0$. Pro $h = C\chi_K|f|$ je tedy $h \in L_1(\mu)$ a $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(t, y)\right| \le h(y)$ pro každé $y \in \mathbb{R}^d$ a $t \in (-1, 1)$. Konečně, $y \mapsto F(0, y) \in L_1(\mu)$, neboť $f * g(x)$ je definována. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tedy máme $\frac{\partial f * g}{\partial x_j}(x) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial t}(0, y)\,\mathrm{d}\mu(y) = f * \frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$.

Nechť nyní $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| > 1$ a předpokládejme, že vzorec platí pro libovolné D^β takové, že $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ a $|\beta| < |\alpha|$. Nechť $j \in \{1, \dots, d\}$ je nejmenší takové, že $\alpha_j > 0$. Pak $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$, přičemž $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1$, a tedy s využitím indukčního předpokladu a dále již dokázaného případu $k = 1$ obdržíme

$$D^\alpha(f * g) = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(D^{\alpha - e_j}(f * g)\big) = \frac{\partial}{\partial x_j}(f * D^{\alpha - e_j} g) = f * \frac{\partial}{\partial x_j}(D^{\alpha - e_j} g) = f * D^\alpha g.$$

□

DEFINICE 12. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat regularizačním jádrem (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

VĚTA 13. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(b) Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \le p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.

DŮKAZ. (a) Podle Věty 7(a) jsou funkce $f * g_n$ definovány na celém $\mathbb{R}^d$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{2}$ kdykoli $u, v \in \mathbb{R}^d$ splňují $\|u - v\| \le \delta$. Nechť $M > 0$ je takové, že $|f(x)| \le M$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dle Důsledku 13.15 existuje $r > 0$ takové, že $\int_{B(0,r)} g\,\mathrm{d}\mu > 1 - \frac{\varepsilon}{4M}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ pak dle věty o substituci (užijeme $\varphi(x) = nx$, $J_\varphi(x) = n^d$) máme $\int_{B(0,r/n)} g_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{B(0,r/n)} n^d g(nx)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{B(0,r)} g(u)\,\mathrm{d}\mu(u) > 1 - \frac{\varepsilon}{4M}$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{r}{n_0} < \delta$. Pak pro každé $n \ge n_0$ a pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že

$$\begin{aligned}
\big|f * g_n(x) - f(x)\big| &= \big|g_n * f(x) - f(x)\big| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} g_n(y) f(x - y)\,\mathrm{d}\mu(y) - f(x)\int_{\mathbb{R}^d} g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right| \le \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} g_n(y)\big|f(x - y) - f(x)\big|\,\mathrm{d}\mu(y) = \\
&= \int_{B(0,\frac{r}{n})} g_n(y)\big|f(x - y) - f(x)\big|\,\mathrm{d}\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\frac{r}{n})} g_n(y)\big|f(x - y) - f(x)\big|\,\mathrm{d}\mu(y) \le \\
&\le \int_{B(0,\frac{r}{n})} g_n(y)\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\frac{r}{n})} g_n(y) 2M \le \frac{\varepsilon}{2} + 2M\frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

přičemž jsme využili komutativitu konvoluce (Věta 2(a)).

(b) Podle Věty 7(e) existuje $A \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $\mu(A) = 0$ a všechny funkce $f * g_n$ jsou definovány na $\mathbb{R}^d \setminus A$. Podobně jako v případě (a) a s využitím Jensenovy nerovnosti[2] ([R, Věta 3.3]) dostáváme, že pro každé $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$ platí, že

$$\left|f * g_n(x) - f(x)\right|^p = \left|\int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x-y) - f(x)\big) g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right|^p \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y).$$

Díky Fubiniově větě (a Lemmatu 3(b)) je tedy

$$\begin{aligned}\|f * g_n - f\|_p^p &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right) \mathrm{d}\mu(x) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)|^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\mu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p^p g_n(y)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(-y) g_n(y)\,\mathrm{d}\mu = \varphi * g_n(0),\end{aligned}$$

kde $\varphi(y) = \|\tau_{-y} f - f\|_p^p$. Podle Věty 6 je funkce φ spojitá na $\mathbb{R}^d$ a zjevně je omezená, a tedy dle (a) $\varphi * g_n(0) \to \varphi(0) = 0$.

□

DŮSLEDEK 14. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $1 \leq p < \infty$. Pak množina $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).*

DŮKAZ. Nechť $f \in L_p(\Omega)$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje kompaktní $K \subset \Omega$ taková, že $\delta = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) > 0$ a $\|f - \chi_K f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$ (stačí použít Důsledek 13.15 na $K_n = \{x \in B_{\mathbb{R}^d}(0,n);\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$). Položme $h = \chi_K f$. Vezměme nějakou nezápornou funkci $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\operatorname{supp} g \subset B(0,\delta)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu = 1$ a položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak podle Věty 13(b) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\|h - h * g_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, a tedy $\|f - h * g_n\|_p \leq \|f - h\|_p + \|h - h * g_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Podle Věty 11 je $h * g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a podle Věty 7(b) je $\operatorname{supp} h * g_n \subset K + B(0,\delta) \subset \Omega$, tedy $h * g_n \in \mathcal{D}(\Omega)$.

□

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$. V tomto oddílu budeme konvoluci funkcí na $\mathbb{R}^d$ rozumět vzhledem k míře μ_d.

DEFINICE 15. Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

Dříve, než se podíváme na vlastnosti Fourierovy transformace, zavedeme ještě několik užitečných pojmů.

DEFINICE 16. Prostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) = C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Z věty o stejnoměrné limitě posloupnosti spojitých funkcí plyne, že $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ je uzavřený podprostor Banachova prostoru $\ell_\infty(\mathbb{R}^d)$, a tedy je to Banachův prostor.

[2]Johan Willem Ludwig Valdemar Jensen (1906)

DEFINICE 17. Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Snadno se nahlédne, že $C_0(\mathbb{R}^d)$ je uzavřeným podprostorem $C_b(\mathbb{R}^d)$, tedy je to Banachův prostor. Na druhou stranu, $C_c(\mathbb{R}^d)$ je podprostorem $C_0(\mathbb{R}^d)$, a není příliš obtížné si rozmyslet, že je ve skutečnosti hustým podprostorem. (Stačí funkci z $C_0(\mathbb{R}^d)$ vynásobit funkcí $x \mapsto 1-\min\{\operatorname{dist}(x, B(0,R)), 1\}$.) Příkladem funkce z $C_0(\mathbb{R}^d)$, která nemá kompaktní nosič, je $\frac{1}{1+\|x\|^2}$.

Intuitivně lze říci, že funkce z $C_0(\mathbb{R}^d)$ „jdou v nekonečnu k nule“. Přesněji, je-li $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

LEMMA 18 (G. F. B. Riemann (1853), H. Lebesgue (1903)). *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak* $\lim\limits_{\|t\|\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu$
0.

DŮKAZ. Protože $e^{-i\pi} = -1$, pro $t \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ máme díky větě o substituci

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -f(x)e^{-i\left\langle t,x+\frac{\pi}{\|t\|^2}t\right\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} -f\Big(u - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)e^{-i\langle t,u\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u).$$

Odtud

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big(f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)\Big)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)\right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\Big|f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{\|t\|^2}t\Big)\Big|\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{2}\Big\|\tau_0 f - \tau_{\pi t/\|t\|^2} f\Big\|_1.\end{aligned}$$

Tvrzení lemmatu nyní plyne z Věty 6.

□

VĚTA 19. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1,\dots,d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) Nechť $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle}f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y\widehat{f}$.

(c) Je-li $c > 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{c})$, pak $\widehat{h}(t) = c^d\widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(d) Je-li $h(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{h} = \overline{\widehat{f}}$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(h) $\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}g\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d$.

Pro důkaz tvrzení (e) budeme potřebovat následující tři lemmata:

LEMMA 20. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f \in L_1([a,+\infty))$. Předpokládejme dále, že f je absolutně spojitá na každém intervalu $[a,b]$, $b > a$, nebo že f' existuje vlastní na celém $[a,+\infty)$. Je-li $f' \in L_1([a,+\infty))$, pak* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

DŮKAZ. Uvědomme si, že podle našich předpokladů platí $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$ pro každé $x \in (a,+\infty)$ (viz např. [R, Věty 7.20 a 7.21]). Z Heineovy věty a Důsledku 13.15 plyne, že $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a) + \int_a^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$, speciálně tedy limita existuje. Protože $f \in L_1([a,+\infty))$, nezbývá, než aby byla nulová.

□

LEMMA 21. *Nechť $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f, g mají (vlastní) derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$ a platí $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, g je omezená a g' je spojitá a omezená. Pak $\int_{\mathbb{R}} f'g \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}} fg' \,\mathrm{d}\lambda$.*

DŮKAZ. Podle předpokladu je funkce fg' spojitá na $\mathbb{R}$ a má konvergentní Lebesgueův integrál. Tedy existuje i konečný Newtonův integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x$. Dále díky Lemmatu 20 platí $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Podle věty o integraci per partes pro Newtonův integrál tedy máme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrál zcela vlevo dle předpokladu konverguje i jako Lebesgueův integrál. Rovnost tedy platí i pro integrály v Lebesgueově smyslu.

□

LEMMA 22. *Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je omezená a $j \in \{1, \dots, d\}$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ existují všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$, pak $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} g \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j} \,\mathrm{d}\lambda$.*

DŮKAZ. Označme $F(u,v) = f(u_1, \dots, u_{j-1}, v, u_j, \dots, u_{d-1})$, $G(u,v) = g(u_1, \dots, u_{j-1}, v, u_j, \dots, u_{d-1})$, $F_1(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(u_1, \dots, u_{j-1}, v, u_j, \dots, u_{d-1})$ a $G_1(u,v) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(u_1, \dots, u_{j-1}, v, u_j, \dots, u_{d-1})$ pro $u \in \mathbb{R}^{d-1}$, $v \in \mathbb{R}$. Dle předpokladu je $F, F_1 \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Podle Fubiniovy věty tedy existují množiny $A, B \subset \mathbb{R}^{d-1}$ míry 0 takové, že $v \mapsto F(u,v) \in L_1(\mathbb{R})$ pro všechna $u \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus A$ a $v \mapsto F_1(u,v) \in L_1(\mathbb{R})$ pro všechna $u \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus B$. Položme $E = A \cup B$. Pak díky Fubiniově větě máme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)g(x)\,\mathrm{d}\lambda_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} F_1(u,v)G(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v) \right) \mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}\setminus E} \left(\int_{\mathbb{R}} F_1(u,v)G(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v) \right) \mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}\setminus E} \left(-\int_{\mathbb{R}} F(u,v)G_1(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v) \right) \mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(u,v)G_1(u,v)\,\mathrm{d}\lambda_1(v) \right) \mathrm{d}\lambda_{d-1}(u) = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}\lambda_d(x),\end{aligned}$$

přičemž druhá a čtvrtá rovnost platí díky tomu, že E má nulovou míru, a třetí rovnost plyne z Lemmatu 21.

□

DŮKAZ VĚTY 19. (a) Nechť $t \in \mathbb{R}^d$ a $\{t_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}^d$ konvergující k t. Pak díky spojitosti skalárního součinu pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí $f(x)e^{-i\langle t_n, x\rangle} \to f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}$. Protože $|f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle}| = |f(x)|$, je podle Lebesgueovy věty $\lim \widehat{f}(t_n) = \lim \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t_n,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d = \widehat{f}(t)$. Tedy $\widehat{f}$ je spojitá v t. Dále zjevně $|\widehat{f}(t)| \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \|f\|_1$. Fakt, že $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ nyní plyne z Lemmatu 18. Konečně, linearita Fourierovy transformace je zřejmá z definice.

(b) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{\tau_y f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle t,u\rangle}e^{-i\langle t,y\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t).$$

Dále

$$\widehat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle y,x\rangle} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t-y,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \widehat{f}(t-y) = \tau_y\widehat{f}(t).$$

(c) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\tfrac{x}{c}\right)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = c^d \int_{\mathbb{R}^d} f(u)e^{-i\langle t,cu\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(u) = c^d\widehat{f}(ct).$$

(d) Pro $t \in \mathbb{R}^d$ máme díky větě o substituci

$$\widehat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)}e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(-x)e^{-i\langle t,-x\rangle}}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \overline{\widehat{f}(t)}.$$

(e) Díky Lemmatu 22 máme

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\, \mathrm{d}\lambda(x) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-it_j) e^{-i\langle t,x\rangle}\, \mathrm{d}\lambda(x) = it_j \widehat{f}(t).$$

(f) Zvolme pevně $t \in \mathbb{R}^d$ a položme $\varphi(u) = \widehat{f}(t + ue_j)$ pro $u \in \mathbb{R}$. Dále položme $F(u,x) = f(x)e^{-i\langle t+ue_j,x\rangle}$ pro $u \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}^d$ a všimněme si, že $\varphi(u) = \int_{\mathbb{R}^d} F(u,x)\, \mathrm{d}\mu_d(x)$. Pak pro každé $u \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto F(u,x)$ měřitelná. Dále pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $u \in \mathbb{R}$ je $\frac{\partial F}{\partial u}(u,x) = -ix_j f(x) e^{-i\langle t+ue_j,x\rangle} = h(x)e^{-i\langle t+ue_j,x\rangle}$, takže $\left|\frac{\partial F}{\partial t}(u,x)\right| = |h(x)|$. Dle předpokladu je tedy h integrovatelná majoranta. Konečně, zjevně $x \mapsto F(0,x) \in L_1(\mu_d)$. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru tak máme $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \varphi'(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial u}(0,x)\, \mathrm{d}\mu_d(x) = \widehat{h}(t)$.

(g) Zvolme pevně libovolné $t \in \mathbb{R}^d$. Dle Lemmatu 3(b) je funkce $F(x,y) = f(y)g(x-y)e^{-i\langle t,x\rangle}$ měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Dále $|F(x,y)| = |f(y)||g(x-y)|$ a aplikujeme-li Lemma 4 na $|F|$, dostaneme, že $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Můžeme tedy použít Fubiniovu větu a substituci $\varphi(u) = u + y$ k výpočtu

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^d} f * g(x) e^{-i\langle t,x\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\, \mathrm{d}\mu_d(y) \right) e^{-i\langle t,x\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-y) e^{-i\langle t,x\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(x) \right) \mathrm{d}\mu_d(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-i\langle t,u+y\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(u) \right) \mathrm{d}\mu_d(y) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle t,y\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(u) e^{-i\langle t,u\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(u) \right) \mathrm{d}\mu_d(y) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t).
\end{aligned}$$

(h) Položme $F(x,y) = f(y)g(x)e^{-i\langle x,y\rangle}$. Pak F je dle Lemmatu 3(b) měřitelná na $(\mathbb{R}^d)^2$. Máme

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)|\, \mathrm{d}\mu_d(x) \right) \mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\, \mathrm{d}\mu_d(x) \right) \mathrm{d}\mu_d(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty,$$

podle Fubiniovy věty, tedy $F \in L_1(\mu_d \times \mu_d)$. Proto můžeme použít Fubiniovu větu ještě jednou k výpočtu

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) g(x)\, \mathrm{d}\mu_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle}\, \mathrm{d}\mu_d(y) \right) g(x)\, \mathrm{d}\mu_d(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\langle x,y\rangle} g(x)\, \mathrm{d}\mu_d(x) \right) \mathrm{d}\mu_d(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\widehat{g}(y)\, \mathrm{d}\mu_d(y).
\end{aligned}$$

□

Pro budoucí použití se nám bude hodit nalézt nějakou omezenou spojitou funkci, jejíž Fourierova transformace je regularizačním jádrem.

PŘÍKLAD 23. Definujme funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^d \frac{1}{1+t_j^2},$$

funkce $\widehat{g}$ je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}\, \mathrm{d}\mu_d = 1$.

Nezápornost funkce $\widehat{g}$ je zjevná a její integrál snadno spočteme pomocí Fubiniovy věty. Stejně snadno pomocí Fubiniovy věty odvodíme, že $g \in L_1(\mu_d)$. Dokažme tedy platnost vzorce. Nechť nejprve $d = 1$. Zvolme $t \in \mathbb{R}$ pevné. Funkce g je sudá, proto

$$\widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-itx}\, \mathrm{d}\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\big(\cos(-tx) + i\sin(-tx)\big)\, \mathrm{d}\mu_1(x) = 2\int_{[0,+\infty)} e^{-x}\cos(tx)\, \mathrm{d}\mu_1(x).$$

Pomocí integrace per partes snadno odvodíme, že $\int e^{-x}\cos(tx)\,\mathrm{d}x \overset{c}{=} e^{-x}\cdot\frac{t\sin(tx)-\cos(tx)}{1+t^2}$ na $\mathbb{R}$. Odtud dostáváme, že $\widehat{g}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\int_0^\infty e^{-x}\cos(tx)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{1+t^2}$.

Je-li nyní $d>1$, pak díky Fubiniově větě a případu $d=1$ dostáváme

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t)&=\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}e^{-i\sum_{j=1}^d t_jx_j}\,\mathrm{d}\mu_d(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d\left(e^{-|x_j|}e^{-it_jx_j}\right)\mathrm{d}\mu_d(x)=\\&=\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\prod_{j=1}^d\left(e^{-|x_j|}e^{-it_jx_j}\right)\mathrm{d}\mu_1(x_1)\cdots\mathrm{d}\mu_1(x_d)=\prod_{j=1}^d\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-|x_j|}e^{-it_jx_j}\right)\mathrm{d}\mu_1(x_j)=\\&=\prod_{j=1}^d\left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac12}\frac{1}{1+t_j^2}=\left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac d2}\prod_{j=1}^d\frac{1}{1+t_j^2}.\end{aligned}$$

LEMMA 24. *Nechť $f,g\in L_1(\mu_d)$. Položme $g_n(x)=n^d\widehat{g}(-nx)$ a $h_n(x)=g(\frac{x}{n})$ pro $x\in\mathbb{R}^d$ a $n\in\mathbb{N}$. Pak $f*g_n(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle t,x\rangle}h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x\in\mathbb{R}^d$ a $n\in\mathbb{N}$.*

DŮKAZ. Nechť $n\in\mathbb{N}$. Protože g_n je omezená (Věta 19(a)), je $f*g_n$ definována na celém $\mathbb{R}^d$ (Věta 7(a)). Pro libovolné $x\in\mathbb{R}^d$ tedy máme

$$\begin{aligned}f*g_n(x)=g_n*f(x)&=\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g_n(y)\,\mathrm{d}\mu_d(y)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)n^d\widehat{g}(-ny)\,\mathrm{d}\mu_d(y)=\\&=\int_{\mathbb{R}^d}f(x+t)n^d\widehat{g}(nt)\,\mathrm{d}\mu_d(t)=\int_{\mathbb{R}^d}\tau_{-x}f(t)\widehat{h_n}(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t)=\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{\tau_{-x}f}(t)h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t),\end{aligned}$$

přičemž při výpočtu jsme použili postupně substituci $\varphi(y)=-y$ a Větu 19(c), (h) a (b).

□

VĚTA 25 (o inverzi). *Nechť $f\in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f}\in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x\in\mathbb{R}^d$ platí*

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(t)=\widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x\in\mathbb{R}^d$.

DŮKAZ. Nechť g je funkce z Příkladu 23. Pak $x\mapsto\widehat{g}(-x)$ je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$. Všimněme si též, že $g(0)=1$. Nechť g_n a h_n jsou funkce z Lemmatu 24. Podle Lemmatu 24 pro libovolné $x\in\mathbb{R}^d$ platí, že $f*g_n(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t)$. Pro každé $t\in\mathbb{R}^d$ je $h_n(t)\to g(0)=1$. Protože $|\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}h_n(t)|\le|\widehat{f}(t)|$ pro každé $t\in\mathbb{R}^d$ a dle předpokladu $\widehat{f}\in L_1(\mu_d)$, můžeme použít Lebesgueovu větu. Dostáváme tak $f*g_n(x)\to\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x\in\mathbb{R}^d$. Na druhou stranu, podle Věty 13(b) platí, že $f*g_n\to f$ v $L_1(\mu_d)$. Existuje tedy podposloupnost $\{g_{n_k}\}$ taková, že $f*g_{n_k}(x)\to f(x)$ pro s. v. $x\in\mathbb{R}^d$ ([R, Věta 3.12]). Z jednoznačnosti limity pak dostáváme, že $f(x)=\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro s. v. $x\in\mathbb{R}^d$.

Předpokládejme nyní, že je f navíc spojitá. Protože $x\mapsto\widehat{\widehat{f}}(-x)$ je spojitá dle Věty 19(a) a $f(x)=\widehat{\widehat{f}}(-x)$ na husté podmnožině $\mathbb{R}^d$, musejí se tyto funkce rovnat všude (Věta 13.3).

□

DŮSLEDEK 26. *Fourierova transformace je prosté zobrazení.*

DŮKAZ. Označme $\mathcal{F}(f)=\widehat{f}$ pro $f\in L_1(\mu_d)$. Je-li $\mathcal{F}(f)=0$, pak dle věty o inverzi je $f(x)=0$ pro s. v. $x\in\mathbb{R}^d$. Tedy $\operatorname{Ker}\mathcal{F}=\{0\}$.

□

DŮSLEDEK 27. *Jsou-li* $f, g \in L_1(\mu_d)$ *takové, že* $\widehat{f}, \widehat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$*, pak* $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

DŮKAZ. Položme $h = \widehat{f} * \widehat{g}$. Protože $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$ a $\widehat{g}$ je omezená (Věta 19(a)), je h definovaná a spojitá na $\mathbb{R}^d$ a navíc $h \in L_1(\mu_d)$ (Věta 7(a), (d)). Dále je $\widehat{h} = \widehat{\widehat{f} * \widehat{g}} = \widehat{\widehat{f}}\widehat{\widehat{g}}$ (Věta 19(g)), a tedy $\widehat{h}(t) = f(-t)g(-t) = fg(-t)$ pro s. v. $t \in \mathbb{R}^d$ (Věta 25). Opětovnou aplikací věty o inverzi dostáváme, že $\widehat{h}(t) = \widehat{\widehat{fg}}(t)$ pro s. v. $t \in \mathbb{R}^d$, a díky spojitosti (Věta 19(a)) pak pro všechna $t \in \mathbb{R}^d$. Podle Důsledku 26 to znamená, že $h = \widehat{fg}$ s. v. na $\mathbb{R}^d$, a konečně ze spojitosti dostáváme $h = \widehat{fg}$ všude na $\mathbb{R}^d$.

□

VĚTA 28 (Michel Plancherel, 1910). *Existuje právě jedna lineární izometrie* $F : L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ *na taková, že* $F(f) = \widehat{f}$ *pro každou* $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.

DŮKAZ. Pro zkrácení zápisu budeme v tomto důkazu používat zkratky $L_2 = L_2(\mu_d)$ a $L_1 = L_1(\mu_d)$. Nechť $u \in L_2 \cap L_1$. Položme $v(x) = \overline{u(-x)}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $v \in L_2 \cap L_1$, a tedy dle Věty 7(a) a (d) je funkce $f = u * v$ stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_1$. Dále dle Věty 19(g) a (d) platí, že $\widehat{f} = \widehat{u}\,\widehat{v} = \widehat{u}\,\overline{\widehat{u}} = |\widehat{u}|^2 \geq 0$. Nechť g je funkce z Příkladu 23. Pak $x \mapsto \widehat{g}(-x)$ je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$. Nechť g_n a h_n jsou funkce z Lemmatu 24. Funkce h_n jsou nezáporné a snadno nahlédneme, že pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ je posloupnost $\{h_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající a konverguje ke $g(0) = 1$. Použijeme-li nyní postupně Větu 13(a), Lemma 24 a Leviovu větu o monotónní konvergenci, dostaneme

$$\begin{aligned}\|u\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} u(y)\overline{u(y)}\,\mathrm{d}\mu_d(y) = f(0) = \lim_{n\to\infty} f * g_n(0) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} h_n \,\mathrm{d}\mu_d = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{u}|^2\,\mathrm{d}\mu_d = \|\widehat{u}\|_2^2.\end{aligned}$$

Zobrazení $u \mapsto \widehat{u}$ je tedy lineární izometrie z podprostoru $L_2 \cap L_1$ prostoru L_2 do prostoru L_2. Podprostor $L_2 \cap L_1$ je ovšem v prostoru L_2 hustý (obsahuje např. jednoduché funkce nulové mimo množinu konečné míry, dále viz např. [R, Věta 3.13]; alternativně lze použít Důsledek 14), a tedy podle Věty 1.62 existuje jednoznačné rozšíření tohoto zobrazení na zobrazení $F \in \mathcal{L}(L_2, L_2)$. Navíc je z hustoty snadno vidět, že i zobrazení F je izometrie (do).

Ukažme nyní, že F je na. Podle Tvrzení 1.60(c) je $\operatorname{Rng} F$ uzavřený v L_2. Pokud $\operatorname{Rng} F \neq L_2$, pak podle Hahnovy-Banachovy věty (Důsledek 2.7) existuje $\varphi \in L_2^*$ takový, že $\|\varphi\| = 1$ a $\varphi = 0$ na $\operatorname{Rng} F$. Podle Věty 2.15 existuje $f \in L_2$ takové, že $\varphi = \varphi_f$. Speciálně tedy platí $\varphi_f(\widehat{u}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u} f = 0$ pro každou $u \in L_2 \cap L_1$. Z hustoty $L_2 \cap L_1$ v L_2 plyne existence posloupnosti $\{f_n\} \subset L_2 \cap L_1$ takové, že $f_n \to f$ v L_2. Zvolme libovolně $u \in L_2 \cap L_1$. Protože $u, \widehat{u}, F(f) \in L_2$, je $\varphi_u, \varphi_{\widehat{u}}, \varphi_{F(f)} \in L_2^*$. Máme tedy $\varphi_{\widehat{u}}(f_n) \to \varphi_{\widehat{u}}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{u}\,\mathrm{d}\mu_d = 0$. Ze spojitosti F plyne, že $\widehat{f}_n = F(f_n) \to F(f)$. Dle Věty 19(h) tedy máme

$$\begin{aligned}\varphi_{F(f)}(u) &= \int_{\mathbb{R}^d} uF(f)\,\mathrm{d}\mu_d = \varphi_u(F(f)) = \lim_{n\to\infty}\varphi_u(\widehat{f_n}) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f_n}u\,\mathrm{d}\mu_d = \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n\widehat{u}\,\mathrm{d}\mu_d = \lim_{n\to\infty}\varphi_{\widehat{u}}(f_n) = 0.\end{aligned}$$

Protože to platí pro každé u z husté podmnožiny L_2, plyne odtud, že $F(f) = 0$, a z prostoty F dostáváme $f = 0$, což je spor s nenulovostí φ_f.

□

Poznamenejme, že zatímco Fourierova transformace funkce z $L_1(\mu_d)$ je určena jakožto funkce definovaná v každém bodě $\mathbb{R}^d$, transformace F z Plancherelovy věty určuje „Fourierův obraz“ pouze jakožto prvek $L_2(\mu_d)$, tedy třídu ekvivalence funkcí na $\mathbb{R}^d$ rovných skoro všude.

Kapitola 6

Teorie distribucí

Ve fyzice je často obtížné určit nějakou veličinu jakožto bodovou funkci (tj. určit konkrétní hodnotu v každém bodě definičního oboru), spíše jsme schopni určit (naměřit, předpovědět) její průměrné hodnoty – např. „okamžitá rychlost“ se často určuje jako průměrná rychlost za krátké časové okamžiky. To je jedna z motivací k tomu, chápat veličinu f nikoli jako bodově určenou funkci, ale pomocí její „akce“ na vhodné „testovací funkce“ φ, tj. jako integrální průměry $\int f\varphi \, \mathrm{d}\lambda$ pro vhodné hustoty φ. Že to pro vhodně zvolenou množinu testovacích funkcí může fungovat nám napovídá následující lemma, které říká, že pomocí „akce“ na testovacích funkcích je již funkce určena jednoznačně (v příslušné třídě; např. ve třídě spojitých funkcí je určena bodově). Též to osvětluje název prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$.

LEMMA 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.*

(a) Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω. Jestliže $\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $\mu = 0$.

(b) Nechť $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}\lambda = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f = 0$ s. v. na Ω.

(c) Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.

K důkazu se nám bude hodit následující „hladké oddělovací lemma“.

LEMMA 2. *Nechť $A, U \subset \mathbb{R}^d$ jsou takové, že $\operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. Pak existuje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$, $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ a $\varphi = 1$ na A.*

DŮKAZ. Nechť $\delta = \frac{1}{3} \operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. Položme $B = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, A) \le \delta\}$ a $C = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, A) \le 2\delta\}$ a uvědomme si, že B i C jsou uzavřené (Fakt 13.4). Vezměme nějakou nezápornou funkci $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ splňující $\operatorname{supp} g \subset B(0, \delta)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} g \, \mathrm{d}\lambda = 1$ a položme $\varphi = \chi_B * g$ (vzhledem k Lebesgueově míře na $\mathbb{R}^d$). Pak $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (Věta 5.11). Zjevně $\varphi \ge 0$ a $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_B(y) g(x - y) \, \mathrm{d}\lambda(y) \le \int_{\mathbb{R}^d} g(x - y) \, \mathrm{d}\lambda(y) = 1$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Dále $\operatorname{supp} \varphi \subset B + B(0, \delta) \subset C \subset U$ (Věta 5.7(b)). Konečně, je-li $x \in A$, pak pro každé $y \in B(0, \delta)$ platí $x - y \in B$, a tedy $\varphi(x) = \int_{B(0,\delta)} g(y) \chi_B(x - y) \, \mathrm{d}\lambda(y) = \int_{B(0,\delta)} g(y) \, \mathrm{d}\lambda(y) = 1$ (Věta 5.2(a)).

□

DŮSLEDEK 3. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní a $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $G \supset K$. Pak existují $U \subset G$ otevřená, $U \supset K$ a $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$ a $\varphi = 1$ na U.*

DŮKAZ. Položme $\delta = \operatorname{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus G)$. Dle Lemmatu 13.5 je $\delta > 0$. Položme dále $U = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, K) < \frac{\delta}{2}\}$ a $V = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \operatorname{dist}(x, K) < \delta\}$. Pak U, V jsou otevřené (Fakt 13.4), $K \subset U \subset V \subset G$, V je omezená a $\operatorname{dist}(U, \mathbb{R}^d \setminus V) \ge \frac{\delta}{2}$. Dle Lemmatu 2 existuje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ na U a $\operatorname{supp} \varphi \subset V$. Tedy φ má kompaktní nosič a $\varphi \in \mathcal{D}(V) \subset \mathcal{D}(G)$.

□

DŮKAZ LEMMATU 1. (a) Nechť $\mu \ne 0$. Pak existuje borelovská $A \subset \Omega$ taková, že $|\mu(A)| > 0$. Míra $|\mu|$ je konečná a těsná (Věta 13.22), existují tedy kompaktní $K \subset A$ a otevřená $A \subset G \subset \Omega$ takové, že $|\mu|(G \setminus K) < \frac{1}{2}|\mu(A)|$ (Lemma 13.18). Pak $|\mu(K)| = |\mu(A) - \mu(A \setminus K)| \ge |\mu(A)| - |\mu|(A \setminus K) > \frac{1}{2}|\mu(A)|$. Dle Důsledku 3 existuje $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$ a $\varphi = 1$ na K. Dle předpokladu pak platí

$0 = \left|\int_\Omega \varphi \, d\mu\right| = \left|\int_G \varphi \, d\mu\right| = \left|\int_K \varphi \, d\mu + \int_{G\setminus K} \varphi \, d\mu\right| \geq |\mu(K)| - \left|\int_{G\setminus K} \varphi \, d\mu\right| \geq |\mu(K)| - \int_{G\setminus K} \varphi \, d|\mu| \geq |\mu(K)| - |\mu|(G \setminus K) > \frac{1}{2}|\mu(A)| - |\mu|(G \setminus K) > 0$, což je spor.

(b) Předpokládejme, že $f \neq 0$ na nějaké množině kladné míry. Ke každému bodu $x \in \Omega$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U(x,\delta) \subset \Omega$ a f je integrovatelná na $U(x,\delta)$. Z Lindelöfovy vlastnosti plyne, že Ω lze pokrýt spočetně mnoha příslušnými okolími $U(x,\delta)$. Existuje tedy $U(z,\delta)$ takové, že $U(z,\delta) \subset \Omega$, f je integrovatelná na $U(z,\delta)$ a f není nulová s. v. na $U(z,\delta)$. Proto existuje měřitelná množina $E \subset U(z,\delta)$ taková, že $\int_E f \, d\lambda \neq 0$ ([R, Věta 1.39]).

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že E je borelovská ([R, Věta 2.20]). Definujme nyní borelovskou komplexní míru μ na $U(z,\delta)$ předpisem $\mu(A) = \int_A f \, d\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset U(z,\delta)$ (že je to míra plyne z Věty 13.35). Protože μ je nenulová ($\mu(E) = \int_E f \, d\lambda \neq 0$), existuje dle (a) nezáporná funkce $\varphi \in \mathcal{D}(U(z,\delta),\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(\Omega,\mathbb{R})$ taková, že $\int_{U(z,\delta)} \varphi \, d\mu \neq 0$. Tedy dle Věty 13.35 máme $0 \neq \int_{U(z,\delta)} \varphi \, d\mu = \int_{U(z,\delta)} \varphi f \, d\lambda = \int_\Omega \varphi f \, d\lambda = 0$, což je spor s předpokladem.

(c) Stačí dokázat, že za daných předpokladů je $\mu \ll \lambda$. Pak totiž dle Radonovy-Nikodymovy věty existuje $h \in L_1(\lambda,\Omega)$ taková, že $\mu(A) = \int_A h \, d\lambda$ pro každou $A \subset \Omega$ borelovskou. Protože díky Větě 13.35 je $\int_\Omega \varphi h \, d\lambda = \int_\Omega \varphi \, d\mu = \int_\Omega \varphi f \, d\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, je dle (b) $f = h$ skoro všude.

Předpokládejme, že existuje $E \subset \Omega$ borelovská taková, že $\lambda(E) = 0$ a $\mu(E) \neq 0$. Dle Věty 13.22 je $|\mu|$ těsná a zevně regulární. Existuje tedy kompaktní $K \subset E$ taková, že $|\mu|(E\setminus K) = |\mu|(E) - |\mu|(K) < |\mu(E)|$. Pak $\delta = |\mu(K)| = |\mu(E) - \mu(E \setminus K)| \geq |\mu(E)| - |\mu(E \setminus K)| \geq |\mu(E)| - |\mu|(E \setminus K) > 0$. Dále díky kompaktnosti K existuje otevřená $U \supset K$ taková, že $\int_U |f| \, d\lambda$ je konečný. Protože $\int_K |f| \, d\lambda = 0$, z absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu a vnější regularity λ plyne existence otevřené $G \supset K$ takové, že $\int_G |f| \, d\lambda < \frac{\delta}{2}$. Konečně, z vnější regularity $|\mu|$ plyne existence otevřené H takové, že $K \subset H \subset G$ a $|\mu|(H \setminus K) < \frac{\delta}{2}$. Dle Důsledku 3 existuje $\varphi \in \mathcal{D}(H)$ taková, že $0 \leq \varphi \leq 1$ a $\varphi = 1$ na K. Dostáváme tak (s využitím Důsledku 13.37), že

$$\begin{aligned}
\delta = |\mu(K)| &= \left|\int_K \varphi \, d\mu\right| = \left|\int_H \varphi \, d\mu - \int_{H\setminus K} \varphi \, d\mu\right| \leq \left|\int_H \varphi \, d\mu\right| + \left|\int_{H\setminus K} \varphi \, d\mu\right| \leq \\
&\leq \left|\int_\Omega \varphi \, d\mu\right| + \int_{H\setminus K} \varphi \, d|\mu| = \left|\int_\Omega f\varphi \, d\lambda\right| + \int_{H\setminus K} \varphi \, d|\mu| \leq \left|\int_H f\varphi \, d\lambda\right| + |\mu|(H \setminus K) < \\
&< \int_H |f| \, d\lambda + \frac{\delta}{2} < \delta,
\end{aligned}$$

což je spor.

□

1. Slabé derivace

Pracujeme-li s funkcemi tak, jak bylo naznačeno v úvodu, tj. pomocí integrálních průměrů dle testovacích funkcí, pak by se nám hodilo v tomto systému vyvinout např. něco jako diferenciální kalkulus. Opět, nemusí nás zajímat, jak je derivace definována bodově (ani to nejde, neboť samotné funkce nejsou definovány bodově), spíše nás zajímá, jak se „něco jako derivace" chová v průměru. Protože nemáme k dispozici bodové hodnoty, první potíží je, jakým způsobem vůbec „derivaci" definovat. Samozřejmě pro hladké funkce by vše mělo fungovat jako v klasickém případě.

Následující pozorování nám dává nápovědu, jak k problému přistoupit. Též je vidět, proč je výhodné za prostor testovacích funkcí zvolit funkce hladké a s kompaktním nosičem.

TVRZENÍ 4. *Nechť* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *a* $f \in C^1((a,b))$. *Pak*

$$\int_a^b f'\varphi \, d\lambda = -\int_a^b f\varphi' \, d\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$.

DŮKAZ. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Pro platnost vzorce je klíčový fakt, že $\operatorname{supp}\varphi$ leží uvnitř (a,b), tj. existuje uzavřený interval $[c,d] \subset (a,b)$ takový, že $\operatorname{supp}\varphi \subset [c,d]$. Funkce $f\varphi$ je tedy rovna 0 na (a,c) a (d,b), odkud plyne, že $\lim_{x\to a+} f\varphi(x) = \lim_{x\to b-} f\varphi(x) = 0$ a $\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_c^d f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda \in \mathbb{R}$. Funkce f, f', φ, φ' jsou spojité, podle věty o integraci per partes tedy máme $\int_a^b f'\varphi \,\mathrm{d}\lambda = [f\varphi]_a^b - \int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$.
□

DEFINICE 5. Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$. Řekneme, že funkce $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ je slabou derivací funkce f, jestliže

$$\int_a^b g\varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Řekneme, že borelovská komplexní míra μ na (a,b) je slabou derivací funkce f, jestliže

$$\int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\mu = -\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$.

Následující věta plyne ihned z Lemmatu 1.

VĚTA 6. *Slabá derivace funkce $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ je určena jednoznačně. Přesněji, jsou-li $g_1, g_2 \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ slabou derivací f, pak $g_1 = g_2$ skoro všude. Jsou-li borelovské komplexní míry μ_1, μ_2 na (a,b) slabou derivací f, pak $\mu_1 = \mu_2$. Jsou-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ a borelovská komplexní míra μ na (a,b) slabou derivací f, pak $g \in L_1((a,b))$ a $\mu(A) = \int_A g \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset (a,b)$.*

PŘÍKLAD 7. Slabou derivací funkce $f(x) = |x|$ na $\mathbb{R}$ je funkce sgn: Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ libovolná, pak

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{-\infty}^0 -x\varphi'(x) \,\mathrm{d}\lambda + \int_0^\infty x\varphi'(x) \,\mathrm{d}\lambda = \\ &= [-x\varphi(x)]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 -\varphi(x) \,\mathrm{d}x + [x\varphi(x)]_0^\infty - \int_0^\infty \varphi(x) \,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x) \,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Slabou derivací funkce $f(x) = \operatorname{sgn} x$ na $\mathbb{R}$ je míra $2\delta_0$: Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ libovolná, pak

$$\int_{\mathbb{R}} f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_{-\infty}^0 -\varphi' \,\mathrm{d}\lambda + \int_0^\infty \varphi' \,\mathrm{d}\lambda = [-\varphi]_{-\infty}^0 + [\varphi]_0^\infty = -\varphi(0) - \varphi(0) = -2\varphi(0) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi \,\mathrm{d}(2\delta_0).$$

TVRZENÍ 8. *Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$. Pak f má nulovou slabou derivaci, právě když je s. v. konstantní (tj. existuje $c \in \mathbb{K}$ taková, že $f = c$ s. v. na (a,b)).*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je $\int_a^b f\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b c\varphi' \,\mathrm{d}\lambda = c[\varphi]_a^b = 0 = -\int_a^b 0\varphi \,\mathrm{d}\lambda$.

$\Rightarrow$ Nechť $\varphi_0 \in \mathcal{D}((a,b))$ je libovolná funkce splňující $\int_a^b \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = 1$. Položme $c = \int_a^b f\varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda$. Ukážeme, že $f = c$ s. v. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je libovolná. Položme $\psi(x) = \int_a^x \varphi \,\mathrm{d}\lambda - \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \int_a^x \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda$ pro $x \in (a,b)$. Pak $\psi'(x) = \varphi(x) - \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \varphi_0(x)$ pro každé $x \in (a,b)$. Zjevně $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Nechť $\alpha, \beta \in (a,b)$ jsou taková, že $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\varphi_0 \subset [\alpha,\beta]$. Zjevně $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in (a,\alpha)$. Protože $\int_a^x \varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda$ a $\int_a^x \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = 1$ pro každé $x \in (\beta,b)$, je též $\psi(x) = 0$ pro $x \in (\beta,b)$. Tedy $\psi \in \mathcal{D}((a,b))$. Dle definice slabé derivace tak platí $\int_a^b f\psi' \,\mathrm{d}\lambda = 0$. Proto $\int_a^b f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f\big(\psi' + \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \varphi_0\big) \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\lambda \cdot \int_a^b f\varphi_0 \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b c\varphi \,\mathrm{d}\lambda$. Dle Lemmatu 1(b) odtud plyne, že $f = c$ s. v.
□

V reálné analýze se dokazuje následující výsledek:

VĚTA 9. *Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$.*

(a) *Je-li f absolutně spojitá na $[a,b]$, pak má vlastní derivaci s. v., $f' \in L_1((a,b))$ a f' je slabou derivací f. Obráceně, má-li f slabou derivaci $g \in L_1((a,b))$, pak existuje funkce f_0 absolutně spojitá na $[a,b]$ taková, že $f = f_0$ s. v. Potom je $g = f_0'$ s. v.*

Obecněji, f má slabou derivaci v $L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$, právě když existuje funkce f_0 lokálně absolutně spojitá na (a,b) taková, že $f = f_0$ s. v.

(b) *Funkce f má slabou derivaci rovnou borelovské komplexní míře μ na (a,b), právě když existuje funkce f_0 konečné variace na $[a,b]$ taková, že $f = f_0$ s. v. V tom případě pro každý podinterval $(c,d) \subset (a,b)$ platí $\mu((c,d)) = [f_0]_c^d$.*

■■■[odkaz?]

Poznámka. Obecně neplatí, že má-li funkce f na (a,b) vlastní derivaci f' s. v., pak f' je slabou derivací f na (a,b): Je-li f Cantorova funkce na $[0,1]$, pak $f' = 0$ s. v., ale f nemá nulovou slabou derivaci na $(0,1)$, neboť by dle Tvrzení 8 musela být s. v. konstantní, což není. Na druhou stranu, f má konečnou variaci, a tedy dle Věty 9 je její slabou derivací jistá míra na $(0,1)$.

2. Prostor testovacích funkcí a distribuce

Definice 10. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ položme

$$\|\varphi\|_N = \max_{|\alpha| \le N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Pro $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pak definujeme

$$\rho(\varphi,\psi) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}.$$

Funkce $\|\cdot\|_N$ a ρ jsou zjevně dobře definované nezáporné funkce. Dále snadno nahlédneme, že každá z funkcí $\|\cdot\|_N$ je normou na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ se ovšem může stát, že limita posloupnosti funkcí z $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ v normě $\|\cdot\|_N$ není C^∞-hladká. To je důvod k zavedení ρ.

Věta 11. *Funkce ρ je translačně invariantní metrika na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tato metrika má následující vlastnosti:*

(a) *Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
   (i) *$\varphi_n \to \varphi$ v metrice ρ.*
   (ii) *$\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$ pro každé $N \in \mathbb{N}_0$.*
   (iii) *Pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Vektorové operace na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (sčítání a násobení skalárem) jsou v ρ spojité.*

(c) *Je-li α multiindex délky d, pak zobrazení $\varphi \mapsto D^\alpha\varphi$ je spojité jakožto zobrazení z $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d),\rho)$ do $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d),\rho)$.*

(d) *Pro každou kompaktní $K \subset \mathbb{R}^d$ je $(\mathcal{D}(K),\rho)$ úplný metrický prostor.*

Poznamenejme, že je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, pak na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ metrika ρ není úplná. To je zdrojem potíží, jak uvidíme dále.

Důkaz. Celkem snadno je vidět, že ρ je translačně invariantní metrika. (Pro trojúhelníkovou nerovnost využijeme toho, že $\|\cdot\|_N$ jsou normy, spolu s nerovností $\min\{a+b,1\} \le \min\{a,1\} + \min\{b,1\}$ platnou pro libovolná $a,b \in [0,+\infty)$.)

(a) (i)⇒(ii) Nechť $N \in \mathbb{N}_0$. Je-li $\rho(\varphi_n,\varphi) \to 0$, pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\rho(\varphi_n,\varphi) < \frac{1}{2^N}$ pro $n \ge n_0$. Pak pro $n \ge n_0$ máme $\min\{\|\varphi_n - \varphi\|_N, 1\} \le 2^N \rho(\varphi_n,\varphi) < 1$, odkud plyne, že $\|\varphi_n - \varphi\|_N \le 2^N \rho(\varphi_n,\varphi)$. Podle věty o dvou policajtech tedy $\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$.

(ii)⇒(i) Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje N_0 takové, že $\frac{1}{2^{N_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\|\varphi_n - \varphi\|_N < \frac{\varepsilon}{4}$ pro každé $n \ge n_0$ a $N \in \{0,\dots,N_0\}$. Pak $\rho(\varphi_n,\varphi) = \sum_{N=0}^{N_0} \frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi_n - \varphi\|_N, 1\} + \sum_{N=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi_n - \varphi\|_N, 1\} < \sum_{N=0}^{N_0} \frac{1}{2^N}\frac{\varepsilon}{4} + \sum_{N=N_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^N} < 2\frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2^{N_0}} < \varepsilon$ pro každé $n \ge n_0$.

Ekvivalence (ii)$\Leftrightarrow$(iii) je zjevná.

(b) a (c) plynou snadno z (a) (iii).

(d) Nechť $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(K)$ je cauchyovská posloupnost v metrice ρ. Podobně jako v důkazu (i)$\Rightarrow$(ii) výše odvodíme, že potom $\{\varphi_n\}$ je cauchyovská v každé z norem $\|\cdot\|_N$, $N \in \mathbb{N}_0$. Odtud plyne, že pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ je posloupnost $\{D^\alpha \varphi_n\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v Banachově prostoru $C_b(\mathbb{R}^d)$. Tedy existuje funkce $\psi_\alpha \in C_b(\mathbb{R}^d)$ taková, že $D^\alpha \varphi_n \to \psi_\alpha$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Speciálně, pro $\varphi = \psi_0$ platí, že $\varphi_n \to \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Podle klasické věty z analýzy pak $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.■■■[bylo jen na $\mathbb{R}$!!!] Odtud plyne, že $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha \varphi = \psi_\alpha$, tedy $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Protože $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je i $\operatorname{supp} \varphi \subset K$, a tedy $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Konečně, z (a) plyne, že $\varphi_n \to \varphi$ v metrice ρ.

□

DEFINICE 12. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Řekneme, že funkcionál $\Phi\colon \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ je spojitý, pokud pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $\Phi\restriction_{(\mathcal{D}(K),\rho)}$ spojitá. Spojité lineární funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$ se nazývají distribuce na Ω. Množinu všech distribucí na Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)^*$.

Snadno je vidět, že $\mathcal{D}(\Omega)^*$ tvoří vektorový prostor.

VĚTA 13. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(ii) Λ je spojitý v 0, tj. pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní a pro každou posloupnost $\{\varphi_n\} \subset (\mathcal{D}(K), \rho)$ konvergující k 0 platí $\Lambda(\varphi_n) \to 0$.

(iii) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

DŮKAZ. (i) $\Rightarrow$ (ii) je zřejmá.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Jestliže (iii) neplatí, pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ existuje funkce $\varphi_N \in \mathcal{D}(K)$ splňující $|\Lambda(\varphi_N)| > 2^N \|\varphi_N\|_N$. Speciálně, $\varphi_N \neq 0$, a tedy $\|\varphi_N\|_N > 0$. Položme $\psi_N = \frac{\varphi_N}{2^N \|\varphi_N\|_N}$ pro $N \in \mathbb{N}_0$. Pak $\psi_N \in \mathcal{D}(K)$ a je-li $M \in \mathbb{N}_0$ libovolné pevné, pak pro $N \geq M$ je $\|\psi_N\|_M \leq \|\psi_N\|_N = \frac{1}{2^N}$, a tedy $\lim_{N\to\infty} \|\psi_N\|_M = 0$. Podle Věty 11(a) je $\psi_N \to 0$ v metrice ρ, a tedy $\Lambda(\psi_N) \to 0$ dle (ii). To je ovšem spor, neboť $|\Lambda(\psi_N)| = \frac{|\Lambda(\varphi_N)|}{2^N \|\varphi_N\|_N} > 1$ pro každé $N \in \mathbb{N}_0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní a $\varphi_n \to \varphi$ v $(\mathcal{D}(K), \rho)$. Nechť $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ jsou konstanty z (iii). Pak $|\Lambda(\varphi_n) - \Lambda(\varphi)| = |\Lambda(\varphi_n - \varphi)| \leq C\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$, tedy $\Lambda(\varphi_n) \to \Lambda(\varphi)$. Dle definice odtud plyne, že Λ je spojitý.

□

Konstanty N a C z (iii) v předchozí větě obecně závisejí na volbě kompaktní podmnožiny $K \subset \Omega$. Někdy se ovšem může stát, že hodnota N na volbě K nezávisí:

DEFINICE 14. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \geq 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, potom nejmenší N s touto vlastností nazveme řádem distribuce Λ. Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

PŘÍKLADY 15. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.

- Nechť $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Definujme
$$\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda$$
pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak Λ_f je distribuce na Ω řádu 0. Vskutku, pro libovolnou $K \subset \Omega$ kompaktní a $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ je $|\Lambda_f(\varphi)| \leq \int_K |f\varphi| \,\mathrm{d}\lambda \leq \|\varphi\|_0 \int_K |f| \,\mathrm{d}\lambda$.
- Nechť μ je borelovská komplexní míra na Ω. Definujme
$$\Lambda_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak Λ_μ je distribuce na Ω řádu 0. Vskutku, pro libovolnou $K \subset \Omega$ kompaktní a $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ je $|\Lambda_\mu(\varphi)| \leq \int_\Omega |\varphi| \,\mathrm{d}|\mu| \leq \|\varphi\|_0 |\mu|(\Omega) = \|\mu\| \|\varphi\|_0$.

- Nechť $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $\Lambda(\varphi) = \varphi^{(k)}(0)$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je distribuce na $\mathbb{R}$ řádu k. Vskutku, zjevně $|\Lambda(\varphi)| = |\varphi^{(k)}(0)| \leq \|\varphi\|_k$. Na druhou stranu, nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je taková, že $\varphi = 1$ na $(-1, 1)$. Položme $\psi_n(x) = \frac{1}{n^{k-1}} \sin(nx)$ pro k liché, resp. $\psi_n(x) = \frac{1}{n^{k-1}} \cos(nx)$ pro k sudé. Pak pro $\varphi_n = \varphi \cdot \psi_n \in \mathcal{D}(\operatorname{supp} \varphi)$ je $|\Lambda(\varphi_n)| = |\psi_n^{(k)}(0)| = n$, zatímco z Leibnizova[1] vzorce plyne, že posloupnost $\{\|\varphi_n\|_{k-1}\}_{n=1}^\infty$ je omezená. Tedy Λ není řádu $k - 1$.
- Zobrazení $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \varphi^{(n)}(n)$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ je distribuce na $\mathbb{R}$ řádu ∞. Vskutku, nejprve si uvědomme, že funkcionál Λ je dobře definován, neboť pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ obsahuje řada v definici pouze konečně mnoho nenulových členů. Dále, je-li $K \subset \mathbb{R}$ kompaktní, pak existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset [-N, N]$. Pro $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ pak platí $|\Lambda(\varphi)| = \left|\sum_{n=1}^N \varphi^{(n)}(n)\right| \leq \sum_{n=1}^N |\varphi^{(n)}(n)| \leq N\|\varphi\|_N$. Konečně, pro libovolné pevné $N \in \mathbb{N}_0$ zkonstruujeme podobně jako v předchozím příkladu posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}([N + 1 - \frac{1}{2}, N + 1 + \frac{1}{2}])$ takovou, že $\|\varphi_n\|_N \leq 1$, ale $\Lambda(\varphi_n) = \varphi_n^{(N+1)}(N + 1) \to +\infty$. Tedy Λ není konečného řádu.

POZNÁMKA 16. Dle příkladu výše lze každou lokálně integrovatelnou funkci, resp. každou komplexní borelovskou míru na Ω chápat jako distribuci. V tomto smyslu jsou tedy distribuce zobecněním funkcí i zobecněním měr. Z Lemmatu 1 plynou následující pozorování:

- Jsou-li $f, g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ takové, že $\Lambda_f = \Lambda_g$, pak $f = g$ s. v.
- Jsou-li borelovské komplexní míry μ, ν na Ω takové, že $\Lambda_\mu = \Lambda_\nu$, pak $\mu = \nu$.
- Jsou-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a borelovská komplexní míra μ na Ω takové, že $\Lambda_f = \Lambda_\mu$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.

Jinými slovy, zobrazení $f \mapsto \Lambda_f$ a $\mu \mapsto \Lambda_\mu$ jsou prostá, neboli různé funkce (ve smyslu tříd ekvivalence s. v.) a různé míry určují různé distribuce.

3. Operace s distribucemi

Jako motivace pro definici derivací distribuce nám bude sloužit následující lemma.

LEMMA 17. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ má všechny derivace až do řádu k omezené a nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq k$. Pak*

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \varphi \,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

DŮKAZ. Důkaz provedeme indukcí dle $|\alpha|$. Pro $|\alpha| = 0$ je vzorec triviálně platný. Nechť nyní $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $0 < |\alpha| \leq k$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolné $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ takové, že $|\beta| < |\alpha|$. Nechť $j \in \{1, \dots, d\}$ je nejmenší takové, že $\alpha_j > 0$. Pak $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$, přičemž $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1$. Je-li tedy $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak díky Lemmatu 5.22 a s využitím indukčního předpokladu obdržíme

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \varphi \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial D^{\alpha - e_j} f}{\partial x_j} \varphi \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} D^{\alpha - e_j} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \,\mathrm{d}\lambda = \\ &= -(-1)^{|\alpha| - 1} \int_{\mathbb{R}^d} f D^{\alpha - e_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}\lambda,\end{aligned}$$

přičemž poslední rovnost platí díky větě o záměnnosti parciálních derivací.

□

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz

DEFINICE 18. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pro multiindex α délky d definujeme derivaci D^α distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(D^\alpha \Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha \varphi).$$

Pro funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ definujeme součin funkce f a distribuce Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi).$$

V případě, že $d = 1$, používáme pro derivace distribucí klasické značení, tj. $D^1\Lambda = \Lambda'$, $D^2\Lambda = \Lambda''$, $D^k\Lambda = \Lambda^{(k)}$, apod.

TVRZENÍ 19. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $f \in C^\infty(\Omega)$. Pak platí:*

(a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
(b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.
(c) Je-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.
(d) Je-li $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, pak $D^\alpha \Lambda_g = \Lambda_{D^\alpha g}$.
(e) Je-li $d = 1$, $\Omega = (a, b)$ a $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, pak
- *$\Lambda'_g = \Lambda_h$, kde $h \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, právě když h je slabou derivací g;*
- *$\Lambda'_g = \Lambda_\mu$, kde μ je borelovská komplexní míra na (a, b), právě když μ je slabou derivací g.*

Pro důkaz (b) budeme potřebovat následující kvalitativní verzi Leibnizova vzorce:

FAKT 20. *Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Pak existují konstanty $c^\alpha_{\beta,\gamma} \in \mathbb{N}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{N}_0^d$, $|\beta| + |\gamma| \le |\alpha|$ takové, že pro každou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a každé $f, g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ platí*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma} D^\beta f D^\gamma g.$$

DŮKAZ. Důkaz se snadno provede indukcí dle $|\alpha|$. Pro $|\alpha| = 0$ je vzorec triviálně platný s konstantou $c^0_{0,0} = 1$. Nechť nyní $|\alpha| > 0$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro multiindexy menšího řádu. Nechť $j \in \{1, \ldots, d\}$ je nejmenší takové, že $\alpha_j > 0$. Pak $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} D^{\alpha - e_j}$, přičemž $|\alpha - e_j| = |\alpha| - 1$, a tedy dle indukčního předpokladu máme

$$D^\alpha(fg) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Bigg(\sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|-1}} c^{\alpha-e_j}_{\beta,\gamma} D^\beta f D^\gamma g \Bigg) = \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|-1}} c^{\alpha-e_j}_{\beta,\gamma} \frac{\partial (D^\beta f D^\gamma g)}{\partial x_j} =$$
$$= \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|-1}} c^{\alpha-e_j}_{\beta,\gamma} \big(D^{\beta+e_j} f D^\gamma g + D^\beta f D^{\gamma+e_j} g \big),$$

přičemž poslední rovnost platí díky větě o záměnnosti parciálních derivací. Odtud již snadno plyne požadovaný vzorec.

□

DŮKAZ TVRZENÍ 19. (a) Funkcionál $D^\alpha\Lambda$ je zjevně lineární. Dále použijeme charakterizaci (iii) z Věty 13. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní a $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \ge 0$ jsou příslušné konstanty pro distribuci Λ. Pak pro $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ máme $|(D^\alpha\Lambda)(\varphi)| = |(-1)^\alpha \Lambda(D^\alpha\varphi)| \le C\|D^\alpha\varphi\|_N \le C\|\varphi\|_{N+|\alpha|}$. Tedy $D^\alpha\Lambda$ též splňuje podmínku (iii).

(b) Funkcionál $f\Lambda$ je zjevně lineární. Dále použijeme charakterizaci (iii) z Věty 13. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní a $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \ge 0$ jsou příslušné konstanty pro distribuci Λ. Pak pro $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ díky Faktu 20 platí

$$|(f\Lambda)(\varphi)| = |\Lambda(f\varphi)| \le C\|f\varphi\|_N = C\max_{|\alpha|\le N}\|D^\alpha(f\varphi)\|_\infty \le C\max_{|\alpha|\le N}\sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma}\|D^\beta f D^\gamma\varphi\|_\infty \le$$
$$\le C\|\varphi\|_N\max_{|\alpha|\le N}\sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma}\max_{x\in K}|D^\beta f(x)|.$$

Tedy $f\Lambda$ též splňuje podmínku (iii).

(c) Je-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak i $fg \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí $(f\Lambda_g)(\varphi) = \Lambda_g(f\varphi) = \int_\Omega gf\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \Lambda_{fg}(\varphi)$.

(d) Je-li $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, pak $D^\alpha g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, a tedy $\Lambda_{D^\alpha g}$ je definována. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je libovolná. Dle Důsledku 3 existují $U \subset \Omega$ otevřená, $U \supset \operatorname{supp}\varphi$ a $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\psi = 1$ na U. Definujme $\tilde{g}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ předpisem $\tilde{g} = \psi g$ na Ω a $\tilde{g} = 0$ mimo Ω. Snadno nahlédneme, že $\tilde{g} \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$, neboť je nulová na otevřené množině $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\psi$ obsahující $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Dále $\operatorname{supp}\tilde{g} \subset \operatorname{supp}\psi$, tedy $\tilde{g}$ má kompaktní nosič, odkud plyne, že všechny parciální derivace $\tilde{g}$ až do řádu $|\alpha|$ jsou omezené. Uvědomíme-li si ještě, že $\tilde{g} = g$ na U a díky otevřenosti U je i $D^\alpha\tilde{g} = D^\alpha g$ na U, můžeme využít Lemma 17 k výpočtu

$$D^\alpha\Lambda_g(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda_g(D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega gD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|}\int_U gD^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= (-1)^{|\alpha|}\int_U \tilde{g}D^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d}\tilde{g}D^\alpha\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha\tilde{g}\varphi\,\mathrm{d}\lambda =$$
$$= \int_U D^\alpha\tilde{g}\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_U D^\alpha g\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega D^\alpha g\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \Lambda_{D^\alpha g}(\varphi).$$

(e) Nechť $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$. Pak $\Lambda_g'(\varphi) = -\Lambda_g(\varphi') = -\int_a^b g\varphi'\,\mathrm{d}\lambda$. Na druhou stranu, pro $h \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$ je $\Lambda_h(\varphi) = \int_a^b h\varphi\,\mathrm{d}\lambda$. Tedy $\Lambda_g' = \Lambda_h$, právě když pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$ je $\int_a^b h\varphi\,\mathrm{d}\lambda = -\int_a^b g\varphi'\,\mathrm{d}\lambda$, neboli právě když h je slabou derivací g. Analogicky pro borelovskou komplexní míru μ. □

DEFINICE 21. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Řekneme, že posloupnost distribucí $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ konverguje k distribuci $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, pokud konverguje bodově, tj. pokud $\Lambda_n(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

TVRZENÍ 22. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Pak platí:*

(a) Jestliže posloupnost $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ konverguje k $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, pak
- *$D^\alpha\Lambda_n \to D^\alpha\Lambda$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$,*
- *$f\Lambda_n \to f\Lambda$ pro každou funkci $f \in C^\infty(\Omega)$.*

(b) Jsou-li $f_n, f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a jestliže pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ platí $\int_K|f_n - f|\,\mathrm{d}\lambda \to 0$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.
(c) Je-li $K \subset \Omega$ kompaktní a $\varphi_n \to \varphi$ v $(\mathcal{D}(K),\rho)$, pak $\Lambda_{\varphi_n} \to \Lambda_\varphi$.
(d) Je-li $1 \le p \le \infty$ a $f_n \to f$ v $L_p(\Omega)$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

DŮKAZ. (a) Pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $D^\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a tedy platí $D^\alpha\Lambda_n(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda_n(D^\alpha\varphi) \to (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi) = D^\alpha\Lambda(\varphi)$. Podobně, pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a tedy platí $(f\Lambda_n)(\varphi) = \Lambda_n(f\varphi) \to \Lambda(f\varphi) = (f\Lambda)(\varphi)$.

(b) Pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $|\Lambda_{f_n}(\varphi) - \Lambda_f(\varphi)| = \left|\int_\Omega f_n\varphi\,\mathrm{d}\lambda - \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{d}\lambda\right| \le \int_{\operatorname{supp}\varphi}|f_n - f||\varphi|\,\mathrm{d}\lambda \le \|\varphi\|_\infty\int_{\operatorname{supp}\varphi}|f_n - f|\,\mathrm{d}\lambda \to 0$.

(c) plyne ihned z (b), neboť $\varphi_n \to \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(d) plyne ihned z (b), neboť pro $K \subset \Omega$ kompaktní platí díky Hölderově nerovnosti (pro $1 < p < \infty$) $\int_K|f_n - f|\,\mathrm{d}\lambda = \int_K|f_n - f|\cdot 1\,\mathrm{d}\lambda \le \left(\int_K|f_n - f|^p\,\mathrm{d}\lambda\right)^{1/p}\left(\int_K 1^q\,\mathrm{d}\lambda\right)^{1/q} \le \|f_n - f\|_{L_p}\lambda(K)^{1/q}$, kde q je sdružený exponent k p. Uvědomme si, že nerovnost mezi výrazy zcela vlevo a zcela vpravo platí i v případě, že $p = 1$ nebo $p = \infty$.

$\square$

VĚTA 23. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\{\Lambda_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)^*$ taková, že pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existuje $\Lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi)$. Pak $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.*

DŮKAZ. Díky linearitě distribucí Λ_n a větě o aritmetice limit snadno nahlédneme, že Λ je lineární forma na $\mathcal{D}(\Omega)$. Spojitost Λ je přímým důsledkem Baireovy věty o bodech spojitosti funkcí 1. Baireovy třídy. Zde podáme alternativní důkaz pomocí charakterizace (iii) z Věty 13. Nechť $K \subset \Omega$ je kompaktní. Pro $k \in \mathbb{N}$ položme $A_k = \{\varphi \in \mathcal{D}(K);\ |\Lambda_n(\varphi)| \le k \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n=1}^\infty \{\varphi \in \mathcal{D}(K);\ |\Lambda_n(\varphi)| \le k\}$. Každá z množin A_k je uzavřená v $(\mathcal{D}(K), \rho)$, neboť $\Lambda_n \restriction_{\mathcal{D}(K)}$ jsou spojité. Dále $\mathcal{D}(K) = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, neboť pro pevné $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ je posloupnost $\{\Lambda_n(\varphi)\}$ konvergentní, a tedy omezená. Prostor $(\mathcal{D}(K), \rho)$ je úplný (Věta 11(d)), podle důsledku Baireovy věty (Důsledek 13.11) tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že A_k má neprázdný vnitřek. Nechť $\psi \in \mathcal{D}(K)$ a $\delta > 0$ jsou taková, že $B(\psi, \delta) \subset A_k$.

Uvědomme si, že je-li $\varphi \in A_k$, pak $|\Lambda(\varphi)| \le k$. Nalezněme $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že $\sum_{j=N+1}^\infty \frac{1}{2^j} < \frac{\delta}{2}$. Nechť nyní $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, $\varphi \neq 0$. Položme $\tilde{\varphi} = \frac{\delta}{4\|\varphi\|_N}\varphi$. Pak $\rho(\pm\tilde{\varphi}, 0) \le \sum_{j=0}^N \frac{1}{2^j}\|\tilde{\varphi}\|_j + \sum_{j=N+1}^\infty \frac{1}{2^j} 1 \le 2\|\tilde{\varphi}\|_N + \frac{\delta}{2} = \delta$, takže $\psi \pm \tilde{\varphi} \in B(\psi, \delta) \subset A_k$. Odtud plyne, že $|\Lambda(\tilde{\varphi})| = \left|\Lambda\left(\frac{1}{2}(\tilde{\varphi} + \psi + \tilde{\varphi} - \psi)\right)\right| \le \frac{1}{2}\bigl(|\Lambda(\psi + \tilde{\varphi})| + |\Lambda(\psi - \tilde{\varphi})|\bigr) \le k$, a tedy $|\Lambda(\varphi)| = \frac{4}{\delta}\|\varphi\|_N |\Lambda(\tilde{\varphi})| \le \frac{4k}{\delta}\|\varphi\|_N$.

$\square$

DEFINICE 24. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Řekneme, že otevřená množina $G \subset \Omega$ je nulová pro Λ, jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

VĚTA 25. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Množina $G = \bigcup\{H \subset \Omega;\ H \text{ je nulová pro } \Lambda\}$ je nulová pro Λ a je to největší nulová množina pro Λ, tj. je-li $H \subset \Omega$ nulová pro Λ, pak $H \subset G$.*

DŮKAZ. Množina G je otevřená, neboť je sjednocením otevřených množin. Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, pak díky kompaktnosti $\operatorname{supp}\varphi$ existují otevřené množiny $H_1, \dots, H_n \subset \Omega$ nulové pro Λ takové, že $\operatorname{supp}\varphi \subset \bigcup_{j=1}^n H_j$. Stačí tedy ukázat, že konečné sjednocení množin nulových pro Λ je opět nulová množina pro Λ. Díky principu matematické indukce to stačí ukázat pro dvě množiny H_1, H_2.

Nechť tedy $\varphi \in \mathcal{D}(H_1 \cup H_2)$. Položme $K = \operatorname{supp}\varphi \setminus H_2$. Pak K je kompaktní a $K \subset H_1$. Dle Důsledku 3 existují $U \subset H_1$ otevřená, $U \supset K$ a $\psi \in \mathcal{D}(H_1)$ taková, že $\psi = 1$ na U. Funkce $(1-\psi)\varphi$ je nulová na U, a protože $\mathbb{R}^d \setminus U$ je uzavřená, je $\operatorname{supp}(1-\psi)\varphi \subset (\mathbb{R}^d \setminus U) \cap \operatorname{supp}\varphi \subset (\mathbb{R}^d \setminus K) \cap \operatorname{supp}\varphi \subset H_2$. Tedy $\psi\varphi \in \mathcal{D}(H_1)$ a $(1-\psi)\varphi \in \mathcal{D}(H_2)$, odkud dostáváme, že $\Lambda(\varphi) = \Lambda\bigl((1-\psi)\varphi + \psi\varphi\bigr) = \Lambda\bigl((1-\psi)\varphi\bigr) + \Lambda(\psi\varphi) = 0 + 0 = 0$.

To, že G je největší nulová pro Λ plyne přímo z definice G.

$\square$

DEFINICE 26. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Nosič distribuce Λ definujeme jako $\operatorname{supp}\Lambda = \Omega \setminus G$, kde G je největší nulová množina pro Λ.

Připomeňme, že je-li μ borelovská komplexní míra na Ω, pak její nosič je definován jako $\operatorname{supp}\mu = \Omega \setminus \bigcup\{G \subset \Omega \text{ otevřená};\ |\mu|(G) = 0\}$.

VĚTA 27. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω.*

(a) Je-li $f \in C(\Omega)$, pak $\operatorname{supp}\Lambda_f = \operatorname{supp} f$.
(b) Je-li μ borelovská komplexní míra na Ω, pak $\operatorname{supp}\Lambda_\mu = \operatorname{supp}\mu$.
(c) Pokud je $\operatorname{supp}\Lambda$ kompaktní, pak existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \ge 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \le C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Speciálně, Λ je konečného řádu.
(d) $\operatorname{supp}\Lambda = \{z\}$, právě když $\Lambda = \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha D^\alpha \Lambda_{\delta_z}$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a konstanty c_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \le N$ ne všechny nulové.

DŮKAZ. (a) Nechť $G \subset \Omega$ je největší nulová pro Λ_f Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \operatorname{supp} f)$, pak $\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0$, tedy $\Omega \setminus \operatorname{supp} f \subset G$, neboli $\operatorname{supp} \Lambda_f \subset \operatorname{supp} f$. Na druhou stranu $\Lambda_f \restriction_{\mathcal{D}(G)} = 0$, a tedy dle jednoznačnosti (viz Poznámku 16) je $f = 0$ s. v. na G. Ze spojitosti pak plyne, že $f = 0$ na G, neboli $\operatorname{supp} f \subset \Omega \setminus G = \operatorname{supp} \Lambda_f$.

(b) Nechť $G \subset \Omega$ je největší nulová pro Λ_μ a nechť $H = \bigcup\{U \subset \Omega$ otevřená; $|\mu|(U) = 0\}$. Je-li $U \subset \Omega$ otevřená taková, že $|\mu|(U) = 0$, a je-li $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, pak $|\Lambda_\mu(\varphi)| \le \int_\Omega |\varphi| \,\mathrm{d}|\mu| = 0$, a tedy $U \subset G$. Odtud plyne, že $H \subset G$. Na druhou stranu $\Lambda_\mu \restriction_{\mathcal{D}(G)} = 0$, a tedy dle jednoznačnosti (viz Poznámku 16) je $\mu\restriction_G = 0$, neboli $G \subset H$. Tedy $\operatorname{supp} \Lambda_\mu = \Omega \setminus G = \Omega \setminus H = \operatorname{supp} \mu$.

(c) Dle Důsledku 3 existují $U \subset \Omega$ otevřená, $U \supset \operatorname{supp} \Lambda$ a $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\psi = 1$ na U. Dle Věty 13 existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \ge 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \le C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\operatorname{supp} \psi)$. Z Faktu 20 analogicky jako v důkazu Tvrzení 19(b) plyne existence $D \ge 0$ takového, že $\|\psi\varphi\|_N \le D\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Nechť nyní $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je libovolná. Funkce $1 - \psi$ je nulová na U, a protože $\mathbb{R}^d \setminus U$ je uzavřená, je $\operatorname{supp}(1-\psi)\varphi \subset (\mathbb{R}^d \setminus U) \cap \operatorname{supp} \varphi \subset (\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp} \Lambda) \cap \Omega = \Omega \setminus \operatorname{supp} \Lambda$. Tedy $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\operatorname{supp} \psi)$ a $(1-\psi)\varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \operatorname{supp} \Lambda)$, odkud dostáváme, že $|\Lambda(\varphi)| = \big|\Lambda\big((1-\psi)\varphi + \psi\varphi\big)\big| = \big|\Lambda\big((1-\psi)\varphi\big) + \Lambda(\psi\varphi)\big| = |\Lambda(\psi\varphi)| \le C\|\psi\varphi\|_N \le CD\|\varphi\|_N$.

(d) bez důkazu.

□

Kapitola 7

Topologické vektorové prostory

1. Základní vlastnosti

DEFINICE 1 (Andrej Nikolajevič Kolmogorov[1] (1934)). Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a τ je topologie na X. Pokud jsou operace sčítání a násobení skalárem spojité jakožto zobrazení $+\colon X \times X \to X$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$, nazveme dvojici (X, τ) topologickým vektorovým prostorem.

Systém všech okolí bodu $x \in X$ značíme $\tau(x)$.

Jak je zvykem, budeme často v označení topologického vektorového prostoru (X, τ) vynechávat explicitní označení topologie, tj. budeme o tomto prostoru hovořit pouze jako o X. Pokud se v důkazu objeví symbol τ, pak pokud není řečeno jinak, míní se tím právě příslušná vektorová topologie na X.

PŘÍKLADY 2. Následující prostory jsou příklady topologických vektorových prostorů:

- Vektorový prostor s indiskrétní topologií.
- Normované lineární prostory (Tvrzení 1.2).
- Prostor $\mathbb{K}^\Gamma$ se součinovou topologií, kde Γ je libovolná neprázdná množina. Tento prostor lze též chápat jako prostor všech funkcí na Γ s topologií bodové konvergence. Viz Příklad 61.
- Prostor $C_{\mathrm{p}}(T)$ spojitých funkcí na topologickém prostoru T s topologií bodové konvergence (je to podprostor prostoru $\mathbb{K}^T$).
- Prostor $\mathcal{D}(A)$ s metrikou z Definice 6.10, kde $A \subset \mathbb{R}^d$ (Věta 6.11).
- Prostor $C(T)$, kde T je topologický prostor, s topologií stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách T (viz Příklad 9).
- Prostor $H(\Omega)$ funkcí holomorfních na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence (je to podprostor $C(\Omega)$ z příkladu výše).
- Prostor $L_p([0,1])$ pro $p \in (0,1)$ s metrikou $\rho(f,g) = \int_0^1 |f-g|^p$. Důkaz spolu s dalšími informacemi lze nalézt v Příkladu 54.

FAKT 3. *Nechť X je vektorový prostor a ρ je translačně invariantní pseudometrika na X. Pak*

(a) operace sčítání je spojitá jakožto zobrazení $+\colon (X,\rho) \times (X,\rho) \to (X,\rho)$;

(b) $\rho(nx, 0) \le n\rho(x, 0)$ pro každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $\{(x_n, y_n)\}$ je posloupnost v $X \times X$ konvergující k $(x, y) \in X \times X$ v součinové pseudometrice. Pak díky translační invarianci dostáváme $\rho(x_n + y_n, x + y) = \rho(x_n + y_n - x, y) = \rho(x_n - x, y - y_n) \le \rho(x_n - x, 0) + \rho(0, y - y_n) = \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0$.

(b) Použijeme matematickou indukci. Pro $n = 1$ nerovnost zjevně platí. Předpokládáme-li její platnost pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pak

$$\rho((n+1)x, 0) \le \rho((n+1)x, x) + \rho(x, 0) = \rho(nx, 0) + \rho(x, 0) \le n\rho(x, 0) + \rho(x, 0) = (n+1)\rho(x, 0).$$

$\square$

PŘÍKLAD 4. Uvažujme prostor $X = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{K};\ f \text{ měřitelná}\}$ s metrikou $\rho(f,g) = \int_0^1 \min\{|f - g|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda$ (ztotožňujeme přitom funkce rovnající se skoro všude). Pak X s topologií indukovanou metrikou ρ je topologický vektorový prostor a platí, že posloupnost $\{f_n\} \subset X$ konverguje k $f \in X$ v metrice ρ právě tehdy, když $f_n \to f$ v míře.

[1] Андрей Николаевич Колмогоров; topologii měl definovánu pomocí operátoru uzávěru.

Vskutku, snadno nahlédneme, že ρ je dokonce translačně invariantní metrika (využijeme nerovnost $\min\{a+b,1\} \leq \min\{a,1\} + \min\{b,1\}$ platnou pro každé $a, b \in [0,+\infty)$). Tedy je dle Faktu 3 operace $+$ na X spojitá. Nechť nyní $c_n \to c$ v $\mathbb{K}$ a $f_n \to f$ v ρ. Pak funkce $g_n = \min\{|c_n - c||f|, 1\}$ konvergují bodově k 0. Označme $M = 1 + \sup\{|c_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$. S využitím nerovnosti $\min\{Ma, 1\} \leq M \min\{a, 1\}$ platné pro každé $a \in [0,+\infty)$ a $M \in [1,+\infty)$ dostáváme

$$\rho(c_n f_n, cf) \leq \rho(c_n f_n, c_n f) + \rho(c_n f, cf) = \int_0^1 \min\{|c_n||f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda + \int_0^1 \min\{|c_n - c||f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda \leq$$
$$\leq \int_0^1 M \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda + \int_0^1 g_n\,\mathrm{d}\lambda = M\rho(f_n, f) + \int_0^1 g_n\,\mathrm{d}\lambda.$$

Jelikož $\int_0^1 g_n\,\mathrm{d}\lambda \to 0$ dle Lebesgueovy věty (integrovatelnou majorantou je konstantní 1), platí $\rho(c_n f_n, cf) \to 0$. Tedy i operace $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ je spojitá, neboli X je topologický vektorový prostor.

Nechť posloupnost $\{f_n\} \subset X$ konverguje k $f \in X$ v ρ. Ukážeme, že konverguje v míře, tj. že platí

$$\forall \varepsilon > 0\colon \lambda\big(\{x \in [0,1];\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\big) \to 0,$$

Nechť tedy $\varepsilon > 0$ je dáno. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $\varepsilon \leq 1$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $E_n = \{x \in [0,1];\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Pak

$$\lambda(E_n) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{E_n} \varepsilon\,\mathrm{d}\lambda \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{E_n} \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\varepsilon}\rho(f_n, f) \to 0.$$

Obráceně, nechť $f_n \to f$ v míře. Nechť $\varepsilon \in (0,1]$ je dáno a E_n jsou stejné množiny jako výše. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(E_n) < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Pro tato $n \in \mathbb{N}$ pak platí

$$\rho(f_n, f) = \int_0^1 \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{E_n} \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda + \int_{[0,1]\setminus E_n} \min\{|f_n - f|, 1\}\,\mathrm{d}\lambda \leq$$
$$\leq \int_{E_n} 1\,\mathrm{d}\lambda + \int_{[0,1]\setminus E_n} \varepsilon\,\mathrm{d}\lambda \leq \lambda(E_n) + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Tedy $f_n \to f$ v metrice ρ.

Nyní se podívejme na některé základní vztahy mezi vektorovými operacemi a topologií v topologickém vektorovém prostoru.

TVRZENÍ 5. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.*
(a) Je-li $a \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, jsou operace $x \mapsto x + a$ a $x \mapsto \lambda x$ homeomorfismy X na X.
(b) Pro každé $x \in X$ je $\tau(x) = x + \tau(0)$.
(c) Je-li $U \in \tau(0)$, pak existuje $V \in \tau(0)$ otevřené takové, že $V + V \subset U$.

DŮKAZ. (a) Spojité inverze k daným zobrazením jsou dány po řadě dány předpisy $y \mapsto y + (-a)$ a $y \mapsto \frac{1}{\lambda}y$.

(b) Nechť $y, z \in X$. Je-li $U \in \tau(y)$, pak $U + (z - y) \in \tau(z)$. Vskutku, existuje otevřená G taková, že $y \in G \subset U$. Podle (a) je množina $G + (z - y)$ otevřená a platí $z \in G + (z - y) \subset U + (z - y)$. Tedy $U + (z - y) \in \tau(z)$. Aplikujeme-li nyní tento poznatek po řadě na $y = x$, $z = 0$ a $y = 0$, $z = x$, obdržíme rovnost $\tau(x) = x + \tau(0)$.

(c) Nechť $U \in \tau(0)$. Jelikož $0 + 0 = 0$, ze spojitosti zobrazení $(x, y) \mapsto x + y$ v bodě $(0,0)$ dostáváme existenci otevřených $V_1, V_2 \in \tau(0)$ splňujících $V_1 + V_2 \subset U$. Položíme-li $V = V_1 \cap V_2$, pak V je otevřené okolí 0 a zjevně $V + V \subset U$.

□

Pro další studium topologických vektorových prostorů je vhodné zavést následující geometrické pojmy:

DEFINICE 6. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- pohlcující, pokud pro každé $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $tx \in A$ pro každé $t \in [0, \lambda_x]$;
- vyvážená, pokud $\alpha A \subset A$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$.

Všimněme si, že jednotková koule v normovaném lineárním prostoru je vyvážená a pohlcující. Dále, každá vyvážená množina je symetrická a obsahuje 0.

TVRZENÍ 7. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Každé $U \in \tau(0)$ je pohlcující.
(b) $\tau(0)$ má bázi z otevřených vyvážených množin.

DŮKAZ. (a) Nechť $U \in \tau(0)$ a $x \in X$ je dáno. Zobrazení $t \mapsto tx$ je spojité v bodě 0 a $U \in \tau(0x)$, tedy existuje $\lambda > 0$ takové, že $tx \in U$ kdykoli $|t| < \lambda$.

(b) Nechť $U \in \tau(0)$. Zobrazení $\cdot \colon \mathbb{K} \times X \to X$ je spojité v bodě $(0,0)$, tedy existují $\delta > 0$ a $V \in \tau(0)$ otevřené tak, že $tx \in U$ kdykoli $x \in V$ a $|t| < \delta$. Položíme $W = \bigcup_{|t|<\delta}(tV)$. Protože $0V = \{0\} \subset tV$ pro každé $0 < |t| < \delta$, je $W = \bigcup_{0<|t|<\delta}(tV)$, a tedy W je zjevně otevřené okolí 0 splňující $W \subset U$. Dále je-li $x \in W$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$, pak $x \in tV$ pro nějaké $t \in \mathbb{K}$, $|t| < \delta$. Tedy $\alpha x \in (\alpha t)V \subset W$, neboť $|\alpha t| \leq |t| < \delta$.

□

Následující věta ukazuje, že vlastnosti uvedené v Tvrzení 5(c) a Tvrzení 7 již charakterizují topologické vektorové prostory.

VĚTA 8 (John von Neumann (1935)). *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je systém podmnožin X obsahujících 0, který je bází filtru (tj. pro každá $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $U \subset U_1 \cap U_2$). Předpokládejme, že $\mathcal{U}$ má následující vlastnosti:*

(i) Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $V + V \subset U$.
(ii) Každá množina z $\mathcal{U}$ je pohlcující.
(iii) Každá množina z $\mathcal{U}$ je vyvážená.

Pak existuje právě jedna topologie τ na X taková, že (X, τ) je topologický vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0.

DŮKAZ. Definujme topologii τ pomocí systémů okolí takto: Nechť $\tau(0) = \{A \subset X;\ U \subset A \text{ pro nějaké } U \in \mathcal{U}\}$ a $\tau(x) = x + \tau(0)$ pro $x \in X$. Aby takto byla skutečně definována topologie, je nezbytné, aby pro každé $x \in X$ a $U \in \tau(x)$ existovalo $V \in \tau(x)$ takové, že $U \in \tau(y)$ pro každé $y \in V$. Ověřme tedy tuto podmínku: Je $U = x + W$ pro nějaké $W \in \tau(0)$, a tedy existuje $W' \in \mathcal{U}$ takové, že $W' \subset W$. Dle vlastnosti (i) existuje $V' \in \mathcal{U}$ takové, že $V' + V' \subset W'$. Položme $V = x + V'$. Pak $V \in \tau(x)$ a pro $y \in V$ je $y + V' \subset x + V' + V' \subset x + W' \subset x + W = U$, tedy $U \in \tau(y)$.

Nyní ukažme, že operace sčítání je spojitá. Nechť $x_1, x_2 \in X$ a $U \in \tau(x_1 + x_2)$. Pak existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $x_1 + x_2 + V \subset U$. Dle vlastnosti (i) existuje $W \subset \mathcal{U}$ takové, že $W + W \subset V$. Pak $x_1 + W \in \tau(x_1)$, $x_2 + W \in \tau(x_2)$ a $y + z \in x_1 + x_2 + W + W \subset x_1 + x_2 + V \subset U$ pro libovolné $y \in x_1 + W$ a $z \in x_2 + W$. Tím je spojitost sčítání v bodě $(x_1, x_2) \in X \times X$ ověřena.

Dále ověříme spojitost násobení skalárem. Nechť $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ a $x_0 \in X$. Pro dané $U \in \mathcal{U}$ stačí nalézt $\delta > 0$ a $V \in \mathcal{U}$ taková, že

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda - \lambda_0| < \delta \ \ \forall x \in x_0 + V \colon \lambda x \in \lambda_0 x_0 + U.$$

Díky (i) existuje $W \in \mathcal{U}$ takové, že $W + W \subset U$. Dle (ii) je W pohlcující, existuje tedy $\delta > 0$ tak, že $tx_0 \in W$ pro každé $t \in [0, \delta]$. Dle (iii) je W vyvážená, tedy dokonce $\alpha x_0 = \frac{\alpha}{\delta}\delta x_0 \in W$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq \delta$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $n \geq |\lambda_0| + \delta$. Pomocí (i) induktivně nalezneme $V \in \mathcal{U}$ tak, aby

$$\underbrace{V + V + \cdots + V}_{n \text{ krát}} \subset W.$$

Potom pro $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda - \lambda_0| < \delta$ a $x \in x_0 + V$ máme $\lambda(x - x_0) \in \lambda V = n(\frac{\lambda}{n}V) \subset nV \subset V + V + \cdots + V \subset W$, přičemž jsme využili jednak toho, že $\left|\frac{\lambda}{n}\right| \leq \frac{|\lambda_0|+\delta}{n} \leq 1$ a V je dle (iii) vyvážená, a jednak snadného faktu, že $nA \subset \underbrace{A + A + \cdots A}_{n \text{ krát}}$ pro libovolnou podmnožinu A vektorového prostoru. Tedy $\lambda x = \lambda_0 x_0 + \lambda(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0 \in \lambda_0 x_0 + W + W \subset \lambda_0 x_0 + U$.

Konečně, jednoznačnost plyne z toho, že je-li σ topologie na X taková, že (X, σ) je topologický vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0 pro topologii σ, pak nutně $\sigma(x) = \tau(x)$ pro každé $x \in X$ (Tvrzení 5(b)).

□

PŘÍKLAD 9. Nechť T je topologický prostor a $C(T)$ je vektorový prostor všech spojitých funkcí na T. Pro $K \subset T$ kompaktní a $\varepsilon > 0$ položme $U_{K,\varepsilon} = \{f \in C(T);\ \max_K |f| < \varepsilon\}$. Snadno ověříme, že systém $\mathcal{U} = \{U_{K,\varepsilon};\ K \subset T \text{ kompaktní}, \varepsilon > 0\}$ splňuje podmínky z Věty 8, a tedy generuje na $C(T)$ vektorovou topologii τ_{K} takovou, že $\mathcal{U}$ je bází okolí 0. Všimněme si, že je-li $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset C(T)$ net, pak $f_\gamma \to f$ v τ_{K}, právě když pro každou $K \subset T$ kompaktní a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\gamma_0 \in \Gamma$ takové, že pro každé $\gamma \geq \gamma_0$ je $\max_K |f_\gamma - f| < \varepsilon$, a tedy právě když $f_\gamma \to f$ stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině T.

Další informace o tomto prostoru se dozvíme v Příkladu 63.

Následující věta uvádí několik topologických oddělovacích vlastností lineárních topologií.

VĚTA 10. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $C \subset X$ je uzavřená a disjunktní s K. Pak existuje otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$.
(b) X je regulární (tj. lze oddělit bod a uzavřenou množinu pomocí otevřených množin).
(c) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:
  (i) X je Hausdorffův.
  (ii) X je T_1 (tj. body jsou uzavřené množiny).
  (iii) $\{0\}$ je uzavřená množina.
  (iv) $\{0\} = \bigcap\{U;\ U \in \tau(0)\}$.

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in K$, pak $X \setminus C$ je okolí x, a tedy dle Tvrzení 5(c) existuje otevřené $V_x \in \tau(0)$ splňující $x + V_x + V_x + V_x \subset X \setminus C$. Díky kompaktnosti K existují body $x_1, \ldots, x_n \in K$ takové, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i})$. Protože $\bigcap_{i=1}^n V_{x_i} \in \tau(0)$, existuje dle Tvrzení 7(b) otevřené vyvážené $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Dostáváme tak, že

$$K + V + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V + V) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i} + V_{x_i} + V_{x_i}) \subset X \setminus C.$$

Ze symetrie V pak plyne, že $(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$. Vskutku, je-li $x \in (K + V) \cap (C + V)$, pak $x = z + v = y + u$ pro nějaká $z \in K$, $y \in C$ a $u, v \in V$. Ale $-u \in V$, takže $y = z + v - u \in K + V + V$, což je spor.

(b) Je-li $C \subset X$ uzavřená a $x \in X \setminus C$, stačí použít (a) pro $K = \{x\}$.

(c) (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii) jsou zřejmé, (iii)$\Rightarrow$(ii) plyne z Tvrzení 5(a), (ii)$\Rightarrow$(i) plyne z (b). Snadno nahlédneme, že (iv) je ekvivalentní tvrzení, že $\{x\} = \bigcap\{U;\ U \in \tau(x)\}$ pro každé $x \in X$, což je ekvivalentní (ii).

□

Pro čtenáře s hlubšími znalostmi topologie poznamenejme, že topologické vektorové prostory jsou dokonce úplně regulární. To plyne například z toho, že jsou uniformizovatelné.

Následující tvrzení je zobecněním Tvrzení 1.23 odehrávajícího se v normovaných lineárních prostorech.

TVRZENÍ 11. *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Je-li $G \subset X$ otevřené a $A \subset X$ libovolná, je $A + G$ otevřená.
(b) Je-li $F \subset X$ uzavřená a $K \subset X$ kompaktní, je $F + K$ uzavřená.
(c) Jsou-li $K, L \subset X$ kompaktní, je i $K + L$ kompaktní.

DŮKAZ. (a) $A + G = \bigcup_{x\in A}(x + G)$, přičemž množiny vpravo jsou otevřené dle Tvrzení 5(a).

Důkaz (b) i (c) lze vést zcela analogicky důkazu Tvrzení 1.23, pouze je potřeba pracovat místo posloupností s nety. Je ovšem třeba mít na paměti, že pojem podnetu je poněkud komplikovaný. My zde ukážeme elegantnější přístup.

(b) Ukážeme, že $X \setminus (F + K)$ je otevřená. Zvolme libovolné $x \in X \setminus (F + K)$. Pak $K \cap (x - F) = \emptyset$. Množina $x - F$ je uzavřená (Tvrzení 5(a)), tedy dle Věty 10(a) existuje symetrické $V \in \tau(0)$ takové, že $(K + V) \cap (x - F) = \emptyset$. Je tedy $(x - V) \cap (F + K) = \emptyset$ a ze symetrie V plyne, že $x + V \subset X \setminus (F + K)$.

(c) Protože $+\colon X \times X \to X$ je spojité a $K \times L \subset X \times X$ je kompaktní, je kompaktní i množina $K + L = +(K \times L)$.

□

Dále si uvedeme několik jednoduchých vlastností uzávěrů a vnitřků v topologickém vektorovém prostoru.

TVRZENÍ 12. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*
(a) $\overline{A} = \bigcap\{A + U;\ U \in \tau(0)\}$.
(b) $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$ *a* $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset \operatorname{Int}(A + B)$.
(c) $\lambda\overline{A} = \overline{\lambda A}$ *a* $\lambda \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A)$ *pro libovolné* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
(d) Je-li Y podprostor X, pak $\overline{Y}$ je též podprostor X.
(e) Je-li A konvexní, pak $\overline{A}$ a $\operatorname{Int} A$ *jsou konvexní.*
(f) Je-li A vyvážená, pak $\overline{A}$ je vyvážená.
(g) Je-li A vyvážená a $0 \in \operatorname{Int} A$*, pak* $\operatorname{Int} A$ *je vyvážená.*

DŮKAZ. (a) Platí, že

$$x \in \overline{A} \iff \forall U \in \tau(0)\colon (x + U) \cap A \neq \emptyset \iff \forall U \in \tau(0)\colon x \in A - U \iff \forall U \in \tau(0)\colon x \in A + U,$$

přičemž poslední ekvivalence platí díky tomu, že $U \in \tau(0)$, právě když $-U \in \tau(0)$, což plyne z Tvrzení 5(a).

(b) Zvolme libovolné $U \in \tau(0)$. Dle Tvrzení 5(c) existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Pak dle (a) je $\overline{A} \subset A + V$ a $\overline{B} \subset B + V$, a tedy $\overline{A} + \overline{B} \subset A + B + V + V \subset A + B + U$. Protože toto platí pro každé $U \in \tau(0)$, opětovná aplikace (a) implikuje první část (b). Dále, $\operatorname{Int} A + \operatorname{Int} B \subset A + B$ a množina vlevo je otevřená (Tvrzení 11(a)). Odtud plyne druhá část (b).

(c)

$$\begin{aligned}\lambda\overline{A} &= \lambda \bigcap\{C;\ C \text{ uzavřená}, C \supset A\} = \bigcap\{\lambda C;\ C \text{ uzavřená}, C \supset A\} = \\ &= \bigcap\{\lambda C;\ \lambda C \text{ uzavřená}, \lambda C \supset \lambda A\} = \bigcap\{D;\ D \text{ uzavřená}, D \supset \lambda A\} = \overline{\lambda A},\end{aligned}$$

přičemž třetí rovnost platí díky Tvrzení 5(a). Analogicky,

$$\begin{aligned}\lambda \operatorname{Int} A &= \lambda \bigcup\{G;\ G \text{ otevřená}, G \subset A\} = \bigcup\{\lambda G;\ G \text{ otevřená}, G \subset A\} = \\ &= \bigcup\{\lambda G;\ \lambda G \text{ otevřená}, \lambda G \subset \lambda A\} = \bigcup\{H;\ H \text{ otevřená}, H \subset \lambda A\} = \operatorname{Int}(\lambda A).\end{aligned}$$

(d) Snadno nahlédneme, že podmnožina Z vektorového prostoru nad $\mathbb{K}$ je jeho podprostorem, právě když $Z + Z \subset Z$ a $\lambda Z \subset Z$ pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$. Stačí tedy aplikovat (b) a (c).

(e) Snadno nahlédneme, že podmnožina C vektorového prostoru je konvexní, právě když $\lambda C + (1 - \lambda)C \subset C$ pro každé $\lambda \in (0, 1)$. Aplikujeme-li toto pozorování spolu s (c) a (b), dostáváme, že $\lambda\overline{A} + (1 - \lambda)\overline{A} = \overline{\lambda A} + \overline{(1 - \lambda)A} \subset \overline{\lambda A + (1 - \lambda)A} \subset \overline{A}$ pro každé $\lambda \in (0, 1)$. Podobně, $\lambda \operatorname{Int} A + (1 - \lambda) \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\lambda A) + \operatorname{Int}((1 - \lambda)A) \subset \operatorname{Int}(\lambda A + (1 - \lambda)A) \subset \operatorname{Int} A$ pro každé $\lambda \in (0, 1)$.

(f) plyne ihned z (c) a toho, že každá vyvážená množina obsahuje 0.

(g) Nechť $\alpha \in \mathbb{K}$ splňuje $0 < |\alpha| \leq 1$. Pak $\alpha \operatorname{Int} A = \operatorname{Int}(\alpha A) \subset \operatorname{Int} A$ dle (c). Pro $\alpha = 0$ platí $\alpha \operatorname{Int} A = \{0\} \subset \operatorname{Int} A$ přímo z předpokladu tvrzení.

□

Poznamenejme, že v (b) nemusí nastat rovnost: pro uzávěry viz příklad před tvrzením 1.23, pro vnitřky lze vzít např. $A = \{0\}$, $B = (0, 1)$; chceme-li neprázdné vnitřky, pak např. $A = \mathbb{Q} \cup (-1, 1)$, $B = (-1, 1)$.

PŘÍKLAD 13. Nechť $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq |y|\}$. Pak A je vyvážená množina, jejíž vnitřek není vyvážený: Bod $0 = (0, 0)$ není ve vnitřku A, neboť k němu konverguje například posloupnost $\{(\frac{1}{n}, 0)\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus A$. Platí však $(0, 1) \in \operatorname{Int} A$ a každá neprázdná vyvážená množina obsahuje 0.

Následující věta je zobecněním Věty 1.24.

VĚTA 14. *Nechť X je topologický vektorový prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $Y + Z$ je uzavřený.*

DŮKAZ. Nechť X je prostor nad $\mathbb{K}$. Nejprve ukážeme, že $Y + \operatorname{span}\{e\}$ je uzavřený pro libovolné $e \in X$. Obecné tvrzení pak snadno plyne pomocí matematické indukce dle $\dim Z$.

Je-li $e \in Y$, pak není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že $e \notin Y$. Protože Y je uzavřený, existuje $U \in \tau(0)$ takové, že $(e + U) \cap Y = \emptyset$. Nechť $V \in \tau(0)$ je vyvážené takové, že $V + V \subset U$ (Tvrzení 5(c) a 7(b)). Ukážeme, že $X \setminus (Y + \operatorname{span}\{e\})$ je otevřená. Zvolme libovolné $x \in X \setminus (Y + \operatorname{span}\{e\})$. Protože V je pohlcující, existuje $r \in (0, 1)$ takové, že $tx \in V$ pro $t \in [0, r]$. Je-li nyní $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geq \frac{1}{r}$, pak $\frac{1}{\lambda}x + e + \frac{1}{\lambda}V = \frac{|\lambda|}{\lambda}\frac{1}{|\lambda|}x + e + \frac{1}{\lambda}V \subset e + \frac{|\lambda|}{\lambda}V + V \subset e + V + V \subset e + U$. To znamená, že $(\frac{1}{\lambda}x + e + \frac{1}{\lambda}V) \cap Y = \emptyset$, a tedy i $(x + \lambda e + V) \cap Y = \emptyset$.

Na druhou stranu, množina $K = \{x + \lambda e;\ |\lambda| \leq \frac{1}{r}\}$ je kompaktní (je spojitým obrazem kompaktu $B(0, \frac{1}{r})$ v $\mathbb{K}$), disjunktní s Y, a protože Y je uzavřený, existuje dle Věty 10(a) okolí $W \in \tau(0)$ takové, že $(K + W) \cap Y = \emptyset$. Konečně, $S = V \cap W \in \tau(0)$ a zjevně $(x + \operatorname{span}\{e\} + S) \cap Y = \emptyset$. Odtud snadno plyne, že $x + S \subset X \setminus (Y + \operatorname{span}\{e\})$.

□

DŮSLEDEK 15. *Nechť X je Hausdorffův topologický vektorový prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

DŮKAZ. Nechť Z je konečněrozměrný podprostor X. Podprostor $Y = \{0\}$ je uzavřený, lze tedy použít Větu 14 na $Z = Y + Z$.

□

2. Omezené množiny, metrizovatelnost

DEFINICE 16. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

Je-li X topologický vektorový prostor a $x \in X$, $x \notin \overline{\{0\}}$, pak množina $\{nx;\ n \in \mathbb{N}\}$ není omezená: Je-li $V \in \tau(0)$ vyvážené takové, že $0 \notin x + V$, pak $-x \notin V$, a tedy $x \notin V$. To znamená, že pro libovolné $t > 0$ je $\lceil t \rceil x \notin tV$. Speciálně, je-li X Hausdorffův, pak netriviální podprostory nejsou omezené.

POZNÁMKA 17. Nechť (X, τ) je metrizovatelný topologický vektorový prostor a nechť ρ je metrika na X indukující τ. Uvědomme si, že pak máme na X definovány dva různé pojmy omezenosti: výše zmíněnou topologickou omezenost (říkejme jí zde τ-omezenost) a též klasickou metrickou omezenost (zde ρ-omezenost).

Je-li ρ translačně invariantní, pak platí, že je-li $A \subset X$ τ-omezená, je i ρ-omezená: Položme $U = \{x \in X;\ \rho(x, 0) < 1\}$. Pak $U \in \tau(0)$. Dle Tvrzení 7(b) existuje vyvážené $V \in \tau(0)$, $V \subset U$. Díky τ-omezenosti A existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq t$. Pak z vyváženosti V plyne, že $A \subset tV \subset n\frac{t}{n}V \subset nV \subset nU$. Je-li nyní $x \in A$, pak $\frac{1}{n}x \in U$, a tedy $\rho(\frac{1}{n}x, 0) < 1$. Z Faktu 3(b) pak konečně plyne, že $\rho(x, 0) = \rho(n\frac{1}{n}x, 0) \leq n\rho(\frac{1}{n}x, 0) < n$.

Je ovšem třeba dát pozor na to, že obecně mezi těmito dvěma pojmy nemusí být vůbec žádný vztah: Uvažujme prostor $\mathbb{R}$ se standardní topologií, kterou označíme τ. Nechť $\rho(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$. Pak (translačně invariantní) metrika ρ indukuje na $\mathbb{R}$ topologii τ (neboť je ekvivalentní standardní metrice), ale množina $A = \mathbb{R}$ je ρ-omezená, ale není τ-omezená. Obecněji, je-li (P, ρ) metrický prostor, pak $\bar{\rho} = \min\{\rho, 1\}$ je ekvivalentní metrika na P (funkce $f(t) = \min\{t, 1\}$ je jednak neklesající a jednak konkávní s hodnotou $f(0) = 0$, a tedy subaditivní). Zjevně každá podmnožina P je $\bar{\rho}$-omezená; na druhou stranu celý prostor X není nikdy τ-omezený, je-li τ Hausdorffova. Viz též Poznámku 24).

Pro obrácený příklad vezměme prostor c_0. Položme $\varphi(t) = (|t| - 1)^+$ a

$$\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)|$$

pro $x, y \in c_0$. Pak ρ je ekvivalentní metrika na c_0: Funkce ρ je dobře definovaná, neboť díky tomu, že $x, y \in c_0$, je suma v definici konečná. Je snadno vidět, že ρ je metrika a $\|x - y\|_\infty \leq \rho(x, y)$ pro všechna $x, y \in c_0$. Na druhou stranu, zvolme $x \in c_0$ pevně. Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|x_n| < \frac{1}{2}$ pro $n \geq n_0$. Je-li $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, \frac{1}{2})$ a $n \geq n_0$, pak $|y_n| \leq 1$, takže $\varphi(x_n) = \varphi(y_n) = 0$. Pro $y \in B_{\|\cdot\|_\infty}(x, \frac{1}{2})$ tedy platí, že $\rho(x, y) = \|x - y\|_\infty + \sum_{n=1}^{n_0} |\varphi(x_n) - \varphi(y_n)| \leq (n_0 + 1)\|x - y\|_\infty$, neboť φ je zjevně 1-lipschitzovská.

Je-li τ topologie indukovaná supremovou normou, pak množina $A = B_{\|\cdot\|_\infty}(0, 2)$ je τ-omezená, neboť $A \subset \frac{2}{r} B_{\|\cdot\|_\infty}(0, r)$ pro libovolné $r > 0$. Nicméně $\rho\big(\sum_{j=1}^{n} 2e_j, 0\big) = 2 + n$, tedy A není ρ-omezená.

Na druhou stranu není obtížné si rozmyslet, že pokud (X, τ) je topologický vektorový prostor, jehož topologie je indukovaná nějakou *normou*, pak τ-omezené a normově omezené podmnožiny X splývají.

TVRZENÍ 18. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Množina A je omezená.
(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ a každou posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{K}$, $\gamma_n \to 0$ platí $\gamma_n x_n \to 0$.
(iii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ platí $\frac{1}{n} x_n \to 0$.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) Zvolme $U \in \tau(0)$. Nechť $V \in \tau(0)$, $V \subset U$ je vyvážené. Existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Nechť $v_n \in V$ jsou prvky splňující $x_n = t v_n$. Dále nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $|\gamma_n t| < 1$ pro $n \geq n_0$. Pak $\gamma_n x_n = \gamma_n t v_n \in V \subset U$ pro $n \geq n_0$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) je triviální.

(iii)$\Rightarrow$(i) Není-li A omezená, pak existuje $U \in \tau(0)$ takové, že $A \not\subset nU$ pro žádné $n \in \mathbb{N}$. Nechť $x_n \in A \setminus nU$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\frac{x_n}{n} \notin U$, a tedy $\frac{x_n}{n} \not\to 0$, což je spor s (iii).

□

TVRZENÍ 19. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou omezené. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Množiny $A \cup B$ a $A + B$ jsou omezené.
(b) Množina λA omezená pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$.
(c) Množina $\overline{A}$ je omezená.

DŮKAZ. (a) Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Dle definice omezenosti existují $t_A, t_B > 0$ taková, že $A \subset t_A V$ a $B \subset t_B V$. Položme $t = \max\{t_A, t_B\}$. Pak z vyváženosti V dostáváme, že $A \subset t \frac{t_A}{t} V \subset tV$ a $B \subset t \frac{t_B}{t} V \subset tV$. Tedy $A \cup B \subset tV \subset tU$ a $A + B \subset tV + tV = t(V + V) \subset tU$.

(b) Zjevně můžeme předpokládat, že $\lambda \neq 0$. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $V \in \tau(0)$, $V \subset U$. Dále existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Pak $\lambda A \subset \lambda t V = |\lambda| t \frac{\lambda}{|\lambda|} V \subset |\lambda| t V \subset |\lambda| t U$.

(c) Nechť $U \in \tau(0)$. Dle Věty 10(b) existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $\overline{V} \subset U$. Dále existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tV$. Pak dle Tvrzení 12(c) platí, že $\overline{A} \subset \overline{tV} = t\overline{V} \subset tU$.

□

Všimněme si, že konečné množiny jsou omezené: pro jednobodové to plyne z Tvrzení 7(a), pro ostatní to dostaneme pomocí Tvrzení 19(a).

LEMMA 20. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $V \in \tau(0)$ a $\{\delta_n\} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\delta_n \to 0$. Pak $\{\delta_n V;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze okolí 0, právě když V je omezené.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $W \in \tau(0)$, $W \subset U$ a dále existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\delta_n V \subset W$. Tedy $V \subset \frac{1}{|\delta_n|} \frac{|\delta_n|}{\delta_n} W \subset \frac{1}{|\delta_n|} W \subset \frac{1}{|\delta_n|} U$.

$\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje vyvážené $W \in \tau(0)$, $W \subset U$. Dále existuje $t > 0$ takové, že $V \subset tW$. Je-li nyní $n \in \mathbb{N}$ zvoleno tak, že platí $|\delta_n t| < 1$, pak $\delta_n V \subset \delta_n t W \subset W \subset U$.

□

Význam spočetné báze okolí 0 nám objasní následující věta z obecné topologie. Důkaz lze nalézt např. v Dodatku (Věta 13.98).

VĚTA 21. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X má spočetnou bázi okolí 0.

(ii) X je pseudometrizovatelný.

(iii) X je pseudometrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou.

Je-li X Hausdorffův, pak lze výše předponu pseudo- vynechat.

DEFINICE 22. Nechť X je topologický vektorový prostor. Řekneme, že X je lokálně omezený, pokud ke každému $x \in X$ existuje omezené okolí x.

Všimněme si, že z Tvrzení 19(a) plyne, že prostor je lokálně omezený, právě když v něm existuje omezené okolí 0.

VĚTA 23. *Nechť X je lokálně omezený topologický vektorový prostor. Pak X je pseudometrizovatelný.*

DŮKAZ. Nechť V je omezené okolí 0. Dle Lemmatu 20 je systém $\{\frac{1}{n}V;\ n \in \mathbb{N}\}$ báze okolí 0. Věta 21 tedy implikuje pseudometrizovatelnost X.

□

POZNÁMKA 24. Poznamenejme, že (na rozdíl od Věty 65 dále) věta obrácená neplatí. Může se totiž stát, že $\tau(0)$ má spočetnou bázi, která ovšem není vygenerována jedním okolím (jako v Lemmatu 20). Příkladem je třeba prostor X měřitelných funkcí s konvergencí v míře (Příklad 4). Ukážeme, že v tomto prostoru neexistuje omezené okolí 0: Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje $\delta \in (0,1)$ takové, že $B_\delta = \{f \in X;\ \rho(f,0) \leq \delta\} \subset U$. Položme $f_n = n\chi_{[0,\delta]}$. Pak $\rho(f_n,0) = \delta$, a tedy $f_n \in B_\delta \subset U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nicméně, je-li $t > 0$, a $n = \lceil t \rceil$, pak $\rho(\frac{1}{t}f_n, 0) = \delta$. Tedy $\frac{1}{t}f_n \notin B_{\delta/2}$, neboli $f_n \notin tB_{\delta/2}$.

3. Totální omezenost a kompaktnost

DEFINICE 25. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá totálně omezená, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U$.

TVRZENÍ 26. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) A je totálně omezená právě tehdy, když pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset X$ konečná splňující $A \subset F + U$.

(b) Je-li A totálně omezená a $B \subset A$, pak B je též totálně omezená.

(c) Jsou-li A, B totálně omezené, pak jsou i $A \cup B$ a $A + B$ totálně omezené.

(d) Je-li A totálně omezená a $\lambda \in \mathbb{K}$, pak je i λA totálně omezená.

(e) Je-li A totálně omezená, pak je i $\overline{A}$ totálně omezený.

DŮKAZ. (a) $\Rightarrow$ je triviální.

$\Leftarrow$ Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A \neq \emptyset$. Nechť $U \in \tau(0)$. Existuje symetrické $V \in \tau(0)$ takové, že $V - V = V + V \subset U$. Nechť $F \subset X$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Pro každé $x \in F$ zvolme $a_x \in A \cap (x + V)$, pokud je tato množina neprázdná, v opačném případě pak zvolme $a_x \in A$ libovolně. Pak $A \subset \bigcup_{x \in F}(a_x + U)$. Vskutku, je-li $y \in A$, pak existuje $x \in F$ takové, že $y \in x + V$. Pak $a_x \in x + V$, takže $x \in a_x - V$, a tedy $y \in a_x - V + V \subset a_x + U$. Odtud plyne, že A je totálně omezená.

(b) plyne ihned z (a).

(c) Nechť $U \in \tau(0)$. Existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \subset A$ a $H \subset B$ jsou konečné takové, že $A \subset F + V$ a $B \subset H + V$. Pak $A \cup B \subset (F \cup H) + U$ a $A + B \subset (F + V) + (H + V) \subset (F + H) + U$.

(d) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\lambda \neq 0$. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak $\frac{1}{\lambda}U \in \tau(0)$, a tedy existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + \frac{1}{\lambda}U$. Tudíž $\lambda A \subset \lambda F + \lambda\frac{1}{\lambda}U = \lambda F + U$.

(e) Nechť $U \in \tau(0)$. Existuje $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \subset A$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Podle Tvrzení 12(a) dostáváme, že $\overline{A} \subset A + V \subset F + V + V \subset F + U$.

□

TVRZENÍ 27. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Kompaktní podmnožiny X jsou totálně omezené a totálně omezené podmnožiny X jsou omezené.*

DŮKAZ. Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $U \in \tau(0)$. Pak $K \subset \bigcup_{x\in K}(x + \operatorname{Int} U)$, a tedy díky kompaktnosti K existuje konečná množina $F \subset K$ taková, že

$$K \subset \bigcup_{x\in F}(x + \operatorname{Int} U) \subset \bigcup_{x\in F}(x + U).$$

Nechť A je totálně omezená a $U \in \tau(0)$. Nechť $V \in \tau(0)$ je vyvážené takové, že $V + V \subset U$, a nechť $F \subset A$ je konečná množina pro kterou $A \subset F + V$. Jelikož je F konečná, je omezená, a tudíž $F \subset tV$ pro nějaké $t > 0$. Položme $s = \max\{1, t\}$. Díky vyváženosti V pak dostaneme $A \subset F + V \subset tV + V = s\frac{t}{s}V + s\frac{1}{s}V \subset sV + sV = s(V + V) \subset sU$.

□

POZNÁMKA 28. Nechť X je topologický prostor. Uvědomme si, že je-li $\{x_n\} \subset X$ posloupnost, která konverguje k $x \in X$, pak množina $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ je kompaktní. Tedy konvergentní posloupnosti v topologickém vektorovém prostoru jsou omezené (dokonce totálně omezené). Nic z toho ale neplatí pro nety! Vezměme například $\Gamma = \{(j,n);\ j \in \{0,1\}, n \in \mathbb{N}\}$ a definujme uspořádání na Γ takto: $(j,n) \geq (j,m)$ pokud $n \geq m$, $j = 0, 1$, a $(1,n) \geq (0,m)$ pokud $n \geq 2m$. Snadno ověříme, že Γ je usměrněná množina. Dále položme $x_{(0,n)} = n$ a $x_{(1,n)} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $\lim_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$ v $\mathbb{R}$, ale $\{x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ není omezená.

Následující fakt je užitečné srovnat s Poznámkou 17.

FAKT 29. *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor pseudometrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou ρ. Pak $A \subset X$ je τ-totálně omezená, právě když je ρ-totálně omezená.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Pak $U_\rho(0,\varepsilon) \in \tau(0)$, a tedy existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U(0,\varepsilon)$. To znamená, že F je konečná ε-síť pro A v metrice ρ.

$\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $U_\rho(0,\varepsilon) \subset U$. Nechť $F \subset A$ je konečná ε-síť v metrice ρ. Díky translační invariantnosti ρ je $U_\rho(x,\varepsilon) = x + U_\rho(0,\varepsilon)$, z čehož plyne, že

$$A \subset \bigcup_{x\in F} U_\rho(x,\varepsilon) = \bigcup_{x\in F}\big(x + U_\rho(0,\varepsilon)\big) = F + U_\rho(0,\varepsilon) \subset F + U.$$

Tedy A je τ-totálně omezená.

□

DEFINICE 30. Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f\colon X \to Y$. Řekneme, že f je stejnoměrně spojité, jestliže pro každé $V \in \tau_Y(0)$ existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$.

Snadno je vidět, že každé stejnoměrně spojité zobrazení je spojité.

TVRZENÍ 31. *Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) jsou topologické vektorové prostory a $f\colon X \to Y$ je stejnoměrně spojité. Je-li $A \subset X$ totálně omezená, je i $f(A)$ totálně omezená.*

DŮKAZ. Nechť $V \in \tau_Y(0)$. Pak existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$. Dále díky totální omezenosti A existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U$. Pak $f(A) \subset f(F + U) = f\big(\bigcup_{y\in F}(y + U)\big) = \bigcup_{y\in F} f(y + U) \subset \bigcup_{y\in F}(f(y) + V) = f(F) + V$.

□

4. Lineární zobrazení

Začneme jednoduchým dodatkem k Faktu 1.43: lineárním obrazem vyvážené množiny je opět vyvážená množina.

VĚTA 32. *Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) T je omezené na nějakém okolí 0.
(ii) T je spojité v 0.
(iii) T je spojité.
(iv) T je stejnoměrně spojité.
(v) T je sekvenciálně spojité.
(vi) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
(vii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset X$, $x_n \to 0$ je množina $\{T(x_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená.

Pak (i)⇒(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v)⇒(vi)⇔(vii). Je-li Y lokálně omezený, pak (i)–(iv) jsou ekvivalentní. Je-li X pseudometrizovatelný, pak (ii)–(vii) jsou ekvivalentní.

V důkazu využijeme následující lemma.

LEMMA 33. *Nechť X je pseudometrizovatelný topologický vektorový prostor. Jestliže $\{x_n\} \subset X$ konverguje k 0, pak existuje posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{N}$ taková, že $\gamma_n \to +\infty$ a $\gamma_n x_n \to 0$.*

DŮKAZ. Dle Věty 21 existuje na X translačně invariantní pseudometrika ρ indukující topologii X. Nalezneme indexy $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ tak, aby $\rho(x_n, 0) \leq \frac{1}{k^2}$ pro každé $n \geq n_k$, $k \in \mathbb{N}$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ položme $\gamma_n = k$ pro $n_{k-1} \leq n < n_k$. Pak $\gamma_n \to +\infty$ a pro každé $k > 1$ a $n \in \mathbb{N}$ splňující $n_{k-1} \leq n < n_k$ platí díky Faktu 3(b), že

$$\rho(\gamma_n x_n, 0) = \rho(k x_n, 0) \leq k\rho(x_n, 0) \leq \frac{k}{(k-1)^2}.$$

Tedy $\rho(\gamma_n x_n, 0) \to 0$.

□

Poznamenejme, že bez předpokladu pseudometrizovatelnosti předchozí lemma neplatí, viz Příklad 61.

DŮKAZ VĚTY 32. (iv)⇒(iii)⇒(ii) jsou triviální.

(ii)⇒(iv) Nechť $V \in \tau_Y(0)$. Ze spojitosti T v 0 plyne existence $U \in \tau_X(0)$ takového, že $T(U) \subset V$. Splňují-li nyní prvky $x, y \in X$ vztah $x - y \in U$, pak $T(x) - T(y) = T(x-y) \in V$.

(i)⇒(ii) Nechť $U \in \tau_X(0)$ je takové, že $T(U)$ je omezená. Nechť $V \in \tau_Y(0)$. Pak existuje $t > 0$ takové, že $T(U) \subset tV$. Množina $\frac{1}{t}U$ je okolím 0 v X a platí, že $T(\frac{1}{t}U) = \frac{1}{t}T(U) \subset \frac{1}{t}tV = V$.

(iii)⇒(v) je zjevná.

(v)⇒(vi) Využijeme charakterizaci omezenosti z Tvrzení 18. Nechť $A \subset X$ je omezená, nechť $\{y_n\} \subset T(A)$ a nechť $\{x_n\} \subset A$ je taková, že $T(x_n) = y_n$. Protože A je omezená, je $\frac{1}{n}x_n \to 0$. Ze sekvenciální spojitosti T dostáváme, že $\frac{1}{n}y_n = T(\frac{1}{n}x_n) \to 0$. Tvrzení 18 tak implikuje, že $T(A)$ je omezená.

(vi)⇒(vii) plyne z toho, že pokud $\{x_n\} \subset X$ a $x_n \to 0$, pak $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je omezená (Poznámka 28).

(vii)⇒(vi) Využijeme opět charakterizaci omezenosti z Tvrzení 18. Nechť $A \subset X$ je omezená, nechť $\{y_n\} \subset T(A)$ a nechť $\{x_n\} \subset A$ je taková, že $T(x_n) = y_n$. Protože A je omezená, je $\frac{1}{\sqrt{n}}x_n \to 0$. Ze (vii) dostáváme, že $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}y_n\right\} = \left\{T\left(\frac{1}{\sqrt{n}}x_n\right)\right\}$ je omezená. Tedy $\frac{1}{n}y_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}y_n\right) \to 0$. Tvrzení 18 tak implikuje, že $T(A)$ je omezená.

Předpokládejme nyní, že Y je lokálně omezený a rozmysleme si, že (ii)⇒(i): Nechť $V \subset Y$ je omezené okolí 0. Pak existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že $T(U) \subset V$, tedy T je omezené na U.

Konečně, nechť X je pseudometrizovatelný a dokažme, že (vii)⇒(ii). Nechť $\{x_n\} \subset X$ konverguje k 0. Dle Lemmatu 33 existuje $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}$ taková, že $\gamma_n \to +\infty$ a $\gamma_n x_n \to 0$. Pak je množina $\{T(\gamma_n x_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená, a tedy $T(x_n) = \frac{1}{\gamma_n}T(\gamma_n x_n) \to 0$ dle Tvrzení 18. Díky pseudometrizovatelnosti X to znamená, že T je spojitý v 0.

□

Implikace (ii)⇒(i) v předchozí větě nemusí obecně platit, a to ani v metrizovatelném případě: stačí uvažovat prostor měřitelných funkcí X s konvergencí v míře (Příklad 4). Pak identita $Id\colon X \to X$ je zřejmě spojitá, ale není omezená na žádném okolí 0, neboť v prostoru X je každé okolí 0 neomezené (viz Poznámku 24).

Taktéž implikace (vi)$\Rightarrow$(v) nemusí obecně platit. Příkladem jsou topologie z oddílu 9. Např. zobrazení $Id: (c_0, w) \to (c_0, \|\cdot\|_\infty)$ zobrazuje omezené množiny na omezené (Věta 91), ale není sekvenciálně spojité, neboť $e_n \to 0$ slabě, ale nikoli v normě (Příklad 87).

Konečně, ani implikace (v)$\Rightarrow$(iii) nemusí obecně platit:

PŘÍKLAD 34. Nechť $X = C([0,1])$ s topologií τ_p bodové konvergence a $Y = C([0,1])$ s topologií τ_λ konvergence v míře (viz Příklad 4). Nechť $I: X \to Y$ je identické zobrazení. Pak I je sekvenciálně spojité, ale není spojité.

Ukažme nejprve sekvenciální spojitost I. Nechť ρ je metrika z Příkladu 4 indukující topologii τ_λ. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost konvergující k f v X, tj. $f_n(x) \to f(x)$ pro každé $x \in [0,1]$. Pak jsou funkce $g_n = \min\{|f_n - f|, 1\}$ omezené konstantou 1 a bodově konvergují k 0. Z Lebesgueovy věty tedy plyne, že $\rho\big(I(f_n), I(f)\big) = \rho(f_n, f) = \int_0^1 g_n \,\mathrm{d}\lambda \to 0$, tj. $I(f_n) \to I(f)$ v Y.

Abychom ukázali, že I není spojité, pro libovolnou konečnou množinu $F \subset [0,1]$ nalezneme spojitou funkci $f_F: [0,1] \to [0,1]$ takovou, že $f_F(x) = 0$ pro $x \in F$ a $\lambda(\{x \in [0,1];\ f_F(x) = 1\}) \geq \frac{1}{2}$. Označme $\mathcal{F}$ systém konečných podmnožin $[0,1]$ a uspořádejme jej vztahem $H \geq F$, pokud $H \supset F$. Pak $\mathcal{F}$ je usměrněná množina a systém $\{f_F\}_{F \in \mathcal{F}}$ je tak net v X. Zřejmě $\lim_{F \in \mathcal{F}} f_F = 0$ v X. Na druhou stranu však $\rho\big(I(f_F), 0\big) = \rho(f_F, 0) = \int_0^1 f_F \,\mathrm{d}\lambda \geq \frac{1}{2}$ pro každé $F \in \mathcal{F}$, takže $\{I(f_F)\}_{F \in \mathcal{F}}$ nekonverguje k 0 v Y.

VĚTA 35. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $f: X \to \mathbb{K}$ je nenulová lineární forma. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *f je spojitá.*
(ii) *$\operatorname{Ker} f$ je uzavřené.*
(iii) $\overline{\operatorname{Ker} f} \neq X$.

DŮKAZ. Zjevně (i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii).

(iii)$\Rightarrow$(i) Dle předpokladu existuje $x \in X$ a $U \in \tau(0)$ vyvážené tak, že $(x + U) \cap \operatorname{Ker} f = \emptyset$. Pak $f(U)$ je vyvážená množina v $\mathbb{K}$ taková, že $0 \notin f(x) + f(U)$, což speciálně znamená, že $f(U) \neq \mathbb{K}$. Ukážeme, že to znamená, že $f(U)$ je omezená, což dle Věty 32 znamená, že f je spojitá. Pokud by $f(U)$ byla neomezená, nalezli bychom posloupnost $\{\lambda_n\} \in f(U)$ takovou, že $|\lambda_n| \to +\infty$. Díky vyváženosti ovšem obsahuje $f(U)$ s každým svým bodem λ též kruh $B(0, |\lambda|)$. To znamená, že $f(U) \supset \bigcup_{n=1}^\infty B(0, |\lambda_n|) = \mathbb{K}$, což je spor.

□

Jako obvykle budeme lineárním formám říkat též (lineární) funkcionály.

DEFINICE 36. Nechť X je topologický vektorový prostor. Symbolem $X^\#$ budeme značit prostor všech lineárních forem (funkcionálů) na X a budeme jej nazývat algebraickým duálem. Symbolem X^* budeme (ve shodě s Definicí 1.49) značit podprostor $X^\#$ sestávající z lineárních funkcionálů, které jsou spojité na X, a budeme jej nazývat topologickým duálem (či jenom duálem).

Podobně jako pro normované lineární prostory zavedeme též pojem izomorfismu:

DEFINICE 37. Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T: X \to Y$ je lineární. Říkáme, že T je izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je homeomorfismus X na Y; říkáme, že T je izomorfismus X do Y (nebo jen izomorfismus do), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$.

FAKT 38. *Nechť X je vektorový prostor, Y je topologický vektorový prostor, a $\{T_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je net lineárních zobrazení z X do Y. Je-li $T: X \to Y$ bodovou limitou netu $\{T_\gamma\}$, pak T je lineární.*

DŮKAZ. Uvědomme si, že dle předpokladu je pro každé $x \in X$ limita $\lim_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma(x)$ určena jednoznačně. Nechť $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Ze spojitosti vektorových operací v Y plyne, že $T(x+y) = \lim T_\gamma(x+y) = \lim(T_\gamma(x) + T_\gamma(y)) = \lim T_\gamma(x) + \lim T_\gamma(y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \lim T_\gamma(\alpha x) = \lim \alpha T_\gamma(x) = \alpha \lim T_\gamma(x) = \alpha T(x)$.

□

5. Konečněrozměrné prostory

Následující věta je analogií Věty 1.66.

VĚTA 39. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X je Hausdorffův a $\dim X < \infty$.
(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
(iii) X je Hausdorffův a existuje v něm totálně omezené okolí 0.
(iv) X je pseudometrizovatelný a každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojité.
(v) X je pseudometrizovatelný a každá lineární forma na X je spojitá.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je nějaká báze X. Definujeme zobrazení $T : \mathbb{K}^n \to X$ předpisem

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Snadno je vidět, že T je lineární zobrazení a díky vlastnostem báze je to bijekce. Protože „projekce“ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost T.

Ukažme nyní i spojitost inverze T^{-1}. Množina $S = S_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$ je kompaktní. Protože T je spojitý, je množina $T(S)$ také kompaktní. Protože X je Hausdorffův, je množina $\{0\}$ uzavřená. Dále $0 \notin T(S)$ díky prostotě T, dle Věty 10(a) tedy existuje vyvážené $V \in \tau(0)$ takové, že $V \cap T(S) = \emptyset$. Pak $T^{-1}(V) \subset U_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)}$: Kdyby existovalo $y \in V$ takové, že $c = \|T^{-1}(y)\|_2 \geq 1$, pak $T^{-1}(\frac{1}{c} y) \in S$, tedy $\frac{1}{c} y \in T(S)$. Díky vyváženosti V je ovšem $\frac{1}{c} y \in V$, což je spor. Zobrazení T^{-1} je tedy omezené na V, což dle Věty 32 znamená, že je spojité.

(ii)⇒(iii) Je-li $T : X \to \mathbb{K}^n$ izomorfismus, je $T^{-1}(B_{(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)})$ okolí nuly (ze spojitosti T), které je kompaktní (ze spojitosti T^{-1}), a tedy totálně omezené (Tvrzení 27).

(iii)⇒(i) Nechť $V \in \tau(0)$ je totálně omezené. Dle Tvrzení 27 a Lemmatu 20 systém $\mathcal{B} = \{\frac{1}{2^n} V;\ n \in \mathbb{N}\}$ tvoří bázi okolí 0. Dále $\frac{1}{2} V \in \tau(0)$, a tedy existuje konečná $F \subset V$ taková, že $V \subset F + \frac{1}{2} V$. Položme $Y = \operatorname{span} F$. Pomocí matematické indukce ukážeme, že $V \subset Y + \frac{1}{2^n} V$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ to plyne z toho, že $F \subset Y$. Předpokládáme-li nyní platnost tvrzení pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pak

$$V \subset Y + \tfrac{1}{2^n} V \subset Y + \tfrac{1}{2^n}(F + \tfrac{1}{2} V) \subset Y + \tfrac{1}{2^n}(Y + \tfrac{1}{2} V) = Y + \tfrac{1}{2^{n+1}} V.$$

Jelikož je $\mathcal{B}$ báze okolí 0, Tvrzení 12(a) implikuje, že $V \subset \overline{Y}$. Dle Důsledku 15 je ovšem Y uzavřený v X, a tedy $V \subset Y$. Jelikož V je pohlcující, plyne odtud, že $Y = X$.

(ii)⇒(iv) Nechť $I : (X, \tau) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus. Definujme $\rho(x, y) = \|I(x) - I(y)\|_2$. Snadno je vidět, že ρ je metrika na X. Dále, je-li $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset X$ net, pak $x_\gamma \to x$ v metrice ρ, právě když $I(x_\gamma) \to I(x)$ v prostoru $\mathbb{K}^n$, což nastane, právě když $x_\gamma \to x$ v τ, neboť I je homeomorfismus. Tedy ρ indukuje topologii τ.

Nechť dále Y je topologický vektorový prostor a $T : X \to Y$ je lineární. Položme $S = T \circ I^{-1}$. Pak $S : \mathbb{K}^n \to Y$ je lineární. Ukážeme, že S je spojité, což ihned implikuje spojitost $T = S \circ I$. Nechť $\{e_1, \dots, e_n\}$ je kanonická báze $\mathbb{K}^n$. Pak $S(x) = \sum_{i=1}^n x_i S(e_i)$ pro $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Protože „projekce“ $x \mapsto x_i$ jsou spojité, ze spojitosti vektorových operací plyne spojitost S.

(iv)⇒(v) je triviální.

(v)⇒(i) Není-li X Hausdorffův, pak existuje $x \in X \setminus \{0\}$, takové, že $x \in \overline{\{0\}}$. Doplníme-li množinu $\{x\}$ na algebraickou bázi vektorového prostoru X, pak snadno zkonstruujeme lineární formu f na X, pro kterou $f(x) \neq 0$. Ta ovšem není spojitá, neboť nesplňuje podmínku, že $f(\overline{\{0\}}) \subset \overline{f(\{0\})} = \{0\}$.

Není-li X konečněrozměrný, má nekonečnou algebraickou bázi $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$. Vyberme nekonečnou spočetnou množinu $\{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \Gamma$. Nechť ρ je pseudometrika na X indukující jeho topologii. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $U_n = \{x \in X;\ \rho(x, 0) < \frac{1}{n}\}$ okolím nuly, a tedy pohlcující. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti (vynásobením vhodnou konstantou) předpokládat, že $e_{\gamma_n} \in U_n$. To znamená, že $\rho(e_{\gamma_n}, 0) < \frac{1}{n}$, neboli $e_{\gamma_n} \to 0$. Položme $f(e_{\gamma_n}) = 1$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $f(e_\gamma) = 0$ pro $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Pak f lze jednoznačně rozšířit na lineární formu na X, která ovšem zjevně není spojitá.

□

DŮSLEDEK 40. *Nechť X je konečněrozměrný vektorový prostor. Pak na X existuje jedna jediná Hausdorffova vektorová topologie.*

DŮKAZ. Nechť (X, τ_1) a (X, τ_2) jsou Hausdorffovy topologické vektorové prostory. Pak dle Věty 39 je $Id\colon (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ homeomorfismus (aplikujeme implikaci (i)⇒(iv) na Id a na Id^{-1}). To znamená, že $\tau_1 = \tau_2$.

□

POZNÁMKA 41. Poznamenejme, že podmínku pseudometrizovatelnosti z tvrzení (iv) a (v) výše nelze vynechat. Pro každý vektorový prostor X totiž existuje vektorová topologie na X taková, že každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojité. Pro čtenáře s hlubšími znalostmi obecné topologie uvádíme následující konstrukci: Nechť $\mathcal{T}$ je množina všech vektorových topologií na X a nechť τ je slabá topologie na X vzhledem k soustavě $\{Id\colon X \to (X, \sigma);\ \sigma \in \mathcal{T}\}$. Snadno nahlédneme, že (X, τ) je topologický vektorový prostor. Nechť nyní (Y, φ) je topologický vektorový prostor a $T\colon X \to (Y, \varphi)$ je lineární. Nechť σ je slabá topologie na X vzhledem k $\{T\}$. Snadno je vidět, že $\sigma \in \mathcal{T}$, takže $Id\colon (X, \tau) \to (X, \sigma)$ je spojitá. Tedy i $T\colon (X, \tau) \to (Y, \varphi)$ je spojité, neboť je složením zobrazení $Id\colon (X, \tau) \to (X, \sigma)$ a $T\colon (X, \sigma) \to (Y, \varphi)$.

6. Lokálně konvexní prostory

Začněme jednoduchým pozorováním o zachovávání konvexity při vektorových operacích.

FAKT 42. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A, B \subset X$ jsou konvexní a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak množiny αA a $A + B$ jsou konvexní.*

DŮKAZ. Jsou-li $x, y \in A$ a $\lambda \in [0, 1]$, pak $\lambda\alpha x + (1 - \lambda)\alpha y = \alpha(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in \alpha A$. Dále, jsou-li $x_1, x_2 \in A$, $y_1, y_2 \in B$ a $\lambda \in [0, 1]$, pak $\lambda(x_1 + y_1) + (1 - \lambda)(x_2 + y_2) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 + \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in A + B$.

□

DEFINICE 43. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Množina $A \subset X$ se nazývá absolutně konvexní, pokud je konvexní a vyvážená.

Všimněme si, že jednotková koule v normovaném lineárním prostoru je absolutně konvexní.

FAKT 44. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A vyvážená, je conv A *vyvážená, a tedy absolutně konvexní.*
(b) A je absolutně konvexní, právě když pro každé $x, y \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $|\alpha| + |\beta| \le 1$ platí $\alpha x + \beta y \in A$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in \operatorname{conv} A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \le 1$. Dle Tvrzení 1.17 existují $x_1, \dots, x_n \in A$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$, takové, že $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ a $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$. Pak $\alpha x_j \in A$ pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$, a tedy $\alpha x = \sum_{j=1}^n \alpha\lambda_j x_j = \sum_{j=1}^n \lambda_j(\alpha x_j) \in \operatorname{conv} A$. Množina conv A je tedy vyvážená.

(b) ⇐ Konvexita A je zjevná, pro důkaz vyváženosti stačí vzít $\beta = 0$.

⇒ Nechť $x, y \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $|\alpha| + |\beta| \le 1$. Je-li $\alpha = 0$, pak $\alpha x + \beta y = \beta y \in A$ díky vyváženosti A; analogicky pro $\beta = 0$. V ostatních případech položme $\mu = \frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}$, $\nu = \frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}$. Pak $\mu, \nu > 0$ a $\mu + \nu = 1$. Protože A je vyvážená, platí $\frac{\alpha(|\alpha|+|\beta|)}{|\alpha|}x \in A$ a $\frac{\beta(|\alpha|+|\beta|)}{|\beta|}y \in A$. Z konvexity A tedy plyne $\alpha x + \beta y = \mu\frac{\alpha(|\alpha|+|\beta|)}{|\alpha|}x + \nu\frac{\beta(|\alpha|+|\beta|)}{|\beta|}y \in A$.

□

FAKT 45. *Nechť X je vektorový prostor a p je pseudonorma na X. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ *pro všechna* $x, y \in X$.
(b) Množina $Z = p^{-1}(0)$ *je podprostor* X. *Pro libovolná* $x, y \in X$ *taková, že* $x - y \in Z$, *je* $p(x) = p(y)$.
(c) Množiny $\{x \in X;\ p(x) < c\}$ *a* $\{x \in X;\ p(x) \leq c\}$ *jsou absolutně konvexní pro každé* $c \in [0, +\infty)$.

DŮKAZ. (a) Pro $x, y \in X$ platí, že $p(x) \leq p(x-y)+p(y)$ a $p(y) \leq p(y-x)+p(x) = p(x-y)+p(x)$, a tedy $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.

(b) Pro $x, y \in Z$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ platí, že $0 \leq p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y) = 0$, a tedy $\alpha x + \beta y \in Z$. Jsou-li $x, y \in X$ taková, že $x - y \in Z$, pak z (a) plyne, že $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = 0$.

(c) Funkce p je konvexní, tedy všechny její podúrovňové množiny jsou konvexní. Ihned je vidět, že jsou též vyvážené.

□

DEFINICE 46. Nechť X je vektorový prostor a $f : X \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je nezáporně homogenní, jestliže $f(tx) = tf(x)$ pro každé $t \geq 0$.

Všimněme si, že pro každou nezáporně homogenní funkci f platí, že $f(x) = 0$. Dále každý sublineární funkcionál (a speciálně každá pseudonorma) jsou nezáporně homogenní.

FAKT 47. *Nechť* X *je vektorový prostor a* f *je nezáporně homogenní funkce na* X. *Označme* $F_c = \{x \in X;\ f(x) \leq c\}$ *a* $G_c = \{x \in X;\ f(x) < c\}$ *pro* $c \in \mathbb{R}$. *Pro každé* $c > 0$ *jsou množiny* F_c *a* G_c *pohlcující a navíc* $F_c = cF_1$, $G_c = cG_1$.

DŮKAZ. Nechť $c > 0$ a $x \in X$. Je-li $f(x) \leq 0$, pak $f(tx) = tf(x) \leq 0 < c$ pro každé $t \geq 0$, tedy $tx \in G_c \subset F_c$. Je-li $f(x) > 0$, pak $f(tx) = tf(x) \leq \frac{c}{2} < c$ pro každé $t \in [0, \frac{c}{2f(x)}]$, takže $tx \in G_c \subset F_c$. Množiny F_c a G_c jsou tedy pohlcující. Dále, $cG_1 = \{cx;\ x \in X, f(x) < 1\} = \{cx;\ x \in X, f(cx) < c\} = \{y \in X;\ f(y) < c\} = G_c$, a analogicky pro F_c.

□

Dle předchozího faktu mají všechny podúrovňové množiny (v kladné úrovni) nezáporně homogenní funkce stejný tvar a můžeme se tedy omezit pouze na „kanonickou“ množinu na úrovni 1. Dále uvidíme, že naopak každá pohlcující množina již určuje příslušnou *nezápornou* nezáporně homogenní funkci.

DEFINICE 48. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Minkowského[2] funkcionál množiny A je funkce $\mu_A : X \to [0, +\infty)$ definovaná předpisem

$$\mu_A(x) = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\}.$$

Povšimněme si, že μ_A je dobře definovaný, neboť A je pohlcující. Není obtížné si rozmyslet, že je-li X normovaný lineární prostor, pak $\mu_{B_X} = \|\cdot\|$.

Shrňme nyní základní algebraické vlastnosti Minkowského funkcionálu:

VĚTA 49. *Nechť* X *je vektorový prostor a* $A \subset X$ *je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:*
(a) Je-li $B \supset A$, *pak* $\mu_B \leq \mu_A$.
(b) μ_A *je nezáporně homogenní.*
(c) Je-li A *konvexní, je* μ_A *nezáporný sublineární funkcionál.*
(d) Je-li A *absolutně konvexní, je* μ_A *pseudonorma.*
(e) $A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$.
(f) Je-li A *vyvážená nebo konvexní, pak* $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$.
(g) Je-li $p : X \to [0, +\infty)$ *nezáporně homogenní, pak pro každou* $B \subset X$ *takovou, že* $\{x \in X;\ p(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in X;\ p(x) \leq 1\}$, *je* $\mu_B = p$.

DŮKAZ. (a) Je $\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\} \subset \{\lambda > 0;\ x \in \lambda B\}$, odkud požadovaná nerovnost ihned plyne.

(b) Nechť $x \in X$ a $t \geq 0$. Pokud $t = 0$, pak $\mu_A(0x) = \mu_A(0) = 0 = 0\mu_A(x)$. Pro $t > 0$ je

$$\begin{aligned} t\mu_A(x) &= t \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\} = \inf\{t\lambda;\ \lambda > 0, x \in \lambda A\} = \\ &= \inf\{t\lambda;\ \lambda > 0, tx \in t\lambda A\} = \inf\{u > 0;\ tx \in uA\} = \mu_A(tx). \end{aligned}$$

[2] Hermann Minkowski

(c) Díky (b) stačí dokázat subaditivitu. Nechť $x, y \in X$ a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pak existují $0 < \alpha < \mu_A(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ a $0 < \beta < \mu_A(y) + \frac{\varepsilon}{2}$ taková, že $x \in \alpha A$ a $y \in \beta A$. Z konvexity A dostáváme, že

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{x}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{y}{\beta} \in A,$$

a tedy $x + y \in (\alpha + \beta)A$. To znamená, že $\mu_A(x + y) \leq \alpha + \beta < \mu_A(x) + \mu_A(y) + \varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud, že $\mu_A(x + y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

(d) Díky (c) stačí dokázat, že $\mu_A(\alpha x) = |\alpha|\mu_A(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Nechť nejprve $|\alpha| = 1$. Díky vyváženosti A je $\frac{1}{\alpha}A = A$, takže $\mu_A(\alpha x) = \inf\{\lambda > 0;\ \alpha x \in \lambda A\} = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda\frac{1}{\alpha}A\} = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\} = \mu_A(x)$. Je-li nyní $\alpha \in \mathbb{K}$ libovolné nenulové, pak díky (b) a předchozímu je

$$\mu_A(\alpha x) = \mu_A\left(|\alpha|\frac{\alpha}{|\alpha|}x\right) = |\alpha|\mu_A\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}x\right) = |\alpha|\mu_A(x).$$

(e) Je-li $x \in A$, pak $x \in 1A$, takže $\mu_A(x) \leq 1$.

(f) Díky (e) stačí ukázat první inkluzi. Je-li $x \in X$ takové, že $\mu_A(x) < 1$, pak existuje $\lambda \in (0, 1)$ takové, že $x \in \lambda A$. Díky předpokladům na A je $\lambda A \subset A$, takže $x \in A$.

(g) Zvolme pevně $x \in X$. Je-li $\lambda > 0$ takové, že $x \in \lambda B$, pak $\frac{1}{\lambda}x \in B$, takže $p(\frac{1}{\lambda}x) \leq 1$, neboli $p(x) \leq \lambda$. Tedy $p(x)$ je dolní závora množiny $\{\lambda > 0;\ x \in \lambda B\}$, odkud plyne, že $p(x) \leq \mu_B(x)$.

Na druhou stranu, protože p je nezáporná, existuje posloupnost $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$ taková, že $\lambda_n > p(x)$ a $\lambda_n \to p(x)$. Pak $p\big(\frac{1}{\lambda_n}x\big) < 1$, takže $\frac{1}{\lambda_n}x \in B$, neboli $x \in \lambda_n B$, čili $\mu_B(x) \leq \lambda_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle věty o limitě a nerovnostech tak je $\mu_B(x) \leq p(x)$.

□

Všimněme si, že z (g) speciálně plyne, že je-li $A \subset X$ pohlcující, pak pro $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset B \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$ je $\mu_B = \mu_A$.

Nyní se podívejme na některé topologické vlastnosti výše zkoumaných pojmů.

TVRZENÍ 50. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak* $\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$. *Je-li navíc A vyvážená nebo konvexní, pak*

$$\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} \subset \overline{A}.$$

DŮKAZ. Nechť $x \in \operatorname{Int} A$. Díky spojitosti násobení skalárem existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $(1+\varepsilon)x \in \operatorname{Int} A \subset A$. Dle Věty 49(b) a (e) tedy $\mu_A(x) = \frac{1}{1+\varepsilon}\mu_A\big((1 + \varepsilon)x\big) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$.

Nechť nyní A je vyvážená nebo konvexní. První tři inkluze plynou z předchozího a Věty 49(f). Nechť tedy pro $x \in X$ platí, že $\mu_A(x) \leq 1$. Pak pro každé $t \in (0, 1)$ platí, že $tx \in A$: Vskutku, $\mu_A(tx) = t\mu_A(x) \leq t < 1$, takže $tx \in A$ dle Věty 49(f). Tedy $\frac{n}{n+1}x \in A$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\frac{n}{n+1}x \to x$, což znamená, že $x \in \overline{A}$.

□

LEMMA 51. *Nechť X je topologický vektorový prostor a p je sublineární funkcionál na X. Pak p je stejnoměrně spojitý, právě když je shora omezený na nějakém okolí* 0.

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zřejmá. $\Leftarrow$ Nechť $\varepsilon > 0$ a nechť $U \in \tau(0)$ a $C > 0$ jsou taková, že U je symetrické a $p(z) \leq C$ pro $z \in U$. Položme $V = \frac{\varepsilon}{C}U$. Pak V je okolí 0. Pro $x, y \in X$ taková, že $x - y \in V$, pak platí, že $\frac{C}{\varepsilon}(x - y) \in U$ a $\frac{C}{\varepsilon}(y - x) \in U$, takže díky sublinearitě dostáváme, že

$$-\varepsilon \leq -\tfrac{\varepsilon}{C}p\big(\tfrac{C}{\varepsilon}(y - x)\big) = -p(y - x) \leq p(x) - p(y) \leq p(x - y) = \tfrac{\varepsilon}{C}p\big(\tfrac{C}{\varepsilon}(x - y)\big) \leq \varepsilon.$$

□

Uvědomme si, že výše uvedené lemma lze aplikovat též na lineární funkcionály na *reálném* prostoru.

DŮSLEDEK 52. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující konvexní množina. Pak μ_A je spojitý, právě když A je okolím* 0. *V tom případě pak platí, že*

$$\operatorname{Int} A = \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} = \overline{A}.$$

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Množina $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$ je zjevně otevřené okolí 0, takže $A \in \tau(0)$ dle Věty 49(f).

$\Leftarrow$ plyne z Věty 49(c) a (e) a Lemmatu 51.

Konečně, inkluze $\operatorname{Int} A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\}$ plyne z Tvrzení 50, opačná inkluze pak z toho, že $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A$ a množina vlevo je otevřená. Analogicky, inkluze $\{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\} \subset \overline{A}$ plyne opět z Tvrzení 50, opačná inkluze pak z toho, že $A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leq 1\}$ a množina vpravo je uzavřená.

□

VĚTA 53. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak $X^* \neq \{0\}$, právě když v X existuje konvexní okolí 0 různé od X.*

DŮKAZ. Díky Tvrzení 2.1 platí, že $X^* = \{0\}$, právě když $(X_{\mathbb{R}})^* = \{0\}$, takže můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že X je reálný. Je-li $f \in X^*$, $f \neq 0$, pak $U = f^{-1}\big((-1,1)\big)$ je zjevně konvexní okolí 0 různé od X, neboť jistě existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = 1$.

Na druhou stranu, nechť $U \in \tau(0)$ je konvexní a $U \neq X$. Pak U je pohlcující, a tedy μ_U je nezáporný sublineární funkcionál, a existuje $z \in X$ takové, že $\mu_U(z) > 0$. Definujme $f(tz) = t\mu_U(z)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Pak f je lineární na $Z = \operatorname{span}\{z\}$ a $f \leq \mu_U$ na Z: Pro $t \geq 0$ je $f(tz) = t\mu_U(z) = \mu_U(tz)$ a pro $t < 0$ je $f(tz) = t\mu_U(z) < 0 \leq \mu_U(tz)$. Tedy dle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3) existuje $F \in X^{\#}$ rozšiřující f takový, že $F \leq \mu_U$ na X. Díky Větě 49(e) je $\mu_U \leq 1$ na U, takže podle Lemmatu 51 je F spojitý. Konečně, $F(z) = f(z) = \mu_U(z) > 0$, tedy $F \neq 0$.

□

PŘÍKLAD 54 (Mahlon Marsh Day (1940)). Nechť μ je míra a $p \in (0,1)$. Položme $X = L_p(\mu)$ a definujme $\rho(f,g) = \int |f-g|^p \, d\mu$. Pak ρ je úplná translačně invariantní metrika na X, ve které je X topologický vektorový prostor. Tento prostor je lokálně omezený. Dále, je-li μ Lebesgueova míra na $[0,1]$, tj. $X = L_p([0,1])$, pak prostor X má následující vlastnost: Je-li $A \subset X$ neprázdná otevřená konvexní množina, pak $A = X$. To podle Věty 53 znamená, že $X^* = \{0\}$.

Označme $q(f) = \int |f|^p \, d\mu$, $f \in X$. Pak $q(f+g) \leq q(f) + q(g)$ pro každé $f, g \in X$. (To platí díky tomu, že funkce $t \mapsto t^p$ je subaditivní, neboť je konkávní a v 0 nezáporná.) Odtud snadno dostáváme, že X je vektorový podprostor prostoru měřitelných funkcí a $\rho(f,g) = q(f-g)$ je translačně invariantní metrika. (Uvědomme si ale, že na rozdíl od případu $p \geq 1$ funkce $q^{1/p}$ není norma.) Úplnost ρ se dokáže zcela stejně jako pro $p \geq 1$, viz např. [R, Důkaz Věty 3.11]. Abychom ukázali, že ρ generuje vektorovou topologii, stačí dle Faktu 3 ukázat spojitost násobení skalárem. Nechť $f_n \to f$ v ρ a $\alpha_n \to \alpha$ v $\mathbb{K}$. Pak

$$\rho(\alpha_n f_n, \alpha f) \leq \rho(\alpha_n f_n, \alpha_n f) + \rho(\alpha_n f, \alpha f) = |\alpha_n|^p \rho(f_n, f) + |\alpha_n - \alpha|^p q(f) \to 0.$$

Báze okolí 0 je tvořena množinami $B(0,r)$, $r > 0$. Ukážeme, že $B(0,1)$ je omezené okolí 0. Nechť tedy $U \in \tau(0)$. Pak existuje $r > 0$ takové, že $B(0,r) \subset U$. Je-li $f \in B(0,1)$, pak $r^{1/p} f \in B(0,r)$, a tedy $B(0,1) \subset r^{-1/p} B(0,r) \subset r^{-1/p} U$.

Předpokládejme nyní, že $X = L_p([0,1])$. Stačí ukázat, že X nemá jiné konvexní okolí 0 než X. Nechť tedy $U \in \tau(0)$ je konvexní a $r > 0$ je takové, že $B(0,r) \subset U$. Nechť $f \in X$ je libovolná. Zvolíme $n \in \mathbb{N}$ takové, aby $n^{p-1} \int_0^1 |f|^p \, d\lambda < r$. Tvrdíme, že existuje dělení $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ intervalu $[0,1]$ takové, že

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} |f|^p \, d\lambda = \frac{1}{n} \int_0^1 |f|^p \, d\lambda \quad \text{pro } j = 1, \ldots, n.$$

Vskutku, funkce $G(x) = \int_0^x |f|^p \, d\lambda$ je neklesající na $[0,1]$, spojitá a splňuje $G(0) = 0$ a $G(1) = \int_0^1 |f|^p \, d\lambda$. Dle věty o nabývání mezihodnot tedy existují $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ tak, že $G(x_j) = \frac{j}{n} \int_0^1 |f|^p \, d\lambda$ pro $j = 1, \ldots, n$. Položme nyní $g_j = n\chi_{(x_{j-1}, x_j]} f$. Pak pro každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ platí, že

$$\int_0^1 |g_j|^p \, d\lambda = \int_{x_{j-1}}^{x_j} n^p |f|^p \, d\lambda = n^{p-1} \int_0^1 |f|^p \, d\lambda < r,$$

to jest $g_j \in B(0,r) \subset U$. Protože však $f = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} g_j$, je $f \in U$. Tím jsme dokázali, že $U = X$.

Jak jsme viděli v předchozím příkladu, může být duální prostor k netriviálnímu topologickému vektorovému prostoru triviální. V předchozích kapitolách jsme viděli velkou užitečnost tvrzení typu Hahnovy-Banachovy věty; takové věty ovšem nemohou platit, pokud není duální prostor dostatečně bohatý. Proto z obecných topologických prostorů vydělíme užitečnou třídu, která nám zajistí dostatečný přísun spojitých lineárních funkcionálů. Jak je patrno z Věty 53, klíčem jsou netriviální konvexní okolí 0.

DEFINICE 55.

- Řekneme, že topologický vektorový prostor je lokálně konvexní[3], pokud v něm existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami.
- Lokálně konvexní prostor, jehož topologie je indukovaná translačně invariantní úplnou metrikou, nazveme Fréchetův.
- Dále řekneme, že topologický vektorový prostor je normovatelný, pokud je jeho topologie generovaná normou.

Příkladem lokálně konvexních prostorů jsou například normované lineární prostory. V případě Banachových prostorů jsou to pak Fréchetovy prostory, neboť $\rho(x, y) = \|x - y\|$ je úplná translačně invariantní metrika.

POZNÁMKA 56. Lokálně konvexní prostory jsou úplně regulární, neboť každý topologický vektorový prostor je úplně regulární. Pro lokálně konvexní prostory to ovšem snadno dokážeme bez hlubších znalostí topologie pomocí Minkowského funkcionálu: Nechť X je lokálně konvexní, $y \in X$ a $F \subset X$ je uzavřená množina neobsahující y. Nechť $C \in \tau(0)$ je konvexní množina splňující $(y + C) \cap F = \emptyset$. Pak $\mu_C \geq 1$ na $F - y$, což plyne z Věty 49(f). Protože μ_C je spojitý (Důsledek 52), je $f(x) = \min\{\mu_C(x - y), 1\}$ spojitá funkce do $[0, 1]$, pro kterou $f(y) = 0$ a $f = 1$ na F.

TVRZENÍ 57. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li $U \in \tau(0)$ konvexní, pak existuje otevřené absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$.*

DŮKAZ. Položme $A = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U$. Pak A je absolutně konvexní množina: konvexita se snadno nahlédne, pro důkaz vyváženosti vezměme libovolné $r \in [0, 1]$ a $\beta \in \mathbb{K}$, $|\beta| = 1$. Pak $rU \subset U$, neboť U je konvexní a $0 \in U$, a tedy

$$(r\beta)A = \bigcap_{|\alpha|=1} (r\beta)\alpha U = \bigcap_{|\gamma|=1} \gamma r U \subset \bigcap_{|\gamma|=1} \gamma U = A.$$

Zvolme nyní $W \in \tau(0)$ vyvážené takové, že $W \subset U$. Pak $\frac{1}{\alpha} W \subset W \subset U$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$, což znamená, že $W \subset A$. Tedy $0 \in \operatorname{Int} W \subset \operatorname{Int} A$. Dle Tvrzení 12(e), (g) je tak $V = \operatorname{Int} A$ absolutně konvexní otevřené okolí 0 a $V \subset A \subset U$.

□

DŮSLEDEK 58. *V lokálně konvexním prostoru má $\tau(0)$ bázi sestávající z otevřených absolutně konvexních pohlcujících množin.*

DŮKAZ. Plyne z Tvrzení 57 a 7(a).

□

Nechť X je vektorový prostor, $p_1, \dots, p_n$ jsou pseudonormy na X a $\varepsilon > 0$. Označme

$$U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} = \{x \in X;\ p_1(x) < \varepsilon, \dots, p_n(x) < \varepsilon\}$$

a uvědomme si, že dle Faktů 45(c) a 47 je tato množina absolutně konvexní a pohlcující.

VĚTA 59. *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem na X. Pak na X existuje lokálně konvexní topologie τ taková, že systém $\mathcal{S} = \{U_{p,\varepsilon};\ p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří subbázi okolí 0 a systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon};\ n \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0. Topologie τ má následující vlastnosti:*

(a) Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je τ-spojitá.

[3] Poprvé je studoval John von Neumann (1935), název zavedl Andrej Nikolajevič Tichonov (Андрей Николаевич Тихонов) (1935).

(b) Množina $A \subset X$ je τ-omezená právě tehdy, když $p(A)$ je omezená pro každou $p \in \mathcal{P}$.
(c) Net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v τ právě tehdy, když $p(x_\gamma - x) \to 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$.
Topologii τ budeme nazývat topologií generovanou systémem pseudonorem $\mathcal{P}$.

Na druhou stranu, je-li (X,τ) lokálně konvexní prostor a $\mathcal{V}$ je subbáze okolí 0 sestávající z absolutně konvexních množin, pak τ je generována systémem pseudonorem $\{\mu_V;\ V \in \mathcal{V}\}$.

DŮKAZ. Nejprve ukážeme, že systém $\mathcal{U}$ splňuje předpoklady Věty 8. Každá z množin $U_{p,\varepsilon}$ obsahuje 0, takže $\mathcal{S}$ je subbází filtru. Dále jsou-li $p_1,\dots,p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n > 0$, pak pro $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n\}$ je $\bigcap_{j=1}^n U_{p_j,\varepsilon} = U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset \bigcap_{j=1}^n U_{p_j,\varepsilon_j}$, tedy $\mathcal{U}$ je bází dotyčného filtru. Jsou-li $p_1,\dots,p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ a položíme-li $V = U_{p_1,\dots,p_n,\frac{\varepsilon}{2}}$, pak snadno nahlédneme, že $V + V \subset U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon}$. Každá množina z $\mathcal{U}$ je vyvážená a pohlcující, dle Věty 8 tedy existuje právě jedna vektorová topologie τ na X taková, že $\mathcal{U}$ je bází $\tau(0)$. Navíc množiny z $\mathcal{U}$ jsou absolutně konvexní, takže τ je lokálně konvexní.

(a) Každá pseudonorma $p \in \mathcal{P}$ je zjevně omezená na $U_{p,1}$, takže je spojitá dle Lemmatu 51.

(b) $\Rightarrow$ Nechť $p \in \mathcal{P}$ je dána. Pak existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU_{p,1}$. Pro libovolné $x \in A$ pak platí, že $\frac{x}{t} \in U_{p,1}$, a tedy $p(x) < t$.

$\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno a nechť $p_1,\dots,p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ jsou taková, že $U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$. Pak existují $M_j > 0$ taková, že $p_j \le M_j$ na A pro $j = 1,\dots,n$. Zvolme $t > \max\{\frac{1}{\varepsilon}M_j;\ j = 1,\dots,n\}$. Pak pro $x \in A$ je $p_j(\frac{x}{t}) < \varepsilon$, $j = 1,\dots,n$, takže $x \in tU_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset tU$.

(c) $\Rightarrow$ plyne z (a).

$\Leftarrow$ Nechť $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ je net a $x \in X$ je takové, že $p(x_\gamma - x) \to 0$ pro každé $p \in \mathcal{P}$. Nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Existují $p_1,\dots,p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ taková, že $U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$. Dále existuje $\gamma_0 \in \Gamma$ takové, že pro všechny $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \ge \gamma_0$ je $p_j(x_\gamma - x) < \varepsilon$, $j = 1,\dots,n$. Pak pro $\gamma \ge \gamma_0$ je $x_\gamma - x \in U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon} \subset U$. To znamená, že $x_\gamma \to x$ v τ.

Nechť nyní (X,τ) je lokálně konvexní prostor a $\mathcal{V}$ je subbáze okolí 0 sestávající z absolutně konvexních množin. Označme σ topologii generovanou systémem $\{\mu_V;\ V \in \mathcal{V}\}$. Je-li $V \in \mathcal{V}$, pak $U_{\mu_V,1} \subset V$ dle Věty 49(f). Odtud dostáváme, že $\tau(0) \subset \sigma(0)$.

Na druhou stranu, pro každé $V \in \mathcal{V}$ a $\varepsilon > 0$ je množina $U_{\mu_V,\varepsilon} = \varepsilon U_{\mu_V,1}$ otevřená v τ (Fakt 47, Důsledek 52), odkud snadno plyne, že $\sigma(0)$ má bázi sestávající z τ-otevřených množin. Tedy $\sigma(0) \subset \tau(0)$. □

Uvědomme si, že ze spojitosti každé pseudonormy $p \in \mathcal{P}$ ve větě výše plyne τ-otevřenost množin systému $\mathcal{U}$.

TVRZENÍ 60. *Nechť (X,τ) je lokálně konvexní prostor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X je Hausdorffův.
(ii) Každý systém pseudonorem $\mathcal{P}$ generující τ má následující vlastnost:
Pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$ takové, že $p(x) > 0$.
(iii) Existuje systém pseudonorem $\mathcal{P}$ generující τ s vlastností z tvrzení (ii).

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) Nechť $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem generující τ a nechť $x \in X \setminus \{0\}$. Pak existují $p_1,\dots,p_n \in \mathcal{P}$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $x \notin U_{p_1,\dots,p_n,\varepsilon}$ (Věta 10(c)). Tedy $p_j(x) \ge \varepsilon > 0$ alespoň pro jedno $j \in \{1,\dots,n\}$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) je triviální.

(iii)$\Rightarrow$(i) Nechť $x \in X \setminus \{0\}$ je libovolné a $p \in \mathcal{P}$ je takové, že $\varepsilon = p(x) > 0$. Pak $x \notin U_{p,\varepsilon} \in \tau(0)$. Prostor X je tedy Hausdorffův dle Věty 10(c).

□

PŘÍKLAD 61. Nechť Γ je libovolná neprázdná množina a nechť $X = \mathbb{K}^\Gamma$ s topologií τ generovanou systémem pseudonorem $\{p_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$, kde $p_\gamma(f) = |f(\gamma)|$ pro $f \in X$. Snadno je vidět, že p_γ jsou opravdu pseudonormy, a že pro libovolný net $\{f_\alpha\} \subset X$ platí, že $f_\alpha \to f$, právě když $f_\alpha \to f$ bodově na Γ. Tedy τ je topologie bodové konvergence na Γ (nebo též součinová topologie na $\mathbb{K}^\Gamma$) a je to Hausdorffova lokálně konvexní topologie.

Nechť $\Gamma = [0,1]$. Tvrdíme, že existuje posloupnost $\{f_n\} \subset X = \mathbb{K}^{[0,1]}$ konvergující k 0 taková, že $\lambda_n f_n \not\to 0$ pro žádnou posloupnost $\{\lambda_n\} \subset (0,+\infty)$ takovou, že $\lambda_n \to +\infty$. (Z Lemmatu 33 tedy plyne, že

X není metrizovatelný.) Označme $\Lambda = \big\{\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty);\ \lambda_n \to +\infty\big\}$. Pak Λ má kardinalitu kontinua (například obsahuje posloupnosti $\{n + \chi_A(n)\}$ pro $A \subset \mathbb{N}$), a tedy existuje bijekce $\Phi\colon \Lambda \to [0,1]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [0,1]$ položme

$$f_n(x) = \frac{1}{\Phi^{-1}(x)_n}.$$

Pro pevné $x \in [0,1]$ pak $f_n(x) \to 0$, nicméně pro každou posloupnost $\{\lambda_k\} \in \Lambda$ platí, že $\lambda_n f_n\big(\Phi(\{\lambda_k\})\big) = 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\lambda_n f_n \not\to 0$.

Víme, že topologický vektorový prostor se spočetnou bází okolí 0 je pseudometrizovatelný (Věta 21). Pro lokálně konvexní prostory je důkaz tohoto tvrzení mnohem jednodušší.

LEMMA 62. *Nechť (X, τ) je lokálně konvexní prostor generovaný spočetným systémem pseudonorem $\{p_n\}$. Pak*

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{p_n(x-y), 1\}$$

je translačně invariantní pseudometrika na X generující τ.

DŮKAZ. Ze subaditivity funkce $t \mapsto \min\{t,1\}$ snadno plyne, že ρ je translačně invariantní pseudometrika. Všechny pseudonormy p_n jsou τ-spojité (Věta 59(a)) a řada v definici ρ konverguje stejnoměrně na $X \times X$, což znamená, že ρ je τ-spojitá. Odtud plyne, že každé ρ-okolí 0 je v $\tau(0)$.

Na druhou stranu, nechť $U \in \tau(0)$. Pak existují $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ a $\varepsilon \in (0,1]$ taková, že $U_{p_{n_1},\dots,p_{n_k},\varepsilon} \subset U$. Položme $m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Pak $U_\rho(0, \frac{\varepsilon}{2^m}) \subset U$. Vskutku, je-li $x \in X$, $\rho(x,0) < \frac{\varepsilon}{2^m}$, pak $\frac{1}{2^{n_j}} \min\{p_{n_j}(x), 1\} < \frac{\varepsilon}{2^m}$ pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$. Odtud snadno plyne, že $p_{n_j}(x) < \varepsilon$ pro každé $j \in \{1, \dots, k\}$, neboli $x \in U_{p_{n_1},\dots,p_{n_k},\varepsilon} \subset U$. Tedy každé τ-okolí 0 je i ρ-okolím 0.

□

PŘÍKLAD 63. Nechť T je topologický prostor a nechť $X = C(T)$ s topologií τ stejnoměrné konvergence na kompaktních podmnožinách T z Příkladu 9. Pro $K \subset T$ kompaktní a $f \in X$ položme $p_K(f) = \max_K |f|$. Pak systém pseudonorem $\mathcal{P} = \{p_K;\ K \subset T \text{ kompaktní}\}$ generuje τ, takže X je lokálně konvexní. Uvědomme si, že topologie bodové konvergence na X je slabší než τ, neboť jednobodové podmnožiny T jsou kompaktní. Speciálně, τ je Hausdorffova. Dále platí:

(a) Jestliže v T existuje posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ taková, že každá kompaktní $K \subset T$ je podmnožinou nějaké K_n, pak systém $\mathcal{Q} = \{p_{K_n};\ n \in \mathbb{N}\}$ také generuje τ.
(b) Je-li T lokálně kompaktní se spočetnou bází, pak X je Fréchetův prostor a topologie τ je topologií lokálně stejnoměrné konvergence.

Snadno nahlédneme, že p_K jsou pseudonormy. Dle Věty 59 tedy systém $\mathcal{P}$ generuje τ a τ je lokálně konvexní.

(a) Označme σ topologii generovanou systémem $\mathcal{Q}$. Jelikož $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, je zjevně $\sigma(0) \subset \tau(0)$. Je-li nyní $U \in \tau(0)$ dáno, pak existují kompakty $L_1, \dots, L_k \subset T$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $U_{p_{L_1},\dots,p_{L_k},\varepsilon} \subset U$. Dále existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\bigcup_{j=1}^k L_j \subset K_n$. Snadno je vidět, že $U_{p_{K_n},\varepsilon} \subset U_{p_{L_1},\dots,p_{L_k},\varepsilon} \subset U$, a tedy $U \in \sigma(0)$.

(b) Dle Tvrzení 13.92 existuje posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ jako v (a), pro kterou navíc platí, že $K_n \subset K_{n+1}$. Nechť ρ je metrika z Lemmatu 62 daná pseudonormami $\{p_{K_n}\}$. Dle (a) tato metrika generuje τ. Ukažme, že ρ je úplná. Nechť $\{f_j\} \subset X$ je ρ-cauchyovská posloupnost. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je pak posloupnost $\{f_j\restriction_{K_n}\}_{j=1}^\infty$ cauchyovská v úplném prostoru $(C(K_n), \|\cdot\|_\infty)$, takže existuje funkce $g_n \in C(K_n)$ taková, že $f_j\restriction_{K_n} \rightrightarrows g_n$ na K_n. Jelikož je posloupnost $\{K_n\}$ neklesající, nutně platí, že $g_k\restriction_{K_n} = g_n$ pro $k > n$. Odtud snadno odvodíme existenci funkce $f\colon T \to \mathbb{K}$ takové, že $f_j\restriction_{K_n} \rightrightarrows f\restriction_{K_n}$ na K_n pro každé $n \in \mathbb{N}$. Speciálně, $f\restriction_{K_n}$ je spojitá.

Tvrdíme, že $f \in C(T)$. Nechť $x \in T$ je dáno. Nechť V je kompaktní okolí bodu x a nechť $n \in \mathbb{N}$ je takové, že $V \subset K_n$. Jelikož f je spojitá na K_n, je spojitá na V, a tedy i v bodě x.

Konečně, dle úvah výše je $\lim_{j\to\infty} p_{K_n}(f_j - f) = \lim_{j\to\infty} p_{K_n}(f_j\restriction_{K_n} - f\restriction_{K_n}) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $\rho(f_j, f) \to 0$, což znamená, že metrika ρ je úplná.

PŘÍKLAD 64. Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$. Pak prostor $H(\Omega)$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence je uzavřeným podprostorem $C(\Omega)$ z předchozího příkladu. Je to tedy také Fréchetův prostor. Stačí si uvědomit, že lokálně stejnoměrná limita posloupnosti holomorfních funkcí je opět holomorfní funkce.

VĚTA 65 (A. N. Kolmogorov (1934)). *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak X je pseudonormovatelný (resp. normovatelný, je-li X Hausdorffův) právě tehdy, když v něm existuje omezené konvexní okolí* 0.

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Nechť $U \in \tau(0)$ je konvexní a omezené. Dle Tvrzení 57 existuje otevřené absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$, tedy V je omezené. Pak pseudonorma μ_V generuje τ. Vskutku, systém $\left\{U_{\mu_V,\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je bází okolí 0 v topologii generované pseudonormou μ_V. Ale $\left\{U_{\mu_V,\frac{1}{n}}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n}U_{\mu_V,1}\right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\frac{1}{n}V\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ (Fakt 47, Důsledek 52), což je báze $\tau(0)$ dle Lemmatu 20.

$\Rightarrow$ Je-li τ generována nějakou pseudonormou p na X, je $U_{p,1}$ konvexní okolí 0, které je τ-omezené dle Věty 59(b).

□

Tento oddíl uzavřeme tvrzením, které se nám bude hodit později.

TVRZENÍ 66. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A omezená, je i množina conv A *omezená.*

(b) Je-li A totálně omezená, je i množina conv A *totálně omezená.*

DŮKAZ. (a) Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje konvexní $C \in \tau(0)$ takové, že $C \subset U$. Protože A je omezená, existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tC$. Množina vpravo je ovšem konvexní, což znamená, že conv $A \subset tC \subset tU$.

(b) Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \subset A$ je konečná taková, že $A \subset F + V$. Množina conv F je kompaktní, neboť je spojitým obrazem kompaktu $\left\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n;\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\right\}$ při zobrazení $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j$, kde $F = \{x_1, \dots, x_n\}$. Je tedy totálně omezená (Tvrzení 27), takže existuje $H \subset X$ konečná taková, že conv $F \subset H + V$. Dle Faktu 42 je množina (conv F) $+ V$ konvexní, odkud plyne, že conv $A \subset \operatorname{conv}(F + V) \subset (\operatorname{conv} F) + V \subset H + V + V \subset H + U$.

□

Poznamenejme, že bez předpokladu lokální konvexity předchozí tvrzení neplatí – konvexní obal totálně omezené množiny nemusí být ani omezený:

PŘÍKLAD 67. Nechť $p \in (0,1)$ a $X = \ell_p = \left\{x = (x_n);\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\right\}$ s metrikou $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p$. Pak ρ je úplná translačně invariantní metrika na X, ve které je X topologický vektorový prostor. Tento prostor je lokálně omezený. Dále platí:

(a) Prostor X^* lze indentifikovat s prostorem ℓ_∞ pomocí lineární bijekce $I\colon \ell_\infty \to X^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

(b) Existuje kompaktní množina $K \subset X$, jejíž konvexní obal není omezený.

Prostor X není lokálně konvexní (Tvrzení 66 spolu s (b)), ale přesto má netriviální duál, který odděluje body X (stačí vzít souřadnicové funkcionály). Tedy X obsahuje mnoho netriviálních otevřených konvexních množin, nicméně ne dost na to, aby to byl lokálně konvexní prostor.

První část plyne z Příkladu 54, vezmeme-li za μ aritmetickou míru na $\mathbb{N}$.

(a) Nechť $y \in \ell_\infty$ je dáno. Pro každé $x \in \ell_p$ je $\{x_n\}$ omezená a označíme-li $M = \|x\|_\infty$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| = \sum_{n=1}^{\infty} M \left|\frac{x_n}{M} y_n\right| \le M \|y\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x_n}{M}\right|^p = M^{1-p} \|y\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p, \tag{1}$$

neboť $\left|\frac{x_n}{M}\right| \le 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že f_y je dobře definovaná funkce. Dále f_y je zjevně lineární. Tvrdíme, že je omezený na $U(0,1)$: Pro každé $x \in U(0,1)$ je $\|x\|_\infty \le 1$, a tedy nerovnost (1) implikuje, že $|f_y(x)| \le \|y\|_\infty$. To znamená, že f_y je spojitý lineární funkcionál (Věta 32).

Linearita zobrazení I je zřejmá. Ukažme nyní, že je na. Nechť je dán $f \in X^*$. Stejně jako pro $p \geq 1$ definujeme kanonické bázové vektory $e_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, a snadno si rozmyslíme, že pro každý vektor $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$ opět platí, že $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, kde konvergenci řady chápeme v metrice ρ. Vskutku, $\rho\bigl(x, \sum_{k=1}^n x_k e_k\bigr) = \sum_{k=n+1}^\infty |x_k|^p \to 0$. Položme $y_n = f(e_n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Množina $\{e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je omezená (snadno nahlédneme z definice), takže i posloupnost $\{y_n\}$ je omezená (Věta 32), neboli $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell_\infty$. Tvrdíme, že $f = f_y$. Nechť $x \in X$. Pak $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$, a tedy

$$f(x) = f\left(\sum_{n=1}^\infty x_n e_n\right) = \sum_{n=1}^\infty x_n f(e_n) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n = f_y(x).$$

Konečně, protože $I(y)(e_n) = y_n$, je $\operatorname{Ker} I = \{0\}$, a tedy I je prosté.

(b) Zvolme nerostoucí posloupnost $\{c_n\} \subset (0, +\infty)$ konvergující k 0, pro kterou $\lim_{n\to\infty} n^{1-p} c_n^p = +\infty$. (Stačí například položit $c_n = (1 + \log n)^{-1}$ nebo $c_n = n^{p-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$.) Pak $c_n e_n \to 0$, neboť $\rho(c_n e_n, 0) = c_n^p \to 0$. Množina $K = \{c_n e_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ je tedy kompaktní. Položíme-li však $x^m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{m} c_n e_n$ pro $m \in \mathbb{N}$, dostaneme prvky $\operatorname{conv} K$, které splňují

$$\rho(y^m, 0) = \sum_{n=1}^m \left|\frac{1}{m} c_n\right|^p \geq \frac{1}{m^p} \sum_{n=1}^m c_m^p = m^{1-p} c_m^p \to +\infty.$$

Dle Poznámky 17 je tak množina $\operatorname{conv} K$ neomezená v topologii generované metrikou ρ.

7. Oddělovací věty

V tomto oddílu se budeme věnovat dalším zásadním důsledkům Hahnovy-Banachovy věty. Jednoduchým předchůdcem níže uvedených oddělovacích vět je Věta 2.7. Vzhledem ke znění Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3) není překvapivé, že hlavní roli zde hraje konvexita (viz též Větu 53).

LEMMA 68. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $f \in X^* \setminus \{0\}$. Pak f je otevřené zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $G \subset X$ je otevřená a $y \in f(G)$ je libovolný. Nechť dále $x \in G$ je takový, že $y = f(x)$. Pak existuje vyvážené $U \in \tau(0)$ takové, že $x + U \subset G$. Dále existuje $w \in X$, pro které $f(w) = 1$. Protože U je pohlcující, existuje $\delta > 0$ takové, že $\delta w \in U$. Pak díky vyváženosti U platí, že

$$\begin{aligned} U(y, \delta) = y + \{\lambda\delta;\ |\lambda| < 1\} &= f(x) + \{f(\lambda\delta w);\ |\lambda| < 1\} = \\ &= f\bigl(x + \{\lambda\delta w;\ |\lambda| < 1\}\bigr) \subset f(x + U) \subset f(G). \end{aligned}$$

Tedy $f(G)$ je otevřená.

□

VĚTA 69. [4] *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ *pro každé $x \in A$.*
(b) Je-li X lokálně konvexní, A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$. *Je-li navíc A absolutně konvexní, pak dokonce* $\sup_A |f| < \inf_B \operatorname{Re} f$.

DŮKAZ. Je-li A nebo B prázdná, pak tvrzení zřejmě triviálně platí. Můžeme tedy předpokládat, že A i B jsou neprázdné. Díky Tvrzení 2.1 stačí (a) a první část (b) dokázat pouze pro reálné prostory a v komplexním případě pak vzít funkcionál $h(x) = f(x) - i f(ix)$.

[4] Tato věta byla dokázána v různě silných formulacích mnoha matematiky: První verze pochází od Stanisława Mazura (1933), který formuloval tvrzení podobné (a) v normovaných lineárních prostorech pro B podprostor X. Zobecnění Mazurovy věty do topologických vektorových prostorů provedl Jean Dieudonné (1941) a skupina Nicolas Bourbaki. Verzi pro B konvexní v normovaných lineárních prostorech dokázal Meier „Maks“ Eidelheit (1936). Námi uvedený důkaz, který v podstatě převádí konvexní případ na Mazurovu větu, podal John Wilder Tukey (1942).

(a) Zvolme $a \in A$ a $b \in B$ a označme $w = b - a$ a $C = w + A - B$. Pak C je otevřená konvexní množina (Tvrzení 11(a), Fakt 42), pro kterou $0 \in C$ a $w \notin C$ (neboť $A \cap B = \emptyset$). Podle Věty 49(c), (e) a (f) je μ_C sublineární funkcionál, $\mu_C \leq 1$ na C a $\mu_C(w) \geq 1$. Položíme-li $Y = \operatorname{span}\{w\}$ a $g(tw) = t$ pro $t \in \mathbb{R}$, pak g je spojitý lineární funkcionál na Y. Dále $g(tw) = t \leq t\mu_C(w) = \mu_C(tw)$ pro $t \geq 0$ a $g(tw) = t < 0 \leq \mu_C(tw)$ pro $t < 0$, tedy $g(x) \leq \mu_C(x)$ pro každé $x \in Y$. Podle Hahnovy-Banachovy věty (Věta 2.3(a)) existuje lineární forma f na X, která rozšiřuje g a splňuje $f \leq \mu_C$ na X. Speciálně $f(x) \leq \mu_C(x) \leq 1$ pro $x \in C$, tedy f je spojitý lineární funkcionál (Lemma 51), pro který $f(w) = g(w) = 1$.

Nechť nyní $x \in A$ a $y \in B$. Pak $x - y + w \in C$, takže $f(x) = f(y) + f(x - y + w) - f(w) \leq f(y) + \mu_C(x - y + w) - 1 \leq f(y)$. Odtud plyne, že $f(x) \leq \alpha = \inf_B f$ pro každé $x \in A$. Množina $f(A)$ je ovšem otevřená (Lemma 68), takže kdyby pro nějaké $x \in A$ bylo $f(x) = \alpha$, pak by existovalo $y \in A$, pro které by $f(y) > \alpha$, což nejde. Tím je nerovnost z (a) dokázána.

(b) Jelikož je X lokálně konvexní prostor, existuje díky Větě 10(a) a Důsledku 58 otevřené konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $(B + V) \cap A = \emptyset$. Množina $B + V$ je otevřená a konvexní (Tvrzení 11(a), Fakt 42). Dle (a) tedy existuje $g \in X^*$ takový, že $g(x) < \inf_A g$ pro každé $x \in B + V$. Díky kompaktnosti B existuje $x \in B$, pro které $\max_B g = g(x) < \inf_A g$. Funkcionál $f = -g$ tak splňuje inzerovanou nerovnost.

Konečně, předpokládejme, že je navíc A absolutně konvexní. Nechť $y \in A$ je libovolné. Pak existuje $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| = 1$ takové, že $|f(y)| = \alpha f(y) = f(\alpha y) = \operatorname{Re} f(\alpha y)$. Protože $\alpha y \in A$, je $|f(y)| = \operatorname{Re} f(\alpha y) \leq \sup_A \operatorname{Re} f$. Odtud plyne, že $\sup_A |f| \leq \sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$.

□

Následující důsledek je analogií Důsledku 2.5 a Vět 2.7 a 2.4 pro lokálně konvexní prostory.

DŮSLEDEK 70. *Nechť X je lokálně konvexní prostor. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li X Hausdorffův, pak X^* odděluje body X.
(b) Je-li Y uzavřený podprostor X a $x \notin Y$, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = 1$.
(c) Je-li Y podprostor X a $f \in Y^*$, pak existuje $F \in X^*$ takový, že $F\restriction_Y = f$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x, y \in X$. Použitím Věty 69(b) pro $A = \{x\}$ a $B = \{y\}$ obdržíme $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$.

(b) Položme $A = Y$ a $B = \{x\}$. Dle Věty 69(b) existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_Y |f| < \operatorname{Re} f(x)$. Pak f je lineární funkcionál, který je omezený na celém vektorovém prostoru Y, a tedy je na Y nulový. Zjevně $f(x) \neq 0$, na závěr tedy stačí vynásobit f konstantou $\frac{1}{f(x)}$.

(c) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $f \neq 0$. Tedy existuje $x \in Y$, pro které $f(x) = 1$. Z hlediska prostoru X je množina $\operatorname{Ker} f$ relativně uzavřená v Y a $x \in Y \setminus \operatorname{Ker} f$. Odtud plyne, že $x \notin \overline{\operatorname{Ker} f}^X$, přičemž množina vpravo je uzavřený podprostor X. Dle (b) tedy existuje $F \in X^*$ takový, že $F(x) = 1$ a $F\restriction_{\operatorname{Ker} f} = 0$. Tvrdíme, že to znamená, že $F\restriction_Y = f$: Nechť $y \in Y$. Pak $y - f(y)x \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} F$, a tedy $F(y) = F(y - f(y)x) + F(f(y)x) = f(y)F(x) = f(y)$.

□

Následující příklady ukazují, že bez dodatečných předpokladů na množiny A, B ve Větě 69 se nelze obejít.

PŘÍKLAD 71. Nechť X je nekonečněrozměrný pseudometrizovatelný topologický vektorový prostor. Pak v něm existuje kontinuum mnoho disjunktních konvexních množin (dokonce afinních podprostorů) $Z_\alpha \subset X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, z nichž každá je hustá v X. Žádné dvě tedy nelze oddělit spojitým lineárním funkcionálem.

Skutečně, dle Věty 39 existuje nespojitý lineární funkcionál $f : X \to \mathbb{K}$. Položme $Z_\alpha = f^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Existuje $w \in X$ takové, že $c = f(w) \neq 0$. Pak $Z_\alpha = \frac{\alpha}{c} w + \operatorname{Ker} f$, tedy Z_α je afinní podprostor. Zjevně Z_α a Z_β jsou disjunktní, je-li $\alpha \neq \beta$. Konečně, $Z_0 = \operatorname{Ker} f$ je hustý v X dle Věty 35 a ostatní Z_α jsou husté v X dle Tvrzení 5(a).

PŘÍKLAD 72 (John Wilder Tukey (1942)). Existují disjunktní uzavřené konvexní množiny $A, B \subset \ell_2$ takové, že $A - B$ je hustá v ℓ_2. Tyto množiny tedy nelze oddělit spojitým nenulový lineárním funkcionálem ani v nejslabším smyslu, tj. neexistuje $f \in \ell_2^* \setminus \{0\}$ tak, aby $f(x) \geq f(y)$ pro libovolná $x \in A$, $y \in B$.

Vskutku, to by znamenalo, že $f(A-B) \subset [0,+\infty)$, ale $\mathbb{R} = f(\ell_2) = f(\overline{A-B}) \subset \overline{f(A-B)} \subset [0,+\infty)$, což je spor.

Položme

$$A = \left\{x \in \ell_2;\ x_1 \geq n \cdot \left|x_n - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right| \text{ pro } n \geq 2\right\},$$
$$B = \{x \in \ell_2;\ x_n = 0 \text{ pro } n \geq 2\}.$$

Snadno nahlédneme, že A je konvexní a uzavřená (je to průnik uzavřených množin) a B je dokonce uzavřený jednorozměrný podprostor. Dále, je-li $x \in B$, pak pro $n \geq 2$ je $n\left|x_n - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right| = n^{\frac{1}{3}} \to +\infty$, takže $x \notin A$. Tedy A a B jsou disjunktní.

Zvolme nyní $z \in \ell_2$ a $\varepsilon > 0$ libovolně. Existuje $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ takové, že $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}} < \frac{\varepsilon^2}{4}$ a $\sum_{n=k+1}^{\infty} z_n^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$. Definujme

$$x_n = \begin{cases} \max_{2\leq j\leq k} j\left|z_j - \frac{1}{j^{\frac{2}{3}}}\right| & \text{pro } n = 1, \\ z_n & \text{pro } 2 \leq n \leq k, \\ \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} & \text{pro } n > k. \end{cases}$$

Snadno je vidět, že $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in A$. Dále položme $y = (x_1 - z_1, 0, 0, \dots) \in B$. Pak

$$\|z - (x-y)\| = \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty} \left(z_n - \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty} z_n^2} + \sqrt{\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} < \varepsilon.$$

8. Součiny prostorů, kvocienty, projekce a doplňky

TVRZENÍ 73. *Nechť X_γ, $\gamma \in \Gamma$ jsou topologické vektorové prostory. Pak $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ (se součinovou topologií) je topologický vektorový prostor. Pokud jsou X_γ, $\gamma \in \Gamma$ lokálně konvexní, je i X lokálně konvexní.*

DŮKAZ. Nechť $\{(f_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ je net v $X \times X$ konvergující k $(f,g) \in X \times X$. Pak $\lim_\alpha f_\alpha(\gamma) = f(\gamma)$ a $\lim_\alpha g_\alpha(\gamma) = g(\gamma)$ pro každé $\gamma \in \Gamma$, takže ze spojitosti sčítání na každém prostoru X_γ plyne, že $\lim_\alpha (f_\alpha + g_\alpha)(\gamma) = \lim_\alpha \big(f_\alpha(\gamma) + g_\alpha(\gamma)\big) = f(\gamma) + g(\gamma) = (f+g)(\gamma)$, neboli $f_\alpha + g_\alpha \to f + g$ v X. Zcela analogicky dokážeme i spojitost násobení skalárem.

Předpokládejme nyní, že X_γ, $\gamma \in \Gamma$ jsou lokálně konvexní. Pro každé $\gamma \in \Gamma$ nechť $\mathcal{U}_\gamma$ je báze okolí 0 v X_γ sestávající z konvexních množin a obsahující X_γ. Z definice součinové topologie snadno plyne, že systém

$$\mathcal{U} = \left\{\prod_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma;\ U_\gamma \in \mathcal{U}_\gamma, U_\gamma \neq X_\gamma \text{ jen pro konečně mnoho } \gamma\right\}$$

je bází okolí 0 v X. Protože vektorové operace jsou definovány po složkách, je téměř zřejmé, že množiny v $\mathcal{U}$ jsou konvexní. Tedy X je lokálně konvexní.

□

Nechť (X,τ) je topologický vektorový prostor a Y je podprostor X. Uvažujme (vektorový) faktorprostor X/Y a kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$. Na prostoru X/Y uvažujme kvocientovou topologii σ, tj. topologii definovanou tak, že množina $G \subset X/Y$ je σ-otevřená právě tehdy, když $q^{-1}(G)$ je τ-otevřená. Prostor $(X/Y, \sigma)$ se nazývá faktorprostorem (též kvocientem) (X,τ) podle Y.

TVRZENÍ 74. *Nechť Y je podprostor topologického vektorového prostoru (X,τ). Na X/Y uvažujme výše zmíněnou kvocientovou topologii σ.*

(a) Kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojité lineární otevřené zobrazení, které je na. Dále platí, že $\sigma = \{q(G);\ G \in \tau\}$.

(b) X/Y je topologický vektorový prostor. Pokud X je lokálně konvexní, je i X/Y lokálně konvexní.
(c) X/Y je Hausdorffův, právě když Y je uzavřený.
(d) Je-li X normovaný lineární prostor a Y je uzavřený, je topologie na X/Y generována normou prostoru X/Y.

DŮKAZ. (a) Fakt, že q je lineární a na je nám již dobře známý. Spojitost plyne z definice kvocientové topologie. Je-li nyní $G \subset X$ otevřená, pak $q^{-1}(q(G)) = G + Y$, což je otevřená množina v X. Dle definice je tedy $q(G)$ otevřená.

Dále, zobrazení q je otevřené, tedy $q(G) \in \sigma$ pro $G \in \tau$. Na druhou stranu, pro $H \in \sigma$ je $H = q(G)$, kde $G = q^{-1}(H) \in \tau$ díky spojitosti q.

(b) Z (a) snadno plyne, že $\sigma(0) = \{q(U);\ U \in \tau(0)\}$ a že je-li $\mathcal{U}$ báze $\tau(0)$, pak $\{q(U);\ U \in \mathcal{U}\}$ je báze $\sigma(0)$. Vezmeme-li za $\mathcal{U}$ bázi $\tau(0)$ sestávající z vyvážených množin, pak snadno ověříme, že systém $\{q(U);\ U \in \mathcal{U}\}$ splňuje podmínky (i)–(iii) z Věty 8. (Je $q(V+V) = q(V) + q(V)$ a dále $q(U)$ je pohlcující pro U pohlcující, neboť q je na.) Tedy σ je vektorová topologie. Je-li τ dokonce lokálně konvexní, pak q zobrazí bázi $\tau(0)$ sestávající z konvexních množin na bázi $\sigma(0)$ se stejnou vlastností. Tedy σ je pak také lokálně konvexní.

(c) $\Rightarrow$ Množina $\{\widehat{0}\}$ je uzavřená, takže $Y = q^{-1}(\{0\})$ je uzavřený dle (a).

$\Leftarrow$ Množina $X \setminus Y$ je otevřená, takže $(X/Y) \setminus \{\widehat{0}\} = q(X \setminus Y)$ je otevřená dle (a). Tedy $\{\widehat{0}\}$ je uzavřená.

(d) Systém $\{\frac{1}{n}U_X;\ n \in \mathbb{N}\}$ je bází $\tau(0)$ a tedy systém $\mathcal{V} = \{q(\frac{1}{n}U_X);\ n \in \mathbb{N}\}$ je bází $\sigma(0)$ (viz důkaz (b)). Dle Tvrzení 1.69 je ale $\mathcal{V} = \{\frac{1}{n}U_{X/Y};\ n \in \mathbb{N}\}$, což je báze okolí 0 v prostoru $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$. ■■■[lepší důkaz: $q\colon (X,\tau) \to (X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je spojité a otevřené (Tvrzení 1.69; vylepšit na tu otevřenost?), takže $\|\cdot\|_{X/Y}$ generuje kvocientovou topologii (jednoduché tvrzení z topologie).]

□

TVRZENÍ 75. *Nechť X je topologický vektorový prostor, $Y \subset X$ je podprostor a $P\colon X \to Y$ je spojitá lineární projekce X na Y. Pak P je otevřené zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $G \subset X$ je otevřená a $y \in P(G)$. Nechť $x \in G$ je takové, že $P(x) = y$. Díky linearitě P je $P(G+y-x) = P(G) + P(y) - P(x) = P(G) + y - y = P(G)$. Dále $y \in G + y - x$, tedy $(G+y-x) \cap Y$ je relativně otevřené okolí y v Y. Ale $(G+y-x) \cap Y \subset P(G+y-x) = P(G)$, což znamená, že y leží ve vnitřku $P(G)$ vzhledem k Y. Tedy $P(G)$ je otevřená.

□

Pro topologické vektorové prostory definujeme pojmy topologického součtu a komplementovaného podprostoru zcela shodně jako v případě normovaných lineárních prostorů. Následující věta je analogií Věty 1.79.

VĚTA 76. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y, Z jsou jeho podprostory. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení $T\colon Y \times Z \to X$, $T(y,z) = y + z$ je izomorfismus.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Zobrazení T je zjevně lineární a je spojité díky spojitosti sčítání. Dále pro zobrazení $S\colon X \to Y \times Z$, $S(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ platí, že $T \circ S = Id$ a $S \circ T = Id$, tedy T je bijekce. Zobrazení S je spojité díky spojitosti projekcí, tedy T je izomorfismus.

$\Leftarrow$ Zřejmě $Y + Z = X$ (T je na) a pokud $x \in Y \cap Z$, pak rovnost $T(x,0) = x = T(0,x)$ implikuje díky prostotě T, že $x = 0$. Tedy $X = Y \oplus Z$. Konečně, označíme-li $P\colon Y \times Z \to Y$ projekci na první souřadnici, tj. $P(y,z) = y$, pak zobrazení $P \circ T^{-1}$ je spojitá lineární projekce X na Y.

□

Podobně další věta je zobecněním Věty 2.8. Důkaz je zcela totožný, pouze místo Věty 1.66 použijeme Větu 39, místo Věty 2.4 použijeme Důsledek 70(c), a navíc ještě použijeme Tvrzení 74(c) a (a).

VĚTA 77. *Nechť X je lokálně konvexní prostor.*

(a) Každý konečněrozměrný Hausdorffův podprostor X je komplementovaný.
(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

9. Slabé topologie a poláry

9.1. Slabé topologie

Následující lemma je klíčovým tvrzením v teorii slabých vektorových topologií.

LEMMA 78. *Nechť X je vektorový prostor a $f, f_1, \dots, f_n$ jsou lineární formy na X. Pak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$ právě když $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset \operatorname{Ker} f$.*

K důkazu využijeme následující faktorizační fakt z lineární algebry:

FAKT 79. *Nechť X, Y, Z jsou vektorové prostory a $L\colon X \to Y$ a $S\colon X \to Z$ jsou lineární zobrazení. Pak existuje lineární zobrazení $T\colon Z \to Y$ takové, že $L = T \circ S$, právě když $\operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} L$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "S"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "T"'] & \end{tikzcd}$$

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Je-li $x \in \operatorname{Ker} S$, pak $L(x) = T(S(x)) = T(0) = 0$.

$\Leftarrow$ Všimněme si, že jsou-li $x, y \in X$ taková, že $S(x) = S(y)$, pak $x - y \in \operatorname{Ker} S \subset \operatorname{Ker} L$, a tedy $L(x) = L(y)$. Můžeme tedy definovat $T\colon \operatorname{Rng} S \to Y$ předpisem $T(S(x)) = L(x)$ pro $x \in X$. Dále pro $x, y \in X$ a $c \in \mathbb{K}$ je $T(S(x)+S(y)) = T(S(x+y)) = L(x+y) = L(x)+L(y) = T(S(x))+T(S(y))$ a $T(cS(x)) = T(S(cx)) = L(cx) = cL(x) = c(T(S(x))$, tedy T je lineární. Nyní stačí rozšířit T libovolně na celé Z.

□

DŮKAZ LEMMATU 78. $\Rightarrow$ Je-li $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ a $x \in \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j$, pak $f(x) = 0$.

$\Leftarrow$ Definujme $S\colon X \to \mathbb{K}^n$ předpisem $S(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$. Pak S je zjevně lineární zobrazení a $\operatorname{Ker} S = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j$. Dle Faktu 79 je existuje lineární forma g na $\mathbb{K}^n$ taková, že $f = g \circ S$. Forma g je ovšem tvaru $g(z) = \sum_{j=1}^n \alpha_j z_j$ pro nějaké konstanty $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Tedy $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j$.

□

DEFINICE 80. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Symbolem $\sigma(X, M)$ označujeme lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem pseudonorem $\{|f|;\ f \in M\}$.

Uvědomme si, že net $\{x_\gamma\} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v topologii $\sigma(X, M)$, právě když $f(x_\gamma) \to f(x)$ pro každé $f \in M$ (Věta 59(c)). Pro zpřehlednění zápisu budeme u značení kanonických bázových okolí 0 topologie $\sigma(X, M)$ vynechávat absolutní hodnoty, tj. budeme psát $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} = U_{|f_1|,\dots,|f_n|,\varepsilon}$.

TVRZENÍ 81. *Nechť X je vektorový prostor a $M, N \subset X^\#$. Pak $\sigma(X, M) = \sigma(X, N)$, právě když $\operatorname{span} M = \operatorname{span} N$. Speciálně, $\sigma(X, M) = \sigma(X, \operatorname{span} M)$.*

DŮKAZ. Nejprve dokažme speciální případ. Inkluze $\subset$ je zřejmá. Na druhou stranu, pokud net $\{x_\gamma\} \subset X$ a $x \in X$ jsou takové, že $f(x_\gamma) \to f(x)$ pro každé $f \in M$, pak díky spojitosti sčítání a násobení v $\mathbb{K}$ je $g(x_\gamma) \to g(x)$ pro každé $g \in \operatorname{span} M$.

Ze speciálního případu ihned plyne implikace $\Leftarrow$ v hlavním tvrzení. Pro $\Rightarrow$ díky symetrii stačí ukázat, že $N \subset \operatorname{span} M$. Nechť tedy $f \in N$. Dle předpokladu je $U_{f,1}$ okolím 0 v topologii $\sigma(X, M)$, tedy existují $f_1, \dots, f_n \in M$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} \subset U_{f,1}$. Odtud dostáváme, že $Z = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon} \subset U_{f,1}$. Funkcionál f je tedy omezený na podprostoru Z, což znamená, že je na něm nulový, neboli $Z \subset \operatorname{Ker} f$. Podle Lemmatu 78 je tak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\} \subset \operatorname{span} M$.

□

Následující tvrzení je důsledkem Tvrzení 60. Stačí si uvědomit, že množina $M \subset X^\#$ odděluje body X, právě když pro každý $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $f \in M$ tak, že $f(x) \neq 0$.

TVRZENÍ 82. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Pak topologie $\sigma(X, M)$ je Hausdorffova, právě když M odděluje body X.*

VĚTA 83. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Pak $(X, \sigma(X, M))^* = \operatorname{span} M$.*

DŮKAZ. $\supset$ Je-li $f \in M$, je dle Věty 59(a) pseudonorma $|f|$ spojitá v topologii $\sigma(X, M)$, speciálně je omezená na nějakém okolí 0. Tedy f je též omezený na nějakém okolí 0, takže je spojitý (Věta 32). Konečně, libovolná lineární kombinace spojitých funkcionálů je též spojitá.

$\subset$ Nechť $f \in (X, \sigma(X, M))^*$. Pak f je omezený na nějakém bázovém okolí 0, tedy existují $f_1, \dots, f_n \in M$ a $\varepsilon > 0$ taková, že f je omezený na $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$. Tedy f je omezený i na podprostoru $Z = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$, což znamená, že je na něm nulový, neboli $Z \subset \operatorname{Ker} f$. Dle Lemmatu 78 je tak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\} \subset \operatorname{span} M$.

□

Uvědomme si, že z Věty 59(b) ihned plyne, že $A \subset X$ je $\sigma(X, M)$-omezená, právě když pro každé $f \in M$ je $f(A)$ omezená.

POZNÁMKA 84. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Jsou-li $f_1, \dots, f_n \in M$ a $\varepsilon > 0$, pak $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$. Pokud X je nekonečněrozměrný, pak $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j$ je netriviální: v opačném případě by dle Lemmatu 78 každý prvek $X^\#$ byl lineární kombinací $f_1, \dots, f_n$. Tedy libovolné okolí 0 v topologii $\sigma(X, M)$ na nekonečněrozměrném X obsahuje netriviální podprostor X. Speciálně není omezené, pokud $M \neq \{0\}$. To mimo jiné znamená, že $\sigma(X, M)$ není pseudonormovatelná (Věta 65). Srovnejte též s Tvrzením 94 a Důsledkem 96.

Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li $x \in X$, pak stejně jako pro normované lineární prostory označíme ε_x evaluační funkcionál na X^* daný předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$. Z definice je zřejmé, že ε_x je lineární, je tedy $\varepsilon_x \in (X^*)^\#$. Uvědomme si, že na X^* (zatím) neuvažujeme žádnou topologii, tedy zde nemá smysl hovořit o spojitosti ε_x. Dále podobně jako dříve zobrazení $\varepsilon\colon X \to (X^*)^\#$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ nazýváme kanonické zobrazení X do $(X^*)^\#$. Zobrazení ε je lineární zobrazení (viz důkaz Tvrzení 2.26), které je prosté, pokud X^* odděluje body X (tj. např. je-li X Hausdorffův lokálně konvexní prostor (Důsledek 70(a))).

DEFINICE 85. Nechť X je topologický vektorový prostor.

- Topologie $w = \sigma(X, X^*)$ se nazývá slabou topologií (též w-topologií) na X.
- Topologie $w^* = \sigma(X^*, \varepsilon(X))$ se nazývá slabou s hvězdičkou topologií (též w^*-topologií) na X^*.

Poznamenejme, že je-li zobrazení ε prosté, pak obvykle ztotožňujeme X a $\varepsilon(X)$, a píšeme tedy např. $w^* = \sigma(X^*, X)$. Dále si všimněme, že w^*-topologie na X^* je vždy Hausdorffova, neboť $\varepsilon(X)$ odděluje body X^* z definice. Slabá topologie na X je Hausdorffova například pokud X je lokálně konvexní Hausdorffův prostor (Důsledek 70(a)).

DŮSLEDEK 86. *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $w \subset \tau$ *a* $(X, w)^* = X^*$.
(b) $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$.

DŮKAZ. Jsou-li $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $\varepsilon > 0$, pak $U_{f_1,\dots,f_n,\varepsilon}$ je τ-otevřené, odkud plyne, že $w(0) \subset \tau(0)$. Zbytek plyne z Věty 83.

□

Fakt z předchozího důsledku, že topologie w je slabší než topologie τ, osvětluje název slabé topologie. Často bývá slabá topologie ostře slabší než původní topologie:

PŘÍKLAD 87. Nechť $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$, $1 < p < \infty$ a nechť $\{e_n\}$ jsou kanonické bázové vektory v X. Pak $e_n \to 0$ slabě, ale $\|e_n\| = 1$, tedy $\{e_n\}$ nekonverguje v normě. Vskutku, je-li $f = (f_1, f_2, \dots) \in \ell_q = X^*$, kde $1 \le q < \infty$, libovolný funkcionál, pak $f(e_n) = f_n \to 0 = f(0)$.

POZNÁMKA 88. Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor. Označme $Y = (X, \tau)^*$. Pak $(Y, w^*) = \big(Y, \sigma(Y, \varepsilon(X))\big)$, přičemž $\varepsilon\colon X \to Y^\#$. Dle Důsledku 86(b) je $(Y, w^*)^* = \varepsilon(X)$, takže $\big((Y, w^*), w\big) = \big(Y, \sigma(Y, (Y, w^*)^*)\big) = \big(Y, \sigma(Y, \varepsilon(X))\big)$. Tedy $\big((Y, w^*), w\big) = (Y, w^*)$, neboli slabá topologie na $(X, \tau)^*$ daná duálem k (X^*, w^*) splývá s w^*-topologií na $(X, \tau)^*$ (danou prostorem X).

TVRZENÍ 89. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y je podprostor X. Označme w_{XY} restrikci topologie $\sigma(X, X^*)$ na Y. Pak $w_{XY} \subset \sigma(Y, Y^*)$. Je-li X lokálně konvexní, pak $w_{XY} = \sigma(Y, Y^*)$. Jinými slovy, v lokálně konvexním prostoru X splývá originální slabá topologie na Y se slabou topologií zděděnou z X.*

DŮKAZ. Označme $X^* \restriction_Y = \{f \restriction_Y;\ f \in X^*\}$. Pak $X^* \restriction_Y \subset Y^*$. Topologie w_{XY} je generována systémem pseudonorem $\{|f|;\ f \in X^* \restriction_Y\}$, tedy $w_{XY} \subset \sigma(Y, Y^*)$ (Věta 59). Je-li X lokálně konvexní, pak pro každé $f \in Y^*$ existuje $F \in X^*$ takové, že $F \restriction_Y = f$ (Důsledek 70(c)). To znamená, že $X^* \restriction_Y = Y^*$, a tedy $w_{XY} = \sigma(Y, Y^*)$.

□

VĚTA 90. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$ je konvexní. Pak platí následující tvrzení:*
(a) $\overline{A}^w = \overline{A}$.
(b) A je slabě uzavřená, právě když je uzavřená.
(c) Je-li X pseudometrizovatelný a $x_n \to x$ slabě, pak existují $y_n \in \operatorname{conv}\{x_j;\ j \geq n\}$ takové, že $y_n \to x$.

DŮKAZ. (a) Protože $w \subset \tau$, je $\overline{A} \subset \overline{A}^w$. Pro důkaz obrácené inkluze vezměme $x \notin \overline{A}$. Dle Tvrzení 12(e) je $\overline{A}$ konvexní, takže dle oddělovací věty (Věta 69(b)) existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) > \sup_{\overline{A}} \operatorname{Re} f \geq \sup_A \operatorname{Re} f$. Ze slabé spojitosti $\operatorname{Re} f$ ovšem plyne, že $\operatorname{Re} f(x) \notin \overline{\operatorname{Re} f(A)} \supset \operatorname{Re} f(\overline{A}^w)$, tedy $x \notin \overline{A}^w$.

(b) plyne ihned z (a).

(c) Nechť $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k $x \in X$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ díky (a) platí

$$x \in \overline{\{x_k;\ k \geq n\}}^w \subset \overline{\operatorname{conv}\{x_k;\ k \geq n\}}^w = \overline{\operatorname{conv}\{x_k;\ k \geq n\}}.$$

Nechť ρ je pseudometrika generující topologii X. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $y_n \in \operatorname{conv}\{x_k;\ k \geq n\}$ takové, že $\rho(x, y_n) < \frac{1}{n}$. Pak ovšem $y_n \to x$.

□

VĚTA 91. *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak A je omezená právě tehdy, když je slabě omezená.*

DŮKAZ. Vzhledem k tomu, že $w(0) \subset \tau(0)$, je každá τ-omezená množina i slabě omezená. Předpokládejme nyní, že A je slabě omezená. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak existuje absolutně konvexní $V \in \tau(0)$ takové, že $V \subset U$. Položme $Z = \mu_V^{-1}(0)$. Pak Z je podprostor X (Fakt 45(b)). Nechť $Y = X/Z$ je vektorový faktorprostor. Protože $\mu_V(x) = \mu_V(y)$ pokud $x, y \in X$, $x - y \in Z$ (Fakt 45(b)), můžeme na Y definovat funkci $\|\cdot\|$ předpisem $\|\widehat{x}\| = \mu_V(x)$ pro $x \in X$. Snadno si lze rozmyslet, že $\|\cdot\|$ je norma. Dále kanonické kvocientové zobrazení $q\colon (X, \tau) \to (Y, \|\cdot\|)$ je spojité, neboť $q^{-1}(U_Y) = \{x \in X;\ \|\widehat{x}\| < 1\} \supset \operatorname{Int} V$ (Tvrzení 50), tedy q je omezené na okolí 0 (Věta 32).

Prostor $Y^* = (Y, \|\cdot\|)^*$ je Banachův prostor. Je-li nyní $f \in Y^*$ libovolný, pak $f \circ q \in X^*$, a tedy dle předpokladu je $f(q(A)) = (f \circ q)(A)$ omezená množina. Označme $\varepsilon\colon Y \to Y^{**}$ kanonické vnoření a položme $\mathcal{A} = \varepsilon(q(A)) \subset \mathcal{L}(Y^*, \mathbb{K})$. Protože pro každé $f \in Y^*$ je $\sup_{F \in \mathcal{A}} |F(f)| = \sup_{y \in q(A)} |f(y)| < +\infty$, platí dle principu stejnoměrné omezenosti (Věta 3.1), že $\sup_{y \in q(A)} \|y\| = \sup_{F \in \mathcal{A}} \|F\| < +\infty$, neboli množina $q(A)$ je $\|\cdot\|$-omezená v Y.

Existuje tedy $t > 0$ takové, že $\mu_V(x) = \|q(x)\| < t$ pro každé $x \in A$. To znamená, že pro každé $x \in A$ je $\mu_V(\frac{x}{t}) < 1$, neboli $\frac{x}{t} \in V$ (Tvrzení 50). Tedy $A \subset tV \subset tU$. Množina A je tak τ-omezená.

□

Bez předpokladu lokální konvexity předchozí věta neplatí:

PŘÍKLAD 92. Nechť $p \in (0, 1)$, $X = \ell_p$ a $K \subset X$ je množina z Příkladu 67. Pak $\operatorname{conv} K$ je slabě omezená (dokonce slabě totálně omezená), ale není omezená. Vskutku, označíme-li τ topologii X, pak K je τ-kompaktní, a tedy i slabě kompaktní, neboť $w \subset \tau$. Dle Tvrzení 27 je tedy K slabě totálně omezená, čímž pádem je díky Tvrzení 66(b) slabě totálně omezená i množina $\operatorname{conv} K$.

VĚTA 93. *Nechť X, Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Pak T je w–w spojité, tj. spojité jakožto zobrazení $T\colon (X, w) \to (Y, w)$.*

DůKAZ. Nechť $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ je net konvergující slabě k $x \in X$. Je-li $f \in Y^*$ libovolný, pak $f \circ T \in X^*$, a tedy $f \circ T(x_\gamma) \to f \circ T(x)$, neboli $f(T(x_\gamma)) \to f(T(x))$. To znamená, že $T(x_\gamma) \to T(x)$ slabě.

□

Přirozenou otázkou je, zdali jsou slabé topologie metrizovatelné, což by nám usnadnilo práci s nimi. Jak jsme již viděli v Poznámce 84, v netriviálním nekonečněrozměrném případě nejsou nikdy pseudonormovatelné.

TVRZENÍ 94. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^\#$. Pak $\sigma(X, M)$ je pseudometrizovatelná právě tehdy, když* span M *má spočetnou algebraickou bázi.*

DůKAZ. Díky Tvrzení 81 je $\sigma(X, M) = \sigma(X, B)$, kde B je libovolná algebraická báze span M. Implikace $\Leftarrow$ tedy ihned plyne z Lemmatu 62.

$\Rightarrow$ Dle předpokladu existuje spočetná báze $\sigma(X, M)(0)$, řekněme $\{V_n\}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují $f_1^n, \dots, f_{k_n}^n \in M$ a $\varepsilon_n > 0$ tak, že $U_{f_1^n,\dots,f_{k_n}^n,\varepsilon_n} \subset V_n$. Topologie $\sigma(X, M)$ je tedy generována spočetným systémem $A = \bigcup_{n=1}^\infty \{f_1^n, \dots, f_{k_n}^n\}$, tj. $\sigma(X, M) = \sigma(X, A)$. Tvrzení 81 pak implikuje, že span M = span A, tedy span M má spočetnou algebraickou bázi.

□

TVRZENÍ 95. *Nechť X je nekonečněrozměrný topologický vektorový prostor metrizovatelný úplnou metrikou. Pak X nemá spočetnou algebraickou bázi.*

DůKAZ. Nechť $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ je spočetná algebraická báze X. Položme $F_n = \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$. Pak množiny F_n jsou uzavřené (Důsledek 15) a $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$, takže podle Baireovy věty (Důsledek 13.11) existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek. Existuje tedy $x \in F_n$ a $V \in \tau(0)$ tak, že $x + V \subset F_n$. Protože ovšem $-x \in F_n$, je $V = (x + V) - x \subset F_n$. Jelikož V je pohlcující, znamená to, že $X = \operatorname{span} V \subset F_n$, což je ve sporu s nekonečnou dimenzí X.

□

DůSLEDEK 96.

(a) Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak (X, w) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný. V tom případě slabá topologie splývá s normovou.
(b) Nechť X je Fréchetův prostor. Pak (X^*, w^*) je metrizovatelný, právě když X je konečněrozměrný.

DůKAZ. (a) Pokud $\dim X < \infty$, pak slabá topologie splývá s normovou dle Důsledku 40. V opačném případě X^* nemá dle Tvrzení 95 (a Tvrzení 2.27) spočetnou algebraickou bázi, takže (X, w) není metrizovatelný dle Tvrzení 94.

(b) Pokud $\dim X < \infty$, pak též $\dim X^* \leq \dim X^\# < \infty$, a tedy (X^*, w^*) je normovatelný dle Důsledku 40. V opačném případě X nemá dle Tvrzení 95 spočetnou algebraickou bázi. Protože ε je dle předpokladu prosté, nemá spočetnou algebraickou bázi ani $\varepsilon(X)$, takže (X^*, w^*) není metrizovatelný dle Tvrzení 94.

□

Poznamenejme, že na rozdíl od slabých topologií na *celém* nekonečněrozměrném prostoru jejich restrikce na jednotkovou kouli metrizovatelné být mohou, viz Tvrzení 113. Proto také musí být v následujícím příkladu množina A neomezená.

PŘÍKLAD 97. Nechť e_n, $n \in \mathbb{N}$ jsou kanonické bázové vektory v ℓ_2 a položme

$$A = \left\{\sqrt{n}e_n;\ n \in \mathbb{N}\right\} \subset \ell_2.$$

Pak $0 \in \overline{A}^w$, ale neexistuje posloupnost v A slabě konvergující k 0.

Druhé tvrzení dostaneme snadno: Libovolná posloupnost v množině A je neomezená nebo má konstantní nenulovou podposloupnost. V prvním případě nemůže podle Poznámky 28 a Věty 91 slabě konvergovat k ničemu, ve druhém případě pak nemůže slabě konvergovat k 0.

Dokažme nyní první tvrzení. Nechť U je libovolné slabé okolí 0. Pak existují $x_1, \dots, x_k \in \ell_2$ a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$V = \{x \in \ell_2;\ |\langle x, x_j \rangle| < \varepsilon,\ j = 1, \dots, k\} \subset U.$$

Označme $z_j = \big(|x_j(1)|, |x_j(2)|, \dots\big) \in \ell_2$ a položme $y = z_1 + \dots + z_k$. Množina $M = \{n \in \mathbb{N};\ |y(n)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}\}$ je nekonečná, neboť $y \in \ell_2$. Pro každé $n \in M$ a $j \in \{1, \dots, k\}$ tedy platí, že

$$\big|\big\langle \sqrt{n} e_n, x_j \big\rangle\big| = \big|\sqrt{n} x_j(n)\big| \le \sqrt{n}|y(n)| < \varepsilon,$$

neboli $\sqrt{n} e_n \in V \subset U$. Tedy $U \cap A \neq \emptyset$.

9.2. Poláry

DEFINICE 98. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$. Absolutně konvexní obal množiny A definujeme jako

$$\operatorname{aconv} A = \bigcap \{B \supset A;\ B \subset X \text{ je absolutně konvexní}\}.$$

Povšimněme si, že výše uvedená definice je smysluplná, neboť systém, který se proniká, obsahuje alespoň celý prostor X. Snadno se nahlédne, že průnik libovolného systému absolutně konvexních množin je opět absolutně konvexní, a tedy absolutně konvexní obal je absolutně konvexní množina.

Následující charakterizace absolutně konvexního obalu je analogií Tvrzení 1.17 pro konvexní obal. Důkaz je *mutatis mutandis* stejný.

TVRZENÍ 99. *Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak*

$$\operatorname{aconv} A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \le 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Definice pojmů $\overline{\operatorname{span}}\, A$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, A$ jsou totožné s definicemi příslušných pojmů v normovaných lineárních prostorech.

DEFINICE 100. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak definujeme uzavřený absolutně konvexní obal A jako $\overline{\operatorname{aconv}}\, A = \bigcap \{B \supset A;\ B \subset X \text{ je uzavřená absolutně konvexní}\}$.

Je zřejmé, že uzavřený lineární obal je uzavřený podprostor, uzavřený konvexní obal je uzavřená konvexní množina a uzavřený absolutně konvexní obal je uzavřená absolutně konvexní množina. I následující tvrzení je shodné s analogickým Tvrzením 1.22 z teorie normovaných lineárních prostorů. Důkaz je zcela totožný, pouze místo Faktu 1.21 použijeme Tvrzení 12(d), (e), (f).

TVRZENÍ 101. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, A = \overline{\operatorname{span} A}$, $\overline{\operatorname{conv}}\, A = \overline{\operatorname{conv} A}$ a $\overline{\operatorname{aconv}}\, A = \overline{\operatorname{aconv} A}$.*

DEFINICE 102. Je-li X topologický vektorový prostor a $A \subset X$, pak definujeme (absolutní) poláru množiny A jako

$$A^\circ = \{f \in X^*;\ |f(x)| \le 1 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme zpětnou (absolutní) poláru jako

$$B_\circ = \{x \in X;\ |f(x)| \le 1 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Pojmy anihilátorů definujeme pro topologické vektorové prostory zcela identicky jako pro normované lineární prostory (Definice 2.10). Všimněme si, že platí $A^\perp \subset A^\circ$ a $B_\perp \subset B_\circ$. Dále, je-li X normovaný lineární prostor, pak z definice snadno vidíme, že $(B_X)^\circ = B_{X^*}$, a z duálního vyjádření normy (Důsledek 2.6) pak plyne, že $(B_{X^*})_\circ = B_X$.

Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pojem poláry A° a zpětné poláry $B_\circ$ závisí na topologii τ, neboť ta určuje, jak vypadá prostor X^*. Na druhou stranu, prostor X^* zde vystupuje pouze jako množina, a můžeme na ní uvažovat libovolnou topologii, aniž by to ovlivnilo pojmy A° a $B_\circ$. V kontextu polár je nejpřirozenější uvažovat prostor X^* s topologií w^*. Pak $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$ (Důsledek 86(b)), a můžeme pracovat s polárami podmnožin (X^*, w^*) a zpětnými polárami podmnožin $\varepsilon(X)$. Platí následující fakt:

FAKT 103. *Nechť (X, τ) je topologický vektorový prostor, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Uvažujeme-li na X^* topologii w^*, pak $A^\circ = \varepsilon(A)_\circ$, $\varepsilon(B_\circ) = B^\circ$ a $(B^\circ)_\circ = (B_\circ)^\circ$.*

DŮKAZ. Je

$$\varepsilon(A)_\circ = \{f \in X^*;\ |\varepsilon_x(f)| \leq 1 \text{ pro každé } x \in A\} = A^\circ$$

a

$$B^\circ = \{F \in \varepsilon(X);\ |F(f)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\} = \{\varepsilon_x;\ x \in X, |\varepsilon_x(f)| \leq 1 \text{ pro každé } f \in B\} = \varepsilon(B_\circ).$$

Konečně, $(B^\circ)_\circ = (\varepsilon(B_\circ))_\circ = (B_\circ)^\circ$ podle předchozích dvou rovností.

□

TVRZENÍ 104. *Nechť X je topologický vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $A \subset X$ a $B \subset X^*$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Množina A° je absolutně konvexní a w^*-uzavřená. Množina $B_\circ$ je absolutně konvexní a slabě uzavřená.
(b) Je-li A podprostor X, pak $A^\circ = A^\perp$. Je-li B podprostor X^*, pak $B_\circ = B_\perp$.
(c) $\{0\}^\circ = X^*$, $X^\circ = \{0\}$, $\{0\}_\circ = X$ a pokud X^* odděluje body X, pak $(X^*)_\circ = \{0\}$.
(d) Je-li $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $(\lambda A)^\circ = \frac{1}{\lambda} A^\circ$ a $(\lambda B)_\circ = \frac{1}{\lambda} B_\circ$.
(e) Je-li $A_\gamma \subset X$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)^\circ = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^\circ$. Je-li $B_\gamma \subset X^*$, $\gamma \in \Gamma$ libovolný systém, pak $\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right)_\circ = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (B_\gamma)_\circ$.

DŮKAZ. (a) Je $A^\circ = \bigcap_{x \in A} \{f \in X^*;\ |f(x)| \leq 1\}$, přičemž množiny vpravo jsou absolutně konvexní a w^*-uzavřené, neboť jsou to podúrovňové množiny w^*-spojitých pseudonorem $|\varepsilon_x|$. Analogicky pro $B_\circ$.

(b) Víme, že $B_\perp \subset B_\circ$. Na druhou stranu, nechť $x \in B_\circ$. Pak lineární funkcionál ε_x je omezený na B, což je podprostor X^*, takže ε_x je na B nulový. Tedy $x \in B_\perp$. Pro A° je argumentace analogická.

(c) První tři rovnosti jsou ihned vidět z definice. Pokud X^* odděluje body X, pak pro $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq 0$, takže $x \notin (X^*)_\perp = (X^*)_\circ$ dle (b).

(d) Pro $x \in X$ je

$$x \in (\lambda B)_\circ \Leftrightarrow \forall f \in \lambda B\colon |f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow \forall g \in B\colon |(\lambda g)(x)| \leq 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall g \in B\colon |g(\lambda x)| \leq 1 \Leftrightarrow \lambda x \in B_\circ \Leftrightarrow x \in \frac{1}{\lambda} B_\circ.$$

Vztah pro A° plyne obdobně, případně se můžeme odvolat na Fakt 103.

(e) Pro $x \in X$ je

$$x \in \left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_\gamma\right)_\circ \Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma\ \forall f \in B_\gamma\colon |f(x)| \leq 1 \Leftrightarrow \forall \gamma \in \Gamma\colon x \in (B_\gamma)_\circ \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} (B_\gamma)_\circ.$$

Vztah pro dopřednou poláru plyne obdobně, případně se můžeme odvolat na Fakt 103.

□

VĚTA 105 (O bipoláře; Jean Dieudonné (1950)). *Nechť X je topologický vektorový prostor.*

(a) Je-li $A \subset X$, pak $(A^\circ)_\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^w A$ (= $\overline{\operatorname{aconv}} A$, pokud X je lokálně konvexní).
(b) Je-li $B \subset X^*$, pak $(B_\circ)^\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^{w^*} B$.

DŮKAZ. (a) Je-li $x \in A$, pak pro každé $f \in A^\circ$ máme $|f(x)| \leq 1$, a tedy $x \in (A^\circ)_\circ$. To znamená, že $A \subset (A^\circ)_\circ$. Z Tvrzení 104(a) tedy plyne, že $\overline{\operatorname{aconv}}^w A \subset (A^\circ)_\circ$. Na druhou stranu, je-li $x \in X \setminus \overline{\operatorname{aconv}}^w A$, pak díky oddělovací větě (Věta 69(b)) existuje $f \in (X, w)^* = X^*$ (Důsledek 86) takový, že $|f(y)| \leq 1$ pro $y \in \overline{\operatorname{aconv}}^w A$ a $\operatorname{Re} f(x) > 1$. Tedy $f \in A^\circ$, a přitom $|f(x)| > 1$, což znamená, že $x \notin (A^\circ)_\circ$. Konečně, fakt, že $\overline{\operatorname{aconv}}^w A = \overline{\operatorname{aconv}} A$ v případě lokálně konvexního X plyne z Tvrzení 101 a Věty 90.

(b) plyne z (a) aplikovaného na prostor (X^*, w^*) s použitím Faktu 103 a Poznámky 88.

□

Nyní již máme k dispozici příslušný pojmový aparát k tomu, abychom mohli uvést „správná znění“ Lemmatu 2.12 a Věty 4.4.

LEMMA 106. *Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*
(a) $A^\perp$ je w^*-uzavřený podprostor X^*,
(b) $B_\perp$ je slabě uzavřený podprostor X,
(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}^w A$ ($= \overline{\operatorname{span}} A$, pokud X je lokálně konvexní),
(d) $(B_\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}}^{w^*} B$.

DŮKAZ. Vše je snadným důsledkem Tvrzení 104(a), (b) a věty o bipoláře, uvědomíme-li si, že $A^\perp = (\operatorname{span} A)^\perp$ a $B_\perp = (\operatorname{span} B)_\perp$.

□

VĚTA 107. *Jsou-li X, Y topologické vektorové prostory takové, že Y^* odděluje body Y, a $T\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení, pak platí, že*
(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,
(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,
(c) $\overline{\operatorname{Rng} T}^w = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,
(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*}^{w^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Důkaz této věty je shodný s důkazem Věty 4.4, pouze místo Lemmatu 2.12 použijeme Lemma 106.

VĚTA 108 (Herman Heine Goldstine (1938)). *Je-li X normovaný lineární prostor, pak $\overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.*

DŮKAZ. Označme $Y = (X^*, \|\cdot\|)$. Pak $\varepsilon(B_X) \subset X^{**} = Y^*$. Tedy dle věty o bipoláře použité na prostoru Y (Věta 105(b)) je $(\varepsilon(B_X)_\circ)^\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^{(Y^*,w^*)} \varepsilon(B_X) = \overline{\varepsilon(B_X)}^{(Y^*,w^*)}$, přičemž poslední rovnost platí díky Tvrzení 101. Na druhou stranu, podle Faktu 103 je $(\varepsilon(B_X)_\circ)^\circ = ((B_X)^\circ)^\circ = (B_{X^*})^\circ = B_{X^{**}}$.

□

VĚTA 109 (Banach-Alaoglu-Bourbaki[5]). *Nechť X je topologický vektorový prostor. Je-li U okolí 0 v X, pak U° je w^*-kompaktní množina.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že (X^*, w^*) je dle Věty 59(c) podprostor topologického vektorového prostoru $\mathbb{K}^X$ se součinovou topologií (tj. topologií bodové konvergence). Protože U je pohlcující, ke každému $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $\lambda_x x \in U$. Položme $K = \prod_{x\in X} B_{\mathbb{K}}(0, \frac{1}{\lambda_x}) \subset \mathbb{K}^X$. Podle Tichonovovy věty[6] je K kompaktní. Dále pro každé $f \in U^\circ$ a $x \in X$ je $|f(x)| = \frac{1}{\lambda_x}|f(\lambda_x x)| \le \frac{1}{\lambda_x}$, což znamená, že $f \in K$. Tedy $U^\circ \subset K$. Ukážeme, že U° je uzavřená podmnožina K, odkud ihned plyne kompaktnost U° v topologii w^*.

Nechť tedy $f \in \overline{U^\circ}^K$. Pak f je lineární forma na X (Fakt 38). Dále pro každé $x \in U$ platí, že $|f(x)| \le 1$: Pro každé $\varepsilon > 0$ totiž existuje $g \in U^\circ$ takové, že $|f(x)-g(x)| < \varepsilon$, takže $|f(x)| \le |g(x)|+|f(x)-g(x)| \le 1 + \varepsilon$. To znamená, že f je omezená na okolí 0 v X, tudíž $f \in X^*$ (Věta 32), a tedy $f \in U^\circ$.

□

Následující speciální případ předchozí věty pro jeho velkou důležitost pro jistotu zdůrazníme zvlášť.

DŮSLEDEK 110. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak B_{X^*} je w^*-kompaktní.*

TVRZENÍ 111. *Nechť X je separabilní topologický vektorový prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je hustá v X. Je-li $U \subset X$ okolí 0, pak (U°, w^*) je topologický prostor metrizovatelný metrikou*

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{|(f - g)(x_n)|, 1\}.$$

[5]Tento tradiční název je poněkud nepřesný; tato věta má dlouhou a složitou historii. Separabilní verze (tj. sekvenciální kompaktnost): základní myšlenku důkazu lze nalézt už u G. Ascoliho (1884), první náznaky věty se objevují u M. Frécheta (1906), různé protoformulace uvedli D. Hilbert (1906) pro ℓ_2 a F. Riesz (1909) pro ℓ_p a $L_p([0, 1])$, první jasnou formulaci uvedl E. Helly (1912) pro $C([0, 1])$, S. Banach (1929) zformuloval separabilní verzi v normovaných lineárních prostorech. Obecná verze byla nezávisle na sobě objevena mnoha matematiky: Leonidas Alaoglu (1938), J. Dieudonné a skupina N. Bourbaki (1938), Vitold Lvovič Šmuljan (Витольд Львович Шмульян) (1940), Šizuo Kakutani (角谷 静夫) (1940).

[6]A. N. Tichonov (1930) pro součin intervalů, obecnou verzi ukázal až Eduard Čech (1937).

DŮKAZ. Systém pseudonorem $\mathcal{P} = \{|\varepsilon_{x_n}|\}_{n=1}^{\infty}$ generuje na X^* lokálně konvexní topologii σ, která je zjevně slabší než w^*. Díky hustotě $\{x_n\}$ v X systém $\mathcal{P}$ odděluje body X^*, takže σ je Hausdorffova (Tvrzení 60). Dle Lemmatu 62 je σ metrizovatelná metrikou ρ. Podle Věty 109 je (U°, w^*) kompaktní, a protože σ je Hausdorffova a $\sigma \subset w^*$, je $(U^\circ, w^*) = (U^\circ, \sigma)$, neboť kompaktní topologie je nejslabší Hausdorffova topologie.

□

Následující fakt říká, že jinými slovy můžeme prostory (B_X, w) a $(\varepsilon(B_X), w^*)$ ztotožnit pomocí kanonického vnoření.

FAKT 112. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je izomorfismem lokálně konvexních prostorů (X, w) a $(\varepsilon(X), w^*)$. Speciálně, ε je homeomorfismem topologických prostorů (B_X, w) a $(\varepsilon(B_X), w^*)$.*

DŮKAZ. Označme $\pi\colon X^* \to X^{***}$ kanonické vnoření. Je-li $\{x_\gamma\} \subset X$ net a $x \in X$, pak

$$x_\gamma \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow \forall f \in X^*\colon f(x_\gamma) \to f(x) \Leftrightarrow \forall f \in X^*\colon \pi_f(\varepsilon_{x_\gamma}) \to \pi_f(\varepsilon_x) \Leftrightarrow \varepsilon(x_\gamma) \xrightarrow{w^*} \varepsilon(x).$$

□

TVRZENÍ 113. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*
(a) Je-li X separabilní a $\{x_n\}$ je hustá v S_X, pak (B_{X^*}, w^*) je metrizovatelná metrikou

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f - g)(x_n)|.$$

(b) Je-li X^* separabilní a $\{f_n\}$ je hustá v S_{X^*}, pak (B_X, w) je metrizovatelná metrikou

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |f_n(x - y)|.$$

DŮKAZ. (a) Snadno si lze rozmyslet, že ρ je translačně invariantní metrika na X^*. Dále $\rho = 2\rho_1$, kde $\rho_1(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f - g)(\frac{1}{2}x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{|(f - g)(\frac{1}{2}x_n)|, 1\}$ pro $f, g \in B_{X^*}$. Dle Lemmatu 62 je tedy topologie σ generovaná systémem pseudonorem $\{|\varepsilon_{\frac{1}{2}x_n}|\}_{n=1}^{\infty}$ metrizovatelná metrikou ρ. Zbytek důkazu je stejný jako pro Tvrzení 111.

(b) Stačí použít (a) na $(B_{X^{**}}, w^*)$ a díky Faktu 112 metriku přesunout na B_X pomocí kanonického vnoření ε.

□

Důsledkem předchozích výsledků je následující důležitá charakterizace reflexivních prostorů.

VĚTA 114. *Je-li X Banachův prostor, pak X je reflexivní, právě když B_X je slabě kompaktní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Je-li X reflexivní, pak pro kanonické vnoření ε platí, že $\varepsilon(B_X) = B_{X^{**}}$. Slabá kompaktnost B_X tedy plyne z Důsledku 110 (použitého na X^*) spolu s Faktem 112.

$\Leftarrow$ Dle předpokladu a Faktu 112 je $(\varepsilon(B_X), w^*)$ kompaktní. Protože w^*-topologie je Hausdorffova, plyne odtud (a z toho, že ε je izometrie), že $\varepsilon(B_X)$ je w^*-uzavřená podmnožina $B_{X^{**}}$. Z Goldstineovy věty (Věta 108) pak dostáváme, že $\varepsilon(B_X) = \overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$. Odtud a z linearity ε již snadno plyne, že X je reflexivní.

□

DŮSLEDEK 115. *Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když slabá a w^* topologie na X^* splývají.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je zjevná, neboť $w = \sigma(X^*, X^{**}) = \sigma(X^*, \varepsilon(X)) = w^*$.

$\Leftarrow$ Dle Důsledku 110 je $(B_{X^*}, w) = (B_{X^*}, w^*)$ kompaktní, takže X^* je reflexivní dle Věty 114. Proto je reflexivní i X (Věta 2.31(c)).

□

VĚTA 116. *Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak B_X je slabě sekvenciálně kompaktní. Tedy z každé omezené posloupnosti v X lze vybrat slabě konvergentní podposloupnost.*

DŮKAZ. Nechť $\{x_n\} \subset B_X$. Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Dle Věty 2.31(b) je Y reflexivní prostor, který je zřejmě separabilní. Podle Tvrzení 2.32 je Y^* separabilní, takže podle Věty 114 a Tvrzení 113(b) je (B_Y, w) metrizovatelný kompakt. Protože $\{x_n\} \subset B_Y$, lze z $\{x_n\}$ vybrat podposloupnost, která konverguje v (B_Y, w), a tedy i v (Y, w), a tedy i v (X, w) dle Tvrzení 89.

□

PŘÍKLAD 117. Pro $p \in (0,1]$ uvažujme ℓ_∞ jako duál k prostoru ℓ_p reprezentovaný standardní dualitou z Příkladu 67. Označme $w_p^* = \sigma(\ell_\infty, \ell_p)$ topologii w^* na ℓ_∞ danou touto dualitou (uvědomme si, že kanonické zobrazení $\varepsilon_p\colon \ell_p \to (\ell_\infty)^\#$ je prosté, neboť ℓ_∞ odděluje body ℓ_p). Pro $0 < p < q \leq 1$ pak platí, že $w_p^* \subsetneqq w_q^*$, i když tyto topologie splývají na omezených podmnožinách ℓ_∞.

Prvky ℓ_p budeme ztotožňovat s funkcionály v $\varepsilon_p(\ell_p)$. Nejprve si rozmysleme, že $\ell_p \subset \ell_q$ (jakožto množiny), což znamená, že $w_p^* \subset w_q^*$. (Uvědomme si, že stavíme na faktu, že dualita je daná stejným vzorcem pro ℓ_p i ℓ_q. Je-li tedy $x \in \ell_p \subset \ell_q$, pak $\varepsilon_p(x) = \varepsilon_q(x)$.) Vskutku, je-li $x \in B_{\ell_p}$, platí pro každou souřadnici $n \in \mathbb{N}$ odhad $|x_n|^q \leq |x_n|^p$, a tedy $x \in B_{\ell_q}$.

Ukažme, že $w_p^* \neq w_q^*$. Vezměme libovolný $x \in \ell_q \setminus \ell_p$. Pak $U_{x,1} \in w_q^*(0)$. Tvrdíme, že $U_{x,1} \notin w_p^*(0)$. V opačném případě by existovaly prvky $x_1, \dots, x_n \in \ell_p$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $U_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} \subset U_{x,1}$. Pak $Z = \bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} x_j \subset U_{x,1}$, tedy funkcionál x je omezený na podprostoru Z, což znamená, že $Z \subset \operatorname{Ker} x$. Dle Lemmatu 78 je tedy $x \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\} \subset \ell_p$, což je spor.

Konečně, ukažme, že restrikce w_p^* a w_q^* na B_{ℓ_∞} se shodují. Dle Důsledku 110 je B_{ℓ_∞} kompaktní v topologii w_1^*. Protože w_p^* je Hausdorffova topologie slabší než w_1^*, jsou obě topologie na B_{ℓ_∞} shodné, jelikož kompaktní topologie je nejslabší Hausdorffova topologie.

Kapitola 8

Teorie distribucí II

1. Prostor distribucí

Posloupnost norem $\{\|\cdot\|_N\}_{N=1}^{\infty}$ na prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ generuje Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ_ρ metrizovatelnou metrikou ρ z Definice 6.10 (Lemma 7.62). (Poznamenejme, že často se za kanonickou metriku na prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ bere metrika slabší než ρ, která dává jen lokálně stejnoměrnou konvergenci. Pro naše účely – vybudování základů teorie distribucí – na tom ovšem nezáleží, proto používáme jednodušší metriku stejnoměrné konvergence ρ.) Všimněme si, že díky definici norem $\|\cdot\|_N$ tvoří bázi okolí nuly v této topologii množiny $U_{\|\cdot\|_N,\varepsilon}$, $N \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$. Pro $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní označme τ_K topologii podprostoru na $\mathcal{D}(K)$ zděděnou z τ_ρ. Dle Věty 6.11(d) je $(\mathcal{D}(K), \tau_K)$ Fréchetův prostor. Pro účely teorie distribucí je ovšem topologie τ_ρ příliš slabá. Níže definujeme vhodnější lokálně konvexní topologii na prostoru testovacích funkcí.

VĚTA 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a neprázdná. Položme*

$$\mathcal{U} = \big\{U \subset \mathcal{D}(\Omega);\ U \text{ absolutně konvexní, } U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega\big\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ je bází okolí 0 pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ na $\mathcal{D}(\Omega)$, která má následující vlastnosti:

(a) $\tau_\rho \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau$.
(b) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je $\mathcal{D}(K)$ uzavřený podprostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ a $\tau \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.
(c) Je-li $A \subset (\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ omezená, pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $A \subset \mathcal{D}(K)$.
(d) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak $\varphi_n \to \varphi$ v τ, právě když existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.
(e) $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ je první kategorie v sobě.

DŮKAZ. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ splňuje předpoklady Věty 7.8. Pokud $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, pak $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$: pro každý kompakt $K \subset \Omega$ platí $U \cap \mathcal{D}(K) = (U_1 \cap \mathcal{D}(K)) \cap (U_2 \cap \mathcal{D}(K)) \in \tau_K(0)$. Dále, nechť $U \in \mathcal{U}$. Pak pro $V = \frac{1}{2}U$ je $V \cap \mathcal{D}(K) = \frac{1}{2}(U \cap \mathcal{D}(K)) \in \tau_K(0)$, takže $V \in \mathcal{U}$, a díky konvexitě U je $V + V = \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U \subset U$. Konečně, je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, pak $\varphi \in \mathcal{D}(K)$ pro nějakou kompaktní $K \subset \Omega$. Protože $U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0)$, je $U \cap \mathcal{D}(K)$ pohlcující v $\mathcal{D}(K)$, takže existuje $\lambda > 0$ takové, že $t\varphi \in U \cap \mathcal{D}(K) \subset U$ pro $t \in [0, \lambda]$. To znamená, že U je pohlcující v $\mathcal{D}(\Omega)$. Systém $\mathcal{U}$ je tedy bází okolí lokálně konvexní topologie τ na $\mathcal{D}(\Omega)$. Hausdorffovost τ je důsledkem (a) níže.

(a) Nechť $U \in \tau_\rho(0)$. Pak existuje absolutně konvexní $V \in \tau_\rho(0)$, $V \subset U$. Položme $V_\Omega = V \cap \mathcal{D}(\Omega)$. Pak pro libovolnou $K \subset \Omega$ kompaktní je $V_\Omega \cap \mathcal{D}(K) = V \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0)$, takže $V_\Omega \in \mathcal{U} \subset \tau(0)$. Tedy i $U \cap \mathcal{D}(\Omega) \in \tau(0)$.

(b) Ukážeme, že $\mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}(K)$ je τ-otevřená. Nechť $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}(K)$. Pak existuje $x \in \Omega \setminus K$ takové, že $\delta = |\varphi(x)| > 0$. Položme $W = \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega);\ \|\psi - \varphi\|_0 < \delta\}$. Množina W je otevřená v $\tau_\rho \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)}$, a je tedy dle (a) i τ-otevřená. Zjevně $\psi(x) \neq 0$ pro každé $\psi \in W$, takže $W \subset \mathcal{D}(\Omega) \setminus \mathcal{D}(K)$.

Dále, podle (a) je $\tau_K(0) \subset \tau \restriction_{\mathcal{D}(K)}(0)$. Na druhou stranu, $\mathcal{U} \restriction_{\mathcal{D}(K)} \subset \tau_K(0)$ z definice $\mathcal{U}$, a tedy $\tau \restriction_{\mathcal{D}(K)}(0) \subset \tau_K(0)$.

(c) Pro $n \in \mathbb{N}$ položme $K_n = B(0, n) \cap \{x \in \Omega;\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\}$. Pak K_n jsou kompaktní podmnožiny Ω takové, že $K_n \subset K_{n+1}$ a pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $K \subset K_n$.

Pokračujme sporem: předpokládejme, že A neleží v žádném podprostoru $\mathcal{D}(K)$, $K \subset \Omega$ kompaktní. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existují bod $x_n \in \Omega \setminus K_n$ a funkce $\varphi_n \in A$ tak, že $\varphi_n(x_n) \neq 0$. Položme

$$U = \left\{ \psi \in \mathcal{D}(\Omega);\ |\psi(x_n)| < \frac{1}{n}|\varphi_n(x_n)| \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Pak $U \in \mathcal{U}$. Vskutku, snadno vidíme, že $\psi \mapsto |\psi(x_n)|$ jsou pseudonormy, takže U je absolutně konvexní, jakožto průnik absolutně konvexních množin. Dále, je-li $K \subset \Omega$ kompaktní, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset K_n$, a tedy $x_k \notin K$ pro $k \geq n$. Tedy

$$\begin{aligned} U \cap \mathcal{D}(K) &= \left\{ \psi \in \mathcal{D}(K);\ |\psi(x_k)| < \tfrac{1}{k}|\varphi_k(x_k)| \text{ pro } 1 \leq k < n \right\} \supset \\ &\supset \left\{ \psi \in \mathcal{D}(K);\ \|\psi\|_0 < \min_{1 \leq k < n} \tfrac{1}{k}|\varphi_k(x_k)| \right\} \in \tau_K(0). \end{aligned}$$

Z definice U ovšem vidíme, že je-li $t > 0$ libovolné, pak pro $n = \lceil t \rceil$ je $\frac{1}{t}\varphi_n \notin U$, takže $\varphi_n \notin tU$. Tedy A není τ-omezená, což je spor.

(d) $\Leftarrow$ Z předpokladu speciálně plyne, že $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, tvrzení tedy plyne z (b) a Věty 6.11(a).

$\Rightarrow$ Množina $\{\varphi_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi\}$ je omezená (Poznámka 7.28), tedy dle (c) existuje kompaktní $K \subset \Omega$ tak, že $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(K)$, $\varphi \in \mathcal{D}(K)$. Zbytek plyne z (b) a Věty 6.11(a).

(e) Pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní má $\mathcal{D}(K)$ prázdný vnitřek v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$: pokud by tomu tak nebylo, pak by podprostor $\mathcal{D}(K)$ obsahoval τ-okolí 0, tedy pohlcující podmnožinu $\mathcal{D}(\Omega)$, což by znamenalo, že $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(\Omega)$. To ovšem není pravda, neboť existuje $x \in \Omega \setminus K$ a funkce $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ taková, že $\varphi(x) \neq 0$, takže $\varphi \notin \mathcal{D}(K)$. Dle (b) jsou tedy podprostory $\mathcal{D}(K)$ řídké v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$. Konečně, jsou-li $K_n \subset \Omega$ kompaktní podmnožiny z důkazu (c), pak zjevně $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(K_n)$.

□

Všimněme si, že topologie indukovaná metrikou ρ je „nezávislá" na množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ – stačí vzít prostě restrikci τ_ρ z prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ na podprostor $\mathcal{D}(\Omega)$. To ale neplatí o výše zavedené topologii τ. Ta zásadním způsobem závisí právě na volbě množiny Ω. Označíme-li τ_Ω příslušnou topologii na $\mathcal{D}(\Omega)$, pak je snadno vidět, že $\tau_{\mathbb{R}^d} \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subset \tau_\Omega$. Na druhou stranu, vezmeme-li např. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takovou, že $\operatorname{supp} \varphi = B(0,1)$, a položíme-li $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi\big(x - (1 - \frac{1}{n})e_1\big)$ a $\Omega = U(0,2)$, pak $\varphi_n \to 0$ v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau_{\mathbb{R}^d} \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)})$, ale nikoli v $(\mathcal{D}(\Omega), \tau_\Omega)$, neboť $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{supp} \varphi_n} \not\subset \Omega$. Tedy $\tau_{\mathbb{R}^d} \restriction_{\mathcal{D}(\Omega)} \subsetneqq \tau_\Omega$.

Pro čtenáře se znalostí uniformních prostorů poznamenejme, že prostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ není metrizovatelný, což lze odvodit z toho, že je sekvenciálně úplný a první kategorie v sobě. Sekvenciální úplnost snadno dostaneme z Věty 1(b) a úplnosti prostoru $(\mathcal{D}(K), \rho)$ (Věta 6.11(d)).

TVRZENÍ 2. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, Y je lokálně konvexní prostor a $T\colon (\mathcal{D}(\Omega), \tau) \to Y$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je spojité.
(ii) Pro každou posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergující k 0 v τ je množina $\{T(\varphi_n);\ n \in \mathbb{N}\}$ omezená.
(iii) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $T \restriction_{\mathcal{D}(K)}$ spojitá.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) dle Věty 7.32.

(ii)$\Rightarrow$(iii) Protože $\tau \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$ (Věta 1(b)) a τ_K je metrizovatelná, plyne tato implikace též z Věty 7.32.

(iii)$\Rightarrow$(i) Nechť V je absolutně konvexní okolí 0 v Y. Položme $U = T^{-1}(V)$. Pak U je absolutně konvexní množina v $\mathcal{D}(\Omega)$. Pro každý kompakt $K \subset \Omega$ díky předpokladu platí, že $U \cap \mathcal{D}(K) = \{\varphi \in \mathcal{D}(K);\ T(\varphi) \in V\} \in \tau_K(0)$, takže $U \in \tau(0)$. Tedy vzory okolí 0 v Y jsou okolí 0 v $\mathcal{D}(\Omega)$, což znamená, že T je spojité.

□

Předchozí tvrzení nám ukazuje, že naše značení prostoru distribucí bylo oprávněné: podle Definice 6.12 je $\mathcal{D}(\Omega)^* = (\mathcal{D}(\Omega), \tau)^*$, tedy prostor distribucí je duálem k lokálně konvexnímu prostoru $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$. Též si uvědomme, že definice konvergence na $\mathcal{D}(\Omega)^*$ (Definice 6.21) není nic jiného než konvergence ve w^*-topologii.

2. Schwartzův prostor

V tomto a následujícím oddílu budeme pracovat s prostorem $\mathbb{R}^d$ s eukleidovskou normou a $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

Je-li α multiindex délky d pak pro $t \in \mathbb{C}^d$ budeme používat zkratku $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}$. Připomeňme, že každý polynom $P\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ lze zapsat ve tvaru $P(t) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\le k} c_\alpha t^\alpha$, $t \in \mathbb{R}^d$, kde $c_\alpha \in \mathbb{C}$ jsou příslušné koeficienty. Toto vyjádření je jednoznačné až na nulové koeficienty. Každý polynom na $\mathbb{R}^d$ lze pomocí tohoto vyjádření jednoznačně rozšířit na polynom na $\mathbb{C}^d$ prostým dosazováním komplexních čísel. Daný polynom v d proměnných lze tedy chápat jako polynom na $\mathbb{R}^d$ i jako polynom na $\mathbb{C}^d$.

Tvrzení (e) a (f) ve Větě 5.19 ukazují, že Fourierova transformace převádí derivování na násobení a opačně. To může být výhodné například při řešení diferenciálních rovnic. Nicméně k praktickému využití by bylo třeba umět najít k transformované funkci $\widehat{f}$ zpětně její předlohu f. Potíž spočívá v tom, že obraz $L_1(\mu_d)$ při Fourierově transformaci je obtížně identifikovatelný. Jednou z možností, jak se této potíži vyhnout, je najít vhodnější prostor, pro který jeho obraz najdeme snadněji. Dále by se nám hodilo při derivování pracovat s hladkými funkcemi. Prozkoumáme-li předpoklady tvrzení (e) a (f), potřebovali bychom, aby derivace všech řádů byly integrovatelné (tj. něco jako „menší než $\frac{1}{x}$ v nekonečnu“), a též aby byly integrovatelné funkce $x \mapsto x^\alpha f(x)$ pro libovolný multiindex α délky d (tj. aby funkce f byla „menší než převrácená hodnota libovolného polynomu“). Tyto požadavky vedou relativně přirozeně k definici Schwartzova prostoru níže.

Další motivací je pak Fourierova transformace distribucí. Vzhledem k tomu, jak se s distribucemi pracuje, přirozeně se nabízí definovat Fourierovu transformaci distribuce jako akci na Fourierovu transformaci testovací funkce. Ovšem Fourierova transformace testovací funkce už nemusí být testovací funkce! Proto bychom rádi nalezli nějaký prostor příbuzný testovacím funkcím, který bude stabilní na Fourierovu transformaci. Nejprve si ale ještě dokažme lemma, které nám pomůže při porovnávání „polynomiální rychlosti růstu“.

LEMMA 3. *Pro $N \in \mathbb{N}$ je funkce $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ polynom na $\mathbb{R}^d$. Pro každý polynom P na $\mathbb{R}^d$ existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ taková, že $|P(x)| \le C(1 + \|x\|^2)^N$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.*

DŮKAZ. První tvrzení je vidět z rozpisu $(1+\|x\|^2)^N = \bigl(1+\sum_{j=1}^d x_j^2\bigr)^N$. Dále nechť $P(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\le k} c_\alpha x^\alpha$. Položme $C = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\le k} |c_\alpha|$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $j \in \{1, \dots, d\}$ máme $|x_j| \le \|x\| \le 1+\|x\|^2$ (poslední nerovnost ověříme zvlášť pro $\|x\| \le 1$ a zvlášť pro $\|x\| > 1$). Tedy $|P(x)| \le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\le k} |c_\alpha||x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_d|^{\alpha_d} \le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^d, |\alpha|\le k} |c_\alpha|(1 + \|x\|^2)^{|\alpha|} \le C(1 + \|x\|^2)^k$.

□

Vidíme tedy, že polynomiální rychlost růstu stačí testovat pouze pomocí speciálních polynomů $(1 + \|x\|^2)^N$, $N \in \mathbb{N}$.

DEFINICE 4. Schwartzův[1] prostor na $\mathbb{R}^d$ je definován následujícím způsobem:

$$\mathcal{S}_d = \bigl\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C});\ PD^\alpha f \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d\bigr\}.$$

Všimněme si, že díky Lemmatu 3 lze v definici Schwartzova prostoru testovat pouze polynomy tvaru $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$.

Ihned je vidět, že $\mathcal{S}_d$ je podprostor vektorového prostoru $C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ a je to také vektorový podprostor $C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Naopak, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je podprostor $\mathcal{S}_d$. Dále je zjevné, že $f \in \mathcal{S}_d$, právě když f je hladká a pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a každé $N \in \mathbb{N}$ existuje $C_{\alpha,N} > 0$ takové, že $|D^\alpha f(x)| \le \frac{C_{\alpha,N}}{(1+\|x\|^2)^N}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Jinými slovy, funkce f a všechny její parciální derivace „jdou v nekonečnu k nule“ rychleji než převrácená hodnota libovolného polynomu.

PŘÍKLAD 5. Nechť $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $f \in \mathcal{S}_d \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Zjevně $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dále f je kladná na $\mathbb{R}^d$, a tedy $f \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Abychom ukázali, že $f \in \mathcal{S}_d$, uvědomme si nejprve, že je-li P libovolný polynom na $\mathbb{R}^d$ a $j \in \{1, \dots, d\}$, pak $\frac{\partial Pf}{\partial x_j}(x) = Q(x)f(x)$, kde

[1] Laurent Schwartz

$Q(x) = \frac{\partial P}{\partial x_j}(x) - 2x_j P(x)$ je opět polynom na $\mathbb{R}^d$. Odtud snadno indukcí plyne, že pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ existuje polynom P na $\mathbb{R}^d$ takový, že $D^\alpha f = Pf$. Stačí tedy ukázat, že pro každý polynom R na $\mathbb{R}^d$ je funkce Rf omezená. Podle Lemmatu 3 existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ taková, že $|R(x)| \le C(1 + \|x\|^2)^N$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Tedy $|R(x)f(x)| \le C(1 + \|x\|^2)^N e^{-\|x\|^2}$, takže si stačí rozmyslet, že funkce $g(t) = (1+t)^N e^{-t}$ je omezená na $[0, +\infty)$. To ovšem plyne z její spojitosti a toho, že $\lim_{x\to+\infty} g(t) = 0$.

LEMMA 6. *Nechť $d \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, $N > \frac{d}{2p}$ a $h(x) = \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_p(\mu_d)$.*

DŮKAZ. Podle věty o substituci použité na sférické souřadnice (viz [Z, Příklad 2.137]) a dále podle Fubiniovy věty (integrujeme spojitou nezápornou funkci) platí

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}\right)^p \mathrm{d}\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{pN}} \mathrm{d}\lambda_d = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{(0,+\infty)\times(0,\pi)^{d-2}\times(0,2\pi)} \frac{1}{(1+r^2)^{pN}} r^{d-1} \sin^{d-2}\varphi_1 \sin^{d-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{d-2} \,\mathrm{d}\lambda_d = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^{pN}} \sin^{d-2}\varphi_1 \sin^{d-3}\varphi_2 \cdots \sin\varphi_{d-2} \,\mathrm{d}\varphi_{d-1}\,\mathrm{d}\varphi_{d-2}\cdots \mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}r = \\
&= C_d \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1}}{(1+r^2)^{pN}} \mathrm{d}r,
\end{aligned}$$

kde konstanta $C_d > 0$ závisí jen na dimenzi d. Poslední integrál ovšem konverguje, neboť $2pN - d + 1 > 1$. □

TVRZENÍ 7. *Schwartzův prostor má následující vlastnosti:*

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{1\le p<\infty} L_p(\mu_d)$.
(b) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ a $h(x) = f(ax+b)$, pak $h \in \mathcal{S}_d$.
(c) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a α multiindex délky d, pak $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.
(d) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a jestliže $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li $g \in \mathcal{S}_d$), pak $fg \in \mathcal{S}_d$.
(e) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a $P\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ polynom, pak $Pf \in \mathcal{S}_d$.

DŮKAZ. (a) Vztahy $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ již známe. Nechť $1 \le p < \infty$. Podle Lemmatu 6 existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že funkce $x \mapsto \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ leží v $L_p(\mu_d)$. Je-li nyní $f \in \mathcal{S}_d$, pak existuje $C > 0$ takové, že $|f(x)|^p \le \frac{C^p}{(1+\|x\|^2)^{pN}}$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$, takže podle srovnávacího kritéria $f \in L_p(\mu_d)$.

(b) Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak $P(x)D^\alpha h(x) = P(x)a^{|\alpha|}D^\alpha f(ax+b) = Q(ax+b)D^\alpha f(ax+b)$, kde $Q(y) = a^{|\alpha|}P(\frac{1}{a}(y-b))$ je polynom na $\mathbb{R}^d$. Tedy $PD^\alpha h$ je omezená na $\mathbb{R}^d$.

(c) Je-li $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak $PD^\beta(D^\alpha f) = PD^{\alpha+\beta} f$, což je omezená funkce, neboť $f \in \mathcal{S}_d$.

(d) Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak dle Faktu 6.20 je $PD^\alpha(fg) = \sum_{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d, |\beta|+|\gamma|=|\alpha|} c_{\beta,\gamma} PD^\beta f D^\gamma g$ pro nějaké konstanty $c_{\beta,\gamma}$. Funkce vpravo je ovšem omezená, neboť $f \in \mathcal{S}_d$.

(e) Je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a Q polynom na $\mathbb{R}^d$, pak dle Faktu 6.20 je $QD^\alpha(Pf) = \sum_{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d, |\beta|+|\gamma|=|\alpha|} c_{\beta,\gamma} QD^\beta PD^\gamma f$ pro nějaké konstanty $c_{\beta,\gamma}$. Funkce vpravo je ovšem omezená díky tomu, že $QD^\beta P$ je polynom a $f \in \mathcal{S}_d$. □

Na Schwartzově prostoru nyní zavedeme topologii. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha|\le N} \left\| x \mapsto (1+\|x\|^2)^N D^\alpha f(x) \right\|_\infty .$$

Snadno nahlédneme, že každá z funkcí ν_N je normou na $\mathcal{S}_d$. Hausdorffovu lokálně konvexní topologii na $\mathcal{S}_d$ generovanou systémem $\{\nu_N\}_{N=0}^\infty$ označíme σ. Tato topologie je metrizovatelná metrikou z Lemmatu 7.62.

VĚTA 8. *Metrika z Lemmatu 7.62 příslušná systému $\{\nu_N\}_{N=0}^\infty$ je úplná. Prostor $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je tedy Fréchetův prostor. Topologie σ má následující vlastnosti:*

(a) *Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{S}_d$ a $f \in \mathcal{S}_d$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
  (i) *$f_n \to f$ v topologii σ.*
  (ii) *Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a každý multiindex α délky d platí, že $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*
  (iii) *Pro každý polynom P a každý multiindex α délky d platí, že $PD^\alpha f_n \to PD^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Jestliže $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, pak $f_n \to f$ v $L_p(\mu_d)$ pro každé $1 \leq p < \infty$.*

(c) *Je-li α multiindex délky d, P polynom na $\mathbb{R}^d$ a $g \in \mathcal{S}_d$, pak zobrazení $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$ a $f \mapsto gf$ jsou spojitá jakožto zobrazení z $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ do $(\mathcal{S}_d, \sigma)$.*

DŮKAZ. (a) (i)$\Leftrightarrow$(ii) plyne z Věty 7.59(c).

(iii)$\Rightarrow$(ii) je triviální a (ii)$\Rightarrow$(iii) plyne z Lemmatu 3.

Označme nyní metriku z Lemmatu 7.62 jako ρ a dokažme její úplnost. Nechť $\{f_n\}$ je cauchyovská posloupnost v metrice ρ. Z nerovnosti $\nu_N(f - g) \leq 2^N \rho(f, g)$ platné pro $f, g \in \mathcal{S}_d$, $\rho(f, g) < \frac{1}{2^N}$ plyne, že $\{f_n\}$ je cauchyovská v každé z norem ν_N, $N \in \mathbb{N}_0$. Odtud plyne, že pro každé $N \in N_0$ a každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ je posloupnost $\left\{(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n\right\}_{n=1}^\infty$ cauchyovská v Banachově prostoru $C_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$. Tedy existuje funkce $g_{N,\alpha} \in C_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$ taková, že $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to g_{N,\alpha}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Speciálně, pro $f = g_{0,0}$ platí, že $f_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Podle klasické věty z analýzy pak $D^\alpha f_n \to D^\alpha f$ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro libovolný multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.■■■[odkaz; pracuje se na tom ve skriptech Pick et al. snad] Je-li nyní $N \in N_0$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f$ bodově na $\mathbb{R}^d$. Zároveň ale $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to g_{N,\alpha}$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$, odkud plyne, že $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f = g_{N,\alpha}$ a $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Protože $g_{N,\alpha} \in C_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$, dostáváme (též díky Větě 13.1), že $f \in \mathcal{S}_d$. Podle (a) to pak znamená, že $f_n \to f$ v metrice ρ.

(b) Nechť $f_n \to f$ v topologii σ a $1 \leq p < \infty$. Podle Lemmatu 6 existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že $C = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{Np}} \,\mathrm{d}\mu_d < +\infty$. Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí, že $|(f_n - f)(x)| \leq \frac{\nu_N(f_n - f)}{(1+\|x\|^2)^N}$, a tedy $\|f_n - f\|_p \leq C^{1/p} \nu_N(f_n - f) \to 0$.

(c) Díky faktům $D^\alpha f_n - D^\alpha f = D^\alpha(f_n - f)$, $Pf_n - Pf = P(f_n - f)$ a $gf_n - gf = g(f_n - f)$ stačí ukázat, že $D^\alpha f_n \to 0$, $Pf_n \to 0$ a $gf_n \to 0$, jestliže $f_n \to 0$ v topologii σ. To ukážeme pomocí (a) (iii). Nechť Q je polynom a $\beta \in \mathbb{N}_0^d$. Pak $QD^\beta(D^\alpha f_n) = QD^{\alpha+\beta} f_n \to 0$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Dále, podle Faktu 6.20 je $QD^\beta(Pf_n)$ rovno konečnému součtu $\sum_{\gamma,\delta} Q_\gamma D^\delta f_n$, kde Q_γ jsou polynomy. Každá z funkcí v této sumě ovšem konverguje k 0 stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Konečně, podle Faktu 6.20 je $QD^\beta(gf_n)$ rovno konečnému součtu $\sum_{\gamma,\delta} c_{\gamma,\delta} QD^\gamma g D^\delta f_n$, kde $c_{\gamma,\delta}$ jsou konstanty. Protože funkce $D^\gamma g$ jsou omezené, konverguje opět každá z funkcí v sumě k 0 stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

□

Funkce z $\mathcal{S}_d$ jsou integrovatelné (Tvrzení 7(a)), takže mají Fourierovu transformaci. Díky vlastnostem Schwartzova prostoru jsou pro funkce z $\mathcal{S}_d$ automaticky splněny předpoklady pro derivování Fourierovy transformace, takže na $\mathcal{S}_d$ je kalkulus Fourierovy transformace snadno zformulovatelný:

TVRZENÍ 9. *Nechť $f \in \mathcal{S}_d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.*

(a) *$\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.*

(b) *$D^\alpha \widehat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.*

DŮKAZ. (a) Vzorec plyne snadno indukcí dle $|\alpha|$ z Věty 5.19(e), přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť $D^\beta f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mu_d)$ pro každé $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ dle Tvrzení 7(c) a (a).

(b) Vzorec plyne snadno indukcí dle $|\alpha|$ z Věty 5.19(f), přičemž v indukčním kroku jsou předpoklady splněny, neboť $m_\alpha f \in \mathcal{S}_d \subset L_1(\mu_d)$ dle Tvrzení 7(e) a (a).

□

Následující věta hovoří o tom, že Schwartzův prostor se chová výborně vzhledem k inverzní Fourierově transformaci.

VĚTA 10. *Fourierova transformace je izomorfismem prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ na sebe. Navíc pro $f \in \mathcal{S}_d$ platí, že*

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}^d \quad a \quad \widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}} = f.$$

DŮKAZ. Nechť $f \in \mathcal{S}_d$. Pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ dle Tvrzení 9(b) platí, že $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{h}$ pro nějakou funkci $h \in \mathcal{S}_d$ (Tvrzení 7(e)). Protože $\widehat{h}$ je spojitá dle Věty 5.19(a), plyne odtud s pomocí Věty 13.1, že $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dále, je-li $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$, pak použijeme-li Tvrzení 9(b) a (a), dostaneme $t^\beta D^\alpha \widehat{f}(t) = \frac{1}{i^{|\beta|}}(it)^\beta \widehat{m_\alpha f}(t) = \frac{1}{i^{|\beta|}} \widehat{D^\beta (m_\alpha f)}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ (uvědomme si, že $m_\alpha f \in \mathcal{S}_d$ dle Tvrzení 7(e)). Funkce napravo je ovšem omezená (Věta 5.19(a)). Odtud snadno plyne, že $PD^\alpha \widehat{f}$ je omezená pro libovolný polynom P a libovolný multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, což znamená, že $\widehat{f} \in \mathcal{S}_d$. Tedy Fourierova transformace zobrazuje $\mathcal{S}_d$ do $\mathcal{S}_d$.

Již víme, že Fourierova transformace je prosté lineární zobrazení (Důsledek 5.26). Pro důkaz spojitosti stačí dle Věty 7.32 ukázat, že $\widehat{f_n} \to 0$ v σ kdykoli $f_n \to 0$ v σ. Nechť tedy $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{S}_d$ jdoucí k 0 v topologii σ. Nechť dále $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$. Stejně jako výše obdržíme, že $t^\beta D^\alpha \widehat{f_n}(t) = \frac{1}{i^{|\beta|}} \widehat{D^\beta (m_\alpha f_n)}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Dvojnásobnou aplikací Věty 8(c) dostaneme, že $D^\beta(m_\alpha f_n) \to 0$ v σ. Podle Věty 8(b) tedy $D^\beta(m_\alpha f_n) \to 0$ v prostoru $L_1(\mu_d)$. Díky Větě 5.19(a) tak platí, že $\widehat{D^\beta(m_\alpha f_n)} \to 0$ v prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$, tj. stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$. Protože to platí pro každý multiindex $\beta \in \mathbb{N}_0^d$, plyne odtud, že $PD^\alpha \widehat{f_n} \to 0$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$ pro každý polynom P na $\mathbb{R}^d$. Věta 8(a) konečně říká, že to znamená, že $\widehat{f_n} \to 0$ v σ.

Pro lepší přehlednost označme $\mathcal{F} : \mathcal{S}_d \to \mathcal{S}_d$, $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ a dále $\mathcal{F}^n = \overbrace{\mathcal{F} \circ \mathcal{F} \circ \cdots \circ \mathcal{F}}^{n \text{ krát}}$. Z věty o inverzi (Věta 5.25) dostáváme, že $\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x)$ pro každou $f \in \mathcal{S}_d$ a každé $x \in \mathbb{R}^d$. Aplikujeme-li předchozí vztah na $\mathcal{F}^2 f$ místo na f, dostaneme, že $\mathcal{F}^4 f(x) = \mathcal{F}^2(\mathcal{F}^2 f)(x) = \mathcal{F}^2 f(-x) = f(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$. Odtud dále plyne, že $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^3 = Id$, což implikuje, že $\mathcal{F}$ je na a $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$. Tedy $\mathcal{F}^{-1}$ je také spojité.

□

3. Temperované distribuce

Následující tvrzení nám osvětlí vztah prostorů $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau)$ a $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, což nám umožní vybudovat teorii Fourierovy transformace i pro distribuce.

LEMMA 11. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní. Pak $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.*

DŮKAZ. Funkce $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ je na K omezená, což znamená, že normy ν_N a $\|\cdot\|_N$ jsou na $\mathcal{D}(K)$ ekvivalentní. Odtud snadno plyne, že $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

□

TVRZENÍ 12. *Podprostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý v $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ a pro topologii τ platí, že $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \subset \tau$. Jinými slovy, vnoření $Id : (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ je spojité a na hustou podmnožinu.*

DŮKAZ. Nechť $f \in \mathcal{S}_d$. Vezměme nějakou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takovou, že $\varphi = 1$ na $B(0,1)$ (viz např. Lemma 6.2), a položme $\varphi_n(x) = \varphi(\frac{1}{n}x)$ a $f_n = \varphi_n f$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tvrdíme, že $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$. Vskutku, je-li $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a P polynom na $\mathbb{R}^d$, pak dle Faktu 6.20 je

$$PD^\alpha(f - f_n) = \sum_{\substack{\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d \\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c_{\beta,\gamma} PD^\beta f D^\gamma(1 - \varphi_n)$$

pro nějaké konstanty $c_{\beta,\gamma}$. Protože $D^\gamma \varphi_n(x) = \frac{1}{n^{|\gamma|}} D^\gamma \varphi(\frac{1}{n}x)$, je pro pevné γ posloupnost funkcí $\{D^\gamma(1 - \varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ stejně omezená na $\mathbb{R}^d$. Dále je $D^\gamma(1 - \varphi_n)(x) = 0$ pro $x \in B(0, n)$. Dle Tvrzení 7(c), (e) a (a) je $PD^\beta f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, odkud plyne, že posloupnost $\{PD^\beta f D^\gamma(1-\varphi_n)\}_{n=1}^\infty$ konverguje stejnoměrně k 0 na $\mathbb{R}^d$. Tedy $f_n \to f$ v $\mathcal{S}_d$ (Věta 8(a)).

Je-li $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, pak dle Lemmatu 11 je $\sigma \restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$, takže $Id\colon (\mathcal{D}(K), \tau_K) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ je spojitá. Dle Tvrzení 2 je tedy $Id\colon (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ spojitá.

□

Připomeňme, že prostor $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je metrizovatelný úplnou metrikou, řekněme ρ_σ. Pak z Tvrzení 12 plyne, že prostor $(\mathcal{S}_d, \rho_\sigma)$ je zúplněním prostoru $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho_\sigma)$. Dále z Tvrzení 12 plyne, že je-li $\Phi \in (\mathcal{S}_d, \sigma)^*$, pak $\Phi \restriction_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau)^*$, neboli restrikce Φ na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je distribuce na $\mathbb{R}^d$.

DEFINICE 13. Distribuce na $\mathbb{R}^d$, které jsou restrikcemi funkcionálů z $(\mathcal{S}_d, \sigma)^*$, se nazývají temperované distribuce.

Protože díky hustotě $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ v $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ jsou spojité lineární funkcionály na $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ určeny jednoznačně svými restrikcemi na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, je obvyklé ztotožňovat temperované distribuce s funkcionály z $(\mathcal{S}_d, \sigma)^*$. Zkráceně budeme též psát $(\mathcal{S}_d, \sigma)^* = \mathcal{S}_d^*$.

Nechť ρ_σ je translačně invariantní úplná metrika indukující σ. Je-li distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ spojitá v topologii σ, pak je i stejnoměrně spojitá v σ (Věta 7.32), a tedy díky translační invarianci i v metrice ρ_σ. To ovšem znamená, že existuje její spojité rozšíření Φ z prostoru $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho_\sigma)$ na prostor $(\mathcal{S}, \rho_\sigma)$ (Věta 13.8). Analogicky jako v důkazu Věty 1.62 si lze rozmyslet, že Φ je lineární. Tedy $\Phi \in (\mathcal{S}_d, \sigma)^*$ a $\Lambda = \Phi \restriction_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$. Dostáváme tak, že distribuce na $\mathbb{R}^d$ je temperovaná, právě když je spojitá i v (slabší) topologii σ.

PŘÍKLADY 14. Uveďme následující příklady temperovaných distribucí:

- Nechť $\Lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$ je distribuce s kompaktním nosičem. Zvolme libovolnou $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ takovou, že $\psi = 1$ na otevřené množině obsahující $\operatorname{supp} \Lambda$, a označme $L = \operatorname{supp} \psi$. Pak $Q\colon (\mathcal{S}_d, \sigma) \to (\mathcal{D}(L), \tau_L)$, $Q(f) = \psi f$ je spojité lineární zobrazení (linearita je zřejmá, spojitost plyne z Věty 8(c) a Lemmatu 11). Položíme-li $\Phi(f) = \Lambda(Q(f))$ pro $f \in \mathcal{S}_d$, pak $\Phi \in \mathcal{S}_d^*$. Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pak platí, že $\operatorname{supp}(1-\psi)\varphi \subset \mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp} \Lambda$, takže $\Lambda(\varphi) = \Lambda(\psi\varphi + (1-\psi)\varphi) = \Lambda(\psi\varphi) + \Lambda((1-\psi)\varphi) = \Phi(\varphi)$. Tedy Λ je temperovaná distribuce.
- Nechť μ je nezáporná borelovská míra na $\mathbb{R}^d$ taková, že $\int (1 + \|x\|^2)^{-N} \, \mathrm{d}\mu = C < +\infty$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$. Definujme
$$\Lambda_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, \mathrm{d}\mu$$
pro $f \in \mathcal{S}_d$. Pak Λ_μ je temperovaná distribuce. Vskutku,
$$|\Lambda_\mu(f)| \le \int_{\mathbb{R}^d} \left\| y \mapsto (1 + \|y\|^2)^N f(y) \right\|_\infty (1 + \|x\|^2)^{-N} \, \mathrm{d}\mu(x) \le C \nu_N(f).$$
Odtud snadno plyne, že $\Lambda_\mu \in \mathcal{S}_d^*$.
- Nechť g je měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d$ taková, že $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^{-N} g(x) \in L_p(\mu_d)$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a $1 \le p \le \infty$. (Toto speciálně platí pro funkce z $L_p(\mu_d)$ nebo pro funkce majorizované nějakým polynomem.) Definujme
$$\Lambda_g(f) = \int_{\mathbb{R}^d} fg \, \mathrm{d}\mu_d$$
pro $f \in \mathcal{S}_d$. Pak Λ_g je temperovaná distribuce. Vskutku, nechť q je sdružený exponent k p. Označme $s(x) = 1 + \|x\|^2$. Dle Lemmatu 6 existuje $M \in \mathbb{N}_0$ takové, že $s^{N-M} \in L_q(\mu_d)$. Pak díky Hölderově nerovnosti je
$$\begin{aligned} |\Lambda_g(f)| &\le \int_{\mathbb{R}^d} |fg| \, \mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} |s^M f| \cdot |s^{-N} g| \cdot |s^{N-M}| \, \mathrm{d}\mu_d \le \\ &\le \|s^M f\|_\infty \|s^{-N} g\|_p \|s^{N-M}\|_q \le \|s^{-N} g\|_p \|s^{N-M}\|_q \nu_M(f). \end{aligned}$$
Odtud snadno plyne, že $\Lambda_g \in \mathcal{S}_d^*$.

TVRZENÍ 15. *Nechť Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $g \in \mathcal{S}_d$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$. Pak $D^\alpha \Lambda$, $g\Lambda$ a $P\Lambda$ jsou též temperované distribuce a vzorce*

- $D^\alpha \Lambda(f) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha f)$,
- $(g\Lambda)(f) = \Lambda(gf)$ *a*
- $(P\Lambda)(f) = \Lambda(Pf)$

platí pro každou $f \in \mathcal{S}_d$. Dále zobrazení $\Lambda \mapsto D^\alpha \Lambda$, $\Lambda \mapsto g\Lambda$ a $\Lambda \mapsto P\Lambda$ jsou spojitá lineární zobrazení z prostoru $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ do sebe.

DŮKAZ. Všechna uvedená tvrzení snadno plynou z Věty 8(c), výše uvedených vzorců a vlastností w^*-topologie.

□

Pro temperované distribuce nyní můžeme zavést jejich Fourierovu transformaci, jak bylo avizováno v úvodu předchozího oddílu.

DEFINICE 16. Fourierova transformace temperované distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Z Věty 10 plyne, že Fourierova transformace temperované distribuce je opět temperovaná distribuce. První část následující věty říká, že definice Fourierovy transformace je konzistentní ve smyslu ztotožňování funkce f a příslušné distribuce Λ_f.

VĚTA 17.

(a) Je-li $g \in L_1(\mu_d)$, pak $\Lambda_{\widehat{g}}$ je temperovaná distribuce a $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{\widehat{g}}$. Je-li $g \in L_2(\mu_d)$, pak $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{F(g)}$, kde F je rozšířením Fourierovy transformace z Plancherelovy věty (Věta 5.28).

(b) Je-li Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak

- $\widehat{D^\alpha \Lambda} = s_\alpha \widehat{\Lambda}$, *kde* $s_\alpha(x) = (ix)^\alpha$, *a*
- $D^\alpha \widehat{\Lambda} = \widehat{m_\alpha \Lambda}$, *kde* $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

(c) Fourierova transformace $\mathcal{F}$ temperovaných distribucí je izomorfismem prostoru $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ na sebe. Platí pro ni, že $\mathcal{F}^4 = Id$.

DŮKAZ. (a) Nechť $g \in L_1(\mu_d)$. Pak $\widehat{g} \in C_0(\mathbb{R}^d) \subset L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (Věta 5.19(a)), a tedy $\Lambda_{\widehat{g}}$ je distribuce. Pro $f \in \mathcal{S}_d$ pak díky Větě 5.19(h) platí, že

$$\widehat{\Lambda_g}(f) = \Lambda_g(\widehat{f}) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\, g \,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d = \Lambda_{\widehat{g}}(f).$$

Je-li $g \in L_2(\mu_d)$, pak lze postupovat analogicky, jako výše, pouze je třeba ověřit, že $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\, g\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} fF(g)\,\mathrm{d}\mu_d$ pro každou $f \in \mathcal{S}_d$: Označme $L_2 = L_2(\mu_d)$ a $L_1 = L_1(\mu_d)$. Protože $L_2 \cap L_1$ je hustá v L_2 (viz důkaz Věty 5.28), existuje posloupnost $\{g_n\} \subset L_2 \cap L_1$ taková, že $g_n \to g$ v L_2. Podle Věty 5.28 je tedy $\widehat{g_n} = F(g_n) \to F(g)$ v L_2. Nechť $f \in \mathcal{S}_d$. Protože $h \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} hf\,\mathrm{d}\mu_d$ a $h \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} h\widehat{f}\,\mathrm{d}\mu_d$ jsou spojité lineární funkcionály na L_2 (Věta 2.15, Tvrzení 7(a), Věta 10), platí s využitím Věty 5.19(h), že

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\, g\,\mathrm{d}\mu_d = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\, g_n\,\mathrm{d}\mu_d = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f\,\widehat{g_n}\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} fF(g)\,\mathrm{d}\mu_d.$$

(b) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, pak díky Tvrzení 15, Tvrzení 9(b) a linearitě $\widehat{\Lambda}$ platí, že

$$\begin{aligned}\widehat{D^\alpha \Lambda}(f) &= D^\alpha \Lambda(\widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha \widehat{f}) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(\widehat{m_\alpha f}) = \\ &= (-1)^{|\alpha|}\widehat{\Lambda}(m_\alpha f) = \widehat{\Lambda}(s_\alpha f) = (s_\alpha \widehat{\Lambda})(f).\end{aligned}$$

Podobně, díky Tvrzení 15, Tvrzení 9(a) a linearitě Λ platí, že

$$\begin{aligned}(D^\alpha \widehat{\Lambda})(f) &= (-1)^{|\alpha|}\widehat{\Lambda}(D^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(\widehat{D^\alpha f}) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(s_\alpha \widehat{f}) = \\ &= \Lambda(m_\alpha \widehat{f}) = (m_\alpha \Lambda)(\widehat{f}) = \widehat{m_\alpha \Lambda}(f).\end{aligned}$$

(c) Snadno je vidět, že $\mathcal{F}$ je lineární. Nechť $\{\Phi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{S}_d^*$ je net, který w^*-konverguje k $\Phi \in \mathcal{S}_d^*$. Pro každou $f \in \mathcal{S}_d$ pak $\mathcal{F}(\Phi_\gamma)(f) = \Phi_\gamma(\widehat{f}) \to \Phi(\widehat{f}) = \mathcal{F}(\Phi)(f)$. Tedy $\mathcal{F}$ je spojité. Dále pro každou $f \in \mathcal{S}_d$ je dle Věty 10

$$\mathcal{F}^4(\Phi)(f) = \mathcal{F}^3(\Phi)(\widehat{f}) = \cdots = \Phi(\widehat{\widehat{\widehat{\widehat{f}}}}) = \Phi(f),$$

neboli $\mathcal{F}^4 = Id$. Odtud dále plyne, že $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^3 = Id = \mathcal{F}^3 \circ \mathcal{F}$, což implikuje, že $\mathcal{F}$ je bijekce a $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^3$. Tedy $\mathcal{F}^{-1}$ je také spojité.

□

Kapitola 9

Bochnerův integrál

1. Měřitelná zobrazení

Připomeňme, že jsou-li $(X, \mathcal{S})$, $(Y, \mathcal{T})$ měřitelné prostory, pak $f: X \to Y$ se nazývá měřitelné, pokud $f^{-1}(T) \in \mathcal{S}$ pro každou $T \in \mathcal{T}$. Je-li X topologický prostor, pak pokud není řečeno jinak, uvažujeme na X borelovskou σ-algebru.

Následující tvrzení je zobecněním základní věty z teorie míry pro měřitelné (komplexní či numerické) funkce.

TVRZENÍ 1. *Nechť Ω je měřitelný prostor a X je metrický prostor. Pak bodová limita posloupnosti měřitelných zobrazení z Ω do X je měřitelné zobrazení.*

DŮKAZ. Nechť $f_n: \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost měřitelných zobrazení, která bodově konverguje k $f: \Omega \to X$. Vezměme libovolnou uzavřenou $F \subset X$. Položme $G_k = \{x \in X;\ \operatorname{dist}(x, F) < \frac{1}{k}\}$. Pak G_k jsou otevřené množiny takové, že $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{G_k}$. Tvrdíme, že

$$f^{-1}(F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k),$$

odkud plyne měřitelnost f, neboť množina vpravo je zjevně měřitelná. Vskutku, nechť $t \in f^{-1}(F)$. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ je G_k okolí $f(t)$, takže existuje $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $f_n(t) \in G_k$ pro $n \geq n_k$. Tedy $t \in \bigcap_{n=n_k}^{\infty} f_n^{-1}(G_k)$. To znamená, že $t \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Na druhou stranu, je-li $t \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} f_n^{-1}(G_k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje n_k takové, že $f_n(t) \in G_k$ pro $n \geq n_k$. To znamená, že $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) \in \overline{G_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, neboli $f(t) \in F$.

$\square$

Víme, že v teorii integrace skalárních funkcí hrají důležitou roli jednoduché funkce. Tento koncept bude zásadní i pro teorii vektorového integrálu.

DEFINICE 2. Nechť Ω a X jsou množiny. Zobrazení $f: \Omega \to X$ se nazývá jednoduché, pokud $f(\Omega)$ je konečná množina.

Snadno je vidět, že jsou-li Ω, X měřitelné prostory a $f: \Omega \to X$ jednoduché zobrazení takové, že $f^{-1}(x)$ je měřitelná množina pro každé $x \in f(\Omega)$, pak f je měřitelné.

VĚTA 3. *Nechť Ω je měřitelný prostor a X je separabilní metrický prostor. Pak $f: \Omega \to X$ je měřitelné, právě když je bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ plyne ihned z Tvrzení 1.

$\Rightarrow$ Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je hustá v (X, ρ). Zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$. Definujme množiny $A_{(k,j)}^n \subset X$, kde $(k, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ s lexikografickým uspořádáním, následovně:

$$A_{(k,j)}^n = U(x_j, \tfrac{1}{n+1-k}) \setminus \bigcup_{(r,s)<(k,j)} U(x_s, \tfrac{1}{n+1-r}).$$

Tyto množiny jsou zjevně borelovské a po dvou disjunktní. Pro $t \in \Omega$ definujme $f_n(t) = x_j$, je-li $f(t) \in A_{(k,j)}^n$ pro nějaké $(k, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $f_n(t) = x_1$ jinak. Pak f_n je jednoduché měřitelné zobrazení.

Je-li nyní $t \in \Omega$ a $m \in \mathbb{N}$, pak existuje $j \in \mathbb{N}$ takové, že $\rho(f(t), x_j) < \frac{1}{m}$, tj. $f(t) \in U(x_j, \frac{1}{m})$. Položme $n_0 = \max\{m, j\}$. Nechť $n \geq n_0$. Pak existuje $(r, s) \in \{1, \dots, n\}^2$ minimální takové, že $f(t) \in U(x_s, \frac{1}{n+1-r})$ a navíc platí, že $(r, s) \leq (n + 1 - m, j)$. To znamená, že $f(t) \in A^n_{(r,s)}$ a $r \leq n + 1 - m$. Odtud plyne, že $f_n(t) = x_s$, a tedy $\rho(f_n(t), f(t)) = \rho(x_s, f(t)) < \frac{1}{n+1-r} \leq \frac{1}{m}$. Tím jsme dokázali, že $f_n(t) \to f(t)$.

$\square$

Pro měřitelná zobrazení do neseparabilních prostorů může dojít k nepříjemnému jevu – součet měřitelných zobrazení nemusí být měřitelné zobrazení.

PŘÍKLAD 4. Nechť X je normovaný lineární prostor takový, že card $X > \mathfrak{c}$ (např. $\ell_2(2^{\mathfrak{c}})$). Definujme zobrazení $f, g \colon X \times X \to X$ předpisy $f(x, y) = x$, $g(x, y) = -y$. Vezměme dále na X borelovskou σ-algebru $\mathcal{B}$ a na $X \times X$ součinovou σ-algebru $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Pak snadno nahlédneme, že f i g jsou měřitelná zobrazení, ale $h = f + g$ není měřitelné, neboť $h^{-1}(0) = \{(x, x);\ x \in X\}$, což dle Lemmatu 13.14 není měřitelná množina.

Abychom se vyhnuli výše uvedenému jevu, mohli bychom se omezit pouze na zobrazení se separabilním oborem hodnot. Nicméně pro vybudování teorie integrálu se z formálních důvodů zdá výhodné umět integrovat také zobrazení, která se na množině nulové míry mohou chovat jakkoliv. Protože je potřeba, aby integrované zobrazení bylo zároveň měřitelné v klasickém smyslu (abychom dostali měřitelnost funkce $t \mapsto \|f(t)\|$), je nezbytné v celé teorii pracovat s úplnými mírami.

Je-li (Ω, μ) prostor s mírou a M je množina, pak symbolem $\text{Æ}(\Omega, M)$ označíme množinu všech zobrazení definovaných μ-s. v. na Ω s hodnotami v M.

DEFINICE 5 (Salomon Bochner (1933)). Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou a X je metrický prostor. Zobrazení z $\text{Æ}(\Omega, X)$ nazveme silně měřitelným (též bochnerovsky měřitelným) vzhledem k μ, pokud je μ-s. v. bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení z Ω do X.

LEMMA 6. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a $f \in \text{Æ}(\Omega, X)$. Pak f je silně měřitelné, právě když je měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.*

Poznamenejme, že úplnost μ je zde naprosto zásadní.

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Existují jednoduchá měřitelná zobrazení $f_n \colon \Omega \to X$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f_n \to f$ na $\Omega \setminus E$. Dle Tvrzení 1 je $f\restriction_{\Omega \setminus E}$ měřitelné. Díky úplnosti μ je tedy f měřitelné. Dále $f(\Omega \setminus E) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega)}$, přičemž množina vpravo je zjevně separabilní (je to uzávěr spočetné množiny).

$\Leftarrow$ Dle Věty 3 je $f\restriction_{\Omega \setminus E}$ bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných zobrazení definovaných na $\Omega \setminus E$. Nyní stačí tato jednoduchá zobrazení dodefinovat konstantní hodnotou na E.

$\square$

Speciálně, pro zobrazení do separabilních metrických prostorů pojmy měřitelnosti a silné měřitelnosti splývají. Tedy například spojité zobrazení ze separabilního metrického prostoru s mírou, která je zúplněním borelovské míry, do metrického prostoru je silně měřitelné.

PŘÍKLAD 7. Nechť Γ je nespočetná množina a μ je aritmetická míra na Γ. Definujme $f \colon \Gamma \to c_0(\Gamma)$ předpisem $f(\gamma) = e_\gamma = \chi_{\{\gamma\}}$. Pak f je μ-měřitelné, neboť každá podmnožina Γ je měřitelná, ale dle Lemmatu 6 není f silně měřitelné, neboť $f(\Gamma)$ je neseparabilní a míru 0 má pouze prázdná množina.

DŮSLEDEK 8. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je metrický prostor a $\{f_n\} \subset \text{Æ}(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení, která konverguje bodově s. v. k $f \in \text{Æ}(\Omega, X)$. Pak f je silně měřitelné.*

DŮKAZ. Dle předpokladu existuje $H \subset \Omega$ taková, že $\mu(\Omega \setminus H) = 0$ a $f_n \to f$ bodově na H. Dle Lemmatu 6 jsou $f_n\restriction_H$ měřitelná, a tedy i $f\restriction_H$ je měřitelné (Tvrzení 1). Díky úplnosti μ je tedy f měřitelné. Dále existují $E_n \subset \Omega$ takové, že $\mu(E_n) = 0$ a $f_n(\Omega \setminus E_n)$ je separabilní. Položme $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pak

$\mu(E) = 0$. Protože $f(\Omega \setminus E) \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(\Omega \setminus E_n)}$, je $f(\Omega \setminus E)$ separabilní. Dle Lemmatu 6 je tedy f silně měřitelné.

□

LEMMA 9. *Nechť Ω a X jsou je měřitelné prostory, X je zároveň vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g\colon \Omega \to X$ jsou jednoduchá měřitelná zobrazení a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou jednoduchá měřitelná zobrazení.*

DŮKAZ. Zobrazení $f + g$ je jednoduché, neboť $(f + g)(\Omega) \subset f(\Omega) + g(\Omega)$, kde vpravo je konečná množina. Dále, je-li $x \in (f + g)(\Omega)$, pak

$$(f+g)^{-1}(x) = \bigcup_{\substack{u \in f(\Omega) \\ v \in g(\Omega) \\ u+v=x}} f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v),$$

což je měřitelná množina, neboť sjednocení vpravo je konečné. Tedy $f + g$ je měřitelné.

Je-li $\alpha = 0$, pak je tvrzení o αf triviální. Pro $\alpha \neq 0$ je $(\alpha f)(\Omega) = \alpha(f(\Omega))$ a $(\alpha f)^{-1}(x) = f^{-1}(\frac{1}{\alpha}x)$, odkud tvrzení ihned plyne.

□

Z definice silné měřitelnosti a Lemmatu 9 ihned plyne následující důsledek:

DŮSLEDEK 10. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \in \text{Æ}(\Omega, X)$ jsou silně měřitelná a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou silně měřitelná zobrazení.*

Pro praktické ověření silné měřitelnosti není ovšem definice příliš vhodná a i použití Lemmatu 6 přináší nemalé obtíže. Dále si proto ukážeme praktičtější charakterizaci silně měřitelných zobrazení.

DEFINICE 11 (Izrail Moisejevič Gelfand[1] (1938), Billy James Pettis (1938)). Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f \in \text{Æ}(\Omega, X)$ nazveme slabě měřitelným, pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f$ měřitelná funkce.

Zjevně každé měřitelné zobrazení do normovaného lineárního prostoru je slabě měřitelné.

PŘÍKLAD 12. Nechť $\Omega = [0,1]$ s Lebesgueovou mírou a $X = \ell_2([0,1])$. Definujme zobrazení $f\colon [0,1] \to X$ předpisem $f(t) = e_t$ (připomeňme, že $e_t = \chi_{\{t\}}$). Pak f je slabě měřitelné, ale není měřitelné (a tedy ani silně měřitelné).

Nechť $\phi \in \ell_2([0,1])^*$ je dáno. Dle Věty 2.15(c) existuje $y \in \ell_2([0,1])$ takové, že

$$\phi(x) = \sum_{s \in [0,1]} x(s)y(s) \quad \text{pro } x \in \ell_2([0,1]).$$

Odtud vidíme, že $\phi \circ f(t) = \phi(e_t) = y(t)$ pro každé $t \in [0,1]$. Jelikož $\sum_{t \in [0,1]} |y(t)|^2 < +\infty$, je množina $\{t \in [0,1];\ y(t) \neq 0\}$ spočetná. Tedy funkce $\phi \circ f$ je s. v. rovna 0, takže je měřitelná.

Na druhou stranu, je-li $E \subset [0,1]$ Lebesgueovy míry 0, pak existuje neměřitelná $A \subset [0,1] \setminus E$ ([R, Věta 2.22]). Položíme-li nyní $G = \bigcup_{t \in A} U(e_t, 1) \subset X$, pak G je otevřená množina a $f^{-1}(G) = A$. Tedy f není měřitelné.

DEFINICE 13. Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující, pokud $\|x\| = \sup_{f \in A} |f(x)|$ pro každé $x \in X$.

Samotná množina B_{X^*} je 1-normující díky duálnímu vyjádření normy (Důsledek 2.6). Dokonce jen S_{X^*} je 1-normující (Důsledek 2.5).

LEMMA 14. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li $A \subset B_{X^*}$ množina w^*-hustá v B_{X^*}, pak A je 1-normující.*

DŮKAZ. Nechť $x \in X$ a nechť $f \in B_{X^*}$ je takové, že $f(x) = \|x\|$. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $g \in A$ takové, že $g \in f + U_{x,\varepsilon}$, tj. $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$. Pak ovšem $g(x) = f(x) + g(x) - f(x) > \|x\| - \varepsilon$.

□

[1] Израиль Моисеевич Гельфанд

LEMMA 15. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset B_{X^*}$ je 1-normující. Pak $A_\circ = B_X$. Dokonce pro každé $x \in X$ a $r > 0$ platí, že $B(x,r) = \bigcap_{f\in A}\{y \in X;\ |f(y) - f(x)| \le r\}$.*

DŮKAZ. Je-li $x \in A_\circ$, pak $|f(x)| \le 1$ pro každé $f \in A$, takže $\|x\| = \sup_{f\in A}|f(x)| \le 1$, neboli $x \in B_X$. Na druhou stranu $B_X = (B_{X^*})_\circ \subset A_\circ$.

Obecnější tvrzení plyne z následujícího výpočtu (využívajícího Tvrzení 7.104(d)):

$$\begin{aligned} B(x,r) &= x + rB_X = x + rA_\circ = x + \left(\tfrac{1}{r}A\right)_\circ = x + \bigcap_{g\in\frac{1}{r}A}\{z \in X;\ |g(z)| \le 1\} = \\ &= x + \bigcap_{f\in A}\{z \in X;\ |\tfrac{1}{r}f(z)| \le 1\} = \bigcap_{f\in A}\{x + z;\ z \in X, |f(z)| \le r\} = \\ &= \bigcap_{f\in A}\{y \in X;\ |f(y-x)| \le r\}. \end{aligned}$$

□

Nechť A je podmnožina vektorového prostoru na $\mathbb{K}$. Označme jako $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ množinu všech lineárních kombinací prvků A s racionálními koeficienty (v případě $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ míněno s racionální reálnou i imaginární částí).

LEMMA 16. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$. Pak $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustý v $\operatorname{span} A$ a $B_X \cap \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ je hustá v $B_X \cap \operatorname{span} A$.*

DŮKAZ. Nechť $x \in \operatorname{span} A$. Pak $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$, kde $x_1, \dots, x_n \in A$. Nechť dále $\varepsilon > 0$. Položme $M = \|x_1\| + \dots + \|x_n\|$. Pak existují $\beta_j \in \mathbb{Q}$ (resp. $\beta_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$) tak, že $|\beta_j - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{M}$, a tedy $\left\|x - \sum_{j=1}^n \beta_j x_j\right\| = \left\|\sum_{j=1}^n (\alpha_j - \beta_j)x_j\right\| \le \sum_{j=1}^n |\alpha_j - \beta_j|\|x_j\| < \varepsilon$.

Je-li nyní $x \in B_X \cap \operatorname{span} A$, pak dle předchozího existuje $\{x_n\} \subset \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ taková, že $x_n \to x$ a $\|x_n\| \le 1 + \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\frac{n}{n+1}x_n \in B_X \cap \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ a $x_n \to x$.

□

Nyní již můžeme snadno dokázat větu charakterizující silnou měřitelnost. Implikaci (iii)⇒(i) se říká Pettisova věta[2].

VĚTA 17. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f je silně měřitelné.
(ii) f je měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.
(iii) f je slabě měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \setminus E)$ je separabilní.
(iv) Existují $E \subset \Omega$, $Y \subset X$ separabilní podprostor a $A \subset B_{Y^*}$ spočetná tak, že $\mu(E) = 0$, $f(\Omega \setminus E) \subset Y$, $B_{Y^*} \cap \operatorname{span} A$ je w^*-hustá v B_{Y^*} a $\phi \circ f$ je měřitelná pro každé $\phi \in A$.

DŮKAZ. (i)⇔(ii) plyne z Lemmatu 6. (ii)⇒(iii) je triviální.

(iii)⇒(iv) Položme $Y = \operatorname{span} f(\Omega \setminus E)$. Pak Y je separabilní dle Lemmatu 16. Dále dle Důsledku 7.110 a Tvrzení 7.113(a) je (B_{Y^*}, w^*) metrizovatelný kompakt. Tedy je to separabilní prostor a existuje spočetná $A \subset B_{Y^*}$, která je w^*-hustá v B_{Y^*}.

(iv)⇒(ii) Ukažme, že $g = f\restriction_{\Omega\setminus E}$ je měřitelné. Protože Y je separabilní, existuje spočetná $\{y_n\}$ hustá v Y. Pak každá otevřená množina v Y je spočetným sjednocením koulí tvaru $B(y_n, \frac{1}{k})$, $n, k \in \mathbb{N}$. Stačí tedy ukázat, že $g^{-1}(B(x,r))$ je měřitelná pro každé $x \in Y$ a $r > 0$. Díky předpokladu je dle Lemmatu 16 množina $M = B_{Y^*} \cap \operatorname{span}_{\mathbb{Q}} A$ w^*-hustá v B_{Y^*} (w^*-topologie je slabší, než normová), takže dle Lemmatu 14 je M 1-normující. Protože M je spočetná, stačí díky Lemmatu 15 ukázat, že pro každé $x \in Y$, $r > 0$ a $\phi \in M$ je množina $g^{-1}(\{y \in Y;\ |\phi(y) - \phi(x)| \le r\}) = \{t \in \Omega \setminus E;\ \phi \circ f(t) \in B_{\mathbb{K}}(\phi(x), r)\}$ měřitelná. To je ale zřejmé, neboť $\phi \circ f$ je dle předpokladu měřitelná pro každé $\phi \in M$.

□

[2]B. J. Pettis (1938), v podstatě totéž tvrdil i I. M. Gelfand (1938).

TVRZENÍ 18. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in \mathcal{Æ}(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Pokud pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi \circ f = 0$ s. v., pak $f = 0$ s. v.*

DŮKAZ. Dle Lemmatu 6 existují $E \subset \Omega$ míry 0 a Y separabilní podprostor X tak, že $f(\Omega \setminus E) \subset Y$. Dále existuje spočetná množina $\{\phi_n\} \subset B_{Y^*}$, která je w^*-hustá v B_{Y^*} (viz důkaz Věty 17), a tedy 1-normující (Lemma 14). Dle předpokladu existují $E_n \subset \Omega$ nulové míry takové, že $\phi_n \circ f = 0$ na $\Omega \setminus E_n$. Položme $A = E \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pak $\mu(A) = 0$ a pro $t \in \Omega \setminus A$ je $\|f(t)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\phi_n(f(t))| = 0$.

□

2. Bochnerův integrál

DEFINICE 19. Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $f : \Omega \to X$ se nazývá schodovité, jestliže je jednoduché, měřitelné a pro každé $x \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ je $\mu(f^{-1}(x)) < +\infty$.

DEFINICE 20. Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f : \Omega \to X$ je schodovité. Pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ definujeme Bochnerův integrál f přes E jako

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap E)x.$$

Uvědomme si, že pro $X = \mathbb{R}$ nebo $X = \mathbb{C}$ je Bochnerův integrál ze schodovité funkce roven Lebesgueovu integrálu. (Pro nezáporné funkce je to přímo definice, pro ostatní si to lze snadno rozmyslet.)

Dále si všimněme, že je-li $f : \Omega \to X$ schodovité a $E \subset \Omega$ měřitelná, pak $\chi_E f$ je též schodovité a pro $x \in f(\Omega) \setminus \{0\}$ je $(\chi_E f)^{-1}(x) = f^{-1}(x) \cap E$. Tedy

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap E)x = \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu\big((\chi_E f)^{-1}(x)\big)x = \int_\Omega \chi_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

LEMMA 21. *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f : \Omega \to X$ je schodovité. Jsou-li $A, B \subset \Omega$ disjunktní měřitelné podmnožiny, pak $\int_{A\cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ.

$$\int_{A\cup B} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu\big(f^{-1}(x) \cap (A \cup B)\big)x = \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \big(\mu(f^{-1}(x) \cap A) + \mu(f^{-1}(x) \cap B)\big)x =$$
$$= \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap A)x + \sum_{x\in f(\Omega)\setminus\{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap B)x = \int_A f \, \mathrm{d}\mu + \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

□

VĚTA 22. *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g : \Omega \to X$ jsou schodovitá zobrazení a $\alpha \in \mathbb{K}$. Pak $f + g$ a αf jsou schodovitá a $\int_E (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu$ a $\int_E \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

DŮKAZ. Dle Lemmatu 9 jsou $f + g$ a αf jednoduchá měřitelná zobrazení. Protože pro $y \in (f + g)(\Omega) \setminus \{0\}$ je $(f + g)^{-1}(y) \subset \bigcup_{u\in f(\Omega)\setminus\{0\}} f^{-1}(u) \cup \bigcup_{v\in g(\Omega)\setminus\{0\}} g^{-1}(v)$, je $f + g$ schodovité. Vzorec stačí zjevně dokázat pro $E = \Omega$. Označme $E_{u,v} = f^{-1}(u) \cap g^{-1}(v)$ pro $u, v \in X$. Pak $\Omega = \bigcup_{u\in f(\Omega), v\in g(\Omega)} E_{u,v}$ je měřitelný disjunktní rozklad Ω. S pomocí Lemmatu 21 tedy dostáváme, že

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu &= \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_{E_{u,v}} (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_\Omega \chi_{E_{u,v}}\cdot(f+g)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)\\ (u,v)\neq(0,0)}} \mu(E_{u,v})(u+v) = \\ &= \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)\\ (u,v)\neq(0,0)}} \mu(E_{u,v})u + \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)\\ (u,v)\neq(0,0)}} \mu(E_{u,v})v = \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_{E_{u,v}} f\,\mathrm{d}\mu + \sum_{\substack{u\in f(\Omega)\\ v\in g(\Omega)}} \int_{E_{u,v}} g\,\mathrm{d}\mu = \\ &= \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu,\end{aligned}$$

přičemž ve třetí a páté rovnosti jsme využili definici integrálu a toho, že integrál z nulového zobrazení je nula.

Konečně, podívejme se na tvrzení o násobku f. Je-li $\alpha = 0$, pak tvrzení zřejmě platí. Je-li $\alpha \neq 0$, pak tvrzení plyne téměř ihned z definice a z toho, že $(\alpha f)^{-1}(\alpha x) = f^{-1}(x)$ pro $x \in X$.

□

Uvědomme si, že z věty výše speciálně plyne indukcí, že je-li $f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} x_j$ libovolné vyjádření schodovitého zobrazení takové, že $\mu(A_j) < +\infty$ pro všechna $j \in \{1,\dots,n\}$, pak $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap E)x_j$.

Je-li (Ω,μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je měřitelné zobrazení, pak funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je měřitelná na Ω, neboť je složením spojité funkce $\|\cdot\|$ a měřitelného zobrazení f. Tuto funkci budeme značit $\|f\|$.

LEMMA 23. *Nechť (Ω,μ) je prostor s mírou, X je normovaný lineární prostor a $f\colon \Omega \to X$ je jednoduché měřitelné zobrazení. Pak f je schodovité, právě když $\int_\Omega \|f\|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$. V tom případě je $\left\|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right\| \le \int_E \|f\|\,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

Uvědomme si, že na levé straně nerovnosti je Bochnerův integrál, zatímco na pravé straně je Lebesgueův integrál.

DŮKAZ. Nechť $f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} x_j$, kde A_j jsou po dvou disjunktní a x_j jsou po dvou různé a nenulové. Pak $\|f\| = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j}\|x_j\|$, a tedy $\int_\Omega \|f\|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \mu(A_j)\|x_j\|$. Odtud již první tvrzení snadno plyne. Dále, pro $E \subset \Omega$ měřitelnou je $\left\|\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right\| = \left\|\sum_{j=1}^n \mu(A_j\cap E)x_j\right\| \le \sum_{j=1}^n \mu(A_j\cap E)\|x_j\| = \int_E \|f\|\,\mathrm{d}\mu$.

□

LEMMA 24. *Nechť (Ω,μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor, $f \in Æ(\Omega, X)$ je silně měřitelné a $f_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost schodovitých zobrazení taková, že $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \|f_n(t) - f(t)\|\,\mathrm{d}\mu(t) = 0$. Pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ existuje $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu$. Navíc je-li $g_n\colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ posloupnost schodovitých zobrazení se stejnou vlastností, jako má $\{f_n\}$, pak $\lim_{n\to\infty}\int_E g_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Pro $m,n \in \mathbb{N}$ je díky Větě 22, Lemmatu 23 a Důsledku 10

$$\begin{aligned}\left\|\int_E f_m\,\mathrm{d}\mu - \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\right\| &= \left\|\int_E (f_m - f_n)\,\mathrm{d}\mu\right\| \le \int_E \|f_m - f_n\|\,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f_m - f_n\|\,\mathrm{d}\mu \le \\ &\le \int_\Omega \|f_m - f\|\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|f - f_n\|\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že posloupnost $\{\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ je cauchyovská v X, a protože X je úplný, má tam limitu.

Dokažme nyní druhou část tvrzení. Posloupnost $\{h_n\}$ definovaná jako $h_{2n-1} = f_n$, $h_{2n} = g_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ má stejnou vlastnost jako $\{f_n\}$, podle první části tedy posloupnost $\{\int_E h_n\,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ má limitu v X. Posloupnosti $\{\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ a $\{\int_E g_n\,\mathrm{d}\mu\}_{n=1}^\infty$ jsou z ní ovšem vybrané, takže musejí mít stejnou limitu.

□

Poznamenejme, že z předpokladů předchozího lemmatu plyne, že posloupnost funkcí $t \mapsto \|f_n - f\|(t)$ konverguje k 0 v prostoru $L_1(\mu)$, takže existuje vybraná posloupnost z $\{f_{n_k}\}$ taková, že $\|f_{n_k} - f\| \to 0$ bodově s. v., neboli $f_{n_k} \to f$ bodově s. v. ([R, Věta 3.12]). Tedy předpoklad, že f je silně měřitelné, je nutný.

Předchozí lemma nám umožňuje definovat Bochnerův integrál jako limitu integrálů ze schodovitých zobrazení.

DEFINICE 25. Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Řekneme, že je f je bochnerovsky integrovatelné, pokud existuje posloupnost $f_n \colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ schodovitých zobrazení taková, že $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ pak definujeme Bochnerův integrál f přes E jako

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Díky Lemmatu 24 je definice korektní, neboť limita existuje a je nezávislá na volbě posloupnosti $\{f_n\}$.

VĚTA 26. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $f, g \in Æ(\Omega, X)$ jsou bochnerovsky integrovatelná, $\alpha \in \mathbb{K}$ a $E \subset \Omega$ je měřitelná.*

(a) Zobrazení $f + g$ a αf jsou bochnerovsky integrovatelná a $\int_E (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_E g \,\mathrm{d}\mu$ a $\int_E \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.

(b) $\left\| \int_E f \,\mathrm{d}\mu \right\| \le \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu$.

DŮKAZ. (a) Nechť $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ jsou posloupnosti schodovitých zobrazení takové, že $\int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$ a $\int_\Omega \|g_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$. Zobrazení $f + g$ a αf jsou silně měřitelná dle Důsledku 10; zobrazení $f_n + g_n$ a αf_n jsou schodovitá dle Věty 22. Dále $\int_\Omega \|f_n + g_n - (f + g)\| \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|g_n - g\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$ a $\int_\Omega \|\alpha f_n - \alpha f\| \,\mathrm{d}\mu = |\alpha| \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$. Odtud plyne, že $f + g$ a αf jsou bochnerovsky integrovatelná a (též s využitím Věty 22) že platí příslušné vzorce.

(b) Funkce $\|f\|$ je nezáporná měřitelná, tedy integrál vpravo existuje. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je konečný. Dále $\left\| \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \right\| \le \int_E \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ dle Lemmatu 23. Výraz vlevo konverguje dle definice k $\left\| \int_E f \,\mathrm{d}\mu \right\|$. Pro výraz vpravo je $\left| \int_E \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu - \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu \right| \le \int_E \big| \|f_n\| - \|f\| \big| \,\mathrm{d}\mu \le \int_E \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0$.

□

Následující věta udává užitečnou charakterizaci bochnerovsky integrovatelných funkcí.

VĚTA 27. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je silně měřitelné. Pak f je bochnerovsky integrovatelné, právě když $\|f\|$ je lebesgueovsky integrovatelná.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Funkce $\|f\|$ je nezáporná měřitelná, tedy její Lebesgueův integrál existuje. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost schodovitých zobrazení z definice $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, takže $\int_\Omega \|f\| \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$, přičemž konečnost předposledního integrálu plyne z Lemmatu 23.

$\Leftarrow$ Nechť $f_n \colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost jednoduchých měřitelných zobrazení a $E \subset \Omega$ nulové míry taková, že $f_n \to f$ bodově na $\Omega \setminus E$. Pro $t \in \Omega$ definujme

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t) & \text{pokud } \|f_n(t)\| \le 2\|f(t)\|, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak g_n je zjevně jednoduché měřitelné zobrazení (množina $\{t \in \Omega;\ \|f_n(t)\| \le 2\|f(t)\|\}$ je měřitelná), pro které $\|g_n\| \le 2\|f\|$. Odtud plyne, že $\|g_n\|$ je lebesgueovsky integrovatelná, a tedy g_n je schodovité (Lemma 23). Snadno si rozmyslíme, že $\|g_n(t) - f(t)\| \to 0$ pro $t \in \Omega \setminus E$: Je-li $f(t) = 0$, pak $g_n(t) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak je $\|f_n(t)\| \le 2\|f(t)\|$ pro všechna dost velká n, a tedy pro tato n je $g_n(t) = f_n(t) \to f(t)$. Jelikož $\|g_n - f\| \le \|g_n\| + \|f\| \le 3\|f\|$, z Lebesgueovy věty plyne, že $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = 0$.

□

Je-li $X = \mathbb{K}$, pak pojem silně měřitelné a měřitelné funkce do X splývá. Z předchozí věty a z nerovnosti $\left|\int f_n \,\mathrm{d}\mu - \int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu$ pro *Lebesgueův* integrál tedy speciálně plyne, že ve skalárním případě je Bochnerův integrál totéž jako Lebesgueův.

VĚTA 28. *Nechť (Ω, μ) je prostor s konečnou úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset Æ(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Nechť $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné takové, že $f_n \to f$ stejnoměrně s. v. na Ω. Pak $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Nechť $E \subset \Omega$ je taková, že $\mu(\Omega \setminus E) = 0$ a $f_n \to f$ stejnoměrně na E. Dále nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je takové, že $\sup_E \|f_n - f\| \leq 1$ pro $n \geq n_0$. Pak pro $n \geq n_0$ je $\int_\Omega \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu = \int_E \|f_n\| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E (\|f\| + 1) \,\mathrm{d}\mu = \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu + \mu(E)$, a tedy f_n je bochnerovsky integrovatelné (Věta 27). Tedy pro $n \geq n_0$ díky Větě 26 platí, že $\left\|\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right\| \leq \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = \int_E \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(E) \sup_E \|f_n - f\| \to 0$.
□

VĚTA 29 (o majorizované konvergenci). *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $\{f_n\} \subset Æ(\Omega, X)$ je posloupnost silně měřitelných zobrazení. Nechť $f \in Æ(\Omega, X)$ je takové, že $f_n \to f$ bodově s. v., a nechť $g \in L_1(\mu)$ je taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Pak f_n i f jsou bochnerovsky integrovatelná a $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Speciálně, $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Zobrazení f je silně měřitelné dle Důsledku 8. Snadno nahlédneme, že $\|f(t)\| \leq g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Tedy zobrazení f_n i f jsou bochnerovsky integrovatelná dle Věty 27. Jelikož pro s. v. $t \in \Omega$ platí, že $\|f_n(t) - f(t)\| \leq 2g(t)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, tvrzení plyne ihned z Lebesgueovy věty. Poslední část věty plyne z odhadu $\left\|\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu\right\| \leq \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu$, který platí díky Větě 26.
□

Z Vět 26(b) a 27 a z absolutní spojitosti Lebesgueova integrálu ([R, cvičení 1.12]) ihned dostáváme následující větu:

VĚTA 30 (absolutní spojitost Bochnerova integrálu). *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\left\|\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right\| < \varepsilon$ kdykoli $E \subset \Omega$ je taková, že $\mu(E) < \delta$.*

VĚTA 31. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X a Y jsou Banachovy prostory, $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak $T \circ f$ je bochnerovsky integrovatelné a pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$\int_E T \circ f \,\mathrm{d}\mu = T\left(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right).$$

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve, že f je schodovité. Nechť $f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} x_j$, kde A_j jsou po dvou disjunktní a x_j jsou po dvou různé a nenulové. Pak $T \circ f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} T(x_j)$, odkud snadno plyne, že $T \circ f$ je schodovité. Dále $\int_E T \circ f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap E) T(x_j) = T\left(\sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap E) x_j\right) = T\left(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right)$.

Dokažme nyní obecný případ. Díky spojitosti T snadno nahlédneme, že zobrazení $T \circ f$ je silně měřitelné. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost schodovitých zobrazení z definice $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$. Pak $\{T \circ f_n\}$ je posloupnost schodovitých zobrazení a

$$\int_\Omega \|T \circ f_n - T \circ f\| \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \|T(f_n(t) - f(t))\| \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \|T\| \cdot \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = \|T\| \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

Zobrazení $T \circ f$ je tedy bochnerovsky integrovatelné a pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ díky předchozímu odstavci a spojitosti T dostáváme, že

$$\int_E T \circ f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E T \circ f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} T\left(\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu\right) = T\left(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right).$$

□

FAKT 32. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor, $x \in X$ a $f \in L_1(\mu)$. Pak $\int_E f(t) x \,\mathrm{d}\mu(t) = \left(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\right) x$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.*

DŮKAZ. Definujme $T\colon \mathbb{K} \to X$ předpisem $T(s) = sx$. Pak $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, X)$. Tvrzení tedy plyne z Věty 31. □

VĚTA 33. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Je-li $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$, pak $f = 0$ s. v.*

DŮKAZ. Nechť $\phi \in X^*$. Pak dle Věty 31 je $\phi \circ f \in L_1(\mu)$ a $\int_E \phi \circ f \,\mathrm{d}\mu = \phi\big(\int_E f \,\mathrm{d}\mu\big) = 0$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$. To znamená, že $\phi \circ f = 0$ s. v. ([R, Věta 1.39(b)]). Tedy $f = 0$ s. v. dle Tvrzení 18. □

VĚTA 34. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega, X)$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každou $E \subset \Omega$ kladné míry je*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \,\mathrm{d}\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\, f(E).$$

DŮKAZ. Předpokládejme, že tvrzení neplatí, tj. $x = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f \,\mathrm{d}\mu \notin \overline{\operatorname{conv}}\, f(E)$. Dle Věty 7.69(b) existuje $\phi \in X^*$ takové, že $\alpha = \sup_E \operatorname{Re} \phi \circ f < \operatorname{Re} \phi(x)$. Je-li $\mu(E) < +\infty$, pak díky Větě 31 platí, že

$$\alpha < \operatorname{Re} \phi(x) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E \phi \circ f \,\mathrm{d}\mu \right) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E \operatorname{Re} \phi \circ f \,\mathrm{d}\mu \le \frac{1}{\mu(E)} \int_E \alpha \,\mathrm{d}\mu = \alpha,$$

což je spor. Je-li $\mu(E) = +\infty$, pak $x = 0$, takže $\alpha < \phi(0) = 0$. Je tedy (znovu díky Větě 31)

$$-\infty < \int_E \operatorname{Re} \phi \circ f \,\mathrm{d}\mu \le \int_E \alpha \,\mathrm{d}\mu = -\infty,$$

což je opět spor. □

VĚTA 35. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, Y je Banachův prostor, P je metrický prostor, $x_0 \in P$ a $f\colon P \times \Omega \to Y$. Předpokládejme, že $t \mapsto f(x, t)$ je silně měřitelné pro každé $x \in P$ a $x \mapsto f(x, t)$ je spojité v x_0 pro s. v. $t \in \Omega$. Dále předpokládejme, že existuje $g \in L_1(\mu)$ taková, že pro každé $x \in P$ je $\|f(x, t)\| \le g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Pak zobrazení $F\colon P \to Y$, $F(x) = \int_\Omega f(x, t) \,\mathrm{d}\mu(t)$ je spojité v x_0.*

DŮKAZ. Nechť $\{x_n\} \subset P$ je libovolná posloupnost konvergující k x_0. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme $f_n\colon \Omega \to Y$ předpisem $f_n(t) = f(x_n, t)$. Pak zobrazení f_n jsou silně měřitelná, $f_n(t) \to f(x_0, t)$ pro s. v. $t \in \Omega$ a $\|f_n(t)\| \le g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Dle Věty 29 je tedy $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(t) \,\mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega f(x_0, t) \,\mathrm{d}\mu(t) = F(x_0)$. □

VĚTA 36 (Fubiniova věta pro Bochnerův integrál). *Nechť (Ω_1, μ_1) a (Ω_2, μ_2) jsou prostory se σ-konečnými úplnými mírami a nechť ν je zúplněním součinové míry $\mu_1 \times \mu_2$. Nechť X je Banachův prostor a $f \in Æ(\Omega_1 \times \Omega_2, X)$ je bochnerovsky integrovatelné vzhledem k ν. Potom pro μ_1-s. v. $s \in \Omega_1$ je zobrazení $t \mapsto f(s, t)$ bochnerovsky integrovatelné na Ω_2, pro μ_2-s. v. $t \in \Omega_2$ je zobrazení $s \mapsto f(s, t)$ bochnerovsky integrovatelné na Ω_1; zobrazení $\psi_1(s) = \int_{\Omega_2} f(s, t) \,\mathrm{d}\mu_2(t)$ a $\psi_2(t) = \int_{\Omega_1} f(s, t) \,\mathrm{d}\mu_1(s)$ definovaná s. v. na Ω_1, resp. Ω_2 jsou bochnerovsky integrovatelná a*

$$\int_{\Omega_1} \psi_1 \,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \,\mathrm{d}\nu = \int_{\Omega_2} \psi_2 \,\mathrm{d}\mu_2.$$

DŮKAZ. Zjevně stačí dokázat část věty týkající se ψ_1, které budeme nadále značit ψ. Řezy zobrazení budeme značit takto: $f^s(t) = f(s, t)$ pro $s \in \Omega_1$. Podle Lemmatu 6 existují separabilní uzavřený podprostor $Y \subset X$ a množina $N \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ tak, že $\nu(N) = 0$ a $f(\Omega_1 \times \Omega_2 \setminus N) \subset Y$. Dle Důsledku 7.110 a Tvrzení 7.113(a) je (B_{Y^*}, w^*) metrizovatelný kompakt, tedy existuje spočetná $\{\phi_n\} \subset B_{Y^*}$, která je w^*-hustá v B_{Y^*}. Díky Fubiniově větě pro Lebesgueův integrál použité na funkce χ_N a $\|f\|$ existuje $E_0 \subset \Omega_1$ taková, že $\mu_1(\Omega_1 \setminus E_0) = 0$ a pro každé $s \in E_0$ platí, že $\mu_2(N^s) = 0$, kde $N^s = \{t \in \Omega_2;\ (s, t) \in N\}$, funkce $\|f\|^s$ je integrovatelná na Ω_2 a funkce $g(s) = \int_{\Omega_2} \|f\|^s \,\mathrm{d}\mu_2$ je integrovatelná na Ω_1. Dále pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce $\phi_n \circ f$ měřitelná vzhledem k ν, a tedy existuje $E_n \subset \Omega_1$ taková, že

$\mu_1(\Omega_1 \setminus E_n) = 0$ a $\phi_n \circ f^s = (\phi_n \circ f)^s$ je μ_2-měřitelná pro každé $s \in E_n$. Položme $E = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$. Pak $\mu_1(\Omega_1 \setminus E) = 0$. Je-li $s \in E$, pak $f^s(\Omega_2 \setminus N^s) \subset Y$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\phi_n \circ f^s$ měřitelná. Tedy dle Věty 17 je f^s silně měřitelné na Ω_2. Dále je $\|f^s\| = \|f\|^s$, a tedy f^s je bochnerovsky integrovatelné na Ω_2 dle Věty 27.

Pro $s \in E$ je $\psi(s) = \int_{\Omega_2} f^s \, d\mu_2 = \int_{\Omega_2 \setminus N^s} f^s \, d\mu_2 \in Y$. Je-li nyní $\phi \in X^*$, pak dle Věty 31 je $\phi \circ \psi(s) = \int_{\Omega_2} \phi \circ f^s \, d\mu_2 = \int_{\Omega_2} (\phi \circ f)^s \, d\mu_2$ pro $s \in E$. Na druhou stranu, $\phi \circ f \in L_1(\nu)$ (Věta 31), a tedy dle Fubiniovy věty pro Lebesgueův integrál je funkce $\psi_\phi(s) = \int_{\Omega_2} (\phi \circ f)^s \, d\mu_2$ definovaná s. v. na Ω_1, je tam integrovatelná a $\int_{\Omega_1} \psi_\phi \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \phi \circ f \, d\nu$. Tedy speciálně $\phi \circ \psi = \psi_\phi$ s. v. na Ω_1, odkud plyne, že $\phi \circ \psi$ je měřitelná na Ω_1. Dle Věty 17 je tedy ψ silně měřitelné na Ω_1. Dále je $\|\psi(s)\| \le \int_{\Omega_2} \|f^s\| \, d\mu_2 = g(s)$ pro $s \in E$, odkud plyne, že ψ je bochnerovsky integrovatelné (Věta 27).

Konečně, pro každé $\phi \in X^*$ je $\phi\big(\int_{\Omega_1} \psi \, d\mu_1\big) = \int_{\Omega_1} \phi \circ \psi \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1} \psi_\phi \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} \phi \circ f \, d\nu = \phi\big(\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\nu\big)$, přičemž jsme dvakrát využili Větu 31. Protože X^* odděluje body X, plyne odtud, že $\int_{\Omega_1} \psi \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\nu$.

□

3. Lebesgueovy-Bochnerovy prostory

DEFINICE 37. Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \le p \le \infty$. Symbolem $L_p(\mu, X)$ označíme množinu všech silně měřitelných zobrazení z Æ(Ω, X) takových, že $\|f\| \in L_p(\mu)$, faktorizovanou podle rovnosti μ-s. v.

Dále pro $f \in L_p(\mu, X)$ definujeme $\|f\|_{L_p(\mu,X)} = \big\| t \mapsto \|f(t)\| \big\|_{L_p(\mu)}$.

Všimněme si, že podle Věty 27 je $L_1(\mu, X)$ množina všech bochnerovsky integrovatelných zobrazení z Æ(Ω, X).

VĚTA 38. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \le p \le \infty$.*
(a) $L_p(\mu, X)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_{L_p(\mu,X)}$.
(b) Je-li X Hilbertův prostor, pak $L_2(\mu, X)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\mu,X)} = \int_\Omega \langle f(t), g(t) \rangle \, d\mu.$$

DŮKAZ. (a) Nechť $f, g \in L_p(\mu, X)$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Zobrazení $f + g$ a αf jsou silně měřitelná (Důsledek 10). Dále si všimněme, že norma na $L_p(\mu)$ je tzv. svazová, tj. má následující vlastnost: jsou-li $u, v \in L_p(\mu)$ a $0 \le u \le v$, pak $\|u\|_{L_p(\mu)} \le \|v\|_{L_p(\mu)}$. Odtud plyne, že $\big\|\|f + g\|\big\|_{L_p(\mu)} \le \big\|\|f\| + \|g\|\big\|_{L_p(\mu)} \le \big\|\|f\|\big\|_{L_p(\mu)} + \big\|\|g\|\big\|_{L_p(\mu)}$ a $\big\|\|\alpha f\|\big\|_{L_p(\mu)} = \big\||\alpha|\|f\|\big\|_{L_p(\mu)} = |\alpha|\big\|\|f\|\big\|_{L_p(\mu)}$. To znamená, že $L_p(\mu, X)$ je vektorový prostor a $f \mapsto \|f\|_{L_p(\mu,X)}$ je norma na $L_p(\mu, X)$. Důkaz úplnosti je slovo od slova stejný jako důkaz pro $L_p(\mu)$ v [R, Věta 3.11], zaměníme-li všechny výskyty absolutní hodnoty za normu v X.

(b) Zvolme pevně $f, g \in L_2(\mu, X)$ a ukažme, že funkce $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$ je měřitelná. Díky spojitosti funkce $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ (Tvrzení 1.84(b)) stačí ukázat měřitelnost zobrazení $\Psi : \Omega \to X \times X$, $\Psi(t) = (f(t), g(t))$. Po odstranění množiny nulové míry a přejmenování můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že f, g jsou měřitelná ve smyslu σ-algeber a zobrazují po řadě do separabilních podprostorů Y a Z. Prostor $Y \times Z$ je separabilní metrický prostor, má tedy bázi otevřených množin skládající se ze spočetného systému množin tvaru $U(x, r) \times U(y, r)$. Stačí tedy ukázat, že vzor libovolné množiny $U(x, r) \times U(y, r) \subset Y \times Z$ při zobrazení Ψ je měřitelná množina. To je ale zřejmé z toho, že $\Psi^{-1}(U(x, r) \times U(y, r)) = f^{-1}(U(x, r)) \cap g^{-1}(U(y, r))$.

Dále z Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti (Tvrzení 1.81) dostáváme, že $|\langle f(t), g(t) \rangle| \le \|f(t)\|\|g(t)\|$ pro každé $t \in \Omega$. Z Hölderovy nerovnosti tedy plyne, že $t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle \in L_1(\mu)$, takže výraz $\langle f, g \rangle_{L_2(\mu,X)}$ je dobře definován. Fakt, že uvedený vzorec dává skalární součin, který navíc generuje kanonickou normu na $L_2(\mu, X)$, je nyní snadno vidět.

□

VĚTA 39. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leq p < \infty$.*
(a) Množina schodovitých zobrazení z Ω do X je hustá v $L_p(\mu, X)$.
(b) Jsou-li X i $L_p(\mu)$ separabilní, je $L_p(\mu, X)$ také separabilní.

DŮKAZ. (a) Důkaz je prakticky shodný s důkazem Věty 27, kde se vlastně dokazuje případ $p = 1$: Nechť $f \in L_p(\mu, X)$. Nechť $f_n \colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost jednoduchých měřitelných zobrazení a $E \subset \Omega$ nulové míry taková, že $f_n \to f$ bodově na $\Omega \setminus E$. Pro $t \in \Omega$ definujme

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t) & \text{pokud } \|f_n(t)\| \leq 2\|f(t)\|, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak g_n je zjevně jednoduché měřitelné zobrazení, pro které $\|g_n\| \leq 2\|f\|$. Odtud plyne, že $\|g_n\|^p$ je lebesgueovsky integrovatelná, a tedy podobně jako v Lemmatu 23 si lze rozmyslet, že g_n je schodovité. Dále $\|f(t) - g_n(t)\| \to 0$ pro $t \in \Omega \setminus E$: Je-li $f(t) = 0$, pak $g_n(t) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jinak je $\|f_n(t)\| \leq 2\|f(t)\|$ pro všechna dost velká n, a tedy pro tato n je $g_n(t) = f_n(t) \to f(t)$. Jelikož $\|f - g_n\|^p \leq (\|f\| + \|g_n\|)^p \leq 3^p\|f\|^p$, z Lebesgueovy věty plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega \|g_n - f\|^p \,\mathrm{d}\mu = 0$.

(b) Množina $\mathcal{A} = \{\chi_E;\ E \subset \Omega, \mu(E) < +\infty\}$ je podmnožina separabilního metrického prostoru $L_p(\mu)$, tedy existuje spočetná $\mathcal{E} \subset \{E \subset \Omega;\ \mu(E) < +\infty\}$ taková, že $\{\chi_E;\ E \in \mathcal{E}\}$ je hustá v $\mathcal{A}$ v metrice prostoru $L_p(\mu)$. Dále existuje spočetná $Q \subset X$ hustá v X. Snadno nahlédneme, že množina všech schodovitých zobrazení z Ω do X tvaru $\sum_{j=1}^n \chi_{E_j} x_j$, kde $E_j \in \mathcal{E}$ a $x_j \in Q$, je spočetná. Dle (a) stačí ukázat, že tato množina je hustá v množině všech schodovitých zobrazení z Ω do X v metrice prostoru $L_p(\mu, X)$.

Nechť tedy $f \colon \Omega \to X$ je schodovité, $f = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} x_j$, kde $\mu(A_j) < +\infty$, a nechť $\varepsilon \in (0, 1)$. Položme $M = \max\bigl\{\|x_1\| + 1, \dots, \|x_n\| + 1, \|\chi_{A_1}\|_{L_p(\mu)}, \dots, \|\chi_{A_n}\|_{L_p(\mu)}\bigr\}$. Pak existují $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{E}$ a $y_1, \dots, y_n \in Q$ tak, že $\|\chi_{A_j} - \chi_{B_j}\|_{L_p(\mu)} < \frac{\varepsilon}{2Mn}$ a $\|x_j - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2Mn}$ pro všechna $j \in \{1, \dots, n\}$. Využijeme-li svazovosti normy na $L_p(\mu)$, dostaneme, že

$$\begin{aligned}
\Bigl\|f - \sum_{j=1}^n \chi_{B_j} y_j\Bigr\|_{L_p(\mu,X)} &= \Bigl\|\sum_{j=1}^n (\chi_{A_j} x_j - \chi_{B_j} y_j)\Bigr\|_{L_p(\mu,X)} = \Bigl\|\Bigl\|\sum_{j=1}^n (\chi_{A_j} x_j - \chi_{B_j} y_j)\Bigr\|\Bigr\|_{L_p(\mu)} \leq \\
&\leq \Bigl\|\sum_{j=1}^n \|\chi_{A_j} x_j - \chi_{B_j} y_j\|\Bigr\|_{L_p(\mu)} \leq \sum_{j=1}^n \bigl\|\|\chi_{A_j} x_j - \chi_{B_j} y_j\|\bigr\|_{L_p(\mu)} \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^n \bigl\|\|\chi_{A_j} x_j - \chi_{A_j} y_j\| + \|\chi_{A_j} y_j - \chi_{B_j} y_j\|\bigr\|_{L_p(\mu)} = \\
&= \sum_{j=1}^n \bigl\|\|x_j - y_j\|\chi_{A_j} + \|y_j\| \cdot |\chi_{A_j} - \chi_{B_j}|\bigr\|_{L_p(\mu)} \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^n \bigl(\|x_j - y_j\| \cdot \|\chi_{A_j}\|_{L_p(\mu)} + \|y_j\| \cdot \|\chi_{A_j} - \chi_{B_j}\|_{L_p(\mu)}\bigr) < \\
&< \sum_{j=1}^n \Bigl(\frac{\varepsilon}{2Mn} M + M \frac{\varepsilon}{2Mn}\Bigr) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Kapitola 10

Banachovy algebry

1. Základní vlastnosti

DEFINICE 1. Řekneme, že $(A, +, -, 0, \cdot_s, \cdot)$ je algebra nad $\mathbb{K}$, pokud $(A, +, -, 0, \cdot_s)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$, $(A, +, -, \cdot, 0)$ je okruh, a navíc platí, že $(\alpha \cdot_s a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot_s b) = \alpha \cdot_s (a \cdot b)$ pro všechna $a, b \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$. Algebra nad $\mathbb{K}$ se nazývá komutativní, pokud je její okruhové násobení $\cdot$ komutativní.

Jak je zvykem, znak pro násobení skalárem vynecháváme, tj. píšeme $\alpha \cdot_s a = \alpha a$ pro $\alpha \in \mathbb{K}$ a $a \in A$. Podobně, znak pro násobení prvků A budeme též obvykle vynechávat, tj. budeme psát $a \cdot b = ab$ pro $a, b \in A$. Dále budeme často místo „algebra nad $\mathbb{K}$" říkat pouze (nepřesně) algebra.

Podalgebra algebry je její podmnožina uzavřená na algebrové operace, tj. je to vektorový podprostor uzavřený na okruhové násobení. Snadno je vidět, že průnik libovolného systému podalgeber je opět podalgebra.

Připomeňme, že má-li okruh (dokonce stačí monoid) levou i pravou jednotku, pak jsou si tyto prvky rovny a jsou (oboustrannou) jednotkou. Tedy jednotka v okruhu, existuje-li, je určena jednoznačně. Tuto okruhovou jednotku v algebře budeme obvykle značit e a budeme jí říkat jednotka algebry.

Následující tvrzení říká, že pokud algebra jednotku neobsahuje, můžeme ji přirozeně vnořit do algebry s jednotkou.

TVRZENÍ 2. *Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Položme $A_e = A \times \mathbb{K}$ a definujme vektorové operace na A_e obvyklým způsobem (tj. po složkách) a dále násobení prvků A_e pomocí vzorce*

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) \quad \text{pro } a, b \in A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Pak A_e je algebra s jednotkou $(0, 1)$ a A lze identifikovat s její podalgebrou $A \times \{0\}$. Je-li A komutativní, je A_e též komutativní.

DŮKAZ. Víme, že A_e je vektorový prostor. Ověřme nyní vlastnosti násobení prvků A_e. Asociativita: pro libovolná $a, b, c \in A$ a $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ je

$$\big((a,\alpha)(b,\beta)\big)(c,\gamma) = (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)(c,\gamma) = (abc + \alpha bc + \beta ac + \alpha\beta c + \gamma ab + \alpha\gamma b + \beta\gamma a, \alpha\beta\gamma),$$

$$(a,\alpha)\big((b,\beta)(c,\gamma)\big) = (a,\alpha)(bc + \beta c + \gamma b, \beta\gamma) = (abc + \beta ac + \gamma ab + \alpha bc + \alpha\beta c + \alpha\gamma b + \beta\gamma a, \alpha\beta\gamma),$$

odkud asociativita plyne. Distributivita: pro libovolná $a, b, c \in A$ a $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ je

$$\begin{aligned}(a,\alpha)\big((b,\beta) + (c,\gamma)\big) &= (a,\alpha)(b + c, \beta + \gamma) = (ab + ac + \alpha b + \alpha c + \beta a + \gamma a, \alpha\beta + \alpha\gamma) = \\ &= (ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) + (ac + \alpha c + \gamma a, \alpha\gamma) = (a,\alpha)(b,\beta) + (a,\alpha)(c,\gamma), \\ \big((b,\beta) + (c,\gamma)\big)(a,\alpha) &= (b + c, \beta + \gamma)(a,\alpha) = (ba + ca + \beta a + \gamma a + \alpha b + \alpha c, \alpha\beta + \alpha\gamma) = \\ &= (ba + \beta a + \alpha b, \alpha\beta) + (ca + \gamma a + \alpha c, \alpha\gamma) = (b,\beta)(a,\alpha) + (c,\gamma)(a,\alpha).\end{aligned}$$

Konečně, pro libovolná $a, b \in A$ a $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ je

$$\begin{aligned}\gamma\big((a,\alpha)(b,\beta)\big) &= \gamma(ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) = (\gamma ab + \alpha\gamma b + \beta\gamma a, \alpha\beta\gamma) = \\ &= (\gamma a, \alpha\gamma)(b,\beta) = \big(\gamma(a,\alpha)\big)(b,\beta) = \\ &= (a,\alpha)(\gamma b, \beta\gamma) = (a,\alpha)\big(\gamma(b,\beta)\big).\end{aligned}$$

Dále $(0,1)(a,\alpha) = (0a + 1a + \alpha 0, 1\alpha) = (a,\alpha)$ a $(a,\alpha)(0,1) = (a0 + \alpha 0 + 1a, \alpha 1) = (a,\alpha)$ pro každé $a \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, a tedy $(0,1)$ je jednotka v A_e. Fakt, že $A \times \{0\}$ je podalgebra, je snadno vidět. Je-li A komutativní, pak komutativita A_e plyne ihned z definice násobení.

□

Poznamenejme, že pokud již algebra A obsahuje jednotku e, pak z jednoznačnosti jednotky plyne, že prvek $(e, 0)$ již není jednotkou v A_e.

Nechť A, B jsou algebry nad $\mathbb{K}$. (Algebrový) homomorfismus $\Phi\colon A \to B$ je zobrazení, které je homomorfismem mezi příslušnými vektorovými prostory (tj. je lineární) a zároveň je homomorfismem mezi příslušnými okruhy (tj. je multiplikativní, neboli $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$). Ihned vidíme, že $\operatorname{Rng}\Phi$ je podalgebra B. Snadno nahlédneme, že je-li C podalgebra B, pak $\Phi^{-1}(C)$ je podalgebra A. Jako obvykle, Φ nazýváme (algebraickým) izomorfismem algeber A a B, pokud Φ je bijekce. Dále připomeňme fakt z univerzální algebry, že je-li Φ algebraickým izomorfismem algeber A a B, pak $\Phi^{-1}\colon B \to A$ je opět algebrovým homomorfismem.

FAKT 3. *Nechť A je algebra, B je algebra s jednotkou e a $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus. Pak $\widetilde{\Phi}\colon A_\mathrm{e} \to B$, $\widetilde{\Phi}(x, \lambda) = \Phi(x) + \lambda e$ je homomorfismus rozšiřující Φ.*

DŮKAZ. Linearita $\widetilde{\Phi}$ je zjevná. Dále pro $a, b \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ platí, že

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}\big((a, \alpha)(b, \beta)\big) &= \widetilde{\Phi}(ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta) = \Phi(ab + \alpha b + \beta a) + \alpha\beta e = \\ &= \Phi(a)\Phi(b) + \alpha\Phi(b) + \beta\Phi(a) + \alpha\beta e = (\Phi(a) + \alpha e)(\Phi(b) + \beta e) = \widetilde{\Phi}(a, \alpha)\widetilde{\Phi}(b, \beta).\end{aligned}$$

□

TVRZENÍ 4. *Nechť A je algebra s jednotkou a B je podalgebra A neobsahující e. Pak $C = B + \operatorname{span}\{e\}$ je podalgebra A a zobrazení $\Phi\colon B_\mathrm{e} \to C$, $\Phi(x, \lambda) = x + \lambda e$ je izomorfismus.*

DŮKAZ. Všimněme si, že Φ je rozšířením $Id\colon B \to C$ z Faktu 3. Tedy Φ je homomorfismus. Fakt, že Φ je bijekce, je snadno vidět.

□

DEFINICE 5. [1] Dvojici $(A, \|\cdot\|)$ nazýváme normovaná algebra, pokud A je algebra, $(A, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor, a pro každé $a, b \in A$ platí, že $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. Je-li metrika generovaná $\|\cdot\|$ úplná, pak $(A, \|\cdot\|)$ se nazývá Banachovou algebrou.

TVRZENÍ 6. *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra. Násobení prvků A je lipschitzovské na omezených množinách (a tedy spojité) jakožto zobrazení z $A \times A$ do A.*

DŮKAZ. Zvolme $R > 0$ a $(x, y), (u, v) \in A \times A$ splňující $\rho((x, y), 0) \leq R$, $\rho((u, v), 0) \leq R$, kde ρ je součinová metrika na $A \times A$. Pak

$$\begin{aligned}\|xy - uv\| &\leq \|xy - xv\| + \|xv - uv\| = \|x(y - v)\| + \|(x - u)v\| \leq \|x\|\|y - v\| + \|v\|\|x - u\| \leq \\ &\leq R\big(\|x - u\| + \|y - v\|\big) \leq 2R\rho\big((x, y), (u, v)\big).\end{aligned}$$

□

DŮSLEDEK 7. *Nechť A je normovaná algebra a B je podalgebra A. Pak $\overline{B}$ je též podalgebra A.*

DŮKAZ. Nechť $x, y \in \overline{B}$. Pak existují $\{x_n\} \subset B$, $\{y_n\} \subset B$ takové, že $x_n \to x$ a $y_n \to y$. Jelikož $x_n y_n \in B$ a $x_n y_n \to xy$, platí, že $xy \in \overline{B}$.

□

DŮSLEDEK 8. *Pro každou normovanou algebru A existuje její zúplnění, tj. Banachova algebra taková, že A je její hustá podalgebra. Toto rozšíření je určeno jednoznačně až na izometrii. Má-li algebra A jednotku e, pak e je i jednotkou v zúplnění A.*

[1]Koncept okruhu operátorů se objevuje u J. von Neumanna (1930), který teorii dále rozpracoval s Francisem J. Murraym (1936–43), vše v kontextu operátorů na Hilbertově prostoru, což bylo pro jejich teorii zásadní. Abstraktní přístup k Banachovým algebrám zavedla sovětská škola: I. M. Gelfand, Mark Aronovič Najmark (Марк Аронович Наймарк), Dmitrij Abramovič Rajkov (Дмитрий Абрамович Райков), Georgij Jevgeněvič Šilov (Георгий Евгеньевич Шилов). Název Banachova algebra navrhl patrně M. A. Zorn.

DŮKAZ. Podle Věty 2.28 existuje Banachův prostor $\widehat{A}$, který je zúplněním normovaného lineárního prostoru A. Rozšíření násobení z A na $\widehat{A}$ tak, aby $\widehat{A}$ byla normovaná algebra, se provede zcela analogicky, jako rozšíření skalárního součinu v důkazu Věty 2.28. Zachování jednotky plyne také ze spojitosti násobení. □

PŘÍKLADY 9. (a) Je-li Γ neprázdná množina, pak prostor $\ell_\infty(\Gamma)$ s násobením prvků definovaným bodově (tj. $xy(\gamma) = x(\gamma)y(\gamma)$ pro každé $\gamma \in \Gamma$) je komutativní Banachova algebra s jednotkou (tou je vektor $x(\gamma) = 1$ pro každé $\gamma \in \Gamma$). Všimněme si, že v této algebře platí $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in \ell_\infty(\Gamma)$.

(b) Je-li T topologický prostor, pak prostorem $C_b(T) = C_b(T, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na T s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in T}|f(x)|$. Snadno je vidět, že $C_b(T)$ je podalgebra $\ell_\infty(T)$ a z věty o stejnoměrné limitě posloupnosti spojitých funkcí plyne, že $C_b(T)$ je uzavřený podprostor Banachova prostoru $\ell_\infty(T)$, a tedy je to komutativní Banachova algebra s jednotkou. Speciálně, je-li K kompaktní prostor, pak $C_b(K) = C(K)$.

(c) Je-li L je lokálně kompaktní topologický prostor, pak prostorem $C_0(L) = C_0(L, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na L takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in L;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ kompaktní. Na $C_0(L)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x\in L}|f(x)|$. Všimněme si, že je-li L kompaktní, pak $C_0(L) = C(L)$. Je-li L nekompaktní, pak můžeme alternativně popsat $C_0(L)$ následovně: Je-li K Alexandrovova kompaktifikace[2] L, tj. $K = L \cup \{\infty\}$, pak $C_0(L) = \{f\restriction_L;\ f \in C(K), f(\infty) = 0\}$. Odtud je snadno vidět, že $C_0(L)$ je uzavřenou podalgebrou $C_b(L)$, tedy je to komutativní Banachova algebra.

Dále snadno nahlédneme, že $C_c(L) = \{f \in C(L);\ \operatorname{supp} f \text{ kompaktní}\}$ je podalgebrou $C_0(L)$, tedy je to komutativní normovaná algebra. Je-li L Hausdorffův, pak $C_c(L)$ je hustá v $C_0(L)$: Nechť $f \in C_0(L)$ a $\varepsilon > 0$. Pak $K = \{x \in L;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ je kompaktní podmnožina L, a tedy dle Lemmatu 13.86 existuje $g \in C_c(L, [0, 1])$ taková, že $g = 1$ na K. Pak $fg \in C_c(L)$ a $\|fg - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Je-li L nekompaktní, pak může platit, že $C_c(L) \subsetneqq C_0(L)$ (např. pro $L = \mathbb{R}^n$, viz str. 77); může ale také i v netriviálním případě být $C_c(L) = C_0(L)$ (např. pro $L = [0, \omega_1)$).

Je-li L Hausdorffův a nekompaktní, pak algebry $C_0(L)$ a $C_c(L)$ nemají jednotku: Nechť e je jednotka v některé z těchto algeber. Ukážeme, že pak $e(x) = 1$ pro každé $x \in L$, což nelze. Nechť tedy $x \in L$ je dáno. Pak existuje kompaktní okolí V bodu x. Protože L je úplně regulární, existuje $f \in C(L)$ taková, že $f(x) = 1$ a $f = 0$ na $L \setminus \operatorname{Int} V$. Tedy $\operatorname{supp} f \subset V$, takže $f \in C_c(L)$. Pak $e(x)f(x) = (ef)(x) = f(x)$, a tedy $e(x) = 1$.

(d) Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, pak prostor $H^\infty(\Omega)$ všech omezených holomorfních funkcí na Ω je uzavřená podalgebra $C_b(\Omega)$, tedy je to komutativní Banachova algebra s jednotkou.

(e) Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená omezená, pak $A = \{f \in C(\overline{\Omega});\ f\restriction_\Omega \in H(\Omega)\}$ je uzavřená podalgebra $C(\overline{\Omega})$, tedy je to komutativní Banachova algebra s jednotkou. Lze ji též chápat jako podalgebru $H^\infty(\Omega)$ těch funkcí, které mají spojité rozšíření na $\overline{\Omega}$.

PŘÍKLAD 10. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X)$ s násobením definovaným jako skládání operátorů, tj. $ST = S \circ T$, je algebra s jednotkou Id: Pro libovolná $S, T, U \in \mathcal{L}(X)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ a $x \in X$ platí, že

$$((ST)U)x = (ST)(Ux) = S(T(Ux)) = S((TU)x) = (S(TU))x,$$
$$(S(T+U))x = S((T+U)x) = S(Tx+Ux) = S(Tx) + S(Ux) = (ST)x + (SU)x = (ST+SU)x,$$
$$((T+U)S)x = (T+U)(Sx) = T(Sx) + U(Sx) = (TS)x + (US)x = (TS+US)x,$$
$$(\alpha(ST))x = \alpha((ST)x) = \alpha(S(Tx)) = (\alpha S)(Tx) = ((\alpha S)T)x = S(\alpha(Tx)) = S((\alpha T)x) = (S(\alpha T))x.$$

Dle Faktu 1.47 je tedy $\mathcal{L}(X)$ normovaná algebra s jednotkou. Je-li X Banachův, pak $\mathcal{L}(X)$ je Banachova algebra (Věta 1.48).

Dále, dle Věty 4.12(d), (c) je $\mathcal{K}(X)$ podalgebra $\mathcal{L}(X)$, která je uzavřená, a tedy Banachova, v případě, že X je Banachův. S využitím Věty 4.12(b) pak snadno nahlédneme, že $\mathcal{F}(X)$ je podalgebra $\mathcal{K}(X)$.

[2] Pavel Sergejevič Alexandrov (Павел Сергеевич Александров), 1924

Pokud $\dim X > 1$, pak žádná z těchto tří normovaných algeber není komutativní: Nechť $u, v \in X$ jsou lineárně nezávislé. Dle Hahnovy-Banachovy věty existuje $f \in X^*$ tak, že $f(u) = 1$. Definujme $S, T \in \mathcal{F}(X)$ následovně: $S(x) = f(x)u$ a $T(x) = f(x)v$. Pak $ST(u) = S(v) = f(v)u \neq v = T(u) = TS(u)$.

Pokud $\dim X = \infty$, pak $\mathcal{K}(X)$ ani $\mathcal{F}(X)$ nemá jednotku: Předpokládejme, že $E \in \mathcal{K}(X)$, resp. $E \in \mathcal{F}(X)$ je jednotka. Nechť $x \in X \setminus \{0\}$ je libovolné. Pak dle Hahnovy-Banachovy věty existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) = 1$. Definujme $T \in \mathcal{F}(X)$ předpisem $T(y) = f(y)x$. Všimněme si, že $T(x) = x$, a tedy $E(x) = E(T(x)) = (ET)(x) = T(x) = x$. To znamená, že $E = Id$, což je spor s předpokladem nekonečné dimenze X (Věta 1.66). Uvědomme si, že tento argument je zcela analogický jako v Příkladu 9(c), neboť Hahnova-Banachova věta je vlastně lineární verzí úplné regularity.

Příklad 11. Prostor $L_1(\mathbb{R}^d)$ s násobením definovaným jako konvoluce, tj. $fg = f * g$, je dle Vět 5.2 a 5.7(d) komutativní Banachovou algebrou. Tato algebra nemá jednotku: Předpokládejme, že $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ je jednotka. Položme $g = c\chi_{B(0,1)}$, kde $c > 0$ je zvoleno tak, aby g bylo regularizační jádro. Dále položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $g_n \to 0$ bodově s. v. Dle Věty 5.13(b) platí, že $g_n = f * g_n \xrightarrow{L_1} f$, takže existuje podposloupnost $\{g_{n_k}\}$, která konverguje bodově s. v. k f ([R, Věta 3.12]). To znamená, že $f = 0$ s. v., což není možné.

Jiný argument pro komplexní případ (zde je ovšem, alespoň formálně, nutno pracovat s mírou μ_d z oddílu 5.2): Předpokládejme, že $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ je jednotka a nechť $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ je funkce z Příkladu 5.23. Pak $\widehat{g} = \widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$ dle Věty 5.19(g). Protože $\widehat{g}$ je kladná na $\mathbb{R}^d$, plyne odtud, že $\widehat{f} = 1$ na $\mathbb{R}^d$. To ale není možné dle Věty 5.19(a).

Následující příklad ukazuje, že podalgebra může mít jednotku různou od jednotky původní algebry. (Pro jiný příklad tohoto jevu v abstraktní situaci viz též poznámku za Tvrzením 2.)

Příklad 12. Nechť $A = C([0,1] \cup [2,3])$ a $B = \{f \in A;\ \operatorname{supp} f \subset [0,1]\}$. Pak B je uzavřená podalgebra A. Dále A má jednotku $\chi_{[0,1]\cup[2,3]}$, která nepatří do B. Na druhou stranu, B má jednotku $\chi_{[0,1]}$, která není jednotkou v A.

Tvrzení 13. *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je normovaná algebra. Definujeme-li na A_e normu předpisem $\|(a,\alpha)\|_{A_e} = \|a\| + |\alpha|$ (tj. $A_e = A \oplus_1 \mathbb{K}$), pak A_e s touto normou je normovaná algebra. Je-li $(A, \|\cdot\|)$ Banachova algebra, je i A_e s výše uvedenou normou Banachova algebra.*

Důkaz. Fakt, že $(A_e, \|\cdot\|_{A_e})$ je normovaný lineární (resp. Banachův) prostor je ukázán v oddílu 1.5. Konečně, pro všechna $a, b \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ platí, že

$$\begin{aligned}\|(a,\alpha)(b,\beta)\|_{A_e} &= \|(ab + \alpha b + \beta a, \alpha\beta)\|_{A_e} = \|ab + \alpha b + \beta a\| + |\alpha\beta| \leq \\ &\leq \|ab\| + |\alpha|\|b\| + |\beta|\|a\| + |\alpha||\beta| \leq \|a\|\|b\| + |\alpha|\|b\| + |\beta|\|a\| + |\alpha||\beta| = \\ &= \big(\|a\| + |\alpha|\big)\big(\|b\| + |\beta|\big) = \|(a,\alpha)\|_{A_e}\|(b,\beta)\|_{A_e},\end{aligned}$$

takže $(A_e, \|\cdot\|_{A_e})$ je normovaná algebra.

□

Definice 14. Nechť A a B jsou normované algebry a $\Phi\colon A \to B$ je (algebrový) homomorfismus. Říkáme, že Φ je izomorfismus normovaných algeber A a B (nebo jen izomorfismus), pokud Φ je homeomorfismus A na B; říkáme, že Φ je izomorfismus A do B (nebo jen izomorfismus do), pokud Φ je izomorfismus A na $\operatorname{Rng}\Phi$.

Připomeňme, že jednou ze základních reprezentačních vět pro grupy je tvrzení, že každou grupu G lze vnořit do grupy všech bijekcí na G s operací skládání. Následující věta je analogií této reprezentace v kontextu normovaných algeber. (Připomeňme též Příklad 1.59.)

Věta 15. *Nechť A je normovaná algebra. Pro každé $a \in A$ definujme levou translaci $L_a\colon A \to A$ předpisem $L_a(x) = ax$. Pak $L_a \in \mathcal{L}(A)$ a zobrazení $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$, $I(a) = L_a$ je spojitý algebrový homomorfismus s $\|I\| \leq 1$. Má-li A jednotku e, pak I je izomorfismus do a $I(e) = Id$. Platí-li $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$ (např. je-li A podalgebra $\ell_\infty(\Gamma)$), pak I je izometrie do.*

DŮKAZ. Díky vlastnostem násobení v A je vidět, že L_a je lineární, z nerovnosti $\|L_a(x)\| = \|ax\| \leq \|a\|\|x\|$ pak plyne spojitost L_a a fakt, že $\|L_a\| \leq \|a\|$. Dále $L_{a+b}(x) = (a+b)x = ax + bx = L_a(x) + L_b(x) = (L_a + L_b)(x)$, $L_{\alpha a}(x) = (\alpha a)x = \alpha(ax) = \alpha L_a(x)$, a $L_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = L_a(bx) = L_a \circ L_b(x)$ pro libovolná $a, b, x \in A$, $\alpha \in \mathbb{K}$, a tedy I je algebrový homomorfismus, který je spojitý díky nerovnosti výše.

Předpokládejme nyní, že A má jednotku e. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A je netriviální (tj. $A \neq \{0\}$), a tedy $e \neq 0$. Pak $\|I(a)\| = \|L_a\| \geq \left\|L_a\left(\frac{1}{\|e\|}e\right)\right\| = \frac{1}{\|e\|}\|ae\| = \frac{1}{\|e\|}\|a\|$ pro každé $a \in A$, takže I je izomorfismus do (Tvrzení 1.60(a)). Fakt, že $I(e) = Id$ je zřejmý z definice I.

Konečně, platí-li $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$, pak $\|a\| \geq \|I(a)\| = \|L_a\| \geq \left\|L_a\left(\frac{1}{\|a\|}a\right)\right\| = \frac{1}{\|a\|}\|a^2\| = \|a\|$ pro každé $a \in A \setminus \{0\}$.

□

Je-li A netriviální (tj. $A \neq \{0\}$) normovaná algebra s jednotkou, pak $\|e\| \geq 1$. Vskutku, $\|e\| = \|ee\| \leq \|e\|\|e\|$, a tedy buď $e = 0$, nebo $\|e\| \geq 1$. Je-li ovšem $e = 0$, pak pro libovolný prvek $x \in A$ je $x = ex = 0x = 0$.

DŮSLEDEK 16. *Nechť $(A, \|\cdot\|)$ je netriviální normovaná algebra s jednotkou. Pak na A existuje ekvivalentní norma $|||\cdot|||$ taková, že $(A, |||\cdot|||)$ je normovaná algebra a $|||e||| = 1$.*

DŮKAZ. Nechť $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$ je vnoření z Věty 15. Pro $x \in A$ položme $|||x||| = \|I(x)\|$. Protože I je izomorfismus do, je $|||\cdot|||$ ekvivalentní norma na A. Navíc je $|||xy||| = \|I(xy)\| = \|I(x)I(y)\| \leq \|I(x)\|\|I(y)\| = |||x||| \cdot |||y|||$, a tedy $(A, |||\cdot|||)$ je normovaná algebra. Konečně, $I(e) = Id$, a tedy $|||e||| = \|Id\| = 1$ (poslední rovnost plyne z toho, že A není triviální).

□

Má-li algebra A nad $\mathbb{K}$ jednotku, pak můžeme studovat její invertibilní prvky vzhledem k násobení. Připomeňme, že v okruhu s jednotkou (stačí dokonce v monoidu) jsou inverzní prvky k invertibilním prvkům jednoznačně učeny a invertibilní prvky tvoří grupu, tj. jsou-li $x, y \in A$ invertibilní, pak i xy je invertibilní a $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. Tuto grupu invertibilních prvků budeme značit $A^\times$. Všimněme si, že je-li $x \in A^\times$, pak $\lambda x \in A^\times$ pro každé $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ a platí, že $(\lambda x)^{-1} = \frac{1}{\lambda}x^{-1}$. Následující fakt je zřejmý.

FAKT 17. *Nechť A je algebra s jednotkou a B je její podalgebra obsahující e. Pak $B^\times \subset A^\times \cap B$.*

PŘÍKLADY 18. Nechť Γ je neprázdná množina. Snadno lze nahlédnout, že

$$\ell_\infty(\Gamma)^\times = \left\{x \in \ell_\infty(\Gamma);\ \text{existuje } \delta > 0 \text{ tak, že } |x(\gamma)| \geq \delta \text{ pro každé } \gamma \in \Gamma\right\}.$$

Je-li X Banachův prostor, pak dle Tvrzení 4.15 je $\mathcal{L}(X)^\times = \{T \in \mathcal{L}(X);\ T \text{ je bijekce}\}$.

Nechť $A = C([0,1])$ a nechť B je algebra všech polynomů na $[0,1]$. Pak B je podalgebra A obsahující jednotku A. Zjevně je $1 + x \in A^\times \cap B$, ale $1 + x \notin B^\times$.

Dále budeme používat následující konvenci: je-li x libovolný prvek algebry s jednotkou, pak definujeme symbol $x^0 = e$.

LEMMA 19. *Nechť A je normovaná algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li řada $\sum_{n=0}^\infty x^n$ konvergentní, pak $\sum_{n=0}^\infty x^n = (e-x)^{-1}$.*

Konvergentní řadě $\sum_{n=0}^\infty x^n$ se říká von Neumannova řada.

DŮKAZ. Z předpokladu plyne, že $x^n \to 0$. Díky spojitosti násobení pak platí, že

$$(e-x)\sum_{n=0}^\infty x^n = (e-x)\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^k x^n = \lim_{k\to\infty}(e-x)\sum_{n=0}^k x^n = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^k x^n - \sum_{n=1}^{k+1} x^n\right) =$$
$$= \lim_{k\to\infty}(e - x^{k+1}) = e \quad \text{a}$$

$$\left(\sum_{n=0}^\infty x^n\right)(e-x) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^k x^n\right)(e-x) = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^k x^n - \sum_{n=1}^{k+1} x^n\right) = \lim_{k\to\infty}(e - x^{k+1}) = e.$$

□

LEMMA 20. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou.*
(a) Pokud $x \in U_A$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konverguje absolutně, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (e-x)^{-1}$.
(b) Nechť $x \in A^\times$ a nechť $h \in A$ je takové, že $\|h\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$. Pak $x+h \in A^\times$. Pokud navíc $\|h\| \le \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$, pak $\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| \le 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2$.

DŮKAZ. (a) Jelikož $\|x^n\| \le \|x\|^n$, je řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ absolutně konvergentní. Díky úplnosti A je tedy tato řada konvergentní a můžeme použít Lemma 19.

(b) Jelikož $\|-x^{-1}h\| \le \|x^{-1}\|\|h\| < 1$, je $e + x^{-1}h$ invertibilní díky (a), a tedy $x+h = x(e+x^{-1}h) \in A^\times$ a $(x+h)^{-1} = (e+x^{-1}h)^{-1}x^{-1}$. Dále si povšimněme, že je-li $y \in U_A$, pak z (a) dostáváme, že

$$\|(e+y)^{-1} - e + y\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n - e + y\right\| = \left\|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n y^n\right\| \le \sum_{n=2}^{\infty}\|y^n\| \le \sum_{n=2}^{\infty}\|y\|^n = \frac{\|y\|^2}{1-\|y\|}.$$

Je-li tedy $\|h\| \le \frac{1}{2\|x^{-1}\|}$, pak $\|x^{-1}h\| \le \|x^{-1}\|\|h\| \le \frac{1}{2}$, a tedy

$$\begin{aligned}\left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| &= \left\|\left((e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\right)x^{-1}\right\| \le \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1-\|x^{-1}h\|}\|x^{-1}\| \le \\ &\le 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2.\end{aligned}$$

□

DEFINICE 21. Nechť G je grupa a τ je topologie na G. Řekneme, že (G,τ) je topologická grupa, pokud jsou grupové operace (tj. násobení $\cdot\colon G \times G \to G$ a inverze ${}^{-1}\colon G \to G$) spojité.

VĚTA 22. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Pak $A^\times$ je otevřená podmnožina A a je to topologická grupa.*

DŮKAZ. Otevřenost množiny $A^\times$ plyne z Lemmatu 20(b). Spojitost násobení v $A^\times$ je zřejmá (Tvrzení 6). Spojitost inverze pak plyne z odhadu

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1}\| \le \left\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right\| + \|x^{-1}hx^{-1}\| \le 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2 + \|x^{-1}\|^2\|h\|,$$

který platí díky Lemmatu 20(b) na vhodném okolí bodu $x \in A^\times$.

□

TVRZENÍ 23. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou a B je její uzavřená podalgebra obsahující e. Pak $(\partial_B B^\times) \cap A^\times = \emptyset$ a*

$$B^\times = \bigcup \{C \subset B;\ C \text{ je komponenta } A^\times \cap B \text{ protínající } B^\times\}.$$

DŮKAZ. Dle faktu 17 je $B^\times \subset A^\times \cap B$. Definujme $g\colon A^\times \to A^\times$ jako $g(x) = x^{-1}$. Pak g je spojité (Věta 22). Dále $g\restriction_{B^\times}$ zobrazuje do $B^\times$ a je-li $x \in (A^\times \cap B) \setminus B^\times$, pak $g(x) \notin B$. Je-li tedy $x \in \partial_B B^\times = \overline{B^\times}^B \setminus B^\times$, pak $x \notin A^\times \cap B$. V opačném případě by totiž ze spojitosti g plynulo, že $g(x) \in \overline{B^\times}^A \subset \overline{B}^A = B$.

Druhá část tvrzení pak plyne z první části pomocí Lemmatu 13.97 aplikovaného na $X = B$.

□

2. Spektrální teorie

DEFINICE 24. Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou. Pro $x \in A$ definujeme rezolventní množinu prvku x jako

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda e - x \in A^\times\},$$

a spektrum prvku x jako

$$\sigma(x) = \mathbb{K} \setminus \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak pro $x \in A$ definujeme výše uvedené pojmy vzhledem k algebře A_e.

Bude-li nutné uvést, vzhledem k jaké algebře bereme výše uvedené pojmy, budeme psát např. $\sigma_A(x)$ pro spektrum x vzhledem k algebře A.

PŘÍKLADY 25. (a) Nechť T je topologický prostor. Pak prostor $C(T) = C(T, \mathbb{K})$ s násobením prvků definovaným bodově je komutativní algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou (tou je funkce konstantní 1). Je-li $f \in C(T)$, pak $\sigma(f) = \operatorname{Rng} f$. Vskutku, funkce $\lambda - f$ je invertibilní, právě když existuje $g \in C(T)$ takové, že $(\lambda - f(x))g(x) = 1$ pro každé $x \in T$, neboli právě když $g = \frac{1}{\lambda - f} \in C(T)$. To nastane, právě když $f(x) \neq \lambda$ pro každé $x \in T$, neboli $\lambda \notin \operatorname{Rng} f$.

(b) Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a nechť $A = \{f \in C(\overline{\Omega});\ f\restriction_{\Omega} \in H(\Omega)\}$. Pak A je podalgebra $C(\overline{\Omega})$, tedy je to komutativní algebra s jednotkou. Je-li $f \in A$, pak $\sigma(f) = \operatorname{Rng} f$. Argumentace je stejná, jako v případě (a).

Následující fakt bychom mohli zformulovat pouze v kontextu algeber, je nicméně užitečné si uvědomit, že z poměrně komplikované algebraické struktury algeber není potřeba vůbec nic.

FAKT 26. *Nechť A, B jsou pologrupy, $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus na a nechť A je navíc monoid s jednotkou e. Pak B je monoid s jednotkou $\Phi(e)$ a je-li $x \in A$ invertibilní, pak $\Phi(x)$ je invertibilní a $\Phi(x)^{-1} = \Phi(x^{-1})$. Je-li navíc Φ bijekce, pak $\Phi\restriction_{A^\times}$ je izomorfismus grup $A^\times$ a $B^\times$.*

DŮKAZ. Nechť $y \in B$ a nechť $x \in A$ je takové, že $y = \Phi(x)$. Pak $y\Phi(e) = \Phi(x)\Phi(e) = \Phi(xe) = \Phi(x) = y$ a $\Phi(e)y = \Phi(e)\Phi(x) = \Phi(ex) = \Phi(x) = y$. Dále pro $x \in A^\times$ je $\Phi(x)\Phi(x^{-1}) = \Phi(xx^{-1}) = \Phi(e) = \Phi(x^{-1}x) = \Phi(x^{-1})\Phi(x)$, a tedy $\Phi(A^\times) \subset B^\times$. Je-li Φ bijekce, pak pro opačnou inkluzi stačí aplikovat předchozí úvahu na zobrazení Φ^{-1}.

$\square$

DŮSLEDEK 27. *Nechť A, B jsou algebry a $\Phi\colon A \to B$ je algebraický izomorfismus. Pak $\sigma(\Phi(x)) = \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.*

DŮKAZ. Nemá-li A jednotku, pak ani B nemá jednotku (Fakt 26 pro Φ^{-1}). V tom případě snadno nahlédneme, že rozšíření $\widetilde{\Phi}\colon A_{\mathrm{e}} \to B_{\mathrm{e}}$, $\widetilde{\Phi}(x, \lambda) = (\Phi(x), \lambda)$ z Faktu 3 je též izomorfismus. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku. Pro každé $x \in A$ díky Faktu 26 platí, že $\lambda\Phi(e) - \Phi(x) = \Phi(\lambda e - x) \in B^\times$, právě když $\lambda e - x \in A^\times$. Odtud požadovaná rovnost ihned plyne.

$\square$

LEMMA 28. *Nechť M je monoid a $x, y \in M$. Jsou-li alespoň dva z prvků x, y, xy a yx invertibilní, pak jsou invertibilní všechny čtyři.*

DŮKAZ. Nechť $I \subset M$ je grupa invertibilních prvků v M. Je-li $x, y \in I$, pak i $xy \in I$ a $yx \in I$. Je-li $x, xy \in I$, pak $y = x^{-1}(xy) \in I$, a tedy i $yx \in I$. Podobně je-li $x, yx \in I$, pak opět $y = (yx)x^{-1} \in I$. Konečně, je-li $xy, yx \in I$, pak $(yx)^{-1}y$ je levý invers k x, neboť $\big((yx)^{-1}y\big)x = (yx)^{-1}(yx) = e$, a podobně $y(xy)^{-1}$ je pravý invers k x. Tedy $x \in I$ a dle předchozího pak i $y \in I$.

$\square$

TVRZENÍ 29. *Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$.*

(a) Je-li A netriviální, pak $\sigma(0) = \{0\}$.
(b) Má-li A jednotku, pak $\sigma(\alpha e + \beta x) = \alpha + \beta\sigma(x)$ pro každé $x \in A$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.
(c) Je-li $x \in A$, $n \in \mathbb{N}$ a $\lambda \in \sigma(x)$, pak $\lambda^n \in \sigma(x^n)$.
(d) Je-li $x \in A^\times$, pak $\lambda \in \sigma(x)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(x^{-1})$.
(e) Jsou-li $x, y \in A$, pak množiny $\sigma(xy)$ a $\sigma(yx)$ se liší nejvýše o prvek 0.

DŮKAZ. (a) Prvek $\lambda e - 0 = \lambda e$ je invertibilní tehdy a jen tehdy, pokud $\lambda \neq 0$.

(b) Je-li A triviální, pak je na obou stranách rovnosti prázdná množina. Předpokládejme nyní, že A je netriviální. Je-li $\beta \neq 0$, pak $\lambda e - (\alpha e + \beta x) = \beta\big(\frac{\lambda-\alpha}{\beta}e - x\big)$, a tedy $\lambda \in \sigma(\alpha e - \beta x)$, právě když $\frac{\lambda - \alpha}{\beta} \in \sigma(x)$, odkud rovnost ihned plyne. Je-li $\beta = 0$, pak dle předchozího a (a) je $\sigma(\alpha e + \beta x) = \sigma(\alpha e + 1 \cdot 0) = \alpha + 1 \cdot \{0\} = \{\alpha\} = \alpha + \beta\sigma(x)$.

(c) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Snadno ověříme, že

$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1}) = (\lambda^{n-1}e + \lambda^{n-2}x + \cdots + \lambda x^{n-2} + x^{n-1})(\lambda e - x).$$

Je-li tedy $\lambda^n \in \rho(x^n)$, pak dle Lemmatu 28 je $\lambda e - x$ invertibilní, neboli $\lambda \in \rho(x)$.

(d) Nejprve si uvědomme, že $0 \notin \sigma(x)$. Dále zjevně stačí dokázat pouze implikaci $\Leftarrow$ a tu pak aplikovat na x^{-1} a $\frac{1}{\lambda}$. Nechť tedy $\lambda \in \rho(x)$, $\lambda \neq 0$. Pak $\frac{1}{\lambda}e - x^{-1} = \bigl(\frac{1}{\lambda}e - x^{-1}\bigr)xx^{-1} = \bigl(\frac{1}{\lambda}x - e\bigr)x^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(\lambda e - x)x^{-1} \in A^{\times}$, a tedy $\frac{1}{\lambda} \in \rho(x^{-1})$.

(e) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Nechť $\lambda \in \rho(xy) \setminus \{0\}$. Položme $z = (\lambda e - xy)^{-1}$. Pak

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\lambda}(e + yzx)(\lambda e - yx) &= e - \tfrac{1}{\lambda}yx + yzx - \tfrac{1}{\lambda}yzxyx = e - \tfrac{1}{\lambda}yx + \tfrac{1}{\lambda}yz(\lambda x - xyx) = \\ &= e - \tfrac{1}{\lambda}yx + \tfrac{1}{\lambda}yz(\lambda e - xy)x = e - \tfrac{1}{\lambda}yx + \tfrac{1}{\lambda}yex = e\end{aligned}$$

a $(\lambda e - yx)\frac{1}{\lambda}(e + yzx) = e - \frac{1}{\lambda}yx + yzx - \frac{1}{\lambda}yxyzx = e - \frac{1}{\lambda}yx + \frac{1}{\lambda}y(\lambda e - xy)zx = e$, a tedy $\lambda \in \rho(yx)$. Pro opačnou inkluzi stačí vyměnit roli x a y.

Poznamenejme, že na vzorec pro inverzní prvek k $e - yx$ lze přijít následovně: předpokládáme-li, že A je Banachova algebra a $x, y \in U_A$, pak dle Lemmatu 20(a) je $e - yx$ invertibilní a $(e - yx)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(yx)^n = e + \sum_{n=1}^{\infty} y(xy)^{n-1}x = e + y\bigl(\sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n\bigr)x = e + yzx$, přičemž jsme využili spojitosti násobení.

□

Příklad 30. Nechť $A = \mathcal{L}(\ell_2)$, $L \in A$ je posunutí doleva, tj. $L(x) = (x_2, x_3, \dots)$ a $R \in A$ je posunutí doprava, tj. $R(x) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Pak snadno zjistíme, že $\sigma(LR) = \sigma(Id) = \{1\}$ a $\sigma(RL) = \{0, 1\}$.

Je-li A algebra, pak ideálem v A rozumíme vektorový podprostor B v A, který je zároveň okruhovým ideálem, tj. platí, že $ab \in B$ a $ba \in B$ pro každé $a \in A$ a $b \in B$. Každý ideál je zjevně podalgebra.

Všimněme si, že A je ideálem v A_{e}. Jiným příkladem ideálu je $\mathcal{K}(X)$ v $\mathcal{L}(X)$ pro normovaný lineární prostor X (Věta 4.12). Dále si uvědomme, že vlastní ideál v algebře A nikdy neobsahuje její jednotku, a tedy žádný prvek vlastního ideálu v A není invertibilní v A.

Fakt 31. *Nechť A je algebra a B je ideál v A. Pak B je ideál i v A_{e}.*

Důkaz. Jsou-li $a \in A$, $b \in B$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, pak $(a, \alpha)(b, 0) = (ab + \alpha b, 0) \in B$ a $(b, 0)(a, \alpha) = (ba + \alpha b, 0) \in B$.

□

Tvrzení 32. *Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$.*

(a) Pro každé $x \in A$ je $0 \in \sigma_{A_{\mathrm{e}}}(x)$. Nemá-li tedy A jednotku, pak $0 \in \sigma(x)$ pro každé $x \in A$.
(b) Má-li A jednotku, pak $\sigma_{A_{\mathrm{e}}}(x) = \sigma_A(x) \cup \{0\}$ pro každé $x \in A$.
(c) Nechť A má jednotku, B je podalgebra A neobsahující e a $C = B + \mathrm{span}\{e\}$. Pak $\sigma_C(x) = \sigma_{B_{\mathrm{e}}}(x)$ pro každé $x \in B$.
(d) Nechť B je podalgebra A a $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A, pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostaních případech je $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$.
(e) Je-li B vlastní ideál v A, pak $\sigma_{B_{\mathrm{e}}}(x) = \sigma_A(x)$ pro každé $x \in B$.

Důkaz. (a) Tvrzení ihned plyne z faktu, že $x \in A$ nemá inverzi v A_{e}, neboť A je vlastní ideál v A_{e}.

(b) Nechť e je jednotka v A a označme $u = (0, 1)$ jednotku v A_{e}. Nechť $x \in A$ je dáno. Dle (a) je $0 \in \sigma_{A_{\mathrm{e}}}(x)$. Je-li $\lambda \in \rho_A(x) \setminus \{0\}$, pak existuje $y \in A$ takové, že $y(\lambda e - x) = (\lambda e - x)y = e$. Pak

$$\begin{aligned}(\lambda u - x)\bigl(y - \tfrac{1}{\lambda}e + \tfrac{1}{\lambda}u\bigr) &= \lambda uy - ue + u^2 - xy + \tfrac{1}{\lambda}xe - \tfrac{1}{\lambda}xu = \lambda y - e + u - xy + \tfrac{1}{\lambda}x - \tfrac{1}{\lambda}x = \\ &= \lambda ey - xy - e + u = (\lambda e - x)y - e + u = e - e + u = u \quad \text{a}\end{aligned}$$

$$\bigl(y - \tfrac{1}{\lambda}e + \tfrac{1}{\lambda}u\bigr)(\lambda u - x) = \lambda y - e + u - yx + \tfrac{1}{\lambda}x - \tfrac{1}{\lambda}x = y(\lambda e - x) - e + u = u,$$

a tedy $\lambda \in \rho_{A_{\mathrm{e}}}(x)$.

Na druhou stranu, je-li $\lambda \in \rho_{A_{\mathrm{e}}}(x)$, pak existuje $y \in A_{\mathrm{e}}$ takové, že $y(\lambda u - x) = u = (\lambda u - x)y$. Vynásobíme-li obě rovnosti prvkem e zleva i zprava, obdržíme $ey(\lambda ue - xe) = eue = (\lambda eu - ex)ye$, neboli $(ey)(\lambda e - x) = e = (\lambda e - x)(ye)$. Protože $e \in A$ a A je ideál v A_e, je $ey \in A$ a $ye \in A$, a tedy $ey = eye = ye \in A$ je prvek inverzní k $\lambda e - x$ v A, což znamená, že $\lambda \in \rho_A(x)$.

(c) Dle Tvrzení 4 je C podalgebra A a existuje izomorfismus $\Phi\colon B_e \to C$, který je identitou na B. Tedy $\sigma_C(x) = \sigma_C(\Phi(x)) = \sigma_{B_e}(x)$ pro každé $x \in B$ dle Důsledku 27.

(d) Mají-li A a B společnou jednotku, pak inkluze $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$ plyne z Faktu 17. Nemají-li A a B společnou jednotku, pak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku (označme ji e), neboť jinak je $\sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x)$ a B je podalgebra A_e, která s ní nemá společnou jednotku. Položme $C = B + \operatorname{span}\{e\}$. Pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_C(x) = \sigma_{B_e}(x)$ dle první části a (c). To znamená, že pokud B nemá jednotku, pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_{B_e}(x) = \sigma_B(x)$ z definice; pokud B má jednotku, pak $\sigma_A(x) \subset \sigma_{B_e}(x) = \sigma_B(x) \cup \{0\}$ dle (b).

(e) Díky Faktu 31 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku e. Dle předpokladu je $e \notin B$. Položme $C = B + \operatorname{span}\{e\}$. Nechť $x \in B$. Dle (c) je $\sigma_{B_e}(x) = \sigma_C(x)$. Dle (d) je $\sigma_A(x) \subset \sigma_C(x)$. Na druhou stranu, nechť $\lambda \in \rho_A(x)$. Pak existuje $y \in A$ takové, že $y(\lambda e - x) = (\lambda e - x)y = e$. Pokud $\lambda = 0$, pak $e = -yx \in B$, což je spor. Tedy $\lambda \neq 0$. Protože $e = \lambda ye - yx = \lambda y - yx$, je $y = \frac{1}{\lambda}e + \frac{1}{\lambda}yx \in C$, a tedy y je inverzní k $\lambda e - x$ v C. To znamená, že $\lambda \in \rho_C(x)$.

□

PŘÍKLAD 33. Nechť A a B jsou algebry z Příkladu 12. Snadno nahlédneme, že B je vlastní ideál v A. Položme $f = c\chi_{[0,1]} \in B$ pro nějaké $c \in \mathbb{K}$. Pak $\sigma_B(f) = \{c\}$ (Tvrzení 29(b)) a $\sigma_A(f) = \sigma_{B_e}(f) = \{c, 0\}$ (Tvrzení 32(b), (e)).

TVRZENÍ 34. *Nechť A, B jsou algebry, $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus a $x \in A$. Má-li A jednotku e a $\Phi(e)$ není jednotkou v B, pak $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x)$.*

DŮKAZ. Předpokládejme nejprve, že A má jednotku. Označme $C = \Phi(A)$. Je-li $\lambda \in \rho_A(x)$, pak $\lambda e - x \in A^\times$, a tedy dle Faktu 26 je $\lambda\Phi(e) - \Phi(x) = \Phi(\lambda e - x) \in C^\times$, tj. $\lambda \in \rho_C(\Phi(x))$. To znamená, že $\sigma_C(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x)$. Je-li nyní $\Phi(e)$ jednotkou v B, pak $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_C(\Phi(x)) \subset \sigma_A(x)$, jinak je $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_C(\Phi(x)) \cup \{0\} \subset \sigma_A(x) \cup \{0\}$ (Tvrzení 32(d)).

V případě, že A nemá jednotku, vezměme rozšíření $\widetilde{\Phi}\colon A_e \to B_e$ z Faktu 3. Podle Tvrzení 32(b) a předchozího případu je pak $\sigma_B(\Phi(x)) \subset \sigma_{B_e}(\Phi(x)) = \sigma_{B_e}(\widetilde{\Phi}(x)) \subset \sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x)$.

□

DEFINICE 35. Nechť A je algebra. Pro $x \in A$ definujeme spektrální poloměr prvku x jako

$$r(x) = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\}.$$

VĚTA 36. *Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\rho(x)$ je otevřená, $\sigma(x)$ je kompaktní a*

$$r(x) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}.$$

Uvědomme si, že speciálně platí $r(x) \leq \|x\|$. V důkazu využijeme následující lemma.

LEMMA 37. *Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost reálných čísel.*

(a) Pokud $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} < +\infty$.

(b) Pokud $\{a_n\}$ je nezáporná a $a_{m+n} \leq a_m a_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}$.

DŮKAZ. (a) Indukcí snadno obdržíme, že $a_{pq} \leq q a_p$ pro všechna $p, q \in \mathbb{N}$. Zvolme pevně libovolné $n \in \mathbb{N}$. Pro $m \in \mathbb{N}$ existují $q_m, r_m \in \mathbb{N}_0$ taková, že $m = q_m n + r_m$ a $r_m < n$. Pak

$$\frac{a_m}{m} = \frac{a_{q_m n + r_m}}{m} \leq \frac{q_m a_n + a_{r_m}}{m} = \frac{a_n}{n} \cdot \frac{n q_m}{m} + \frac{a_{r_m}}{m} = \frac{a_n}{n}\left(1 - \frac{r_m}{m}\right) + \frac{a_{r_m}}{m}$$

pro každé $m \in \mathbb{N}$. Posloupnosti $\{r_m\}$ a $\{a_{r_m}\}$ jsou omezené, neboť množina $\{r_m;\ m \in \mathbb{N}\}$ je konečná. Platí tedy

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} \leq \limsup_{m\to\infty} \left(\frac{a_n}{n}\left(1 - \frac{r_m}{m}\right) + \frac{a_{r_m}}{m}\right) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{a_n}{n}\left(1 - \frac{r_m}{m}\right) + \frac{a_{r_m}}{m}\right) = \frac{a_n}{n}.$$

Tento odhad platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\limsup_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$, odkud již tvrzení plyne.

(b) Je-li $a_m = 0$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}$, pak $0 \leq a_{m+n} \leq 0a_n = 0$, tedy $a_n = 0$ pro $n \geq m$ a tvrzení platí. Předpokládejme nyní, že $\{a_n\}$ je kladná. Položme $b_n = \log a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pak $b_{m+n} = \log a_{m+n} \leq \log(a_m a_n) = \log a_m + \log a_n = b_m + b_n$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$. Můžeme tedy aplikovat (a) na posloupnost $\{b_n\}$. Pak $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \exp \frac{b_n}{n} = \exp \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \exp \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{b_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \exp \frac{b_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$.

□

DŮKAZ VĚTY 36. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Zobrazení $g\colon \mathbb{K} \to A$, $g(\lambda) = \lambda e - x$ je spojité a $\rho(x) = g^{-1}(A^\times)$. Otevřenost $\rho(x)$ tedy plyne z otevřenosti $A^\times$ (Věta 22). Dále, splňuje-li $\lambda \in \mathbb{K}$ nerovnost $|\lambda| > \|x\|$, je prvek $\lambda e - x = \lambda(e - \frac{x}{\lambda})$ invertibilní dle Lemmatu 20(a), takže $\lambda \in \rho(x)$. Odtud plyne, že $r(x) \leq \|x\|$ a $\sigma(x)$ je kompaktní.

Konečně, je-li $\lambda \in \sigma(x)$, pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ (Tvrzení 29(c)), a tedy dle předchozího odhadu je $|\lambda|^n = |\lambda^n| \leq r(x^n) \leq \|x^n\|$. Odtud plyne, že $r(x) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|}$. Zbytek tvrzení pak plyne z Lemmatu 37(b) aplikovaného na posloupnost $\{\|x^n\|\}$, neboť $\|x^{m+n}\| \leq \|x^m\|\|x^n\|$.

□

VĚTA 38. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou, B je její uzavřená podalgebra obsahující e a $x \in B$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $\partial\rho_B(x) \subset \partial\rho_A(x)$ a

$$\rho_B(x) = \bigcup\{C \subset \mathbb{K};\ C \text{ je komponenta } \rho_A(x) \text{ protínající } \rho_B(x)\}.$$

(b) Je-li C komponenta $\rho_A(x)$, pak buď $C \subset \sigma_B(x)$, nebo $C \cap \sigma_B(x) = \emptyset$. Dále je $\partial\sigma_B(x) \subset \partial\sigma_A(x)$.

(c) Je-li $\rho_A(x)$ souvislá, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

(d) Má-li $\sigma_B(x)$ prázdný vnitřek, pak $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.

DŮKAZ. (a) Z Tvrzení 32(d) plyne, že $\rho_B(x) \subset \rho_A(x)$. Nechť $\lambda \in \partial\rho_B(x)$. Pak existují posloupnosti $\{\alpha_n\} \subset \rho_B(x)$ a $\{\beta_n\} \subset \sigma_B(x)$ takové, že $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = \lambda$. Tedy $\alpha_n e - x \in B^\times$ a $\beta_n e - x \in B \setminus B^\times$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Protože $\lim(\alpha_n e - x) = \lim(\beta_n e - x) = \lambda e - x$, plyne odtud, že $\lambda e - x \in \partial_B B^\times$. Tvrzení 23 pak implikuje, že $\lambda e - x \notin A^\times$, a tedy $\lambda \notin \rho_A(x)$. Aplikací Lemmatu 13.97 nyní obdržíme požadovanou rovnost.

Dále, $\partial\rho_B(x) \subset \overline{\rho_B(x)} \subset \overline{\rho_A(x)}$, a tedy $\partial\rho_B(x) \subset \overline{\rho_A(x)} \setminus \rho_A(x) \subset \partial\rho_A(x)$.

(b) je jen jiná formulace (a).

(c) plyne z (a).

(d) Množina $\rho_A(x) \subset \mathbb{K}$ je otevřená (Věta 36), takže každá její komponenta je otevřená (toto platí i obecně v lokálně souvislých topologických prostorech). Z (b) tedy plyne, že $\rho_A(x) \cap \sigma_B(x) = \emptyset$, neboli $\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x)$. Opačná inkluze je v Tvrzení 32(d).

□

Předchozí větu lze neformálně popsat takto: Množinu $\sigma_B(x)$ obdržíme z množiny $\sigma_A(x)$ tak, že „zalepíme některé její omezené díry“.

PŘÍKLAD 39. Označme U, resp. D, otevřený, resp. uzavřený, jednotkový kruh v $\mathbb{C}$ a $\mathbb{T}$ jednotkovou kružnici v $\mathbb{C}$. Nechť $A = \{F \in C(D);\ F\restriction_U \in H(U)\}$, $C = C(\mathbb{T})$ a $B = \{f \in C;\ f$ má rozšíření $F \in A\}$. Pak B je podalgebra C. Zobrazení $\psi\colon A \to B$, $\psi(F) = F\restriction_{\mathbb{T}}$ je zjevně homomorfismus A na B. Dále díky principu maxima modulu ([R, Věta 10.24]) pro každé $F \in A$ platí, že $\|\psi(F)\| = \max_{\mathbb{T}}|F| = \max_D|F| = \|F\|$, neboli ψ je izometrie.

Položme $F(z) = z$ pro $z \in D$ a $f = F\restriction_{\mathbb{T}} \in B$. Pak $\sigma_C(f) = f(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ dle Příkladu 25(a) a $\sigma_B(f) = \sigma_B(\psi(F)) = \sigma_A(F) = F(D) = D$ dle Důsledku 27 a Příkladu 25(b).

DEFINICE 40. Nechť Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f\colon \Omega \to Y$ a $a \in \Omega$. Jestliže existuje limita $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in Y$, pak tuto limitu nazýváme derivací zobrazení f v bodě a a značíme ji $f'(a)$.

Důležitým faktem je, že spojité lineární funkcionály komutují s derivací:

FAKT 41. *Nechť Y je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f\colon \Omega \to Y$ a $a \in \Omega$. Pokud existuje $f'(a)$, pak pro každé $\phi \in Y^*$ je $(\phi \circ f)'(a) = \phi(f'(a))$.*

DŮKAZ.

$$(\phi \circ f)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\phi\circ f(x) - \phi\circ f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \phi\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \phi\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \phi(f'(a)).$$

□

DEFINICE 42. Nechť A je algebra s jednotkou a $x \in A$. Na $\rho(x)$ definujeme rezolventu (též rezolventní zobrazení) prvku x předpisem

$$R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(x).$$

Nemá-li A jednotku, pak definujeme rezolventu vzhledem k algebře A_e.

TVRZENÍ 43. *Nechť A je Banachova algebra a $x \in A$. Pak zobrazení $\lambda \mapsto R_x(\lambda)$ má derivaci v každém bodě množiny $\rho(x)$.*

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Je-li $\lambda \in \rho(x)$, pak díky Lemmatu 20(b) pro $t \in \mathbb{K}$, $0 < |t| \le \frac{1}{2\|e\|\|(\lambda e - x)^{-1}\|}$ platí, že

$$\begin{aligned}\left\|\frac{R_x(\lambda+t)-R_x(\lambda)}{t} + \left((\lambda e - x)^{-1}\right)^2\right\| &= \frac{1}{|t|}\left\|(\lambda e - x + te)^{-1} - (\lambda e - x)^{-1} + (\lambda e - x)^{-1} te (\lambda e - x)^{-1}\right\| \\ &\le \frac{1}{|t|} 2\|(\lambda e - x)^{-1}\|^3 \|te\|^2 = 2|t|\|(\lambda e - x)^{-1}\|^3\|e\|^2.\end{aligned}$$

Odtud ihned plyne, že $R_x'(\lambda) = -\left((\lambda e - x)^{-1}\right)^2 = -R_x(\lambda)^2$.

□

DEFINICE 44. Nechť Y je komplexní normovaný lineární prostor, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f\colon \Omega \to Y$. Řekneme, že f je holomorfní na Ω, jestliže pro každé $z \in \Omega$ existuje $f'(z)$.

Díky Faktu 41 a Větě 9.31 lze celkem bez problémů přenášet většinu tvrzení o holomorfních funkcích na holomorfní zobrazení do Banachova prostoru. Jako příklad může sloužit následující věta.

VĚTA 45 (Liouvilleova věta). *Nechť Y je komplexní normovaný lineární prostor a $f\colon \mathbb{C} \to Y$ je holomorfní na $\mathbb{C}$. Je-li f omezené, pak je konstantní.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že f není konstantní. Pak existují $u, v \in \mathbb{C}$ takové, že $f(u) \ne f(v)$. Dle Důsledku 2.5 existuje $\phi \in Y^*$ takový, že $\phi(f(u)) \ne \phi(f(v))$. Funkce $\phi \circ f$ je ovšem dle Faktu 41 celá omezená funkce, a tedy je dle Liouvilleovy věty pro skalární funkce[3] ([R, Věta 10.23]) konstantní. To je spor.

□

VĚTA 46. *Nechť A je komplexní Banachova algebra a $x \in A$.*

(a) Rezolventní zobrazení R_x je holomorfní na $\rho(x)$.

(b) Je-li A netriviální, pak $\sigma(x) \ne \emptyset$.

(c) $r(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$ (tzv. Beurlingův-Gelfandův vzorec[4]).

DŮKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku.

(a) plyne z Tvrzení 43.

Dle Lemmatu 20(a) je

$$R_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \tag{1}$$

pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > \|x\|$.

[3]Joseph Liouville ve skutečnosti dokázal jeden z důsledků (1847), přímo tvrzení Liouvilleovy věty dokázal A.-L. Cauchy (1844).

[4]Arne Karl-August Beurling (pro jisté konvoluční algebry; kolem 1938), I. M. Gelfand (1941)

(b) Předpokládejme, že $\sigma(x) = \emptyset$, tj. $\rho(x) = \mathbb{C}$. Podle (a) je zobrazení R_x holomorfní na $\mathbb{C}$. Pro $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující $|\lambda| > \|x\|$ platí dle (1), že

$$\|R_x(\lambda)\| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\|x\|}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\frac{\|x\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|}.$$

Odtud plyne, že $\lim_{|\lambda|\to+\infty} R_x(\lambda) = 0$. To znamená, že R_x je omezené a holomorfní na $\mathbb{C}$, a tedy dle Liouvilleovy věty (Věta 45) konstantní. Jelikož $\lim_{|\lambda|\to+\infty} R_x(\lambda) = 0$, je $R_x = 0$ na $\mathbb{C}$. Speciálně, $R_x(0) = 0$, neboli $x^{-1} = 0$. To však není možné, neboť A je netriviální, a tedy 0 není invertibilní.

(c) Díky Větě 36 stačí ukázat, že $r(x) \ge \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$. Nechť $r > r(x)$ a nechť $\phi \in A^*$ je libovolný. Podle (a) a Faktu 41 je funkce $f(\lambda) = \lambda \cdot \phi \circ R_x(\lambda)$ holomorfní na $\rho(x)$, a tedy i na mezikruží $P = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| > r(x)\}$. Dle (1) platí $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(x^n)}{\lambda^n}$ pro $|\lambda| > \|x\|$. Díky jednoznačnosti rozvoje funkce f v Laurentovu[5] řadu na P platí předchozí rovnost i pro $\lambda \in P$. Speciálně, z rozvoje $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi\big(\frac{x^n}{r^n}\big)$ plyne, že $\lim_{n\to\infty} \phi\big(\frac{x^n}{r^n}\big) = 0$.

Dokázali jsme tedy, že $\frac{x^n}{r^n} \to 0$ slabě, což znamená, že posloupnost $\big\{\frac{x^n}{r^n}\big\}$ je slabě omezená, a tedy omezená (Věta 7.91). Nechť $C > 0$ je takové, že $\big\|\frac{x^n}{r^n}\big\| \le C$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sqrt[n]{\|x^n\|} \le r\sqrt[n]{C}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a tedy $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} \le r$. Jelikož $r > r(x)$ bylo libovolné, plyne odtud požadovaná nerovnost.

□

Může se zdát zvláštní, že definice spektrálního poloměru závisí pouze na algebraické struktuře Banachovy algebry A, zatímco Beurlingův-Gelfandův vzorec závisí na normě algebry. Nicméně tato norma je úzce svázána s algebraickou strukturou pomocí nerovnosti $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$. Na první pohled je též vidět, že výsledek Beurlingova-Gelfandova vzorce se nezmění přechodem k ekvivalentní normě.

Dále si všimněme, že je-li A komplexní Banachova algebra, B její uzavřená podalgebra a $x \in B$, pak se může stát, že $\sigma_A(x) \subsetneq \sigma_B(x)$. Nicméně z Věty 46(c) plyne, že $r_A(x) = r_B(x)$, což znamená, že obě spektra mají stejnou „opsanou kružnici“. To je i v souladu s Větou 38, která říká, že přechod od $\sigma_A(x)$ k $\sigma_B(x)$ může nanejvýš „zalepit vnitřní díry“.

Následující důsledek je drobným zobecněním Lemmatu 20(a).

DŮSLEDEK 47. *Je-li A komplexní Banachova algebra, $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > r(x)$, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$ konverguje absolutně. Má-li tedy A jednotku, pak $R_x(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$.*

DŮKAZ. Nalezněme $q \in (0,1)$ takové, že $r(x) < q|\lambda|$. Dle Věty 46(c) existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \ge n_0$ je $\sqrt[n]{\|x^n\|} < q|\lambda|$, neboli $\big\|\frac{x^n}{\lambda^n}\big\| < q^n$. Odtud plyne absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$. Z Lemmatu 19 tedy dostáváme, že $R_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda}(e - \frac{x}{\lambda})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^n}$.

□

VĚTA 48 (S. Mazur (1938), I. M. Gelfand (1941)). *Nechť A je netriviální komplexní Banachova algebra s jednotkou. Pokud $A^\times = A \setminus \{0\}$, pak A je izomorfní $\mathbb{C}$. Pokud navíc $\|e\| = 1$, pak A je izometricky izomorfní $\mathbb{C}$.*

DŮKAZ. Definujme $\psi\colon \mathbb{C} \to A$ předpisem $\psi(\lambda) = \lambda e$. Snadno nahlédneme, že ψ je algebrový homomorfismus. Dále $\|\psi(\lambda)\| = |\lambda|\|e\|$, a tedy ψ je izomorfismus do (popřípadě izometrie, pokud $\|e\| = 1$). Konečně, je-li $x \in A$, pak dle Věty 46(b) existuje $\lambda \in \sigma(x)$. Dle předpokladu je pak $\lambda e - x = 0$, neboli $x = \lambda e$. To znamená, že ψ je na.

□

[5] Pierre Alphonse Laurent

3. Holomorfní kalkulus

Pomocí algebraických operací (sčítání a násobení) na reálných nebo komplexních číslech a limitních přechodů lze definovat složitější funkce – např. $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Na Banachově algebře máme k dispozici základní stavební kameny pro tvorbu takovýchto funkcí (algebraické operace a limitní přechody), nabízí se tedy otázka, zda lze smysluplně definovat podobné složitější funkce i na Banachových algebrách, a zda budou mít tyto funkce obvyklé vlastnosti (tj. zda bude platit vhodný „kalkulus“ pro počítání s takovýmito funkcemi). Pro komplexní Banachovy algebry je jedním z vhodných nástrojů k takovémuto rozšíření Cauchyův vzorec.

Nechť X je komplexní Banachův prostor. Je-li $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta a $f\colon \langle\gamma\rangle \to X$ spojité zobrazení, pak zobrazení $t \mapsto \gamma'(t) f(\gamma(t))$ je po částech spojité (a tedy silně měřitelné a omezené) na $[a,b]$, můžeme tedy definovat integrál f podél γ předpisem

$$\int_\gamma f = \int_{[a,b]} \gamma'(t) f(\gamma(t))\,\mathrm{d}\lambda(t),$$

kde vpravo je Bochnerův integrál. Dále stejně jako pro komplexní funkce definujeme integrál podél řetězce $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n$ v $\mathbb{C}$ ze spojitého zobrazení $f\colon \langle\Gamma\rangle \to X$ předpisem

$$\int_\Gamma f = \int_{\gamma_1} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f.$$

LEMMA 49. *Nechť Γ je řetězec v $\mathbb{C}$, X je komplexní Banachův prostor, $f\colon \langle\Gamma\rangle \to X$ je spojité a $\phi \in X^*$. Pak $\phi\big(\int_\Gamma f\big) = \int_\Gamma \phi \circ f$.*

DŮKAZ. Nechť $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n$, kde $\gamma_j\colon [a_j,b_j] \to \mathbb{C}$ jsou cesty. Pak dle Věty 9.31 je

$$\begin{aligned}
\phi\Big(\int_\Gamma f\Big) &= \phi\Big(\sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f\Big) = \sum_{j=1}^n \phi\Big(\int_{\gamma_j} f\Big) = \sum_{j=1}^n \phi\Big(\int_{[a_j,b_j]} \gamma_j'(t) f(\gamma_j(t))\,\mathrm{d}\lambda(t)\Big) = \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{[a_j,b_j]} \phi\big(\gamma_j'(t) f(\gamma_j(t))\big)\,\mathrm{d}\lambda(t) = \sum_{j=1}^n \int_{[a_j,b_j]} \gamma_j'(t)\phi \circ f(\gamma_j(t))\,\mathrm{d}\lambda(t) = \\
&= \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \phi \circ f = \int_\Gamma \phi \circ f.
\end{aligned}$$

□

Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená a $K \subset \Omega$ kompaktní, pak řekneme, že cykl Γ obíhá K v Ω, pokud $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega \setminus K$, $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$ pro $z \in K$ a $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Z komplexní analýzy víme, že takový cykl vždy existuje.

Jako ilustraci metody, jak převádět věty z teorie komplexních funkcí na zobrazení z $\mathbb{C}$ do Banachova prostoru uveďme následující verzi Cauchyovy věty:

VĚTA 50. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, X je komplexní Banachův prostor a $f\colon \Omega \to X$ je holomorfní. Jsou-li Γ_1, Γ_2 dva cykly v Ω takové, že $\operatorname{ind}_{\Gamma_1}(z) = \operatorname{ind}_{\Gamma_2}(z)$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, pak $\int_{\Gamma_1} f = \int_{\Gamma_2} f$.*

DŮKAZ. Nechť $\phi \in X^*$ je libovolný. Pak je funkce $\phi \circ f$ holomorfní na Ω. Dále položme $\Gamma = \Gamma_1 \dot{-} \Gamma_2$. Pak $\operatorname{ind}_\Gamma(z) = 0$ pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, podle Cauchyovy věty je tudíž $\int_\Gamma \phi \circ f = 0$. Dle Lemmatu 49 je tedy $\phi\big(\int_\Gamma f\big) = 0$ pro každé $\phi \in X^*$. Protože X^* odděluje body X, je $\int_{\Gamma_1} f - \int_{\Gamma_2} f = \int_\Gamma f = 0$.

□

Předchozí věta nám umožňuje zavést následující definici.

DEFINICE 51. Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou a $x \in A$. Je-li $f \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak definujeme

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f R_x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\alpha)(\alpha e - x)^{-1}\,\mathrm{d}\alpha,$$

kde Γ je libovolný cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω.

Dříve, než ukážeme, že s takto definovanými funkcemi lze pracovat pomocí přirozeného kalkulu, uvedeme některá pomocná počtářská tvrzení.

LEMMA 52. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, A je Banachova algebra a $f \in L_1(\mu, A)$. Pak pro každé $x \in A$ a každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$x\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E x f(t)\,\mathrm{d}\mu(t) \quad a \quad \left(\int_E f\,\mathrm{d}\mu\right) x = \int_E f(t) x\,\mathrm{d}\mu(t).$$

DŮKAZ. Nechť $x \in A$. Operátor levé translace $L_x\colon A \to A$, $L_x(y) = xy$ patří do $\mathcal{L}(A)$. Dle Věty 9.31 tedy pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že

$$x\left(\int_E f d\mu\right) = L_x\left(\int_E f d\mu\right) = \int_E L_x(f(t))\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_E x f(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

Obdobně odvodíme druhou rovnost.

□

FAKT 53. *Nechť G je grupa. Jsou-li $u, v \in G$ takové, že $uv = vu$, pak i $u^{-1}v^{-1} = v^{-1}u^{-1}$, $uv^{-1} = v^{-1}u$ a $u^{-1}v = vu^{-1}$.*

DŮKAZ.

$$\begin{aligned} u^{-1}v^{-1} &= (vu)^{-1} = (uv)^{-1} = v^{-1}u^{-1}, \\ uv^{-1} &= v^{-1}vuv^{-1} = v^{-1}uvv^{-1} = v^{-1}u, \\ u^{-1}v &= vv^{-1}u^{-1}v = vu^{-1}v^{-1}v = vu^{-1}. \end{aligned}$$

□

LEMMA 54. *Nechť A je algebra s jednotkou, $x \in A$ a $\mu, \nu \in \rho(x)$.*

(a) $R_x(\mu)R_x(\nu) = R_x(\nu)R_x(\mu)$.
(b) $R_x(\mu) - R_x(\nu) = (\nu - \mu)R_x(\mu)R_x(\nu)$ (tzv. rezolventní identita).

DŮKAZ. Snadno vidíme, že prvky $\mu e - x$ a $\nu e - x$ spolu vzájemně komutují. Tvrzení (a) tedy plyne z Faktu 53. Podobně díky Faktu 53 platí, že spolu vzájemně komutují prvky $R_x(\mu)^{-1}$ a $R_x(\nu)$, a tedy

$$\begin{aligned} R_x(\mu) - R_x(\nu) = & R_x(\mu)R_x(\nu)R_x(\nu)^{-1} - R_x(\mu)R_x(\mu)^{-1}R_x(\nu) = \\ & = R_x(\mu)R_x(\nu)R_x(\nu)^{-1} - R_x(\mu)R_x(\nu)R_x(\mu)^{-1} = \\ & = R_x(\mu)R_x(\nu)\big(R_x(\nu)^{-1} - R_x(\mu)^{-1}\big) = \\ & = R_x(\mu)R_x(\nu)(\nu - \mu)e = (\nu - \mu)R_x(\mu)R_x(\nu). \end{aligned}$$

□

VĚTA 55 (holomorfní kalkulus). *Nechť A je komplexní Banachova algebra s jednotkou, $x \in A$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$ a $f \in H(\Omega)$. Zobrazení $\Phi\colon H(\Omega) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ z Definice 51, má následující vlastnosti:*

(a) Φ je algebrový homomorfismus, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.
(b) Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně v $H(\Omega)$, pak $f_n(x) \to f(x)$.
(c) $f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.
(d) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (tzv. věta o obrazu spektra).
(e) Pokud $g \in H(\Omega_1)$, kde Ω_1 je otevřené okolí $f(\sigma(x))$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
(f) Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.

Navíc pokud zobrazení $\Psi\colon H(\Omega) \to A$ splňuje (a) a (b), pak $\Psi = \Phi$.

DŮKAZ. (a) Linearitu Φ obdržíme snadno z linearity integrálu podél řetězce. Ukažme nyní multiplikativitu. Nechť $g \in H(\Omega)$. Nalezněme otevřenou množinu $U \subset \mathbb{C}$ takovou, že $\sigma(x) \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$ a $\overline{U}$ je kompaktní. Dále nechť Γ je cykl obíhající $\sigma(x)$ v U a nechť Λ je cykl obíhající $\overline{U}$ v Ω. Pak Γ i Λ obíhají $\sigma(x)$ v Ω, takže

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma fR_x\right)g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)R_x(t)g(x)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)R_x(t)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda g(s)R_x(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Lambda f(t)g(s)R_x(t)R_x(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Lambda f(t)g(s)\frac{R_x(t)-R_x(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Lambda \frac{f(t)g(s)}{s-t}R_x(t)\,\mathrm{d}s - \int_\Lambda \frac{f(t)g(s)}{s-t}R_x(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma f(t)\left(\int_\Lambda \frac{g(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s\right)R_x(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\left(\int_\Lambda \frac{f(t)g(s)}{s-t}R_x(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma f(t)\left(\int_\Lambda \frac{g(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s\right)R_x(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Lambda\left(\int_\Gamma \frac{f(t)g(s)}{s-t}R_x(s)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma f(t)\left(\int_\Lambda \frac{g(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s\right)R_x(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Lambda g(s)\left(\int_\Gamma \frac{f(t)}{s-t}\,\mathrm{d}t\right)R_x(s)\,\mathrm{d}s = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(t)g(t)R_x(t)\,\mathrm{d}t = (fg)(x),
\end{aligned}$$

přičemž druhá a čtvrtá rovnost plynou z Lemmatu 52, pátá rovnost plyne z rezolventní identity (Lemma 54(b)) díky disjunktnosti $\langle\Gamma\rangle$ a $\langle\Lambda\rangle$, sedmá rovnost plyne z linearity vnějšího integrálu a z Faktu 9.32, osmá rovnost plyne z Fubiniovy věty (Věta 9.36), a devátá rovnost plyne z Faktu 9.32. Konečně, desátá rovnost plyne z toho, že podle Cauchyovy věty je $\int_\Gamma \frac{f(t)}{s-t}\,\mathrm{d}t = 0$ pro $s \in \langle\Lambda\rangle$, neboť pro tato s je funkce $t \mapsto \frac{f(t)}{s-t}$ holomorfní na U, a dále podle Cauchyova vzorce je $\int_\Lambda \frac{g(s)}{s-t}\,\mathrm{d}s = 2\pi i g(t)$ pro $t \in \overline{U}$.

Abychom ukázali poslední vlastnost Φ, vezměmě $k \in \mathbb{N}_0$ a položme $g(u) = u^k$ pro $u \in \mathbb{C}$. Pak $g \in H(\mathbb{C})$. Dále vezměme $r > \|x\|$ a položme $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak γ obíhá $\sigma(x)$ v $\mathbb{C}$, neboť $r > \|x\| \geq r(x)$, a je-li Γ cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω, pak $g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma gR_x = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma gR_x$ (Věta 50 použitá na množinu $\rho(x)$). Platí tedy

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(u)R_x(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma u^k\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{u^{n+1}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i}\int_{[0,2\pi]}\sum_{n=0}^\infty \gamma'(t)\gamma(t)^k\frac{x^n}{\gamma(t)^{n+1}}\,\mathrm{d}\lambda(t) = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty\int_{[0,2\pi]}\gamma'(t)\gamma(t)^k\frac{x^n}{\gamma(t)^{n+1}}\,\mathrm{d}\lambda(t) = \sum_{n=0}^\infty\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u^k}{u^{n+1}}\,\mathrm{d}u\right)x^n = x^k,
\end{aligned}$$

přičemž jsme postupně použili Důsledek 47, Větu 9.28 spolu s faktem, že příslušná řada konverguje absolutně stejnoměrně na $[0, 2\pi]$, a Fakt 9.32. Dosazením $k = 0$, resp. $k = 1$, dostáváme kýžený vztah.

(b) Nechť $\Gamma = \gamma_1 \dotplus \cdots \dotplus \gamma_k$ je cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω a nechť $\gamma_j : [a_j, b_j] \to C$. Pak pro $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}\|f_n(x) - f(x)\| &= \left\| \int_\Gamma \big(f_n(u) - f(u)\big) R_x(u)\,\mathrm{d}u \right\| \le \\ &\le \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} |\gamma_j'(t)| \cdot |f_n(\gamma_j(t)) - f(\gamma_j(t))| \cdot \|R_x(\gamma_j(t))\|\,\mathrm{d}t \le \\ &\le \sup_{\langle\Gamma\rangle} |f_n(u) - f(u)| \sum_{j=1}^k \int_{a_j}^{b_j} |\gamma_j'(t)| \cdot \|R_x(\gamma_j(t))\|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $f_n(x) \to f(x)$, neboť $\langle\Gamma\rangle$ je kompaktní podmnožina Ω.

(c) $\Rightarrow$ Nechť $f(\lambda) = 0$ pro nějaké $\lambda \in \sigma(x)$. Pak existuje $g \in H(\Omega)$ tak, že $f(u) = (\lambda - u)g(u)$ pro $u \in \Omega$. Dle (a) je tedy $(\lambda e - x)g(x) = f(x) = g(x)(\lambda e - x)$. Pak $f(x) \notin A^\times$ dle Lemmatu 28, neboť $\lambda e - x \notin A^\times$.

$\Leftarrow$ Díky kompaktnosti $\sigma(x)$ existuje otevřená $\Omega_1 \subset \Omega$ taková, že $\sigma(x) \subset \Omega_1$ a $f \neq 0$ na Ω_1. Pak $\frac{1}{f} \in H(\Omega_1)$ a dle (a) použitého na funkce z $H(\Omega_1)$ je $e = (f\frac{1}{f})(x) = f(x)\frac{1}{f}(x)$.

(d) Použijeme-li postupně (a) a (c), obdržíme, že

$$\lambda \in \sigma(f(x)) \Leftrightarrow \lambda e - f(x) \notin A^\times \Leftrightarrow (\lambda - f)(x) \notin A^\times \Leftrightarrow \exists \mu \in \sigma(x) \colon \lambda - f(\mu) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in f(\sigma(x)).$$

(e) Množina $f(\sigma(x))$ je kompaktní, existuje tedy otevřená $V \subset \mathbb{C}$ taková, že $f(\sigma(x)) \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega_1$ a $\overline{V}$ je kompaktní. Položme $U = f^{-1}(V)$. Pak U je otevřené okolí $\sigma(x)$, a tedy existuje cykl Γ obíhající $\sigma(x)$ v U. Nechť Γ_1 je cykl obíhající $\overline{V}$ v Ω_1. Pro každé $v \in \langle\Gamma_1\rangle$ je funkce $u \mapsto \frac{1}{v - f(u)}$ holomorfní na U, podle (a) a (c) je tedy

$$R_{f(x)}(v) = (ve - f(x))^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{v - f(u)} R_x(u)\,\mathrm{d}u.$$

Protože Γ_1 dle (d) obíhá $\sigma(f(x))$ v Ω_1, je

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g R_{f(x)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} g(v) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{v - f(u)} R_x(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_1} \left(\int_\Gamma \frac{g(v)}{v - f(u)} R_x(u)\,\mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \left(\int_{\Gamma_1} \frac{g(v)}{v - f(u)} R_x(u)\,\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \left(\int_{\Gamma_1} \frac{g(v)}{v - f(u)}\,\mathrm{d}v \right) R_x(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma g(f(u)) R_x(u)\,\mathrm{d}u = (g \circ f)(x), \end{aligned}$$

přičemž jsme postupně použili Fubiniovu větu (Věta 9.36), Fakt 9.32, Cauchyův vzorec pro body z množiny $f(\langle\Gamma\rangle) \subset V$ a fakt, že $g \circ f$ je holomorfní na U.

(f) Nechť y komutuje s x. Snadno vidíme, že pak y komutuje i s $\lambda e - x$ pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$, dle Faktu 53 tedy komutuje i s $R_x(\lambda)$ pro každé $\lambda \in \rho(x)$. Nechť Γ je cykl obíhající $\sigma(x)$ v Ω. Díky Lemmatu 52 dostáváme, že $yf(x) = y\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma fR_x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(u)yR_x(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(u)R_x(u)y\,\mathrm{d}u = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma fR_x\right)y = f(x)y$.

Konečně, nechť $\Psi \colon H(\Omega) \to A$ splňuje (a) a (b). Nejprve si všimněme, že vzorec v (c) plyne pouze z (a), zobrazení Ψ tedy splňuje i (c). Nechť $f \in H(\Omega)$. Dle Rungeovy věty[6] ([R, Věta 13.9]) existuje posloupnost racionálních funkcí $\{R_n\}$ s póly mimo množinu Ω, která konverguje lokálně stejnoměrně k f na Ω. Z pravidel kalkulu (a) a (c) snadno obdržíme, že $\Psi(R_n) = \Phi(R_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Použitím vlastnosti (b) pak dostaneme, že $\Psi(f) = \Phi(f)$.

□

Dle předchozí věty je již definice $f(x)$ jednoznačně určena přirozenými vlastnostmi kalkulu (a) a (b). Pokud bychom tedy například ke konstrukci $f(x)$ použili metodu Taylorových řad naznačenou v úvodu, pak bychom dospěli ke stejné hodnotě, jako pomocí Cauchyova vzorce výše.

[6] Carl David Tolmé Runge (1885)

4. Multiplikativní lineární funkcionály

DEFINICE 56. Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Homomorfismus $\varphi\colon A \to \mathbb{K}$ nazýváme multiplikativním lineárním funkcionálem (tedy φ je lineární a $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ pro všechna $x, y \in A$). Množinu všech nenulových multiplikativních lineárních funkcionálů na A značíme $\Delta(A)$.

Uvědomme si, že je-li $\varphi \in \Delta(A)$, pak φ je na. Má-li tedy A jednotku, pak $\varphi(e) = 1$, a je-li $x \in A^\times$, pak $\varphi(x) \neq 0$ a $\varphi(x^{-1}) = \frac{1}{\varphi(x)}$ (Fakt 26). Dále si všimněme, že jádro multiplikativního lineárního funkcionálu na A je ideálem v A, neboť jádro okruhového homomorfismu je okruhovým ideálem.

Kanonickým příkladem multiplikativních lineárních funkcionálů jsou Diracovy míry na $[0, 1]$ jakožto funkcionály na algebře $C([0, 1])$. Viz též Příklad 71. Na druhou stranu se může stát, že na Banachově algebře žádné netriviální multiplikativní lineární funkcionály neexistují:

PŘÍKLAD 57. Nechť X je konečněrozměrný Banachův prostor s $\dim X > 1$. Pak $\Delta(\mathcal{L}(X)) = \emptyset$.

Nechť $n = \dim X$. Z lineární algebry víme, že prostor $\mathcal{L}(X)$ lze reprezentovat jako prostor čtvercových matic řádu n. Pro $i, j \in \{1, \dots, n\}$ označme jako E^{ij} matici, která je nulová kromě hodnoty 1 na pozici (i, j). Pak $\{E^{ij};\ i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ je báze prostoru $\mathcal{L}(X)$. Přímočarým výpočtem obdržíme, že

$$E^{ij}E^{kl} = \begin{cases} E^{il}, & \text{pokud } j = k,\\ 0 & \text{jinak.}\end{cases}$$

Nechť φ je multiplikativní lineární funkcionál na $\mathcal{L}(X)$. Pak $\varphi(T) = \sum_{i,j=1}^n T_{ij}\varphi(E^{ij})$ pro každé $T \in \mathcal{L}(X)$, kde $T = \sum_{i,j=1}^n T_{ij}E^{ij}$, $T_{ij} \in \mathbb{K}$. Pro $i \neq j$ je $\varphi(E^{ij})\varphi(E^{ij}) = \varphi(E^{ij}E^{ij}) = \varphi(0) = 0$, a tedy $\varphi(E^{ij}) = 0$. Pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$ je $\varphi(E^{ii}) = \varphi(E^{in}E^{ni}) = \varphi(E^{in})\varphi(E^{ni}) = 0$ dle předchozího případu. Konečně, $\varphi(E^{nn}) = \varphi(E^{n1}E^{1n}) = \varphi(E^{n1})\varphi(E^{1n}) = 0$. Odtud plyne, že $\varphi = 0$.

Jak uvidíme později, alespoň pro komplexní komutativní Banachovy algebry A s jednotkou je množina $\Delta(A)$ neprázdná.

TVRZENÍ 58. *Nechť A je algebra. Každý multiplikativní lineární funkcionál φ na A má jednoznačné rozšíření $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$ dané vzorcem $\widetilde{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x) + \lambda$ a $\Delta(A_e) = \{\widetilde{\varphi};\ \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\}$.*

DŮKAZ. Nechť φ je multiplikativní lineární funkcionál na A. Vzorec pro rozšíření plyne z Faktu 3. Jelikož $\widetilde{\varphi}((0, 1)) = 1$, je $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$. Jednoznačnost rozšíření plyne z toho, že je-li $\psi \in \Delta(A_e)$, pak $\psi((x, \lambda)) = \psi\big((x, 0) + (0, \lambda)\big) = \psi(x) + \lambda\psi((0, 1)) = \psi(x) + \lambda\psi(e) = \psi(x) + \lambda$. Tvar $\Delta(A_e)$ pak plyne z toho, že je-li $\psi \in \Delta(A_e)$, pak $\varphi = \psi\restriction_A$ je multiplikativní lineární funkcionál na A a $\psi = \widetilde{\varphi}$.

□

TVRZENÍ 59. *Nechť A je algebra a $\varphi \in \Delta(A)$. Pro každé $x \in A$ je $\varphi(x) \in \sigma(x)$, a tedy $|\varphi(x)| \leq r(x)$.*

DŮKAZ. Má-li A jednotku a je-li $\lambda \in \rho(x)$, pak $\lambda e - x \in A^\times$, a tedy $0 \neq \varphi(\lambda e - x) = \lambda\varphi(e) - \varphi(x) = \lambda - \varphi(x)$, neboli $\varphi(x) \neq \lambda$. Proto je $\varphi(x) \in \sigma(x)$.

Nemá-li A jednotku, vezměme $\widetilde{\varphi} \in \Delta(A_e)$. Pak dle předchozího je $\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x) \in \sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x)$.

□

DŮSLEDEK 60. *Nechť A je Banachova algebra. Pak $\Delta(A) \subset B_{A^*}$ (speciálně, každý multiplikativní lineární funkcionál na A je automaticky spojitý). Pokud A má jednotku, pak $\|\varphi\| \geq \frac{1}{\|e\|}$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$. Speciálně, je-li $\|e\| = 1$, pak $\Delta(A) \subset S_{A^*}$.*

DŮKAZ. Je-li $\varphi \in \Delta(A)$, pak dle Tvrzení 59 a Věty 36 je $|\varphi(x)| \leq r(x) \leq \|x\|$ pro každé $x \in A$, takže φ je spojitý a $\|\varphi\| \leq 1$. Má-li A jednotku, pak $\|\varphi\| \geq \left|\varphi\big(\frac{e}{\|e\|}\big)\right| = \frac{1}{\|e\|}$.

□

Naším cílem nyní bude dokázat rozšiřovací/oddělovací větu Hahnova-Banachova typu (Věta 2.7) pro multiplikativní lineární funkcionály (Důsledek 66). Hlavním technickým nástrojem pro tento účel pro nás budou ideály (připomeňme, že jádro multiplikativního lineárního funkcionálu je ideál), dokážeme si tedy nejprve několik pomocných tvrzení o ideálech. Příklad 57 ukazuje, že rozšiřovací věta nemůže platit pro obecné algebry. My ji dokážeme pro komutativní algebry, přičemž klíčovou roli zde hraje fakt, že v komutativní algebře existují hlavní ideály (Lemma 64).

Nejprve si všimněme, že jsou-li A, B algebry, $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus a $I \subset B$ je ideál v B, pak $\Phi^{-1}(I)$ je ideál v A. Vskutku, $\Phi^{-1}(I)$ je podprostor A a je-li $x \in \Phi^{-1}(I)$ a $a \in A$, pak $\Phi(ax) = \Phi(a)\Phi(x) \in I$, a tedy $ax \in \Phi^{-1}(I)$ a analogicky pro xa.

Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$ a I je ideál v A. Pak A/I je vektorový prostor a zároveň též okruh, kde násobení je dáno vzorcem $\widehat{x}\widehat{y} = \widehat{xy}$. Je-li nyní $x, y \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$, pak $(\alpha\widehat{x})\widehat{y} = \widehat{\alpha x}\widehat{y} = \widehat{(\alpha x)y} = \widehat{x(\alpha y)} = \widehat{x}\widehat{\alpha y} = \widehat{x}(\alpha\widehat{y}) = \widehat{\alpha(xy)} = \alpha\widehat{xy} = \alpha(\widehat{x}\widehat{y})$. To znamená, že A/I s příslušnými operacemi je algebra nad $\mathbb{K}$, tzv. faktoralgebra algebry A podle ideálu I. Má-li A jednotku, pak $\widehat{e}$ je zjevně jednotka v A/I. Z definice ihned vidíme, že kanonické kvocientové zobrazení $q\colon A \to A/I$ je algebrový homomorfismus na.

Nechť nyní A je normovaná algebra a I je uzavřený ideál v A. Pak $(A/I, \|\cdot\|_{A/I})$, kde $\|\cdot\|_{A/I}$ je kanonická kvocientová norma, je normovaná algebra: Je-li $x, y \in A$ a $\varepsilon > 0$, pak existují $u, v \in I$ takové, že $\|x + u\| \le \|\widehat{x}\|_{A/I} + \varepsilon$ a $\|y + v\| \le \|\widehat{y}\|_{A/I} + \varepsilon$. Pak $uy + xv + uv \in I$, a tedy

$$\begin{aligned}\|\widehat{x}\widehat{y}\|_{A/I} &= \|\widehat{xy}\|_{A/I} \le \|xy + uy + xv + uv\| = \|(x+u)(y+v)\| \le \|x+u\|\|y+v\| \le \\ &\le (\|\widehat{x}\|_{A/I} + \varepsilon)(\|\widehat{y}\|_{A/I} + \varepsilon).\end{aligned}$$

Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud, že $\|\widehat{x}\widehat{y}\|_{A/I} \le \|\widehat{x}\|_{A/I}\|\widehat{y}\|_{A/I}$. Je-li navíc A Banachova algebra, pak A/I je též Banachova algebra (Věta 1.70).

DEFINICE 61. Nechť A je algebra. Maximálním ideálem v A nazveme takový vlastní ideál v A, který je maximální vzhledem k uspořádání všech vlastních ideálů v A inkluzí.

Je-li A algebra a $\varphi \in \Delta(A)$, pak $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} \varphi = 1$ (Lemma 1.120), a tedy $\operatorname{Ker} \varphi$ je maximální ideál v A.

TVRZENÍ 62. *Nechť A je algebra s jednotkou. Pak každý vlastní ideál v A je obsažen v nějakém maximálním ideálu v A.*

DŮKAZ. Nechť I je vlastní ideál v A. Položme

$$\mathcal{J} = \{J \subset A;\ J \text{ je vlastní ideál a } I \subset J\}.$$

Pak $\mathcal{J}$ je neprázdná množina částečně uspořádaná inkluzí. Ukážeme, že jsou splněny předpoklady Zornova lemmatu: Je-li $\mathcal{R}$ řetězec v $\mathcal{J}$, pak je snadno vidět, že $R = \bigcup_{J \in \mathcal{R}} J$ je ideál v A obsahující I. Protože pro každé $J \in \mathcal{R}$ je $e \notin J$, je také $e \notin R$, a tedy R je vlastní a je to horní závora $\mathcal{R}$ v $\mathcal{J}$. Podle Zornova lemmatu tedy existuje maximální prvek $J \in \mathcal{J}$.

□

TVRZENÍ 63. *Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Je-li I vlastní ideál v A, je i $\overline{I}$ vlastní ideál v A. Tedy každý maximální ideál v A je uzavřený.*

DŮKAZ. Víme, že $\overline{I}$ je podprostor A (Fakt 1.21). Dále nechť $x \in \overline{I}$ a $a \in A$. Pak existuje posloupnost $\{x_n\} \subset I$ taková, že $x_n \to x$. Protože $x_n a \in I$ a $ax_n \in I$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a protože násobení je spojitá operace (Tvrzení 6), takže $ax_n \to ax$ a $x_n a \to xa$, je $ax \in \overline{I}$ a $xa \in \overline{I}$. To znamená, že $\overline{I}$ je ideál v A.

Konečně, I je vlastní, a tedy $I \cap A^{\times} = \emptyset$. Protože $A^{\times}$ je otevřená (Věta 22), je i $\overline{I} \cap A^{\times} = \emptyset$. Speciálně, $e \notin \overline{I}$, a tedy $\overline{I}$ je vlastní.

□

Je-li A komutativní algebra nad $\mathbb{K}$ a $x \in A$, pak xA je okruhový ideál (tzv. hlavní ideál). Protože pro každé $a \in A$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ je $\alpha(xa) = x(\alpha a) \in xA$, je xA podprostorem A, a tedy je to i algebrový ideál.

LEMMA 64. *Nechť A je komutativní algebra s jednotkou a $x \in A$ není invertibilní. Pak hlavní ideál xA je vlastní.*

DŮKAZ. Protože x není invertibilní, je $xa \neq e$ pro každé $a \in A$. Tedy $e \notin xA$.

□

VĚTA 65. *Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou. Pak zobrazení $\Phi\colon \varphi \mapsto \operatorname{Ker}\varphi$ je bijekce mezi $\Delta(A)$ a množinou všech maximálních ideálů v A.*

DŮKAZ. Ukažme nejprve, že Φ je prosté. Nechť $\varphi, \psi \in \Delta(A)$ jsou takové, že $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$. Pak $\psi = c\varphi$ pro nějaké $c \in \mathbb{C}$ (Lemma 7.78). Jelikož $1 = \psi(e) = c\varphi(e) = c$, dostáváme, že $\varphi = \psi$.

Nyní ukážeme, že Φ je na. Nechť I je maximální ideál v A. Dle Tvrzení 63 je I uzavřený, a tedy A/I je komutativní Banachova algebra s jednotkou $\widehat{e}$. Nechť $q\colon A \to A/I$ je kanonické kvocientové zobrazení. Tvrdíme, že každý nenulový prvek v $C = A/I$ je invertibilní: Předpokládejme že $x \in A \setminus I$ je takový, že $\widehat{x}$ není invertibilní. Dle Lemmatu 64 je hlavní ideál $\widehat{x}C$ vlastní, takže $\widehat{e} \notin \widehat{x}C$, a dále $\widehat{x} = \widehat{x}\widehat{e} \in \widehat{x}C$. Pak $q^{-1}(\widehat{x}C)$ je ideál v A, který je vlastní, neboť $e \notin q^{-1}(\widehat{x}C)$, obsahuje I, neboť $0 \in \widehat{x}C$, a je větší než I, neboť $x \in q^{-1}(\widehat{x}C)$. To je však spor s maximalitou I.

Dle Mazurovy-Gelfandovy věty (Věta 48) je tedy A/I izomorfní $\mathbb{C}$. Označíme-li $j : A/I \to \mathbb{C}$ tento izomorfismus, pak $\varphi = j \circ q \in \Delta(A)$, neboť j i q jsou na. Konečně, $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, právě když $q(x) = 0$, což je, právě když $x \in I$. Našli jsme tedy funkcionál $\varphi \in \Delta(A)$, pro který je $\operatorname{Ker}\varphi = I$.

□

DŮSLEDEK 66. *Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou a I je vlastní ideál v A. Pak existuje $\varphi \in \Delta(A)$ takový, že $\varphi\restriction_I = 0$.*

DŮKAZ. Stačí použít Tvrzení 62 a Větu 65.

□

Je-li A Banachova algebra, pak dle Důsledku 60 je $\Delta(A) \subset B_{A^*}$. Nebude-li řečeno jinak, pak na $\Delta(A)$ budeme vždy uvažovat topologii w^* zděděnou z A^*.

VĚTA 67. *Nechť A je Banachova algebra a $M = \Delta(A) \cup \{0\} \subset (B_{A^*}, w^*)$ je množina všech lineárních multiplikativních funkcionálů na A. Pak M je kompaktní, $\Delta(A)$ je lokálně kompaktní a má-li A jednotku, pak $\Delta(A)$ je kompaktní. Není-li $\Delta(A)$ kompaktní, pak M je Alexandrovova kompaktifikace $\Delta(A)$.*

Zobrazení $\Phi\colon M \to \Delta(A_{\mathrm{e}})$, kde $\Phi(\varphi) = \widetilde{\varphi}$ je jednoznačné rozšíření φ na prvek $\Delta(A_{\mathrm{e}})$, je homeomorfismus.

DŮKAZ. Analogicky jako ve Faktu 7.38 se ukáže, že M je w^*-uzavřená. Dle Důsledku 60 je $M \subset B_{A^*}$, a tedy dle Důsledku 7.110 je M kompaktní podmnožina (B_{A^*}, w^*). Množina $\Delta(A)$ je otevřená v M (má uzavřený doplněk), takže je lokálně kompaktní. Má-li A jednotku, pak $\Delta(A) = \{\varphi \in M;\ \varphi(e) = 1\} = \{\varphi \in M;\ \varepsilon_e(\varphi) = 1\}$, což je w^*-uzavřená podmnožina M. V tomto případě je tedy $\Delta(A)$ kompaktní.

Konečně, Φ je bijekce dle Tvrzení 58. Je-li $\{\varphi_\gamma\}$ net v M konvergující (ve w^*-topologii) k $\varphi \in M$, pak pro každé $(x, \lambda) \in A_{\mathrm{e}}$ platí, že $\widetilde{\varphi_\gamma}((x, \lambda)) = \varphi_\gamma(x) + \lambda \to \varphi(x) + \lambda = \widetilde{\varphi}((x, \lambda))$. Zobrazení Φ je tedy spojité. Protože M je kompaktní, je Φ homeomorfismus.

□

Následující příklad ukazuje, že $\Delta(A)$ může být kompaktní i v případě, že A nemá jednotku.

PŘÍKLAD 68. Na $A = (\mathbb{K}^2, \|\cdot\|_1)$ definujme násobení vzorcem $(a, b)(c, d) = \big((a + b)(c + d), 0\big)$ pro $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Pak A je komutativní Banachova algebra bez jednotky a $\Delta(A) = \{(1, 1)\}$ (a tedy $\Delta(A)$ je kompaktní).

Vskutku, komutativita je zjevná. Dále pro každé $a, b, c, d, e, f, \lambda \in \mathbb{K}$ platí, že

$$\begin{aligned}\big((a, b)(c, d)\big)(e, f) &= \big((a + b)(c + d), 0\big)(e, f) = \big((a + b)(c + d)(e + f), 0\big) = \\ &= (a, b)\big((c + d)(e + f), 0\big) = (a, b)\big((c, d)(e, f)\big);\\ (a, b)\big((c, d) + (e, f)\big) &= (a, b)(c + e, d + f) = \big((a + b)(c + d + e + f), 0\big) = \\ &= \big((a + b)(c + d), 0\big) + \big((a + b)(e + f), 0\big) = (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f);\\ \lambda\big((a, b)(c, d)\big) &= \lambda\big((a + b)(c + d), 0\big) = \big(\lambda(a + b)(c + d), 0\big) = (\lambda a, \lambda b)(c, d) = \big(\lambda(a, b)\big)(c, d);\end{aligned}$$

zbytek vlastností násobení plyne z komutativity. Konečně, $\|(a, b)(c, d)\|_1 = |a + b||c + d| \leq (|a| + |b|)(|c| + |d|) = \|(a, b)\|_1\|(c, d)\|_1$. Tedy A je komutativní Banachova algebra. Dále A nemá jednotku, neboť pro libovolný $(a, b) \in A$ je $(0, 1)(a, b) = (a + b, 0) \neq (0, 1)$.

Označme e_1, e_2 kanonické bázové vektory v A. Pak $e_1^2 = e_2^2 = e_1e_2 = e_1$. Je-li tedy $\varphi \in \Delta(A)$, pak $\varphi(e_1)^2 = \varphi(e_1^2) = \varphi(e_1)$ a $\varphi(e_2)^2 = \varphi(e_2^2) = \varphi(e_1)$. Protože $\varphi \neq 0$, plyne odtud, že $\varphi(e_1) = 1$. Konečně, z rovnosti $\varphi(e_1)\varphi(e_2) = \varphi(e_1e_2) = \varphi(e_1)$ dostáváme, že i $\varphi(e_2) = 1$, neboli $\varphi = (1, 1) \in (\mathbb{K}^2)^*$.

Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak definujeme algebraicky duální zobrazení $T^{\#}\colon Y^{\#} \to X^{\#}$ předpisem $T^{\#}f(x) = f(Tx)$ pro $f \in Y^{\#}$ a $x \in X$. Snadno nahlédneme, že $T^{\#}$ opravdu zobrazuje do $X^{\#}$ a že je to lineární zobrazení. Důkaz následujícího lemmatu je *mutatis mutandis* stejný jako důkaz Věty 4.6(b) pro spojitý případ.

LEMMA 69. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární bijekce. Pak $T^{\#}$ je bijekce a $(T^{\#})^{-1} = (T^{-1})^{\#}$.*

TVRZENÍ 70. *Nechť A, B jsou Banachovy algebry a $\Phi\colon A \to B$ je algebraický izomorfismus. Pak zobrazení $\Psi = \Phi^{\#}\restriction_{\Delta(B)}$ je homeomorfismus $\Delta(B)$ na $\Delta(A)$.*

DŮKAZ. Pro každé $\varphi \in \Delta(B)$ je $\Phi^{\#}(\varphi)$ složením homomorfismů, a tedy je to multiplikativní lineární funkcionál. Dle Lemmatu 69 je $\Phi^{\#}$ bijekce, a tedy Ψ zobrazuje do $\Delta(A)$. Je-li $\{\varphi_\gamma\}$ net v $\Delta(B)$ konvergující k $\varphi \in \Delta(B)$ ve w^*-topologii, pak pro každé $x \in A$ je $\Psi(\varphi_\gamma)(x) = \varphi_\gamma(\Phi x) \to \varphi(\Phi x) = \Psi(\varphi)(x)$, a tedy $\Psi(\varphi_\gamma) \to \Psi(\varphi)$ ve w^*-topologii. Aplikujeme-li nyní předešlé úvahy na $(\Phi^{\#})^{-1} = (\Phi^{-1})^{\#}$, dostaneme, že $(\Phi^{\#})^{-1}$ zobrazuje spojitě $\Delta(A)$ do $\Delta(B)$, a tedy $\Psi^{-1} = (\Phi^{\#})^{-1}\restriction_{\Delta(A)}$.

□

PŘÍKLAD 71. Nechť L je lokálně kompaktní Hausdorffův topologický prostor a $A = C_0(L)$. Definujme $\delta\colon L \to \Delta(A)$ předpisem $\delta(x) = \delta_x$. Pak δ je homeomorfismus.

Předpokládejme nejprve, že L je kompaktní. Zobrazení δ je prosté, neboť L je $\mathrm{T}_{3\frac{1}{2}}$, a tedy $C(L)$ odděluje body L. Ukažme, že je na. Předpokládejme, že existuje $\varphi \in \Delta(A)$ takový, že $\varphi \neq \delta_x$ pro každé $x \in L$. Pak pro každé $x \in L$ existuje $g_x \in C(L)$ takové, že $\varphi(g_x) \neq \delta_x(g_x)$. Položme $f_x = g_x - \varphi(g_x)$. Pak $\varphi(f_x) = \varphi(g_x) - \varphi(g_x)\varphi(1) = 0$ a $f_x(x) = \delta_x(f_x) = \delta_x(g_x) - \varphi(g_x)\delta_x(1) \neq 0$. Existuje tedy U_x otevřené okolí x takové, že $f_x \neq 0$ na U_x. Díky kompaktnosti L existují $x_1, \dots, x_n \in L$ tak, že $L \subset \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$. Položíme-li nyní $h = \sum_{j=1}^n |f_{x_j}|^2$, pak $h \in C(L)$ a $h > 0$ na L, a tedy $h \in A^\times$. To znamená, že $\varphi(h) \neq 0$. Na druhou stranu ale $\varphi(h) = \sum_{j=1}^n \varphi(f_{x_j})\varphi\big(\overline{f_{x_j}}\big) = 0$, což je spor.

Dále je-li $\{x_\gamma\}$ net v L konvergující k $x \in L$, pak pro každou $f \in C(L)$ platí, že $\delta_{x_\gamma}(f) = f(x_\gamma) \to f(x) = \delta_x(f)$, tj. $\delta(x_\gamma) \to \delta(x)$ ve w^*-topologii. Zobrazení δ je tedy homeomorfismus díky kompaktnosti L.

Nechť nyní L není kompaktní a označme $K = L \cup \{\infty\}$ Alexandrovovu kompaktifikaci L. Snadno nahlédneme, že $C(K) = C_0(L) \oplus \operatorname{span}\{1\}$. Dle Tvrzení 4 je tedy $\Phi\colon A_{\mathrm{e}} \to C(K)$, $\Phi(f,\lambda) = f + \lambda$ algebraický izomorfismus. Nechť dále $\eta\colon K \to \Delta(C(K))$ je homeomorfismus z předchozí části a $\Psi\colon \Delta(A_{\mathrm{e}}) \to \Delta(A) \cup \{0\}$, $\Psi(\psi) = \psi\restriction_A$ je homeomorfismus z Věty 67. Definujme $\delta = \Psi \circ \Phi^{\#} \circ \eta$. Pak dle Tvrzení 70 je δ homeomorfismus K na $\Delta(A) \cup \{0\}$. Protože pro každé $x \in K$ a $f \in A$ je $\Phi^{\#}(\delta_x)(f,0) = \delta_x(\Phi(f,0)) = \delta_x(f)$, plyne odtud, že $\Phi^{\#}(\delta_x)\restriction_A = \delta_x\restriction_A$, a tedy $\delta(x) = \Psi(\Phi^{\#}(\delta_x)) = \delta_x\restriction_A$. Speciálně, $\delta(\infty) = 0$, což znamená, že $\delta\restriction_L$ je homeomorfismus L na $\Delta(A)$.

TVRZENÍ 72. *Nechť S, T jsou topologické prostory a $h\colon S \to T$ je spojité a na. Pak $\Phi\colon C_{\mathrm{b}}(T) \to C_{\mathrm{b}}(S)$, $\Phi(f) = f \circ h$ je izometrický izomorfismus Banachovy algebry $C_{\mathrm{b}}(T)$ do Banachovy algebry $C_{\mathrm{b}}(S)$. Jsou-li S a T lokálně kompaktní Hausdorffovy prostory a h je homeomorfismus, pak $\Phi\restriction_{C_0(T)}$ je izometrický izomorfismus Banachových algeber $C_0(T)$ a $C_0(S)$.*

DŮKAZ. Pro $f \in C_{\mathrm{b}}(T)$ je $f \circ h$ spojitá a omezená, a tedy $f \circ h \in C_{\mathrm{b}}(S)$. Snadno nahlédneme, že Φ je algebrový homomorfismus. Dále $\|\Phi(f)\| = \sup_S |f \circ h| = \sup_T |f| = \|f\|$ pro každé $f \in C_{\mathrm{b}}(T)$.

Nechť nyní S a T jsou lokálně kompaktní a h je homeomorfismus. Je-li $f \in C_0(T)$ a $\varepsilon > 0$, pak $\{x \in S;\ |f \circ h(x)| \geq \varepsilon\} = h^{-1}(\{y \in T;\ |f(y)| \geq \varepsilon\})$ je kompaktní. Tedy $f \circ h \in C_0(S)$. Konečně, $\Phi\restriction_{C_0(T)}$ je na, neboť pro každé $g \in C_0(S)$ je (stejně jako výše) $g \circ h^{-1} \in C_0(T)$ a $\Phi(g \circ h^{-1}) = g$.

□

VĚTA 73. *Nechť K, L jsou lokálně kompaktní Hausdorffovy topologické prostory. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Banachovy algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou izometricky izomorfní.
(ii) Algebry $C_0(K)$ a $C_0(L)$ jsou algebraicky izomorfní.

(iii) Prostory K a L jsou homeomorfní.

DŮKAZ. (i)$\Rightarrow$(ii) je triviální, (ii)$\Rightarrow$(iii) plyne z Tvrzení 70 a Příkladu 71, (iii)$\Rightarrow$(i) plyne z Tvrzení 72.

□

PŘÍKLAD 74. Uvažujme komplexní algebru $L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$ z Příkladu 11. Pak $\Delta(L_1(\mathbb{R})) = \{x \mapsto e^{-itx};\ t \in \mathbb{R}\} \subset L_\infty(\mathbb{R})$ a zobrazení $t \mapsto e^{-itx}$ je homeomorfismem $\mathbb{R}$ na $\Delta(L_1(\mathbb{R}))$. Důkaz lze nalézt v kapitole 12 (Příklad 12.26(c) a Věta 12.16).

DEFINICE 75. Komutativní algebra A se nazývá polojednoduchá, pokud $\Delta(A)$ odděluje body A, tj. pokud $\bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi;\ \varphi \in \Delta(A)\} = \{0\}$.

Následující věta je zobecněním Důsledku 60.

VĚTA 76. *Nechť A, B jsou Banachovy algebry. Pokud $\Delta(B)$ odděluje body B (speciálně pokud B je komutativní a polojednoduchá), pak každý homomorfismus z A do B je automaticky spojitý.*

DŮKAZ. Nechť $\Phi\colon A \to B$ je homomorfismus. Použijeme větu o uzavřeném grafu (Věta 3.11). Ověřme tedy, že Φ má uzavřený graf. Nechť posloupnost $\{x_n\} \subset A$ konverguje k $x \in A$ a $\Phi(x_n) \to y$ pro nějaké $y \in B$. Vezměme libovolné $\varphi \in \Delta(B)$. Pak $\varphi \circ \Phi \in \Delta(A) \cup \{0\} \subset A^*$, a tedy

$$\varphi(y) = \varphi\big(\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\Phi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \varphi \circ \Phi(x_n) = \varphi \circ \Phi(x) = \varphi(\Phi(x)).$$

Tedy $\varphi(y) = \varphi(\Phi(x))$ pro každé $\varphi \in \Delta(B)$. Jelikož $\Delta(B)$ odděluje body B, plyne odtud, že, $y = \Phi(x)$.

□

DŮSLEDEK 77. *Nechť A je algebra taková, že $\Delta(A)$ odděluje body A (např. pokud A je komutativní a polojednoduchá). Pak všechny normy na A, ve kterých je A Banachova algebra, jsou ekvivalentní.*

DŮKAZ. Nechť $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na A, se kterými je A Banachova algebra. Pak jsou $Id\colon (A, \|\cdot\|_1) \to (A, \|\cdot\|_2)$ a $Id\colon (A, \|\cdot\|_2) \to (A, \|\cdot\|_1)$ spojité dle Věty 76. Můžeme tedy aplikovat Větu 1.13.

□

5. Gelfandova transformace

DEFINICE 78. Nechť A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$. Pro $x \in A$ definujeme $\widehat{x}\colon \Delta(A) \to \mathbb{K}$ předpisem $\widehat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, tj. $\widehat{x} = \varepsilon_x \restriction_{\Delta(A)}$. Funkci $\widehat{x}$ říkáme Gelfandova transformace prvku x.

Pro $x \in A$ je $\widehat{x}$ spojitá funkce, což je snadno vidět z definice topologie w^*. Není-li $\Delta(A)$ kompaktní, pak z Věty 67 dostáváme, že $\Delta(A) \cup \{0\}$ je Alexandrovova kompaktifikace $\Delta(A)$. Protože $\widehat{x}(0) = 0$, plyne odtud, že $\widehat{x} \in C_0(\Delta(A))$. Tvrzení 59 pak dává, že $\operatorname{Rng}\widehat{x} \subset \sigma(x)$.

VĚTA 79. *Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Má-li A jednotku, pak $\operatorname{Rng}\widehat{x} = \sigma(x)$. Nemá-li A jednotku, pak $\sigma(x) \setminus \{0\} \subset \operatorname{Rng}\widehat{x} \subset \sigma(x)$.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že A má jednotku. Pokud $\lambda \in \sigma(x)$, pak $\lambda e - x$ není invertibilní, a tedy dle Lemmatu 64 je $(\lambda e - x)A$ vlastní ideál. Dle Důsledku 66 tedy existuje $\varphi \in \Delta(A)$ takový, že $\varphi = 0$ na $(\lambda e - x)A$. To znamená, že $0 = \varphi(\lambda e - x) = \lambda - \varphi(x)$, neboli $\varphi(x) = \lambda$. Odtud plyne, že $\operatorname{Rng}\widehat{x} = \sigma(x)$.

Nechť nyní A nemá jednotku. Označme $\widehat{(x,0)}$ Gelfandovu transformaci prvku $x = (x,0) \in A_e$. Dle předchozího kroku je $\widehat{(x,0)}(\Delta(A_e)) = \sigma_{A_e}(x) = \sigma_A(x)$. Jelikož $\Delta(A_e) = \{\widetilde{\varphi};\ \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\}$, kde $\widetilde{\varphi}$ je rozšíření z Tvrzení 58, dostáváme, že $\widehat{(x,0)}(\Delta(A_e)) = \{\psi(x);\ \psi \in \Delta(A_e)\} = \big\{\widetilde{\varphi}(x);\ \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\big\} = \big\{\varphi(x);\ \varphi \in \Delta(A) \cup \{0\}\big\} = \widehat{x}(\Delta(A)) \cup \{0\}$. Odtud již plynou uvedené inkluze.

□

DŮSLEDEK 80. *Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra a $x \in A$. Pak $\|\widehat{x}\| = r(x)$.*

DŮKAZ. Dle Věty 79 platí, že

$$\|\widehat{x}\| = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \operatorname{Rng}\widehat{x}\} = \sup\big\{|\lambda|;\ \lambda \in \{0\} \cup \operatorname{Rng}\widehat{x}\big\} = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(x)\} = r(x).$$

□

DEFINICE 81. Nechť A je Banachova algebra. Zobrazení $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$, $\Gamma(x) = \widehat{x}$ nazýváme Gelfandovou transformací algebry A.

TVRZENÍ 82. *Nechť A je Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Γ je homomorfismus.
(b) Podalgebra $\Gamma(A) \subset C_0(\Delta(A))$ odděluje body $\Delta(A)$.
(c) Γ je prostá, právě když $\Delta(A)$ odděluje body A. V komutativním případě je to právě tehdy, pokud A je polojednoduchá.

DŮKAZ. (a) Linearita Γ plyne z linearity zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x$. Dále pro $x, y \in A$ a každé $\varphi \in \Delta(A)$ je $\Gamma(xy)(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \Gamma(x)(\varphi)\Gamma(y)(\varphi) = \big(\Gamma(x)\Gamma(y)\big)(\varphi)$.

(b) Pokud $\varphi, \psi \in \Delta(A)$, $\varphi \neq \psi$, pak existuje $x \in A$ takové, že $\varphi(x) \neq \psi(x)$, neboli $\Gamma(x)(\varphi) \neq \Gamma(x)(\psi)$.

(c) Stačí si uvědomit, že $\operatorname{Ker}\Gamma = \bigcap\{\operatorname{Ker}\varphi;\ \varphi \in \Delta(A)\}$.

□

VĚTA 83. *Nechť A je komplexní komutativní Banachova algebra a Γ je její Gelfandova transformace. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Γ je spojitý homomorfismus a $\|\Gamma\| \leq 1$.
(b) Γ je izomorfismus do, právě když existuje $K > 0$ takové, že $\|x^2\| \geq K\|x\|^2$ pro každé $x \in A$.
(c) Γ je izometrie do právě tehdy, když $\|x^2\| = \|x\|^2$ pro každé $x \in A$.

Poznamenejme, že pokud nastane (b) v předchozí větě, pak se Gelfandova transformace nazývá Gelfandovou reprezentací. V tom případě totiž můžeme algebru A reprezentovat jako jistou uzavřenou podalgebru komutativní algebry spojitých funkcí na kompaktu.

DŮKAZ. (a) plyne z Důsledku 80.

(b), (c) $\Rightarrow$ Nechť $C > 0$ je takové, že $\|\widehat{x}\| \geq C\|x\|$ pro každé $x \in A$; v případě (c) můžeme vzít a vezměmě $C = 1$. Pak pro každé $x \in A$ dle (a) a Tvrzení 82(a) platí, že $\|x^2\| \geq \big\|\widehat{x^2}\big\| = \|\widehat{x}^2\| = \|\widehat{x}\|^2 \geq C^2\|x\|^2$ (pro klíčovou druhou rovnost viz též poznámku v Příkladu 9(a)). V případě (b) tedy vezmeme $K = C^2$, v případě (c) pak obdržíme $\|x^2\| = \|x\|^2$, neboť opačná nerovnost platí automaticky.

(b), (c) $\Leftarrow$ V případě (c) položme $K = 1$. Nechť $x \in A$. Indukcí obdržíme nerovnost $\|x^{2^n}\| \geq K^{2^n-1}\|x\|^{2^n}$, neboli $\sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} \geq K^{1-2^{-n}}\|x\|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Díky Důsledku 80 a Větě 46(c) tak dostáváme, že $\|\widehat{x}\| = r(x) \geq K\|x\|$.

□

Gelfandova transformace má zaručeny rozumné vlastnosti pouze v komutativním případě. Pro některé lokální výsledky v nekomutativních algebrách lze ovšem využít Gelfandovu transformaci pro vhodně zvolenou komutativní podalgebru. K tomu nám pomůže následující pojem.

DEFINICE 84. Nechť A je pologrupa a $M \subset A$. Pak množina $M^{\mathrm{c}} = \{a \in A;\ ax = xa \text{ pro každé } x \in M\}$ tj. množina všech prvků A komutujících s každým prvkem M, se nazývá komutant množiny M.

Řekneme, že podmnožina pologrupy komutuje, pokud všechny její prvky spolu vzájemně komutují.

TVRZENÍ 85. *Nechť A je pologrupa a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $M \subset (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$.
(b) Množina $M^{\mathrm{c}} \cap (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$ komutuje.
(c) Pokud komutuje M, pak komutuje též $(M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}$.

DŮKAZ. (a) Nechť $x \in M$. Pro každé $a \in M^c$ platí, že $ax = xa$, a tedy $x \in (M^c)^c$.

(b) Pokud $x, y \in M^c \cap (M^c)^c$, pak $x \in M^c$ a $y \in (M^c)^c$, což znamená, že $yx = xy$.

(c) Pokud M komutuje, pak $M \subset M^c$, odkud plyne, že $M^c \supset (M^c)^c$. Proto $(M^c)^c = M^c \cap (M^c)^c$ komutuje dle (b).

□

TVRZENÍ 86. *Nechť A je algebra a $M \subset A$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) M^c je podalgebra A.
(b) Má-li A jednotku, pak $e \in M^c$.
(c) Je-li A normovaná, pak M^c je uzavřená.

DŮKAZ. (a) Zjevně $0 \in M^c$, a tedy M^c je neprázdná. Nechť $a, b \in M^c$ a $\lambda \in \mathbb{K}$. Pro každé $x \in M$ platí, že $(a + b)x = ax + bx = xa + xb = x(a + b)$, a tedy $a + b \in M^c$. Podobně, $(\lambda a)x = \lambda(ax) = \lambda(xa) = x(\lambda a)$ a $(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$, a tedy M^c je podalgebra.

(b) Pro každé $x \in M$ je $ex = x = xe$, a tedy $e \in M^c$.

(c) Nechť $\{a_n\} \subset M^c$ je posloupnost s limitou $a \in A$. Pro libovolné $x \in M$ díky spojitosti násobení platí, že $ax = \lim_{n\to\infty} a_n x = \lim_{n\to\infty} x a_n = xa$. Tedy M^c je uzavřená množina.

□

TVRZENÍ 87. *Nechť A je algebra s jednotkou e a nechť $M \subset A$ komutuje. Pak $B = (M^c)^c$ je komutativní algebra s jednotkou e, $M \subset B$ a $B^\times = A^\times \cap B$. Tedy pro každé $x \in B$ platí, že $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

DŮKAZ. Dle Tvrzení 85(a), (c) a 86(a), (b) je B komutativní algebra s jednotkou e a $M \subset B$. Nechť $x \in A^\times \cap B$. Pak platí $xa = ax$ pro každé $a \in M^c$. Vynásobíme-li tuto rovnost zleva i zprava prvkem x^{-1}, obdržíme, že $ax^{-1} = x^{-1}a$ pro každé $a \in M^c$, což znamená, že $x^{-1} \in B$. Proto je $x \in B^\times$. Opačná inkluze je obsažena ve Faktu 17.

□

VĚTA 88. *Nechť A je komplexní Banachova algebra a $x, y \in A$ spolu komutují. Pak platí následující:*

(a) $\sigma(x + y) \subset \sigma(x) + \sigma(y)$ a $\sigma(xy) \subset \sigma(x)\sigma(y)$.
(b) $r(x + y) \le r(x) + r(y)$ a $r(xy) \le r(x)r(y)$.

DŮKAZ. (a) Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku. Položme $B = (\{x, y\}^c)^c$. Dle Tvrzení 85(c) a 86 je B komplexní komutativní Banachova algebra s jednotkou. Uvažujme Gelfandovu transformaci na B. Pak dle Tvrzení 87, Věty79 a Tvrzení 82(a) je

$$\sigma_A(x+y) = \sigma_B(x+y) = \operatorname{Rng}\widehat{x+y} = \operatorname{Rng}(\widehat{x}+\widehat{y}) \subset \operatorname{Rng}\widehat{x}+\operatorname{Rng}\widehat{y} = \sigma_B(x)+\sigma_B(y) = \sigma_A(x)+\sigma_A(y),$$

$$\sigma_A(xy) = \sigma_B(xy) = \operatorname{Rng}\widehat{xy} = \operatorname{Rng}(\widehat{x}\widehat{y}) \subset (\operatorname{Rng}\widehat{x})(\operatorname{Rng}\widehat{y}) = \sigma_B(x)\sigma_B(y) = \sigma_A(x)\sigma_A(y).$$

(b) ihned plyne z (a).

□

6. B*-algebry

Začněme nejprve motivací, která vede k abstraktnímu pojmu B*-algebry. Nechť H je Hilbertův prostor. Vezmeme-li v potaz identifikaci H^* s H z Věty 1.119, pak s duálním operátorem ke spojitému lineárnímu operátoru $T: H \to H$ lze pracovat opět jako s operátorem na H. Přesnější význam této kryptické poznámky osvětlí následující věta a definice.

VĚTA 89. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí*

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y\rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j : H_j \to H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdruženě lineární izometrie z Věty 1.119.

DŮKAZ. Nechť $y \in H_2$ je dáno. Položme $g(x) = \langle Tx, y\rangle$ pro $x \in H_1$. Pak $g \in H_1^*$, neboť je to složenina T a funkcionálu $f_y \in H_2^*$ z Věty 1.119, a tedy dle Věty 1.119 existuje právě jeden prvek $z \in H_1$ splňující

$$\langle Tx, y\rangle = g(x) = \langle x, z\rangle$$

pro každé $x \in H_1$. Označíme-li $z = T^\star y$, pak jsme právě dokázali existenci a jednoznačnost zobrazení $T^\star$. Jeho linearita a spojitost plyne z formule ve druhé části věty, kterou nyní dokážeme: Pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí, že

$$\langle x, I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2 y\rangle = \big(I_1(I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2 y)\big)(x) = \big(T^*(I_2 y)\big)(x) = (I_2 y)(Tx) = \langle Tx, y\rangle.$$

Z jednoznačnosti tedy plyne, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$.

□

DEFINICE 90. Operátor $T^\star$ z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T.

Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Uvědomme si, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí též

$$\langle T^\star y, x\rangle = \overline{\langle x, T^\star y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle.$$

Připomeňme, že je-li $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ reprezentovaný maticí A, pak dle Příkladu 4.3 je $T^\star$ reprezentovaný maticí $\overline{A}^{\mathrm{T}}$.

POZNÁMKA. Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ sdruženě lineární zobrazení, pak snadno nahlédneme, že i pro T platí Tvrzení 1.44. (Používá se pouze to, že T je aditivní, nezáporně homogenní, a $T(-x) = -T(x)$ pro každé $x \in X$.) Dále definujeme-li pro T normu stejným způsobem, jako pro lineární operátory, pak pro ni bude platit Lemma 1.45 a Fakt 1.47.

VĚTA 91. *Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.*
(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{\star\star} = (T^\star)^\star = T$.
(b) Zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.
(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Pak $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$. Dále $(Id_{H_1})^\star = Id_{H_1}$.
(d) Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak $\|T^\star \circ T\| = \|T \circ T^\star\| = \|T\|^2$.

DŮKAZ. (a) Pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí, že $\langle T^{\star\star}x, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y\rangle_{H_1} = \langle Tx, y\rangle_{H_2}$. Díky Lemmatu 1.93 tedy $T^{\star\star} = T$.

(b) Nechť $S, T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a α je skalár. Pak pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí, že

$$\begin{aligned}\langle x, (S+T)^\star y\rangle &= \langle (S+T)x, y\rangle = \langle Sx + Tx, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle = \langle x, S^\star y\rangle + \langle x, T^\star y\rangle = \\ &= \langle x, S^\star y + T^\star y\rangle = \langle x, (S^\star + T^\star)y\rangle\end{aligned}$$

a

$$\langle x, (\alpha T)^\star y\rangle = \langle (\alpha T)x, y\rangle = \langle \alpha(Tx), y\rangle = \alpha\langle Tx, y\rangle = \alpha\langle x, T^\star y\rangle = \langle x, \overline{\alpha}(T^\star y)\rangle = \langle x, (\overline{\alpha}T^\star)y\rangle.$$

Díky Lemmatu 1.93 tedy $(S+T)^\star = S^\star + T^\star$ a $(\alpha T)^\star = \overline{\alpha}T^\star$, takže zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární. To, že je izometrické, plyne z Vět 89 a 4.2 pomocí odhadu $\|T^\star\| \le \|I_1^{-1}\|\|T^*\|\|I_2\| = \|T\| = \|T^*\| = \|I_1 \circ T^\star \circ I_2^{-1}\| \le \|I_1\|\|T^\star\|\|I_2^{-1}\| = \|T^\star\|$. Konečně, zobrazení $T \mapsto T^\star$ je na: Pro dané $S \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ položíme $T = S^\star \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak $T^\star = S^{\star\star} = S$ podle (a).

(c) Pro každé $y \in H_3$ a $x \in H_1$ máme $\langle x, (S \circ T)^\star y\rangle_{H_1} = \langle S \circ Tx, y\rangle_{H_3} = \langle S(Tx), y\rangle_{H_3} = \langle Tx, S^\star y\rangle_{H_2} = \langle x, T^\star \circ S^\star y\rangle_{H_1}$, a tedy díky Lemmatu 1.93 je $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$.

Konečně, pro každé $y, x \in H_1$ je $\langle x, (Id_{H_1})^\star y\rangle = \langle Id_{H_1}x, y\rangle = \langle x, y\rangle$, tedy $(Id_{H_1})^\star y = y$.

(d) Dle (b) je $\|T^\star \circ T\| \le \|T^\star\|\|T\| = \|T\|^2$. Na druhou stranu,

$$\|T\|^2 = \sup_{x \in B_{H_1}} \|Tx\|^2 = \sup_{x \in B_{H_1}} |\langle Tx, Tx\rangle| = \sup_{x \in B_{H_1}} |\langle x, T^\star \circ Tx\rangle| \le \sup_{x \in B_{H_1}} \|x\|\|T^\star \circ Tx\| \le \|T^\star \circ T\|.$$

Konečně, dle (b), (c) a (a) je $\|T \circ T^\star\| = \|(T \circ T^\star)^\star\| = \|T^{\star\star} \circ T^\star\| = \|T \circ T^\star\|$.

□

Výše zmíněné vlastnosti hilbertovsky adjungovaných operátorů z $\mathcal{L}(H)$ jsou extrahovány do následující abstraktní definice:

DEFINICE 92. Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$. Zobrazení $^\star\colon A \to A$ se nazývá algebrová involuce, pokud má následující vlastnosti:

- $(x+y)^\star = x^\star + y^\star$ pro každé $x, y \in A$,
- $(\lambda x)^\star = \overline{\lambda} x^\star$ pro každé $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $(xy)^\star = y^\star x^\star$ pro každé $x, y \in A$,
- $(x^\star)^\star = x$ pro každé $x \in A$ (tj. zobrazení * je involuce).

Algebře, na které je definována algebrová involuce, budeme říkat algebra s involucí.

Všimněme si, že $0^\star = (0-0)^\star = 0^\star - 0^\star = 0$.

Existence algebrové involuce vynucuje na algebře jistou symetrii. Jednoduchým příkladem algebry s involucí jsou komplexní čísla, kde involuce je komplexní sdružení. Věta 91 pak říká, že $\mathcal{L}(H)$, kde H je Hilbertův prostor, je algebra s involucí danou adjungovaným zobrazením $T \mapsto T^\star$.

FAKT 93. *Nechť A je algebra s involucí. Pak $(a,\alpha)^\star = (a^\star, \overline{\alpha})$ pro $(a,\alpha) \in A_\mathrm{e}$ je involuce na A_e rozšiřující involuci z A.*

DŮKAZ. Stačí rozepsat definice:

$$\begin{aligned}
\big((a,\alpha)+(b,\beta)\big)^\star &= (a+b,\alpha+\beta)^\star = \big((a+b)^\star, \overline{\alpha+\beta}\big) = (a^\star + b^\star, \overline{\alpha}+\overline{\beta}) = (a^\star,\overline{\alpha}) + (b^\star,\overline{\beta}) = \\
&= (a,\alpha)^\star + (b,\beta)^\star, \\
\big(\lambda(a,\alpha)\big)^\star &= (\lambda a, \lambda\alpha)^\star = \big((\lambda a)^\star, \overline{\lambda\alpha}\big) = (\overline{\lambda} a^\star, \overline{\lambda}\overline{\alpha}) = \overline{\lambda}(a^\star,\overline{\alpha}) = \overline{\lambda}(a,\alpha)^\star, \\
\big((a,\alpha)(b,\beta)\big)^\star &= \big((ab+\alpha b+\beta a, \alpha\beta)\big)^\star = \big((ab+\alpha b+\beta a)^\star, \overline{\alpha\beta}\big) = (b^\star a^\star + \overline{\alpha} b^\star + \overline{\beta} a^\star, \overline{\alpha}\overline{\beta}) = \\
&= (b^\star, \overline{\beta})(a^\star,\overline{\alpha}) = (b,\beta)^\star (a,\alpha)^\star, \\
\big((a,\alpha)^\star\big)^\star &= \big((a^\star,\overline{\alpha})\big)^\star = (a,\alpha).
\end{aligned}$$

□

TVRZENÍ 94. *Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li e levá nebo pravá jednotka v A, pak e je jednotka a $e^\star = e$.
(b) Nechť A má jednotku. Pak $x \in A^\times$ právě tehdy, když $x^\star \in A^\times$. V tomto případě pak $(x^\star)^{-1} = (x^{-1})^\star$.
(c) $\lambda \in \sigma(x)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma(x^\star)$.

DŮKAZ. (a) Je-li $e \in A$ levá jednotka, pak pro každé $x \in A$ je $xe^\star = (ex^\star)^\star = (x^\star)^\star = x$, a tedy $e^\star$ je pravá jednotka. To znamená, že $e^\star = e$ je oboustranná jednotka. Pro pravou jednotku je argument analogický.

(b) Je-li $x \in A^\times$, pak dle (a) je $(x^{-1})^\star x^\star = (xx^{-1})^\star = e^\star = e$ a $x^\star(x^{-1})^\star = (x^{-1}x)^\star = e^\star = e$. Tedy $x^\star \in A^\times$ a $(x^\star)^{-1} = (x^{-1})^\star$. Pokud $x^\star \in A^\times$, pak dle předchozího je $x = (x^\star)^\star \in A^\times$.

(c) Díky Faktu 93 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku. Tvrzení pak plyne z (a) a (b), neboť $\lambda \in \rho(x) \Leftrightarrow \lambda e - x \in A^\times \Leftrightarrow \overline{\lambda} e - x^\star = (\lambda e - x)^\star \in A^\times \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \rho(x^\star)$.

□

TVRZENÍ 95. *Nechť A je Banachova algebra. Pokud $\Delta(A)$ odděluje body A (speciálně pokud A je komutativní a polojednoduchá), pak každá involuce na A je spojitá.*

DŮKAZ. Ukážeme, že involuce * na A má uzavřený graf. Nechť $x_n \to x$ a $x_n^\star \to y$, kde $x_n, x, y \in A$. Vezměme libovolný prvek $\varphi \in \Delta(A)$ a položme $\psi(x) = \overline{\varphi(x^\star)}$ pro $x \in A$. Pak $\psi \in \Delta(A)$, takže

$$\varphi(x^\star) = \overline{\psi(x)} = \overline{\lim_{n\to\infty} \psi(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \overline{\psi(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n^\star) = \varphi(y).$$

Jelikož $\Delta(A)$ odděluje body A, plyne odtud, že $x^\star = y$.

Použijeme-li nyní větu o uzavřeném grafu (Věta 3.11) na zobrazení $T\colon A_\mathbb{R} \to A_\mathbb{R}$, $T(x) = x^\star$, které je lineární, dostaneme, že T, a tedy i *, je spojité.

□

Silnější strukturu pochopitelně dostaneme, pokud bude v normované algebře involuce svázána s normou (podobně jako je svázáno s normou násobení). Pokud nám jako model slouží algebra $\mathcal{L}(H)$, pak můžeme využít vlastnost (d) z Věty 91, která imituje vlastnost komplexně sdružených čísel v algebře $\mathbb{C}$: $|\overline{\alpha}\alpha| = |\alpha|^2$.

DEFINICE 96. Banachova algebra A s involucí se nazývá B*-algebra[7], pokud pro každé $x \in A$ je

$$\|x^\star x\| = \|x\|^2.$$

Všimněme si, že v netriviální B*-algebře s jednotkou je $\|e\| = 1$, neboť dle Tvrzení 94(a) je $\|e\| = \|e^\star e\| = \|e\|^2$.

PŘÍKLADY 97. (a) Komplexní čísla s involucí $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ jsou komutativní B*-algebra.

(b) $\mathcal{L}(H)$, kde H je hilbertův prostor, s involucí $T \mapsto T^\star$ je B*-algebra (Věta 91). Její uzavřená podalgebra $\mathcal{K}(H)$ (Věta 4.12) je uzavřená na involuci (to si lze snadno rozmyslet pomocí Vět 89 a 4.13, podobně jako v důkazu Věty 4.12(d)), a tedy je to též B*-algebra.

(c) Je-li Γ neprázdná množina, pak algebra $\ell_\infty(\Gamma)$ s bodovým násobením a s involucí $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mapsto (\overline{x_\gamma})_{\gamma\in\Gamma}$ je komutativní B*-algebra.

(d) Je-li L lokálně kompaktní topologický prostor, je $C_0(L)$ s involucí $f^\star(x) = \overline{f(x)}$, $x \in K$ komutativní B*-algebra.

(e) Na Banachově algebře $H^\infty(U)$, kde U je jednotkový kruh v $\mathbb{C}$, definujme $f^\star(z) = \overline{f(\overline{z})}$ pro $f \in H^\infty(U)$ a $z \in U$. Pomocí Cauchyových-Riemannových podmínek ověříme, že $f^\star \in H^\infty(U)$: Podle definice je $f_1^\star(x,y) = f_1(x,-y)$ a $f_2^\star(x,y) = -f_2(x,-y)$. Tedy $\frac{\partial f_1^\star}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,-y) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial f_2^\star}{\partial y}(x,y)$ a $\frac{\partial f_1^\star}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,-y) = -\frac{\partial f_2^\star}{\partial x}(x,y)$. Dále snadno vidíme, že $\star$ je algebrová involuce, která navíc splňuje $\|f^\star\| = \|f\|$ (viz Lemma 98). Tato algebra s involucí nicméně není B*-algebra.

Vskutku, nechť $f(z) = \exp(iz)$. Pak pro $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, je

$$|f(z)| = |\exp(iz)| = |\exp(ix - y)| = |\exp(ix)||\exp(-y)| = \exp(-y) \quad \text{a}$$
$$|f^\star(z)| = \left|\overline{\exp(i\overline{z})}\right| = |\exp(ix + y)| = |\exp(ix)||\exp y| = \exp y,$$

takže $|f(z)f^\star(z)| = |f(z)||f^\star(z)| = 1$ pro $z \in U$. Na druhou stranu, $|f(-i)| = \exp 1$. Tedy $\|f^\star f\| = 1 < \exp 2 \le \|f\|^2$.

(f) Položme $A = \mathbb{K}^3$ s bodovým násobením a definujme normu na A předpisem $\|x\| = \max\{|x_{-1}|, |x_0|\} + |x_1|$ pro $x = (x_{-1}, x_0, x_1) \in A$. Bez problémů lze ověřit, že A je Banachova algebra. Definujme dále na A operaci $\star$ předpisem $x_n^\star = \overline{x_{-n}}$. Opět snadno nahlédneme, že $\star$ je algebrová involuce. Nicméně neplatí, že $\|x^\star\| = \|x\|$, neboť $\|(0,1,1)\| = 2$ a $\|(0,1,1)^\star\| = \|(1,1,0)\| = 1$.

LEMMA 98. *Nechť A je normovaná algebra s involucí. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\|x^\star x\| \ge \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.
(ii) $\|xx^\star\| \ge \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.
(iii) $\|x^\star x\| = \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.
(iv) $\|xx^\star\| = \|x\|^2$ *pro každé* $x \in A$.

Ve všech případech je pak $\|x^\star\| = \|x\|$ *pro každé* $x \in A$.

DŮKAZ. Ukážeme nejprve, že kterékoli tvrzení implikuje rovnost $\|x^\star\| = \|x\|$. Nechť $x \in A$. Z (i) nebo (iii), resp. (ii) nebo (iv), dostáváme, že $\|x\|^2 \le \|x^\star x\| \le \|x^\star\|\|x\|$, resp. $\|x\|^2 \le \|xx^\star\| \le \|x^\star\|\|x\|$. Odtud plyne, že ve všech případech je $\|x\| \le \|x^\star\|$. Aplikujeme-li nyní stejný odhad na $x^\star$, obdržíme, že $\|x^\star\| \le \|(x^\star)^\star\| = \|x\|$, a tedy $\|x^\star\| = \|x\|$.

[7]Někteří autoři používají též termín C*-algebra. Historie těchto pojmů je následující: Objekt B*-algebry definovali I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943), název B*-algebra pro něj zavedl Charles Earl Rickart (1946). Ve svojí přelomové práci Gelfand a Najmark dokázali reprezentační větu (viz Větu 113) v následující formě: Je-li B*-algebra taková, že pro každý její prvek x je $e + x^\star x$ invertibilní, pak ji lze reprezentovat jako uzavřenou *-podalgebru $\mathcal{L}(H)$, kde H je Hilberův prostor. Ve stejné práci uvedli domněnku, že podmínka invertibility $e + x^\star x$ je nadbytečná. Irving Ezra Segal (1947) zavedl pro uzavřené *-podalgebry $\mathcal{L}(H)$ název C*-algebra. Že je podmínka Gelfanda a Najmarka vskutku nadbytečná dokázal Irving Kaplansky (1953) (Věta 128). To znamená, že každou B*-algebru lze reprezentovat jako C*-algebru.

S využitím tohoto faktu nyní snadno dokážeme ekvivalenci všech tvrzení:
(i)$\Rightarrow$(iii) Pro $x \in A$ je $\|x^\star x\| \le \|x^\star\|\|x\| = \|x\|^2$.
(iii)$\Rightarrow$(iv) Pro $x \in A$ je $\|xx^\star\| = \|(x^\star)^\star x^\star\| = \|x^\star\|^2 = \|x\|^2$.
(iv)$\Rightarrow$(ii) je triviální.
(ii)$\Rightarrow$(i) Pro $x \in A$ je $\|x^\star x\| = \|x^\star (x^\star)^\star\| \ge \|x^\star\|^2 = \|x\|^2$.

□

Důsledkem předchozího lemmatu je fakt, že pokud A je B*-algebra, pak její involuce * je sdruženě lineární izometrie A na A, neboť $\|x^\star - y^\star\| = \|(x-y)^\star\| = \|x-y\|$ pro každé $x, y \in A$.

TVRZENÍ 99. *Nechť A je B*-algebra bez jednotky. Pak na A_e s involucí z Faktu 93 existuje norma $|||\cdot|||$ rozšiřující původní normu na A (a ekvivalentní normě z Tvrzení 13) taková, že A_e je B*-algebra.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že A má konečnou kodimenzi v A_e, takže libovolné dvě normy na A_e rozšiřující normu z A jsou ekvivalentní (Věty 2.8 a 1.79).

Nechť $I\colon A \to \mathcal{L}(A)$ je homomorfismus z Věty 15. Pro každé $a \in A$ je pak $\|L_a\| \le \|a\|$ a na druhou stranu $\|a\|^2 = \|aa^\star\| = \|L_a(a^\star)\| \le \|L_a\|\|a^\star\| = \|L_a\|\|a\|$, tedy I je izometrie do. Nechť dále $\widetilde{I}\colon A_e \to \mathcal{L}(A)$ je rozšíření z Faktu 3. Definujeme-li $|||(a,\lambda)||| = \|\widetilde{I}(a,\lambda)\|$ pro $(a,\lambda) \in A_e$, pak $(A_e, |||\cdot|||)$ je normovaná algebra, neboť $\widetilde{I}$ je prostý homomorfismus ($Id \notin I(A)$).

Ukažme, že $(A_e, |||\cdot|||)$ je B*-algebra: Úplnost plyne z ekvivalence $|||\cdot|||$ a $\|\cdot\|_1$ z Tvrzení 13. Nechť $(a,\lambda) \in A_e$. Pak pro každé $x \in A$ je

$$\begin{aligned}\|\widetilde{I}(a,\lambda)x\|^2 &= \|ax+\lambda x\|^2 = \|(ax+\lambda x)^\star(ax+\lambda x)\| = \big\|x^\star\big(a^\star(ax+\lambda x)+\overline{\lambda}(ax+\lambda x)\big)\big\| = \\ &= \big\|x^\star \widetilde{I}(a^\star,\overline{\lambda})\big(\widetilde{I}(a,\lambda)(x)\big)\big\| \le \|x^\star\|\,\|\widetilde{I}(a^\star,\overline{\lambda})\circ\widetilde{I}(a,\lambda)\|\,\|x\| = \big\|\widetilde{I}\big((a^\star,\overline{\lambda})(a,\lambda)\big)\big\|\|x\|^2.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že $|||(a,\lambda)|||^2 = \|\widetilde{I}(a,\lambda)\| \le \big\|\widetilde{I}\big((a^\star,\overline{\lambda})(a,\lambda)\big)\big\| = |||(a,\lambda)^\star(a,\lambda)|||$. Zbytek plyne z Lemmatu 98.

□

DEFINICE 100. Nechť A je algebra s involucí. Prvek $x \in A$ se nazývá samoadjungovaný, pokud $x^\star = x$.

Dle Tvrzení 94(a) je jednotka v algebře s involucí samoadjungovaná. Následující fakt ukazuje, že samoadjungované prvky mají některé podobné vlastnosti jako reálná čísla vnořená do komplexních čísel a involuce má podobné vlastnosti jako komplexní sdružování.

FAKT 101. *Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$. Pak platí následující tvrzení:*
(a) Prvky $x+x^\star$, $x^\star x$, $xx^\star$, a v komplexním případě i prvek $i(x-x^\star)$ jsou samoadjungované.
(b) Je-li x samoadjungovaný, je samoadjungovaný i prvek tx pro $t \in \mathbb{R}$.
(c) Je-li A komplexní, pak existují jednoznačně určené samoadjungované prvky $u, v \in A$ takové, že $x = u+iv$. Pro ně pak platí, že $x^\star = u - iv$.

DŮKAZ. (a) Platí, že $(x+x^\star)^\star = x^\star + (x^\star)^\star = x^\star + x = x + x^\star$, dále $(x^\star x)^\star = x^\star(x^\star)^\star = x^\star x$ a $(xx^\star)^\star = (x^\star)^\star x^\star = xx^\star$. V komplexním případě pak $(i(x-x^\star))^\star = -i(x^\star - x) = i(x-x^\star)$.

(b) Je $(tx)^\star = tx^\star = tx$.

(c) Položíme-li $u = \frac{1}{2}(x+x^\star)$ a $v = \frac{1}{2i}(x-x^\star) = -\frac{i}{2}(x-x^\star)$, dostaneme dle (a) a (b) samoadjungované prvky, pro které $u+iv = \frac{1}{2}(x+x^\star)+\frac{1}{2}(x-x^\star) = x$ a $u-iv = \frac{1}{2}(x+x^\star)-\frac{1}{2}(x-x^\star) = x^\star$. Pokud $a+ib = c+id$, kde $a,b,c,d \in A$ jsou samoadjungované, pak $a-ib = (a+ib)^\star = (c+id)^\star = c-id$. Sečtením těchto rovností dostaneme $a=c$, jejich odečtením $b=c$.

□

DEFINICE 102. Nechť A je algebra s involucí.

- Prvek $x \in A$ se nazývá normální, pokud komutuje s $x^\star$, tj. pokud $x^\star x = xx^\star$.
- Pokud A má jednotku, pak prvek $x \in A$ se nazývá unitární, splňuje-li rovnosti $x^\star x = xx^\star = e$, neboli $x^{-1} = x^\star$.

Všimněme si, že samoadjungované i unitární prvky jsou normální. Je-li algebra komutativní, pak všechny její prvky jsou normální.

VĚTA 103. *Nechť A je $B^\star$-algebra a $x \in A$.*
(a) Je-li x normální, pak $\|x^2\| = \|x\|^2$ a pro A komplexní je $r(x) = \|x\|$.
(b) Je-li A komplexní, pak $r(x^\star x) = r(xx^\star) = \|x\|^2$.
(c) Má-li A jednotku a x je unitární, pak $\|x\| = 1$ a $\sigma(x) \subset \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| = 1\}$.
(d) Je-li x samoadjungovaný, pak $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

DŮKAZ. (a) První část plyne z výpočtu

$$\|x\|^4 = \|x^\star x\|^2 = \|(x^\star x)^\star (x^\star x)\| = \|x^\star x x^\star x\| = \|x^\star x^\star x x\| = \|(xx)^\star (xx)\| = \|x^2\|^2.$$

Nechť nyní A je komplexní. Pak indukcí pomocí první části obdržíme, že $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 46(c) je tedy $r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \|x\|$.

(b) Dle Faktu 101(a) je $x^\star x$ samoadjungovaný, a tedy normální. Díky (a) je tak $r(x^\star x) = \|x^\star x\| = \|x\|^2$. Analogicky pro prvek $xx^\star$.

(c) Jelikož $1 = \|e\| = \|x^\star x\| = \|x\|^2$, dostáváme, že $\|x\| = 1$. Z Lemmatu 98 pak obdržíme, že $\|x\|^{-1} = \|x^\star\| = \|x\| = 1$. Je-li nyní $\lambda \in \sigma(x)$, pak dle Tvrzení 29(d) a Věty 36 je $|\lambda| \le \|x\| = 1$ a $\left|\frac{1}{\lambda}\right| \le \|x^{-1}\| = 1$. Tedy $|\lambda| = 1$.

(d) V reálném případě není co dokazovat, nechť tedy A je komplexní. Díky Tvrzení 99 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku. Nechť $\alpha + i\beta \in \sigma(x)$, kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak dle Tvrzení 29(b) pro každé $t \in \mathbb{R}$ platí, že $\alpha + i\beta + it \in \sigma(x + ite)$, a tedy dle Věty 36 je

$$\begin{aligned}\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |\alpha + i(\beta + t)|^2 \le \|x + ite\|^2 = \|(x + ite)^\star (x + ite)\| = \|(x - ite)(x + ite)\| = \\ = \|x^2 + t^2 e\| \le \|x^2\| + t^2.\end{aligned}$$

Odtud dostáváme, že pro každé $t \in \mathbb{R}$ je $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \le \|x^2\|$, což je možné pouze v případě, že $\beta = 0$.
□

DŮSLEDEK 104. *Nechť A je komplexní algebra s involucí. Pak na A existuje nejvýše jedna norma, se kterou A je $B^\star$-algebra.*

DŮKAZ. Nechť $A_1 = (A, \|\cdot\|_1)$ a $A_2 = (A, \|\cdot\|_2)$ jsou B*-algebry. Pak dle Věty 103(b) pro každé $x \in A$ platí, že $\|x\|_1^2 = r_{A_1}(x^\star x) = r_{A_2}(x^\star x) = \|x\|_2^2$.
□

Podle předchozího důsledku je tedy norma $|||\cdot|||$ z důkazu Tvrzení 99 jedinou možností, aby $(A_e, |||\cdot|||)$ byla B*-algebra.

DEFINICE 105. Nechť A a B jsou algebry s involucí. Pak algebrový homomorfismus $\Phi\colon A \to B$ nazýváme *-homomorfismus, pokud zachovává operaci *, tj. $\Phi(x^\star) = \Phi(x)^\star$ pro každé $x \in A$.

DŮSLEDEK 106. *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra. Pak každý multiplikativní lineární funkcionál na A je *-homomorfismus.*

DŮKAZ. Nechť φ je multiplikativní lineární funkcionál na A. Pro $\varphi = 0$ tvrzení zjevně platí, předpokládejme tedy, že $\varphi \neq 0$. Je-li $y \in A$ samoadjungovaný, pak dle Tvrzení 59 a Věty 103(d) je $\varphi(y) \in \sigma(y) \subset \mathbb{R}$. Je-li nyní $x \in A$, pak dle Faktu 101(c) existují samoadjungované $u, v \in A$ tak, že $x = u + iv$ a $x^\star = u - iv$. Protože $\varphi(u) \in \mathbb{R}$ a $\varphi(v) \in \mathbb{R}$, dostáváme, že $\varphi(x^\star) = \varphi(u - iv) = \varphi(u) - i\varphi(v) = \overline{\varphi(u) + i\varphi(v)} = \overline{\varphi(u + iv)} = \overline{\varphi(x)}$.
□

DŮSLEDEK 107. *Nechť A, B jsou komplexní $B^\star$-algebry a $\Phi\colon A \to B$ je *-homomorfismus. Pak Φ je automaticky spojitý a navíc $\|\Phi\| \le 1$.*

DŮKAZ. Díky Větě 103(b) a Tvrzení 34 pro každé $x \in A$ platí, že $\|\Phi(x)\|^2 = r\big(\Phi(x)^\star \Phi(x)\big) = r(\Phi(x^\star x)) \le r(x^\star x) = \|x\|^2$.
□

DŮSLEDEK 108. *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra a B je její $B^\star$-podalgebra. Pokud A a B mají společnou jednotku, pak $B^\times = A^\times \cap B$. Dále nechť $x \in B$. Pokud B má jednotku, která není jednotkou v A, pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x) \cup \{0\}$, v ostatních případech je $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

DŮKAZ. Nechť $x \in A^\times \cap B$. Pak $x^\star x \in A^\times$ (Tvrzení 94(b)), a tedy $0 \notin \sigma_A(x^\star x)$. Jelikož $\sigma_B(x^\star x) \subset \mathbb{R}$ (Fakt 101(a), Věta 103(d)), množina $\sigma_B(x^\star x)$ má prázdný vnitřek v $\mathbb{C}$, a tedy dle Věty 38(d) platí, že $\sigma_B(x^\star x) = \sigma_A(x^\star x)$. Odtud plyne, že $0 \notin \sigma_B(x^\star x)$, neboli $x^\star x \in B^\times$. Díky tomu je $x^{-1} = x^{-1}(x^\star)^{-1}x^\star = (x^\star x)^{-1}x^\star \in B$, takže $x \in B^\times$. Opačná inkluze je obsažena ve Faktu 17.

Dále nechť $x \in B$. Pokud A a B mají společnou jednotku, pak $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$ dle předchozího. Nemají-li A a B společnou jednotku, pak můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku (označme ji e), neboť jinak je $\sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x)$ a B je podalgebra A_e, která s ní nemá společnou jednotku. Položme $C = B + \operatorname{span}\{e\}$. Pak $\sigma_A(x) = \sigma_C(x) = \sigma_{B_e}(x)$ dle předchozího případu a Tvrzení 32(c). Důkaz nyní dokončíme použitím Tvrzení 32(b).

□

VĚTA 109 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943)). *Nechť A je komplexní komutativní $B^\star$-algebra. Pak Gelfandova transformace je izometrický *-izomorfismus A na $C_0(\Delta(A))$.*

DŮKAZ. Nechť $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$ je Gelfandova transformace. Pak Γ je homomorfismus dle Tvrzení 82. Díky Důsledku 106 je $\Gamma(x^\star)(\varphi) = \varphi(x^\star) = \overline{\varphi(x)} = \overline{\Gamma(x)}(\varphi)$ pro každé $x \in A$ a $\varphi \in \Delta(A)$, tedy Γ je *-homomorfismus. Dále dle Důsledku 80 a Věty 103(b) pro každé $x \in A$ platí, že $\|\Gamma(x)\|^2 = \|\overline{\Gamma(x)}\Gamma(x)\| = \|\Gamma(x^\star x)\| = r(x^\star x) = \|x\|^2$. Tedy Γ je izometrie do a speciálně $\Gamma(A)$ je uzavřená podalgebra $C_0(\Delta(A))$.

Konečně, podle předchozího je $\Gamma(A)$ uzavřená na komplexní sdružování a dále odděluje body $\Delta(A)$ (Tvrzení 82(b)) a pro každé $\varphi \in \Delta(A)$ existuje $x \in A$ tak, že $\Gamma(x)(\varphi) = \varphi(x) \neq 0$. Podle Stoneovy-Weierstraßovy věty[8] pro lokálně kompaktní prostory (Věta 13.90) tedy $\Gamma(A) = \overline{\Gamma(A)} = C_0(\Delta(A))$.

□

DŮSLEDEK 110. *Komplexní komutativní $B^\star$-algebra A má jednotku, právě když $\Delta(A)$ je kompaktní.*

PŘÍKLAD 111. Definujeme-li na algebře A z Příkladu 68 involuci předpisem $(a,b)^\star = (\overline{a},\overline{b})$, pak snadno nahlédneme, že A je algebra s involucí. Dále $\|(a,b)^\star\| = \|(\overline{a},\overline{b})\| = |\overline{a}| + |\overline{b}| = |a| + |b| = \|(a,b)\|$ pro každé $(a,b) \in A$. Konečně, Gelfandova transformace A je *-homomorfismus. Vskutku, pro $\varphi \in \Delta(A)$ je

$$\Gamma(x^\star)(\varphi) = \varphi(x^\star) = \varphi(\overline{\alpha}e_1 + \overline{\beta}e_2) = \overline{\alpha}\varphi(e_1) + \overline{\beta}\varphi(e_2) = \overline{\alpha} + \overline{\beta} = \overline{\varphi(x)} = \Gamma(x)^\star(\varphi).$$

Nicméně $\Delta(A)$ je kompaktní, přestože A nemá jednotku.

DŮSLEDEK 112. *Nechť A a B jsou komplexní komutativní $B^\star$-algebry. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) A a B jsou izometricky *-izomorfní.
(ii) A a B jsou algebraicky izomorfní.
(iii) Prostory $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.

DŮKAZ. Tvrzení plyne ihned z Vět 109 a 73 uvědomíme-li si, že zobrazení Φ z Tvrzení 72 je *-homomorfismus.

□

Následující reprezentační větu uvedeme bez důkazu.

VĚTA 113 (I. M. Gelfand a M. A. Najmark (1943), I. Kaplansky (1953)[9]). *Každou $B^\star$-algebru lze izometrickým *-izomorfismem vnořit do $\mathcal{L}(H)$ pro vhodný Hilbertův prostor H.*

[8] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1885) a Marshall Harvey Stone (1937)

[9] Viz též poznámku pod čarou na str. 174.

7. Spojitý kalkulus pro normální prvky B⋆-algeber

TVRZENÍ 114. *Nechť A je normovaná algebra nad $\mathbb{K}$, $\Omega \subset \mathbb{K}$, $f, g\colon \Omega \to A$ a $t \in \Omega$. Pokud existují $f'(t)$ a $g'(t)$ a f nebo g je spojité v t, pak $(fg)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$.*

DŮKAZ. Je-li g spojité v t, pak

$$\begin{aligned}(fg)'(t) &= \lim_{s\to t} \frac{f(s)g(s) - f(t)g(t)}{s-t} = \lim_{s\to t} \frac{\big(f(s) - f(t)\big)g(s)}{s-t} + \lim_{s\to t} \frac{f(t)\big(g(s) - g(t)\big)}{s-t} = \\ &= f'(t)g(t) + f(t)g'(t)\end{aligned}$$

Je-li f spojité v t, pak je výpočet analogický.

□

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou. Je-li A komplexní, pak pro každé $x \in A$ máme definovánu hodnotu $\exp x$ (viz Definici 51). Protože řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}$ konverguje lokálně stejnoměrně pro $\alpha \in \mathbb{C}$, platí díky Větě 55(a) a (b), že

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Tímto vzorcem můžeme ovšem definovat hodnotu $\exp x$ i v reálné Banachově algebře, neboť snadno nahlédneme, že řada je absolutně konvergentní.

VĚTA 115. *Nechť A je Banachova algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou a $x \in A$.*

(a) Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak $\exp x \exp y = \exp(x + y)$.
(b) $\exp x \in A^\times$ a $(\exp x)^{-1} = \exp(-x)$.
(c) Pro $\lambda \in \mathbb{K}$ položme $f(\lambda) = \exp(\lambda x)$. Pak $f'(\lambda) = \exp(\lambda x)x$ pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$.
(d) Je-li A algebra se spojitou involucí, pak $(\exp x)^\star = \exp x^\star$.
(e) Je-li A komplexní algebra se spojitou involucí a x je samoadjungovaný, pak $\exp(ix)$ je unitární.

DŮKAZ. (a) Důkaz je zcela shodný s důkazem pro případ $A = \mathbb{R}$ (viz např. [**?**, Věta 183]), pouze je potřeba využít komutativitu pro platnost vzorce $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

(b) Dle (a) je $\exp x \exp(-x) = \exp(-x) \exp x = \exp(x - x) = \exp 0 = e$.

(c) Nejprve ukažme, že $\lim_{h\to 0} \frac{\exp(hx)-e}{h} = x$. Vskutku,

$$\left\| \frac{\exp(hx) - e}{h} - x \right\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}x^n}{n!} \right\| \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|h|^{n-1}\|x\|^n}{n!} \le |h| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{n!}$$

pro $|h| \le 1$. Díky (a) a spojitosti násobení je tedy

$$\begin{aligned}f'(\lambda) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(\lambda x + hx) - \exp(\lambda x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(\lambda x)\exp(hx) - \exp(\lambda x)}{h} = \\ &= \exp(\lambda x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(hx) - e}{h} = \exp(\lambda x)x.\end{aligned}$$

(d) Plyne snadno ze spojitosti involuce.

(e) Díky (d) a (a) je $(\exp(ix))^\star \exp(ix) = \exp(-ix)\exp(ix) = \exp(ix - ix) = \exp 0 = e$ a také $\exp(ix)(\exp(ix))^\star = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp 0 = e$.

□

VĚTA 116 (Bent Fuglede (1950), Calvin R. Putnam (1951)[10]). *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra, $x \in A$, a nechť $a, b \in A$ jsou normální a platí, že $ax = xb$. Pak $a^\star x = xb^\star$.*

[10]B. Fuglede dokázal větu pro případ $a = b$, C. R. Putnam ji zobecnil pro $a \neq b$; později se ukázalo, že obecný případ již plyne ze speciálního. S krátkým důkazem využívajícím Liouvilleovu větu přišel Marvin Rosenblum (1958).

DŮKAZ. Díky Tvrzení 99 můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že A má jednotku. Indukcí snadno dokážeme, že $a^n x = x b^n$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$: $a^{n+1}x = a(a^n x) = a(xb^n) = (ax)b^n = (xb)b^n = xb^{n+1}$. Díky spojitosti násobení tedy pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ dostáváme, že $\exp(\lambda a)x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n a^n x}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(\lambda^n b^n)}{n!} = x\exp(\lambda b)$. Podle Věty 115(b) je tedy

$$x = \exp(-\lambda a)x\exp(\lambda b) \tag{2}$$

pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Položme

$$f(\lambda) = \exp(\lambda a^\star)x\exp(-\lambda b^\star) \quad \text{pro } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pak f je holomorfní na $\mathbb{C}$ podle Věty 115(c) a Tvrzení 114. Dále díky (2) a Větě 115(a) (zde využíváme normalitu a a b) pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ platí, že

$$f(\lambda) = \exp(\lambda a^\star)\big(\exp(-\overline{\lambda}a)x\exp(\overline{\lambda}b)\big)\exp(-\lambda b^\star) = \exp(\lambda a^\star - \overline{\lambda}a)x\exp(\overline{\lambda}b - \lambda b^\star).$$

Protože $\lambda a^\star - \overline{\lambda}a = i\big(i(\overline{\lambda}a - \lambda a^\star)\big)$ a prvek $i(\overline{\lambda}a - \lambda a^\star)$ je samoadjungovaný dle Faktu 101(a), je $\exp(\lambda a^\star - \overline{\lambda}a)$ unitární (Věta 115(e)), takže má normu 1 (Věta 103(c)). Analogicky obdržíme, že $\|\exp(\overline{\lambda}b - \lambda b^\star)\| = 1$, a tedy f je omezené na $\mathbb{C}$. Podle Liouvilleovy věty (Věta 45) je tudíž f konstantní. Odtud plyne, že pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$ je $f(\lambda) = f(0) = x$ a dle Věty 115(b) je tak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n (a^\star)^n x}{n!} = \exp(\lambda a^\star)x = x\exp(\lambda b^\star) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x (b^\star)^n}{n!}.$$

Je-li nyní $\phi \in A^*$ libovolný, pak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi((a^\star)^n x)}{n!}\lambda^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(x(b^\star)^n)}{n!}\lambda^n$ pro každé $\lambda \in \mathbb{C}$. Z jednoznačnosti rozvoje holomorfní funkce v mocninnou řadu speciálně plyne, že $\phi(a^\star x) = \phi(xb^\star)$. Protože A^* odděluje body A, je nutně $a^\star x = xb^\star$.

□

DEFINICE 117. Nechť A je algebra a $M \subset X$. Algebrovým obalem M nazveme množinu $\operatorname{alg} M = \bigcap\{B \supset M;\ B \text{ je podalgebra } A\}$.

Algebrový obal M je tedy nejmenší podalgebra A obsahující M.

TVRZENÍ 118. *Nechť A je algebra a $M \subset X$. Pak* $\operatorname{alg} M = \operatorname{span}\{x_1x_2\cdots x_n;\ x_1,\dots,x_n \in M, n \in \mathbb{N}\}$.

DŮKAZ. Označme $B = \operatorname{span}\{x_1x_2\cdots x_n;\ x_1,\dots,x_n \in M, n \in \mathbb{N}\}$. Inkluze $B \subset \operatorname{alg} M$ je zjevná, neboť podalgebra $\operatorname{alg} M$ obsahuje všechny konečné součiny svých prvků a též jejich lineární kombinace. Na druhou stranu, $M \subset B$. Stačí tedy ukázat, že B je podalgebra, protože pak $\operatorname{alg} M \subset B$ dle definice $\operatorname{alg} M$. Dle definice je B zjevně vektorový podprostor. Nechť dále $x, y \in B$. Pak $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_1^i \cdots x_{k_i}^i$ pro nějaká $x_k^i \in M$, $\alpha_i \in \mathbb{K}$ a $y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_1^j \cdots y_{l_j}^j$ pro nějaká $y_l^j \in M$, $\beta_j \in \mathbb{K}$. Tedy

$$xy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i\beta_j x_1^i \cdots x_{k_i}^i y_1^j \cdots y_{l_j}^j \in B.$$

□

DEFINICE 119. Nechť A je normovaná algebra a $M \subset A$. Pak definujeme uzavřený algebrový obal M jako $\overline{\operatorname{alg}}\, M = \bigcap\{B \supset M;\ B \text{ je uzavřená podalgebra } A\}$.

Je zřejmé, že uzavřený algebrový obal M je uzavřená podalgebra a je to nejmenší uzavřená podalgebra A obsahující M.

TVRZENÍ 120. *Nechť A je normovaná algebra a $M \subset X$. Pak* $\overline{\operatorname{alg}}\, M = \overline{\operatorname{alg} M}$.

DŮKAZ. Inkluze $\overline{\operatorname{alg}}\, M \subset \overline{\operatorname{alg} M}$ plyne z definice a Důsledku 7. Pro opačnou inkluzi si uvědomme, že $\overline{\operatorname{alg}}\, M$ je podalgebra obsahující M, a tedy $\operatorname{alg} M \subset \overline{\operatorname{alg}}\, M$. Protože $\overline{\operatorname{alg}}\, M$ je uzavřená množina, dostáváme, že $\overline{\operatorname{alg} M} \subset \overline{\operatorname{alg}}\, M$.

□

FAKT 121. *Nechť A, B jsou algebry a $M \subset A$. Pak každý algebrový homomorfismus $\Phi\colon \operatorname{alg} M \to B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M. Jsou-li A, B normované algebry, pak každý spojitý algebrový homomorfismus $\Phi\colon \overline{\operatorname{alg}} M \to B$ je jednoznačně určen svými hodnotami na M.*

DŮKAZ. Jsou-li $\Phi, \Psi\colon \operatorname{alg} M \to B$ algebrové homomorfismy, které mají stejné hodnoty na M, pak mají stejné hodnoty i na konečných součinech prvků z M. Dle Tvrzení 118 je tedy $\Phi = \Psi$.

Jsou-li A, B normované algebry a $\Phi, \Psi\colon \overline{\operatorname{alg}} M \to B$ jsou spojité algebrové homomorfismy, které mají stejné hodnoty na M, pak díky předchozímu případu je $\Phi = \Psi$ dle Tvrzení 120.

□

TVRZENÍ 122. *Nechť A je $B^\star$-algebra a nechť $M \subset A$ komutuje. Pak $\overline{\operatorname{alg}} M$ je komutativní $B^\star$-podalgebra A.*

DŮKAZ. Díky spojitosti násobení a involuce (a Tvrzení 120) stačí dokázat, že $\operatorname{alg} M$ je komutativní a uzavřený na involuci. To je ale snadno vidět díky popisu $\operatorname{alg} M$ z Tvrzení 118.

□

Nechť K je kompaktní prostor a $f \in C(K)$. Je-li g spojitá funkce, pak se jeví zcela přirozeným definovat $g(f)$ jako funkci $g \circ f \in C(K)$. Snadno nahlédneme, že tato definice splňuje přirozené požadavky na funkční kalkulus – je-li $p(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$ polynom na $\mathbb{K}$, pak $p \circ f = \sum_{j=0}^{n} c_j f^j$; konvergují-li spojité funkce g_n lokálně stejnoměrně ke g, pak díky kompaktnosti $g_n \circ f \to g \circ f$ stejnoměrně na K. Dále si uvědomme, že stačí, aby g byla definována na $\operatorname{Rng} f$, což je ovšem dle Příkladu 25(a) totéž, jako $\sigma(f)$. Pro obecnou algebru se nabízí využít Gelfandovu reprezentaci na vhodné komutativní podalgebře, k tomu je ovšem potřeba, aby Gelfandova transformace byla izomorfismem (s tím nám pomůže např. Gelfandova-Najmarkova věta).

Nechť A je komplexní B*-algebra s jednotkou a $x \in A$ je normální. Položme $B = \overline{\operatorname{alg}}\{e, x, x^\star\}$. Pak B je komplexní komutativní B*-podalgebra A s jednotkou e (Tvrzení 122). Množina $\Delta(B)$ je kompaktní (Věta 67), a tedy Gelfandova transformace $\Gamma_B(x)$ je prvek $C(\Delta(B))$. Dále je $\operatorname{Rng} \Gamma_B(x) = \sigma_B(x) = \sigma_A(x)$ dle Věty 79 a Důsledku 108. Je-li nyní $f \in C(\sigma_A(x))$, pak $f \circ \Gamma_B(x) \in C(\Delta(B))$. Podle Gelfandovy-Najmarkovy věty (Věta 109) je Γ_B bijekce, můžeme tedy definovat

$$f(x) = \Gamma_B^{-1}(f \circ \Gamma_B(x)). \tag{3}$$

Uvědomme si, že $f(x) \in B \subset A$.

Poznamenejme ještě, že dle Faktu 121 a Důsledku 106 je libovolný $\varphi \in \Delta(B)$ jednoznačně určen svojí hodnotou na x, a tedy funkce $\Gamma_B(x)\colon \Delta(B) \to \sigma_B(x)$ je dokonce homeomorfismus.

VĚTA 123 (spojitý kalkulus). *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra s jednotkou, $x \in A$ je normální a $f \in C(\sigma(x))$. Zobrazení $\Phi\colon C(\sigma(x)) \to A$, kde $\Phi(g) = g(x)$ je definováno vzorcem* (3)*, má následující vlastnosti:*

(a) Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ na $B = \overline{\operatorname{alg}}\{e, x, x^\star\}$, pro který navíc $\Phi(1) = e$ a $\Phi(Id) = x$.
(b) $f(x) \in A^\times$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. V tom případě je $f(x)^{-1} = \frac{1}{f}(x)$.
(c) $f(x)$ je samoadjungovaný právě tehdy, když f je reálná.
(d) $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$ (věta o obrazu spektra).
(e) Pokud $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ je spojitý *-homomorfismus, pro který $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, pak $\Psi = \Phi$.
(f) Je-li $C \subset A$ komutativní $B^\star$-podalgebra obsahující e a x, pak $\Gamma_C^{-1}(f \circ \Gamma_C(x)) = f(x)$.
(g) Pokud $g \in C\big(f(\sigma(x))\big)$, pak $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
(h) Je-li $g \in H(\Omega)$, kde $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřené okolí $\sigma(x)$, pak $\Phi(g\restriction_{\sigma(x)}) = \Psi(g)$, kde Ψ je holomorfní kalkulus z Věty 55.
(i) Pokud $y \in A$ komutuje s x, pak y komutuje i s $f(x)$.

Nemá-li A jednotku, provedeme celou konstrukci v A_e. Pokud pro $f \in C(\sigma(x))$ platí, že $f(0) = 0$, pak $f(x) \in \overline{\operatorname{alg}}\{x, x^\star\} \subset A$.

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že $\sigma(x) = \sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.

(a) Protože $\Gamma_B(x)$ je homeomorfismus $\Delta(B)$ a $\sigma_B(x)$, je dle Tvrzení 72 zobrazení $g \mapsto g \circ \Gamma_B(x)$ izometrickým *-izomorfismem $C(\sigma_B(x))$ na $C(\Delta(B))$. Dále dle Gelfandovy-Najmarkovy věty (Věta 109) je Γ_B^{-1} izometrický *-izomorfismus $C(\Delta(B))$ na B, odkud plyne, že Φ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma_B(x))$ na B.

Konečně, pro $g(t) = 1$ je $g(x) = \Gamma_B^{-1}(1) = e$, neboť Γ_B je algebrový izomorfismus, a pro $g(t) = t$ je $g(x) = \Gamma_B^{-1}(\Gamma_B(x)) = x$.

(b) Podle Důsledku 108 je $f(x) \in A^\times$, právě když $f(x) \in B^\times$, což dle (a) a Faktu 26 nastane, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro každé $\lambda \in \sigma(x)$. Vzorec pro f^{-1} ihned plyne z Faktu 26.

(c) plyne okamžitě z (a).

(d) Protože $f(x) \in B$, je $\sigma(f(x)) = \sigma_B(f(x))$. Díky (a), Důsledku 27 a Příkladu 25(a) je pak $\sigma_B(f(x)) = \sigma_B(\Phi(f)) = \sigma_{C(\Delta(B))}(f) = \operatorname{Rng} f = f(\sigma_B(x))$.

(e) Položme $C = \operatorname{alg}\{1, Id, \overline{Id}\} \subset C(\sigma(x))$. Pak C obsahuje konstanty a odděluje body $\sigma(x)$ (neboť Id odděluje body $\sigma(x)$), a tedy dle Stoneovy-Weierstraßovy věty je $\overline{\operatorname{alg}\{1, Id, \overline{Id}\}} = \overline{C} = C(\sigma(x))$. Z (a) a Faktu 121 tedy plyne, že $\Phi = \Psi$.

(f) Dle Důsledku 108 je $\sigma_C(x) = \sigma_A(x) = \sigma_B(x)$. Dle Věty 79 je $\Gamma_C(x)$ spojitá funkce zobrazující $\Delta(C)$ na $\sigma_C(x) = \sigma_B(x)$, a tedy dle Tvrzení 72 je zobrazení $g \mapsto g \circ \Gamma_C(x)$ izometrickým *-izomorfismem $C(\sigma_B(x))$ do $C(\Delta(C))$. Dále dle Gelfandovy-Najmarkovy věty (Věta 109) je Γ_C^{-1} izometrický *-izomorfismus $C(\Delta(C))$ na C, odkud plyne, že $\Psi\colon C(\sigma(x)) \to A$ definované předpisem $\Psi(g) = \Gamma_C^{-1}(g \circ \Gamma_C(x))$ je izometrický *-izomorfismus $C(\sigma(x))$ do C. Stejně jako v (a) dostaneme, že $\Psi(1) = e$ a $\Psi(Id) = x$, dle (e) je tedy $\Psi = \Phi$.

(g) Nejprve si uvědomme, že B je komutativní, a tedy $f(x) \in B$ je normální. Dle (c) je $g \in C\big(\sigma(f(x))\big)$, takže $g(f(x))$ je dobře definován. Dle (f) pak je

$$g(f(x)) = \Gamma_B^{-1}\big(g \circ \Gamma_B(f(x))\big) = \Gamma_B^{-1}\Big(g \circ \Gamma_B\big(\Gamma_B^{-1}(f \circ \Gamma_B(x))\big)\Big) = \Gamma_B^{-1}(g \circ f \circ \Gamma_B(x)) = g \circ f(x).$$

(h) Dle Rungeovy věty ([R, Věta 13.9]) existuje posloupnost racionálních funkcí $\{R_n\}$ s póly mimo množinu Ω, která konverguje lokálně stejnoměrně ke g na Ω. Speciálně tedy $R_n \to g$ stejnoměrně na $\sigma(x)$. Z pravidel kalkulu (a) a (b), resp. (a) a (c) z Věty 55, snadno obdržíme, že $\Phi(R_n \restriction_{\sigma(x)}) = \Psi(R_n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Použitím spojitosti Φ, resp. Věty 55(b), pak dostaneme, že $\Phi(g \restriction_{\sigma(x)}) = \Psi(g)$.

(i) Komutant $\{y\}^{\mathrm{c}}$ je uzavřená podalgebra A (Tvrzení 86), která obsahuje e, x a dle Věty 116 i $x^\star$. Tedy $f(x) \in B \subset \{y\}^{\mathrm{c}}$.

Předpokládejme nyní, že A nemá jednotku. Připomeňme, že $0 \in \sigma(x)$ (Tvrzení 32(a)). Nechť $f \in C(\sigma(x))$ je taková, že $f(0) = 0$. Položme $L = \sigma(x) \setminus \{0\}$. Pak L je lokálně kompaktní prostor a $\sigma(x)$ je jeho Alexandrovovou kompaktifikací. Dále položme $C = \operatorname{alg}\{Id, \overline{Id}\} \subset C_0(L)$. Pak dle Stoneovy-Weierstraßovy věty pro lokálně kompaktní prostory (Věta 13.90) platí, že $f \in C_0(L) = \overline{C}$. Tedy $f(x) = \Phi(f) \in \overline{\Phi(C)} \subset \overline{\operatorname{alg}\{x, x^\star\}}$.

□

Uvědomme si, že z (a) plyne, že jsou-li $f, g \in C(\sigma(x))$, pak $f(x)$ a $g(x)$ spolu komutují.

8. Nezáporné prvky B*-algeber

DEFINICE 124. Nechť A je algebra s involucí a $x \in A$ je samoadjungovaný. Řekneme, že x je nezáporný, pokud $\sigma(x) \subset [0, +\infty)$.

Všimněme si, že dle Příkladu 25(a) je prvek $f \in C(T)$ nezáporný, právě když $f(t) \geq 0$ pro každé $t \in T$.

TVRZENÍ 125. *Nechť A je algebra s involucí a $x, y \in A$ jsou nezáporné.*

(a) Je-li $t \geq 0$, pak tx je nezáporný.
(b) Je-li A komplexní B*-algebra, pak $x + y$ je nezáporný.
(c) Je-li A komplexní Banachova algebra a x a y spolu komutují, pak xy je nezáporný.

DůKAZ. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že A má jednotku.

(a) Prvek tx je samoadjungovaný (Fakt 101(b)). Dále je $\sigma(tx) = t\sigma(x)$ (Tvrzení 29(b)), a tedy $\sigma(tx) \subset [0, +\infty)$.

(b) Zjevně $x + y$ je samoadjungovaný. Položme $\alpha = \|x\|$, $\beta = \|y\|$ a $\gamma = \alpha + \beta$. Jelikož $\sigma(x) \subset [0, \alpha]$, dle Tvrzení 29(b) je $\sigma(\alpha e - x) = \alpha - \sigma(x) \subset [0, \alpha]$. Dále je $\alpha e - x$ samoadjungovaný, a tedy dle Věty 103(a) platí, že $\|\alpha e - x\| \leq \alpha$. Analogicky dostaneme, že $\|\beta e - y\| \leq \beta$. Proto je $\|\gamma e - (x + y)\| = \|(\alpha e - x) + (\beta e - y)\| \leq \gamma$. Jelikož prvek $x + y - \gamma e$ je samoadjungovaný, dostáváme odtud, že $\sigma(x + y - \gamma e) \subset [-\gamma, \gamma]$, a tedy $\sigma(x + y) = \sigma(\gamma e + x + y - \gamma e) = \gamma + \sigma(x + y - \gamma e) \subset [0, 2\gamma]$.

(c) Prvek xy je samoadjungovaný, neboť $(xy)^\star = y^\star x^\star = yx = xy$. Zbytek plyne z Věty 88(a).

□

Je-li A komplexní Banachova algebra s involucí a $x \in A$ je samoadjungovaný, pak x^2 je nezáporný, což plyne např. z věty o obrazu spektra (Věta 55(d)). Dále je-li A komplexní B*-algebra, pak pro normální $x \in A$ je prvek $|x| \in A$ (tj. prvek $h(x)$, kde $h(t) = |t|$ pro $t \in \mathbb{C}$) nezáporný. To plyne z Věty 123(c) a (d). Podobně, pro $x \in A$ nezáporný je $\sqrt{x}$ dobře definovaný (použijeme funkci $\sqrt{t}$ spojitou na $[0, +\infty) \supset \sigma(x)$) a nezáporný.

FAKT 126. *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra a $x \in A$.*

(a) Je-li x nezáporný, pak $|x| = x$.
(b) Je-li x samoadjungovaný, pak $|x|^2 = x^2$.
(c) Je-li x nezáporný, pak $(\sqrt{x})^2 = x$. Navíc $\sqrt{x}$ je jediné nezáporné $y \in A$ takové, že $y^2 = x$.
(d) Je-li x samoadjungovaný, pak $\sqrt{x^2} = |x|$.

DůKAZ. Položme $h(t) = |t|$, $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$, $t \in [0, +\infty)$ a $g(t) = \sqrt{t}$, $t \in [0, +\infty)$.

(a) plyne z toho, že $h\restriction_{[0,+\infty)} = Id$.

(b) Z Věty 123(a) dostaneme, že $|x|^2 = h(x)h(x) = h^2(x) = Id^2(x) = x^2$.

(c) Z Věty 123(a) obdržíme, že $(\sqrt{x})^2 = g(x)g(x) = g^2(x) = Id(x) = x$. Je-li nyní $y \in A$ nezáporný prvek, pro který $y^2 = x$, pak $x = f(y)$, a tedy dle Věty 123(g) platí, že $y = Id(y) = (g \circ f)(y) = g(f(y)) = g(x) = \sqrt{x}$.

(d) Podle (b) nezáporný prvek $y = |x|$ splňuje $y^2 = x^2$. Dle (c) je ovšem $y = \sqrt{x^2}$.

□

TVRZENÍ 127. *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra. Pak pro každý samoadjungovaný prvek $x \in A$ existuje právě jedna dvojice nezáporných prvků $x^+, x^- \in A$ taková, že $x = x^+ - x^-$ a $x^- x^+ = x^+ x^- = 0$. Navíc $x^+ + x^- = |x|$.*

DůKAZ. Položme $f(t) = \max\{t, 0\}$ a $g(t) = -\min\{t, 0\}$ pro $t \in R$. Pak $f - g = Id$ a $fg = 0$. Protože x je samoadjungovaný, jsou f i g definovány na $\sigma(x)$ (Věta 103(d)), můžeme tedy položit $x^+ = f(x)$ a $x^- = g(x)$. Pak $x^+ - x^- = f(x) - g(x) = (f - g)(x) = x$ a $x^+ x^- = (fg)(x) = 0 = (gf)(x) = x^- x^+$. Dále prvek $y = x^+ + x^-$ je nezáporný (Tvrzení 125) a platí pro něj, že

$$y^2 = (x^+ + x^-)^2 = (x^+)^2 + (x^-)^2 = (x^+ - x^-)^2 = x^2.$$

Tedy $y = |x|$ dle Faktu 126(d) a (a).

Nechť nyní $u, v \in A$ jsou nezáporné takové, že $x = u - v$ a $uv = vu = 0$. Pak $u + v$ je nezáporný (Tvrzení 125) a $(u + v)^2 = u^2 + v^2 = (u - v)^2 = (x^+ - x^-)^2 = x^2$. Dle Faktu 126(d) a (a) je tedy $u + v = |x| = x^+ + x^-$. Sečtením této rovnosti s rovností $u - v = x^+ - x^-$ obdržíme, že $u = x^+$, odečtením pak $v = x^-$.

□

VĚTA 128 (I. Kaplansky (1953)). *Nechť A je komplexní $B^\star$-algebra a $x \in A$. Pak $x^\star x$ i $xx^\star$ jsou nezáporné.*

DůKAZ. Prvek $x^\star x$ je samoadjungovaný, takže $x^\star x = y^+ - y^-$, kde $y^+, y^- \in A$ jsou nezáporné a $y^- y^+ = 0$ (Tvrzení 127). Stačí tedy ukázat, že $y^- = 0$. Položme $z = xy^-$. Pak

$$-z^\star z = -y^- x^\star x y^- = -y^-(y^+ - y^-)y^- = (y^-)^3, \tag{4}$$

takže $-z^\star z$ je nezáporný (např dle Věty 55(d)). Dále existují samoadjungované $u, v \in A$ takové, že $z = u + iv$ (Fakt 101(c)). Pak

$$z^\star z + zz^\star = (u-iv)(u+iv) + (u+iv)(u-iv) = u^2 + iuv - ivu + v^2 + u^2 - iuv + ivu + v^2 = 2u^2 + 2v^2,$$

tedy $z^\star z = 2u^2 + 2v^2 - zz^\star$. Podle Tvrzení 29(e) je ovšem $\sigma(-zz^\star) \subset \sigma(-z^\star z) \cup \{0\}$, takže i $-zz^\star$ je nezáporný, což dle Tvrzení 125 znamená, že $z^\star z$ je nezáporný. Dohromady tak dostáváme, že $\sigma(z^\star z) = -\sigma(-z^\star z) \subset (-\infty, 0]$ a zároveň $\sigma(z^\star z) \subset [0, +\infty)$, neboli $\sigma(z^\star z) = \{0\}$. Z rovnosti (4) pak plyne, že $\sigma((y^-)^3) = \{0\}$, takže dle Tvrzení 29(c) je $\sigma(y^-) = \{0\}$. Konečně, dle Věty 103(a) je $\|y^-\| = r(y^-) = 0$, čili $y^- = 0$.

Pro nezápornost $xx^\star$ stačí použít předchozí část na prvek $x^\star$.

□

Všimněme si, že je-li A je algebra s involucí a s jednotkou a $x \in A$ je nezáporný, pak prvek $e + x$ je invertibilní. Vskutku, dle Tvrzení 29(b) je $\sigma(e + x) = 1 + \sigma(x) \subset [1, +\infty)$, a tedy $0 \in \rho(e + x)$. Poznamenejme, že toto pozorování spolu s předchozí větou úzce souvisejí s reprezentační Větou 113, viz též poznámku pod čarou na straně 174.

Kapitola 11

Operátory na Hilbertových prostorech

1. Základní vlastnosti

V této kapitole bude symbol $^\perp$ vždy značit ortogonální doplněk (a nikoli anihilátor).

VĚTA 1. *Jsou-li H_1, H_2 Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, pak platí, že*
(a) $\operatorname{Ker} T^\star = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,
(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^\star)^\perp$,
(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^\star)^\perp$,
(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^\star} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

DŮKAZ. Tvrzení (b) dostaneme z ekvivalencí

$$x \in \operatorname{Ker} T \;\Leftrightarrow\; Tx = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall y \in H_2\colon \langle Tx, y\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \forall y \in H_2\colon \langle x, T^\star y\rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in (\operatorname{Rng} T^\star)^\perp.$$

Tvrzení (a) plyne z (b) a z Věty 10.91(a). Tvrzení (c), resp. (d) dostaneme z (a), resp. (b) pomocí Důsledku 1.101.

□

Po operátory mezi Hilbertovými prostory drobně rozšíříme definici unitárního prvku algebry $\mathcal{L}(H)$.

DEFINICE 2. Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Operátor $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ se nazývá unitární, pokud $T^\star \circ T = I_{H_1}$ a $T \circ T^\star = I_{H_2}$, neboli $T^{-1} = T^\star$.

VĚTA 3. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*
(i) T je unitární.
(ii) T je na a $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in H$.
(iii) T je izometrie na.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) $T \circ T^\star = I_{H_2}$, a tedy T je na. Dále $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^\star \circ Tx, y\rangle = \langle x, y\rangle$ pro všechna $x, y \in H_1$.

(ii)⇒(i) Nechť $x \in H_1$. Pro libovolné $y \in H_1$ je $\langle T^\star \circ Tx, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$, a tedy $T^\star \circ Tx = x$, neboli $T^\star \circ T = I_{H_1}$. Dále nechť $u \in H_2$. Pak existuje $x \in H_1$ takové, že $u = Tx$. Podle předchozího je $T^\star u = T^\star \circ Tx = x$, a tedy $T \circ T^\star u = Tx = u$. To znamená, že $T \circ T^\star = I_{H_2}$.

□

DEFINICE 4. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $S\colon X \times X \to \mathbb{K}$ se nazývá seskvilineární[1] forma, pokud je lineární v první souřadnici a sdruženě lineární ve druhé souřadnici.

Uvědomme si, že na reálném prostoru jsou seskvilineární formy bilineární. Kanonickým příkladem seskvilineární formy je skalární součin. Pro komplexní prostory platí zobecnění polarizačního vzorce pro skalární součin (Tvrzení 1.87):

TVRZENÍ 5 (polarizační vzorec). *Nechť X je komplexní vektorový prostor a S je seskvilineární forma na X. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí, že*

$$S(x, y) = \frac{1}{4}\big(S(x+y, x+y) - S(x-y, x-y) + iS(x+iy, x+iy) - iS(x-iy, x-iy)\big).$$

[1]Tento poněkud diskutabilní termín pochází z latinského *sesqui*-, což znamená „jedna a půl-“.

DŮKAZ. Pro libovolná $x, y \in X$ je $S(x+y, x+y) = S(x, x+y) + S(y, x+y) = S(x,x) + S(x,y) + S(y,x) + S(y,y)$. Dosadíme-li místo y postupně $-y$, iy a $-iy$, dostaneme

$$\begin{aligned} S(x-y, x-y) &= S(x,x) - S(x,y) - S(y,x) + S(y,y), \\ S(x+iy, x+iy) &= S(x,x) + S(x,iy) + S(iy,x) + S(iy,iy) = \\ &= S(x,x) - iS(x,y) + iS(y,x) + S(y,y), \\ S(x-iy, x-iy) &= S(x,x) + S(x,-iy) + S(-iy,x) + S(-iy,-iy) = \\ &= S(x,x) + iS(x,y) - iS(y,x) + S(y,y). \end{aligned}$$

Odtud již vzorec snadno plyne.

□

Poznamenejme, že v reálném případě (tj. pro bilineární formy) obecně neexistuje přesná analogie výše uvedeného vzorce – obdržíme pouze, že $S(x,y) + S(y,x) = \frac{1}{2}\big(S(x+y, x+y) - S(x-y, x-y)\big)$. (Uvědomme si, že v reálném případě je skalární součin navíc symetrický, proto platí polarizační vzorec z Tvrzení 1.87.) Proto taky následující Věta 6 níže platí pouze v komplexním případě.

Je-li X prostor se skalárním součinem a $T\colon X \to X$ je lineární operátor, pak funkce $S(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ je zjevně seskvilineární forma na X. Následující věta je okamžitým důsledkem polarizačního vzorce z Tvrzení 5 a Lemmatu 1.93.

VĚTA 6. *Nechť X je komplexní prostor se skalárním součinem a $T\colon X \to X$ je lineární operátor. Jestliže $\langle Tx, x\rangle = 0$ pro každé $x \in X$, pak $T = 0$.*

Předchozí věta v reálném případě neplatí. Stačí vzít $X = \mathbb{R}^2$ a $T \in \mathcal{L}(X)$ reprezentovaný maticí $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

DŮSLEDEK 7. *Nechť X je komplexní prostor se skalárním součinem a $S, T\colon X \to X$ jsou lineární operátory. Pokud $\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle$ pro každé $x \in X$, pak $S = T$.*

DŮKAZ. Aplikujeme předchozí větu na operátor $S - T$.

□

DEFINICE 8. Nechť X je normovaný lineární prostor a S je seskvilineární forma na X. Řekneme, že S je omezená, pokud $\sup_{x,y\in B_X} |S(x,y)| < +\infty$. V tom případě klademe $\|S\| = \sup_{x,y\in B_X} |S(x,y)|$.

Snadno nahlédneme, že je-li S omezená seskvilineární forma na X, pak $|S(x,y)| \le \|S\|\|x\|\|y\|$ pro každé $x, y \in X$.

Následující tvrzení ukazuje, že skalární součin na Hilbertově prostoru je v jistém smyslu univerzální seskvilineární forma. (Připomeňme si též tvrzení z lineární algebry, podle kterého každá bilineární forma na $\mathbb{R}^n$ je tvaru $B(x,y) = x^{\mathrm{T}}Ay$, kde A je čtvercová matice.)

TVRZENÍ 9. *Nechť H je Hilbertův prostor. Je-li S omezená seskvilineární forma na H, pak existuje jednoznačně určený $T \in \mathcal{L}(H)$ takový, že $S(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ pro všechna $x, y \in H$. Navíc platí, že $\|T\| = \|S\|$.*

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "{(T,Id)}"'] & & \mathbb{K} \\ & H \times H \arrow[ur, "{\langle\cdot,\cdot\rangle}"'] & \end{tikzcd}$$

DŮKAZ. Pro pevné $y \in H$ je zobrazení $x \mapsto S(x,y)$ prvek H^*. Podle Věty 1.119 existuje právě jedno $U(y) \in H$ takové, že $S(x,y) = \langle x, U(y)\rangle$ pro každé $x \in H$. Pak U je lineární operátor, neboť pro $y, z \in H$ a $\alpha \in \mathbb{K}$ je $\langle x, U(\alpha y)\rangle = S(x, \alpha y) = \overline{\alpha} S(x,y) = \overline{\alpha}\langle x, U(y)\rangle = \langle x, \alpha U(y)\rangle$ a

$$\langle x, U(y+z)\rangle = S(x, y+z) = S(x,y) + S(x,z) = \langle x, U(y)\rangle + \langle x, U(z)\rangle = \langle x, U(y) + U(z)\rangle$$

pro každé $x \in H$, takže $U(\alpha y) = \alpha U(y)$ a $U(y+z) = U(y) + U(z)$ dle Lemmatu 1.93.

Dále $\|Uy\|^2 = \langle Uy, Uy\rangle = S(Uy, y) \le \|S\|\|Uy\|\|y\|$ pro každé $y \in H$, odkud plyne, že U je spojitý a $\|U\| \le \|S\|$. Na druhou stranu, $|S(x,y)| = |\langle x, Uy\rangle| \le \|x\|\|U\|\|y\| \le \|U\|$ pro každé $x, y \in B_H$, a tedy $\|S\| = \|U\|$.

Konečně, položíme-li $T = U^\star$, pak pro všechna $x, y \in H$ je $S(x, y) = \langle x, Uy\rangle = \langle U^\star x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$ a $\|T\| = \|U\| = \|S\|$. Jednoznačnost plyne ihned z Lemmatu 1.93.

□

DEFINICE 10. Nechť X je prostor se skalárním součinem a $T \in \mathcal{L}(X)$. Množina $N_T = \{\langle Tx, x\rangle;\ x \in S_X\}$ se nazývá numerický range operátoru T.

FAKT 11. *Nechť X je normovaný lineární prostor takový, že* $\dim X_{\mathbb{R}} > 1$ *(tj. X je buď komplexní, nebo reálný dimenze alespoň* 2*). Pak S_X je křivkově souvislá.*

DŮKAZ. Necht $x, y \in S_X$ jsou dva ruzné body jednotkové sféry. Predpokládejme nejprve, že $y \neq -x$. Pak úsecka $t \in [0, 1] \mapsto ty + (1-t)x$ neprotíná 0 (v opacném prípadu máme $t = \|ty\| = \|(t-1)x\| = 1-t$, tj. $t = \frac{1}{2}$ a $y = -x$), a tedy spojitá krivka

$$\varphi\colon t \mapsto \frac{ty + (1-t)x}{\|ty + (1-t)x\|}, \quad t \in [0, 1],$$

leží v S_X a splnuje $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$.

Pokud $y = -x$, z predpokladu o X plyne existence bodu $z \in S_X \setminus \{x, -x\}$. Dle predchozího existuje spojitá krivka $\varphi_1\colon [0, 1] \to S_X$ a spojitá krivka $\varphi_2\colon [0, 1] \to S_X$ splnující $\varphi_1(0) = x$, $\varphi_1(1) = \varphi_2(0) = z$ a $\varphi_2(1) = -x$. Pak spojitá krivka $\psi\colon [0, 1] \to S_X$ definovaná jako

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \varphi_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

splnuje $\psi([0, 1]) \subset S_X$ a $\psi(0) = x$, $\psi(1) = -x$.

□

FAKT 12. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$ a $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset N_T$. Je-li* $\dim X_{\mathbb{R}} > 1$*, pak množina N_T je křivkově souvislá.*

DŮKAZ. Pro $x \in S_X$ je $|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\|\|x\| \leq \|T\|$. Dále je-li $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, pak existuje $x \in S_X$ takový, že $Tx = \lambda x$. Potom $\langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 = \lambda$, a tedy $\lambda \in N_T$. Konečně, nechť $\dim X_{\mathbb{R}} > 1$. Funkce $x \mapsto \langle Tx, x\rangle$ je spojitá (Tvrzení 1.84(b)), a tedy N_T je spojitý obraz křivkově souvislé množiny S_X (Fakt 11).

□

FAKT 13. *Nechť A je algebra nad $\mathbb{K}$ s jednotkou a involucí, $x \in A$ je normální a $\lambda \in \mathbb{K}$. Pak $\lambda e - x$ je normální.*

DŮKAZ. Platí, že $(\lambda e - x)^\star = \overline{\lambda} e - x^\star$. Protože prvky $\{e, x, x^\star\}$ spolu vzájemně komutují, komutují spolu i $(\lambda e - x)^\star$ a $\lambda e - x$.

□

VĚTA 14. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je normální, právě když $\langle T^\star x, T^\star y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T normální platí následující tvrzení:*

(a) $\|Tx\| = \|T^\star x\|$ *pro každé $x \in H$.*
(b) $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^\star$.
(c) $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v H právě tehdy, když T je prostý.*
(d) T je invertibilní právě tehdy, když existuje $c > 0$ tak, že $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pro každé $x \in H$.
(e) Pokud $0 \notin \overline{N_T}$*, pak T je invertibilní.*
(f) $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$.
(g) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(T^\star)$.
(h) Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T, pak $\operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \operatorname{Ker}(\lambda_2 I - T)$.

DŮKAZ. Pro $x, y \in H$ je $\langle T^\star x, T^\star y\rangle = \langle TT^\star x, y\rangle$ a $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^\star Tx, y\rangle$, ekvivalence z tvrzení věty tedy plyne z Lemmatu 1.93.

(a) plyne ihned z předchozí charakterizace, (b) plyne ihned z (a).

(c) plyne z (b) a Věty 1(c).

(d) $\Rightarrow$ plyne z Tvrzení 1.60(a).

$\Leftarrow$ Dle Tvrzení 1.60(a), (c) je T izomorfismus do a $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený. Dle (c) je tedy T na, takže je invertibilní.

(e) Označme $d = \operatorname{dist}(N_T, 0)$. Pak pro $x \in S_H$ platí, že $\|Tx\| = \|Tx\|\|x\| \geq |\langle Tx, x\rangle| \geq d$, tedy T je invertibilní dle (d).

(f) Z rovnosti $\langle(\lambda I - T)x, x\rangle = \lambda\|x\|^2 - \langle Tx, x\rangle$ dostáváme, že $N_{\lambda I - T} = \lambda - N_T$. Je-li tedy $\lambda \notin \overline{N_T}$, pak $0 \notin \overline{N_{\lambda I - T}}$. Tedy $\lambda I - T$ je invertibilní dle Faktu 13 a (e), což znamená, že $\lambda \notin \sigma(T)$.

(g) Je-li $\lambda \in \mathbb{K}$, pak $\lambda I - T$ je normální (Fakt 13) a $(\lambda I - T)^\star = \overline{\lambda} I - T^\star$, tvrzení tedy plyne z (b).

(h) Nechť $x_1 \in \operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T)$ a $x_2 \in \operatorname{Ker}(\lambda_2 I - T)$. Pak díky (g) dostáváme, že

$$\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2\rangle = \langle Tx_1, x_2\rangle = \langle x_1, T^\star x_2\rangle = \langle x_1, \overline{\lambda_2} x_2\rangle = \lambda_2\langle x_1, x_2\rangle.$$

Tedy $\langle x_1, x_2\rangle = 0$.

□

Dosaďme v začátku důkazu předchozí věty $y = x$. V komplexním případě můžeme použít Důsledek 7, čímž obdržíme následující charakterizaci:

TVRZENÍ 15. *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je normální právě tehdy, když $\|Tx\| = \|T^\star x\|$ pro každé $x \in H$.*

VĚTA 16. *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:*

(a) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$.

(b) $N_T \subset \mathbb{R}$ a označíme-li $a = \inf N_T$, $b = \sup N_T$, pak $\sigma(T) \subset N_T = [a, b]$, $\|T\| = \max\{-a, b\}$, $a, b \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ a číslo $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

(c) $r(T) = \max\{|\lambda|;\ \lambda \in N_T\} = \|T\|$.

Všimněme si, že na rozdíl od Věty 10.103(a) dostáváme, že $r(T) = \|T\|$ i v reálném případě.

DŮKAZ. Pro $x, y \in H$ je $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle$, ekvivalence z tvrzení věty tedy plyne z Lemmatu 1.93.

(a) Pro každé $x \in H$ je dle předchozího $\langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$.

(b) Ukážeme nejprve, že $\|T\| = M = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in N_T\}$. Víme, že $|\lambda| \leq \|T\|$ pro každé $\lambda \in N_T$ (Fakt 12). Na druhou stranu,

$$\operatorname{Re}\langle Tx, x\rangle = \langle x, y\rangle$$

(c)

■■■

□

VĚTA 17. *Nechť H je komplexní Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je samoadjungovaný.

(ii) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$.

(iii) $N_T \subset \mathbb{R}$.

Dále je-li T samoadjungovaný a označíme-li $a = \inf N_T$, $b = \sup N_T$, pak $\sigma(T) \subset [a, b]$ a $\|T\| = \max\{-a, b\}$. Je-li H netriviální, pak $a, b \in \sigma(T)$ a číslo $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$.

DŮKAZ. Pro každé $x \in H$ je $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^\star x\rangle$ a $\langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$. (i)$\Rightarrow$(ii) tedy plyne ihned, (ii)$\Rightarrow$(i) pak plyne z Důsledku 7. (ii)$\Rightarrow$(iii) je triviální, (iii)$\Rightarrow$(ii) plyne z toho, že $\langle Tx, x\rangle = \|x\|^2\big\langle T\big(\frac{x}{\|x\|}\big), \frac{x}{\|x\|}\big\rangle$ pro každé $x \in H \setminus \{0\}$.

Nechť nyní T je samoadjungovaný. Z předchozího a Věty 14(f) plyne, že $\sigma(T) \subset \overline{N_T} \subset [a, b] \subset [-\|T\|, \|T\|]$. Podle Věty 10.103(a) je $\|T\| = r(T)$, existuje tedy $\lambda \in \sigma(T)$ takové, že $|\lambda| = \|T\|$. ■■■Tedy λ se rovná buď a nebo b. Tedy $\|T\| = \max\{|a|, |b|\}$.

Předpokládejme, že $\lambda = b$. Pokud $b = a$, jsou zbývající tvrzení v (b2) zřejmá. Předpokládejme tedy, že $a < b$. Uvažujme operátor $S = bI - T$. Pak

$$\sigma(S) = b - \sigma(T), \quad N_S = b - N_T, \quad 0 = \inf N_S \quad \text{a} \quad b - a = \sup N_S.$$

Aplikujeme předcházející úvahy na operátor S a dostaneme tak $\mu \in \sigma(S)$, které splňuje $\|S\| = |\mu|$, přičemž $|\mu| = b - a$, nebo $|\mu| = 0$. Pokud $\mu = 0$, je $S = 0$, a tedy $N_S = \{0\}$, což je spor s nerovností $\sup N_S = b - a > 0$. Tedy $\mu = b - a$. existuje tak $\lambda \in \sigma(T)$ splňující $b - a = b - \lambda$, a tedy $a \in \sigma(T)$.

□

Je-li $P \in \mathcal{L}(H)$ projekce, pak $P^\star$ je také projekce: $P^\star P^\star = (PP)^\star = P^\star$.

VĚTA 18. *Nechť H je Hilbertův prostor a $P \in \mathcal{L}(H)$ je projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) P je samoadjungovaná.
(ii) P je normální.
(iii) P je ortogonální.

DŮKAZ. (i)⇒(ii) je triviální.

(ii)⇒(iii) Dle Vět 14(b) a 1(a) je $\operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^\star = (\operatorname{Rng} P)^\perp$.

(iii)⇒(i) Podle Věty 1.79 je $\operatorname{Rng} P^\star$ uzavřený. Podle Věty 1(a), (d) a ■■■tedy platí, že $\operatorname{Ker} P^\star = (\operatorname{Rng} P)^\perp = \operatorname{Ker} P$ a $\operatorname{Rng} P^\star = (\operatorname{Ker} P)^\perp = \operatorname{Rng} P$. Nechť $x \in H$. Pak $x = Px + (x - Px)$, kde $Px \in \operatorname{Rng} P = \operatorname{Rng} P^\star$ a $x - Px \in \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} P^\star$. Tedy $0 = P^\star(x - Px) = P^\star x - P^\star P x = P^\star x - Px$, neboli $P^\star x = Px$.

□

TVRZENÍ 19. *Nechť H je Hilbertův prostor, $S, T \in \mathcal{L}(H)$ a S je samoadjungovaný. Pak* $\operatorname{Rng} S \perp \operatorname{Rng} T$ *právě tehdy, když $ST = 0$.*

DŮKAZ. Tvrzení ihned plyne z toho, že pro libovolná $x, y \in H$ platí, že $\langle Sx, Ty\rangle = \langle x, S^\star Ty\rangle = \langle x, STy\rangle$.

□

VĚTA 20 (Hilbert-Schmidt). *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je kompaktní a normální. Pak existuje ortonormální báze H tvořená vlastními vektory T. Dále existuje $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, nenulová vlastní čísla $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ a ortonormální báze $\{e_n\}$ prostoru $\overline{\operatorname{Rng} T}$ tak, že*

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, \quad x \in H.$$

DŮKAZ. *Krok 1.* Pro každé nenulové číslo $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ vezmeme nějakou ortonormální bázi konečněrozměrného prostoru $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$. Pro různá vlastní čísla jsou na sebe příslušné vlastní podprostory kolmé dle Věty **??**(b6). Jelikož má T pouze spočetně mnoho nenulových vlastních čísel, existuje $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ takové, že vzniklé ortonormální systémy lze uspořádat do jednoho ortonormálního systému $\{e_n\}_{n=1}^N$. Nechť $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je vlastní číslo příslušné vektoru e_n. Položme $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_n;\ n \in \{1, \dots, N\}\}$. Pak $\{e_n;\ n \in \{1, \dots, N\}\}$ je ortonormální báze prostoru Y (viz Větu **??**).

Krok 2. Díky Větě **??**(b5) platí $T(Y) \subset Y$ a $T^\star(Y) \subset Y$.

Je-li $x \in Y^\perp$, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\langle Tx, e_n\rangle = \langle x, T^\star e_n\rangle = \lambda\langle x, e_n\rangle = 0 \quad \text{a} \quad \langle T^\star x, e_n\rangle = \langle x, Te_n\rangle = \overline{\lambda_n}\langle x, e_n\rangle = 0.$$

Tedy dostáváme inkluze $T(Y^\perp) \subset Y^\perp$ a $T^\star(Y^\perp) \subset Y^\perp$.

Krok 3. Ukažme nyní, že $Y^\perp = \operatorname{Ker} T$. Uvažujme operátor $S \in L(Y^\perp)$ vzniklý restrikcí T, tj. $Sx = Tx$ pro $x \in Y^\perp$. Pak S je díky druhému kroku dobře definovaný prvek $L(Y^\perp)$, který je normální (v $L(Y^\perp)$). Operátor $V = T^\star \restriction_{Y^\perp}$ je totiž též dobře definovaný a pro $x, y \in Y^\perp$ splňuje rovnosti

$$\langle Sx, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^\star y\rangle = \langle x, Vy\rangle.$$

Operátor V je tedy adjunkce S v prostoru $L(Y^\perp)$. Jelikož $T^\star$ komutuje s T, komutuje V s S, a tedy S je normální.

Dále je S kompaktní. Pokud by S měl nenulové vlastní číslo λ, bylo by λ prvkem $\sigma_p(T)$. Jemu příslušné vlastní vektory však v $Y^\perp$ neleží, a tedy $\sigma(S) \subset \{0\} \cup \sigma_p(S) = \{0\}$. Proto $\|S\| = r(S) = 0$ a $S = 0$. Tedy i $T = 0$ ne $Y^\perp$, tj. $Y^\perp \subset \operatorname{Ker} T$.

K důkazu obrácené inkluze vezměme $x \in \operatorname{Ker} T$ a pišme $x = a + b$, kde $a = \sum_{n=1}^N \langle a, e_n\rangle e_n \in Y$ a $b \in Y^\perp$. Pak díky první části máme $Tb = 0$, a tedy

$$0 = Tx = Ta + Tb = \sum_{n=1}^N \langle a, e_n\rangle Te_n + 0 = \sum_{n=1}^N \langle a, e_n\rangle \lambda_n e_n.$$

Proto platí $\langle a, e_n\rangle = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x = b \in Y^\perp$.

Krok 4. Ukázali jsme tedy, že $H = \operatorname{Ker} T \oplus_\perp Y$. Vezměme nyní libovolnou ortonormální bázi B prostoru $\operatorname{Ker} T$. Pak $B \cup \{e_n;\ n \in \{1, \dots, N\}\}$ je ortonormální báze prostoru H, která je tvořena vlastním vektory T. Libovolné $x \in H$ rozložme jako $x = a + \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle e_n$, kde $a \in \operatorname{Ker} T$ (viz Lemma **??**). Pak

$$Tx = \sum_{n=1}^N \langle x, e_n\rangle Te_n = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 21. *Nechť H je Hilbertův prostor. Pak $K(H) = \overline{F(H)}$.*

DŮKAZ. Zvolme ortonormální bázi $\{e_i;\ i \in I\}$ prostoru H a pro každou $F \in \mathcal{F}(I)$ uvažujme ortogonální projekci $P_F x = \sum_{i\in F} \langle x, e_i\rangle e_i$, $x \in H$. Jelikož $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$, $x \in H$, pro každé $x \in H$ a $\varepsilon > 0$ existuje $F \in \mathcal{F}(I)$ splňující $\|x - P_F x\| < \varepsilon$.

Nechť $K \in K(H)$ je dán. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme konečnou ε-síť $\{x_1, \dots, x_n\}$ množiny B_H. Nechť $F \in \mathcal{F}(I)$ je zvoleno tak, že $\|Kx_i - P_F x_i\| < \varepsilon$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak operátor $P_F \circ K$ je element $F(H)$ a platí $\|K - P_F K\| < \varepsilon$.

Vskutku, nechť $x \in B_H$ je dáno. Nechť $i \in \{1, \dots, n\}$ je zvoleno tak, aby $\|Kx - Kx_i\| < \varepsilon$. Pak

$$\|Kx - P_F x\| \le \|K_x - Kx_i\| + \|Kx_i - P_F Kx_i\| + \|P_F Kx_i - P_F kx\| \le \varepsilon + \varepsilon + \|P_F\|\|Kx_i - Kx\| \le 3\varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen.

□

2. Borelovský kalkulus pro normální operátory

Nechť K je topologický prostor. Symbol $\operatorname{Bs}(K)$ značí σ-algebru všech borelovských podmnožin K a $\operatorname{Bf}^b(K)$ značí systém všech omezených borelovských funkcí na K.

LEMMA 22. *Nechť K je metrický prostor. Nechť $\mathcal{F}$ je systém v* $\operatorname{Bf}^b(K)$*, který obsahuje $C^b(K)$ a je uzavřený vzhledem k bodovým limitám omezených posloupností. Pak $\mathcal{F} =$* $\operatorname{Bf}^b(K)$.

DŮKAZ. *Krok 1.* Položme $\mathcal{F}_0 = C^b(K)$ a pro každé $\alpha \in (0, \omega_1)$ definujme induktivně

$$\mathcal{F}_\alpha = \left\{ f \in;\ K \to \mathbb{C} : \text{existuje omezená posloupnost } \{f_n\} \text{ v } \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_b \text{ splňující } f_n \to f \right\}.$$

Přímočaře se ověří, že každý systém $\mathcal{F}_\alpha$ je podalgebra $\mathcal{F}$. Položíme-li $\mathcal{F}_{\omega_1} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{F}_\alpha$, dostaneme podalgebru $\mathcal{F}$ uzavřenou na bodové limity omezených posloupností. Vskutku, je-li $\{f_n\}$ omezená posloupnost v $\mathcal{F}_{\omega_1}$ konvergující k f, pak každé f_n je v $\mathcal{F}_{\alpha_n}$ pro nějaké $\alpha_n < \omega_1$. Pak $\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n < \omega_1$, a tedy $f \in \mathcal{F}_{\alpha+1} \subset \mathcal{F}_{\omega_1}$.

Krok 2. Nechť
$$\mathcal{S} = \{S \in \mathrm{Bs}(K);\ \chi_B \in \mathcal{F}_{\omega_1}\}.$$
Pak $\mathcal{S}$ je σ-algebra obsahující otevřené množiny K.

Abychom toto ukázali, nechť $U \subset K$ je otevřená množina. Nalezneme rostoucí posloupnost $\{F_n\}$ uzavřený množin v K splňující $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = U$. Pomocí Urysohnova lemmatu sestrojíme spojité funkce $f_n : K \to [0, 1]$ splňující $f_n = 1$ na F_n a $f_n = 0$ na $K \setminus F_n$. Pak $f_n \to \chi_U$, a tedy $\chi_U \in \mathcal{F}$. Proto $U \in \mathcal{S}$.

Pro dvě množiny $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ máme
$$\chi_{S_1 \cup S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} + \chi_{S_1}\chi_{S_2} \in \mathcal{F}_{\omega_1},$$
a tedy $\mathcal{S}$ je uzavřený na konečná sjednocení.

Jsou-li nyní S_n, $n \in \mathbb{N}$, elementy v $\mathcal{S}$ a $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, jsou množiny $T_n = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$, $n \in \mathbb{N}$, v $\mathcal{S}$ a přitom $\chi_{T_n} \to \chi_S$. Vzhledem k uzavřenosti $\mathcal{F}_{\omega_1}$ na bodové limity omezených posloupností platí $\chi_S \in \mathcal{F}_{\omega_1}$, tj. $S \in \mathcal{S}$.

Tedy $\mathcal{S} = \mathrm{Bs}(K)$.

Krok 3. Nechť $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$ je dáno. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pokryjeme $\mathrm{Rng}\, f$ konečnou ε-sítí $\{y_1, \dots, y_n\} \subset \mathrm{Rng}\, f$ a pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ položme $S_i = f^{-1}(B(y_i, \varepsilon))$. Pak S_i jsou borelovské množiny v K, a tedy $\chi_{S_i} \in \mathcal{F}_{\omega_1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Nechť $S_0 = \emptyset$ a $T_i = S_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} S_j$. Pak funkce
$$g = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{T_i} \in \mathcal{F}_{\omega_1}$$
a $\|f - g\|_\infty \le \varepsilon$.

Pro $\varepsilon = \frac{1}{n}$ tak dostaneme posloupnost $\{g_n\}$ v $\mathcal{F}_{\omega_1}$ stejnoměrně konvergující k f. Tedy $\{g_n\}$ je omezená, a proto $f \in \mathcal{F}_{\omega_1}$.

Tedy
$$\mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K) \subset \mathcal{F}_{\omega_1} \subset \mathcal{F} \subset \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K),$$
a důkaz je tak hotov.

□

VĚTA 23. *Nechť H he Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť Φ značí spojitý kalkulus pro T z Věty* **??**. *Pak existuje zobrazení $\Psi : \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T)) \to L(H)$ s následujícími vlastnostmi.*

- *(a) Platí $\Psi = \Phi$ na $C(\sigma(T))$.*
- *(b) Pokud $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$, která konverguje k f, pak pro každé $x, y \in H$ platí $\langle \Psi(f_n)x, y\rangle \to \langle \Psi(f)x, y\rangle$.*
- *(c) Zobrazení Φ je algebraický $*$-homorfismus a $\|\Psi(f)\| \le \|f\|_\infty$.*
- *(d) Zobrazení Ψ je vlastnostmi (a),(b) a (c) určeno jednoznačně.*
- *(e) Pokud $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je spojitá a $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$, pak $g(\Psi(f)) = \Psi(g \circ f)$.*
- *(f) Operátor $\Psi(f)$ je normální pro každé $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$.*
- *(g) Operátor $\Psi(f)$ je samoadjungovaný, pokud $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$ je reálná.*
- *(h) Pokud $S \in L(H)$ komutuje s T, potom S komutuje s $\Psi(f)$ pro každou $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$.*

DŮKAZ. *Krok 1.* Hledané zobrazení Ψ nejprve zkonstruujme. Pro každou dvojici $x, y \in H$ uvažujme zobrazení $R_{x,y} : C(\sigma(T)) \to \mathbb{C}$ definované jako
$$R_{x,y}(f) = \langle \Phi(f)x, y\rangle, \quad f \in C(\sigma(T)).$$
Pak
$$|R_{x,y}| \le \|\Phi(f)\|\|x\|\|y\| = \|f\|\|x\|\|y\|, \quad f \in C(\sigma(T)).$$
Dle Rieszovy věty **??** existuje komplexní borelovská míra $\mu_{x,y}$ na $\sigma(T)$ splňující
$$R_{x,y}(f) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{x,y}(\lambda), \quad f \in C(\sigma(T)).$$
Navíc platí $\|\mu_{x,y}\| = \|R_{x,y}\| \le \|x\|\|y\|$.

Pro libovolné $f \in C(\sigma(T))$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ a $x_1, x_2, y \in H$ máme

$$\begin{aligned}\int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y}(\lambda) &= R_{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y}(f) = \langle \Phi(f)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y\rangle \\ &= \alpha_1\langle \Phi(f)x_1, y\rangle + \alpha_2\langle \Phi(f)x_2, y\rangle \\ &= \alpha_1 \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{x_1,y}(\lambda) + \alpha_2 \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{x_2,y}(\lambda) \\ &= \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}(\alpha_1\mu_{x_1,y} + \alpha_2\mu_{x_2,y})(\lambda),\end{aligned}$$

a tedy $\mu_{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2,y} = \alpha_1\mu_{x_1,y} + \alpha_2\mu_{x_2,y}$. Podobně odvodíme $\mu_{x,\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2} = \overline{\alpha_1}\mu_{x,y_1} + \overline{\alpha_2}\mu_{x,y_2}$.

Položme

$$B_g(x, y) = \int_{\sigma(T)} g(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{x,y}(\lambda), \quad g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T)).$$

Pak B splňuje předpoklady Tvrzení 9 s odhadem

$$|B_g(x, y)| \le \|g\|\|\mu_{x,y}\| \le \|g\|\|x\|\|y\|, \quad x, y \in H.$$

(Všimněme si, že $B_{\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2} = \alpha_1 B_{g_1} + \alpha_2 B_{g_2}$ pro $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ a $g_1, g_2 \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$.)

Dle Tvrzení 9 tedy existuje jednoznačně určený operátor $\Psi(g) \in L(H)$, který vyhovuje rovnici

$$B_g(x, y) = \langle \Psi(g)x, y\rangle, \quad x, y \in H.$$

Tím je konstrukce zobrazení Ψ ukončena.

Krok 2. Ověřme nyní vlastnosti (a)-(h) pro toto zobrazení.

(a) Dle definice platí pro $f \in C(\sigma(T))$ rovnost

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = B_f(x, y) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{x,y}(\lambda) = R_{x,y}(f) = \langle \Phi(f)x, y\rangle, \quad x, y \in H.$$

Dle Věty 6 máme $\Psi(f) = \Phi(f)$.

(b) Vezměme omezenou posloupnost $\{f_n\}$ v $\mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$ konvergující k f a $x, y \in H$. Pak díky Lebesgueově větě platí

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} f_n(\lambda)\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x, y\rangle.$$

(c) Pro $\alpha \in \mathbb{C}$ a $g_1, g_2 \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$ platí

$$\begin{aligned}\langle \Psi(\alpha g_1 + g_2)x, y\rangle &= B_{\alpha g_1+g_2}(x, y) = (\alpha_1 B_{g_1} + \alpha_2 B_{g_2})(x, y) = \alpha_1 B_{g_1}(x, y) + \alpha_2 B_{g_2}(x, y) \\ &= \langle(\alpha_1\Psi(g_1) + \alpha_2\Psi(g_2))x, y\rangle, \quad x, y \in H.\end{aligned}$$

Proto je Ψ lineární.

Ukažme nyní multiplikativitu. Položme

$$\mathcal{F} = \{g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T));\ \forall f \in C(\sigma(T))\colon \Psi(gf) = \Psi(g)\Psi(f)\}.$$

Pak $\mathcal{F}$ splňuje předpoklady Lemmatu 22. Zjevně totiž $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$ a je-li $\{g_n\}$ omezená posloupnost v $\mathcal{F}$ konvergující ke g, platí pro každou $f \in C(\sigma(T))$ rovnosti

$$\langle \Psi(gf)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(g_n f)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(g_n)\Psi(f)x, y\rangle = \langle \Psi(g)\Psi(f)x, y\rangle, \quad x, y \in H.$$

Tedy $g \in \mathcal{F}$. Proto $\mathcal{F} = \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$.

Uvažujme nyní systém

$$\mathcal{H} = \{h \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T));\ \forall g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))\colon \Psi(gh) = \Psi(g)\Psi(h)\}.$$

Podle předcházející úvahy je $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{H}$ a pro omezenou posloupnost $\{h_n\}$ v $\mathcal{H}$ konvergující k h platí pro libovolnou $g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$ rovnosti

$$\begin{aligned}\langle \Psi(gh)x, y\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(gh_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(g)\Psi(h_n)x, y\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(h_n)x, (\Psi(g))^* y\rangle = \langle \Psi(h)x, (\Psi)g)^* y\rangle \\ &= \langle \Psi(g)\Psi(h)x, y\rangle, \quad x, y \in H.\end{aligned}$$

Tedy $\mathcal{F} = \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$ a Ψ je multiplikativní.

Položme nyní

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T));\ (\Psi(f))^* = \Psi(\overline{f})\}.$$

Pak $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$. Nechť $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathcal{F}$ konvergující k f. Pak pro každé $x, y \in H$ platí

$$\begin{aligned}\langle \Psi(f)x, y\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, (\Psi(f_n))^* y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, \Psi(\overline{f_n})y\rangle \\ &= \langle x, \Psi(\overline{f})y\rangle = \langle (\Psi(\overline{f}))^* x, y\rangle.\end{aligned}$$

Tedy i $f \in \mathcal{F}$. Proto Ψ zachovává involuci.

Co se týče normy, povšimněme si, že pro $x \in H$ platí

$$\|\Psi(f)(x)\|^2 = \langle \Psi(f)x, \Psi(f)x\rangle = |\int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, \mathrm{d}\mu_{x,\Psi(f)x}(\lambda)| \le \|f\|\|x\|\|\Psi(f)(x)\|.$$

Tedy $\|\Psi(f)\| \leqq \|f\|$.

(d) Nechť $\widetilde{\Psi}\colon \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T)) \to L(H)$ je zobrazení splňující (a), (b) a (c). Položme

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T));\ \Psi(f) = \widetilde{\Psi}(f)\}.$$

Pak $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$ dle (a). Nechť $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathcal{F}$ konvergující k f. Pak pro každé $x, y \in H$ platí

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \widetilde{\Psi}(f_n)x, y\rangle = \langle \widetilde{\Psi}(f_n)x, y\rangle = \langle \widetilde{\Psi}(f)x, y\rangle.$$

Tedy $\mathcal{F} = \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$ a důkaz je hotov.

(e) Nechť nejprve g je polynom tvaru $g(z) = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} z^i (\overline{z})^j$, $z \in \mathbb{C}$. Pak

$$\begin{aligned}\Psi(g \circ f) &= \Psi\left(\sum_{i,j=0}^n c_{ij} f^i (\overline{f})^j\right) = \sum_{i,j=0}^n c_{ij} \Psi(f^i (\overline{f})^j) \\ &= \sum_{i,j=0}^n c_{ij}\, (\Psi(f))^i\, (\Psi(f)^*)^j = g(\Psi(f))\end{aligned}$$

Je-li g obecná spojitá funkce, lze ji na $\sigma(\Psi(f))$ stejnoměrně aproximovat posloupností polynomy $\{g_n\}$. Pak $g_n \circ f \rightrightarrows g \circ f$, z čehož plyne

$$g(\Psi(f)) = \lim_{n\to\infty} g_n(\Psi(f)) = \lim_{n\to\infty} \Psi(g_n \circ f) = \Psi(g \circ f).$$

(f) Platí

$$\Psi(f)(\Psi(f))^* = \Psi(f)\Psi(\overline{f}) = \Psi(f\overline{f}) = \Psi(\overline{f}f) = \Psi(\overline{f})\Psi(f) = (\Psi(f))^*\Psi(f).$$

(g) Pokud $f \in Bf(\sigma(T)$ je reálná, platí $(\Psi(f))^* = \Psi(\overline{f}) = \Psi(f)$.

(h) Položme

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T));\ S\Psi(f) = \Psi(f)S\}.$$

Pak $C(\sigma(T)) \subset \mathcal{F}$ dle Věty **??**(j). Nechť $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathcal{F}$ konvergující k f. Pak pro každé $x, y \in H$ platí

$$\begin{aligned}\langle S\Psi(f)x, y\rangle &= \langle \Psi(f)x, S^* y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)x, S^* y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S\Psi(f_n)x, y\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \Psi(f_n)Sx, y\rangle = \langle \Psi(f)Sx, y\rangle.\end{aligned}$$

Opět dle Lemmatu 22usoudíme, že $\mathcal{F} = \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(\sigma(T))$.

□

3. Rozklad jednotky

DEFINICE 24. Nechť (Ω, Σ) je měřitelný prostor. Nechť H je Hilbertův prostor. Rozklad jednotky je zobrazení $E\colon \Sigma \to L(H)$ s následujícím vlastnostmi.

(a) Platí $E(\emptyset) = 0$ a $E(\Omega) = I$.
(b) Každé $E(A)$ je samodajungovaná projekce.
(c) Pro každé $A_1, A_2 \in \Sigma$ platí $E(A_1)E(A_2) = E(A_1 \cap A_2)$.
(d) Pokud $A_1, A_2 \in \Sigma$ jsou disjunktní, platí $E(A_1) + E(A_2) = E(A_1 \cup A_2)$.
(e) Pro každé $x, y \in H$ je funkce $E_{x,y}\colon A \mapsto \langle E(A)x, y\rangle$ komplexní míra na Σ.

Pokud Σ je σ-algebra $\mathrm{Bs}(K)$ nějakého lokálně kompaktního topologického prostoru K, požaduje se navíc, že

(f) každá míra $E_{x,y}$ je regulární.

Nebude-li řečeno přesněji, v dalším textu budeme uvažovat rozklad identity na prostoru (Ω, Σ) s hodnotami v $L(H)$.

POZNÁMKA 25. Rozklad jednotky E splňuje následující vlastnosti.
(g) Pro každé $x \in H$ a $A \in \Sigma$ platí

$$E_{x,x}(A) = \langle E(A)x, x\rangle = \langle E(A)x, E(A)x\rangle = \|E(A)x\|^2.$$

Tedy totální variace $E_{x,x}$ je rovna $\|E_{x,x}\| = E_{x,x}(\Omega) = \|x\|^2$.
(h) Díky (c) spolu operátory $E(A_1)$ a $E(A_2)$ pro každé $A_1, A_2 \in \Sigma$ komutují.
(i) Z vlastností (a) a (c) plyne, že pro disjunktní $A_1, A_2 \in \Sigma$ platí $\mathrm{Rng}\, E(A_1) \perp \mathrm{Rng}\, E(A_2)$ (viz Větu 18).

TVRZENÍ 26. *Nechť E je rozklad identity. Nechť $A_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, a $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pokud $E(A_n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí $E(A) = 0$.*

DŮKAZ. Pro každé $x \in H$ platí

$$E_{x,x}(A) = E_{x,x}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{x,x}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\langle E(A_n)x, x\rangle = 0.$$

Jelikož $\|E(A)x\|^2 = E_{x,x}(A) = 0$, je projekce $E(A)$ nulová.

□

DEFINICE 27. Nechť E je rozklad jednotky.
(a) Nechť $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce. Nechť

$$\mathcal{U} = \bigcup \left\{U \subset \mathbb{C};\ U \text{ otevřená, } E(f^{-1}(U)) = 0\right\}.$$

Položme $V = \bigcup \mathcal{U}$. Pak $E(f^{-1}(V)) = 0$, neboť V lze napsat jako spočetné sjednocení množin z $\mathcal{U}$ (viz Tvrzení 26).

Esenciálním oborem hodnot f se nazývá množina $\mathrm{ess\,Rng}\, f = \mathbb{C} \setminus V$. Funkce f je esenciálně omezená, pokud $\mathrm{ess\,Rng}\, f$ je omezená množina. Pak

$$\|f\|_\infty = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \mathrm{ess\,Rng}\, f\}.$$

Symbolem $\mathcal{L}^\infty(E)$ značíme algebru všech esenciálně omezených funkcí na Ω. Řekneme, že $f = g$ E-skoro všude (či jenom skoro všude), pokud pro množinu $N = \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \neq g(\omega)\}$ platí $E(N) = 0$.

TVRZENÍ 28. *Nechť E je rozklad jednotky a $\mathcal{L}^\infty(E)$ je jako výše. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Uvažujme algebru $\mathcal{L}(E)^\infty$ s involucí danou komplexním sdružením. Nechť*

$$N = \{f \in \mathcal{L}^\infty(E);\ \|f\|_\infty = 0\}.$$

Pak algebra $L_\infty(E) = \mathcal{L}^\infty(E)/N$ s normou $\|\cdot\|_\infty$ a involucí zděděnou z $\mathcal{L}^\infty(E)$, (tj.

$$[f]^* = [\overline{f}], \quad f \in \mathcal{L}^\infty(E),)$$

je komutativní $B^\star$-algebra s jednotkou.

(c) *Pro $f \in L_\infty(E)$ platí $\sigma(f) = \operatorname{ess Rng} f$ (prvek $[f]$ obvykle ztotožňujeme s funkcí f).*

DŮKAZ. (a) Zjevně je $\mathcal{L}^\infty(E)$ komutativní algebra s involucí a pseudonormou $\|\cdot\|_\infty$, která pro $f, g \in \mathcal{L}^\infty(E)$ splňuje $\|fg\|_\infty \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ a $\|f\|^2 = \|ff^*\|$. Snadno se ověří, že po faktorizaci pomocí N vznikne požadovaná struktura (jednotka odpovídá funkci $f = 1$ na Ω).

(b) Pokud $\lambda \notin \operatorname{ess Rng} f$, pak je funkce $g = (\lambda - f)^{-1}$ inverzí k $\lambda - f$. Tedy $\sigma(f) \subset \operatorname{ess Rng} f$.

Nechť $\lambda \in \operatorname{ess Rng} f$ je dáno. Předpokládejme, že $\lambda \notin \sigma(f)$, tj. existuje inverze $g \in L_\infty(E)$ prvku $\lambda - f$. Pak $g = (\lambda - f)^{-1}$ E-skoro všude, tj. množina

$$A = \{\omega \in \Omega;\ g(\omega) = \frac{1}{\lambda - f(\omega)}\}$$

splňuje $E(A) = I$. Nechť $C > 0$ splňuje $C > \|g\|_\infty$. Zvolme $n \in \mathbb{N}$, které je větší než C, a uvažujme množinu $A_n = f^{-1}(B(\lambda, \frac{1}{n}))$. Pak $E(A_n) \neq 0$ a pro $\omega \in A_n$ platí $|f(\omega) - \lambda| < \frac{1}{n}$. Tedy $|g(\omega)| > n$ na $A_n \cap I$, což je E-nenulová množina. To je však spor s nerovností $\|g\| \le C$.

□

VĚTA 29. *Nechť E je rozklad identity. Pak existuje izometrický $*$-izomorfismus $\Psi\colon L_\infty(E) \to L(H)$ takový, že platí následující tvrzení:*

(a) *Množina $\Psi(L_\infty(E))$ je komutativní $B^\star$-podalgebra $L(H)$ obsahující I.*

(b) *Platí*

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \int_\Omega f \, \mathrm{d}E_{x,y}, \quad f \in L_\infty(E), x, y \in H.$$

(c) *Platí*

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \int_\Omega |f|^2 \, \mathrm{d}E_{x,x}, \quad f \in L_\infty(E), x \in H.$$

(d) *Operátor $Q \in L(H)$ komutuje s každou projekcí $E(A)$ právě tehdy, když Q komutuje se $\Psi(L_\infty(E))$.*

DŮKAZ. *Krok 1.* Nechť S označuje jednoduché funkce z $L_\infty(E)$. Položme

$$\Psi(f) = \sum_{i=1}^n c_i E(A_i), \quad f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i} \in S.$$

Stejně jako ve Větě **??**(a) se ukáže, že $\Psi(f)$ nezáleží na vyjádření funkce f a že Ψ je lineární zobrazení.

Dále pro $f, g \in S$ tvaru $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$ a $g = \sum_{j=1}^m d_j \chi_{B_j}$, kde $\{A_1, \dots, A_n\}$ a $\{B_1, \dots, B_m\}$ jsou měřitelné rozklady Ω, platí

$$\Psi(f)\Psi(g) = \left(\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\right)\left(\sum_{j=1}^m d_j E(B_j)\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j E(A_i)E(B_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j E(A_i \cap B_j) = \Psi(fg),$$

jelikož $fg = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_i d_j \chi_{A_i \cap B_j}$.

Dále

$$(\Psi(f))^* = \left(\sum_{i=1}^n c_i E(A_i)\right)^* \sum_{i=1}^n \overline{c_i} E(A_i) = \Psi(\overline{f}) = \Psi(f^*)$$

a

$$\langle \Psi(f)x, y\rangle = \sum_{i=1}^n c_i \langle E(A_i)x, y\rangle = \sum_{i=1}^n c_i E_{x,y}(A_i) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}E_{x,y}, \quad x, y \in H.$$

Krok 2. Předpokládejme, že f je vyjádřeno pomocí rozkladu $\{A_1, \dots, A_n\}$ množiny Ω. Pak z odhadu

$$\|\Psi(f)x\|^2 = \langle \Psi(f)x, \Psi(f)x\rangle = \langle (\Psi(f))^*\Psi(f)x, x\rangle = \langle \Psi(f^*f)x, x\rangle$$
$$= \langle \Psi(|f|^2)x, x\rangle = \int_\Omega |f|^2 \, \mathrm{d}E_{x,x}, \quad x \in H,$$

plyne $\|\Psi(f)x\| \le \|f\|_\infty \|x\|$, $x \in H$, tj. $\|\Psi\| \le \|f\|_\infty$.

Na druhou stranu zvolme $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $|c_i| = \|f\|_\infty$. Jelikož mají projekce $E(A_1), \dots, E(A_n)$ navzájem kolmé obory hodnot, pro $x \in \operatorname{Rng} E(A_i)$ platí

$$\Psi(f)x = \sum_{j=1}^n c_j E(A_j)x = c_i E(A_i)x = c_i x.$$

Tedy $\|\Psi(f)\| = |c_i| = \|f\|_\infty$. Dohromady tedy máme $\|\Psi(f)\| = \|f\|_\infty$.

Krok 3. Zobrazení $\Psi\colon S \to L(H)$ tedy splňuje všechny vlastnosti (a), (b) a (c) na prostoru S. Jelikož je S hustá podalgebra $L_\infty(E)$, lze Ψ jednoznačně izometricky rozšířit na celou algebru $L_\infty(E)$. Díky spojitosti involuce a násobení je pak Ψ $*$-izomorfismus. Množina $\Psi(L_\infty(E))$ je pak komutativní $*$-podalgebra $L(H)$ obsahující I (neboť $\Psi(1) = I$). Díky úplnosti $L_\infty(E)$ se jedná o B*-podalgebru. Vlastnosti (b) a (c) plynou z platnosti těchto vztahů pro zobrazení Ψ na S. Je-li $Q \in L(H)$ operátor komutující s každým $E(A)$, $A \in \Sigma$, komutuje Q s každým operátorem z $\Psi(S)$. Ze spojitosti tedy Q komutuje s $\Psi(L_\infty(E))$. Tím je důkaz ukončen.

□

Prvek $\Psi(f)$ z Věty 29 značíme $\Psi(f) = \int_\Omega f \, \mathrm{d}E$.

4. Spektrální rozklad normálního operátoru

VĚTA 30. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť $K = \sigma(T)$ a $(\Omega, \Sigma) = (K, \operatorname{Bs}(K))$. Pak existuje právě jeden rozklad identity $E\colon \operatorname{Bs}(K) \to L(H)$, pro který platí*

$$T = \int_K \lambda \, \mathrm{d}E.$$

Dále platí následující výroky.

(a) *Nechť Φ je borelovský kalkulus z Věty 23 a $\Psi\colon L_\infty(E) \to L(H)$ je zobrazení z Věty 29 dané rozkladem jednotky E. Pak $\Psi([f]) = \Phi(f)$ pro $f \in \operatorname{Bf}^b(K)$.*
(b) *Platí $\Psi(L_\infty(E)) = \overline{\operatorname{span}}\{E(A);\ A \in \operatorname{Bs}(K)\}$.*
(c) *Je-li $A \in \operatorname{Bs}(K)$, označme $T_A = T\restriction_{\operatorname{Rng} E(A)}$. Pak $T_A \in L(\operatorname{Rng} E(A))$ a $\sigma(T_A) \subset \overline{A}$ (spektrum uvažujeme vzhledem k $L(\operatorname{Rng} E(A))$.)*
(d) *Pokud $A \subset K$ je neprázdná otevřená množina, je $P(A)$ nenulová.*

DŮKAZ. *Krok 1.* Nechť Φ je borelovský kalkulus z Věty 23. Položme

$$E(A) = \Psi(\chi_A), \quad A \in \operatorname{Bs}(K).$$

Ověříme nyní vlastnosti požadované Definicí 24. Zjevně platí $E(\emptyset) = \Phi(0) =)$ a $E(K) = E(1) = I$. Dále pro $A \in \operatorname{Bs}(K)$ platí

$$(E(A))^2 = E(A)E(A) = \Phi(\chi_A)\Phi(\chi_A) = \Phi((\chi_A)^2) = \Phi(\chi_A)$$

a

$$(E(A))^* = (\Phi(\chi_A))^* = \Phi(\overline{\chi_A}) = \Phi(\chi_A) = E(A),$$

a tedy $E(A)$ je samodajungovaná projekce.

Pro $A_1, A_2 \in \operatorname{Bs}(K)$ máme díky multiplikativitě Φ rovnost

$$E(A_1 \cap A_2) = \Phi(\chi_{A_1 \cap A_2}) = \Phi(\chi_{A_1}\chi_{A_2}) = \Phi(\chi_{A_1})\Phi(\chi_{A_2}) = E(A_1)E(A_2).$$

Tedy E má i vlastnost (c). Podobně pro $A_1, A_2 \in \mathrm{Bs}(K)$ disjunktní platí

$$E(A_1 \cup A_2) = \Phi(\chi_{A_1 \cup A_2}) = \Phi(\chi_{A_1} + \chi_{A_2}) = \Phi(\chi_{A_1}) + \Phi(\chi_{A_2}) = E(A_1) + E(A_2).$$

Ohledně vlastnosti (e) a (f) si připomeňme, že pro každé $x, y \in H$ byla nalezena za pomoci Riezovy věty komplexní borelovská (regulární) míra $\mu_{x,y}$ na K splňující

$$\langle \Phi(f)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\, \mathrm{d}\mu_{x,y}(\lambda), \quad f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K).$$

Tedy je zobrazení

$$E_{x,y}(A) = \langle E(A)x, y\rangle = \langle \Phi(\chi_A)x, y\rangle = \int_K \chi_A\, \mathrm{d}\mu_{x,y} = \mu_{x,y}(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(K),$$

požadovaná míra.

Tím je konstrukce E ukončena.

Krok 2. Nechť $E\colon \mathrm{Bs}(K) \to L(H)$ je rozklad jednotky splňující $T = \int_K \lambda\, \mathrm{d}E'$. Dle algebraických vlastností popsaných ve Větě 29 dostáváme rovnost $\int_K p\, \mathrm{d}E = \int_K p\, \mathrm{d}E'$ pro každý polynom p v proměnných z a $\overline{z}$. Ze spojitosti pak tato rovnost platí pro každou spojitou funkci f na K. Položme

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K);\ \int_K f\, \mathrm{d}E = \int_K f\, \mathrm{d}E'\}.$$

Pak $\mathcal{F} \supset C(K)$ a pokud $f_n \to f$, kde $\{f_n\}$ je omezená posloupnost v $\mathcal{F}$, platí pro každé $x, y \in H$ rovnost

$$\int_K f\, \mathrm{d}E_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \int_K f_n dE_{x,y} = \lim_{n\to\infty} \int_K f_n d'E_{x,y} = \int_K f\, \mathrm{d}E'.$$

Dle Lemmatu 22 je $\mathcal{F} = \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$. Speciálně tedy $E(A) = E'(A)$ a první část tvrzení je dokázána.

Krok 3. Tvrzení(a) plyne přímo z konstrukce E a tvrzení (b) je důsledkem konstrukce Ψ popsané v důkazu Věty 29. Uvažujme $\in \mathrm{Bs}(K)$ a $T_A = T \restriction_{\mathrm{Rng}\, E(A)}$. Pak pro každé $x \in \mathrm{Rng}\, E(A)$ platí

$$T_A E(A)x = TE(A)x = E(A)Tx \in \mathrm{Rng}\, E(A),$$

a tedy T_A je vskutku element $L(\mathrm{Rng}\, E(A))$.

Vezměme $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{A}$ a položme

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda - z}, & z \in A, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

Pak $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$. Dále je funkce $g(z) = (\lambda - z)\chi_A(z)$ též prvkem $\mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(K)$ a platá pro ni rovnost $gf = \chi_A$. Pro každé $x \in H$ tak dostáváme

$$\langle E(A)x, x\rangle = \langle \Psi(\chi_A)x, x\rangle = \langle \Psi(f(\lambda - Id)\chi_A)x, x\rangle = \langle \Psi(f)\Psi(\lambda - Id)\Psi(\chi_A)x, x\rangle = \langle \Psi(f)(\lambda I - T)E(A)x, x\rangle.$$

Pro $x \in \mathrm{Rng}\, E(A)$ máme proto

$$\langle x, x\rangle = \langle \Psi(f)(\lambda I - T)x, x\rangle,$$

a tedy

$$I \restriction_{\mathrm{Rng}\, E(A)} = \Psi(f)(\lambda I - T).$$

Dostali jsem, že $\Psi(f)$ je levá inverze operátoru $\lambda I_{\mathrm{Rng}\, E(A)} - T_A$. Obdobně se ukáže, že $\Psi(f)$ je též pravá inverze, a tedy $\lambda \notin \sigma(T_A)$.

(d) Nechť $A \subset K$ je neprázdná otevřená podmnožina K. Pokud by platilo $E(A) = 0$, platí $I = E(K \setminus A)$, takže $\mathrm{Rng}\, E(K \setminus A) = H$. Potom $T_{K\setminus A} = T$, a tedy

$$K = \sigma(T) = \sigma(T_{K\setminus A}) \subset K \setminus A,$$

ož je spor.

□

VĚTA 31. *Nechť H he Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť $\lambda \in \sigma(T)$ a E je rozklad jednotky daný Větou 30. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Platí $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ právě tehdy, když $E(\{\lambda\}) \neq 0$.

(b) Je-li $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$, pak $E(\{\lambda\})$ je projekce na $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$.
(c) Je-li λ izolovaný bod $\sigma(T)$, je v $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

DŮKAZ. (a) Máme $(\lambda - Id)\chi_{\{\lambda\}} = 0$, takže $(\lambda I - T)E(\{\lambda\}) = 0$. Proto $\operatorname{Rng} E(\{\lambda\}) \subset \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$.

Dokažme nyní obrácenou inkluzi. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$B_n = \{z \in \sigma(T);\ |z - \lambda| \geq \frac{1}{n}\}$$

a položme

$$f_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda - z}, & z \in B_n, \\ 0, & z \in \sigma(T) - B_n. \end{cases}$$

Nechť $f(T)$ značí $\int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}E$, $f \in \mathrm{Bf^b}(\sigma(T))$. Pro $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ máme $f_n(T)(\lambda I - T)x = f_n(T)0 = 0$, a tedy

$$\chi_{B_n}(T)x = f_n(T)(\lambda I - T)x = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proto pro každé $y \in H$ platí

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle (1 - \chi_{B_n})(T)x, y\rangle \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} (1 - \chi_{B_n}) \,\mathrm{d}E_{x,y} = \int_{\sigma(T)} \chi_{\{\lambda\}} \,\mathrm{d}E_{x,y} = \langle E(\{\lambda\})x, y\rangle.$$

Proto $x = E(\{\lambda\})x \in \operatorname{Rng} E(\{\lambda\})$.

(b) Platí

$$\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\} \Leftrightarrow E(\{\lambda\}) \neq 0.$$

(c) Množina $\{\lambda\}$ je otevřená v $\sigma(T)$, a tedy $E(\{\lambda\}) \neq 0$ dle Věty 30(d). Díky (a) je $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

□

VĚTA 32. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je normální operátor se spektrem $K = \sigma(T)$. Nechť E je rozklad identity jemu příslušející. Pro danou $[f] \in L_\infty(E)$ označme $L = \operatorname{ess\,Rng} f$. Definujme $F\colon \mathrm{Bs}(L) \to L(H)$ jako*

$$F(B) = E(f^{-1}(B)), \quad B \in \mathrm{Bs}(L).$$

Pak pro operátor $S = \int_K f \,\mathrm{d}E$ platí $\sigma(S) = L$ a F je rozklad identity pro S.

DŮKAZ. Vlastnosti (a)–(d) z Definice 24 snadno plynou z definice díky tomu, že f^{-1} zachovává množinové operace. Pro $x, y \in H$ platí

$$\langle F(A)x, y\rangle = \langle E(f^{-1}(A))x, y\rangle = E_{x,y}(f^{-1}(A)) f(E_{x,y})(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(L).$$

Tedy $F_{x,y} = f(E_{x,y})$ je komplexní míra na $\mathrm{Bs}(L)$. Je tedy regulární dle Věty **??**.

Zobrazení $g \mapsto \int_K g \,\mathrm{d}E$ je $*$-izomorfismus $L_\infty(E)$ do $L(H)$, a tedy zachovává spektra. Proto $\sigma(S) = \sigma([f]) = \operatorname{ess\,Rng} f = L$ (viz Tvrzení 28(c)).

K dokončení důkazu stačí ukázat, že $S = \int_L Id \,\mathrm{d}F$. Nechť $x, y \in H$ jsou libovolné. Protože pro funkci $Id\colon L \to \mathbb{C}$ platí $Id \circ f = f$, máme

$$\begin{aligned}\langle Sx, y\rangle &= \langle\left(\int_K f(\lambda)\,\mathrm{d}E(\lambda)\right)x, y\rangle = \int_K f(\lambda)\,\mathrm{d}E_{x,y}(\lambda) = \int_K (Id \circ f)(\lambda)\,\mathrm{d}E_{x,y}(\lambda) \\ &= \int_L Id \,\mathrm{d}f(E_{x,y}) = \int_L \mu \,\mathrm{d}F_{x,y}(\mu) = \langle\left(\int_L Id \,\mathrm{d}F\right)x, y\rangle.\end{aligned}$$

Tedy $S = \int_L Id \,\mathrm{d}F$ a důkaz je dokončen.

□

PŘÍKLAD 33. Nechť $H = L_2(\mu)$ pro nějakou σ-konečnou míru μ na měřitelném prostoru (Ω, Σ). Nechť $m \in L_\infty(\mu)$ a M je operátor definovaný jako

$$Mf = mf, \quad f \in H.$$

Pak platí následující tvrzení:

(a) Operátor M je dobře definovaný normální operátor na H a platí $\|M\| = \|m\|_\infty$.

(b) Platí

$$\sigma_{\mathrm{p}}(M) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \mu(m^{-1}(\lambda)) > 0\} \quad \text{a} \quad \sigma(M) = \operatorname{ess\,Rng} m.$$

(c) Platí $M^*g = \overline{m}g$, $g \in H$, a operátor M je samoadjungovaný právě tehdy, když m je reálná. Dále je M pozitivní právě tehdy, když $m \geq 0$.

(d) Rezolventní funkce je dána vzorcem

$$(\lambda I - M)^{-1} g = \frac{g}{\lambda - m}, \quad g \in H, \quad \lambda \in \rho(M).$$

(e) Rozklad jednotky E pro operátor M je dán jako

$$E(A)f = \chi_{m^{-1}(B)} f, \quad f \in H, \quad B \in \operatorname{Bs}(\sigma(M)).$$

(f) Pro každou $h \in L_\infty(E)$ platí

$$\left(\int_{\sigma(M)} h \,\mathrm{d}E\right) f = (h \circ m) f, \quad f \in H.$$

DŮKAZ. (a) Platí

$$\int_\Omega |mf|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \|m\|_\infty^2 \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in H,$$

a tedy $M \in L(H)$ a $\|M\| \leq \|m\|_\infty$.

Pro dané $\varepsilon > 0$ položme $A' = \{\omega \in \Omega;\ |m(\omega)| > \|m\|_\infty - \varepsilon\}$. Pak $\mu(A) > 0$, a tedy existuje množina $A \subset A'$ konečné kladné míry. Pak $\|\chi_A\|_H^2 = \int_\Omega \chi_A \,\mathrm{d}\mu = \mu(A)$. Položme

$$f = \frac{\chi_A}{\|\chi_A\|^2}.$$

Pak $f \in S_H$ a

$$\|Mf\|^2 = \frac{1}{\|\chi_A\|^2} \int_A |m|^2 \,\mathrm{d}\mu \geq \frac{1}{\|\chi_A\|^2} \int_A (\|m\|_\infty - \varepsilon)^2 \,\mathrm{d}\mu = (\|m\|_\infty - \varepsilon)^2 \frac{\mu(A)}{\|\chi_A\|^2} = (\|m\|_\infty - \varepsilon)^2.$$

Tedy $\|M\| = \|m\|_\infty$.

(b) Pokud $\lambda \in \mathbb{C}$ je takové, že $\mu(m^{-1}(\lambda)) > 0$, vezmeme $A \subset m^{-1}(\lambda)$ kladné konečné míry. Pak $\chi_A \in H$ a platí $mf = \lambda f$. Tedy $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Nechť $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(M)$ a $f \in \operatorname{Ker}(\lambda I - M)$ je nenulový. Pak $f(m - \lambda) = 0$. Pokud $\mu(m^{-1}(\lambda)) = 0$, je $f = 0$ skoro všude, tj. $f = 0$. Proto $\mu(m^{-1}(\lambda)) > 0$.

Pokud $\lambda \notin \operatorname{ess\,Rng} m$, je operátor $g \mapsto \frac{g}{\lambda - m}$ inverzní k $\lambda I - M$.

Nechť $\lambda \in \operatorname{ess\,Rng} m$. Chceme ukázat, že $\lambda \in \sigma(M)$. Díky popisu $\sigma_{\mathrm{p}}(M)$ můžeme předpokládat, že $\mu(m^{-1}(\lambda)) = 0$. Předpokládejme, že $N = (\lambda I - M)^{-1}$.

Pro $n \in \mathbb{N}$ uvažujme množiny $A'_n = m^{-1}(B(\lambda, \frac{1}{n}))$. Pak $\mu(A'_n) > 0$, takže lze nalézt množiny $A_n \subset A'_n$ kladné míry. Položme $g_n = \chi_{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $g_n \in H$ a pro $f_n = Ng_n$ platí $f_n(\lambda - m) = g_n$. Tedy $f_n = \frac{g_n}{\lambda - m}$ na $\Omega \setminus m^{-1}(\lambda)$. Pak ale

$$\begin{aligned}\|f_n\|^2 &= \int_{\Omega \setminus m^{-1}(\lambda)} |\chi_{A_n} \frac{1}{\lambda - m}|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_{A_n \setminus m^{-1}(\lambda)} \frac{1}{|\lambda - m|^2} \,\mathrm{d}\mu \geq \\ &= \int_{A_n \setminus m^{-1}(\lambda)} n^2 \,\mathrm{d}\mu = n^2 \mu(A_n) = n^2 \|g_n\|^2.\end{aligned}$$

Tedy $\|N\| \geq n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což je spor. Proto $\lambda \in \sigma(M)$.

(c) Položme $M'f = \overline{m}f$, $f \in H$. Pak

$$\langle Mf, g\rangle = \int_\Omega mf\overline{g} \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\overline{\overline{m}g} \,\mathrm{d}\mu = \langle f, M'g\rangle, \quad f, g \in H.$$

Tedy $M' = M*$. Druhé tvrzení je pak okamžitým důsledkem. Je-li totiž M samoadjungovaný, pak $mf = \overline{m}f$ pro každé $f \in H$. což implikuje $m = \overline{m}$. Podobně nezápornost m implikuje pozitivitu M. Obráceně, pokud

$$\int_\Omega mf\overline{f}\,\mathrm{d}\mu = \langle Mf, f\rangle \geq 0, \quad f \in H,$$

je $m \geq 0$ skoro všude.

Tvrzení (d) bylo právě dokázáno během důkazu (b).

(e) Ukážeme, že zobrazení E je rozklad jednotky. Dle (c) je každý operátor $E(B)$ samoadjungovaná projekce. Zjevně $E(\sigma(M)) = I$ a $E(\emptyset) = 0$. Pro $B_1, B_2 \in \mathrm{Bs}(\sigma(M))$ platí

$$\begin{aligned} E(B_1)E(B_2)f &= E(B_1)(\chi_{m^{-1}(B_2)}f) = \chi_{m^{-1}(B_1)}\chi_{A_2}f = \chi_{m^{-1}(B_1)\cap m^{-1}(B_2)}f \\ &= \chi_{m^{-1}(B_1\cap B_2)}f = E(B_1 \cap B_2)f, \quad f \in H. \end{aligned}$$

Tedy vlastnost (c) Defince 24 je splněna. Pokud $A_1, A_2 \in \mathrm{Bs}(\Sigma(M))$ jsou disjunktní, platí

$$\begin{aligned} E(B_1)f + E(B_2)f &= \chi_{m^{-1}(B_1)}f + \chi_{m^{-1}(B_2)}f = (\chi_{m^{-1}(B_1)} + \chi_{m^{-1}(B_2)})f = \chi_{m^{-1}(B_1)\cup m^{-1}(B_2)}f \\ &= \chi_{m^{-1}(B_1\cup B_2)}f = E(B_1 \cup B_2)f, \quad f \in H. \end{aligned}$$

Tedy i (d) z Definice 24 je splněno. Konečně pro $f, g \in H$ položme

$$\mu_{f,g}(A) = \int_A f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Jelikož $f\overline{g} \in L_1(\mu)$, je $\mu_{f,g}$ dobře definovaná komplexní míra na Σ. Tedy míra $\nu_{f,g} = m(\mu_{f,g})$ je komplexní míra na $\mathrm{Bs}(\sigma(M))$.

Pro každé $B \in \mathrm{Bs}(\sigma(M))$ pak platí

$$E_{f,g}(B) = \langle E(B)f, g\rangle = \int_\Omega \chi_{m^{-1}(B)}f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu = \mu_{f,g}(m^{-1}(B)) = \nu_{f,g}(B),$$

a tedy i (e) Definice 24 je splněno.Vzhledem k Větě **??** je $E_{f,g}$ regulární míra.

Ukažme, že $M = \int_{\sigma(M)} Id\,\mathrm{d}E$. Pro libovolnou dvojici $f, g \in H$ totiž máme

$$\left\langle \left(\int_{\sigma(M)} Id\,\mathrm{d}E\right) f, g\right\rangle = \int_{\sigma(M)} Id\,\mathrm{d}E_{f,g} = \int_{\sigma(M)} Id\,\mathrm{d}\nu_{f,g} = \int_\Omega m\,\mathrm{d}\mu_{f,g} = \int_\Omega mf\overline{g}\,\mathrm{d}\mu = \langle Mf, f\rangle.$$

Tím je tvrzení (e) dokázáno.

(f) Nechť $h \in L_\infty(E)$ je dáno. Pak pro libovolnou dvojici $f, g \in H$ platí

$$\left\langle \left(\int_{\sigma(M)} h\,\mathrm{d}E\right) f, g\right\rangle = \int_{\sigma(M)} h\,\mathrm{d}E_{f,g} = \int_\Omega (h\circ m)\,\mathrm{d}\mu_{f,g} = \int_\Omega (h\circ m)f\overline{g}\,\mathrm{d}\mu = \langle (h\circ m)f, g\rangle.$$

Tím je důkaz dokončen.

□

5. Aplikace spektrálního rozkladu

VĚTA 34. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Platí $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in H$.

(ii) Platí $T^\star = T$ a $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$.

DŮKAZ. (i) $\Rightarrow$ (ii) Dle Věty 17 je T samoadjungovaný. Podle Věty 17 je

$$\sigma(T) \subset \overline{\{\langle Tx, x\rangle;\ x \in S_H\}} \subset [0, +\infty).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nechť E je rozklad jednotky příslušný T. Pak pro každé $x \in H$ platí

$$\langle Tx, x\rangle = \int_{\sigma(T)} \lambda\,\mathrm{d}E_{x,x}(\lambda) \geq 0.$$

□

DEFINICE 35. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ splňuje (i) Věty 34. Pak T se nazývá pozitivní operátor (značíme $T \geq 0$). Všimněme se, že tato definice pozitivnosti souhlasí s Definicí **??**.

VĚTA 36. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$.*

(a) Je-li $T \geq 0$, pak existuje právě jeden $S \geq 0$ takový, že $S^2 = T$. (značíme $S = \sqrt{T}$).
(b) Je-li T invertibilní a pozitivní, $\sqrt{S}$ je též invertibilní.

DŮKAZ. (a) Nechť E je rozklad jednotky pro T. Protože $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$, je operátor $S = \int_{\sigma(T)} \sqrt{\lambda}\, \mathrm{d}E(\lambda)$ dobře definovaný a z vlastností rozkladu jednotky splňuje $S^2 = T$. Dále je S pozitivní, neboť

$$\langle Sx, x\rangle = \langle \int_{\sigma(T)} \sqrt{\lambda}\, \mathrm{d}E_{x,x}(\lambda) \geq 0, \quad x \in H.$$

Nechť S_1, S_2 jsou pozitivní operátory splňující $S_1^2 = S_2^2 = T$. Jelikož $\sigma(S_1) = \sqrt{\sigma(T)} = \sigma(S_2)$ dle Věty **??**(d), jsou rozklady jednotky E_1 a $E - 2$ příslušné S_1 a S_2 definované na jedné kompaktní množině $L \subset [0, +\infty)$, přičemž $\|S_1\| = \|S_2\| = \sqrt{\|T\|}$ (viz Větu 10.103(b)). Nechť $M = \|S_1\|$. Jelikož

$$\int_{\sigma(S_1)} \lambda^2\, \mathrm{d}E_1(\lambda) = T = \int_{\sigma(S_2)} \lambda^2\, \mathrm{d}E_2(\lambda),$$

platí

$$\int_L p(\lambda^2)\, \mathrm{d}E_1(\lambda) = \int_L p(\lambda^2)\, \mathrm{d}E_2(\lambda), \quad p \text{ polynom na } \mathbb{R}.$$

Pomocí Stoneovy-Weierstraßovy věty odvodíme, že platí

$$\int_L f(\lambda^2)\, \mathrm{d}E_1(\lambda) = \int_L f(\lambda^2)\, \mathrm{d}E_2(\lambda), \quad f \in C([0, M^2]).$$

Je-li $g \in C([0, M])$ libovolná, je funkce $f(\lambda) = g(\sqrt{\lambda})$ prvek $C([0, M^2])$, a tedy

$$\int_L g(\lambda)\, \mathrm{d}E_1(\lambda) = \int_L f(\lambda^2)\, \mathrm{d}E_1(\lambda) = \int_L f(\lambda^2)\, \mathrm{d}E_2(\lambda) = \int_L g(\lambda)\, \mathrm{d}E_2(\lambda).$$

Standardní aplikací Lemmatu 22 odvodíme rovnost $\int_L g\, \mathrm{d}E_1 = \int_L g\, \mathrm{d}E_2$ pro každou $g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(L)$. Tedy $E_1 = E_2$, z čehož plyne rovnost $S_1 = S_2$.

Pokud je T navíc invertibilní, je díky Větě **??**(d) invertibilní i operátor $\sqrt{T}$.

□

DEFINICE 37. Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory a $U \in L(H, G)$ je operátor. Řekneme, že U je částečná izometrie, pokud existují uzavřené podprostory $H_1 \subset\subset H$ a $G_1 \subset\subset G$ takové, že U je izometrie H_1 na G_1 a $U = 0$ na $(H_1)^\perp$.

LEMMA 38. *Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory a $U \in L(H, G)$ je operátor. Je-li U částečná izometrie, přičemž H_1 a G_1 jsou příslušné podprostory z Definice 37, nechť $Q \in L(H)$ ortogonální projekce na H_1. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Platí $UU^* = Q$.
(b) Operátor U^* izometricky zobrazuje G_1 na H_1.
(c) Platí $U^* \restriction_{G_1} = (U \restriction_{H_1})^{-1}$.

DŮKAZ. (a) Pišme $H = H_1 \oplus H_1^\perp$. Pak $U\colon H_1 \to G_1$ je unitární operátor (viz Větu 3). Pro $x = x_1 = x_2$ a $y = y_2 + y_2$, kde $x_1, y_1 \in H_1$ a $x_2, y_2 \in H_1^\perp$, tak platí

$$\langle U^*Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle = \langle Ux_1, Uy_1\rangle = \langle x_1, y_1\rangle \quad \text{a}$$
$$\langle Qx, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle.$$

Dle Důsledku 7 platí $U^*U = Q$.

Tvrzení (b) a (c) nyní plynou z (a).

□

VĚTA 39 (Polární rozklad). *Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory a $T \in L(H, G)$ je operátor.*

(a) *Pak existuje právě jedna dvojice operátorů $P \in L(H)$ a $U \in L(H, G)$ s následujícími vlastnostmi.*

(a1) *Platí $T = UP$.*

(a2) *Operátor P je pozitivní a U je částečná izometrie, přičemž prostory H_1 a G_1 z Definice 37 jsou $H_1 = \overline{\operatorname{Rng} P}$ a $G_1 = \overline{\operatorname{Rng} T}$.*

Navíc platí $P^2 = T^\star T$ a $P = U^* T$.

(b) *Je-li T navíc invertibilní, lze T jednoznačně rozložit jako $T = UP$, kde $P \in L(H)$ je pozitivní a invertibilní a $U \in L(H, G)$ je unitární.*

DŮKAZ. (a) Položme $P = \sqrt{T^\star T}$. (Definice je korektní, neboť $T^\star T$ je pozitivní operátor na H, což plyne z výpočtu

$$\langle T^\star T x, x\rangle = \langle Tx, (T^\star)^* x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle \geq 0, \quad x \in H.)$$

Pro $x \in H$ pak platí

$$\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle P^2 x, x\rangle = \langle T^\star T x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2.$$

Operátor $\widetilde{U}\colon \operatorname{Rng} P \to \operatorname{Rng} T$ definovaný jako

$$\widetilde{U} y = Tx, \quad x \in P^{-1}(y), y \in \operatorname{Rng} P,$$

je proto dobře definovaná izometrie $\operatorname{Rng} P$ na $\operatorname{Rng} T$. Lze ji proto jednoznačně rozšířit na izometrii $U\colon \overline{\operatorname{Rng} P} \to \overline{\operatorname{Rng} T}$. Tu dodefinujeme na celé H pomocí složení s ortogonální projekcí Q prostoru H na $\overline{\operatorname{Rng} P}$.

Přím z definice pak dostáváme $T = UP$. Stejně tak máme ihned vlastnost (a2).

Pokud $T = U'P'$ je jiný rozklad splňující (a1) a (a2), máme dle Lemmatu 38

$$T^\star T = (U'P')^*(U'P') = P'(U')^* U' P = P' Q P' = (P')^2,$$

a tedy $P' = P$ dle Věty 36. Protože $UPx = Tx = U'P'x = U'Px$ pro $x \in H$, platí i $U = U'$. Rozklad je tedy jednoznačný.

Konečně platí

$$U^* T = U^* U P = QP = P.$$

(b) Je-li T navíc invertibilní, je invertibilní i operátor $T^\star T$, a potažmo i $P = \sqrt{T^\star T}$. Tedy $\operatorname{Rng} P = H$ a $\operatorname{Rng} T = G$, z čehož plyne, že U je unitární operátor (viz Větu 3).

□

PŘÍKLAD 40. Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory, $\{e_i;\ i \in I\}$ je ortonormální systém v H a $\{f_i;\ i \in I\}$ je ortonormální systém v G. Nechť $m = \{m_i;\ i \in I\}$ je omezená posloupnost. Uvažujme operátor $T \in L(H, G)$ definovaný jako

$$Mx = \sum_{i \in I} m_i \langle x, e_i\rangle f_i, \quad x \in H.$$

Pak platí následující tvrzení:

(a) Operátor M je dobře definovaný, $\|M\| = \|\lambda\|_\infty$ a

$$M^* y = \sum_{i \in I} \overline{m_i} \langle y, f_i\rangle e_i, \quad y \in G.$$

(b) Operátor M je kompaktní právě tehdy, když $m \in c_0(I)$.

(c) Nechť $G = H$ a $f_i = e_i$ pro $i \in I$. Pak platí následující tvrzení:

(c1) Operátor M je normální, přičemž je samoadjungovaný právě tehdy, když m_i, $i \in I$, jsou reálná.

(c2) Operátor M je pozitivní právě tehdy, když m_i, $i \in I$, jsou nezáporná.

(c3) Platí

$$\sigma_{\mathrm{p}}(M) = \{m_i;\ i \in I\} \quad \text{a} \quad \sigma(M) = \overline{\{m_i;\ i \in I\}}.$$

(c4) Rozklad jednotky E pro M je dán jako

$$E(B) = \sum_{i \in m^{-1}(B)} m_i \langle x, e_i\rangle e_i, \quad B \in \operatorname{Bs}(\sigma(M)),$$

a pro každou $h \in L_\infty(E)$ platí

$$\left(\int_{\sigma(M)} h \, \mathrm{d}E\right) x = \sum_{i \in I} h(m_i) \langle x, e_i \rangle e_i, \quad x \in H.$$

DŮKAZ. (a) Pro $x \in H$ platí

$$\|Mx\|^2 = \sum_{i \in I} |m_i|^2 |\langle x, e_i \rangle| \leq \|\lambda\|_\infty^2 \|x\|^2.$$

Tedy $\|M\| \leq \|m\|_\infty$.

Pro dané $\varepsilon > 0$ nechť $j \in I$ je zvolena tak, že $|m_j| \geq \|m\|_\infty - \varepsilon$. Pak $e_j \in S_H$ a platí

$$\|Mx\| = \|m_j f_j\| = |m_j| \geq \|m\|_\infty - \varepsilon.$$

Tedy $\|M\| = \|m\|_\infty$.

Označme

$$M' y = \sum_{i \in I} \overline{m_i} \langle y, f_i \rangle e_i, \quad y \in G.$$

Pro $x \in H$ a $y \in G$ platí

$$\begin{aligned}
\langle Mx, y \rangle &= \langle \sum_{i \in I} m_i \langle x, e_i \rangle f_i, \sum_{j \in J} \langle y, f_j \rangle f_j \rangle = \sum_{i \in I} m_i \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, f_i \rangle}, \\
\langle x, M' y \rangle &= \langle \sum_{i \in I} \langle x, e_i \rangle e_i, \sum_{j \in J} \overline{m_j} \langle y, f_j \rangle e_j \rangle = \sum_{i \in I} m_i \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, f_i \rangle},
\end{aligned}$$

a tedy $M^* = M'$.

(b) Pokud $m \in c_0(I)$, pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $F = \{i \in I;\ |m_i| > \varepsilon\}$ konečná. Položme

$$M_F x = \sum_{i \in F} m_i \langle x, e_i \rangle f_i, \quad x \in H.$$

Pak

$$\|Mx - M_F x\|^2 = \langle \sum_{i \in I \setminus F} m_i \langle x, e_i \rangle f_i, \sum_{j \in I \setminus F} m_j \langle x, e_j \rangle f_j \rangle = \sum_{i \in I \setminus F} |m_i|^2 |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \|x\|^2.$$

Tedy $M \in \overline{F(H, G)}$, a tedy je kompaktní.

Nechť nyní existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $F = \{i \in I;\ |m_i| \geq \varepsilon\}$ je nekonečná. Uvažujme vektory e_j, $j \in F$. Pak pro různé indexy $j, j' \in J$ platí

$$\|Me_j - Me_{j'}\|^2 = \langle m_j f_j - m_{j'} f_{j'}, m_j f_j - m_{j'} f_{j'} \rangle = |m_j|^2 + |m_{j'}|^2 \geq 2\varepsilon^2.$$

Tedy množina $\{Me_j;\ j \in F\}$ není relativně kompaktní, což znamená, že M není kompaktní.

(c) V tomto případě uvažujme měřitelný prostor $(I, \mathcal{P}(I))$ s diskrétní mírou. Pak zobrazení $\phi \colon H \to \ell_2(I)$ definované jako $\phi(x) = \{\langle x, e_i \rangle\}_{i \in I}$ je izometrický izomorfismus a platí

$$Mx = (\phi^{-1} \circ N \circ \phi) x, \quad x \in H,$$

kde $N \in L(\ell_2(I))$ je definováno jako

$$(Ny)_i = m_i y_i, \quad i \in I, \quad y \in \ell_2(I).$$

Vlastnosti operátoru M nyní snadno plynou z Příkladu 33.

□

VĚTA 41 (Schmidtova reprezentace). *Nechť H, G jsou Hilbertovy prostory a $T \in K(H, G)$. Pak existuje $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a nerostoucí posloupnost kladných čísel $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ obsažená v $c_0(\{1, \dots, N\})$„ ortonormální systém $\{e_n\}_{n=1}^N$ v H a ortonormální systém $\{f_n\}_{n=1}^N$ v G takové, že*

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle f_n, \quad x \in H.$$

Posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ je přitom určena jednoznačně.

DŮKAZ. *Krok 1.* Nechť $T = UP$ je polární rozklad T. Jelikož $P = \sqrt{T^\star T}$, je P kompaktní, pozitivní operátor.

Vskutku, $T^\star T$ je kompaktní a funkce $f : \lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ je nezáporná funkce s hodnotou 0 v 0. Lze ji proto na $\sigma(T^\star T)$ stejnoměrně aproximovat polynomy $\{p_n\}$, pro které též platí $p(0) = 0$. Proto $p_n(T^\star T)$, $n \in \mathbb{N}$, jsou kompaktní operátory a konvergují k P. Proot je P kompaktní. Pozitivnost P pak plyne z vlastností spojitého kalkulu, viz Větu **??**.

Pomocí Věty 20 nalezneme $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ nenulových prvků $\sigma(P)$ a ortonormální systém $\{e_n\}_{n=1}^N$ v H takový, že

$$Px = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n, \quad x \in H.$$

Pak $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ sestává z kladných čísel, přičemž předpokládáme, že se jedná o nerostoucí posloupnost. Jelikož $\sigma(P) = \sqrt{\sigma(T^\star T)}$, konvergují λ_n k 0, pokud $N = \infty$ (viz Větu **??**). Dále jsou vektory e_n obsaženy v Rng P. Jelikož $U : \overline{\text{Rng } P} \to \overline{\text{Rng } T}$ je unitární operátor, tvoří vektory $f_n = Ue_n$ ortonormální systém v G. Pak máme hledaný rozklad, neboť

$$Tx = UPx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n\rangle f_n, \quad x \in H.$$

Krok 2. Předpokládejme, že

$$Tx = \sum_{n=1}^{N'} \lambda'_n \langle x, e'_n\rangle f'_n, \quad x \in H,$$

pro nějaký rozklad splňující požadavky tvrzení. Označme $H_1 = \overline{\text{span}}\{e'_n;\ n = 1, \ldots, N'\}$ a $G_1 = \overline{\text{span}}\{f'_n;\ n = 1, \ldots, N'\}$. Položme

$$P'x = \sum_{n=1}^{N'} \lambda'_n \langle x, e'_n\rangle e'_n, \quad x \in H.$$

Pak $P' \geq 0$. Je-li totiž $x \in H$ libovolné, platí $x = (x - \sum_{n=1}^{N'} \langle x, e'_n\rangle e'_n) + \sum_{n=1}^{N'} \langle x, e'_n\rangle e'_n$, přičemž $x - \sum_{n=1}^{N'} \langle x, e'_n\rangle e'_n \in H_1^\perp$. Pak

$$\langle P'x, x\rangle = \langle \sum_{n=1}^{N'} \lambda'_n \langle x, e'_n\rangle e'_n, \sum_{k=1}^{N'} \langle x, e'_k\rangle e'_k\rangle = \sum_{n=1}^{N'} \lambda'_n |\langle x, e'_n\rangle|^2 \geq 0.$$

Definujeme-li $U' \colon H_1 \to G_1$ jako

$$U'x = \sum_{n=1}^{N'} \langle x, e'_n\rangle f'_n, \quad x \in H,$$

dostaneme částečnou izometrii H do G, přičemž $U = 0$ na $H_1^\perp$ a $U \colon H_1 \to G_1$ je izometrie. Navíc $H_1 = \overline{\text{Rng } P'}$, $G_1 = \overline{\text{Rng } T}$ a $T = U'P'$. Dle Věty 39 platí $P' = P$ a $U' = U$. Speciálně platí $\sigma(P) = \sigma(P')$. Vzhledem k tomu, že $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lim_{n\to\to infty} \lambda'_n = 0$, platí

$$\{\lambda_n;\ n = 1, \ldots, N \in \mathbb{N}\} = \{\lambda'_n;\ n = 1, \ldots, N'\}.$$

Nechť $\lambda \in \sigma(P) \setminus \{0\}$. Pak λ má stejný počet výskytů v posloupnosti $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ jako v posloupnosti $\{\lambda'_n\}_{n=1}^{N'}$, neboť tento počet je roven dimenzi prostoru $\text{Ker}(\lambda - P)$. Proto $N = N'$ a $\{\lambda_n\}_{n=1}^N = \{\lambda'_n\}_{n=1}^{N'}$. Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 42. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in L(H)$ je unitární operátor. Pak existuje samodajungovaný operátor $S \in L(H)$ takový, že $T = \exp(iS)$.*

DŮKAZ. Uvažujme spojitou funkci $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ danou předpisem $f(t) = e^{i\lambda}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, a její restrikci $f = h\restriction_{[0,2\pi)}$. Pak f je spojitá bijekce $[0, 2\pi)$ na $\mathbb{T}$. Její inverze $g = f^{-1}\colon \mathbb{T} \to [0, 2\pi)$ je pak bodovou limitou spojitou funkcí, a speciálně je tedy borelovská.

Vkutku, pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujeme funkci

$$g_n(\lambda) = \begin{cases} t, & \lambda = e^{it}, t \in [0, 2\pi - \frac{1}{n}], \\ 2\pi - \frac{1}{n}, & \lambda = e^{it}, t \in [2\pi - \frac{1}{n}, 2\pi). \end{cases}$$

Tyto funkce jsou zjevně spojité a splňují $g_n \to g$.

Položme nyní $S = g(T) = \Psi(g)$, kde Ψ je zobrazení z Věty 23. Díky vlastnosti (f) této věty je S samodajungovaný operátor. Dále platí $h \circ g = Id$ na $\mathbb{T}$, a tedy díky Větě 23(e) máme

$$T = (Id)(T) = (h \circ g)(T) = h(g(T)) = h(S) = \exp(iS).$$

Tím je důkaz dokončen.

$\square$

Kapitola 12

Základy harmonické analýzy

Následující tvrzení je analogií Tvrzení 7.5(a).

TVRZENÍ 1. *Nechť G je topologická grupa. Je-li $a \in G$, pak operace $x \mapsto ax$, $x \mapsto xa$ a $x \mapsto x^{-1}$ jsou homeomorfismy G na G.*

DŮKAZ. Spojité inverze k daným zobrazením jsou dány po řadě dány předpisy $y \mapsto a^{-1}y$, $y \mapsto ya^{-1}$ a $y \mapsto y^{-1}$.

□

■■■[to asi patří sem]

PŘÍKLAD 2. Nechť G je lokálně kompaktní topologická komutativní grupa. Pak existuje právě jedna (až na konstantu) translačně invariantní Radonova míra μ na G.

(Nezáporná míra μ je Radonova, pokud je úplná, borelovské množiny jsou μ-měřitelné a platí

(1) $\mu(K) < \infty$ pro každý kompakt $K \subset G$,
(2) $\mu(E) = \inf\{\mu(U);\ U \supset E \text{ otevřená}\}$, E je μ-měřitelná,
(3) $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E \text{ kompaktní}\}$, $E \subset G$ otevřená nebo $E \subset G$ splňující $\mu(E) < \infty$.

Je-li prostor G σ-kompaktní, vlastnost (3) platí pro každou μ-měřitelnou množinu.)

(a) Uvažujme prostor $L_1(G)$ daný touto mírou. Definujme na něm násobení pomocí operace konvoluce, tj.

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y), \quad f, g \in L_1(G).$$

Prostor $L_1(G)$ je pak komutativní Banachova algebra, která má jednotku právě tehdy, když G je diskrétní.

(b) Nechť $M(G)$ značí prostor všech komplexních Radonových měr, tj. měr, jejichž totální variace je Radonova míra na G. Operaci násobení definujeme též pomocí konvoluce, přesněji

$$(\mu * \nu)(B) = (\mu \times \nu)\left(\{(x,y) \in G \times G;\ x+y \in B\}\right), \quad B \subset G \text{ borelovská},$$

anebo ekvivalentně lze tuto operaci popsat pomocí Rieszovy věty **??** vzorcem

$$(\mu * \nu)(g) = \int_G \int_G g(x+y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y), \quad g \in C_c(G).$$

Prostor $M(G)$ je pak komutativní banachova algebra s jednotkou ε_e (zde ε_e značí Dirakovu míru v jednotce e).

(c) Příklady grup tohoto typu jsou:

(1) konečná grupa $(\mathbb{Z}_n, +)$ s aritmetickou mírou a diskrétní topologií,
(2) $(\mathbb{R}, +)$ s obvyklou topologií a Lebesgueovou mírou,
(3) $(\mathbb{T}, \cdot)$ s obvyklou toologií a Lebesgueovou mírou μ, tj. mírou danou $\int_{\mathbb{T}} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\,\mathrm{d}t$, $f \in C(\mathbb{T})$,
(4) $(\mathbb{Z}, +)$ s diskrétní toologií a aritmetickou mírou,
(5) $((0, +\infty), \cdot)$ s obvyklou topologií a Lebesgueovou mírou,
(6) $2^{\mathbb{N}} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ se součinovými operacemi a součinovou mírou.

(f) Nechť G je lokálně kompaktní, abelovská topologická grupa a A je Banachova algebra $L_1(G)$ (viz Příklad **??**). Pak je zobrazení $f^*(x) = \overline{f(-x)}$, $x \in G$, $f \in L_1(G)$, involuce na A, se kterou je A B*-algebra právě tehdy, když $G = \{e\}$.

1. Topologické grupy

DEFINICE 3. Nechť $(G, +,)$ je komutativní grupa, kde 0 značí neutrální prvek. Je-li τ topologie na G, řekneme, že (G, τ) je topologická grupa, pokud jsou operace sčítání

$$(x, y) \mapsto x + y, \quad (x, y) \in G \times G$$

a operace inverzního prvku

$$x \mapsto -x, \quad x \in G,$$

spojité.

dusledky o $V + tV \subset U$

Nebude-li jinak řečeno, v této sekci bude symbol G značit lokálně kompaktní topologická komutativní grupu. Grupovou operaci budeme většinou značit jako $+$. Systém všech okolí 0 značíme jako $\tau(0)$.

TVRZENÍ 4. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Pro každé $a \in G$ je zobrazení $x \mapsto a + x$ homeomorfismus.
(b) Existuje báze okolí 0 tvořená relativně kompaktními symetrickými množinami. (Množina $U \in$ je symetrická, pokud $-U = U$.)
(c) Pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$.
(d) Pro každé $x \in G$ je $\{x + U;\ U \in \tau(0)\}$ systém všech okolí x.

DŮKAZ. (a) Ihned plyne ze spojitosti sčítání a invreze.

(b) Pro dané $U \in \tau(0)$ nalezneme relativně kompaktní $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset U$. Pak $W = V \cap (-V)$ je hledaná množina.

(c) Jelikož $0 + 0 = 0$, plyne tvrzení ze spojitosti sčítání.

(d) Tvrzení plyne z (a).

□

TVRZENÍ 5. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $\tau(0)$ značí systém okolí 0. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li $A \subset G$ libovolná množina a $U \subset G$ otevřená, je $A + U$ též otevřená.
(b) Jsou-li $K, L \subset G$ kompakty, je $K + L$ též kompakt.
(c) Je-li $K \subset G$ kompact a $F \subset G$ je uzavřená množina disjunktní s K, existuje $U \in \tau(0)$ splňující $(K + U) \cap (F + U) = \emptyset$.

DŮKAZ. (a) Tvrzení plyne z Tvrzení 4(a) a identity

$$A + U = \bigcup \{A + u;\ u \in U\}.$$

(b) Jelikož je $K \times L \subset G \times G$ kompakt a zobrazení sčítání $\varphi\colon K \times L \to G$ je spojité, je

$$K + L = \varphi(K \times L)$$

kompakt.

(c) Nechť K a F splňující předpoklady tvrzení jsou dány. Pro každé $x \in K$ nalezneme $U_x \in \tau(0)$ symetrické okolí splňující $(x + U_x + U_x + U_x) \cap F = \emptyset$. Pak $(x + U_x + U_x) \cap (F + U_x) = \emptyset$. (Pokud by totiž platilo $x + u_1 + u_2 = y + u_3$, kde $y \in F$ a $u_1, u_2, u_3 \in U_x$, dostali bychom $y = x + u_1 + u_2 - u_3 \in (x + U_x + U_x + U + x) \cap F$.)

Díky kompaktnosti existuje konečná množina $\{x_1 \dots, x_n\} \subset K$ splňující $K \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + U_{x_i})$. Pak $V = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$ je prvkem $\tau(0)$ a

$$K + V \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + U_{x_i} + V) \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + U_{x_i} + U_{x_i}) \subset G \setminus (F + V)..$$

□

PŘÍKLADY 6. (a) Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$ s grupovou operací definovanou jako sčítání modulo n diskrétní kompaktní grupa.

(b) Pro každé $d \in \mathbb{N}$ je $\mathbb{R}^d$ se sčítáním a eukleidovskou topologií nekompaktní grupa.

(c) Prostor $\mathbb{T}$ s násobením je kompaktní grupa.

(d) Prostor $\mathbb{Z}$ se sčítáním je diskrétní nekompaktní grupa.

(e) Prostor $(0, +\infty)$ s násobením je nekompaktní grupa.

(f) Součinová grupa $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ se součinovou topologií a sčítáním definovaným po souřadnicích je kompaktní.

VĚTA 7. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak existuje právě jedna (až na násobek) translačně invariantní nenulová Radonova míra na G. Ta je kladná na neprázdných otevřených podmnožinách G.*

DŮKAZ. Dokážeme pouze závěrečné tvrzení. Nechť m je zkonstruovaná míra. Nechť $U \subset G$ je neprázdná otevřená množina. Předpokládejme, že $m(U) = 0$. Pak pro libovolný kompakt $K \subset G$ existuje konečná množina $F \subset K$ taková, že $K \subset F + U$. Z translanční invariance m pak plyne $m(K) = 0$. Díky regularitě míry m dostáváme $m = 0$, což je spor.

□

Míře garantované přecházející větou se říká Haarova míra. V dalším textu ji budeme značit symbolem m.

VĚTA 8. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pro $f, g \in L_1(G)$ definujme*

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}m(y), \quad x \in G.$$

Dále položme

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}, \quad x \in G, \quad f \in L_1(G).$$

Pak $(L_1(G), *)$ je komutativní Banachova algebra s izometrickou involucí.

DŮKAZ. Důkaz je analogický důkazu Věty **??**. Ověřme pouze vlastnosti involuce. Její komplexně sdružená linearita je jasná. Pokud $f, g \in L_1(G)$ jsou dány, pak

$$\begin{aligned}(g^* * f^*)(x) &= (f^* * g^*)(x) = \int_G f^*(y)g^*(x-y)\,\mathrm{d}m(y) = \int_G \overline{f(-y)g(y-x)}\,\mathrm{d}m(y)\\ &= \overline{\int_G f(-y)g(y-x)\,\mathrm{d}m(y)} = \overline{\int_G f(y)g(-y-x)\,\mathrm{d}m(y)}\\ &= \overline{(f*g)(-x)} = (f*g)^*(x).\end{aligned}$$

Konečně

$$\|f^*\| = \int_G |\overline{f(-x)}|\,\mathrm{d}m(x) = \int_G |f(x)|\,\mathrm{d}m(x) = \|f\|,$$

a tedy je $*$ izometrie.

□

TVRZENÍ 9. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $1 \le p < \infty$. Pak $C_c(G)$ je husté v $L_p(G)$.*

DŮKAZ. Nechť $f \in L_p(G)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Pak existuje kompakt $K \subset G$ takový, že $\int_{G\setminus K} |f|^p\,\mathrm{d}m < \varepsilon$.

Vskutku, uvažujme množiny

$$A = \{x \in G;\ |f(x)|^p > 0\} \quad \text{a} \quad A_n = \{x \in G;\ |f(x)|^p \ge \frac{1}{n}\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak $m(A_n) < \infty$ a $|f|^p \chi_{A_n} \to |f|^p \chi_A$. Dle Lebesgueovy věty máme

$$\int_G |f|^p \chi_{A_n}\,\mathrm{d}m \to \int_G |f|^p \chi_A\,\mathrm{d}m = \|f\|_p^p.$$

Vezmeme-li nyní dostatečně velký index $n \in \mathbb{N}$ a použijeme regularitu míry m, dostaneme požadovaný kompakt.

Nyní již stačí použít metodu důkazu Důsledku **??**.

□

DEFINICE 10. Nechť G je topologická grupa a (X, ρ) metrický prostor. Zobrazení $f : G \to X$ je stejnoměrně spojité, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje U okolí 0 takové, že $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ kdykoliv $x - y \in U$.

LEMMA 11. *Nechť G je topologická grupa a (P, ρ) metrický prostor. Nechť $p_0 \in X$ a $f : G \to X$ je spojité zobrazení takové, že množina $K = \overline{\{x \in G;\ f(x) \neq p_0\}}$ je kompaktní. Pak f je stejnoměrně spojité.*

Speciálně je každý element $C_c(G)$ stejnoměrně spojitý.

DŮKAZ. Pro dané $\varepsilon > 0$ a každé $x \in K$ nalezneme U_x okolí 0 takové, že $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pro $y \in x + U_x$. Nalezneme V_x symetrické okolí 0 takové, že $V_x + V_x \subset U_x$. Vybereme konečně mnoho prvků $x_1, \dots, x_n$ z K takových, že $K \subset bigcup_{i=1}^n (x_i + V_{x_i})$. Položme $V = \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$. Nechť $x, y \in G$ splňují $x - y \in V$. Předpokládejme nejprve, že $\{x, y\} \cap K \neq \emptyset$. Nechť například x je obsažen v K. pak existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in x_i + V_{x_i}$. Pak $x - y \in x_i + V_{x_i} + V_{x_i} \subset x_i + U_{x_i}$, a tedy $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Pokud $\{x, y\} \cap K = \emptyset$, máme $\rho(f(x), f(y)) = \rho(p_0, p_0) = 0 < \varepsilon$.

□

TVRZENÍ 12. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $1 \leq p < \infty$. Pak pro každou funkci $f \in L_p(G)$ je zobrazení $x \mapsto f_x$, kde $f_x(y) = f(y - x)$ pro $y \in G$, stejnoměrně spojité z G do $L_p(G)$.*

DŮKAZ. Nechť $f \in L_p(G)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nalezneme $g \in C_c(G)$ takové, že $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Označme $K = \operatorname{supp} g$ a nechť U je kompaktní okolí 0. Pak $m(K + U) < \infty$. Zvolme V okolí 0 takové, že $V \subset U$ a $|g(x) - g(y)| < \varepsilon(m(K + U))^{-1}$. Pak $\operatorname{supp} g_x \subset K + U$ a pro $x \in V$ platí

$$\begin{aligned}\|g - g_x\|_p &= \left(\int_G |g(z) - g(z - x)|^p \,\mathrm{d}m(z)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{K+U} \varepsilon^p (m(K + U))^{-p} \,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \varepsilon(m(K + U))^{-1} m(K + U) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Pak pro tato x máme

$$\|f - f_x\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_x\|_p + \|g_x - f_x\|_p \leq 3\varepsilon,$$

jelikož $\|g_x - f_x\|_p = \|(g - f)_x\|_p = \|f - g\|_p$.

Konečně pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in G$ platí

$$\|f_x - f_y\|_p = \|(f - f_{y-x})_x\|_p = \|f - f_{y-x}\|_p < \varepsilon.$$

□

TVRZENÍ 13. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Systém

$$\{g_U = \frac{1}{m(U)} \chi_U;\ U \textit{je relativně kompaktní okolí } 0\}$$

je aproximativní jednotka v $L_1(G)$, tj. pro každé $f \in L_(G)$ a $\varepsilon > 0$ existuje U relativně kompaktní okolí 0 takové, že $\|f - f * g_V\| < \varepsilon$ pro každé V okolí 0 splňující $V \subset U$.

(b) Grupa G diskrétní právě tehdy, když $L_1(G)$ má jednotku. V takovém případě je pak jednotka $L_1(G)$ rovna $\chi_{\{0\}}$. (Předpokládáme, že m je normalizovaná tak, aby $m(\{0\}) = 1$.)

DŮKAZ. (a) Nechť $f \in L_1(G)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nalezneme $g \in C_c(G)$ splňující $\|f - g\| < \varepsilon$ a zvolíme lokálně kompaktní $W \in \tau(0)$. Vezměme $\varepsilon' > 0$ splňující $\varepsilon'(m(K + W))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Nechť $U \subset W$ je takové lokálně kompaktní okolí 0, že $|g(x) - g(y)| < \varepsilon'$ pro $x, y \in U$ splňující $x - y \in G$. Pak pro V okolí 0 splňující $V \subset U$ platí

$$|g(x) - (g * g_V)(x)| = |\int_G g(x)g_V(y)\,\mathrm{d}m(y) - \int_G g_V(y)g(x-y)\,\mathrm{d}m(y)|$$
$$\leq \int_V |g(x) - g(x-y)|g_V(y)\,\mathrm{d}m(y) \leq \varepsilon'.$$

Jelikož $\operatorname{supp}(g * g_V) \subset K + V \subset K + U$, platí

$$\|g - g * g_V\|_p = \left(\int_G |g - g * g_V|^p\,\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon'(m(K+W))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Pak pro $V \in \tau(0)$ splňující $V \subset U$ platí

$$\|f - f * g_V\| \leq \|f - g\| + \|g - g * g_V\| + \|(g - f) * g_V\| \leq \varepsilon + \varepsilon + \|g - f\|\|g_V\| \leq 3\varepsilon.$$

(b) Pokud je G diskrétní, je zjevně $\chi_{\{0\}}$ jednotka $L_1(G)$.

Předpokládejme nyní, že $h \in L_1(G)$ je jednotka. Vezměme libovolný kompakt $K \subset G$ neobsahující 0. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme kompaktní $U \in \tau(0)$ takové, že $U \cap K = \emptyset$ a $\|h - h * g_U\| < \varepsilon$. Pak

$$\varepsilon > \|h - h * g_U\| = \|h - g_U\| = \int_G |h - g_U|\,\mathrm{d}m \geq \int_K |h - g_U|\,\mathrm{d}m = \int_K |h|\,\mathrm{d}m.$$

Jelikož ε bylo libovolné, dostáváme $\int_K |h|\,\mathrm{d}m = 0$, a tedy $h = 0$ na K. Proto $h = 0$ na $G \setminus \{0\}$.

Protože $h \neq 0$, nutně platí $m(\{0\}) > 0$. Pak pro libovolný kompakt $K \subset G$ platí

$$\infty > m(K) = \sum_{x \in K} m(\{x\}) = \sum_{x \in K} m(\{0\}),$$

a tedy K je konečný. Nechť $U \in \tau(0)$ je otevřené relativně kompaktní okolí. Pak U je konečná množina, a tedy i $\{0\} = U \setminus (U \setminus \{0\})$ je otevřená množina. Proto je G diskrétní.

□

2. Vztah $\Delta(L_1(G))$ a duální grupy

DEFINICE 14. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $\gamma\colon G \to \mathbb{T}$ je charakter, pokud γ je grupový homomorfismus, tj. $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$ pro každé $x, y \in G$. Symbolem $\widehat{G}$ rozumíme množinu všech spojitých charakterů a této množině říkáme duální grupa. Uvažujme na $\widehat{G}$ bodové násobení, tj. $(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\gamma_2(x)$, kde $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$ a $x \in G$.

LEMMA 15. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $\widehat{G}$ je též grupa, přičemž jednotková funkce je jednotka $\widehat{G}$, $\gamma(0) = 1$ pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ a*

$$\gamma(-x) = (\gamma^{-1})(x) = (\gamma(x))^{-1} = \overline{\gamma(x)}, \quad x \in G, \gamma \in \widehat{G}.$$

Dále je každý charakter stejnoměrně spojitý na G.

DŮKAZ. Jednotková funkce je zjevně jednotkou $\widehat{G}$. Dále $(\gamma(0))^2 = \gamma(0+0) = \gamma(0)$, a tedy $\gamma(0) = 1$. Konečně ověříme, že pro $x \in G$ a $\gamma \in \widehat{G}$ platí

$$1 = \gamma(0) = \gamma(x - x) = \gamma(x)\gamma(-x),$$

z čehož plyne požadovaný závěr.

Pro $\gamma \in \widehat{G}$ a $x, y \in G$ dále platí

$$|\gamma(x) - \gamma(y)| = |\gamma^{-1}(y)||\gamma(x-y) - 1| = |\gamma(x-y) - 1|.$$

Zvolíme-li tedy pro dané $\varepsilon > 0$ okolí $U \in \tau(0)$ takové, že $|\gamma(z) - 1| < \varepsilon$ pro $z \in U$, pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in U$ platí $|\gamma(x) - \gamma(y)| < \varepsilon$.

□

VĚTA 16. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $A = L_1(G)$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Pro každé $\varphi \in \Delta(A)$ existuje právě jedno $\gamma \in \widehat{G}$ takové, že $\varphi(f) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x)$, $f \in A$.
(b) Je-li $\gamma \in \widehat{G}$, pak zobrazení $f \mapsto \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x)$ je v $\Delta(A)$.

DŮKAZ. (a) Nechť $\varphi \in \Delta(A)$ je dáno. Jelikož je $\varphi \in B_{A^*}$, existuje jednoznačně určený prvek $\phi \in L_\infty(G)$ splňující $\varphi(f) = \int_G f\phi\,\mathrm{d}m$ a $\|\phi\|_\infty = \|\varphi\|$. Nechť $f, g \in A$ jsou libovolné. Pak

$$\begin{aligned}\int_G \varphi(f)g(y)\phi(y)\,\mathrm{d}m(y) &= \varphi(f)\varphi(g) = \varphi(f * g) = \varphi(g * f) = \int_G (f * g)(x)\phi(x)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_G \left(\int_G g(y)f(x-y)\,\mathrm{d}m(y)\right)\phi(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G g(y)\left(\int_G f(x-y)\phi(x)\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}\\ &= \int_G g(y)\varphi(f_y)\,\mathrm{d}m(y).\end{aligned}$$

Jelikož tato rovnost platí pro každé $g \in A$, dostáváme pro každé $f \in A$ rovnost

$$\varphi(f)\phi(y) = \varphi(f_y) \quad \text{pro skoro všechna } y. \tag{1}$$

Zvolme $f \in A \setminus \operatorname{Ker}\varphi$. Jelikož je dle Tvrzení 12 zobrazení $y \mapsto f_y$ spojité, dostáváme, že ϕ má spojitého reprezentanta. Lze tedy předpokládat, že ϕ je spojité, a že tedy (1) platí pro všechna $y \in G$.

Z rovnosti 1 obdržíme

$$\varphi(f)\phi(x+y) = \varphi(f_{x+y}) = \varphi((f_x)_y) = \varphi(f_x)\phi(y)\varphi(f)\phi(x)\phi(y), \quad x, y \in G, f \in A,$$

z čehož plyne vztah $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$, $x, y \in G$. Jelikož $\|\phi\|_\infty$, podobně jako v Lemmatu 15 odvodíme, že $\phi(-x) = \phi(x)^{-1}$, a že tedy $\operatorname{Rng}\phi \subset \mathbb{T}$. Tedy $\phi \in \widehat{G}$. Položíme-li nyní $\gamma(x) = \overline{\phi(x)}$, $x \in G$, obdržíme požadovaný charakter.

(b) Nechť $\gamma \in \widehat{G}$ je dáno. Nechť $\varphi \in A^*$ je určeno funcí γ, tj. $\varphi(f) = \int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x)$, $f \in A$. Pak pro $f, g \in A$ platí

$$\begin{aligned}\varphi(f * g) &= \int_G (f * g)(x)\overline{\phi(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \int_{G\times G} f(y)g(x-y)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}(m\times m)(x,y)\\ &= \int_{G\times G} f(y)g(x-y)\overline{\gamma(y+(x-y))}\,\mathrm{d}(m\times m)(x,y)\\ &= \int_G f(y)\overline{\gamma(y)}\left(\int_G g(x-y)\overline{\gamma(x-y)}\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}m(y)\\ &= \int_G f(y)\overline{\gamma(y)}\left(\int_G g(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}m(y)\\ &= \left(\int_G f(y)\overline{\gamma(y)}\,\mathrm{d}m(y)\right)\left(\int_G g(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x)\right)\\ &= \varphi(f)\varphi(g).\end{aligned}$$

Jelikož γ je různá od 0 na G, je $\varphi \neq 0$. Tedy $\varphi \in \Delta(A)$.

□

3. Fourierova transformace

DEFINICE 17. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak Fourierova transformace funkce $f \in L_1(G)$ je funkce $\widehat{f}\colon \widehat{G} \to \mathbb{C}$ definovaná jako

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(y)\overline{\gamma(y)}\,\mathrm{d}m(y), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

VĚTA 18. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $A = L_1(G)$. Nechť $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$ a nechť F značí Fourierovu transformaci. Pro každé $\varphi \in \Delta(A)$ označme γ_φ jednoznačně určený prvek $\widehat{G}$ daný Větou 16. Pak*

$$(\Gamma f)(\varphi) = (Ff)(\gamma_\varphi), \quad \varphi \in \Delta(A), \quad f \in A.$$

Dále platí následující tvrzení:

(a) *Zobrazení F je $*$-homomorfismus A do $\ell_\infty(\widehat{G}$ a normě nejvýše* 1.

(b) *Množina* Rng F *je podalgebra $\ell_\infty(\widehat{(G)})$ uzavřená na komplexní sdružení a oddělující body $\widehat{G}$. Dále pro každé $f \in A$ a $\gamma_0 \in \widehat{G}$, $x_0 \in G$, platí*

$$\widehat{f_{-x_0}}(\gamma) = \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma) \quad a \quad \widehat{\gamma_0 f}(\gamma) = \widehat{f}(\gamma\gamma_0^{-1}), \qquad \gamma \in \widehat{G}.$$

Speciálně jsou funkce

$$\gamma \mapsto \widehat{f}(\gamma\gamma_0^{-1}) \quad a \quad \gamma \mapsto \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma), \qquad \gamma \in \widehat{G},$$

obsaženy v Rng F.

(c) *Pro $f \in A$ a $\gamma \in \widehat{G}$ platí*

$$(f * \gamma)(x) = \gamma(x)\widehat{f}(\gamma) \quad a \quad \widehat{f}(\gamma) = (f * \gamma)(0), \qquad x \in G, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

DŮKAZ. Rovnost $\Gamma = F$ je dokázána v Větě 16.

(a) Zachovávání algebraických operací a odhad normy F plyne z Věty 10.83. Dále pro $f \in A$ platí

$$\begin{aligned}(Ff^*)(\gamma) &= \int_G f^*(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \int_G \overline{f(-x)\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \overline{\int_G f(-x)\gamma(x)\,\mathrm{d}m(x)}\\ &= \overline{\int_G f(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x)} = \overline{Ff(\gamma)},\end{aligned}$$

a F tedy zachovává involuci.

(b) Zřejmě je Rng F podalgebra $\ell_\infty(\widehat{G})$ oddělující body (opět viz Větu 10.83) a díky (a) je uzavřená na komplexní sdružení. Nechť $f \in A$, $\gamma_0 \in \widehat{G}$ a $x_0 \in G$ jsou dány. Položme $g(x) = \gamma_0(x)f(x)$, $x \in G$, a počítejme

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\gamma) &= \int_G f(x)\gamma_0(x)\overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \int_G f(x)\overline{(\gamma\gamma_0^{-1})(x)}\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \widehat{(}f)(\gamma\gamma_0^{-1}), \quad \gamma \in \widehat{G}.\end{aligned}$$

Dále pro funkci $g = f_{-x_0}$ platí

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\gamma) &= \int_G f_{-x_0}(y)\overline{\gamma(y)}\,\mathrm{d}m(y) = \int_G f(y+x_0)\gamma(-y)\,\mathrm{d}m(y) = \int_G f(z)\gamma(x_0-z)\,\mathrm{d}m(z)\\ &= \gamma(x_0)\int_G f(z)\overline{\gamma(z)}\,\mathrm{d}m(z) = \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}.\end{aligned}$$

(c) Pro $f \in A$ a $\gamma \in \widehat{G}$ máme

$$(f * \gamma)(x) = \int_G f(y)\gamma(x-y)\,\mathrm{d}m(x) = \gamma(x)\int_G f(y)\gamma(-y)\,\mathrm{d}m(y) = \gamma(x)\widehat{f}(\gamma), \quad x \in G.$$

Druhá rovnost pak ihned plyne z první.

□

TVRZENÍ 19. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $A = L_1(G)$. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li G diskrétní, je $\Delta(A)$ je kompaktní.
(b) Je-li G kompaktní, je $\Delta(A)$ je diskrétní.

DŮKAZ. (a) Je-li G diskrétní, má A jednotku, a tedy je $\Delta(A)$ kompaktní (viz Větu 10.67(b)).

(b) Nechť G je kompaktní. Předpokládejme, že m je normalizována tak, aby $m(G) = 1$. *Krok 1.* Pak funkce $e(x) = 1$, $x \in G$, je v A a

$$(e * e)(x) = \int_G e(y)e(x-y)\,\mathrm{d}m(y) = m(G) = 1 = e(x), \quad x \in G.$$

Uvažujme libovolné $\varphi \in \Delta(A)$. Pak $\varphi(e) = \varphi(e * e) = \varphi(e)^2$. Tedy $\varphi(e) \in \{0, 1\}$. Vezmeme charakter $\gamma \in \widehat{G}$ odpovídající φ, který je dán Větou 16. Předpokládejme, že $\varphi(e) = 1$. Pak pro každé $x_0 \in G$ platí

$$\begin{aligned}1 = \varphi(e) &= \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G \gamma(-x - x_0 + x_0)\,\mathrm{d}m(x) = \gamma(x_0)\int_G \gamma(-x - x_0)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \gamma(x_0)\int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \gamma(x_0)\varphi(e) = \gamma(x_0).\end{aligned}$$

Tedy odpovídající charakter γ je roven e.

Krok 2. Je-li nyní $\varphi_0 \in \Delta(A)$ dáno, nechť γ_0 je jemu odpovídající charakter. Nechť $\varphi \in \Delta(A)$ je libovolné a nechť γ je jemu odpovídající charakter. Položme $\delta(x) = \gamma_0(x)\gamma(-x)$, $x \in G$. Pak $\delta \in \widehat{G}$ a pro funkci $\gamma_0 \in A$ platí

$$\widehat{\gamma_0}(\varphi) = \varphi(\gamma_0) = \int_G \gamma_0(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G \delta(x)\,\mathrm{d}m(x).$$

Pokud $\varphi = \varphi_0$, tj. $\delta = e$, dostáváme $\widehat{\gamma_0}(\varphi_0) = 1$. Pokud $\varphi \neq \varphi_0$, charakter δ není roven e, a tedy $\widehat{\gamma_0}(\varphi) = 0$ dle prvního kroku. Protože je funkce $\widehat{\gamma_0}$ spojitá na $\Delta(A)$ a $\{\varphi_0\} = \{\varphi \in \Delta(A);\ |\widehat{\gamma_0}(\varphi)| > 0\}$, je množina $\{\varphi_0\}$ otevřená. tedy je $\Delta(A)$ diskrétní.

□

4. Duální topologická grupa

DEFINICE 20. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Uvažujme na $\widehat{G}$ topologii τ_K lokálně stejnoměrné konvergence. Přesněji, uvažujme množiny

$$U_{K,\varepsilon} = \{\gamma \in \widehat{G};\ |\gamma(x) - 1| < \varepsilon, x \in K\}, \quad K \subset G \text{ kompaktní}, \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Množina $V \subset \widehat{G}$ je pak τ_K-otevřená, pokud pro každé $\gamma \in V$ existuje množina $U_{K,\varepsilon}$ výše uvedeného typu splňující $\gamma U_{K,\varepsilon} \subset V$.

TVRZENÍ 21. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $(\widehat{G}, \tau_K)$ je topologická grupa.*

DŮKAZ. *Krok 1.* Ukažme nejprve, že τ_K je topologie. K tomu stačí ověřit, že pro dvě množiny U_{K_1,ε_1} a U_{K_2,ε_2} typu (2) existuje množina $U_{K,\varepsilon}$ splňující $U_{K,\varepsilon} \subset U_{K_1,\varepsilon_1} \cap U_{K_2,\varepsilon_2}$. Zjevně však stačí položit $K = K_1 \cup K_2$ a $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.

Krok 2. Ověříme, že grupové operace jsou na $\widehat{G}$ spojité. Nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je pevné a $U = \gamma_0^{-1}U_{K,\varepsilon}$ je dané okolí γ_0^{-1}. Uvažujme okolí γ_0 tvaru $\gamma_0 U_{-K,\varepsilon}$. Pak pro γ z tohoto okolí tvaru $\gamma = \gamma_0\delta$, kde $\delta \in U_{_K,\varepsilon}$, platí $\gamma^{-1} = \gamma_0^{-1}\delta^{-1} \in U$. To plyne z toho, že

$$|\delta^{-1}(x) - 1| = |\delta(-x) - 1| < \varepsilon, \quad x \in K.$$

K ověření spojitosti násobení uvažujme charaktery $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$ a okolí bodu $\gamma_1\gamma_2$ tvaru $\gamma_1\gamma_2 U_{K,\varepsilon}$. Ověříme, že

$$\mu_1\mu_2 \in \gamma_1\gamma_2 U_{K,\varepsilon}, \quad \mu_1 \in \gamma_1 U_{K,\frac{\varepsilon}{2}}, \mu_2 \in \gamma_2 U_{K,\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Nechť tedy $\mu_i = \gamma_i\delta_i$ pro nějaké $\delta_i \in U_{K,\frac{\varepsilon}{2}}$, $i = 1, 2$. Pak pro $x \in K$ platí

$$|\delta_1(x)\delta_2(x) - 1| = |(\delta_1(x) - 1)\delta_2(x) + (\delta_2(x) - 1)| \le |\delta_1(x) - 1||\delta_2(x)| + |\delta_2(x) - 1| < \varepsilon.$$

Tedy operace násobení $\cdot \colon \widehat{G} \times \widehat{G} \to \widehat{G}$ je spojitá.

□

LEMMA 22. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa, $A = L_(G)$ a $f \in A$. Nechť $\phi\colon \Delta(A) \to \widehat{G}$ je zobrazení dané Větou 16. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Zobrazení*

$$(x, \varphi) \mapsto \widehat{f_x}(\phi(\varphi)), \quad (x, \varphi) \in G \times \Delta(A),$$

spojité na $G \times \Delta(A)$.

(b) *Zobrazení*

$$(x, \varphi) \mapsto (\phi(\varphi))(x), \quad (x, \varphi) \in G \times \Delta(A),$$

je spojité na $G \times \Delta(A)$.

DŮKAZ. Nechť $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$ značí Gelfandovu transformaci. Připomeňme, že

$$\widehat{f_x}(\phi(\varphi)) = \int_G f_x(y)(\phi(\varphi))(-y)\,\mathrm{d}m(y) = \varphi(f_x) = (\Gamma f_x)(\varphi), \quad \varphi \in \Delta(A).$$

(a) Nechť $x_0 \in G$ a $\varphi_0 \in \Delta(A)$ jsou dány. Nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Díky Tvrzení 12 a spojitosti funkce Γf_{x_0} na $\Delta(A)$ existuje okolí U bodu x_0 a okolí V funkcionálu φ_0 takové, že

$$\|f_x - f_{x_0}\|_1\varepsilon,\ x \in U, \quad \text{a} \quad |(\Gamma f_{x_0})(\varphi) - (\Gamma f_{x_0})(\varphi_0)| < \varepsilon, vp \in V.$$

Pak

$$\begin{aligned}
|\widehat{f_x}(\phi(\varphi)) - \widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))| &\le |\widehat{f_x}(\phi(\varphi)) - \widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi))| + |\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi)) - \widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))| \\
&= |\widehat{f_x - f_{x_0}}(\phi(\varphi))| + |\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi)) - \widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))| \\
&= |(\Gamma(f_x - f_{x_0}))(\varphi)| + |\widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi)) - \widehat{f_{x_0}}(\phi(\varphi_0))| \\
&\le \|f_x - f_{x_0}\|_A + |\Gamma f_{x_0}(\varphi) - (\Gamma f_{x_0})(\varphi_0)| < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

(b) Nechť $(x_0, \varphi_0) \in G \times \Delta(A)$ je dáno. Nalezneme $f \in A$ takové, že $(\Gamma f)(\varphi_0) = \varphi_0(f) \neq 0$. Ze spojitosti Γf plyne existence okolí U bodu φ_0, na kterém je funkce Γf nenulová. Věta 18(b) dává pro $(x, \gamma) \in G \times \widehat{G}$ rovnost

$$\gamma(x)\widehat{f}(\gamma) = \widehat{f_{-x}}(\gamma),$$

a tedy

$$(\phi(\varphi))(x) = \widehat{f_{-x}}(\phi(\varphi))((\Gamma f)(\phi(\varphi)))^{-1}, \quad (x, \varphi) \in G \times U.$$

Jelikož je funkce $(x, \varphi) \mapsto ((\Gamma f)(\phi(\varphi)))^{-1}$ spojitá na $G \times U$, použitím (a) dostáváme spojitost funkce $(x, \varphi) \mapsto (\phi(\varphi))(x)$ v bodě (x_0, φ_0). Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 23. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $A = L_1(G)$. Nechť $\phi\colon \Delta(A) \to \widehat{G}$ je zobrazení dané Větou 16. Pak ϕ je homeomorfismus.*

DŮKAZ. *Krok 1.* Nechť $\varphi_0 \in \Delta(A)$ je dáno. Ozančíme $\gamma_0 = \phi(\varphi_0)$ a pro $\varphi \in \Delta(A)$ pišme $\gamma_\varphi = \phi(\varphi)$ (tj. $\gamma_0 = \gamma_{\varphi_0}$). Nechť $\phi(\varphi_0)U_{K,\varepsilon}$ je dané okolí $\phi(\varphi_0)$ v $(\widehat{G}, \tau_K)$. Dle Lemmatu 22(b) pro každé $y \in K$ nalezneme okolí U_y body y a okolí V_y bodu φ_0 takové, že

$$|\gamma_\varphi(x) - \gamma_0(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x, \varphi) \in U_y \times V_y.$$

Vybereme konečně mnoho bodů $y_1, \dots, y_n$ z K tak, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$, a položíme $V = \bigcap_{i=1}^n V_{y_i}$. Pak pro $\varphi \in V$ platí $\phi(\varphi) \in \gamma_0 U_{K,\varepsilon}$.

Vskutku, nechť $x \in K$ je libovolné. Vybereme $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in U_{y_i}$. Jelikož je $\varphi \in V \subset V_{y_i}$, máme

$$|\gamma_\varphi(x) - \gamma_0(x)| \le |\gamma_\varphi(x) - \gamma_0(y)| + |\gamma_0(y) - \gamma_0(x)| < \varepsilon.$$

Tedy $\gamma_\varphi = \gamma_0(\gamma_0^{-1}\gamma_\varphi) \in \gamma_0 U_{K,\varepsilon}$.

Tím je ověřena spojitost ϕ.

Krok 2. Abychom ukázali spojitost inverzního zobrazení, vezměme $\gamma_0 \in \widehat{G}$ a označme $\varphi_0 = \phi^{-1}(\gamma_0)$. Nechť U je dané okolí φ_0. Pak lze předpokládat, že

$$U = \{\varphi \in \Delta(A);\ |\varphi(f_i) - \varphi_0(f_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$$

pro nějaké $\varepsilon > 0$ a funkce $f_1, \dots, f_n \in A$. Nechť $M \in (0, +\infty)$ splňuje $M > \max\{\|f_i\|;\ i = 1, \dots, n\}$. Nalezneme kompakt $K \subset G$ takový, že

$$\int_{G\setminus K} |f_i| \,\mathrm{d}m < \frac{\varepsilon}{4}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Uvažujme okolí $\gamma_0 U_{K,\frac{\varepsilon}{4}}$. Pak $\phi^{-1}(\gamma) \in U$ pro každé $\gamma \in \gamma_0 U_{K,\frac{\varepsilon}{4M}}$.

Vskutku, je-li γ z této množiny, označme $\varphi = \phi^{-1}(\gamma)$. Pak pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{aligned} |\varphi(f_i) - \varphi_0(f_i)| &= \left|\int_G f_i(x)\overline{(\gamma(x) - \gamma_0(x))} \,\mathrm{d}m(x)\right| \\ &\le \int_{G\setminus K} 2|f_i(x)| \,\mathrm{d}m(x) + \int_K |f_i(x)||\gamma(x) - \gamma_0(x)| \,\mathrm{d}m(x) \\ &\le 2\frac{\varepsilon}{4} + M\frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy i ϕ^{-1} je spojité a důkaz je tak dokončen.

□

DŮSLEDEK 24. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $F\colon L_1(G) \to \ell_\infty(\widehat{G})$ je Fourierova transformace. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Platí* $\operatorname{Rng} F \subset C_0(\widehat{G})$ *a* $\operatorname{Rng} F$ *je podalgebra uzavřená na komplexní sdružení a oddělující body* $\widehat{G}$.
(b) *Prostor* $\operatorname{Rng} F$ *je hustý v* $C_0(\widehat{G})$.
(c) *Pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ existuje $f \in C_c(G)$ takové, že $\widehat{f}(\gamma) \neq 0$.*

DŮKAZ. Nechť $A = L_1(G)$ a $\Gamma\colon A \to C_0(\Delta(A))$ značí Gelfandovu transformaci. Pak $\operatorname{Rng} \Gamma$ je podalgebra $C_0(\Delta(A))$ oddělující body $\Delta(A)$ a uzavřená na komplexní sdružení (viz Větu 18(b)). Dle Věty 23 je zobrazení $\phi\colon \Delta(A) \to \widehat{G}$ surjektivní homeomorfismus a navíc dle Věty 18 platí

$$(\Gamma f)(\varphi) = (Ff)(\phi(\varphi)), \quad \varphi \in \Delta(A).$$

Proto platí (a).

Tvrzení (b) pak plyne za pomoci Stoneovy-Weierstraßovy věty z (a).

(c) Nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je dáno. Nechť δ značí funkci $\delta(x) = 1$, $x \in \widehat{G}$. Nalezneme funkci $f \in C_c(G)$ takovou, že $\int_G f \,\mathrm{d}m > 0$. Pak

$$\widehat{f}(\delta) = \int_G f(x)\delta(x) \,\mathrm{d}m(x) = \int_G f(x) \,\mathrm{d}m(x) > 0.$$

Funkce $g\colon x \mapsto \gamma_0(x) f(x)$ pak dle Věty 18(b) splňuje

$$\widehat{g}(\gamma_0) = \widehat{f}(\gamma_0\gamma_0^{-1}) = \widehat{f}(\delta) > 0.$$

Tvrzení je tedy dokázáno.

□

LEMMA 25. *Nechť* $\gamma\colon [0,+\infty) \to \mathbb{C}$ *je nenulová spojitá funkce splňující rovnici*

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y), \quad x, y \in [0,+\infty). \tag{3}$$

Pak existuje $\lambda \in \mathbb{C}$ *takové, že* $\gamma(x) = e^{\lambda x}$, $x \in [0,+\infty)$.

DŮKAZ. Za prvé si povšimněme, že $\gamma(0) = 1$. Vskutku, z rovnosti $\gamma(0) = \gamma(0+0) = (\gamma(0))^2$ plyne $\gamma(0) \in \{0,1\}$. Kdyby $\gamma(0) = 1$, platí $\gamma(x) = \gamma(x)\gamma(0) = $ pro $x \in [0,+\infty)$, což by byl spor s předpokladem.

Položme nyní $\omega(x) = \int_0^x \gamma(t)\,\mathrm{d}t$, $x \in [0,+\infty)$. Pak ω je spojitě diferencovatelná funkce na $[0,+\infty)$ (v bodě 0 uvažujeme derivaci zprava), která není identicky rovna 0. (V tom případě by totiž $\gamma(x) = \omega'(x) = 0$ na $[0,+\infty)$, což by byl spor.) Existuje proto $\delta \in \mathbb{R}$ takové, že $\omega(\delta) \neq 0$. Z rovnosti (3) pak plyne vztah

$$\omega(\delta)\gamma(x) = \gamma(x)\int_0^\delta \gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\delta \gamma(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)\,\mathrm{d}t = \omega(x+\delta) - \omega(x), \quad x \in [0,+\infty).$$

Pravá strana této rovnosti je spojitě diferencovatelná funkce na $[0,+\infty)$, a tedy i γ má spojitou derivaci na $[0,+\infty)$. Nechť $x \in [0,+\infty)$ je pevné. Pak je funkce $y \mapsto \gamma(x+y)$ diferencovatelná na $[0,+\infty)$ a derivováním (3) podle y dostaneme rovnici

$$\gamma'(x+y) = \gamma(x)\gamma'(y), \quad y \in [0,+\infty).$$

Dosazením $y = 0$ dostáváme rovnost

$$\gamma'(x) = \gamma(x)\gamma'(0), \quad x \in [0,+\infty).$$

Existují proto $a, b \in \mathbb{C}$ takové, že $\gamma(x) = ae^{bx}$. Protože $\gamma(0) = 1$, platí $\gamma(x) = e^{bx}$, $x \in \mathbb{R}$.

□

PŘÍKLADY 26. (a) Nechť $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $G = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Uvažujme grupu $H = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}};\ k = 0, \dots, n-1\}$ chápanou jako podgrupu $\mathbb{T}$. Pak zobrazení $\phi\colon H \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(e^{i\frac{2\pi k}{n}})(j) = e^{ij\frac{2\pi k}{n}}, \quad j \in G,$$

je grupový homomorfismus a topologický homeomorfismus.

(b) Nechť $G = \mathbb{Z}$. Uvažujme topologickou grupu $\mathbb{T}$. Pak zobrazení $\phi\colon \mathbb{T} \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(\lambda)(j) = \lambda^j, \quad j \in \mathbb{Z},$$

je grupový homomorfismus a topologický homeomorfismus.

(c) Nechť $G = \mathbb{R}$. Uvažujme topologickou grupu $\mathbb{R}$ s Haarovou mírou m_1 (viz Definici **??**). Pak zobrazení $\phi\colon \mathbb{R} \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(t)(x) = e^{itx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

je grupový homomorfismus a topologický homeomorfismus.

(d) Nechť $G = \mathbb{T}$. Uvažujme topologickou grupu $\mathbb{Z}$. Pak zobrazení $\phi\colon \mathbb{Z} \to \widehat{G}$ definované pomocí rovnosti

$$\phi(n)(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{T},$$

je grupový homomorfismus a topologický homeomorfismus.

DŮKAZ. (a) Zřejmě je $\phi(H) \subset \widehat{G}$. Nechť $\gamma \in \widehat{G}$ je dáno. Položme $\lambda = \gamma(1)$, tj. $\lambda = e^{it}$ pro nějaké $t \in [0, 2\pi)$. Indukcí ověříme rovnost $\gamma(j) = \lambda^j$, $j \in G$, a tedy platí

$$1 = \gamma(0) = \gamma((n-1)+1) = \gamma(n-1)\gamma(1) = \lambda^n = e^{int}.$$

Tedy existuje $k \in \{0, \dots, n-1\}$ splňující $t = \frac{2\pi k}{n}$, tj. $\gamma \in \phi(H)$.

Nechť $k_1, k_2 \in \{0, \dots, n-1\}$ jsou dány. Označme $k = (k_1 + k_2) \mod n$. Pak

$$e^{i\frac{2\pi k_1}{n}} e^{i\frac{2\pi k_2}{n}} = e^{i(k_1+k_2)\frac{2\pi}{n}} = e^{i\frac{2\pi k}{n}}.$$

Jelikož

$$\phi\left(e^{i\frac{2\pi k_1}{n}}e^{i\frac{2\pi k_2}{n}}\right)(j)=\phi(e^{i\frac{2\pi k}{n}})(j)=e^{ij\frac{2\pi k}{n}}\quad \text{a}$$
$$\left(\phi(e^{i\frac{2\pi k}{n}})\phi(e^{i\frac{2\pi k'}{n}})\right)(j)=e^{ij\frac{2\pi k_1}{n}}e^{ij\frac{2\pi k_2}{n}}=e^{ij\frac{2\pi k}{n}},$$

je ϕ grupový homomorfismus.

Zobrazení ϕ je homeomorfismus, neboť obě grupy jsou diskrétní (viz Tvrzení 19).

(b) Zjevně platí $\phi(\mathbb{T})\subset\widehat{\mathbb{Z}}$. Nechť $\gamma\in\widehat{\mathbb{Z}}$ je dáno. Položme $\lambda=\gamma(1)$, tj. $\lambda=e^{it}$ pro nějaké $t\in[0,2\pi)$. Indukcí se snadno ověří, že $\gamma(j)=\lambda^j$, $j\in\mathbb{Z}$, a tedy $\phi(\lambda)=\gamma$.

Pro $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{T}$ platí

$$\phi(\lambda_1\lambda_2)(j)=(\lambda_1\lambda_2)^j=(\phi(\lambda_1)\phi(\lambda_2))\,j,\quad j\in\mathbb{Z},$$

je ϕ grupový homomorfismus.

Zobrazení ϕ je spojité, neboť pro posloupnost $\{\lambda_n\}$ v $\mathbb{T}$ konvergující k $\lambda\in\mathbb{T}$ platí

$$\phi(\lambda_n)(j)=\lambda_n^j\to\lambda^j=\phi(\lambda)^j,\quad j\in\mathbb{Z},$$

a tedy $\phi(\lambda_n)\to\phi(\lambda)$ bodově na $\mathbb{Z}$. Jelikož $\mathbb{Z}$ je diskrétní, jsou jeho kompaktní podmnožine konečné, což dle předchozího pozorování implikuje spojitost ϕ. Díky kompaktnosti $\mathbb{T}$ je proto ϕ homeomorfismus.

(c) Zjevně je každé $\phi(t)$ prvkem $\widehat{\mathbb{R}}$. Předpokládejme tedy, že $\gamma\in\widehat{\mathbb{R}}$ je dáno. Pak $\gamma\colon\mathbb{R}\to\mathbb{T}$ je spojitá funkce splňující (3), a tedy $\gamma(x)=e^{bx}$, $x\in[0,+\infty)$, pro nějaké $b\in\mathbb{C}$. Jelikož γ je omezená funkce, je b tvaru it pro nějaké $t\in\mathbb{R}$. Protože pro $x<0$ platí $\gamma(x)=(\gamma(-x))^{-1}=(e^{-bx})^{-1}=e^{bx}$, platí rovnost $\gamma(x)=e^{bx}$ na $\mathbb{R}$. Tedy $\phi(t)=\gamma$.

Pro $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ platí

$$\phi(t_1+t_2)(x)=e^{i(t_1+t_2)x}=(\phi(t_1)\phi(t_2))\,(x),\quad x\in\mathbb{R},$$

a tedy ϕ je grupový homomorfismus.

Ověříme, že se jedná o homeomorfismus. Nechť $t_n\to t$ v $\mathbb{R}$. Nechť $K\subset\mathbb{R}$ je libovolný kompakt a $\varepsilon>0$ je dáno. Nechť $M>0$ splňuje $K\subset[-M,M]$. Zvolíme $\delta>0$ tak, aby $|e^{iy}-1|<\varepsilon$ pro každé $y\in(-\delta,\delta)$. Nalezneme $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $|t_n-t|<\frac{\delta}{M}$ pro každé $n\geq n_0$. Pro tato $n\in\mathbb{N}$ pak máme $|(t_n-t)x|<\delta$ pro libovolné $x\in K$, a tedy

$$|e^{it_nx}-e^{itx}|=|e^{itx}||e^{i(t_n-t)x}-1|\varepsilon,\quad x\in K.$$

Proto $\phi(t_n)\to\phi(t)$ v $\widehat{\mathbb{R}}$.

Ověřme nyní spojitost inverze. Jelikož je $L_1(\mathbb{R})$ separabilní, je $\Delta(L_1(\mathbb{R}))$ metrizovatelný prostor (viz Tvrzení 7.113), což znamená, že $\widehat{\mathbb{R}}$ je metrizovatelná množina (viz Větu 23). Stačí tedy ověřit sekvenciální spojitost ϕ^{-1}. Nechť $\{t_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}$ a $t\in\mathbb{R}$ je takové, že $\phi(t_n)\to\phi(t)$ v $\widehat{\mathbb{R}}$.

Pokud by $\{t_n\}$ nebyla omezená, měla by podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ splňující $|t_{n_k}|\to\infty$. Pak díky Větě **??**(f) platí

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{itx}\,\mathrm{d}m_1(x)=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{it_{n_k}x}\,\mathrm{d}m_1(x)=0,\quad f\in L_1(\mathbb{R}).$$

Z toho plyne $e^{itx}=0$ na $\mathbb{R}$, což je spor.

Posloupnost $\{t_n\}$ je proto omezená. Předpokládejme, že nekonverguje k t. Pak existuje její podposloupnost $\{t_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $s\in\mathbb{R}$ různému od t. Ze spojitosti ϕ pak plyne

$$\phi(t)=\lim_{k\to\infty}\phi(t_{n_k})=\phi(s),$$

což je spor. Tedy i ϕ^{-1} je spojité a důkaz je dokončen.

(d) Zobrazení ϕ zjevně splňuje $\phi(\mathbb{Z})\in\widehat{\mathbb{T}}$ a jedná se o grupový homomorfismus, neboť pro každé $j_1,j_2\in\mathbb{Z}$ platí

$$\phi(j_1+j_2)(\lambda)=\lambda^{j_1+j_2}=\lambda^{j_1}\lambda^{j_2}=(\phi(j_1)\phi(j_2))\,(\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{T}.$$

Nechť $\gamma \in \widehat{te}$ je dáno. Položme $\omega(x) = \gamma(e^{ix})$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\omega \in \widehat{\mathbb{R}}$, a tedy dle (c) existuje $t \in \mathbb{R}$ splňující $\omega(x) = e^{itx}$, $x \in \mathbb{R}$. Jelikož

$$e^{itx} = \omega(x) = \omega(x + 2\pi) = e^{it(x+2\pi)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

existuje $j \in \mathbb{Z}$ takové, že $t = j$. Tedy $\gamma = \phi(j)$.

Jelikož $\widehat{\mathbb{T}}$ i $\mathbb{Z}$ jsou diskrétní prostory (viz Tvrzení 19), je ϕ homeomorfismus.

□

PŘÍKLAD 27. Nechť $A = L_1((0, +\infty))$, kde uvažujeme násobení dané vzorcem

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(y)g(x - y)\,\mathrm{d}y, \quad x \in (0, +\infty).$$

Pak platí následující tvrzení:

(a) Prostor A je komutativní Banachova algebra.

(b) Nechť $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re}\lambda \geq 0\}$ a $\phi\colon \mathbb{C}_+ \to A^*$ je dané jako

$$\phi(\lambda)(f) = \int_0^\infty f(x)e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x, \quad f \in A.$$

Pak ϕ je homeomorfismus $\mathbb{C}_+$ a $\Delta(A)$.

DŮKAZ. V následujících výpočtech budeme mlčky užívat Fubiniovu větu, jelikož ve všech případech je ověření jejích předpokladů přímočaré.

V důkazu též uvažujeme zobrazení $i : A \to L_1(\mathbb{R})$ dané jako

$$i(f)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad f \in A.$$

(a) Zobrazení i je izometrický homomorfismus A do do $L_1(G)$. Vskutku, linearita a izometrie je jasná. Pro $f, g \in A$ pak máme

$$\begin{aligned}(i(f) * i(g))(x) &= \int_{-\infty}^\infty i(f)(y)i(g)(x - y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty f(y)i(g)(x - y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x f(y)g(x - y)\,\mathrm{d}y = (f * g)(x), \quad x \in (0, +\infty).\end{aligned}$$

Tedy A je jakožto podalgebra $L_1(G)$ komutativní Banachova algebra.

(b)*Krok 1.* Pro dané $\lambda \in \mathbb{C}_+$ a $f, g \in A$ platí

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)(f * g) &= \int_0^\infty \left(\int_0^x f(y)g(x - y)\,\mathrm{d}y\right) e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(y) \left(\int_y^\infty g(x - y)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty f(y) \left(\int_0^\infty g(x)e^{-\lambda(x+y)}\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \left(\int_0^\infty f(y)e^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y\right) \left(\int_0^\infty g(x)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \phi(\lambda)(f)\phi(\lambda)(g).\end{aligned}$$

Tedy $\phi(\mathbb{C}_+) \subset \Delta(A)$.

Krok 2. Nechť nyní $\varphi \in \Delta(A)$ je dáno. Pak existuje $\gamma \in L_\infty((0, +\infty))$ splňující $\varphi(f) = \int_0^\infty f(x)\gamma(x)\,\mathrm{d}x$, $f \in A$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že γ je borelovská funkce. Definujme

$$h(x, y) = \gamma(x)\gamma(y) - \gamma(x + y), \quad (x, y) \in (0, +\infty) \times (0\infty).$$

Pak h je omezená borelovská funkce na $(0, +\infty)^2$. Pak pro každé $f, g \in A$ platí

$$\begin{aligned}\phi(f * g) &= \int_0^\infty \left(\int_0^x f(y)g(x - y)\,\mathrm{d}y\right) \gamma(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty f(y) \left(\int_y^\infty g(x - y)\gamma(x)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^\infty f(y) \left(\int_0^\infty g(x)\gamma(y + x)\,\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_{(0,+\infty)^2} f(y)g(x)\gamma(y + x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

a

$$\phi(f)\phi(g) = \left(\int_0^\infty f(y)\gamma(y)\,\mathrm{d}y\right)(g(x)\gamma(x)\,\mathrm{d}x) = \int_{(0,+\infty)^2} f(y)g(x)\gamma(x)\gamma(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Tedy

$$\int_{(0,+\infty)^2} f(y)g(x)h(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad f, g \in A,$$

z čehož plyne

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y) \quad \text{skoro všude na } (0,+\infty)^2. \tag{4}$$

Jelikož je γ omezená funkce, je funkce

$$\omega(x) = \int_0^x \gamma(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [0,+\infty),$$

lokálně absolutně spojitá na $[0,+\infty)$ a platí $\omega'(x) = \gamma(x)$ skoro všude na $(0,+\infty)$.

Existuje $\delta > 0$ takové, že $\omega(\delta) \neq 0$. (Vskutku, kdyby $\omega = 0$ na $(0,+\infty)$, byla by i γ, jakožto derivace ω nulová skoro všude. A to by byl spor.) Díky Fubiniově větě plyne z (4), že pro skoro všechna $x \in (0,+\infty)$ máme

$$\omega(\delta)\gamma(x) = \int_0^x \gamma(t)\gamma(x)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \gamma(x+t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)\,\mathrm{d}t.$$

Jelikož je pravá strana spojitá funkce, má γ spojitého reprezentanta.

Zvolme $y > 0$ takové, že $\gamma(y) \neq 0$. Pak

$$\lim_{x\to 0_+} \gamma(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\gamma(x+y)}{\gamma(y)} = 1.$$

Tedy γ lze spojitě rozšířit na $[0,+\infty)$ dodefinováním $\gamma(0) = 1$. Dle Lemmatu 25 existuje $b \in \mathbb{C}$ splňující $\gamma(x) = e^{bx}$, $x \in [0,+\infty)$. Jelikož γ je omezená na $(0,+\infty)$, platí $\operatorname{Re} b \le 0$. Číslo $\lambda = -b$ tedy splňuje $\phi(\lambda) = \gamma$.

Krok 3. Nyní ověříme, že ϕ je homeomorfismus. Pokud $\lambda_n \to \lambda$ v $\mathbb{C}_+$, máme $e^{-\lambda n x} \to e^{\lambda x}$ bodově na $\mathbb{R}$,a tak pro každou $f \in A$ díky Lebesgueově větě dostáváme

$$\phi(\lambda)(f) = \int_0^\infty f(x)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} f(x)e^{-\lambda_n x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \phi(\lambda_n)(f).$$

Tedy ϕ je spojité.

K ověření spojitosti inverze stačí ověřit sekvenciální spojitost, neboť $\Delta(A)$ je metrizovatelný prostor. Nechť $\{\lambda_n\}$ je posloupnost v $\mathbb{C}_+$ a λ je takový element $\mathbb{C}_+$, že $\phi(\lambda_n) \to \phi(\lambda)$.

Ověříme nejprve, že $\{\lambda_n\}$ je omezená posloupnost. Kdyby tomu tak nebylo, existovala by její podposloupnost $\{\lambda_{n_k}\}$ splňující $|\lambda_{n_k}| \to \infty$. Nechť $f \in \mathcal{D}((0,+\infty))$ a nechť $\operatorname{supp} f \subset [a,b] \subset (0,+\infty)$. Pak pomocí integrace per partes dostáváme

$$|\int_0^\infty f(x)e^{-\lambda_{n_k} x}\,\mathrm{d}x| = |\int_a^b f(x)e^{-\lambda_{n_k} x}\,\mathrm{d}x| = |\frac{1}{\lambda_{n_k}} \int_a^b f'(x)e^{-\lambda_{n_k} x}\,\mathrm{d}x|,$$

což je výraz konvergující k 0. Tedy $\phi(\lambda_{n_k})(f) \to 0$ pro každou $f \in \mathcal{D}((0,+\infty))$. Jelikož je prostor $\mathcal{D}((0,+\infty))$ hustý v $L_1((0,+\infty))$ (viz Větu **??**), platí

$$\phi(\lambda)(f) = \lim_{k\to\infty} \phi(\lambda_{n_k})(f) = 0, \quad f \in A,$$

tj. $\phi(\lambda) = 0$, což je spor. (Nechť $f \in L_1((0,+\infty))$ a $\varepsilon > 0$ dáno. Nalezneme $g \in \mathcal{D}((0,+\infty))$ takové, že $\|f - g\| < \varepsilon$. Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ splňuje $|\phi(\lambda_n)(g) - \phi(\lambda)(g)| < \varepsilon$ pro $n \ge n_0$. Pak pro tato n platí

$$\begin{aligned}|\phi(\lambda_n)(f) - \phi(\lambda)(f)| &\le |\phi(\lambda_n)(f) - \phi(\lambda_n)(g)| + |\phi(\lambda_n)(g) - \phi(\lambda)(g)| + |\phi(\lambda)(g) - \phi(\lambda)(f)| \\ &\le \|f - g\| + \varepsilon + \|f - g\| < 3\varepsilon.)\end{aligned}$$

Tedy $\{\lambda_n\}$ je omezená.

Pokud by nyní $\{\lambda_n\}$ nekonvergovala k λ, existovala by vybraná podposloupnost $\{\lambda_{n_k}\}$ konvergující k nějakému $\mu \in \mathbb{C}_+$ různému od λ. Pak ale díky spojitosti ϕ platí

$$\phi(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \phi(\lambda_{n_k}) = \phi(\mu),$$

což je spor. Tím je důkaz dokončen.

□

PŘÍKLAD 28 (Wiener). ■■■Nechť $AC(\mathbb{T})$ je prostor všech spojitých funkcí f na $\mathbb{T}$, jejichž Fourierovy koeficienty $\{c_n(f)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ jsou v $\ell_1(\mathbb{Z})$. (Připomeňme, že

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{Z}.)$$

Pak je $AC(\mathbb{T})$ s bodovým násobením a normou $\|f\|_A = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|$ komutativní Banachova algebra. Platí následující tvrzení:

(a) Zobrazení $\phi\colon \ell_1(\mathbb{Z}) \to A$ definované jako

$$\phi(x)(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)z^k, \quad z \in \mathbb{T}, x \in \ell_1(\mathbb{Z}),$$

je izometrický homomorfismus $\ell_1(\mathbb{Z})$ na A, jehož inverze je dána vzorcem

$$\phi^{-1}(f)(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Algebra A je pak Banachova algebra s jednotkou.

(b) Pro každé $\lambda \in \mathbb{T}$ uvažujme $\psi(\lambda) \in A^*$ definované jako

$$\psi(\lambda)(f) = f(\overline{\lambda}), \quad f \in A.$$

Pak $\psi\colon \mathbb{T}\,\Delta(A)$ je homeomorfismus.

(c) Je-li $f \in A$, pak $\frac{1}{f} \in A$ právě tehdy, když $f \neq 0$ na $\mathbb{T}$.

DŮKAZ. (a) Zobrazení ϕ je zjevně lineární izometrie. Pro $f \in A$ označíme $x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$, $k \in \mathbb{Z}$. Položme $g(e^{it}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak $g \in C(\mathbb{T})$ a pro každé $j \in \mathbb{Z}$ platí

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g(e^{it}) - f(e^{it}))e^{-ijt}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Funkce jsou trigonometrické polynomy husté v $C(\mathbb{T})$ a f, g jsou spojité, $g = f$. Tedy $\phi(x) = f$ a ϕ je surjektivní.

Pro $x, y \in \ell_1(\mathbb{Z})$ a $z \in \mathbb{T}$ platí

$$\begin{aligned}\phi(x*y)(z) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(x*y)(k)z^k = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)y(k-j)\right)z^k = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} y(k-j)z^k\right)\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} y(l)z^{j+l}\right) = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} x(j)z^j\right)\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} y(l)z^l\right)\\ &= (\phi(x)\phi(y))(z).\end{aligned}$$

Tedy ϕ zachovává násobení a $\phi(\chi_{\{0\}}) = 1$. Proto je A Banachova algebra a jelikož je $\ell_1(\mathbb{Z})$ úplný prostor, je A také úplná.

(b) Každý prvek $\psi(\lambda)$ je zjevně element $\Delta(A)$. Je-li $\omega \in \Delta(A)$ dáno, je $x \mapsto \omega \circ \phi$ prvek $\Delta(\ell_1(\mathbb{Z}))$. Existuje proto $\gamma \in \widehat{\mathbb{Z}}$ takové, že $\omega(\phi(x)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\gamma(-k)$, $x \in \ell_1(\mathbb{Z})$. Dle Příkladu 26(b) existuje $\mu \in \mathbb{T}$ takové, že $\gamma(k) = \mu^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Položme $\lambda\overline{\mu}$. Pak dostáváme

$$\omega(\phi(x)) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\mu(-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\lambda^k = \phi(x)\lambda).$$

Jelikož je ϕ surjektivní, platí $\omega(f) = f(\lambda)$, $f \in A$.

Jelikož je $\mathbb{T}$ kompaktní a ϕ je zjevně spojité, jedná se o homeomorfismus.

(c) Pokud $\frac{1}{f} \in A$, zjevně $f \neq 0$ na $\mathbb{T}$. Obráceně, pokud f je nenulové na $\mathbb{T}$, dle bodu (b) platí $\varphi(f) \neq 0$ pro každé $\varphi \in \Delta(A)$. Dle Věty 10.79 platí $0 \notin \sigma_A(f)$, tj. f invertibilní prvek A. To znamená, že $\frac{1}{f} \in A$. □

5. Banachova algebra $M(G)$

DEFINICE 29. Pro funkci $f: G \to \mathbb{C}$ rozšiřme definice f^* z Věty 8 vzorcem

$$f^{(}x) = \overline{f(-x)}, \quad x \in G.$$

DEFINICE 30. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Nechť $A = M(G)$ značí prostor všech Radonových komplexních měr na G. Pro míry $\mu_1, \dots, \mu_n \in A$ definujeme

$$\mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n = \psi(\mu_1 \times \cdots \times \mu_n),$$

kde $\psi: G^n \to G$ je definováno jako $\psi(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n$, $(x, 1 \dots, x_n) \in G^n$.

(a) Na A definujeme násobení pomocí vzorce

$$(\mu * \nu) = \phi(\mu \times \nu), \quad \mu, \nu \in A,$$

kde $\phi: G \times G \to G$ značí zobrazení $\phi(x, y) = x + y$, $(x, y) \in G \times G$.

(b) Nechť $M_{\mathrm{ac},m}(G)$ značí prostor všech prvků A absolutně spojitých vůči m. Připomeňme, že $M_{\mathrm{c}}(G)$ a $M_{\mathrm{d}}(G)$ značí prostor všech spojitých, respektive diskrétních elemenů A (viz Definici **??**).

(c) Na A definujeme operaci $*$ jako

$$\mu^*(B) = \overline{\mu(-B)}, \quad B \in \mathrm{Bs}(G), \quad \mu \in A.$$

VĚTA 31. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $A = M(G)$. Pak $(A, *)$ je komutativní Banachova algebra s jednotkou a zobrazení $*: A \to A$ izometrická involuce, pro kterou platí*

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}\mu^*(x) = \overline{\int_G f^*(x)\,\mathrm{d}\mu(x)}, \quad f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G), \mu \in A. \tag{5}$$

Dále platí následující tvrzení:

(a) Pro každé $\mu, \nu \in A$ platí

$$\int f(x)\,\mathrm{d}m(\mu * \nu)(x) = \int_G \left(\int_G f(x + y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\nu(y), \quad f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G). \tag{6}$$

] Nechť množiny $A, B \in \mathrm{Bs}(G)$ splňují $\mu(G \setminus A) = \nu(G \setminus B) = 0$ a $A + B \in \mathrm{Bs}(G)$. Pak platí $(\mu * \nu)(G \setminus (A + B)) = 0$. Speciálně platí $\operatorname{supp}(\mu * \nu) \subset \operatorname{supp}\mu + \operatorname{supp}\nu$.

(b) Pro každé $f \in L_1(G)$ označme jako fm míru definovanou jako $(fm)(B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}m(x)$, $B \in \mathrm{Bs}(G)$. Pak zobrazení $f \mapsto mf$ je izometrický $*$-homomorfismus $L_1(G)$ na $M_{\mathrm{ac},m}$. Dále je $M_{\mathrm{ac},m}(G)$ v A uzavřený $*$-ideál.

(c) Prostor $M_{\mathrm{c}}(G)$ a je v A uzavřený $*$-ideál a $M_{\mathrm{d}}(G)$ je uzavřená $*$-podalgebra A.

(d) Zobrazení $x \mapsto \varepsilon_x$ je homomorfní a homeomorfní vnoření G do (A, w^*), kde A je chápána jako duál k $C_0(G)$.

DŮKAZ. Dle úvodní sekce je $M(G)$ Banachův prostor. Nechť $\phi: G \times G \to G$ je sčítání, tj. $\phi(x, y) = x + y$, $(x, y) \in G \times G$. Jelikož je pro $\mu, \nu \in M(G)$ míra $\mu \times \nu$ element $M(G^2)$, je $\mu * \nu \in M(G)$. Dokážeme nejdříve (a). Nechť $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ je dáno. Pak $f \circ \phi \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G^2)$ a

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}(\mu * \nu)(x) = \int_{G^2} (f \circ \phi)(x, y)\,\mathrm{d}(\mu \times \nu)(x, y) = \int_G \left(\int_G f(x + y)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \mathrm{d}\nu(y).$$

Nechť nyní množiny $A, B \in \mathrm{Bs}(G)$ splňují pro $\mu, \nu \in A$ rovnosti $\mu(G \setminus A) = \nu(G \setminus B) = 0$ a nechť $A + B \in \mathrm{Bs}(G)$. Pak pro $C = G \setminus (A + B)$ platí

$$(\mu * \nu)(G \setminus (A + B)) = \int_G \int_G \chi_C(x + y)\, \mathrm{d}mu(x)\, \mathrm{d}nu(y) = \int_B \int_A \chi_C(x + y)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y) = 0.$$

Tím je (a) ověřeno.

Pro každou $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ platí díky (6) rovnosti

$$\int_G f(x)\, \mathrm{d}(\mu{*}\nu)(x) = \int_G \left(\int_G f(x + y)\, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y) = \int_G \left(\int_G f(y + x)\, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_G f(y)\, \mathrm{d}(\nu{*}\mu)($$

a tedy je A komutativní.

Diracova míra ε_0 je jednotka A, neboť

$$\int_G g(x)\, \mathrm{d}(\varepsilon_0 * \mu)(x) = \int_G \int_G g(x + y)\, \mathrm{d}\varepsilon_{\{0\}}(x)\, \mathrm{d}\mu(y) = \int_G g(y)\, \mathrm{d}\mu(y), \quad g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G).$$

Distributivita násobení plyne ze vztahu

$$\mu * (\nu + \omega) = \phi(\mu \times (\nu + \omega)) = \phi(\mu \times \nu + \mu \times \omega) = \phi(\mu \times \nu) + \phi(\mu \times \omega) = \mu * \nu + \mu * \omega$$

a asociativita z rovností

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\, \mathrm{d}(\mu * (\nu * \omega))(x) &= \int_G \int_G f(x + y)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}(\nu * \omega)(y)\\ &= \int_G \int_G f(x + y)\, \mathrm{d}(\nu * \omega)(y)\, \mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G \int_G f(x + y + z)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\omega(z)\, \mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\, \mathrm{d}((\mu * \nu) * \omega)(x) &= \int_G \int_G f(x + z)\, \mathrm{d}(\mu * \nu)(z)\, \mathrm{d}\omega(y)\\ &= \int_G \int_G \int_G f(x + z + y)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\omega(z)\\ &= \int_G \int_G f(x + y + z)\, \mathrm{d}\nu(y)\, \mathrm{d}\omega(z)\, \mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

platných pro každou $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$.

Dále pro $\mu \in A$ a jednoduchou borelovskou funkci $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{B_i}$ platí

$$f^*(x) = \overline{f(-x)} = \sum_{i=1}^n \overline{c_i} \chi_B(-x) = \sum_{i=1}^n \overline{c_i} \chi_{-B}(x),$$

takže

$$\int_G f(x)\, \mathrm{d}\mu^*(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mu^*(B_i) = \sum_{i=1}^n c_i \overline{\mu_{-B_i}} = \overline{\sum_{i=1}^n \overline{c_i} \mu(-B_i)} = \overline{\int_G f^*(x)\, \mathrm{d}\mu(x)}.$$

Proto (5) pro každou $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$. Z ní též plyne její komplexně sdružená linearita a izometričnost.

Dále pro $\mu, \nu \in A$ a $f \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ platí

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\, \mathrm{d}(\mu * \nu)^*(x) &= \overline{\int_G f^*(x)\, \mathrm{d}(\mu * \nu)(x)} = \overline{\int_G \int_G f^*(x + y)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y)}\\ &= \overline{\int_G \int_G \overline{f(-x - y)}\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y)} = \int_G \int_G f(-x - y)\, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\nu(y)\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\int_G f(x)\,\mathrm{d}(\mu^* * \nu^*)(x) &= \int_G \int_G f(x+y)\,\mathrm{d}\mu * (x)\,\mathrm{d}\nu^*(y) = \int_G \overline{\int_G \overline{f(-x+y)}\,\mathrm{d}\mu(x)}\,\mathrm{d}\nu^*(y)\\ &= \int_G \int_G f(x-y)\,\mathrm{d}\nu^*(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \overline{\int_G \overline{f(-x-y)}\,\mathrm{d}\nu(y)}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_G \int_G f(-x-y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x),\end{aligned}$$

a tedy $(\mu * \nu)^* = \mu^* * \nu^*$.

(b) Zjevně je $fm \in M_{\mathrm{ac},m}(G)$ pro každé $f \in L_1(G)$. Obráceně, pokud $\mu \in M_{\mathrm{ac},m}(G)$, je daná míra, existuje dle Radonovy-Nikodýmovy věty $f \in L_1(G)$ splňující $\mu(B) = \int_B f(x)\,\mathrm{d}m(x)$, $B \in \mathrm{Bs}(G)$. Zobrazení $\psi\colon f \mapsto fm$ je tak bijekce $L_1(G)$ na $M_{\mathrm{ac},m}(G)$.

Nechť $f \in L_1(G)$ je dáno. Pak máme

$$\|fm\|_A = \sup_{g\in B_{\mathrm{Bf^b}(G)}} \left|\int_G g(x)f(x)\,\mathrm{d}m(x)\right| = \sup_{g\in B_{L_\infty(G)}} \left|\int_G g(x)f(x)\,\mathrm{d}m(x)\right| = \|f\|_{L_1(G)},$$

tedy se jedná o izometrii.

Dále pro $g \in \mathrm{Bf^b}(G)$ platí

$$\begin{aligned}\int_g (x)\,\mathrm{d}(fm)^*(x) &= \overline{\int_G g^*(x)\,\mathrm{d}(fm)(x)} = \overline{\int_G \overline{g(-x)}f(x)\,\mathrm{d}m(x)}\\ &= \int_G g(-x)\overline{f(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \int_G g(x)\overline{f(-x)}\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_G g(x)\,\mathrm{d}(f^*m)(x),\end{aligned}$$

čili ψ zachovává involuci.

Dále je zjevně ψ lineární. Konečně pro $f_1, f_2 \in L_1(G)$ platí pro každé $g \in \mathrm{Bf^b}(G)$ rovnosti

$$\begin{aligned}\int_G g(x)\,\mathrm{d}((f_1 * f_2)m)(x) &= \int_G g(x)(f_1 * f_2)(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G\int_G g(x)f_1(y)f_2(x-y)\,\mathrm{d}m(y)\,\mathrm{d}m(x)\\ &= \int_G f_1(y)\left(\int_G g(x)f_2(x-y)\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}m(y) = \int_G g(y+z)f_1(y)f_2(z)\,\mathrm{d}m(z)\,\mathrm{d}m(\\ &= \int_G\int_G g(y+z)\,\mathrm{d}(f_1m)(y)\,\mathrm{d}(f_2m)(z) = \int_G g(y)\,\mathrm{d}((f_1m)*(f_2m))(y),\end{aligned}$$

a tedy ψ zachovává násobení.

Je-li nyní $\mu \in M(G)$ a $f \in L_1(G)$, pro množinu $B \in \mathrm{Bs}(G)$ splňující $m(B) = 0$ platí

$$\begin{aligned}((fm)*\mu)(B) &= \int_G \chi_B(x)\,\mathrm{d}((fm)*\mu)(x) = \int_G\left(\int_G \chi_B(x+y)f(x)\,\mathrm{d}m(x)\right)\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \int_G\left(\int_G \chi_B(z)f(z-y)\,\mathrm{d}m(z)\right)\mathrm{d}\mu(y) = 0,\end{aligned}$$

takže $M_{\mathrm{ac},m}(G)$ je ideál.

(c) Prostor $M_{\mathrm{c}}(G)$ je uzavřený v A, viz Větu **??**. Zjevně

$$(\mu^*)(\{x\}) = \overline{\mu(\{-x\})} = 0, \quad x \in G, \mu \in M_{\mathrm{c}}(G),$$

takže $M_{\mathrm{c}}(G)$ je uzavřený na involuci.

Pro $\mu \in M_{\mathrm{c}}(G)$ a $\nu \in A$ platí

$$(\mu * \nu)(\{x\}) = \int_G\int_G \mu(\{x-y\})\,\mathrm{d}\nu(y) = 0, \quad x \in G,$$

a $M_{\mathrm{c}}(G)$ je tedy ideál.

Uzavřenost $M_{\mathrm{d}}(G)$ je zaručena Větou **??**. Nechť $\mu, \nu \in M_{\mathrm{d}}(G)$ jsou dány. Nechť $A, B \subset G$ jsou spočetné množiny takové, že $\mu(G \setminus A) = \nu(G \setminus B) = 0$. Pak je $A+B$ spočetná, a tedy borelovská podmnožina G, a proto dle (a) platí $(\mu * \nu)(G \setminus (A+B)) = 0$. Tedy $\mu * \nu \in M_{\mathrm{d}}(G)$. Dále je $\mu * (G \setminus (-A)) = 0$, a tedy i $\mu^* \in M_{\mathrm{d}}(G)$.

(d) Pro $a, b \in G$ a $g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(G)$ platí

$$\int_G g(x)\,\mathrm{d}(\varepsilon_a * \varepsilon_b)(x) = \int_G \int_G g(x+y)\,\mathrm{d}\varepsilon_a(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_b(y) = \int_G g(a+y)\,\mathrm{d}\varepsilon_b(y) = g(a+b) = \int_G g(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_{a+b}(x).$$

Tedy je zobrazení $\varepsilon\colon G \to A$ algebraický homomorfzimus.

Dále pro net $\{a_i\}$ v G konvergující k $a \in G$ a $f \in C_0(G)$ aplatí

$$\int_G f(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_{a_i}(x) = f(a_i) \to f(a) = \int_G f(x)\varepsilon_a(x),$$

a tedy ε je spojité.

Nechť $\varepsilon_{a_i} \to \varepsilon_a$ pro nějaký net $\{a_i\}$ v G a $a \in G$. Nechť U je dané okolí a, přičemž můžeme předpokládat, že U je lokálně kompaktní. Nalezneme $f \in C_{\mathrm{c}}(G)$ s hodnotami v $[0,1]$ splňující $f(a) = 1$ a $f = 0$ na $G \setminus U$. Protože

$$f(a_i) = \int_G f(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_{a_i}(x) \to \int_G f(x)\,\mathrm{d}\varepsilon_a(x) = f(a) = 1,$$

existuje idnex i_0 takový, že $f(a_i) > 0$ pro $i \geq i_0$. Pro tato i je pak $a_i \in U$, takže jsme ověřili $a_i \to a$. Tedy ε je homeomorfismus.

□

Definice 32. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pro $\mu \in M(G)$ a $f \in L_1(G)$ borelovskou definujeme

$$(\mu * f)(x) = \int_G f(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y), \quad x \in G.$$

Tvrzení 33. *Nechť G je alespoň dvoubodová komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Uvažujme $M(G)$ s involucí definovanou ve Větě 31. Pak $M(G)$ není $B^\star$-algebra.*

Důkaz. Nechť $x \in G$ je prvek různý od 0. Vezměme ryze imaginární nenulové číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ a uvažujme míru

$$\mu = \alpha\varepsilon_{-x} + \varepsilon_0 + \alpha\varepsilon_x.$$

Pak $\mu^* = \overline{\alpha}\varepsilon_x + \varepsilon_0 + \overline{\alpha}\varepsilon_{-x}$ a dle Věty 31(d) platí

$$\begin{aligned}
\mu * \mu^* &= \big(|\alpha|^2\varepsilon_0 + \alpha\varepsilon_{-x} + |\alpha|^2\varepsilon_{-2x}\big) + (\overline{\alpha}\varepsilon_{-x} + \varepsilon_0 + \overline{\alpha}\varepsilon_x) + \big(|\alpha|^2\varepsilon_{2x} + \alpha\varepsilon_x + |\alpha|^2\varepsilon_0\big)\\
&= (1 + 2|\alpha|^2)\varepsilon_0 + (\alpha + \overline{\alpha})\varepsilon_x + (\alpha + \overline{\alpha})\varepsilon_{-x} + |\alpha|^2\varepsilon_{2x} + |\alpha|^2\varepsilon_{-2x}\\
&= (1 + 2|\alpha|^2)\varepsilon_0 + |\alpha|^2\varepsilon_{2x} + |\alpha|^2\varepsilon_{-2x}.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\|\mu * \mu^*\| = 1 + 4|\alpha|^2.$$

Na druhou stranu máme

$$\|\mu\|^2 = (1 + 2|\alpha|)^2 = 1 + 4|\alpha|^2 + 4|\alpha|,$$

a tedy $\|\mu\|^2 > \|\mu * \mu^*\|$. Proto $M(G)$ není $\mathrm{B}^\star$-algebra.

□

Věta 34. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Je-li $\mu \in M(G)$ a $f \in L_1(G)$ je borelovská, pak $\mu * f \in L_1(G)$ a platí $\mu * fm = (\mu * f)m$.*

DŮKAZ. Pro $f \in L_1(G)$ borelovskou a $\mu \in M(G)$ je funkce $(x, y) \mapsto f(x-y)$ borelovská a z Fubiniovy věty aplikované na $|f|$ a $m \times |\mu|$ se ověří, že je $m \times \mu$-integrovatelná. Dle Fubiniovy věty je tedy funkce pro m-skoro všechna $x \in G$ je funkce $y \mapsto f(x-y)$ v $L_1(\mu)$ a funkce $x \mapsto \int_G f(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y) = (\mu * f)(x)$ je v $L_1(G)$.

Pro $g \in \mathrm{Bf}^b(G)$ pak platí

$$\begin{aligned}\int_G g(x)\,\mathrm{d}(\mu * f)(m)(x) &= \int_G g(x)\left(\int_G f(x-y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right)\mathrm{d}m(x) = \int_G\int_G g(x)f(x-y)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}\mu(y)\\ &= \int_G\int_G g(y+z)f(z)\,\mathrm{d}m(z)\,\mathrm{d}\mu(y) = \int_G\int_G g(y+z)\,\mathrm{d}\mu(y)\,\mathrm{d}(fm)(z)\\ &= \int_G g(y)\,\mathrm{d}(\mu * fm)(y).\end{aligned}$$

Tím je požadovaná rovnost ověřena.

□

6. Fourierova-Stieltjesova transformace

DEFINICE 35. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Definujeme Fourierovu-Stieltjesovu transformaci $F\colon M(G) \to \ell_\infty(\widehat{G})$ jako

$$(F\mu)(\gamma) = \int_G \overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x), \quad \gamma \in \widehat{G}, \mu \in M(G)$$

Někdy píšeme $F\mu = \widehat{\mu}$.

VĚTA 36. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a nechť F značí Fourierovu-Stieltjesovu transformaci. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Každá funkce $\widehat{\mu}$ je omezená a stejnoměrně spojitá na $\widehat{G}$.
(b) Zobrazení F je $*$-homomorfismus $M(G)$ do $C^b(\widehat{G}$ zachovávající jednotku o normě nepřesahující 1 (prostor $C^b(\widehat{G})$ je uvažován s involucí $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma)}$). Navíc restrikce F na $L_1(G)$ je Fourierova transformace z Definice 17.
(c) Pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ je zobrazení $\psi(\gamma)\colon \mu \mapsto \widehat{\mu}(\gamma)$ prvek $\Delta(M(G))$. Zobrazení $\gamma \mapsto \psi_\gamma$ je homeomorfní vnoření $\widehat{G}$ do $\Delta(M(G))$.
(d) Nechť $\mu \in M(G)$, $x_0 \in G$ a $\gamma_0 \in \widehat{G}$ jsou dány. Pak pro míry λ a ω definované jako $\lambda = \gamma_0\mu$ a $\omega = \phi(\mu)$, kde $\phi\colon x \mapsto x - x_0$, $x \in G$, platí

$$\widehat{\lambda}(\gamma) = \widehat{\mu}(\gamma\gamma_0^{-1}) \quad a \quad \widehat{\omega}(\gamma) = \gamma(x_0)\widehat{\mu}(\gamma), \qquad \gamma \in \widehat{G}.$$

Speciálně, platí, že funkce $\gamma \mapsto \widehat{\mu}(\gamma\gamma_0^{-1})$ a $\gamma \mapsto \gamma(x_0)\widehat{\mu}(\gamma)$ jsou též v $\operatorname{Rng} F$.

DŮKAZ. Nechť A značí $M(G)$.

(a) Pro dané $\mu \in A$ dané a libovolné $\gamma \in \widehat{G}$ platí

$$|\widehat{\mu}(\gamma)| = |\int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(x)| \le \int_G 1\,\mathrm{d}|\mu|(x) = \|\mu\|.$$

Tedy $\widehat{\mu}$ je omezená a $\|F\| \le 1$.

Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme kompakt $K \subset G$ takový, že $|\mu|(G \setminus K) < \frac{\varepsilon}{4}$. Uvažujme množinu $U_{K,\varepsilon}$ tvaru (2). pak pro $\gamma_1, \gamma_2 \in \widehat{G}$ splňující $\gamma_1\gamma_2^{-1} \in U_{K,\frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}}$ platí

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mu}(\gamma_1) - \widehat{\mu}(\gamma_2)| &\le \overline{|\gamma_1(x) - \gamma_2(x)|}\,\mathrm{d}|\mu|(x) = \int_G |\gamma_1(x)\gamma_2(x)^{-1} - 1|\,\mathrm{d}|\mu|(x) \\
&\le \int_K |\gamma_1(x)\gamma_2(x)^{-1} - 1|\,\mathrm{d}|\mu|(x) + \int_{G\setminus K} |\gamma_1(x)\gamma_2(x)^{-1} - 1|\,\mathrm{d}|\mu|(x) \\
&\le \frac{\varepsilon}{2\|\mu\|}|\mu|(K) + 2|\mu|(G \setminus K) \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\widehat{\mu}$ je stejnoměrně spojitá.

(b) Zobrazení F je zjevně lineární a dle odhadu v (a) platí $\|F\| \le 1$. Pro funkci $f \in L_1(G)$ máme

$$\widehat{fm}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}(fm)(x) = \int_G f(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \widehat{f}(\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G},$$

a tedy F je rozšířením Fourierovy transformace.

Pro $\mu \in M(G)$ máme

$$\widehat{\mu^*}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu^*(x) = \overline{\int_G \overline{\gamma(x)}\,\mathrm{d}\mu(x)} = \overline{\widehat{\mu}(\gamma)} = (\widehat{\mu}(\gamma))^*, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Tedy F zachovává involuci.

Pro $\mu, \nu \in M(G)$ dostáváme pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ rovnost

$$\begin{aligned}
(\widehat{\mu * \nu})(\gamma) &= \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}(\mu * \nu)(x) = \int_G \int_G \gamma(-x-y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y) \\
&= \left(\int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)\left(\int_G \gamma(-y)\,\mathrm{d}\mu(y)\right) \\
&= \widehat{\mu}(\gamma)\widehat{\nu}(\gamma),
\end{aligned}$$

tj. F je homomorfismus.

Konečně pro ε_0 máme

$$\widehat{\varepsilon_0}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\varepsilon_0(x) = \gamma(-0) = 1, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

(c) Inkluze $\psi(\widehat{G}) \subset \Delta(M(G))$ plyne z (b). Nechť $\{\gamma_i\}$ je net v $\widehat{G}$ konvergující ke $\gamma \in \widehat{G}$. Dle (a) platí

$$\psi(\gamma_i)(\mu) = \widehat{\mu}(\gamma_i) \to \widehat{\mu}(\gamma) = \psi(\gamma)(\mu), \mu \in M(G),$$

tj. $\psi(\gamma_i) \overset{w^*}{\to} \psi(\gamma)$. Tedy ψ je spojité.

Předpoikládejme nyní, že $\psi(\gamma_i) \to \psi(\gamma)$ pro nějaký net $\{\gamma_i\}$ v $\widehat{G}$ a $\gamma \in \widehat{G}$. Uvažujme inverzi k zobrazení z Věty 16, které každému prvku $\omega \in \widehat{G}$ přiřazuje element $\varphi_\omega \in \Delta(L_1(G))$. Pak zobrazení $\omega \mapsto \varphi_\omega$ je homeomorfismus $\widehat{G}$ a $\Delta(L_1(G))$ (viz Větu 23). Nechť $f \in L_1(G)$ je libovolné. Pak $fm \in M(G)$ a dle předpokladu platí

$$\varphi_{\gamma_i}(f) = \int_G f(x)\gamma_i(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \widehat{fm}(\gamma_i) = \psi(\gamma_i)(\mu) \to \psi(\gamma)(\mu) = \widehat{\mu}(\gamma) = \varphi_\gamma(f).$$

Tedy $\varphi_{\gamma_i} \overset{w^*}{\to} \varphi_\gamma$, což díky zmiňované Větě 23 implikuje $\gamma_i \to \gamma$ v $\widehat{G}$. Tedy ψ je homeomorfní vnoření.

(d) Pro $\gamma \in \widehat{G}$ dostáváme

$$\begin{aligned}
\widehat{\lambda}(\gamma) &= \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_G \gamma(-x)\gamma_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_G \gamma\gamma_0(-x)^{-1}\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \int_G (\gamma\gamma_0^{-1})(-x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \widehat{\mu}(\gamma\gamma_0^{-1})
\end{aligned}$$

a

$$\widehat{\omega}(\gamma) = \int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\omega(x) = \int_G \gamma(-x+x_0)\,\mathrm{d}\mu(x) = \gamma(x_0)\int_G \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \gamma(x_0)\widehat{\mu}(\gamma).$$

Tím je důkaz dokončen.

□

DEFINICE 37. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Definujme $\widetilde{F}\colon M(\widehat{G}) \to \ell_\infty(G)$ pomocí vzorce

$$(\widetilde{F}\mu)(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma), \quad x \in G.$$

VĚTA 38 (O jednoznačnosti). *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $\mu \in M(\widehat{G})$. Pokud*

$$\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = 0, \quad x \in G,$$

pak $\mu = 0$. Tedy $\widetilde{F}$ je prosté zobrazení.

DŮKAZ. Nechť $F\colon L_1(G) \to C_0(\widehat{G})$ značí Fourierovu transformaci. Pro každé $f \in L_1(G)$ dle předpokladu platí

$$\int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}}\int_G f(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_G f(x)\left(\int_{\widehat{G}} \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma)\right)\mathrm{d}m(x) = 0.$$

Jelikož $\operatorname{Rng} F$ je hustý v $C_0(\widehat{G})$ dle Důsledku 24, platí $\mu = 0$.

□

7. Pozitivně definitní funkce a Bochnerova věta

DEFINICE 39. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $f\colon G \to \mathbb{C}$ je funkce. Řekneme, že f je pozitivně definitní, pokud platí

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j\overline{c_k} f(x_j - x_k) \geq 0, \quad x_1,\dots,x_n \in G, c_1,\dots,c_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

LEMMA 40. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $f\colon G \to \mathbb{C}$ je pozitivně definitní funkce. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Platí $f(0) \geq 0$.*
(b) *Pro každé $x \in G$ platí $f(-x) = \overline{f(x)}$.*
(c) *Pro každé $x \in G$ platí $|f(x)| \leq f(0)$, a tedy je f omezená funkce.*
(d) *Pro každé $x, y \in G$ platí*

$$|f(x) - f(y)|^2 \leq 2f(0)\operatorname{Re}(f(0) - f(x-y)).$$

(e) *Pokud f je spojitá v 0, je stejnoměrně spojitá.*

DŮKAZ. (a) Pro $c_1 = 1$ a $x_1 = 0$ plyne z (7) nerovnost $0 \leq f(0)$.

(b) Dosadíme do (7) pro $n = 2$ body $x_1 = 0$ a $x_2 = x$ a čísla $c_1 = 1$ a $c_2 = c$. Pak

$$0 \leq \sum_{j,k=1}^{2} c_j\overline{c_k} f(x_j - x_k) = f(0) + \overline{c}f(-x) + cf(x) + |c|^2 f(0). \tag{8}$$

Pro $c = 1$ dostáváme $0 \leq (1 + |c|^2)f(0) + f(x) + f(-x)$ a pro $c = i$ máme $0 \leq (1 + |c|^2)f(0) + i(f(x) - f(-x))$. Tedy $f(x) + f(-x)$ i $i(f(x) - f(-x))$ jsou reálně čísla. Proto pro $f(x) = a_1 + ia_2$, kde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, platí

$$f(x) + f(-x) = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2) \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad i(f(x) - f(-x)) = (b_2 - a_2) + i(a_1 - b_1) \in \mathbb{R}.$$

Tedy $b_2 = -a_2$ a $b_1 = a_1$, tj. $f(-x) = \overline{f(x)}$.

(c) Pro $x \in G$ předpokládejme, že $f(x) \neq 0$. Nalezneme $c \in \mathbb{C}$ takové, že $cf(x) = -|f(x)|$. Pak $|c||f(x)| = |f(x)|$, a tedy $|c| = 1$. Z (8) tedy díky (a) dostáváme

$$0 \leq f(0) + \overline{c} f(-x) + cf(x) + |c|^2 f(0) = f(0) + \overline{cf(x)} - |f(x)| + f(0) = 2(f(0) - |f(x)|).$$

Tím je (c) dokázáno.

(d) Nechť $x, y \in G$ jsou dány. Můžeme předpokládat, že $f(x) \neq f(y)$. Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ je libovolné. V (7) uvažujeme $n = 3$, $x_1 = 0$, $x_2 = x$, $x_3 = y$ a $c_1 = 1$, $c_2 = c = \frac{\lambda|f(x)-f(y)|}{f(x)-f(y)}$ a $c_3 = -c2$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} f(x_j - x_k) &= (f(0) + \overline{c} f(-x) - \overline{c} f(-y)) + c\left(f(x) + \overline{c} f(0) + \overline{(-c)} f(x-y)\right) \\
&\quad - c\left(f(y) + \overline{c} f(y-x) + \overline{(-c)} f(0)\right) \\
&= (1 + 2|c|^2) f(0) + (\overline{cf(x)} + cf(x)) - (\overline{cf(y)} - cf(y)) - |c|^2 (f(x-y) + f(y-x)) \\
&= (1 + 2|c|^2) f(0) + \overline{c(f(x) - f(y))} + c(f(x) - f(y)) - |c|^2 2 \operatorname{Re} f(x-y) \\
&= (1 + 2|c|^2) f(0) + 2\lambda |f(x) - f(y)| - 2\lambda^2 \operatorname{Re} f(x-y) \\
&= \lambda^2 (2(\operatorname{Re}(f(0) - f(x-y))) + \lambda(2|f(x) - f(y)| + f(0).
\end{aligned}$$

Diskriminant tohoto kvadratického polynomu v proměnné λ tak musí být nekladný, a tedy

$$0 \geq 4|f(x) - f(y)|^2 - 4f(0)2\operatorname{Re}(f(0) - f(x-y)),$$

což implikuje nerovnost v (d).

Tvrzení (e) nyní plyne z (d).

□

TVRZENÍ 41. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pokud $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pro každé funkce $f \in L_p(G)$ a $g \in L_q(G)$ je funkce $f * g \in C_0(G)$.*

DŮKAZ. Nechť $f, g \in C_c(G)$, pro $x, y \in G$ máme

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x) - (f * g)(y)| &= |\int_G (f(z)g(x-z) - f(z)g(y-z)) \, \mathrm{d}m(z)| \\
&\leq \int_G |f(z)||g(x-z) - g(y-z)| \, \mathrm{d}m(z) \\
&\leq \|f\|_\infty \|g_{-x} - g_{-y}\|_1.
\end{aligned}$$

Dle Tvrzení 12 je zobrazení $x \mapsto g_x$ stejnoměrně spojité na G, a tedy je funkce $f * g$ stejnoměrně spojitá na G.

Pro $f \in L_p(G)$ a $g \in L_q(G)$ obecné nalezneme posloupnost $\{f_n\}$ v $L_p(G)$ a $\{g_n\}$ v $L_q(G)$ takové, že $\|f_n - f\|_p + \|g_n - g\|_q \to 0$. Pak pro $x \in G$ platí díky Hölderově nerovnosti

$$\begin{aligned}
|(f_n * g_n)(x) - (f * g)(x)| &= |\int_G (f_n(y)g_n(x-y) - f(y)g(x-y)) \, \mathrm{d}m(y)| \\
&\leq \int_G |f_n(y) - f(y)||g_n(x-y)| \, \mathrm{d}m(y) + \int_G |f(y)||g_n(x-y) - g(x-y)| \, \mathrm{d}m(y) \\
&\leq \|f_n - f\|_p \|g_n\|_q + \|f\|_p \|g_n - g\|_q \to 0,
\end{aligned}$$

tj. $f_n * g_n \rightrightarrows f * g$.

Jelikož $f_n * g_n \in C_c(G)$ dle první části důkazu a Věty 31(a), dostáváme $f * g \in C_0(G)$.

□

LEMMA 42. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Součet dvou pozitivně definitních funkcí a nezáporný násobek pozitivně definitní funkce je definitně pozitivní funkce.*

(b) *Každý element $\gamma \in \widehat{G}$ je pozitivně definitní funkce.*

(c) *Pokud $f \in L_1(G)$, pak $f * f^*$ je pozitivně definitní funkce. Pokud $f \in L_2(G)$, je $f * f^*$ spojitá, pozitivně definitní funkce.*

(d) *Pokud $\mu \in M(\widehat{G})$ je nezáporná, je funkce*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x) \, \mathrm{d}\mu(\gamma), \quad x \in G,$$

spojitá, pozitivně definitní funkce na G.

DŮKAZ. Tvrzení (a) je zřejmé.

(b) Pro $\gamma \in \widehat{G}$ a sumu tvaru (7) platí

$$\sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \gamma(x_j - x_k) = \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \gamma(x_j) \overline{\gamma(x_k)} = |\sum_{l=1}^{n} c_l \gamma(x_l)|^2 \geq 0.$$

(c) Označme $h = f * f^*$. Pro libovolnou sumu z (7) platí

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} h(x_j - x_k) &= \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \int_G f(y) f^*(x_j - x_k - y) \, \mathrm{d}m(y) \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \int_G f(y) \overline{f(y - x_j + x_k)} \, \mathrm{d}m(y) \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \int_G f(z - x_k) \overline{f(z - x_j)} \, \mathrm{d}m(z) \\ &= \int_G |\sum_{l=1}^{n} c_l f(z - x_l)|^2 \, \mathrm{d}m(z) \geq 0. \end{aligned}$$

Pokud 4fin L6ě9G04, je dle Lemmatu 41 funkce $f * f^* \in C_0(G)$.

(d) Je-li $\mu \in M(G)$ dáno, k ověření spojitosti funkce $f(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x) \, \mathrm{d}\mu(\gamma)$, $x \in G$, lze zopakovat důkaz tvrzení (a) Věty 36. Podrobněji, pro $x, y \in G$ platí

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_{\widehat{G}} |\gamma(x) - \gamma(y)| \, \mathrm{d}|\mu|(\gamma) = \int_{\widehat{G}} |\gamma(y)^{-1}||\gamma(x - y) - 1| \, \mathrm{d}|\mu|(\gamma).$$

Nalezneme-li tedy pro dané $\varepsilon > 0$ okolí $U \in \tau(0)$ takové, že $|\gamma(x - y) - 1| < \varepsilon$ pro $x, y \in G$ splňující $x - y \in U$ (viz Lemma 15), dostáváme odhad

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon |\mu|(G),$$

z čehož plyne stejnoměrná spojitost f.

Pro každou sumu tvaru (7) pak platí

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} f(x_j - x_k) &= \sum_{\widehat{G}} \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \, (\gamma(x_1 - x_k)) \, \mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \sum_{j,k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \gamma(x_1) \overline{\gamma(x_k)} \, \mathrm{d}\mu(\gamma) \\ &= \int_{\widehat{G}} |\sum_{l=1}^{n} c_l \gamma(x_l)|^2 \, \mathrm{d}\mu(\gamma) \geq 0. \end{aligned}$$

□

VĚTA 43. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá pozitivně definitní funkce na G. Pak existuje $\mu \in M(G)$ nezáporná taková, že $f(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x) \, \mathrm{d}\mu(\gamma)$.*

DŮKAZ. Díky Lemmatu 40(c) a Lemmatu 40(a) lze předpokládat, že $f(0) = 1$.

Krok 1. Ukážeme, že

$$\int_G \int_G g(x)\overline{g(x-y)} f(x-y)\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}m(y) \geq 0, \quad g \in L_1(G).$$

Jelikož je prostor $C_c(G)$ hustý v $L_1(G)$ a f je omezená, stačí ověřit tuto nerovnost na $C_c(G)$. Nechť tedy $g \in C_c(G)$ je dána. Zvolme $\varepsilon > 0$ a označme $K = \operatorname{supp} g$. Položíme $\mu = m\restriction_K \times m\restriction_K$ a nechť $a = \mu(K \times K)$. Definujme spojitou funkci h na $K \times K$ jako

$$h(x, y) = g(x)\overline{g(y)} f(x-y), \quad (x, y) \in K \times K.$$

Z Lemmatu 13.127 odvodíme existenci míry $\nu \in M_{\mathrm{mol}}(K \times K)$ splňující $|\int_{K\times K} h(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x, y) - a\int_K h(x, y)\,\mathrm{d}\nu(x, y)| < \varepsilon$. Pak ν je tvaru $\nu = \sum_{j,k=1}^n c_j c_k \varepsilon_{(x_j, x_k)}$ pro nějaké body $(x_j, x_k) \in K \times K$ a nezáporná čísla c_j, c_k, $j, k = 1, \dots, n$, splňující $\sum_{j,k=1}^n c_j c_k \geq 0$. Protože

$$\int_{K\times K} h(x, y)\,\mathrm{d}\nu(x, y) = \sum_{j,k=1}^n g(x_j)\overline{g(x_k)} f(x_j - x_k) c_j c_k = \sum_{i,j=1}^n c_j g(x_j) \overline{c_k g(x_k)} f(x_j - x_k) \geq 0.$$

Tedy $\int_{K\times K} h(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x, y) \geq -\varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, dostáváme nerovnost $Tg \geq 0$.

Krok 2. Jelikož je $f \in C^b(G)$, můžeme definovat

$$Tg = \int_G g(x) f(x)\,\mathrm{d}m(x), \quad g \in L_1(G).$$

Protože $\|f\|_\infty \leq 1$, platí $\|T\| \leq 1$.

Položme dále

$$\langle g_1, g_2 \rangle = T(g_1 * g_2^*), \quad g_1, g_2 \in L_1(G).$$

Jelikož

$$\begin{aligned}\langle g_1, g_2 \rangle &= \int_G \left(\int_G g_1(y) g_2^*(x-y)\,\mathrm{d}m(y) \right) f(x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G g_1(y) \left(\int_G \overline{g_2(y-x)} f(x)\,\mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}m(y) \\ &= \int_G \int_G g_1(y)\overline{g_2(z)} f(y-z)\,\mathrm{d}m(z)\,\mathrm{d}m(y),\end{aligned} \tag{9}$$

je zobrazení $(g_1, g_2) \mapsto \langle g_1, g_2 \rangle$ lineární v první souřadnici a sdruženě lineární v druhé. Navíc díky prvnímu kroku platí $\langle g, g \rangle \geq 0$.

Analogicky jako v Tvrzení **??** odvodíme Cauchyovu-Scwarzovu nerovnost

$$|\langle g_1, g_2 \rangle|^2 \leq \langle g_1, g_1 \rangle \langle g_2, g_2 \rangle, \quad g_1, g_2 \in L_1(G).$$

Krok 3. Ukážeme, že pro $g \in L_1(G)$ platí

$$|Tg|^2 \leq T(g * g^*), \quad g \in L_1(G). \tag{10}$$

Nechť $V \in \tau(0)$ je relativně kompaktní a nechť $h = \frac{1}{m(U)}\chi_U$. Pak pro každé $g \in L_1(G)$ díky (9) platí

$$\begin{aligned}\langle g, h \rangle - Tg &= \int_G \left(\int_G g(x)\overline{h(y)} f(x-y)\,\mathrm{d}m(y) \right) \mathrm{d}m(x) - \int_G g(x) f(x)\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \int_G g(x) \left(\frac{1}{m(V)} \int_V (f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}m(y) \right) \mathrm{d}m(x)\end{aligned}$$

a

$$\langle h, h \rangle - 1 = \frac{1}{m(V)^2} \int_V \int_V (f(x-y) - f(x))\,\mathrm{d}m(x)\,\mathrm{d}m(y).$$

Nechť nyní $g \in L_1(G)$ je dána a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Jelikož je f stejnoměrně spojitá (viz Lemma 42(e)), existuje $V \in \tau(0)$ relativně kompaktní okolí 0 takové, že $|f(x-y)-1| < \varepsilon$ pro $x, y \in V$. Pak pro $h = \frac{1}{m(V)}\chi_V$ máme

$$|\langle g,h\rangle - Tg| \le \int_G |g(x)| \frac{1}{m(V)} \int_V |f(x-y) - f(y)| \, \mathrm{d}m(y) \, \mathrm{d}m(x) \le \varepsilon \|g\|$$

a

$$|\langle h,h\rangle - 1| \le \frac{1}{m(V)^2} \int_V \int_V \varepsilon \, \mathrm{d}m(x) \, \mathrm{d}m(y) = \varepsilon.$$

Tedy

$$|Tg| = |Tg - \langle g,h\rangle + \langle g,h\rangle| \le \varepsilon\|g\| + |\langle g,h\rangle|,$$

a proto

$$\begin{aligned}|Tg|^2 &\le \varepsilon(\varepsilon\|g\|^2 + 2|\langle g,h\rangle|) + |\langle g,h\rangle|^2 \le \varepsilon(\varepsilon\|g\|^2 + 2|\langle g,h\rangle|) + \langle g,g\rangle\langle h,h\rangle \\ &\le \varepsilon(\varepsilon\|g\|^2 + 2|\langle g,h\rangle|) + \langle g,g\rangle|\langle h,h\rangle - 1| + \langle g,g\rangle \\ &\le \varepsilon(\varepsilon\|g\|^2 + 2|\langle g,h\rangle| + \langle g,g\rangle) + \langle g,g\rangle.\end{aligned}$$

Tím je nerovnost (10) ověřena.

Krok 4. Ověříme, že

$$|Tg| \le \|\widehat{g}\|_\infty, \quad g \in L_1(G). \tag{11}$$

Nechť $g \in L_1(G)$ je dáno. Položíme $h_1 = g * g^*$ a pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ induktivně definujeme $h^n = h^{n-1} * h$. Jelikož je h pozitivně definitní (viz Lemma 42(c)), platí $h^* = h$. Z (10) platí $|Tg|^2 \le T(g * g^*) = Th$. Dosazením $h^{2^{n-1}}$ pro $n \in \mathbb{N}$ do (10) dostáváme

$$|T(h^{2^{n-1}})|^2 \le T(h^{2^{n-1}} * (h^{2^{n-1}})^*) = T(h^{2^n}).$$

Tedy

$$|Tg|^2 \le Th \le (T(h^2))^{\frac{1}{2}} \le (T(h^4))^{\frac{1}{4}} \le \cdots \le (T(h^{2^n}))^{\frac{1}{2^n}} \le \|h^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Jelikož $\|T\| \le 1$ a $\lim_{n\to\infty} \|h^{2^n}\|^{2^{-n}} = r_{L_1(G)}(h)$, dostáváme z Věty 10.83(a) a Věty 18(a) nerovnost

$$|Tg|^2 \le \|\widehat{h}\|_\infty = \|\widehat{g}\|_\infty^2.$$

Tedy (11) je ověřeno.

Krok 5. Nechť $F\colon L_1(G) \to C_0(\widehat{G})$ značí Fourierovu transformaci. Definujme

$$\widetilde{L}h = Tg, \quad g \in F^{-1}(h), h \in \operatorname{Rng} F.$$

Díky odhadu (11) je L dobře definované lineární zobrazení $\operatorname{Rng} F$ do $\mathbb{C}$. Navíc platí

$$|\widetilde{L}h| = |Tg| \le \|\widehat{g}\| = \|h\|, \quad g \in F^{-1}(h), h \in \operatorname{Rng} F.$$

Tedy $\widetilde{L}$ je spojitý funkcionál na $\operatorname{Rng} F$ o normě nepřevyšující 1. Jelikož je $\operatorname{Rng} F$ hustý v $C_0(\widehat{G})$ (viz Důsledek 24), má $\widetilde{L}$ jednoznačné rozšíření $L \in C_0(\widehat{G})^*$ s normou $\|L\| = \|\widetilde{L}\|$. Dle Rieszovy věty o reprezentaci (viz Větu **??**) existuje $\widetilde{\mu} \in M(\widehat{G})$ splňující $\|\mu\| = \|L\| \le 1$ a

$$Lh = \int_{\widehat{G}} h(\gamma) \, \mathrm{d}\widetilde{\mu}(\gamma), \quad h \in C_0(\widehat{G}).$$

Definujme míru $\mu \in M(\widehat{G})$ jako $\phi(\widetilde{\mu})$, kde $\phi\colon G \to G$ je definováno jako $\phi(x) = -x$, $x \in G$.

Položme

$$\widetilde{f}(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x) \, \mathrm{d}\mu(\gamma), \quad x \in G. \tag{12}$$

Nechť nyní $g \in L_1(G)$ je libovolné. Pak

$$\begin{aligned}\int_G g(x)f(x) \, \mathrm{d}m(x) = Tg = \int_{\widehat{G}} \widehat{g}(\gamma) \, \mathrm{d}\widetilde{\mu}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \widehat{g}(-\gamma) \, \mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \int_G g(x)\gamma(x) \, \mathrm{d}m(x) \, \mathrm{d}\mu(\gamma) \\ = \int_G g(x) \left(\int_{\widehat{G}} \gamma(x) \, \mathrm{d}\mu(\gamma) \right) \mathrm{d}m(x) = \int_G g(x)\widetilde{f}(x) \, \mathrm{d}m(x).\end{aligned}$$

Tedy $f = \widetilde{f}$ m-skoro všude. Jelikož f i $\widetilde{f}$ je spojitá funkce, platí $f = \widetilde{f}$.

Zbývá ukázat, že $\mu \geq 0$. Dosazením $x = 0$ do (12) dostáváme

$$1 = \widetilde{f}(0) = f(0) = \int_{\widehat{G}} 1 \,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \mu(\widehat{G}) \leq \|\mu\| = \|\widetilde{\mu}\| \leq 1.$$

Díky Lemmatu 13.128 je μ nezáporná.

□

8. Věta o inverzi

LEMMA 44. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $\widetilde{F}$ je prostý operátor z $L(M(\widehat{G}), \ell_\infty(G))$ splňující $\|\widetilde{F}\| \leq 1$ a každý prvek $f \in \operatorname{Rng} \widetilde{F}$ je omezená, stejnoměrně spojitá funkce na G.*

DŮKAZ. Zjevně pro $\mu \in M(G)$ platí

$$|(\widetilde{F}\mu)(x)| = |\int_{\widehat{G}} \gamma(x) \,\mathrm{d}\mu(\gamma)| \leq \int_{\widehat{G}} 1 \,\mathrm{d}|\mu| = \|\mu\|, \quad x \in G,$$

a tedy $\|\widetilde{F}\| \leq 1$.

Pokud $\widetilde{F}\mu = 0$, z Věty 38 plyne $\mu = 0$, tj. $\widetilde{F}$ je prostý.

Nechť nyní $\mu \in M(G)$ je dána. Pišme $\mu = \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_k$, kde $\mu_k \in M(G)$, $k = 0, \dots, 3$, jsou nezáporné. Pak pro každé $k \in \{0, \dots, 3\}$ je funkce $\widetilde{F}\mu_k$ spojitá a pozitivně definitní (viz Lemma 40(d)), a tedy je stejnoměrně spojitá (viz Lemma 40(e)). Tedy i $\widetilde{F}\mu = \sum_{k=0}^{3} i^k \widetilde{F}\mu_k$ je stejnoměrně spojitá.

□

VĚTA 45 (Věta o inverzi). *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Pokud $f \in L_1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$, pak platí $\widehat{f} \in L_1(\widehat{G})$.*
(b) *Nechť je Haarova míra m na G fixována. Pak Haarovu míru $\widehat{m}$ na $\widehat{G}$ lze volit tak, že rovnost*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x) d\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G, \tag{13}$$

platí pro každou $f \in L_1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$.

DŮKAZ. (a) Označme $B = L_1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$ a pro $f \in B$ označme $\mu_f = \widetilde{F}^{-1}(f)$.

Krok 1. Ukážeme, že platí

$$\widehat{g}\mu_f = \widehat{f}\mu_g, \quad f, g \in B. \tag{14}$$

Nechť tedy $f, g \in B$ jsou dány. Pak pro libovolnou $h \in L_1(G)$ máme

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{G}} \widehat{h}(\gamma) \,\mathrm{d}\mu_f(\gamma) &= \int_{\widehat{G}} \left(\int_G h(x)\gamma(-x) \,\mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}\mu_f(\gamma) \\
&\int_{\widehat{G}} \left(\int_G h(-x)\gamma(x) \,\mathrm{d}m(x) \right) \mathrm{d}\mu_f(\gamma) \\
&= \int_G h(-x) \left(\int_{\widehat{G}} \gamma(x) \,\mathrm{d}\mu_f(\gamma) \right) \mathrm{d}m(x) \\
&= \int_G h(-x) f(x) \,\mathrm{d}m(x) = (f * h)(0) = (h * f)(0).
\end{aligned}$$

Použijeme-li tuto rovnost postupně pro $h * f$ a $h * g$, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{G}} \widehat{h}\widehat{f}\,\mathrm{d}\mu_g &= \int_{\widehat{G}} \widehat{h * f}\,\mathrm{d}\mu_g = ((h * f) * g)(0)\\ &= ((h * g) * f)(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{h * g}\,\mathrm{d}\mu_f = \int_{\widehat{G}} \widehat{h}\widehat{f}\,\mathrm{d}\mu_g.\end{aligned}$$

Jelikož je Rng F hustý v $C_0(\widehat{G})$ (viz Důsledek 24), (14) platí.

Krok 2. Definujeme nyní funkcionál T na $C_c(\widehat{G})$ následujícím způsobem.

Nechť $g \in C_c(\widehat{G})$ je libovolná. Označme

$$B_g = \{v \in C_c(G);\ v \text{ pozitivně definitní}, \widehat{v} \geq 0 \text{ a } \widehat{g} > 0 \text{ na } \operatorname{supp} g\}.$$

Díky Větě 43 platí $B_g \subset B$. Položíme

$$Tg = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{v}}\,\mathrm{d}\mu_v,$$

kde $v \in B_g$ je libovolná.

Všimněme si, že T je nezáporný a nezávisí na volbě v. Díky pozitivní definitnosti je totiž μ_v nezáporná, takže pro $g \geq 0$ je $Tg \geq 0$.

Dále, je-li $w \in B_g$ libovolná, platí díky (14) rovnost

$$\int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}}\,\mathrm{d}\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}\widehat{v}}\widehat{v}\,\mathrm{d}\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}\widehat{v}}\widehat{w}\,\mathrm{d}\mu_v = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{v}}\,\mathrm{d}\mu_v = Tg.$$

Ověříme nyní, že požadovaná funkce v existuje. Pro každé $\gamma \in \operatorname{supp} g$ nalezneme díky Důsledku 24(c) funkci $f_\gamma \in C_c(G)$ takovou, že $\widehat{f}(\gamma) \neq 0$. Funkce $v_\gamma = u_\gamma * u_\gamma^*$ má pak kompaktní nosič a $\widehat{v_\gamma}(\gamma) > 0$. Pro každé $\gamma \in \operatorname{supp} g$ nalezneme okolí U_γ, na kterém je funkce $\widehat{v_\gamma}$ kladná. Díky kompaktnosti vybereme konečně mnoho bodů $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in K$ takových, že $\operatorname{supp} g \subset_{i=1}^n U_{\gamma_i}$. Pak funkce $v = \sum_{i=1}^n v_{\gamma_i}$ je element $C_c(G)$, $\widehat{v} \geq 0$ na $\widehat{G}$ a $\widehat{v} > 0$ na $\operatorname{supp} g$. Dle Lemmatu 40(c) je pozitivně definitní.

Je třeba nyní ověřit linearitu T. Nechť $g_1, g_2 \in C_c(\widehat{G})$ a $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Nechť v_1, v_2 a v_3 jsou funkce požadované definicí T pro funkce g_1, g_2 a $a_1 g_1 + a_2 + g_2$. Pak je funkce $v_1 + v_2$ též pozitivně definitní, $\widehat{v_1} + \widehat{v_2} \geq 0$ na $\widehat{G}$ a je kladná na $\operatorname{supp} g_1 \cup \operatorname{supp} g_2$. Tedy je kladná i na $\operatorname{supp}(a_1 g_1 + a_2 g_2)$. Proto

$$\begin{aligned}a_1 T g_1 + a_2 T g_2 &= a_1 \int_{\widehat{G}} \frac{g_1}{\widehat{v_1 + v_2}}\,\mathrm{d}\mu_{v_1+v_2} + a_2 \int_{\widehat{G}} \frac{g_2}{\widehat{v_1 + v_2}}\,\mathrm{d}\mu_{v_1+v_2}\\ &= \int_{\widehat{G}} \frac{a_1 g_1 + a_2 g_2}{\widehat{v_1 + v_2}}\,\mathrm{d}\mu_{v_1+v_2} = T(a_1 g_1 + a_2 g_2).\end{aligned}$$

Tedy je T lineární.

Krok 3. Funcionál T je nenulový a translačně invariantní.

Zvolme totiž $v \in B$ nenulovou, pak i $\mu_v \neq 0$, neboť $\widetilde{F}$ je prostý. Nechť $g \in C_c(\widehat{G})$ je funkce splňující $\int_{\widehat{G}} g\,\mathrm{d}\mu_v \neq 0$. Nechť w je funkce z definice $T(g\widehat{v})$. Díky (14) pak dostáváme

$$T(g\widehat{v}) = \int_{\widehat{G}} \frac{h\widehat{v}}{\widehat{w}}\,\mathrm{d}\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}}\,\mathrm{d}(\widehat{v}\mu_w) = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}}\,\mathrm{d}(\widehat{w}\mu_v) = \int_{\widehat{G}} g\,\mathrm{d}\mu_v \neq 0.$$

Funkcionál T je tedy nenulový.

Abychom ukázali jeho translanční invariantnost, vezměme $\gamma_0 \in \widehat{G}$ a $g \in C_c(\widehat{G})$. Položme

$$f(\gamma) = g(\gamma_0^{-1}\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Pak $\operatorname{supp} f = \gamma_0 \operatorname{supp} g$.

Stejným postupem jako v druhém kroku nalezneme $v \in B_g$ takovou, že $\widehat{v} > 0$ i na $\gamma_0 \operatorname{supp} g$. Pak také platí $v \in B_f$. Nechť $\phi\colon \widehat{G} \to \widehat{G}$ je definováno jako

$$\phi(\gamma) = \gamma_0^{-1}\gamma, \gamma \in \widehat{G}.$$

Položme $\mu = \phi(\mu_v)$ a $w = \widetilde{F}\mu$. Pak w je spojitá pozitivně definitní funkce na G (viz Lemma 40(d)) a $w(x) = \gamma_0^{-1}(x)v(x)$, $x \in G$. Vskutku, pro $x \in G$ máme

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\phi(\mu)(\gamma) = \int_{\widehat{G}} (\gamma_0^{-1}\gamma)(x)\,\mathrm{d}\mu_v(\gamma) \\ &= \gamma_0(-x)\int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu_v(x) = \gamma_0(-x)(\widetilde{F}\mu_v)(x) = \gamma_0(-x)v(x). \end{aligned}$$

Proto $w \in C_{\mathrm{c}}(G)$ a dle Věty 18(b) máme

$$\widehat{w}(\gamma) = \widehat{v}(\gamma_0\gamma), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Platí tak $w \in B_g$. Jelikož $v \in B_f$, dostáváme

$$Tg = \int_{\widehat{G}} \frac{g}{\widehat{w}}\,\mathrm{d}\mu_w = \int_{\widehat{G}} \frac{g(\gamma)}{\widehat{w}(\gamma)}\,\mathrm{d}\phi(\mu_g)(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \frac{g(\gamma_0^{-1}\gamma)}{\widehat{w}(\gamma_0^{-1}\gamma)}\,\mathrm{d}\mu_v(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \frac{f(\gamma)}{\widehat{v}(\gamma)}\,\mathrm{d}\mu_v(\gamma) = Tf.$$

Tedy T je translačně invariantní.

Krok 4. Nechť $\widehat{m}$ značí Haarovu míry na $\widehat{G}$. Dle Rieszovy věty o reprezentaci existuje nezáporná, nenulová míra $\mu \in M(\widehat{G})$ splňující $Tg = \int_{\widehat{G}} g\,\mathrm{d}\mu$, $g \in C_{\mathrm{c}}(\widehat{G})$. Díky jednoznačnosti Haarovy míry existuje $c > 0$ takové, že $\mu = c\widehat{m}$.

Nechť $f \in B$ a $g \in C_{\mathrm{c}}(\widehat{G})$ jsou dány. Vezměme libovolné $v \in B_{g\widehat{f}}$. Pak díky (14) máme

$$\int_{\widehat{G}} g\,\mathrm{d}\mu_f = \int_{\widehat{G}} \frac{g\widehat{v}}{\widehat{v}}\,\mathrm{d}\mu_f = \int_{\widehat{G}} \frac{g\widehat{f}}{\widehat{v}}\,\mathrm{d}\mu_v = T(g\widehat{f}) = c\int_{\widehat{G}} g\widehat{f}\,\mathrm{d}\widehat{m}.$$

Tedy pro každé $f \in B$ platí

$$\int_{\widehat{G}} g\,\mathrm{d}\mu_f = c\int_{\widehat{G}} g\widehat{f}\,\mathrm{d}\widehat{m}, \quad g \in C_{\mathrm{c}}(\widehat{G}).$$

Protože je prostor $C_{\mathrm{c}}(\widehat{G})$ hustý v $C_0(\widehat{G})$, platí $\mu_f = \widehat{f}c\widehat{m}$. Jelikož je μ_f konečná míra, je $\widehat{f} \in L_1(\widehat{G})$. Tedy platí (a).

Z máme

$$f(x) = (\widetilde{F}\mu_f)(x) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\,\mathrm{d}\mu_f(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \gamma(x)\widehat{f}(\gamma)\,\mathrm{d}(c\widehat{m})(x).$$

Tedy formule (13) platí pro $f \in B$, kde uvažujeme míru $c\widehat{m}$.

□

PŘÍKLAD 46. Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:

(a) Pokud G je diskrétní a $m(\{0\}) = 1$, pak Haarova míra $\widehat{m}$ na $\widehat{G}$ vyhovující (13) je pravděpodobnostní.
(b) Pokud G je kompaktní a $m(G) = 1$, pak Haarova míra $\widehat{m}$ na $\widehat{G}$ vyhovující (13) splňuje $\widehat{m}(\{\gamma\}) = 1$, $\gamma \in \widehat{G}$.
(c) Pokud $G = \mathbb{R}^d$, pak míra m_d z Definice **??** splňuje (13).

DŮKAZ. (a) Uvažujme funkci $f = \chi_{\{0\}}$. Pak

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\gamma(-x)\,m(x) = f(0)\gamma(0) = 1, \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Tedy platí

$$\widehat{m}(\widehat{G}) = \int_{\widehat{G}} 1\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = f(0) = 1,$$

tj. $\widehat{m}$ je pravděpodobnostní.

(b) Uvažujme funkci $e(x) = 1$, $x \in G$. Pak $e \in L_1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$, neboť f je spojitá a pozitivně definitní. (Pro funkci e je totiž suma typu (7) rovna $|\sum_{l=1}^n c_l|^2$.) V důkazu Tvrzení 19(b) jsme odvodili, že

$$\widehat{e}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma = e, \\ 0, & \gamma \in \widehat{G} \setminus \{e\}. \end{cases}$$

Tedy

$$1 = e(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{e}(\gamma) \, d\widehat{m}(\gamma) = \widehat{m}(\{e\}).$$

(c) Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}, m_d) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$ je dáno. Pak $\widetilde{f} \in L_1(\mathbb{R}, m_d)$ a z Věty **??**(d) víme, že

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}(t) e^{ixt} \, dm_d(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Tedy míra m_d na $\mathbb{R}$ a m_d na $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ splňují (13).

□

VĚTA 47. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Uvažujme na G topologii $\tau_{\widehat{K}}$ stejnoměrně konvergence na kompaktních podmnožinách $\widehat{G}$, tj. množina $U \subset G_1$ je $\tau_{\widehat{K}}$-otevřená, pokud pro každé $x \in U$ existuje kompakt $K \subset \widehat{G}$ a $\varepsilon > 0$ takové, že množina*

$$U_{K,\varepsilon} = \{y \in G;\ |\gamma(y) - 1| < \varepsilon, \gamma \in K\} \tag{15}$$

splňuje $x + U_{K,\varepsilon} \subset U$.

Pak $\tau_{\widehat{K}}$ je topologie, která splývá s původní topologií.

DŮKAZ. Je třeba ukázat, že průnik dvou $\tau_{\widehat{K}}$-otevřených množin $U_1, U_2 \subset G$ je $\tau_{\widehat{K}}$-otevřená. Nechť tedy $x \in U_1 \cap U_2$ je dáno a U_{K_1,ε_1} a U_{K_2,ε_2} jsou množiny tvaru (15) splňující $x + U_{K_i,\varepsilon_i} \subset U_i$, $i = 1, 2$. Uvažujme množinu $V = U_{K_1 \cup K_2, \min \varepsilon_1, \varepsilon_2}$. Pak pro $y \in V$ platí

$$|\gamma(y) - 1| < \varepsilon_i, \gamma \in K_i, i = 1, 2,$$

a tedy $x + V \subset U_1 \cap U_2$. Vskutku je tedy $\tau_{\widehat{K}}$ topologie.

Nechť τ je topologie G. Ukážeme, že τ splývá s $\tau_{\widehat{K}}$. Zřejmě stačí ukázat, že množiny tvaru (15) jsou τ-otevřené a že pro každé $U \in \tau(0)$ existuje množina V tvaru (15) splňující $V \subset U$.

Krok 1. Nechť nejprve $K \subset \widehat{G}$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nechť $x \in U_{K,\varepsilon}$ je dáno. Pro každé $\gamma \in K$ existuje τ-otevřená množina $U_\gamma \subset G$ a otevřená množina $V \subset \widehat{G}$ takové, že $(x, \gamma) \in U_\gamma \times V_\gamma$ a

$$|\gamma'(x') - \gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (x,', \gamma') \in U_\gamma \times V_\gamma.$$

(Zde používáme Lemma 22(b).) Díky kompaktnosti K existuje konečně mnoho prvků $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in K$ takových, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{\gamma_i}$. Položme $U = \bigcap_{i=1}^n U_{\gamma_i}$. Pak $U \subset U_{K,\varepsilon}$. Vskutku, nechť $y \in U$ je dáno. Vezmeme libovolné $\gamma \in K$ a nalezneme $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $\gamma \in V_{\gamma_i}$. Pak

$$|\gamma(y) - 1| \le |\gamma(y) - \gamma(x)| + |\gamma(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tedy $U \subset U_{K,\varepsilon}$, takže jsme ověřili, že každá množina tvaru (15) je τ-otevřená.

Krok 2. Nechť $U \subset G$ je τ-okolí 0. Nalezneme kompaktní, symetrické $V \in \tau(0)$ splňující $V - V \subset U$. Položme $f = m(V)^{-\frac{1}{2}} \chi_V$ a $g = f * f^*$. Pak g je spojitá, pozitivně definitní funkce na G_1 (viz Lemma 40(c)) a

$$\operatorname{supp} g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} f \subset V + V \subset U.$$

Tedy pro g platí (13). Speciálně máme

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{G}} \widehat{g} \, d\widehat{m} = g(0) &= \int_G f(x) f(-x) \, dm(x) = \int_G m(V)^{-1} \chi_V(x) \chi_V(-x) \, dm(x) \, dm(x) \\ &= m(V)^{-1} \int_V \chi_V(x) \chi_{-V}(x) \, dm(x) = 1. \end{aligned}$$

Jelikož $\widehat{g} = |\widehat{f}|^2 \geq 0$, existuje kompakt $K \subset \widehat{G}$ takový, že $\int_K \widehat{g}\,\mathrm{d}\widehat{m} > \frac{2}{3}$.

Takovýto kompakt nalezneme následovně. Položme

$$A = \{\gamma \in \widehat{G};\ \widehat{g} > 0\} \quad \text{a} \quad A_n = \{\gamma \in \widehat{G};\ \widehat{g} \geq \frac{1}{n}\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\widehat{m}(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, a díky Lebesgueově větě pak dostáváme

$$\int_{\widehat{G}} \widehat{g}\,\mathrm{d}\widehat{m} = \int_{\widehat{G}} \chi_A \widehat{g}\,\mathrm{d}\widehat{m} = \lim_{n\to\infty} \int_{\widehat{G}} \chi_{A_n} \widehat{g}\,\mathrm{d}\widehat{m}.$$

Existuje tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_{A_n} \widehat{g}\,\mathrm{d}\widehat{m} > \frac{2}{3}$. Za pomoci regularity míry $\widehat{m}$ nyní nalezneme požadovaný kompakt.

Uvažujme nyní množinu $U_{K,\frac{1}{3}}$ (viz (15)). Pak $U_{K,\frac{1}{3}} \subset U$.

Nechť totiž $x \in U_{K,\frac{1}{3}}$ je libovolné. Pak pro $\gamma \in K$ platí $|\gamma(x) - 1| < \frac{1}{3}$, a tedy $\operatorname{Re}\gamma(x) > \frac{2}{3}$. Dále

$$|\int_{\widehat{G}\setminus K} \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| \leq \int_{\widehat{G}\setminus K} \widehat{g}\,\mathrm{d}\widehat{m} = \int_{\widehat{G}} \widehat{g}\,\mathrm{d}\widehat{m} - \int_K \widehat{g}\,\mathrm{d}\widehat{m} \leq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

a

$$\begin{aligned}
|\int_K \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| &= |\int_K \widehat{g}(\gamma)\operatorname{Re}\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) + i\int_K \widehat{g}(\gamma)\operatorname{Im}\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| \\
&\geq |\int_K \widehat{g}(\gamma)\operatorname{Re}\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| = \int_K \widehat{g}(\gamma)\operatorname{Re}\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) \\
&\geq \frac{2}{3}\int_K \widehat{g}\,\mathrm{d}\widehat{m} \geq \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

a proto

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= |\int_{\widehat{G}} \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| = |\int_K \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) + \int_{\widehat{G}\setminus K} \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| \\
&\geq |\int_K \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| - |\int_{\widehat{G}\setminus K} \widehat{g}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)| \geq \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Jelikož $g = 0$ na $G_1 \setminus (V - V)$, dostáváme $x \in V - V \subset U$.

Tedy $U_{K,\frac{1}{3}} \subset U$, a tedy množiny tvaru (15) tvoří bázi okolí 0.

□

VĚTA 48. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Grupa $\widehat{G}$ odděluje body G.*
(b) *Je-li G kompaktní, je systém funkcí*

$$\mathcal{F} = \{\sum_{i=1}^{n} a_j \gamma_j;\ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \widehat{G}\}$$

hustý v $C(G)$.

DŮKAZ. (a) Nechť bod $x \in G \setminus \{0\}$ je dán. Zvolíme okolí $U \in \tau(0)$ splňující $x \notin U$ a nechť $U_{K,\varepsilon}$ je množina tvaru (15) splňující $U_{K,\varepsilon} \subset U$. Pak $\gamma(x) \neq 1$ pro nějaké $\gamma \in K$. V opačném případě by totiž platilo $|\gamma(x) - 1| = 0 < \varepsilon$ pro každé $\gamma \in K$, a tedy $x \in U_{K,\varepsilon} \subset U$, což by byl spor.

Jsou-li nyní body $x_1, x_2 \in G$ různé, nalezneme $\gamma \in \widehat{G}$ splňující $\gamma(x_1 - x_2) \neq 1$. Pak $\gamma(x_1) \neq \gamma(x_2)$.

(b) Systém $\mathcal{F}$ je zjevně vektorový prostor uzavřený na komplexní sdružení. Jelikož je $\widehat{G}$ grupa, je $\mathcal{F}$ i algebra. Dle (a) odděluje body, takže tvrzení plyne ze Stoneovy-Weierstraßovy věty.

□

Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Dále budeme předpokládat, že m i $\widehat{m}$ jsou normalizovány tak, že platí (13).

9. Plancherelova věta

VĚTA 49 (Plancherelova věta). *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a F značí Fourierovu transformaci. Pak existuje právě jeden izometrický, surjektivní operátor $P\colon L_2(G) \to L_2(\widehat{G})$, který splňuje $P = F$ na $L_1(G) \cap L_2(G)$.*

DŮKAZ. Nechť $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$ je libovolné. Pak funkce $g = f * f^*$ je v $L_1(G)$, je spojitá a pozitivně definitní (viz Lemma 40(c)), tj. $g \in L_1(G) \cap \operatorname{Rng} \widetilde{F}$. Jelikož $\widehat{g} = |\widehat{f}|^2$, z Věty 45 dostáváme

$$\int_G |f(x)|^2 \,\mathrm{d}m(x) = \int_G f(x) f^*(-x) \,\mathrm{d}m(x) = g(0) = \int_{\widehat{G}} \widehat{g}(\gamma) \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} |\widehat{f}(\gamma|^2 \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma).$$

Tedy F je izometrie na $L_1(G) \cap L_2(G)$ do $L_2(G)$.

Označme $A = F(L_1(G) \cap L_2(G))$. Nechť $g \in L_2(\widehat{G})$ splňuje

$$\int_{\widehat{G}} f(\gamma)\overline{g(\gamma)} \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = 0, \quad f \in A.$$

Pak pro každé $f \in L_1(G) \cap L_2(G)$ a $x_0 \in G$ platí $\widehat{f_{-x_0}} \in L_1(G) \cap L_2(G)$ a dle Věty 18(c) máme $\widehat{f_{-x_0}}(\gamma) = \gamma(x_0)\widehat{f}(\gamma)$. Tedy

$$\int_{\widehat{G}} \gamma(x_0) f(\gamma)\overline{g(\gamma)} \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = 0, \quad f \in A, x_0 \in G.$$

Pro $f \in A$ je $f \in L_2(\widehat{G})$, a tedy díky Hölderově nerovnosti platí $f\overline{g} \in L_1(\widehat{G})$. Máme tedy $\widetilde{F}(f\overline{g}\widehat{m}) = 0$, a tedy $f\overline{g} = 0$ $\widehat{m}$-skoro všude (viz Větu 38).

Nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je dáno. Nalezneme $f \in C_c(G)$ takovou, že $\widehat{f}(\gamma_0) \neq 0$ (viz Důsledek 24(c)). Ze spojitosti $\widehat{f}$ plyne, že $\widehat{f} \neq 0$ na nějakém okolí U bodu γ_0. Tedy $\overline{g}\chi_U = 0$ $\widehat{m}$-skoro všude. Ukázali jsme, že pro každý bod $\gamma_0 \in \widehat{G}$ existuje okolí U takové, že $\widehat{m}(\{\gamma \in U;\ |g(\gamma)| > 0\}) = 0$.

Položme

$$L = \{\gamma \in \widehat{G};\ |g(\gamma)| > 0\}.$$

Jelikož je $g \in L_2(\widehat{G})$, je $\widehat{m}(L) < \infty$, a tedy existuje neklesající posloupnost $\{L_n\}$ kompaktních podmnožin $\widehat{G}$ splňující $L_n \subset L$, $n \in \mathbb{N}$, a $\widehat{m}(L_n) \to \widehat{m}(L)$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Pro každý bod $\gamma \in L_n$ nalezneme okolí U_γ takové, že $\widehat{m}(U_\gamma) = 0$. Díky kompaktnosti existuje konečná množina $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in L_n$ taková, že $L_n \subset \bigcup_{i=1}^m U_{\gamma_i}$. Tedy $\widehat{m}(L_n) = 0$. Proto i $\widehat{m}(L) = 0$ a g je nulová funkce.

Díky Větě **??** je tedy A hustý podprostor $L_2(\widehat{G})$. Proto má F z $L_1(G) \cap L_2(G)$ právě jedno izometrické rozšíření na $P\colon L_2(G) \to L_2(\widehat{G})$ (viz Větu 2.28).

□

DEFINICE 50. Zobrazení P z předchozí Věty 49 se nazývá Plancherelovou transformací.

LEMMA 51 (Parsevalova rovnost). *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa a P je Plancherelova transformace. Pak platí*

$$\int_G f(x)\overline{g(x)} \,\mathrm{d}m(x) = \int_{\widehat{G}} Pf(\gamma)\overline{Pg(\gamma)} \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma), \quad f, g \in L_2(G).$$

DŮKAZ. Požadovaná rovnost plyne z Věty 11.3.

□

VĚTA 52. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak*

$$\operatorname{Rng} F = \{g_1 * g_2;\ g_1, g_2 \in L_2(\widehat{G})\}.$$

DŮKAZ. Nechť F je Fourierova a P Plancherelova transformace.

Krok 1. Ukážeme, že pro $f, g \in L_2(G)$ platí

$$F(fg) = Pf * Pg. \tag{16}$$

Nechť tedy $f, g \in L_2(G)$ jsou dány. Abychom toto ukázali, vezměme posloupnost $\{f_n\}$ a $\{g_n\}$ v $C_c(G)$ splňující $\|f_n - f\|_2 + \|g_n - g\|_2 \to 0$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné a nechť $\gamma_0 \in \widehat{G}$ je dáno. Položíme $u(x) = g_n(-x)\gamma_0(x)$, $x \in G$. Pak

$$u^*(x) = \overline{u(-x)} = \overline{g_n(x)\gamma_0(-x)}, \quad x \in G.$$

Pak

$$\widehat{u}(\gamma) = \int_G g_n(x)\gamma_0(x)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G g_n(-x)(\gamma_0\gamma^{-1}(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \widehat{g_n}(\gamma_0\gamma^{-1}), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Dle Parsevalovy rovnosti tak máme

$$\begin{aligned} P(f_n g_n)(\gamma_0) = \widehat{f_n g_n}(\gamma_0) &= \int_G f_n(x)g_n(x)\gamma_0(-x)\,\mathrm{d}m(x) = \int_G f(x)\overline{\overline{g_n(x)\gamma_0(-x)}}\,\mathrm{d}m(x) \\ &= \int_G f_n(x)\overline{u^*(x)}\,\mathrm{d}m(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f_n}(\gamma)\overline{\widehat{u^*}(\gamma)}\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f_n}(\gamma)\widehat{u}(\gamma)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) \\ &= \int_{\widehat{G}} \widehat{f_n}(\gamma)\widehat{g_n}(\gamma_0\gamma^{-1})\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = (\widehat{f_n} * \widehat{g_n})(\gamma_0). \end{aligned} \tag{17}$$

Jelikož díky Hölderově nerovnosti platí

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \le \|f_n(g_n - g)\| + \|(f_n - f)g\|_1 \le \|f_n\|_2\|g_n - g\|_2 + \|f_n - f\|_2\|g\|_2,$$

dostáváme $F(f_n g_n) \rightrightarrows F(fg)$.

Dále $Ff_n = Pf_n \to Pf$ a $Fg_n = Pg_n \to Pg$ v $L_2(\widehat{G})$. Tedy pro $\gamma_0 \in \widehat{G}$ platí

$$\begin{aligned} |(Pf_n * Pg_n)(\gamma_0) - (Pf * Pg)(\gamma)| &\le \int_{\widehat{G}} |Pf_n(\gamma) - Pf(\gamma)||Pg_n(\gamma_0\gamma^{-1}) - Pg(\gamma_0\gamma^{-1})|\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) \\ &\le \|Pf_n - Pf\|_2\|Pg_n - Pg\|_2. \end{aligned}$$

Jelikož

$$\begin{aligned} |\widehat{fg}(\gamma_0) - (Pf * Pg)(\gamma_0)| \le{}& |\widehat{fg}(\gamma_0) - \widehat{f_n g_n}(\gamma_0)| + |\widehat{f_n g_n}(\gamma_0) - (Pf_n * Pg_n)(\gamma_0)| \\ &+ |(Pf_n * Pg_n)(\gamma_0) - (Pf * Pg)(\gamma_0)| \end{aligned}$$

a

$$\widehat{(f_n g_n)}(\gamma_0) - (Pf_n * Pg_n)(\gamma_0) = 0$$

dle (17), máme $\widehat{fg}(\gamma_0) = (Pf * Pg)(\gamma_0)$.

Krok 2. Dokažme nyní požadovanou rovnost. K důkazu inkluze „$\subset$“ vezměme libovolné $f \in L_1(G)$. Položíme-li

$$f_1 = \sqrt{|f|}\,\operatorname{sgn} f \quad \text{a} \quad f_2 = \sqrt{|f|},$$

platí $f_1, f_2 \in L_2(G)$ a $f = f_1 f_2$. Rovnost (17) ukazuje, že $Ff = Pf_1 * Pf_2$.

Pokud $g_1, g_2 \in L_2(\widehat{G})$ jsou dány, nechť $f_1, f_2 \in L_2(G)$ splňují $Pf_i = g_i$, $i = 1, 2$. Dle (17) pak $Pg_1 * Pg_2 = F(f_1 f_2) \in \operatorname{Rng} F$. Tím je důkaz ukončen.

□

VĚTA 53. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa nechť $U \subset \widehat{G}$ je neprázdná otevřená množina. Pak existuje $f \in L_1(G)$ takové, že $\widehat{f} \neq 0$ a $\widehat{f} =$ na $\widehat{G} \setminus U$.*

DŮKAZ. Nechť K je kompaktní podmnožina U splňující $\widehat{m}(K) > 0$ a nechť $V \in \tau(0)$ je kompaktní okolí splňující $K + V \subset U$. Dle Věty 52 existuje $f \in L_1(G)$ takové, že $\widehat{f} = \chi_K * \chi_V$. Pak $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset K + V \subset U$ a

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma_0)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma_0) &= \int_{\widehat{G}} (\chi_K * \chi_V)(\gamma_0)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma_0) = \int_{\widehat{G}}\int_{\widehat{G}} \chi_K(\gamma)\chi_V(\gamma_0\gamma^{-1})\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma_0) \\ &= \int_{\widehat{G}} \chi_K(\gamma)\left(\int_{\widehat{G}} \chi_V(\gamma_0\gamma^{-1})\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma_0)\right)\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{\widehat{G}} \chi_K(\gamma)\widehat{m}(V)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) \\ &= \widehat{m}(K)\widehat{m}(V) > 0 \end{aligned}$$

Tedy $\widehat{f} \neq 0$ a důkaz je hotov.

□

10. Pontrjaginova dualita

DEFINICE 54 (Kanonické vnoření). Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Definujme zobrazení $\phi\colon G \to \ell_\infty(\widehat{G})$ jako

$$\phi(x)(\gamma) = \gamma(x), \quad \gamma \in \widehat{G}, x \in G.$$

LEMMA 55. *Nechť G_1 je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa, $G_2 = \widehat{G_1}$ a $G_3 = \widehat{G_2}$. Pak $\operatorname{Rng}\phi \subset G_3$ a ϕ je grupový homomorfismus.*

DŮKAZ. Nechť $x \in G_1$ je dáno. Pak

$$\phi(0)(\gamma) = \gamma(x) = 1, \quad \gamma \in G_2,$$

a

$$\phi(x)(\gamma_1\gamma_2) = (\gamma_1\gamma_2)(x) = (\gamma_1(x))(\gamma_2(x)) = (\phi(x)(\gamma_1))(\phi(x)(\gamma_2), \gamma_1, \gamma_2 \in G_2,$$

tedy $\phi(x)\colon G_2 \to \mathbb{T}$ je grupový homomorfzimus.

Dle Lemmatu 22(b) a Věty 23 je $\phi(x)$ spojitá funkce na G_2, a tedy je $\operatorname{Rng}\phi \subset G_3$.

□

VĚTA 56 (Pontrjaginova dualita). *Nechť G_1 je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa, $G_2 = \widehat{G_1}$ a $G_3 = \widehat{G_2}$. Pak je kanonické vnoření homeomorfismus G_1 na G_3.*

DŮKAZ. Nechť τ značí topologii G_1 a nechť g_0 značí neutrální prvek G_3, tj. $\phi(0) = g_0$.

Krok 1. Ukážeme, že ϕ je spojité zobrazení z G_1 do G_3. Nechť $V \subset G_3$ je otevřená množina a nechť $x \in G_1$ splňuje $\phi(x) \in V$. Dle Definice 20 existuje $K \subset G_2$ kompakt a $\varepsilon > 0$ takové, že $\phi(x)V_{K,\varepsilon} \subset V$ (zde $V_{K,\varepsilon}$ je množina tvaru (2)). Pak je množina

$$U_{K,\varepsilon} = \{x \in G_1;\ |\gamma(x) - 1| < \varepsilon, \gamma \in K\}$$

prvkem $\tau(0)$ (viz Větu 47) a splňuje $\phi(x + U_{K,\varepsilon}) \subset \phi(x)V_{K,\varepsilon}$. Tedy $\phi^{-1}(V)$ je otevřená množina a ϕ je tak spojité.

Krok 2. Nechť nyní $U \subset G_1$ je τ-otevřená množina a $\phi(x) \in \phi(U)$ je dáno. Chceme ukázat, že existuje množina $V_{K,\varepsilon}$ tvaru (15) splňující

$$\phi(x)(V_{K,\varepsilon} \cap \phi(G_1)) \subset \phi(U). \tag{18}$$

Nalezneme $K \subset G_2$ kompakt a $\varepsilon > 0$ takové, že množina $U_{K,\varepsilon}$ tvaru (2) splňuje $x + U_{K,\varepsilon} \subset U$. Nechť

$$V_{K,\varepsilon} = \{g \in G_3;\ |g(\gamma) - 1| < \varepsilon, \gamma \in K\}.$$

Pak V je otevřená množina v G_3 a navíc pro ni platí (18). Je-li totiž $y \in G_1$ splňující $\phi(y) \in V_{K,\varepsilon}$, pak $y \in U_{K,\varepsilon}$. Pak $x + y \in U$, a tedy

$$\phi(x)\phi(y) = \phi(x + y) \in \phi(U).$$

Krok 3. V tomto kroku ověříme, že $\phi(G_1)$ je uzavřená podmnožina G_3 Nechť $g \in \overline{\phi(G_1)}$ je dáno. Nalezneme net $\{x_i\}_{i\in I}$ v G_1 takový, že $\phi(x_i) \to g$. Pak $\{x_i\}$ splňuje následující fakt:

$$\forall U \in \tau(0) existsi_0 \in I foralli, j \in I, i, j \geq i_0\colon x_i - x_j \in U. \tag{19}$$

Mějme totiž $U \in \tau(0)$ dáno. Pak $\phi(U)$ je otevřené okolí g_0 v $\phi(G_1)$, a tedy existuje $V \in \tau(g_0)$ takové, že $V \cap \phi(G_1) \subset \phi(U)$. Nechť $W \in \tau(g_0)$ splňuje $WW^{-1} \subset V$. Jelikož je gW okolí g, existuje $i_0 \in I$ takové, že $\phi(x_i) \in gW$ pro $i \geq i_0$. Pro $i \in I$ označme symbolem $w_i \in W$ splňující $\phi(x_i) = gw_i$. Pak pro $i, j \geq i_0$ platí

$$\phi(x_i - x_j) = \phi(x_i)\phi(x_j)^{-1} = gw_ig^{-1}w_j^{-1}w_iw_j^{-1} \in WW^{-1} \subset V.$$

Tedy máme $\phi(x_i - x_j) \in V \cap \phi(U)$, a tedy $x_i - x_j \in U$. Tím je (19) ověřeno.

Zvolme nyní kompaktní množinu $U \in \tau(0)$. Nechť $i_0 \in I$ je index daný (19). Pak pro $i \geq i_0$ platí $x_i - x_{i_0} \in U$, tj. $x_i \in x_{i_0} + U$. Net $\{x_i\}_{i \geq i_0}$ je tak obsažen v kompaktní množině $x_{i_0} + U$, a tedy má podnet $\{y_j\}$ konvergující k $y \in G_1$.

Vzhledem k tomu, že $\{x_i\}_{i \geq i_0}$ je podnet $\{x_i\}_{i \in I}$, je i $\{y_j\}$ podnet $\{x_i\}_{i \in I}$. Ze spojitosti ϕ tak dostáváme

$$\phi(y) = \lim_j \phi(y_j) = g,$$

a tedy $g \in \phi(G_1)$.

Krok 4. Nyní stačí ukázat, že $\phi(G_1)$ je hustá podmnožina G_3. Předpokládejme, že tomu tak není, a že tedy existuje neprázdná, otevřená množina $V \subset G_3$ splňující $\phi(G_1) \cap V = \emptyset$. Dle Věty 53 existuje $\varphi \in L_1(G_2)$ taková, že $\widehat{\varphi} \neq 0$, ale $\widehat{\varphi} = 0$ na $G_3 \setminus V$. Jelikož $\widehat{\varphi}(\phi(x)) = 0$ pro každé $x \in G_1$, máme

$$\widehat{\varphi}(\phi(x)) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)(\phi(x))(\gamma^{-1}) \, \mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\gamma(-x) \, \mathrm{d}\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G_1.$$

Díky Větě 38 dostáváme $\varphi = 0$, což je spor. Proto platí

$$G_3 = \overline{\phi(G_1)} = \phi(G_1),$$

a důkaz je tak hotov.

□

11. Důsledky Pontrjaginovy duality

VĚTA 57. *Nechť G_1 je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa, $G_2 = \widehat{G_1}$ a $G_3 = \widehat{G_2}$. Nechť $\phi \colon G_1 \to G_3$ je kanonické vnoření. Nechť dále*

- *$F_1 \colon L_1(G_1) \to C_0(G_2)$, respektive $F_2 \colon L_1(G_2) \to C_0(G_3)$, je Fourierova transformace na G_1, respektive G_2,*
- *symbol F_1', respektive F_2', značí duální operátor k F_1, respektive k F_2,*
- *$H_1 \colon L_1(G_1) \to C^b(G_2)$, respektive $H_2 \colon L_1(G_2) \to C^b(G_3)$, je Fourierova-Stieltjesova transformace na G_1, respektive G_2.*
- *Nechť $\widetilde{F}_1 \colon M(G_2) \to C^b(G_1)$, respektive $\widetilde{F}_2 \colon M(G_3) \to C^b(G_2)$, je zobrazení z Definice 37. Položme*
$$(T_1\mu)(x) = (\widetilde{F}_1\mu)(-x), \quad x \in G_1, \mu \in M(G_2),$$
a
$$(T_2\mu)(\gamma) = (\widetilde{F}_2\mu)(\gamma^{-1}), \quad \gamma \in G_2, \mu \in M(G_3),$$

Pak platí následující tvrzení:

(a) *Platí $F_i' = T_i$, $i = 1, 2$.*

(b) *Pro $\mu \in M(G_2)$ položme $\nu = i(\mu)$, kde $i \colon G_2 \to G_2$ je definováno jako $i(\gamma) = \gamma^{-1}$, $\gamma \in G_2$. Pak*
$$(\widetilde{F}_1\nu)(x) = (H_2\mu)(\phi(x)), \quad x \in G_1.$$

(c) *Pro $\mu \in M(G_1)$ položme $\nu = i(\mu)$, kde $i \colon G_1 \to G_1$ je definováno jako $i(x) = -x$, $x \in G_1$. Pak platí*
$$(H_1\mu)(\gamma) = (\widetilde{F}_2\phi(\nu))(\gamma), \quad \gamma \in G_2.$$

DŮKAZ. (a) Nechť $\mu \in M(G_2)$ je dáno. Pak

$$\begin{aligned}\int_{G_1} (T_1\mu)(x) f(x) \, \mathrm{d}m(x) &= \int_{G_1} \int_{G_2} f(x)\gamma(-x) \, \mathrm{d}\mu(\gamma) \, \mathrm{d}m(x) = \int_{G_2} \int_{G_1} f(x)\gamma(-x) \, \mathrm{d}m(x) \, \mathrm{d}\mu(\gamma) \\ &= \int_{G_2} F_1 f \, \mathrm{d}\mu, \quad f \in L_1(G_1),\end{aligned}$$

a tedy $F_1' = T_1$.

Podobně pro $\mu \in M(G_3)$ a $f \in L_1(G_2)$ platí

$$\int_{G_2} (T_2\mu)(\gamma) f(\gamma) \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{G_2}\int_{G_3} f(\gamma) g(\gamma^{-1} \,\mathrm{d}\mu(g) \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) = \int_{G_3}\int_{G_2} f(\gamma) g(\gamma^{-1}) \,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma) \,\mathrm{d}\mu(g)$$
$$= \int_{G_3} F_2 f \,\mathrm{d}\mu.$$

Tvrzení (a) je tak ověřeno.

(b) Nechť $\mu \in M(G_2)$ je dáno. Položme $\nu = i(\mu)$. Pak pro $x \in G$ platí

$$(\widetilde{F}_1\nu)(x) = (\widetilde{F}_1 i(\mu))(x) = \int_{G_2} \gamma(x) \,\mathrm{d}i(\mu)(\gamma) = \int_{G_2} \gamma^{-1}(x) \,\mathrm{d}\mu(\gamma)$$
$$= \int_{G_2} \phi(x)(\gamma^{-1}) \,\mathrm{d}\mu(\gamma) = (H_2\mu)(\phi(x)).$$

(c) Podobně jako v (b) definujme pro $\mu \in M(G_1)$ míru $\nu = i(\mu)$. Pak dostáváme pro $\gamma \in G_2$ rovnosti

$$(\widetilde{F_2}\phi(\nu))(\gamma) = \int_{G_3} g(\gamma) \,\mathrm{d}\phi(\nu)(g) = \int_{G_1} \phi(x)(\gamma) \,\mathrm{d}\nu(x)$$
$$= \int_{G_1} \gamma(-x) \,\mathrm{d}\mu(x) = (H_1\mu)(\gamma).$$

□

DŮSLEDEK 58. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak je Fourierova-Stieltjesova transformace prostá.*

DŮKAZ. Tvrzení plyne z Věty 57(c), neboť zobrazení $\widetilde{F}_2$ je prosté dle Věty 38, což implikuje injektivitu T_2.

□

VĚTA 59. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak $M(G)$ a $L_1(G)$ jsou polojednoduché algebry.*

DŮKAZ. Dle Věty 36(c) je pro každé $\gamma \in \widehat{G}$ zobrazení $\mu \mapsto \widehat{\mu}(\gamma)$ prvek $\Delta(M(G))$. Pokud je tedy pro nějakou míru $\mu \in M(G)$ její Gelfandova transformace nulová, speciálně platí $\widehat{\mu}(\gamma) = 0$ na $\widehat{G}$. Vzhledem k Důsledku 58 je $\mu = 0$. Algebra $M(G)$ je tak polojednoduchá.

Co se týč polojednoduchosti $L_1(G)$, je třeba dle Věty 16 ověřit, že pokud $\widehat{f} = 0$ pro nějakou $f \in L_1(G)$, je již nutně $f = 0$. Položíme-li však $\mu = fm$, platí $\widehat{\mu} = \widehat{f}$ dle Věty 36(b). Fakt $f = 0$ tedy opět plyne z Důsledku 58.

□

LEMMA 60. *Nechť G_i, $i = 1, 2, 3$, a ϕ jsou jako ve Větě 57. Nechť m_1 je Haarova míra na G_1 a nechť m_2 a m_3 jsou Haarovy míry na G_2 a G_3 normalizované tak, že jak pro dvojici (G_1, G_2), tak pro dvojici (G_2, G_3) platí věta o inverzi. Pak $m_3 = \phi(m_1)$.*

DŮKAZ. Uvažujme stejné značení operátorů jako ve Větě 57. Jelikož je $\phi(m_1)$ nenulová Haarova míra na G_3, existuje $c > 0$ takové, že $m_3 = c\phi(m_1)$.

Nechť $g \in C_c(G_1)$ je nenulová funkce a nechť $g = f * f^*$. Pak f je spojitá, pozitivně definitní (viz Lemma 40(c)), a tedy pro ni platí (13). Proto $\widehat{f} \neq 0$. Definujme $\psi : G_3 \to \mathbb{C}$ jako

$$\psi(\phi(x)) = f(-x), \quad x \in G_1.$$

Položme $\varphi = \widetilde{F}_2(\psi\phi(m_1))$. Pak

$$\varphi(\gamma) = \int_{G_3} g(\gamma) \,\mathrm{d}\psi\phi(m_1)(g) = \int_{G_1} \gamma(x) f(-x) \,\mathrm{d}m_1(x) = \widehat{f}(\gamma), \quad \gamma \in G_2.$$

Tedy $\varphi \in L_1(G_2)$ dle Věty 45(a). Proto i pro φ platí (13).

Povšimněme si dále, že pro $x \in G_1$ platí

$$\varphi(\phi(x)) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\phi(x)(\gamma^{-1})\,\mathrm{d}m_2(\gamma) = \int_{G_2} \widehat{f}(\gamma)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m_2(\gamma) = f(-x).$$

Složením těchto faktů pro každé $\gamma \in G_2$ máme

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\gamma) = \varphi(\gamma) &= \int_{G_3} \widehat{\varphi}(g)g(\gamma)\,\mathrm{d}m_3(g) = c\int_{G_3} \widehat{\varphi}(g)g(\gamma)\,\mathrm{d}\phi(m_1)(g)\\ &= c\int_{G_1} \widehat{\varphi}(\phi(x))\phi(x)(\gamma)\,\mathrm{d}m_1(x) = c\int_{G_1} f(-x)\gamma(x)\,\mathrm{d}m_1(x) = c\widehat{f}(\gamma).\end{aligned}$$

Jelikož je $\widehat{f}$ nenulové, platí $c = 1$ a důkaz je dokončen.

□

VĚTA 61 (O inverzi pro $M(G)$). *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Nechť $\mu \in M(G)$ splňuje $\widehat{\mu} \in L_1(\widehat{G})$. Pak existuje $f \in L_1(G)$ taková, že $\mu = fm$ a platí*

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{\mu}(\gamma)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G.$$

(b) *Nechť $f \in L_1(G)$ splňuje $\widehat{f} \in L_1(\widehat{G})$. Položme*

$$g(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}\widehat{m}(\gamma), \quad x \in G.$$

Pak $f = g$ m-skoro všude.

DŮKAZ. Budeme používat značení z Věty 57.

(a) Označme

$$\varphi(\gamma) = (H_1\mu)(\gamma) = \int_{G_1} \gamma(-x)\,\mathrm{d}\mu(x), \quad \gamma \in G_2.$$

Dle Věty 57(c) je $\varphi \in \operatorname{Rng}\widetilde{F}_2$. Tedy je $\varphi \in L_1(G_2) \cap \operatorname{Rng}\widetilde{F}_2$, což znamená, že $\widehat{\varphi} \in L_1(G_3)$ a platí pro něj (13).

Položme

$$f(x) = \int_{G_2} \gamma(x)\varphi(\gamma)\,\mathrm{d}m_2(\gamma), \quad x \in G_1.$$

Pak

$$\widehat{\varphi}(\phi(x)) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\phi(x)(\gamma^{-1}\,\mathrm{d}m_2(\gamma) = \int_{G_2} \varphi(\gamma)\gamma(-x)\,\mathrm{d}m_2(\gamma) = f(-x), \quad x \in G_1.$$

Tedy $f \in L_1(G_1)$.

Díky (13) pro φ dostáváme

$$\varphi(\gamma) = \int_{G_3} \widehat{\varphi}(g)g(\gamma)\,\mathrm{d}m_3(g) = \int_{G_1} \widehat{\varphi}(\phi(x))(\gamma)\,\mathrm{d}m_1(x) = \int_{G_1} f(-x)\gamma(x)\,\mathrm{d}m(x) = \widehat{f}(\gamma).$$

Označme $\nu = fm_1$. Pak

$$(H_1\nu)(\gamma) = \int_{G_1} \gamma(-x)f(x)\,\mathrm{d}m_1(x) = \widehat{f}(\gamma) = \varphi(\gamma), \quad \gamma \in G_2.$$

Tedy $H_1\mu = H_1\nu$, z čehož pomocí Věty 38 plyne rovnost $\mu = fm_1$.

(b) Nechť $f \in L_1(G_1)$ je dáno. Pak míra $\mu = fm_1$ leží v $M(G_1)$ a $H_1\mu = \widehat{f}$. Dle předpokladu tedy $H_1\mu \in L_1(G_2)$, což díky (a) znamená, že funkce

$$g(x) = \int_{G_2} \widehat{f}(\gamma)\gamma(x)\,\mathrm{d}m_2(\gamma), \quad x \in G_1,$$

leží v $L_1(G_1)$ a $fm_1 = gm_1$. Tedy $f = g$ m_1-skoro všude.

□

PŘÍKLAD 62. Nechť G je $\mathbb{Z}$, $\mathbb{T}$ nebo $\mathbb{R}$. Pak Fourierova transformace $F : G \to C_0(\widehat{G})$ není surjektivní.

DŮKAZ. „$G = \mathbb{Z}$“

□

TVRZENÍ 63. *Nechť G je komutativní lokálně kompaktní topologická grupa taková, že Fourierova transformace není surjektivní. Pak na $L_1(G)$ nelze zavést involuci a ekvivalentní normu, ve které by $L_1(G)$ byla $B^\star$-algebra.*

PŘÍKLAD 64. Nechť G je konečná, komutativní lokálně kompaktní topologická grupa. Pak na $L_1(G)$ nelze zavést involuci a ekvivalentní normu, ve které by $L_1(G)$ byla $\mathrm{B}^\star$-algebra.

Kapitola 13

Dodatek

1. Funkce více proměnných

VĚTA 1. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ a předpokládejme, že funkce $D^\alpha f$ jsou spojité na Ω pro všechny multiindexy $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ splňující $|\alpha| \le k$. Pak $f \in C^k(\Omega)$.*

DŮKAZ. Použijeme indukci dle k. Pro $k = 1$ se jedná přímo o definici prostoru $C^1(\Omega)$. Nechť nyní $k > 1$ a předpokládejme, že tvrzení platí pro menší řády. Pak z indukčního předpokladu plyne, že $f \in C^{k-1}(\Omega)$. Musíme ukázat, že všechny parciální derivace k-tého řádu funkce f jsou spojité na Ω. Nechť tedy $(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$. Pro zkrácení zápisu budeme používat následující symboliku: $\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ apod. Nalezněme permutaci π množiny $\{1, \dots, k\}$ takovou, že $i_{\pi(1)} \le i_{\pi(2)} \le \cdots \le i_{\pi(k)}$, a uvědomme si, že existuje multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ takový, že $\partial_{i_{\pi(1)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f = D^\alpha f$. Rozlišíme dva případy. Nejprve předpokládejme, že $\pi(1) = 1$. Protože $f \in C^{k-1}(\Omega)$, platí

$$\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$. Odtud

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f\big)(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f\big)(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce.

Nechť nyní $\pi(1) > 1$ a nechť $\sigma : \{1, \dots, k-2\} \to \{2, \dots, k\} \setminus \{\pi(1)\}$ je nějaká bijekce. Protože $f \in C^{k-1}(\Omega)$, platí

$$\partial_{i_1} \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f(x) = \partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f(x) \quad \text{a} \tag{1}$$

$$\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_{\pi(1)}} \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f(x) \tag{2}$$

pro každé $x \in \Omega$. Označme $g = \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f$. Pak $g \in C^1(\Omega)$ a díky (1) platí

$$\partial_{i_{\pi(1)}} \partial_{i_1} g(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_1} \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f\big)(x) = \partial_{i_{\pi(1)}}\big(\partial_{i_{\pi(2)}} \cdots \partial_{i_{\pi(k)}} f\big)(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce. Podle věty o záměně druhých parciálních derivací (viz např. [Z, Věta 2.87]) tedy platí $\partial_{i_1} \partial_{i_{\pi(1)}} g(x) = \partial_{i_{\pi(1)}} \partial_{i_1} g(x) = D^\alpha f(x)$ pro každé $x \in \Omega$. Odtud a s pomocí (2) pak dostaneme

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} f(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_2} \cdots \partial_{i_k} f\big)(x) = \partial_{i_1}\big(\partial_{i_{\pi(1)}} \partial_{i_{\sigma(1)}} \cdots \partial_{i_{\sigma(k-2)}} f\big)(x) = \partial_{i_1} \partial_{i_{\pi(1)}} g(x) = D^\alpha f(x)$$

pro každé $x \in \Omega$, což je dle předpokladu spojitá funkce.

□

■■■[potřebujeme větu o lokálně stejnoměrné konvergenci $D^\alpha f_n$ na $\mathbb{R}^n$]

2. Metrické prostory

VĚTA 2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Podmnožina $\mathbb{C}^n$ je kompaktní právě tehdy, když je omezená a uzavřená.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ plyne z obecné věty o kompaktních metrických prostorech.

$\Leftarrow$ Definujme zobrazení $f : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^{2n}, \|\cdot\|_2)$ předpisem

$$f(z_1, \dots, z_n) = (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n).$$

Snadno je vidět, že f je bijekce. Dále

$$\begin{aligned}\|(z_1,\dots,z_n)-(y_1,\dots,y_n)\|_2^2 &= \|(z_1-y_1,\dots,z_n-y_n)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |z_i-y_i|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n \big((\mathrm{Re}(z_i-y_i))^2+(\mathrm{Im}(z_i-y_i))^2\big) = \|f(z_1-y_1,\dots,z_n-y_n)\|_2^2 = \\ &= \|f(z_1,\dots,z_n)-f(y_1,\dots,y_n)\|_2^2,\end{aligned}$$

tedy f je izometrické zobrazení. Speciálně f je homeomorfismus, který zobrazuje omezené množiny na omezené množiny. Odtud již tvrzení plyne.

□

VĚTA 3. *Nechť P a Q jsou metrické prostory, $f,g\colon P\to Q$ jsou spojitá zobrazení a $M\subset P$ je hustá v P. Jestliže $f=g$ na M, pak $f=g$ na celém P.*

DŮKAZ. Zvolme $x\in P$. Pak z hustoty M plyne existence posloupnosti $\{x_n\}\subset M$ splňující $x_n\to x$. Tedy $f(x)=\lim f(x_n)=\lim g(x_n)=g(x)$.

□

FAKT 4. *Nechť (P,ρ) je metrický prostor a $A\subset P$. Pak funkce $x\mapsto \mathrm{dist}(x,A)$ je stejnoměrně spojitá na P.*

DŮKAZ. Zvolme $\varepsilon>0$. Nechť $x,y\in P$, $\rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}$. Pak existuje $a\in A$ takové, že $\rho(x,a)<\mathrm{dist}(x,A)+\frac{\varepsilon}{2}$. Pak $\mathrm{dist}(y,A)-\mathrm{dist}(x,A)<\rho(y,a)-\rho(x,a)+\frac{\varepsilon}{2}\le\rho(x,y)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. Opačnou nerovnost obdržíme snadno záměnou x za y.

□

LEMMA 5. *Nechť (P,ρ) je metrický prostor, $K\subset P$ je kompaktní a $K\subset G\subset P$ je otevřená. Pak* $\mathrm{dist}(K,P\setminus G)>0$.

DŮKAZ. Dle Faktu 4 je funkce $x\mapsto\mathrm{dist}(x,P\setminus G)$ spojitá na P, nabývá tedy na kompaktu K minima, např. v bodě $y\in K$. Pak $\mathrm{dist}(K,P\setminus G)=\mathrm{dist}(y,P\setminus G)>0$, neboť $P\setminus G$ je uzavřená a $y\notin P\setminus G$.

□

VĚTA 6. *Součin $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ úplných metrických prostorů $X_1,\dots,X_n$ je též úplný.*

DŮKAZ. Nechť $\rho_1,\dots,\rho_n$ jsou příslušné metriky na $X_1,\dots,X_n$. Označme $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ a připomeňme, že součinová metrika je dána vzorcem $\rho(x,y)=\max_{i=1,\dots,n}\{\rho_i(x(i),y(i))\}$ pro prvky $x,y\in X$, $x=(x(i))_{i=1}^n$, $y=(y(i))_{i=1}^n$. Nechť $\{x_k\}$ je cauchyovská posloupnost v X. Pro každé $i\in\{1,\dots,n\}$ a $k,l\in\mathbb{N}$ máme $\rho_i(x_k(i),x_l(i))\le\rho(x_k,x_l)$, tedy pro každé $i\in\{1,\dots,n\}$ je posloupnost $\{x_k(i)\}_{k=1}^\infty$ je cauchyovská v X_i. Z úplnosti X_i plyne existence $x(i)\in X_i$ takového, že $\lim_k x_k(i)=x(i)$ v prostoru X_i. Položme $x=(x(1),\dots,x(n))\in X$. Pak zjevně $x_n\to x$ v X.

□

VĚTA 7. *Nechť (P,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $f\colon P\to Q$, $A\subset P$ a $a\in A'$. Pak limita $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ existuje, právě když je splněna následující (Bolzanova-Cauchyova) podmínka:*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in(U(a,\delta)\setminus\{a\})\cap A\colon \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

DŮKAZ. $\Rightarrow$ je téměř zřejmá.

$\Leftarrow$ Protože $a\in A'$, existuje posloupnost $\{x_n\}\subset A\setminus\{a\}$ taková, že $x_n\to a$. Snadno ověříme, že posloupnost $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská: Zvolme $\varepsilon>0$. Nechť $\delta>0$ je příslušné δ z Bolzanovy-Cauchyovy podmínky. Existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $x_n\in U(a,\delta)$ pro každé $n\ge n_0$. Tedy $\sigma(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$ kdykoli $m,n\ge n_0$. Protože prostor Q je úplný, existuje $y=\lim_{n\to\infty}f(x_n)\in Q$. Tvrdíme, že $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)=y$:

Zvolme libovolné $\varepsilon>0$. Pak existuje $\delta>0$ takové, že $\sigma(f(u),f(v))<\frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $u,v\in(U(a,\delta)\setminus\{a\})\cap A$. Dále existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že $x_n\in U(a,\delta)$ pro každé $n\ge n_0$, a $n_1\ge n_0$ takové, že

$\sigma(f(x_n), y) < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $n \geq n_1$. Tedy $\sigma(f(x), y) \leq \sigma(f(x), f(x_{n_1})) + \sigma(f(x_{n_1}), y) < \varepsilon$ pro každé $x \in (U(a,\delta) \setminus \{a\}) \cap A$.

$\square$

VĚTA 8. *Nechť (P,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f: M \to Q$ je stejnoměrně spojité zobrazení. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na P.*

DŮKAZ. Zobrazení f zřejmě splňuje v každém bodě $a \in P \setminus M$ Bolzanovu-Cauchyovu podmínku z Věty 7. Můžeme tedy položit $g(a) = f(a)$ pro $a \in M$ a $g(a) = \lim_{x \to a, x \in M} f(x)$ pro $a \in P \setminus M$. Ukážeme, že takto definované zobrazení $g: P \to Q$ je stejnoměrně spojité na P: Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(u), f(v)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u, v \in M$ a $\rho(u,v) < \delta$. Nechť nyní $x, y \in P$, $\rho(x,y) < \frac{\delta}{3}$. Je-li $x \in M$, položme $x_1 = x$. V opačném případě existuje $0 < \delta_1 \leq \frac{\delta}{3}$ takové, že $\sigma(g(x), f(u)) < \frac{\varepsilon}{3}$ kdykoli $u \in U(x,\delta_1) \cap M$. Z hustoty M tedy plyne existence $x_1 \in M$ splňujícího $\rho(x, x_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(x), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Obdobně obdržíme $y_1 \in M$ splňující $\rho(y, y_1) < \frac{\delta}{3}$ a $\sigma(g(y), f(y_1)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $\rho(x_1, y_1) \leq \rho(x_1, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_1) < \delta$. Dohromady tedy máme $\sigma(g(x), g(y)) \leq \sigma(g(x), f(x_1)) + \sigma(f(x_1), f(y_1)) + \sigma(f(y_1), g(y)) < \varepsilon$.

Jednoznačnost rozšíření plyne z Věty 3.

$\square$

Následující drobné zobecnění plyne snadno z důkazu Věty 8.

VĚTA 9. *Nechť (P,ρ) a (Q,σ) jsou metrické prostory, Q je úplný, $M \subset P$ je hustá v P a $f: M \to Q$ je zobrazení stejnoměrně spojité na omezených podmnožinách M. Pak existuje spojité rozšíření f na celé P. Toto rozšíření je určeno jednoznačně a je stejnoměrně spojité na omezených podmnožinách P.*

POZNÁMKA 10. Není obtížné si rozmyslet, že Tietzeova věta o rozšiřování spojitých funkcí platí i pro funkce s komplexními hodnotami: Nechť X je prostor, ve kterém platí Tietzeova věta (např. metrický prostor), $F \subset X$ je uzavřená množina a $f: F \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak $f = u + iv$, kde u, v jsou spojité reálné funkce na F. Podle Tietzeovy věty tedy existují reálné funkce U, V spojité na X rozšiřující u, resp. v. Položme $h = U + iV$. Pak h je spojitá na X a rozšiřuje f. Na závěr položme $R = \sup_{x \in F} |f(x)|$ a definujme $\varphi: \mathbb{C} \to B_{\mathbb{C}}(0,R)$ předpisem $\varphi(z) = z$ pro $|z| \leq R$ a $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$ pro $|z| > R$. Pak φ je spojité zobrazení (tzv. spojitá retrakce na $B_{\mathbb{C}}(0,R)$). Funkce $g = \varphi \circ h$ je tedy spojitá na X a snadno je vidět, že g rozšiřuje f a $\sup_{x \in X} |g(x)| \leq R$.

Často využijeme následující přímý důsledek Baireovy věty:

DŮSLEDEK 11. *Nechť P je úplný metrický prostor, $\{F_n\} \subset P$ je posloupnost uzavřených množin v P a $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že F_n má neprázdný vnitřek.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že všechny F_n mají prázdný vnitřek. Pak všechny F_n jsou řídké v P, tedy P je první kategorie (v sobě). Podle Baireovy věty je ovšem P druhé kategorie, což je spor.

$\square$

Připomeňme, že pro funkci $f: P \to \mathbb{K}$ na metrickém prostoru P je nosič f definován jako $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in P;\ f(x) \neq 0\}}$.

LEMMA 12. *Nechť K je kompaktní $\blacksquare\blacksquare\blacksquare$[Hausdorffův; doplnit do použití] prostor, $F \subset K$ je uzavřená a $U \subset K$, $U \supset F$ je otevřená. Pak platí:*

(a) Existuje otevřená $V \subset K$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.
(b) Existuje spojitá funkce $f: K \to [0,1]$ splňující $f = 1$ na F a $\operatorname{supp} f \subset U$.

DŮKAZ. Důkaz provedeme pouze pro metrický kompaktní prostor K.

(a) Pokud je F prázdná, stačí položit $V = \emptyset$. V případě $U = K$ položíme $V = K$. Ve zbývajících případech platí $d = \operatorname{dist}(F, K \setminus U) > 0$, neboť $x \mapsto \operatorname{dist}(x, K \setminus U)$ je spojitá funkce (Fakt 4), která nabývá minima na kompaktní množině F. Položíme-li tedy

$$V = \left\{x \in K;\ \operatorname{dist}(x, F) < \tfrac{d}{2}\right\},$$

máme $F \subset V \subset \overline{V} \subset \{x \in K;\ \operatorname{dist}(x, F) \le \frac{d}{2}\} \subset U$, přičemž opět využíváme spojitosti funkce $x \mapsto \operatorname{dist}(x, F)$.

(b) Je-li F prázdná, položíme $f = 0$ na K, je-li $U = K$, položíme $f = 1$ na K. Ve zbývajících případech najdeme díky tvrzení (a) otevřenou množinu $V \subset K$ splňující $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$. Požadovanou funkci pak získáme pomocí formule

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, K \setminus V)}{\operatorname{dist}(x, K \setminus V) + \operatorname{dist}(x, F)} \quad \text{pro } x \in K.$$

Skutečně, podobně jako v (a) odvodíme, že $\operatorname{dist}(F, K \setminus V) > 0$, odkud plyne, že jmenovatel je vždy kladný. Pak f je spojitá díky Faktu 4, zjevně $f = 1$ na K a $\{x \in K;\ f(x) > 0\} \subset V$, tedy $\operatorname{supp} f \subset \overline{V} \subset U$.

□

VĚTA 13 (Spojitý rozklad jednotky). *Nechť K je kompaktní prostor a $\{U_1, \dots, U_n\}$ je pokrytí K otevřenými množinami. Pak existují spojité funkce $f_1, \dots, f_n \colon K \to [0, 1]$ splňující* $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ *pro $i = 1, \dots, n$ a $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ pro každé $x \in K$.*

DŮKAZ. Pro každý bod $x \in K$ najdeme $i \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $x \in U_i$, a z Lemmatu 12(a) nalezneme otevřenou množinu V_x splňující $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_i$. Díky kompaktnosti existuje konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_m \in K$ tak, že $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_{x_j}$. Definujme uzavřené množiny F_i, $i = 1, \dots, n$ jako

$$F_i = \bigcup \bigl\{ \overline{V_{x_j}};\ \overline{V_{x_j}} \subset U_i \bigr\}.$$

Pak každá F_i je uzavřená množina splňující $F_i \subset U_i$ a platí $K \subset \bigcup_{i=1}^n F_i$. Podle Lemmatu 12(b) existují spojité funkce $g_1, \dots, g_n \colon K \to [0, 1]$ takové, že $g_i = 1$ na F_i a $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Pak $\sum_{i=1}^n g_i > 0$ na K. Pro $i = 1, \dots, n$ a $x \in K$ položme

$$f_i(x) = \frac{g_i(x)}{\sum_{j=1}^n g_j(x)}.$$

Pak f_i je spojitá funkce do $[0, 1]$ a $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$ pro $i = 1, \dots, n$ a platí $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ pro každé $x \in K$.

□

3. Teorie míry

LEMMA 14. *Nechť $(X, \mathcal{S})$ a $(Y, \mathcal{T})$ jsou měřitelné prostory a $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ je součinová σ-algebra na $X \times Y$. Je-li $A \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$, pak* $\operatorname{card}\{A^x;\ x \in X\} \le \mathrm{c}$, *kde $A^x = \{y \in Y;\ (x, y) \in A\}$.*

DŮKAZ. Označme $\mathcal{A} = \bigl\{A \subset X \times Y;\ \operatorname{card}\{A^x;\ x \in X\} \le \mathrm{c}\bigr\}$. Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra. Protože každý měřitelný obdélník zjevně leží v $\mathcal{A}$, plyne odtud, že $\mathcal{S} \times \mathcal{T} \subset \mathcal{A}$, což dokazuje tvrzení lemmatu.

Platí, že $\{(X \times Y)^x;\ x \in X\} = \{Y\}$, a tedy $X \times Y \in \mathcal{A}$. Dále pro $A \subset X \times Y$ a $x \in X$ je $Y \setminus A^x = (X \times Y \setminus A)^x$. Zobrazení $\Phi \colon M \mapsto Y \setminus M$ tedy zobrazuje $\{A^x;\ x \in X\}$ na $\{(X \times Y \setminus A)^x;\ x \in X\}$, odkud plyne, že $X \times Y \setminus A \in \mathcal{A}$ kdykoli $A \in \mathcal{A}$.

Nechť nyní $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje prosté zobrazení $\psi_n \colon \{A_n^x;\ x \in X\} \to (0, 1)$. Je-li $M \in \bigl\{\bigl(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\bigr)^x;\ x \in X\bigr\}$, pak zvolme libovolně $x \in X$ tak, že $M = \bigl(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\bigr)^x$, a položme $\Psi(M) = \bigl(\psi_n(A_n^x)\bigr)_{n=1}^\infty \in (0, 1)^{\mathbb{N}}$. Pak $\Psi \colon \bigl\{\bigl(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\bigr)^x;\ x \in X\bigr\} \to (0, 1)^{\mathbb{N}}$ je prosté: Je-li $\Psi(M) = \Psi(N)$, pak existují $x, y \in X$ taková, že $M = \bigl(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\bigr)^x$, $N = \bigl(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\bigr)^y$ a $\psi_n(A_n^x) = \psi_n(A_n^y)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Z prostory ψ_n dostaneme, že $A_n^x = A_n^y$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že $\bigl(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\bigr)^x = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^x = \bigcup_{n=1}^\infty A_n^y = \bigl(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\bigr)^y$, neboli $M = N$. Odtud již snadno plyne, že $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

□

3.1. Nezáporné míry

Následující tvrzení je přímým důsledkem Lebesgueovy věty o konvergenci (případně zobecněné věty Leviho).

DŮSLEDEK 15. *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a $E, E_n \subset \Omega$ jsou měřitelné podmnožiny splňující buď $E_n \subset E_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ nebo $E_{n+1} \subset E_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Nechť dále $f \in L_p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Pak $\|\chi_E f - \chi_{E_n} f\|_p \to 0$. Speciálně, v případě $p = 1$ platí $\int_{E_n} f \,\mathrm{d}\mu \to \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.*

DŮKAZ. Posloupnost $\{\chi_{E_n} f\}$ konverguje bodově k $\chi_E f$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|\chi_E f - \chi_{E_n} f|^p \leq |f|^p$. Podle Lebesgueovy věty tedy $\|\chi_E f - \chi_{E_n} f\|_p^p = \int_\Omega |\chi_E f - \chi_{E_n} f|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0$.

□

VĚTA 16 (Hölderova nerovnost). *Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou, $f_1, \ldots, f_n$ jsou nezáporné měřitelné funkce na Ω a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$ splňují $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Pak*

$$\int_\Omega f_1 \cdots f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_n}.$$

DŮKAZ. Použijeme matematickou indukci dle $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ je nerovnost triviální. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Nechť $f_1, \ldots, f_{n+1}$ jsou nezáporné měřitelné funkce na Ω a $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} > 0$ splňují $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Položme $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i > 0$, $p = \frac{1}{\alpha}$, $q = \frac{1}{\alpha_{n+1}}$, $f = f_1 \cdots f_n$ a $g = f_{n+1}$. Pak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, a tedy podle Hölderovy nerovnosti pro f a g máme

$$\int_\Omega f_1 \cdots f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_\Omega f^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega g^q \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}} \cdots f_n^{\frac{1}{\alpha}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha} \left(\int_\Omega f_{n+1}^{\frac{1}{\alpha_{n+1}}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\alpha_{n+1}}.$$

Položíme-li $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha} > 0$ pro $i = 1, \ldots, n$, pak $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$, a tedy dle indukčního předpokladu použitého na funkce $f_1^{\frac{1}{\alpha}}, \ldots, f_n^{\frac{1}{\alpha}}$ dostaneme

$$\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}} \cdots f_n^{\frac{1}{\alpha}} \,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta_1}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\beta_1} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta_n}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\beta_n} = \left(\int_\Omega f_1^{\frac{1}{\alpha_1}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}} \cdots \left(\int_\Omega f_n^{\frac{1}{\alpha_n}} \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{\alpha_n}{\alpha}},$$

což v kombinaci s nerovností výše dává požadovaný výsledek.

□

Čtenář, který není seznámen s pojmem topologického prostoru, si může níže všude místo pojmu „topologický prostor“ dosadit pojem „metrický prostor“.

DEFINICE 17. Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je míra na $\mathcal{S}$. Řekneme, že μ je

- zevně regulární, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \inf\{\mu(G);\ G \supset E, G \text{ otevřená}\}$;
- zevnitř regulární, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \sup\{\mu(F);\ F \subset E, F \text{ uzavřená}\}$;
- těsná, pokud pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = \sup\{\mu(K);\ K \subset E, K \text{ kompaktní}\}$.

■■■[regularni: zevne+zevnitr+konecna na kompaktech; nebo: zevne+tesna+konecna na komp.]

LEMMA 18. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je těsná konečná míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{S}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují kompaktní $K \subset X$ a otevřená $G \subset X$ takové, že $K \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus K) < \varepsilon$.*

DŮKAZ. Díky těsnosti existují kompaktní množiny $K \subset E$ a $H \subset X \setminus E$ takové, že $\mu(K) > \mu(E) - \frac{\varepsilon}{2}$ a $\mu(H) > \mu(X \setminus E) - \frac{\varepsilon}{2}$. Položme $G = X \setminus H$. Pak G je otevřená, $K \subset E \subset G$ a $G \setminus E = (X \setminus H) \setminus E = (X \setminus H) \cap (X \setminus E) = (X \setminus E) \setminus H$. Tedy $\mu(G \setminus E) = \mu((X \setminus E) \setminus H) = \mu(X \setminus E) - \mu(H) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dohromady $\mu(G \setminus K) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus K) = \mu(G \setminus E) + \mu(E) - \mu(K) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

LEMMA 19. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou $E \in \mathcal{S}$ a pro každé $\varepsilon > 0$ existují uzavřená $F \subset X$ a otevřená $G \subset X$ takové, že $F \subset E \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Speciálně, μ je i zevnitř regulární.*

DŮKAZ. Nechť $\{A_n\} \subset \mathcal{S}$ je posloupnost množin konečné míry splňující $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Z vnější regularity plyne pro každé $n \in \mathbb{N}$ existence otevřené $G_n \subset X$ takové, že $G_n \supset E \cap A_n$ a $\mu(G_n) < \mu(E \cap A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < +\infty$. Pak $\mu(G_n \setminus (E \cap A_n)) = \mu(G_n) - \mu(E \cap A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Položíme-li nyní $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, pak G je otevřená a $E \subset G$. Dále je snadno vidět, že $G \setminus E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus (E \cap A_n)$, a tedy

$$\mu(G \setminus E) \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus (E \cap A_n)\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus (E \cap A_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplikujeme-li nyní již dokázanou část na množinu $X \setminus E$, pak dostaneme otevřenou $U \subset X$ splňující $X \setminus E \subset U$ a $\mu(U \setminus (X \setminus E)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Položíme-li $F = X \setminus U$, pak F je uzavřená, $F \subset E$ a $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $\mu(G \setminus F) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus F) < \varepsilon$.

□

LEMMA 20. *Nechť X je topologický prostor a μ je borelovská míra na X taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Je-li $E \subset X$ typu F_σ, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje uzavřená $F \subset E$ taková, že $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.*

DŮKAZ. Položme $H = X \setminus E$. Pak H je G_δ, takže $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, kde $H_n \subset X$ jsou otevřené a $H_{n+1} \subset H_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Položme $H^k = H \cap U_k$ a $H_n^k = H_n \cap U_k$ pro $k, n \in \mathbb{N}$. Množiny H_n^k jsou otevřené, $H^k = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n^k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$ a $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} H^k$. Pro pevné $k \in \mathbb{N}$ je $H_{n+1}^k \subset H_n^k$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\mu(H_1^k) \le \mu(U_k) < +\infty$, takže $\lim_{n\to\infty} \mu(H_n^k) = \mu(H^k)$. Existuje tedy $n_k \in \mathbb{N}$ takové, že $\mu(H_{n_k}^k) < \mu(H^k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$. Odtud plyne, že $\mu(H_{n_k}^k \setminus H^k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Konečně, definujme $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_{n_k}^k$. Pak G je otevřená, $H \subset G$ a $G \setminus H \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (H_{n_k}^k \setminus H^k)$. Tedy $\mu(G \setminus H) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$.

Na závěr stačí položit $F = X \setminus G$.

□

LEMMA 21. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je míra na $\mathcal{S}$ taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Pak systém*

$$\mathcal{A} = \big\{A \in \mathcal{S};\ \textit{pro každé } \varepsilon > 0 \textit{ existují uzavřená } F \subset X \textit{ a otevřená } G \subset X \textit{ takové,}$$
$$\textit{že } F \subset A \subset G \textit{ a } \mu(G \setminus F) < \varepsilon\big\}.$$

je σ-algebra.

DŮKAZ. Zjevně $X \in \mathcal{A}$ (stačí vzít $F = G = X$). Dále nechť $A \in \mathcal{A}$ a $\varepsilon > 0$. Nechť uzavřená $F \subset X$ a otevřená $G \subset X$ jsou takové, že $F \subset A \subset G$ a $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Pak $X \setminus G \subset X \setminus A \subset X \setminus F$ a $\mu\big((X \setminus F) \setminus (X \setminus G)\big) = \mu(G \setminus F) < \varepsilon$. Odtud plyne, že $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

Konečně, nechť $A_n \in \mathcal{A}$ pro $n \in \mathbb{N}$ a nechť $\varepsilon > 0$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť uzavřená $F_n \subset X$ a otevřená $G_n \subset X$ jsou takové, že $F_n \subset A_n \subset G_n$ a $\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Položme $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Pak G je otevřená, E je F_σ, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset G$ a $\mu(G \setminus E) \le \mu\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus F_n\big) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dle Lemmatu 20 pak existuje uzavřená $F \subset E$ taková, že $\mu(E \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$, a tedy $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

□

VĚTA 22. *Nechť X je topologický prostor takový, že každá otevřená množina je F_σ (např. metrický prostor), a nechť μ je borelovská míra na X taková, že $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, kde $U_n \subset X$ jsou otevřené a $\mu(U_n) < +\infty$. Pak μ je zevně i zevnitř regulární. Je-li navíc X K_σ, pak μ je dokonce těsná.*

DŮKAZ. Systém $\mathcal{A}$ z Lemmatu 21 je σ-algebra, která díky předpokladu a Lemmatu 20 obsahuje otevřené množiny, a tedy je rovna borelovské σ-algebře na X. To znamená, že μ je zevně i zevnitř regulární. Je-li navíc X K_σ, pak pro každou uzavřenou $F \subset X$ existuje neklesající posloupnost kompaktních množin $\{K_n\}$ taková, že $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, takže $\mu(F) = \lim \mu(K_n) = \sup\{\mu(K);\ K \subset F, K \text{ kompaktní}\}$. Odtud snadno plyne, že μ je těsná.

□

VĚTA 23 (Nikolaj Nikolajevič Luzin (1912)). *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$. Pak pro každou μ-měřitelnou funkci $f\colon X \to \mathbb{K}$ a $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset X$ uzavřená taková, že $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ a $f \upharpoonright_F$ je spojitá.*

DŮKAZ. Nechť $\{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze otevřených množin v $\mathbb{K}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme z Lemmatu 19 uzavřenou $F_n \subset X$ a otevřenou $G_n \subset X$ tak, že $F_n \subset f^{-1}(U_n) \subset G_n$ a $\mu(G_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Pak je $F = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus F_n)$ uzavřená a platí $\mu(X \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Restrikce $f \upharpoonright_F$ je pak spojitá, protože pro $n \in \mathbb{N}$ je množina $(f \upharpoonright_F)^{-1}(U_n) = f^{-1}(U_n) \cap F = G_n \cap F$ otevřená v F. (Poslední rovnost plyne z toho, že $G_n \cap F \subset F_n$.)

□

DŮSLEDEK 24. *Nechť X je metrický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny, μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$ a $f\colon X \to \mathbb{K}$ je μ-měřitelná funkce. Pak platí následující:*
(a) Existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na X taková, že $f_n \to f$ μ-skoro všude a $\sup_{x\in X}|f_n(x)| \le \sup_{x\in X}|f(x)|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
(b) Existuje borelovská funkce g na X rovnající se f μ-skoro všude.

DŮKAZ. Dle Věty 23 existuje posloupnost $\{H_n\}$ uzavřených množin v X taková, že $f \upharpoonright_{H_n}$ je spojitá a $\mu(X \setminus H_n) < \frac{1}{n}$. Položme $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$. Pak F_n jsou uzavřené množiny takové, že $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$, $\mu(X \setminus F_n) \le \mu(X \setminus H_n) < \frac{1}{n}$ a $f \upharpoonright_{F_n}$ je spojitá. Vskutku, je-li $F \subset \mathbb{K}$ uzavřená, pak

$$(f \upharpoonright_{F_n})^{-1}(F) = \bigcup_{i=1}^{n}(f \upharpoonright_{H_i})^{-1}(F),$$

přičemž množiny $(f \upharpoonright_{H_i})^{-1}(F)$ jsou uzavřené v H_i, a tedy i v X. Proto je $(f \upharpoonright_{F_n})^{-1}(F)$ uzavřená v X, a tedy i v F_n.

Položíme-li $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, pak A je borelovská a $\mu(X \setminus A) \le \mu(X \setminus F_n) \to 0$, tedy $\mu(X \setminus A) = 0$.

(a) Dle Poznámky 10 existují spojité funkce $f_n\colon X \to \mathbb{K}$ splňující $f_n = f \upharpoonright_{F_n}$ a $\sup_{x\in X}|f_n(x)| \le \sup_{x\in F_n}|f(x)| \le \sup_{x\in X}|f(x)|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pro každé $x \in A$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $x \in F_n$ pro $n \ge n_0$, a tedy $f_n(x) = f(x)$ pro $n \ge n_0$. To znamená, že $f_n \to f$ bodově na A.

(b) Funkce $g = \chi_A f$ je rovna f skoro všude. Ukažme, že je borelovská: Nechť $G \subset \mathbb{K}$ je libovolná otevřená množina. Je-li $0 \in G$, položme $B = X \setminus A$, jinak položme $B = \emptyset$. Pak

$$g^{-1}(G) = \big((X \setminus A) \cap g^{-1}(G)\big) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}\big(F_n \cap g^{-1}(G)\big) = B \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}(f \upharpoonright_{F_n})^{-1}(G).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je ovšem množina $(f \upharpoonright_{F_n})^{-1}(G)$ otevřená v F_n, a tedy borelovská v X. Proto je $g^{-1}(G)$ borelovská.

□

DŮSLEDEK 25. *Nechť X je metrický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny, μ je σ-konečná zevně regulární míra na $\mathcal{S}$ a $1 \le p < \infty$. Pak množina všech omezených spojitých funkcí na X je hustá v $L_p(\mu)$.*

DŮKAZ. ■■■Nechť $f \in L_p(\mu)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Zvolme $\eta > 0$ splňující $(2\eta)^{\frac{1}{p}} + \big(\eta(2^p + 2^{2p-1})\big)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Nejprve najdeme množinu $Y \subset X$ konečné míry takovou, že $\int_{X\setminus Y}|f|^p < \eta$. Dále najdeme omezenou nenulovou měřitelnou funkci $\widetilde{f}$ tak, že $\widetilde{f} = 0$ na $X \setminus Y$ a $\int_Y |f - \widetilde{f}|^p < \eta$. Pak platí

$$\int_X |f - \widetilde{f}|^p = \int_Y |f - \widetilde{f}|^p + \int_{X\setminus Y}|f|^p \le 2\eta. \tag{3}$$

Položme $c = \|\widetilde{f}\|_\infty$. Pomocí Věty 23 najdeme množinu $H \subset Y$ uzavřenou v Y takovou, že $\mu(Y \setminus H) < \eta c^{-p}$ a $\widetilde{f} \upharpoonright_H$ je spojitá. Díky Lemmatu 19 existuje $V \subset Y$ uzavřená v X splňující $\mu(Y \setminus V) < \eta c^{-p}$. Pak $F = H \cap V$ je uzavřená v X, $\mu(Y \setminus F) \le 2\eta c^{-p}$ a $\widetilde{f} \upharpoonright_F$ je spojitá. Dále díky regularitě existuje otevřená množina $U \supset F$ taková, že $\mu(U \setminus F) < \eta c^{-p}$. Použitím Tietzeovy věty najdeme $g\colon X \to \mathbb{K}$ spojitou omezenou, která je nulová na $X \setminus U$, rovna $\widetilde{f}$ na F a $\|g\|_\infty \leq 2\|\widetilde{f}\restriction_F\|_\infty \leq 2c$. Pak máme díky nerovnosti $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ platné pro každou dvojici čísel $a, b \in [0, +\infty)$ odhad

$$\begin{aligned} \int_X |\widetilde{f} - g|^p = \int_F |\widetilde{f} - g|^p + \int_{X \setminus F} |\widetilde{f} - g|^p &\leq 0 + 2^{p-1}\Big(\int_{Y \setminus F} |\widetilde{f}|^p + \int_{U \setminus F} |g|^p\Big) \\ &\leq 2^{p-1}(c^p \mu(Y \setminus F) + (2c)^p \mu(U \setminus F)) \\ &\leq 2^{p-1}(c^p 2c^{-p}\eta + 2^p c^p \eta c^{-p}) \\ &= \eta(2^p + 2^{2p-1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Kombinací (3) a (4) dostáváme

$$\|f - g\|_p \leq \|f - \widetilde{f}\|_p + \|\widetilde{f} - g\|_p = \Big(\int_X |f - \widetilde{f}|^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int_X |\widetilde{f} - g|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq (2\eta)^{\frac{1}{p}} + (\eta(2^p + 2^{2p-1}))^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

□

3.1.1. *Nosič míry.*

DEFINICE 26. Nechť X je topologický prostor a μ je míra na X definovaná alespoň na borelovských podmnožinách X. Pak nosič μ je definován jako $\operatorname{supp}\mu = X \setminus \bigcup\{G \subset X \text{ otevřená; } \mu(G) = 0\}$.

Nosič míry μ je uzavřená množina.

FAKT 27. *Nechť X je topologický prostor a μ je nenulová míra na X definovaná alespoň na borelovských podmnožinách X. Je-li μ těsná na otevřených množinách, pak $\mu(X \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$ a $\mu(\operatorname{supp}\mu) > 0$.*

DŮKAZ. Položme $U = \bigcup\{G \subset X \text{ otevřená; } \mu(G) = 0\}$. Je-li $K \subset U$ kompaktní, pak existují $G_1, \dots, G_n \subset X$ otevřené takové, že $\mu(G_j) = 0$ a $K \subset \bigcup_{j=1}^n G_j$. Odtud plyne, že $\mu(K) = 0$. Pak ovšem $\mu(U) = \sup\{\mu(K);\ K \subset U, K \text{ kompaktní}\} = 0$. Dále $\mu(\operatorname{supp}\mu) = \mu(X) - \mu(U) = \mu(X) > 0$.

□

TVRZENÍ 28. *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je konečná míra na $\mathcal{S}$ těsná na otevřených množinách. Je-li $\operatorname{supp}\mu = \{x\}$ pro nějaké $x \in X$, pak existuje $c \in (0, +\infty)$ takové, že $\mu = c\delta_x$.*

DŮKAZ. Položme $c = \mu(\{x\})$. Pak $c \in (0, +\infty)$ dle Faktu 27. Nechť $E \in \mathcal{S}$. Je-li $x \notin E$, pak $\mu(E) \leq \mu(X \setminus \operatorname{supp}\mu) = 0$ dle Faktu 27. Je-li $x \in E$, pak $\mu(E) = \mu(\{x\}) + \mu(E \setminus \{x\}) = c + 0 = c$. Tedy $\mu = c\delta_x$.

□

VĚTA 29. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, μ je míra na $\mathcal{S}$ a $g\colon \Omega \to [0, +\infty]$ je nezáporná měřitelná. Pak množinová funkce definovaná předpisem*

$$\nu(E) = \int_E g \,\mathrm{d}\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ je míra na $\mathcal{S}$ a platí

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$$

pro každou reálnou $f \in L^*(\nu)$, resp. pro každou komplexní $f \in L_1(\nu)$.

DŮKAZ. Fakt, že ν je míra a že integrální vzorec platí pro každou nezápornou měřitelnou f je známý (viz např. [R, Věta 1.29]). Pro reálnou $f \in L^*(\nu)$ máme $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\nu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega f^+ g \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (fg)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega (fg)^- \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$. Pro komplexní $f \in L_1(\nu)$ pak $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega \operatorname{Re} f \,\mathrm{d}\nu + i \int_\Omega \operatorname{Im} f \,\mathrm{d}\nu = \int_\Omega (\operatorname{Re} f) g \,\mathrm{d}\mu + i \int_\Omega (\operatorname{Im} f) g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \operatorname{Re}(fg) \,\mathrm{d}\mu + i \int_\Omega \operatorname{Im}(fg) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu$.

□

Nechť μ, ν jsou míry na σ-algebře $\mathcal{S}$. Fakt, že $\mu(E) \leq \nu(E)$ pro každou $E \in \mathcal{S}$ budeme značit $\mu \leq \nu$.

LEMMA 30. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ, ν jsou míry na $\mathcal{S}$. Je-li $\mu \le \nu$, pak $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$ pro každou nezápornou měřitelnou $f: \Omega \to [0, +\infty]$.*

DŮKAZ. Díky linearitě integrálu nerovnost zjevně platí pro nezáporné jednoduché měřitelné funkce. Přechodem k supremu obdržíme nerovnost pro obecné nezáporné měřitelné funkce.

□

TVRZENÍ 31. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ, ν jsou míry na $\mathcal{S}$. Pak funkce $\mu+\nu$ na $\mathcal{S}$ definovaná jako $(\mu + \nu)(E) = \mu(E) + \nu(E)$ pro $E \in \mathcal{S}$ je míra a $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$ pro každou nezápornou měřitelnou $f: \Omega \to [0, +\infty]$. Dále je $L_1(\mu + \nu) = L_1(\mu) \cap L_1(\nu)$ a vzorec platí též pro každou $f \in L_1(\mu + \nu)$.*

DŮKAZ. Funkce $\mu + \nu$ je zjevně nezáporná a $(\mu + \nu)(\emptyset) = 0 + 0 = 0$. Jsou-li $E_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní, pak $(\mu + \nu)\big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) + \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n) = \sum_{n=1}^\infty (\mu + \nu)(E_n)$. Tedy $\mu + \nu$ je míra na $\mathcal{S}$.

Snadno je vidět, že vzorec $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$ platí pro jednoduché měřitelné funkce f. Je-li nyní $f: \Omega \to [0, +\infty]$ měřitelná, pak existuje neklesající posloupnost nezáporných jednoduchých měřitelných funkcí $\{s_n\}$ konvergující bodově k f. Pak dle věty Leviho platí $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \lim \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \lim\big(\int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\nu\big) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$.

Konečně, ze vzorce $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\nu$ pro f měřitelnou dostáváme, že $L_1(\mu) \cap L_1(\nu) \subset L_1(\mu + \nu)$. Na druhou stranu, je-li $f \in L_1(\mu + \nu)$, pak dle Lemmatu 30 platí $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu \le \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}(\mu+\nu)$, a tedy $f \in L_1(\mu)$. Analogicky obdržíme, že $f \in L_1(\nu)$. Na závěr spočteme, že $\int_\Omega f \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}(\mu+\nu) - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\nu - \big(\int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\nu\big) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\nu$.

□

3.2. Komplexní (resp. znaménkové) míry

Připomeňme, že μ je komplexní (resp. znaménková) míra na σ-algebře $\mathcal{S}$ jestliže $\mu: \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ (resp. $\mu: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$) splňuje $\mu\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\big) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$ pro libovolné $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní. ■■■[nekonečna?]

Dále připomeňme, že variace míry μ je funkce $|\mu|$ definovaná na $\mathcal{S}$ předpisem

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{j=1}^n |\mu(A_j)|;\ A_1, \dots, A_n \in \mathcal{S},\ A_j \subset A \text{ po dvou disjunktní, } n \in \mathbb{N}\right\}$$

Variace komplexní míry je konečná nezáporná míra a je to nejmenší nezáporná míra, která majorizuje funkci $A \mapsto |\mu(A)|$.

Řekneme, že komplexní míra μ je zevně regulární, resp. zevnitř regulární, resp. těsná, pokud její variace $|\mu|$ má příslušnou vlastnost.

VĚTA 32. *Nechť X je metrický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny, μ je σ-konečná zevně regulární nezáporná míra na $\mathcal{S}$ a ν je komplexní míra na $\mathcal{S}$ splňující $\nu \ll \mu$. Pak $|\nu|$ je zevnitř i zevně regulární.*

DŮKAZ. Nechť $E \in \mathcal{S}$ a $\varepsilon > 0$. Z absolutní spojitosti $|\nu|$ vzhledem k μ ([R, Věta 6.11]) plyne existence $\delta > 0$ takového, že je-li $A \in \mathcal{S}$ a $\mu(A) < \delta$, pak $|\nu|(A) < \varepsilon$. Z Lemmatu 19 plyne existence $G \supset E$ otevřené takové, že $\mu(G \setminus E) < \delta$. Pak $|\nu|(G \setminus E) < \varepsilon$, tedy $|\nu|(G) = |\nu|(E) + |\nu|(G \setminus E) < |\nu|(E) + \varepsilon$. Vnitřní regularita $|\nu|$ plyne z Lemmatu 19.

□

Nechť μ je komplexní míra na měřitelném prostoru $(\Omega, \mathcal{S})$. Označme $\operatorname{Re}\mu, \operatorname{Im}\mu: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ množinové funkce definované vzorci $(\operatorname{Re}\mu)(E) = \operatorname{Re}(\mu(E))$ a $(\operatorname{Im}\mu)(E) = \operatorname{Im}(\mu(E))$ pro $E \in \mathcal{S}$. Pak $\operatorname{Re}\mu$ a $\operatorname{Im}\mu$ jsou znaménkové míry: Jsou-li $A_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní, pak $(\operatorname{Re}\mu)\big(\bigcup_{n=1}^\infty A_j\big) = \operatorname{Re}\big(\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)\big) = \sum_{n=1}^\infty (\operatorname{Re}\mu)(A_n)$ díky spojitosti a aditivitě funkce $z \mapsto \operatorname{Re} z$. Analogicky pro $\operatorname{Im}\mu$.

Pro komplexní míru μ platí $\mu = \operatorname{Re}\mu + i \operatorname{Im}\mu$. Můžeme tedy definovat integrál vzhledem ke komplexní míře μ vzorcem

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d} \operatorname{Re}\mu + i \int_\Omega f \, \mathrm{d} \operatorname{Im}\mu,$$

jsou-li oba integrály vpravo konvergentní. Označíme-li Jordanův rozklad znaménkové míry ν jako $\nu = \nu^+ - \nu^-$, pak můžeme vzorec výše psát následovně:

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+ - \int_\Omega f \, \mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^- + i \int_\Omega f \, \mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^+ - i \int_\Omega f \, \mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^-.$$

■■■[integral je linearni???]

Snadno nahlédneme, že $\int_\Omega \chi_E \, \mathrm{d}\mu = \mu(E)$ pro $E \in \mathcal{S}$, a tedy z linearity $\int_\Omega s \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(E_j)$ pro jednoduchou měřitelnou funkci $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$.

LEMMA 33. *Nechť μ je komplexní míra na σ-algebře $\mathcal{S}$. Pak* $|\operatorname{Re}\mu| \le |\mu|$, $|\operatorname{Im}\mu| \le |\mu|$ *a* $|\mu| \le |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu| = (\operatorname{Re}\mu)^+ + (\operatorname{Re}\mu)^- + (\operatorname{Im}\mu)^+ + (\operatorname{Im}\mu)^-$.

DŮKAZ. Platí $|\operatorname{Re}\mu(E)| \le |\mu(E)|$ pro každou $E \in \mathcal{S}$. Odtud snadno plyne, že $|\operatorname{Re}\mu| \le |\mu|$ a analogicky pro $\operatorname{Im}\mu$. Na druhou stranu, pro $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{S}$ platí $\sum_{j=1}^n |\mu(E_j)| = \sum_{j=1}^n \sqrt{(\operatorname{Re}\mu(E_j))^2 + (\operatorname{Im}\mu(E_j))^2} \le \sum_{j=1}^n |\operatorname{Re}\mu(E_j)| + \sum_{j=1}^n |\operatorname{Im}\mu(E_j)|$, odkud plyne, že $|\mu| \le |\operatorname{Re}\mu| + |\operatorname{Im}\mu|$.

□

TVRZENÍ 34. *Nechť (Ω, μ) je prostor s komplexní mírou a nechť $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je měřitelná funkce. Pak $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ je definován, právě když $f \in L_1(|\mu|)$.*

DŮKAZ. $\Leftarrow$ Podle Lemmat 33 a 30 platí $\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+ \le \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}|\mu| < +\infty$, což znamená, že $\int_\Omega f \, \mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+$ konverguje; analogické tvrzení platí i pro integrály vzhledem k $(\operatorname{Re}\mu)^-$, $(\operatorname{Im}\mu)^+$ a $(\operatorname{Im}\mu)^-$. Tedy $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ je definován.

$\Rightarrow$ Z Lemmat 33 a 30 a Tvrzení 31 plyne, že $\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}|\mu| \le \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^+ \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}(\operatorname{Re}\mu)^- + \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^+ + \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}(\operatorname{Im}\mu)^-$.

□

VĚTA 35. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor, μ je nezáporná míra na $\mathcal{S}$ a $g \in L_1(\mu)$. Pak množinová funkce definovaná předpisem*

$$\nu(E) = \int_E g \, \mathrm{d}\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ je komplexní míra na $\mathcal{S}$ a platí

$$(\operatorname{Re}\nu)^+(E) = \int_E (\operatorname{Re} g)^+ \, \mathrm{d}\mu, \quad (\operatorname{Re}\nu)^-(E) = \int_E (\operatorname{Re} g)^- \, \mathrm{d}\mu,$$

$$(\operatorname{Im}\nu)^+(E) = \int_E (\operatorname{Im} g)^+ \, \mathrm{d}\mu, \quad (\operatorname{Im}\nu)^-(E) = \int_E (\operatorname{Im} g)^- \, \mathrm{d}\mu,$$

$$|\nu|(E) = \int_E |g| \, \mathrm{d}\mu,$$

$$\int_E f \, \mathrm{d}\nu = \int_E fg \, \mathrm{d}\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$ a každou $f \in L_1(|\nu|)$.

DŮKAZ. Pro $E_n \in \mathcal{S}$, $n \in \mathbb{N}$ po dvou disjunktní máme díky Důsledku 15 rovnost $\nu\big(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\big) = \int_{\bigcup_{n=1}^\infty E_n} g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup_{j=1}^n E_j} g \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \int_{E_j} g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)$. Tedy ν je komplexní míra na $\mathcal{S}$.

Nechť $E \in \mathcal{S}$ a $f \in L_1(|\nu|)$. Předpokládejme nejprve, že g je reálná. Položme $P = \{x \in \Omega;\ g(x) \ge 0\}$ a $N = \{x \in \Omega;\ g(x) < 0\}$. Snadno vidíme, že (P, N) je Hahnův rozklad Ω příslušný znaménkové míře ν. Tedy $\nu^+(E) = \nu(E \cap P) = \int_{E\cap P} g \, \mathrm{d}\mu = \int_{E\cap P} g^+ \, \mathrm{d}\mu = \int_E g^+ \, \mathrm{d}\mu$ a podobně

$\nu^-(E) = -\nu(E \cap N) = -\int_{E \cap N} g \, d\mu = -\int_{E \cap N} -g^- \, d\mu = \int_E g^- \, d\mu$. Dle Věty 29 je tedy $\int_E f \, d\nu = \int_E f \, d\nu^+ - \int_E f \, d\nu^- = \int_E f g^+ \, d\mu - \int_E f g^- \, d\mu = \int_E f(g^+ - g^-) \, d\mu = \int_E fg \, d\mu$.

Nechť nyní g je obecná komplexní. Pak $(\operatorname{Re} \nu)(E) = \operatorname{Re} \int_E g \, d\mu = \int_E \operatorname{Re} g \, d\mu$ a analogicky $(\operatorname{Im} \nu)(E) = \operatorname{Im} \int_E g \, d\mu = \int_E \operatorname{Im} g \, d\mu$. Tedy dle předchozí části důkazu je $\int_E f \, d\nu = \int_E f \, d\operatorname{Re} \nu + i \int_E f \, d\operatorname{Im} \nu = \int_E f \operatorname{Re} g \, d\mu + i \int_E f \operatorname{Im} g \, d\mu = \int_E f(\operatorname{Re} g + i \operatorname{Im} g) \, d\mu = \int_E fg \, d\mu$.

Konečně, ukažme, že $|\nu|(E) = \int_E |g| \, d\mu$. Protože $A \mapsto \int_A |g| \, d\mu$ je nezáporná míra majorizující $|\mu(A)|$, plyne odtud, že $|\nu|(E) \leq \int_E |g| \, d\mu$. Pro opačnou nerovnost zvolme $\varepsilon > 0$ a nechť $s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{E_j}$, kde $E_j \in \mathcal{S}$, $E_j \subset E$ jsou po dvou disjunktní, je jednoduchá funkce taková, že $\int_E |g - s| \, d\mu < \varepsilon$ ([R, Věta 3.13]). Pak $|\nu(E_j)| = \left|\int_{E_j} g \, d\mu\right| \geq \left|\int_{E_j} s \, d\mu\right| - \left|\int_{E_j} (g - s) \, d\mu\right| \geq |\alpha_j| |\mu(E_j)| - \int_{E_j} |g - s| \, d\mu$, a tedy $|\nu|(E) \geq \sum_{j=1}^n |\nu(E_j)| \geq \sum_{j=1}^n |\alpha_j| |\mu(E_j)| - \sum_{j=1}^n \int_{E_j} |g - s| \, d\mu \geq \int_E |s| \, d\mu - \int_E |g - s| \, d\mu \geq \int_E |g| \, d\mu - 2 \int_E |g - s| \, d\mu > \int_E |g| \, d\mu - 2\varepsilon$.

□

TVRZENÍ 36. *Nechť $(\Omega, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor a μ je komplexní míra na $\mathcal{S}$. Pak existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce $h \colon \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in \Omega$ a*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f h \, d|\mu|$$

pro každou $f \in L_1(|\mu|)$.

DŮKAZ. Dle [R, Věta 6.12] existuje $\mathcal{S}$-měřitelná funkce $h \colon \Omega \to \mathbb{C}$ taková, že $|h(x)| = 1$ pro každé $x \in \Omega$ a $\mu(E) = \int_E h \, d|\mu|$ pro každou $E \in \mathcal{S}$. Zbytek plyne z Věty 35.

□

DŮSLEDEK 37. *Nechť μ je komplexní míra na Ω. Pak*

$$\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| \, d|\mu|$$

pro každou $f \in L_1(|\mu|)$.

DŮKAZ. Nechť h je funkce z Tvrzení 36. Pak $\left|\int_\Omega f \, d\mu\right| = \left|\int_\Omega f h \, d|\mu|\right| \leq \int_\Omega |f h| \, d|\mu| = \int_\Omega |f| \, d|\mu|$.

□

4. Doplňky

(Komplexifikace reálného prostoru X) Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Na $X \times X$ definujeme:

- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$,
- $(\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ a $x_1, x_2 \in X$.

Potom $X \times X$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a s normou

$$\|(x_1, x_2)\|_{X_\mathbb{C}} = \sup\bigl\{\|(\cos\alpha) x_1 + (\sin\alpha) x_2\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\bigr\},$$

se jedná o normovaný lineární prostor nad $\mathbb{C}$.

VĚTA 38. *Je-li X reálný normovaný lineární prostor, pak je $(X_\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ komplexní normovaný lineární prostor. Je-li navíc X Banachův, pak je $X_\mathbb{C}$ Banachův.*

DŮKAZ. Přímočarým výpočtem lze ověřit, že $X_\mathbb{C}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ a $\|\cdot\|_{X_\mathbb{C}}$ je funkce splňující trojúhelníkovou nerovnost. Dále $\|(x_1, x_2)\|_{X_\mathbb{C}} = 0$ právě tehdy, když $x_1 = x_2 = 0$. Zbývá ověřit $\|c(x_1, x_2)\|_{X_\mathbb{C}} = |c| \|(x_1, x_2)\|_{X_\mathbb{C}}$ pro $c \in \mathbb{C}$.

Vzhledem k tomu, že požadovaná rovnost zjevně platí pro $c \in \mathbb{R}$, stačí ji ověřit pro komplexní jednotku $c = \cos\beta + i \sin\beta$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\|(\cos\beta+i \sin\beta)(x_1, x_2)\|_{X_\mathbb{C}} &= \|((\cos\beta)x_1 - (\sin\beta)x_2, (\cos\beta)x_2 + (\sin\beta)x_1)\|_{X_\mathbb{C}} = \\ &= \sup\{\|\cos\alpha((\cos\beta)x_1 - (\sin\beta)x_2) + \sin\alpha((\cos\beta)x_2 + (\sin\beta)x_1)\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\} = \\ &= \sup\{\|(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)x_1 + (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)x_2)\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\} = \\ &= \sup\{\|(\cos(\alpha-\beta)x_1 + (\sin(\alpha-\beta))x_2\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\} = \\ &= \sup\{\|(\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2\|_X;\ \alpha \in [0, 2\pi)\} = \|(x_1, x_2)\|_{X_\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

Úplnost prostoru $X_\mathbb{C}$ pro Banachův prostor X pak snadno plyne z Věty 6.

□

VĚTA 39 (Jordanova-von Neumannova). *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Norma splňuje rovnoběžníkové pravidlo.

(ii) Existuje skalární součin na X takový, že $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro každé $x \in X$.

DŮKAZ. (ii)⇒(i) je Tvrzení 1.86. Pro důkaz opačné implikace nejdříve předpokládejme, že X je reálný. Položme

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big) \quad \text{pro } x, y \in X.$$

Pak zjevně $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\langle 0, y\rangle = 0$, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ a

$$\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle. \tag{5}$$

Dále pro každé $x, y, z \in X$ dostaneme pomocí (ii)

$$\begin{aligned}\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle &= \frac{1}{4}\big(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2\big) = \\ &= \frac{1}{8}\big(\|x+y+2z\|^2 + \|x+z-(y+z)\|^2\big) - \\ &\qquad - \frac{1}{8}\big(\|x+y-2z\|^2 + \|x-z-(y-z)\|^2\big) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2} + z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2} - z\right\|^2\right) = 2\Big\langle\frac{x+y}{2}, z\Big\rangle.\end{aligned}$$

Dosadíme-li za $y = 0$, obdržíme

$$\langle x, z\rangle = 2\Big\langle\frac{x}{2}, z\Big\rangle \quad \text{pro každé } x, z \in X. \tag{6}$$

Použijeme-li toto na pravou stranu rovnosti výše, dostaneme

$$\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = \langle x+y, z\rangle \quad \text{pro každé } x, y, z \in X,$$

neboli $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je aditivní v první souřadnici. Odtud, z (6) a (5) obdržíme indukcí

$$\frac{m}{2^n}\langle x, y\rangle = \Big\langle\frac{m}{2^n}x, y\Big\rangle \quad \text{pro každé } x, y \in X, m \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Protože jsou pro pevná $x, y \in X$ funkce $c \mapsto c\langle x, y\rangle$ a $c \mapsto \langle cx, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\|cx+y\|^2 - \|cx-y\|^2\big)$ spojité na $\mathbb{R}$ (Tvrzení 1.2) a množina $\{\frac{m}{2^n};\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v $\mathbb{R}$, platí

$$c\langle x, y\rangle = \langle cx, y\rangle \quad \text{pro všechna } x, y \in X \text{ a } c \in \mathbb{R}.$$

Tím je důkaz dokončen pro reálné prostory.

Je-li nyní X komplexní, pak podle první části důkazu existuje skalární součin $\langle\cdot,\cdot\rangle_\mathbb{R}$ na $X_\mathbb{R}$ splňující $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ pro každé $x \in X$. Položme

$$\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_\mathbb{R} + i\langle x, iy\rangle_\mathbb{R} \quad \text{pro } x, y \in X.$$

Pomocí vlastností $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$ snadno obdržíme, že $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je aditivní v první souřadnici a $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$ a $c \in \mathbb{R}$. Z definice $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}}$ z první části důkazy plyne $\langle ix, iy\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}$ pro každé $x, y \in X$. Odtud

$$\langle y, ix\rangle_{\mathbb{R}} = \langle -iiy, ix\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle iy, x\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}}, \tag{7}$$

a tedy

$$\langle y, x\rangle = \langle y, x\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle y, ix\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} - i\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}} = \overline{\langle x, y\rangle}.$$

Podobně dostáváme

$$\langle ix, y\rangle_{\mathbb{R}} = \langle ix, -iiy\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle ix, iiy\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}},$$

a tedy

$$\langle ix, y\rangle = \langle ix, y\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle ix, iy\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x, iy\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = i\langle x, y\rangle.$$

Proto $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$ i pro $c \in \mathbb{C}$. Na závěr ověříme, že $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$: Z (7) dostáváme, že $\langle x, ix\rangle_{\mathbb{R}} = -\langle x, ix\rangle_{\mathbb{R}}$, neboli $\langle x, ix\rangle_{\mathbb{R}} = 0$ pro každé $x \in X$. Tedy $\langle x, x\rangle = \langle x, x\rangle_{\mathbb{R}} + i\langle x, ix\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, x\rangle_{\mathbb{R}} = \|x\|^2$.

□

TVRZENÍ 40. *Nechť A_1, A_2 jsou dvě různé ortonormální báze Hilbertova prostoru. Pak mají stejnou mohutnost.*

DŮKAZ. Je-li A_1 konečná, je i dimenze H konečná, a tedy $|A_1| = |A_2|$ dle známé věty z lineární algebry. Předpokládejme proto, že množiny A_1 a A_2 jsou nekonečné. Vyberme spočetnou hustou podmnožinu $D \subset \mathbb{K}$. Nechť $|A_1||<|A_2$. Množina všech lineárních kombinací prvků A_1 utvořená pomocí koeficientů z D je hustá v H (viz Větu 1.112) a má kardinalitu $|A_1|$. Ale A_2 je dle Faktu 1.104 diskrétní množina kardinality ostře větší než $|A_1|$, což je spor. Tedy $|A_1| \geq |A_2|$. Jelikož je role A_1 a A_2 symetrická, platí i obrácená nerovnost, tj. $|A_1| = |A_2|$.

□

TVRZENÍ 41. *Nechť X je nekonečněrozměrný pseudometrizovatelný topologický vektorový prostor takový, že X^* odděluje body X. Pak (X^*, w^*) je první kategorie v sobě.*

DŮKAZ. Nejprve si uvědomme, že dle našich předpokladů je kanonické zobrazení $\varepsilon\colon X \to (X^*)^\#$ je prosté, a tedy $\dim X^* = \dim(X^*)^\# \geq \dim \varepsilon(X) = \dim X = \infty$.

Nechť $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ je spočetná báze $\tau(0)$. Je-li $f \in X^*$, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $|f(x)| \leq 1$ pro všechna $x \in V_n$, neboli $f \in (V_n)^\circ$. To znamená, že $X^* = \bigcup_{n=1}^\infty (V_n)^\circ$. Množiny $(V_n)^\circ$, $n \in \mathbb{N}$ jsou w^*-uzavřené (Tvrzení 7.104(a)). Ukážeme, že každá z množin $(V_n)^\circ$, $n \in \mathbb{N}$ má prázdný vnitřek ve w^*-topologii, a tedy je řídká v (X^*, w^*). Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pokud $(V_n)^\circ$ má neprázdný vnitřek, pak existuje $g \in X^*$ a symetrické $U \in w^*(0)$ tak, že $g + U \subset (V_n)^\circ$. Protože $(V_n)^\circ$ je absolutně konvexní (Tvrzení 7.104(a)), je $-g - U \subset (V_n)^\circ$, a tedy $U \subset \frac{1}{2}(g + U) + \frac{1}{2}(-g - U) \subset (V_n)^\circ$. Množina $(V_n)^\circ$ je tedy w^*-kompaktní (Věta 7.109) w^*-okolí 0, což je spor s nekonečnou dimenzí X^* (Věta 7.39).

□

4.1. Banachova limita

VĚTA 42. *Nechť ℓ_∞ značí prostor všech omezených reálných posloupností se supremovou normou. Nechť je operátor $t\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$ definován jako*

$$t\colon (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots), \quad x = \{x_n\} \in \ell_\infty.$$

Pak existuje zobrazení $\Lambda\colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$ splňující pro každé $x \in \ell_\infty$

(a) $\Lambda(t(x)) = \Lambda x$,

(b) $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \leq \Lambda x \leq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

DŮKAZ. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme zobrazení $\Lambda_n\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$

$$\Lambda_n x = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad x \in \ell_\infty.$$

Nechť

$$Y = \{x \in \ell_\infty;\ \text{existuje } \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x\}.$$

Nakonec uvažujme $p\colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definované jako

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} \Lambda_n x.$$

Zjevně je Y podprostor X a zobrazení $\lambda\colon Y \to \mathbb{R}$ definované jako

$$\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x, \quad x \in Y,$$

je lineární funkcionál na Y splňující $\lambda \le p$. Dle Hahnovy-Banachovy věty **??** existuje lineární zobrazení $\Lambda\colon \ell_\infty \to \mathbb{R}$ splňující $\Lambda = \lambda$ na Y a $\Lambda \le p$ na ℓ_∞. Ověříme nyní, že pro $x \in \ell_\infty$ platí

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n. \tag{8}$$

Vskutku, pro dané $c > \limsup_{n\to\infty} x_n$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_n < c$ pro každé $n \ge n_0$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_{n_0} + x_{n_0+1} + \cdots + x_n)\\
&\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_{n_0}) + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_{n_0+1} + \cdots + x_n)\\
&\le 0 + \limsup_{n\to\infty} \frac{c(n-n_0)}{n} = \limsup_{n\to\infty} c\left(1 - \frac{n_0}{n}\right) = c.
\end{aligned}$$

Tím je nerovnost(8) ověřena.

Z ní ovšem okamžitě dostáváme vlastnost (b), neboť pro $x \in \ell_\infty$ máme

$$\Lambda x \le p(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n$$

a

$$\Lambda(-x) \le p(-x) \le \limsup_{n\to\infty}(-x_n) = -\liminf_{n\to\infty} x_n,$$

z čehož dostáváme $\Lambda x \ge \liminf_{n\to\infty} x_n$.

Abychom ověřili vlastnost (a), uvažujme libovolné $x \in \ell_\infty$ a položme

$$y = x - t(x) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \dots).$$

Pak

$$\begin{aligned}
\Lambda(x - t(x)) = \lambda y \le p(y) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}((x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_{n-1} - x_n) + (x_n - x_{n+1}))\\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 - x_{n+1}) = 0
\end{aligned}$$

a podobně

$$\Lambda(t(x) - x) \le p(-y) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}((x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n)) = 0.$$

Tím je dokončen důkaz nejen vlastnosti (a), ale i celé věty.

□

4.2. Prostor multiplikativních lineárních funkcionálů na $L_\infty([0,1])$

VĚTA 43. *Nechť $A = L_\infty([0,1])$ s Lebesgueovou mírou λ, $\Delta = \Delta(A)$ a nechť $\Gamma\colon A \to C(\Delta)$ je Gelfandova transformace. Uvažujme zobrazení*

$$Tf = \int_0^1 \Gamma^{-1} f \,\mathrm{d}\lambda, \quad f \in C(\Delta).$$

Pak T je nezáporný funkcionál na $C(\Delta)$, a tedy existuje jednoznačně určená nezáporná míra $\mu \in M(\Delta)$ splňující $\int_\Delta f \,\mathrm{d}\mu = Tf$, $f \in C(\Delta)$. Pak platí následující tvrzení:

(a) Míra μ je kladná na neprázdných otevřených podmnožinách Δ.

(b) Pro každou $g \in \mathrm{Bf}^b(\Delta)$ existuje $f \in C(\Delta)$ taková, že $g = f$ μ-skoro všude.
(c) Množina $\overline{U}$ je otevřená pro každou $U \subset \Delta$ otevřenou. Navíc $\mu(U) = \mu(\overline{U})$.
(d) Je-li $E \in \mathrm{Bs}(\Delta(A)$, pak $\mu(E) = \mu(\mathrm{Int}\, E) = \mu(\overline{E})$.
(e) Prostor Δ nemá izolovaný bod.
(f) Prostor Δ neobsahuje žádnou konvergentní podposloupnost, která by nebyla od jistého členu konstantní.

DŮKAZ. Před započetím důkazu tvrzení si povšimněme, že díky rovnostem

$$\mathrm{ess\,Rng}\, f = \sigma_A f = \sigma_{C(\Delta)} \Gamma f = \mathrm{Rng}\, \Gamma f$$

je Γf nezáporná, kdykoliv je $f \in A$ nezáporná. Dále pro $E \subset [0,1]$ λ-měřitelnou plyne z předcházející rovnosti, že $\mathrm{Rng}\, \Gamma \chi_E \subset \{0,1\}$, a tedy že se jedná o charakteristickou funkci obojetné množiny v Δ.

(a) Nechť $V \subset \Delta$ je neprázdná, otevřená množina. Nalezneme $g \in C(\Delta)$ takovou, že $0 \le g \le 1$, $g = 0$ vně V a $g(x) = 1$ pro nějaké $x \in V$. Označme $f = \Gamma^{-1} g$. Pak je f nenulová, nezáporná funkce v A. Proto dostáváme

$$0 < \int_0^1 f \, \mathrm{d}\lambda = \int_\Delta g \, \mathrm{d}\mu = \int_V g \, \mathrm{d}\mu,$$

čili (a) platí.

(b) Je-li $g \in \mathrm{Bf}^b(\Delta)$ dána, nalezneme díky hustotě spojitých funkcí v $L_2(\mu)$ posloupnost $\{g_n\}$ v $C(\Delta)$ takovou, že $\|g - g_n\|_2 \to 0$. V případě potřeby upravíme g_n tak, aby $\|g_n\|_\infty \le 1$. Pak pro $f_n = \Gamma^{-1} g_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí $\|f_n\|_\infty \le 1$, $n \in \mathbb{N}$, a

$$\int_0^1 |f_n - f_m|^2 \, \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 (f_n - f_m)(\overline{f_n} - \overline{f_m}) \, \mathrm{d}\lambda = \int_\Delta |g_n - g_m|^2 \, \mathrm{d}\mu, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Tedy je $\{f_n\}$ cauchyovská posloupnost v $L_2([0,1])$. Nechť $f \in L_2([0,1])$ je limita $\{f_n\}$ v $L_2([0,1])$. Pak pro $h = \Gamma f$ máme

$$\|g - h\|_2 \le \|g - g_n\|_2 + \|g_n - h\|_2 = \|g - g_n\|_2 + \|f_n - f\|_2 \to 0,$$

a tedy $g = h$ μ-skoro všude.

(c) Nechť $V \subset \Delta$ je otevřená. Dle (b) existuje $f \in C(\Delta)$ takové, že $f = \chi_V$ μ-skoro všude na Δ. Pak $\{x \in \Delta;\ f(x) \ne 0\}$ je otevřená množina μ-míry 0. Podle (a) je prázdná. Podobně z rovnosti

$$\mu(V \cap \{x \in \Delta;\ f(x) \ne 1\}) = 0 \quad \text{a} \quad \mu((\Delta \setminus \overline{V}) \cap \{x \in \Delta;\ f(x) \ne 0\}) = 0$$

plyne

$$V \cap \{x \in \Delta;\ f(x) \ne 1\} = (\Delta \setminus \overline{V}) \cap \{x \in \Delta;\ f(x) \ne 0\} = \emptyset.$$

Tedy $f = 1$ na V, a tedy ze spojitosti i na $\overline{V}$. Dále máme $f = 0$ na $\Delta \setminus \overline{V}$, a tedy $\overline{V} = \{x \in \Delta;\ f(x) > 0\}$ je otevřená množina. Navíc také máme

$$\chi_{\overline{V}} = f = \chi_V mu - \text{skoro všude.}$$

Tedy $\mu(V) = \mu(\overline{V})$.

(d) Je-li $E \in \mathrm{Bs}(\Delta)$, pro $\varepsilon > 0$ nalezneme kompakt K a otevřenou množinu U takové, že $K \subset E \subset U$ a $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$. Jelikož

$$\mu(\Delta \setminus K) = \mu(\overline{\Delta \setminus K}) = \mu(\Delta \setminus \mathrm{Int}\, K),$$

dostáváme $\mu(K) = \mu(\mathrm{Int}\, K)$. Pak máme

$$\mu(\overline{E} \subset \mu(\overline{V}) = \mu(V) \le \mu(K) + \varepsilon = \mu(\mathrm{Int}\, K) + \varepsilon \le \mu(\mathrm{Int}\, E) + \varepsilon.$$

Tvrzení je tak dokázáno.

(e) Nejprve si povšimněme, že pro $E \subset [0,1]$ kladné míry λ je funkce $\gamma \chi_E$ charakteristická funkce obojetn0 množiny v Δ. Předpokládejme nyní, že $p \in \Delta$ je izolovaný bod. Pak $\{p\}$ je otevřená množina, a tedy $\mu(\{x\}) > 0$. Nechť $f = \Gamma^{-1} \chi_{\{p\}}$. Pak $f = \chi_E$ pro nějakou množinu splňující $\lambda(E) > 0$. Rozdělme E na dvě disjunktní množiny kladné míry. Pak $g_i = \Gamma \chi_{E_i}$, $i = 1, 2$, jsou charakteristické funkce neprázdných otevřených množin U_i, kterí jsou navíc disjunktní, neboť

$$0 = \Gamma \chi_\emptyset = \Gamma(\chi_{E_1} \chi_{E_2}) = \Gamma \chi_{E_1} \Gamma \chi_{E_2} = \chi_{U_1} \chi_{U_2}.$$

Tedy $\{p\} = U_1 \cup U_2$, kde U_1, U_2 jsou disjunktní, neprázdné množiny. To je však zřejmý spor.

(f) Nechť $\{p_n\}$ je posloupnost navzájem různých elementů Δ konvergující k $p \in \Delta$. Pro každé $m \in \mathbb{N}$ je množina $\{p\} \cup \{p_n;\ n \in \mathbb{N} \setminus \{m\}\}$ uzavřená a neobsahuje p_n. Existuje tak otevřené okolí V_n bodu p_n, které neobsahuje ostatní body posloupnosti. Uvažujme funkci

$$g(x) = \begin{cases} -1, & x \in V_n, n \text{ liché}, \\ 1 & , x \in V_n, n \text{ sudé}, \\ 0, & \text{jinak}. \end{cases}$$

Pak g je omezená, borelovská funkce, a tedy existuje $f \in C(\Delta)$ splňující $g = f$ μ-skoro všude. Jako v bodu (c) ukážeme, že $f = (-1)^n$ na V_n, $n \in \mathbb{N}$, což znamená, že f není spojité v p.

□

DŮSLEDEK 44. *Nechť $\{E_i;\ i \in I\}$ je systém λ-měřitelných množin v $[0,1]$. Pak existuje λ-měřitelná množina $E \subset [0,1]$ taková, že $\lambda(E_i \setminus E) = 0$, $i \in I$ a je-li pokud $F \subset [0,1]$ λ-měřitelná se stejnou vlastností jako E, pak $\lambda(E \setminus F) = 0$.*

DŮKAZ. Nechť $\Delta = \Delta(L_\infty([0,1]))$. Položme $g_i = \Gamma \chi_{E_i}$, $i \in I$. Pak $U_i = \{x \in \Delta;\ g_i(x) = 1\}$ je obojetná množina v Δ. Položíme $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ a nechť $f = \Gamma^{-1} \chi_{\overline{U}}$. Pak $\operatorname{ess\,Rng} f = \operatorname{Rng} \chi_{\overline{U}} \subset \{0,1\}$. Hledanou množinu definujme jako

$$E = \{x \in [0,1];\ f(x) = 1\}.$$

Pak pro každé $i \in I$ platí $\Gamma \chi_{E_i} \leq \Gamma \chi_E$, a tedy $\chi_{E_i} \leq \chi_E$ λ-skoro všude. Z toho plyne první tvrzení.

Nechť nyní $F \subset [0,1]$ je libovolná množina splňující se stejnou vlastností. Pak pro každé $i \in I$ platí $\chi_{E_i} \leq \chi_F$ λ-skoro všude, a tedy $\Gamma \chi_{E_i} \leq \Gamma \chi_F$, $i \in I$. Tedy množina $V = \{x \in \Delta;\ \Gamma \chi_F(x) = 1\}$ je obojetná množina splňující $U_i \subset V$, $i \in I$. Tedy $U \subset V$, z čehož plyne $\chi_E \leq \chi_F$ λ-skoro všude.

□

DŮSLEDEK 45. *Nechť λ je Lebesgueova míra na $[0,1]$, Σ je systém všech λ-měřitelných množin v $[0,1]$ a $\mathcal{N}$ je systém všech množin míry 0. Uvažujme Booleovu algebru $\mathcal{B} = \Sigma/\mathcal{N}$, tj. algebru vzniklou z Σ ztotožněním množin lišících se o míru 0. Pak $\mathcal{B}$ je úplná, tj. každý systém $\{B_i;\ i \in I\}$ v $\mathcal{B}$ má supremum a infimum.*

DŮKAZ. Nechť $[A]$ značí třídu ekvivalence příslušnou množině $A \in \Sigma$, tj. $B \in [A]$, pokud $A \triangle B \in \mathcal{N}$. Připomeňme, že pro $[A_1], [A_2] \in \mathcal{B}$ jsou Booleovy operace definovány jako

$$[A_1] \wedge [A_2] = [A_1 \cap A_2] \quad \text{a} [A_1] \vee [A_2] = [A_1 \cup A_2].$$

Je-li nyní $\{[A_i];\ i \in I\}$ nějaký systém v $\mathcal{B}$, nechť A je množina garantovaná Důsledkem 44. Pak $[A]$ je požadované supremum daného systému. Infimum pak nalezneme přechodem k doplňkům.

□

5. Topologické prostory

5.1. Základní pojmy

DEFINICE 46. Nechť X je množina a τ je systém podmnožin X. Řekneme, že $X, \tau)$ je topologický prostor, pokud má τ následující vlastnosti.

- Platí $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$.
- Pokud $\mathcal{U} \in \tau$, pak $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.
- Je-li $\mathcal{U} \in \tau$ konečný, je i množina $\bigcap \mathcal{U} \in \tau$.

Množiny z τ se nazývají otevřené.

LEMMA 47. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

- *Množina $\emptyset$ i X je uzavřená.*

- *Systém uzavřených množin je uzavřený vzhledem k libovolným průnikům a konečným sjednocením.*

DEFINICE 48. Nechť (X,τ) je topologický prostor. Nechť $A \subset X$.

- Pokud $X \setminus A \in \tau$, nazývá se A uzavřená.
- Množina $\overline{A} = \bigcap\{F \subset X;\ A \subset F,\ F \text{ uzavřená}\}$ se nazývá uzávěrem A.
- Množina $\operatorname{Int} A = \bigcup\{U \subset X;\ U \subset A,\ U \text{ otevřená}\}$ se nazývá vnitřkem A.
- Množina $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ se nazývá hranicí A.

DEFINICE 49. Nechť (X,τ) je topologický prostor. Nechť $x \in X$ je dáno. O množině $A \subset X$ řekneme, že je okolím x, pokud $x \in \operatorname{Int} A$. Označme

$$\tau(x) = \{U \subset X;\ U \text{ je okolí } x\}.$$

LEMMA 50. *Nechť (X,τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každé $A, B \subset X$ platí $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $A \subset \overline{A}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
(b) Pro každé $A, B \subset X$ platí $\operatorname{Int} X = X$, $\operatorname{Int} A \subset A$, $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$, $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$).

DEFINICE 51. (a) Nechť $(I,\leq)$ je nahoru usměrněná uspořádaná množina, tj. $\leq$ je uspořádání na I a pro každou dvojici $i, j \in I$ existuje $k \in I$ splňující $i \leq k$ a $j \leq k$. Množina $I' \subset I$ je kofinální, pokud pro každé $i \in I$ existuje $j \in I'$ splňující $i \leq j$.

(b) Nechť X je množina. Je-li $f : I \to X$ libovolná funkce, nazýváme ji netem (zobecněnou posloupností) a značíme $\{x_i\}_{i\in I}$, kde $x_i = f(i)$. Pokud $(J,\leq)$ je též nahoru usměrněná částečně uspořádaná množina a $\phi\colon J \to I$ splňuje, že pro každé $i_0 \in I$ existuje $j_\in J$ takové, že pro $j \geq j_0$ platí $\phi(j) \geq i_0$, nazveme net $\{x_{\phi(j)}\}_{j\in J}$ podnetem netu $\{x_i\}$.

(c) Nechť (X,τ) je topologický prostor. Nechť $x \in X$ a $\{x_i\}$ je net. Pak $x = \lim_{i\in I} x_i$, pokud pro každé $U \in \tau(x)$ existuje $i_i \in I$ takové, že $x_i \in U$ pro $i \geq i_0$.

Bod x je hromadným bodem $\{x_i\}$, pokud pro každé $U \in \tau(x)$ a $i_0 \in I$ existuje $i \geq i_0$ splňující $x_i \in U$.

LEMMA 52. *Nechť (X,τ) je topologický prostor a $\{x_{\phi(j)}\}_{j\in J}$ je podnet netu $\{x_i\}_{i\in I}$. Pokud $x_i \to x$, pak také $x_{\phi(j)} \to x$.*

LEMMA 53. *Nechť (X,τ) je topologický prostor. Nechť $A \subset X$ a $x \in X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Platí $x \in \overline{A}$.
(ii) Pro každé $U \in \tau(x)$ platí $U \cap A \neq \emptyset$.
(iii) Existuje net $\{x_i\}$ obsažený v A a konvergující k x.

DEFINICE 54. Nechť X je množina a $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$.

(a) Pak $\mathcal{F}$ je filtr, pokud

- $\mathcal{F}$ je neprázdný a $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ pro každé $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$,
- $H \in \mathcal{F}$, kdykoliv $F \in \mathcal{F}$ a $H \supset F$.

(b) Systém $\mathcal{F}$ je báze filtru, pokud

- $\mathcal{F}$ je neprázdný a $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
- pro každé $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ existuje $F_3 \in \mathcal{F}$ splňující $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

(c) Systém $\mathcal{F}$ je ultrafiltr, pokud $\mathcal{F}$ je maximální filtr vhledem k inkluzi, tj. $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, kdykoliv $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ a$\mathcal{G}$ je filtr.

DEFINICE 55. Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(X)$ je báze filtru. Řekneme, že $\mathcal{F}$ konverguje k x (píšeme $x = \lim \mathcal{F}$), pokud pro každé $U \in \tau(x)$ existuje $F \in \mathcal{F}$ splňující $F \subset U$.

TVRZENÍ 56. *Nechť X je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Nechť $\mathcal{F}$ je báze filtru v X a nechť $x = \lim \mathcal{F}$. Uvažujme $\mathcal{F}$ uspořádaná obrácenou inkluzí a pro každé $F \in \mathcal{F}$ zvolíme $x_F \in F$. Pak $\{x_F\}$ je net a $\lim x_F = x$.

(b) Nechť $\{x_i\}$ je net v X a $x \in X$ je jeho limita. Pro každé $i \in I$ položme $F_i = \{x_j;\ j \geq i\}$. Pak systém $\mathcal{F} = \{F_i;\ i \in I\}$ je báze filtru a $x = \lim \mathcal{F}$.

TVRZENÍ 57. *Nechť X je množina. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ báze filtru, je množina

$$\{H \subset X;\ \exists F \in \mathcal{F} \text{ splňující } F \subset H\}$$

filtr.

(b) množina $\mathcal{F}$ filtr, existuje ultrafiltr $\mathcal{G}$ obsahující $\mathcal{F}$.

DŮKAZ. Tvrzení (a) je zřejmé a k ověření (b) stačí aplikovat Zornovo lemma.

□

DEFINICE 58. Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Zobrazení f nazveme spojitým, pokud $f^{-1}(V) \in \tau$ pro každou $V \in \sigma$.

LEMMA 59. *Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) Zobrazení f je spojité.
(ii) Pro každou $F \subset Y$ uzavřenou je $f^{-1}(F)$ uzavřená.
(iii) Pro každou $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
(iv) Pro každý bod $x \in X$ a každé $V \in \sigma(f(x))$ existuje $U \in \tau(x)$ splňující $f(U) \subset V$.
(v) Pro každý net $\{x_i\}$ v X konvergující k $x \in X$ platí $f(x_i) \to f(x)$.

DEFINICE 60. Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak f je sekvenciálně spojité, pokud $f(x_n) \to f(x)$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v X konvergující k $x \in X$.

PŘÍKLADY 61. (a) Je-li (X, ρ) metrický prostor, zahrňme do τ_ρ ty množiny $U \subset X$, které splňují

$$\forall x \in U exists r > 0\colon B(x, r) = \{y \in X;\ \rho(x, y) < r\} \subset U.$$

Pak (X, τ_ρ) je topologický prostor

(b) Nechť X je množina. Pokud $\tau = \mathcal{P}(X)$, dostáváme diskrétní topologii, pokud $\tau = \{\emptyset, X\}$, máme indiskrétní topologii.

DEFINICE 62. Topologický prostor (X, τ) se nazývá metrizovatelný, pokud na něm existuje metrika ρ splňující $\tau = \tau_\rho$.

TVRZENÍ 63. *Nechť (X_n, τ_n), $n \in \mathbb{N}$, jsou metrizovatelné prostory. Pak je prostor $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ metrizovatelný metrikou*

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{\rho_n(x_n, y_n), 1\}, \quad x = \{x_n\}, y = \{y + n\} \in X.$$

5.2. Oddělovací axiomy

DEFINICE 64. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Prostor X je T_1, pokud pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje otevřená množina U splňující $x_1 \in U$ a $x_2 \notin U$.

(b) Prostor X je T_2 (Hausdorffův), pokud pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existují otevřené disjunktní množiny U_1, U_2 splňující $x_i \in U_i$, $i = 1, 2$.

(c) Prostor X je T_3 (regulární), pokud je T_1 a pro každé $x \in X$ a uzavřenou $F \subset X$ bod x neobsahující existují otevřené disjunktní množiny U_1, U_2 splňující $x_1 \in U_1$ a $F \subset U_2$.

(d) Prostor X je $T_{3\frac{1}{2}}$ (úplně regulární či Tichonovův), pokud je T_1 a každé $x \in X$ a uzavřenou $F \subset X$ bod x neobsahující existuje $f : X \to [0, 1]$ spojitá taková, že $f(x) = 0$ a $f = 1$ na F.

(e) Prostor X je T_4 (normální), pokud je T_1 a pro každé dvě uzavřené, disjunktní množiny $F_1, F_2 \subset X$ existují disjunktní, otevřené množiny $U_1, U_2 \subset X$ takové, že $F_i \subset U_i$, $i = 1, 2$.

TVRZENÍ 65. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pokud $i, j \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$*,* $i \leq j$ *a* X *je* T_j*, pak je i* T_i*.*
(b) Prostor X *je* T_1 *právě tehdy, když pro každý bod* $x \in X$ *je* $\{x\}$ *uzavřená množina.*
(c) Prostor X *je regulární, pokud pro každé* $x \in X$ *a* $U \in \tau(x)$ *existuje* $V \in \tau(x)$ *splňující* $\overline{V} \subset U$*.*

PŘÍKLAD 66. Každý metrický prostor je normální.

LEMMA 67 (Urysohn). *Nechť* (X, τ) *je normální topologický prostor. Pak pro každé dvě disjunktní, neprázdné uzavřené množiny* $F_1, F_2 \subset X$ *existuje spojitá funkce* $f : X \to [0, 1]$ *taková, že* $f(F_1) \subset \{0\}$ *a* $f(F_2) \subset \{1\}$*.*

VĚTA 68. *Nechť* (X, τ) *je normální topologický prostor. Nechť* $F \subset X$ *je neprázdná, uzavřená množina a* $f : F \to \mathbb{K}$ *je spojitá funkce. Pak existuje* $g : X \to \mathbb{K}$ *spojité zobrazení taková, že* $g = f$ *na* F *a* $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$*.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že $f \neq 0$. Pokud $Y = \mathbb{R}$, je tvrzení známé. Pokud $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, rozšíříme f po složkách a dostaneme tak $h : X \to \mathbb{C}$ rozšiřující f. Pokud $r = \|f\|_\infty = \infty$ jsme hotovi. V opačném případě uvažujme zobrazení $p : \mathbb{C} \to B(0, r)$ definované jako

$$p(z) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & z \in \mathbb{C} \setminus B(0, r), \\ z, & z \in B(0, r). \end{cases}$$

Pak p je spojitá funkce, a tedy je $g = p \circ h$ požadované rozšíření.

□

5.3. Generování topologií

DEFINICE 69. Nechť (X, τ) je topologický prostor. Systém $\mathcal{B} \subset \tau$ se nazývá báze τ, pokud pro každou otevřenou množinu $U \subset X$ platí $U = \bigcup\{V \in \mathcal{B};\ V \subset U\}$.

DEFINICE 70 (Podprostor). Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pokud $Y \subset X$, pak $\sigma = \{U \cap Y;\ U \in \tau\}$ je topologie na Y. Prostor (Y, σ) se nazývá podprostorem X.

DEFINICE 71 (Homeomorfismus). Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak f je homeomorfismus X na $f(X)$), pokud f i $f^{-1} : f(X) \to X$ jsou spojité.

DEFINICE 72 (Projektivní generování). Nechť X je množina, (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $f : X \to X_i$, $i \in I$, jsou zobrazení. Položme

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in F} f_i^{-1}(V_i);\ U_i \in \tau_i, F \in \mathcal{F}(I)\}.$$

Pro $U \in X$ položme $\mathcal{B}_U = \{B \in \mathcal{B};\ B \subset U\}$. Pak systém

$$\tau = \{U \subset X;\ U = \bigcup \mathcal{B}_U\}$$

tvoří topologii na X. Tato topologie se nazývá projektivně generovaná prostory X_i a zobrazením f_i, $i \in I$.

TVRZENÍ 73. *Nechť* X *je množina,* (X_i, τ_i)*,* $i \in I$*, jsou topologické prostory a* $f : X \to X_i$*,* $i \in I$*, jsou zobrazení. Nechť* τ *je systém definovaný v Definici 72. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Systém τ *je topologie.*
(b) Pokud (Y, σ) *je topologický prostor a* $f : Y \to X$ *je zobrazení, pak* f *je spojité právě tehdy, když* $f_i \circ f$ *je spojité pro každé* $i \in I$*.*

DEFINICE 74 (Součin prostorů). Nechť (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou topologické prostory a $X = \prod_{i \in I} X_i$. Uvažujme kanonické projekce $p_i : X \to X_i$, $j \in I$. Nechť τ je topologie projektivně generovaná tímto systémem. Pak τ se nazývá součinová topologie.

TVRZENÍ 75. *Operace podprostoru i součinu zachovávají vlastnosti* T_j*,* $j \in \{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$*.*

5.4. Kompaktní a lokálně kompaktní prostory

DEFINICE 76. Nechť (X,τ) je topologický prostor.

(a) Pak X se nazývá kompaktní, pokud pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru X (tj. $\mathcal{U}$ sestává z otevřených množin a $K \subset \bigcup \mathcal{U}$) existuje konečný podsystém $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ splňující $K \subset \bigcup \mathcal{U}'$.

(b) Množina $A \subset X$ se nazývá relativně kompaktní, pokud je podmnožinou kompaktní množiny v X.

(c) Prostor X se nazývá lokálně kompaktní, pokud každé $x \in X$ má bázi okolí tvořenou kompaktními množinami.

Je-li X Hausdorffův, pak (b) je ekvivalentní tomu, že $\overline{A}$ je kompaktní, a (c) je ekvivalentní tomu, že každý bod X má nějaké kompaktní okolí.

Nebude-li řečeno jinak, budeme v dalším textu pracovat pouze s Hausdorffovými prostory.■■■

LEMMA 77. *Nechť (X,τ) je topologický prostor. Pak systém všech kompaktních podmnožin X je uzavřený na konečná sjednocení a libovolné průniky.*

TVRZENÍ 78. *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Každá uzavřená množina v X je kompaktní.
(b) Prostor X je normální.■■■[Hausdorffův]
(c) Prostor X je lokálně kompaktní.
(d) Pokud Y je topologický prostor a X je jeho podprostorem, je X v Y uzavřený.
(e) Pokud Y je topologický prostor a $f : X \to Y$ je spojité, je $f(X)$ kompaktní. Pokud X je prosté, je f homeomorfizums.

TVRZENÍ 79. *Nechť (X,τ) je topologický prostor. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(a) Prostor X je kompaktní.
(b) Každý net v X má konvergentní podnet.
(c) Má-li neprázdný systém $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ složený z uzavřených množin konečnou průnikovou vlastnost (tj. $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ pro každou $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ konečnou), je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

VĚTA 80 (Tichonov). *Součin kompaktních prostorů je kompaktní.*

LEMMA 81. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Pak každá je ho otevřená podmnožina je lokálně kompaktní.*

TVRZENÍ 82. *Součin konečně mnoha lokálně kompaktních prostorů je lokálně kompaktní.*

DEFINICE 83. Nechť (X,τ) je topologický prostor.

(a) Je-li $f : X \to \mathbb{K}$ funkce, množinu $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}}$ nazýváme nosičem funkce f. Symbol $C_c(X)$ pak značí prostor všech spojitých funkcí s kompaktním nosičem.

(b) Je-li X lokálně kompaktní, značíme $C_0(X)$ prostor všech spojitých funkcí na X s vlastností, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in X;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ kompaktní.

DEFINICE 84. Nechť (X,τ) je lokálně kompaktní prostor a α je bod do X nenáležící. Položme $\alpha X \cup \{\alpha\}$ a definujme topologii σ na αX takto. Množina $U \subset \alpha X$ je σ otevřená, pokud $U \cap X$ je τ-otevřená a je-li $\alpha \in U$, pak existuje kompaktní množina $F \subset X$ taková, že $\{\alpha\} \cup (X \setminus F) \subset U$.

Prostor αX se nazývá jednobodová (nebo Alexandrovova) kompaktifikace X.

TVRZENÍ 85. *Nechť (X,τ) je lokálně kompaktní prostor a αX je zkonstruováno jako výše. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Prostor αX je kompaktní.
(b) Bod α je v uzávěru X právě tehdy, když X není kompaktní.
(c) Každé $f \in C_0(X)$ dodefinujeme na $\widetilde{f} \in C(\alpha X)$ v bodě α hodnotou 0. Pak toto zobrazení zprostředkovává izometrický izomorfisums $C_0(X)$ a $\{f \in C(\alpha X);\ f(\alpha) = 0\}$.

VĚTA 86 (Urysohn a Tietze). *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Nechť $K \subset X$ je kompaktní. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pokud $U \subset X$ otevřená množina splňuje $K \subset U$, pak existuje $f: X \to [0,1]$ spojitá splňující $f = 1$ na K a $f = 0$ na $X \setminus U$.
(b) Je-li $g: K \to \mathbb{K}$ spojitá, existuje $f \in C_c(X)$ rozšiřující g, která splňuje $\|f\| = \|g\|$.

DŮKAZ. Uvažujme kompaktifikaci αX. Pak K je uzavřená a U otevřená v αX, a tedy (a) i (b) plyne z normality prostoru αX.

□

LEMMA 87. *Nechť X je lokálně kompaktní prostor a K je jeho kompaktní podmnožina. Nechť a $\{U_1, \dots, U_n\}$ je pokrytí K otevřenými množinami. Pak existují funkce $g_1, \dots, g_n \in C_c(X)$ splňující $0 \leq g_i \leq \chi_{U_i}$, $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$, a $\sum_{i=1}^n g_i = 1$.*

DŮKAZ. Pro každý bod $x \in K$ najdeme $i \in \{1, \dots, n\}$ a otevřenou množinu V_x splňující $x \in V_x \subset \overline{V_x} \subset U_i$. Díky kompaktnosti existuje konečná množina $x_1, \dots, x_m$ v K taková, že $K \subset \bigcup_{j=1}^m V_{x_j}$. Definujme uzavřené množiny F_i jako

$$F_i = \bigcup \{\overline{V_{x_j}};\ \overline{V_{x_j}} \subset U_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nechť V_i jsou otevřené množiny splňující $F_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$. Najdeme spojité funkce $f_1, \dots, f_n$ na K takové, že $\chi_{F_i} \leq f_i \leq \chi_{V_i}$, $i = 1, \dots, n$. Pak $\operatorname{supp} f_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ a $\sum_{i=1}^n f_i > 0$ na K. Položme

$$g_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_{j=1}^n f_j(x)}, \ x \in K, \quad i = 1, \dots, n.$$

Pak g_i jsou spojité, splňují $0 \leq g_i \leq \chi_{U_i}$, $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$, $i = 1, \dots, n$, a $\sum_{i=1}^n g_i = 1$ na K.

□

VĚTA 88 (Stone-Weierstraß pro $C(X, \mathbb{R})$). *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Nechť $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ je vektorový prostor obsahující konstanty a oddělující body X. Nechť dále*

- *$\mathcal{A}$ je algebra nebo*
- *$\mathcal{A}$ je svaz, tj. $\min\{f, g\}$ a $\max\{f, g\}$ jsou elementy $\mathcal{A}$ kdykoliv $f, g \in \mathcal{A}$.*

Pak $\mathcal{A}$ je hustý v $C(X, \mathbb{R})$).

VĚTA 89 (Stone-Weierstraß pro $C(X, \mathbb{C})$). *Nechť X je kompaktní topologický prostor. Nechť $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{C})$ je vektorový prostor obsahující konstanty, oddělující body X a uzavřený na komplexní sdružení. Pokud $\mathcal{A}$ je algebra, je $\mathcal{A}$ je hustý v $C(X, \mathbb{C})$.*

VĚTA 90 (Stoneova-Weierstraßova pro lokálně kompaktní prostory). *Nechť L je lokálně kompaktní topologický prostor. Nechť $A \subset C_0(L, \mathbb{K})$ je podalgebra uzavřená na komplexní sdružování, která odděluje body L a pro každé $x \in L$ existuje $f \in A$ tak, že $f(x) \neq 0$. Pak A je hustá v $C_0(L, \mathbb{K})$.*

DŮKAZ. ■■■Uvažujme prostor αX. Dodefinováním funkcí z $C_0(X, \mathbb{K})$ hodnotou 0 v α lze předpokládat, že $\mathcal{A} \subset C(\alpha X, \mathbb{K})$. Uvažujme systém

$$\mathcal{B} = \{f + c;\ f \in \mathcal{A}, c \in \mathbb{K}\}.$$

Pak systém $\mathcal{B}$ splňuje předpoklady Věty 88 nebo Věty 89, a tedy $\overline{\mathcal{B}} = C(\alpha X, \mathbb{K})$.

Nechť $f \in C_0(X)$ je libovolná. Pak existují $g_n \in \mathcal{A}$ a $c_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že funkce tvaru $f_n = g_n + c_n$ konvergují stejnoměrně k f. Jelikož

$$0 = f(\alpha) = \lim_{n\to\infty} (g_n(\alpha) + c_n) = \lim_{n\to\infty} c_n,$$

máme

$$g_n = (g_n + c_n) - c_n = f_n + c_n \rightrightarrows f.$$

Tedy $\overline{\mathcal{A}} = C_0(X, \mathbb{K})$.

□

TVRZENÍ 91. *Nechť X je kompaktní prostor. Pokud existuje spočetný systém $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset C(X, \mathbb{R})$ oddělující body, je X metrizovatelný.*

DŮKAZ. Uvažujme zobrazení

$$\varphi\colon X \to \prod_{n=1}^{\infty} f_n(X),$$
$$\varphi(x) = \{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Pak $\prod_{n\in\mathbb{N}} f_n(X)$ je metrizovatelný a φ je homeomorfismus X na $\varphi(X)$. Tedy i X je metrizovatelný.

□

TVRZENÍ 92. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor se spočetnou bází. Pak existují kompaktní množiny K_n, $n \in \mathbb{N}$, s následujícími vlastnostmi:*
(a) $K_n \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$ pro $n \in \mathbb{N}$.
(b) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.
(c) Pro každý kompakt $K \subset X$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset \operatorname{Int} K_n$.

DŮKAZ. Nechť $\mathcal{B}$ je spočetná báze otevřených množin v X. Položme $\mathcal{A} = \{U \in \mathcal{B};\ U$ je relativně kompaktní$\}$ Pak $\mathcal{A}$ je také spočetná báze otevřených množin v X. Vskutku, je-li $G \subset X$ otevřená a $x \in G$, pak existuje $U \in \mathcal{B}$ taková, že $x \in U \subset G$. Protože U je okolí x a X je lokálně kompaktní, existuje $V \subset U$ kompaktní okolí x. Pak existuje $W \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in W \subset \operatorname{Int} V$, a tedy $W \in \mathcal{A}$ a $x \in W \subset V \subset U \subset G$.

Nechť $\mathcal{A} = \{U_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ a nechť $V_n \subset X$ jsou kompaktní takové, že $U_n \subset V_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Indukcí nyní sestrojíme posloupnost kompaktních množin $\{K_n\}$ takovou, že splňuje (a) a $U_n \subset K_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. V prvním kroku položíme $K_1 = V_1$. Předpokládejme nyní, že máme pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ zkonstruovány kompakty K_j, $j \in \{1,\dots,n\}$, takové, že $K_j \subset \operatorname{Int} K_{j+1}$ pro $j \in \{1,\dots,n-1\}$. Díky kompaktnosti K_n existuje $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n+1$ takové, že $K_n \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j$. Položme $K_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{N} V_j$. Pak K_{n+1} je kompaktní množina, která obsahuje U_{n+1} a splňuje to, že $K_n \subset \bigcup_{j=1}^{N} U_j \subset \operatorname{Int} K_{n+1}$. Tím je konstrukce ukončena. Nalezená posloupnost očividně splňuje (a) a (b). Je-li $K \subset X$ libovolný kompakt, pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_j \subset \operatorname{Int} K_n$.

□

5.5. Čechova-Stoneova kompaktifikace

VĚTA 93. *Nechť X je úplně regulární topologický prostor. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Existuje kompaktní prostor Y a homeomorfní zobrazení $\varepsilon\colon X \to \operatorname{Rng}\phi \subset Y$ takové, že $\operatorname{Rng}\varepsilon$ je hustý v Y a pro každou $f \in C^b(X)$ existuje právě jedna funkce $g \in C(Y)$ taková, že $f(x) = g(\varepsilon(x))$, $x \in X$.*

(b) *Pokud Y_1, Y_2 jsou kompaktní prostory splňující (a), přičemž $\phi_i\colon X \to Y_i$, $i = 1,2$, je příslušná vnoření, existuje surjektivní homeomorfismus $\phi\colon Y_1 \to Y_2$ takový, že $\phi(\phi_1(x)) = \phi_2(x)$, $x \in X$.*

DŮKAZ. (a) Uvažujme komutativní B*-algebru s jednotkou $A = C^b(X)$. Pak $Y = \Delta(A)$ je kompaktní prostor a $\Gamma\colon A \to C(Y)$ je izometrický $*$-izomorfismus. Uvažujme zobrazení $\varepsilon\colon X \to Y$ definované jako

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_x\colon f \mapsto f(x), \quad f \in A, quad x \in X.$$

Pak ε je požadované zobrazení.

Vskutku, nechť $\{x_i\}$ je net v X. Pokud konverguje k x, pak pro každé $f \in A$ platí $f(x_i) \to f(x)$, což podle definice topologie na Y znamená $\varepsilon_{x_i} \to \varepsilon_x$. Tedy ε je spojité. Pokud $\varepsilon_{x_i} \to \varepsilon_x$ v Y, nechť U je dané okolí x. Nalezneme funkci $f \in C^b(X)$ takovou, že $f(x) = 1$ a $f = 0$ vně U. Protože $f(x_i) = \varepsilon_{x_i}(f) \to \varepsilon_x(f) = f(x)$, existuje $i_i \in I$ takové, že pro $i \geq i_0$ platí $|f(x_i)| > 0$. Pro tato i je tedy $x_i \in U$. Ověřili jsme tak, že $x_i \to x$, tj. ε je homeomorfismus.

Dále ukážeme, že
$ve(X)$ je hustý v Y. Kdyby tomu tak nebyl, existovala by nenulová funkce $g \in C(Y)$ splňující $g = 0$ na $\varepsilon(X)$. Pak je funkce $f = \Gamma^{-1} g$ nenulová, ale pro $x \in X$ platí

$$f(x) = \varepsilon_x(f) = (\Gamma f)(\varepsilon_x) = g(\varepsilon_x) = 0.$$

Tedy $f = 0$, což je spor.

Je-li nyní $f \in C^b(X)$ libovolná, pak funkce $g = \Gamma f$ splňuje

$$g(\varepsilon_x) = (\Gamma f)(\varepsilon x) = \varepsilon_x(f) = f(x), \quad x \in X.$$

Tedy ε a Y jsou hledané objekty.

(b) Nechť Y_i a ϕ_i, $i = 1, 2$, splňují (a). Označme $A_i = C(Y_i)$, $i = 1, 2$. Pro $g \in C(Y_2)$ uvažujme jednoznačně určenou funkci $i(g) \in C(Y_1)$, která splňuje $i(g)(\phi_1(x)) = g(\phi_2(x))$, $x \in X$. Pak $i\colon A_2 \to A_1$ je izometrický $*$-izomorfismus. Tedy $i' \to A_1^* \to A_2^*$ je homeomorfismus $\Delta(A_1)$ na $\Delta(A_2)$. Nechť $\varepsilon_i \to \Delta(A_i)$ jsou homeomorfismy z Příkladu 10.71. Položme $\phi = \varepsilon_2^{-1} \circ i' \circ \varepsilon_1$. Pak ϕ je homeomorfismus Y_1 na Y_2, který pro každé $x \in X$ splňuje rovnosti

$$\begin{aligned} g(\phi(\phi_1(x))) &= g((\varepsilon_2^{-1} \circ i' \circ \varepsilon_1 \circ \phi_1)(x)) = ((i' \circ \varepsilon_1 \circ \phi_1)(x))(g) \\ &= (\varepsilon_1(\phi_1(x))(i(g)) = i(g)(\phi_1(x)) = g(\phi_2(x), \quad g \in C(Y_2). \end{aligned}$$

Tedy $\phi(\phi_1(x)) = \phi_2(x)$ a důkaz je hotov.

□

5.6. Souvislé prostory

DEFINICE 94. Nechť (X, τ) je topologický prostor.

(a) Prostor X se nazývá souvislý, pokud neexistují neprázdné, otevřené, disjunktní množiny $U, V \subset X$ splňující $X = U \cup V$.
(b) Prostor X se nazývá lokálně souvislý, pokud pro každé $x \in X$ existuje báze okolí x ze souvislých množin.
(c) Prostor X se nazývá křivkově souvislý, pokud pro každé $x, y \in X$ existuje spojité zobrazení $f\colon [0, 1] \to X$ splňující $f(0) = x$ a $f(1) = y$.
(d) Pro $x \in X$ označme
$$C_x = \bigcup \{C \subset X;\ C \text{ souvislá}, x \in C\}$$
(souvislou) komponentu bodu x.

TVRZENÍ 95. *Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Komponenty X jsou souvislé uzavřené podmnožiny X. Pokud $x, y \in X$, pak buď $C_x = C_y$, nebo $C_x \cap C_y = \emptyset$.
(b) Je-li X lokálně souvislý, jsou komponenty souvislosti otevřené.
(c) Křivkově souvislý prostor je souvislý.
(d) Je-li X souvislý, Y topologický prostor a $f\colon X \to Y$ spojitá, pak $f(X)$ je souvislý.

PŘÍKLAD 96. Každá konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru je souvislá.

LEMMA 97. *Nechť X je topologický prostor a $V \subset U \subset X$. Jestliže $\partial V \cap U = \emptyset$, pak*

$$V = \bigcup \{C;\ C \text{ je komponenta } U \text{ protínající } V\}.$$

DŮKAZ. $\subset$ Pro $x \in V$ stačí vzít komponentu U obsahující x.

$\supset$ Nechť C je komponenta U, která protíná V. Jelikož $X = \operatorname{Int} V \cup \partial V \cup (X \setminus \overline{V})$, platí dle předpokladu $U \subset \operatorname{Int} V \cup (X \setminus \overline{V})$. Množina C proto musí být obsažena ve V, neboť v opačném případě by množiny $C \cap \operatorname{Int} V$ a $C \cap (X \setminus \overline{V})$ tvořily rozklad C na dvě disjunktní neprázdné relativně otevřené množiny.

□

5.7. Metrizovatelnost

■■■[předělat pomocí Weilova pseudometrizačního lemmatu - Schechter]

VĚTA 98. *Nechť X je topologický vektorový prostor se spočetnou bází okolí* 0. *Pak existuje zobrazení $p\colon X \to [0, +\infty)$ takové, že*

(a) $p(\lambda x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K}$ splňující $|\lambda| \leq 1$,
(b) pro každé $x, y \in X$ platí $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
(c) $p(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,■■■[pseudo!]

(d) metrika $\rho(x, y) = p(x - y)$, $x, y \in X$, generuje τ.

Prostor (X, τ) je tak metrizovatelný.

DŮKAZ. *Krok 1.* Zvolíme bázi $\{V_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ vyvážených okolí 0 splňující

$$V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Nechť $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ značí systém všech neprázdných, konečných podmnožin $\mathbb{N}$. Pro každou $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ konečnou položíme

$$V_F = \sum_{n \in F} V_n \quad \text{a} \quad p_F = \sum_{n \in F} 2^{-n}.$$

Nejprve si rozmyslíme, že funkce $q\colon \mathcal{F}(\mathbb{N}) \to [0, 1)$ definovaná jako $q(F) = p_F$ je prostá. To však ihned plyne z faktu, že $2^{-n} > \sum_{k=n+1}^{n+m} 2^{-k}$ pro každé $n, m \in \mathbb{N}$.

Ukážeme nyní, že kdykoliv dvě množiny $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňují $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$, existuje množina $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ taková, že $p_F = p_{F_1} + p_{F_2}$. Navíc pak platí $V_{F_1} + V_{F_2} \subset V_F$. Důkaz provedeme indukcí podle počtu prvků množiny F_2.

Mějme množiny $F_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ a $F_2 = \{l\}$, kde $l \in \mathbb{N}$, dány. Pokud $l \notin F_1$, stačí položit $F = F_1 \cup F_2$.

Pokud by platilo $F_1 \cap [1, l] = \{1, \dots, l\}$, dostali bychom spor s nerovností $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$. Tedy lze definovat $j = \max(\{1, \dots, l\} \setminus F_1)$. Označíme

$$A_1 = F_1 \cap [1, \dots, j-1], \quad A_2 = F_1 \cap [j+1, l] = \{j+1, \dots, l\} \quad \text{a} \quad A_3 = F_1 \cap [l+1, +\infty).$$

Položíme

$$F = A_1 \cup \{j\} \cup A_3.$$

Pak F má požadované vlastnosti.

Platí totiž

$$p_{F_1} + p_{F_2} = p_{A_1} + p_{\{j+1,\dots,l\}} + p_{A_3} = P_{\{l\}} = p_{A_1} + p_{\{j\}} + p_{A_3} = p_F.$$

Dále díky(9) máme

$$V_{F_1} + V_{F_2} = V_{A_1} + V_{\{j+1,\dots,l\}} + V_{A_3} + V_{\{l\}} \subset V_{A_1} + V_{\{j\}} + V_{A_3} = V_F.$$

Předpokládejme nyní, že pro nějaké $n \in \mathbb{N}$ je tvrzení ověřeno pro každou množinu $F_1 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ a každou n-prvkovou množinu $H \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$. Nechť $F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ je má $n+1$ prvků. Označme $m = \max F_2$. Pak $H = F_2 \setminus \{m\}$ má n prvků, a tedy podle indukčního předpokladu existuje množina $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ taková, že $p_{F'} = p_{F_1} + p_H$ a $V_{F_1} + V_H \subset V_{F'}$. Na dvojici F' a $\{m\}$ nyní opět aplikujeme indukční předpoklad, a obdržíme tak množinu $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující

$$p_F = p_{F'} + p_{\{m\}} \quad \text{a} \quad V_{F'} + V_{\{m\}} \subset V_F.$$

Pak

$$p_F = p_{F'} + p_{\{m\}} = p_{F_1} + p_H + p_{\{m\}} = p_{F_1} + p_{F_2}$$

a

$$V_{F_1} + V_{F_2} = V_{F_1} + V_H + V_{\{m\}} \subset V_{F'} + V_{\{m\}} \subset V_F.$$

Tím je důkaz existence F dokončen.

Díky prostotě funkce q je navíc F jednoznačně určena.

Krok 2. Ukážeme, že platí

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\colon p_F < 2^{-n} \implies n < \min F \implies V_F \subset V_n. \tag{10}$$

Důkaz provedeme indukcí podle počtu prvků množiny F. Nechť F je jednoprvková množina. Pišme $F = \{k\}$, kde $k \in \mathbb{N}$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno. Pokud $p_F = 2^{-k} < 2^{-n}$, zjevně $n < k = \min F$. Tato nerovnost pak zřejmě implikuje $V_F = V_k \subset V_n$.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každou m-prvkovou podmnožinu $\mathbb{N}$. Nechť $F = \{k_1, \dots, k_{m+1}\}$, kde $k_1 < k_2 < \dots < k_{m+1}$ jsou čísla v $\mathbb{N}$, je dána. Nerovnost $p_F < 2^{-n}$ zjevně implikuje $n < \min F$.

Předpokládejme nyní tuto nerovnost a označme $F' = \{k_2, \dots, k_{m+1}\}$. Pak $n + 1 \le k_1 < \min F'$ a F' je m-prvková. Proto

$$V_F = V_{k_1} + \big(V_{k_2} + \dots + V_{k_{m+1}}\big) \subset V_{n+1} + V_{F'} \subset V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n.$$

Tím je(10) ověřeno.

Krok 3. Definujeme

$$p(x) = \begin{cases} \inf\{p_F;\ x \in V_F, F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})\}, & x \in \bigcup_{F\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} V_F, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases} \qquad x \in X.$$

Ověříme nyní pro funkci p vlastnosti (a)–(d). Pokud $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ a $x \in X$, pro každou $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ platí $\lambda x \in V_F$, pokud $x \in V_F$. Tedy (a) platí.

Dále ověříme (b). Nechť $x_1, x_2 \in X$ jsou dány. Pokud $p(x_1) + p(x_2) > 1$, požadovaná nerovnost zjevně platí. Předpokládejme tedy opačnou nerovnost a zvolme $\varepsilon > 0$ takové, že $p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon < 1$. Nechť nyní $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňují $x_i \in V_{F_i}$ a $p_{F_i} < p(x_i) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Jelikož $p_{F_1} + p_{F_2} < 1$, existuje právě jedna množina $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující $p_F = p_{F_1} + p_{F_2}$. Díky prvnímu kroku platí $V_{F_1} + V_{F_2} \subset V_F$. Tedy $x_1 + x_2 \in V_F$, a proto

$$p(x_1 + x_2) \le p_F = p_{F_1} + p_{F_2} \le p(x_1) + p(x_2) + 2\varepsilon.$$

Tím je vlastnost (b) ověřena.

Dále pro množiny

$$B_r = \{x \in X;\ p(x) \le r\}, \quad r \in [0, +\infty),$$

platí inkluze

$$B_{2^{-(n+1)}} \subset V_n \subset B_{2^{-n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Vskutku, inkluze $V_n \subset B_{2^{-n}}$ je zřejmá, neboť $p(x) \le 2^{-n}$, kdykoliv $x \in V_n$. Pokud je však $p(x) \le 2^{-(n+1)}$, existuje $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ splňující $p_F < 2^{-n}$ a $x \in V_F$. Pak $x \in V_n$ díky(10).

Z(11) nyní plyne vlastnost (c), neboť

$$x = 0 \Leftrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \Leftrightarrow p(x) = 0, \quad x \in X.$$

Nakonec ověříme (d). Nechť τ_ρ značí topologii generovanou metrikou ρ. Z(11) pak plyne, že báze okolí 0 v τ_ρ, totiž systém $\{B_r;\ r > 0\}$, je též báze okolí 0 v τ. Z(11) však také plyne, že $\tau(0)$ je báze okolí 0 v τ_ρ. Jelikož je metrika ρ translačně invariantní, topologie τ a τ_ρ splývají.

□

5.8. Úplné prostory

DEFINICE 99. Nechť X je topologický vektorový prostor.

(a) Řekneme, že net $\{x_i\}_{i\in I}$ je cauchyovský, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $i_0 \in I$ takové, že $x_i - x_j \in U$ pro každé $i, j \in I$ splňující $i_0 \le i, j$.

(b) Množina $A \subset X$ je úplná, pokud je každý cauchyovský net v A konvergentní.

(c) Nechť $\mathcal{F}$ je báze filtru v X. Řekneme, že $\mathcal{F}$ je cauchyovská, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \in \mathcal{F}$ splňující $F - F \subset U$.

LEMMA 100. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak X je úplný právě tehdy, když každá cauchyovská báze filtru je konvergentní.*

DŮKAZ. $\Rightarrow$ Nechť X je úplný a $\mathcal{F}$ je cauchyovská báze filtru. Nechť $\{x_F\}$ je net zkonstruovaný dle Tvrzení 56(a). Pak $\{x_F\}$ je cauchyovský. Je-li totiž $U \in \tau(0)$ dáno, nechť $F \in \mathcal{F}$ splňuje $F - F \in U$. Pak pro každé $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ splňující $F_1, F_2 \subset F$ platí

$$x_{F_1} - x_{F_2} \subset F_1 - F_2 \subset F - F \subset U.$$

Proto existuje $x \in X$ takové, že $x = \lim x_F$. Nechť nyní $U \in \tau(0)$ je dáno. Hledáme $F \in \mathcal{F}$ takové, že $F \subset x + U$. Předpokládejme, že takové F neexistuje. Pak lze zvolit prvky $y_F \in F \setminus (x + U)$. Jako výše pak ověříme, že net $\{y_F\}$ je cauchyovský, a tedy konvergentní k nějakému $y \in X$. Pak $x \neq y$. Zvolíme nyní $V \in \tau(0)$ vyvážené takové, že $V + V \subset U$. Nechť $F \in \mathcal{F}$ je takové, že $x_H \in x + V$ a $y_H \in y + V$ pro každé $H \in \mathcal{F}$ splňující $H \subset F$. Dále nalezneme $F' \in \mathcal{F}$ splňující $F' - F' \subset V$. Uvažujme nyní množinu $H = F \cap F'$ a příslušné prvky x_H, y_H. Pak

$$y_H = (y_H - x_H) + x_H \in (F' - F') + (x + V) \subset x + V + V \subset x + U,$$

což je spor. Proto $x = \lim \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}$ je konvergentní.

$\Rightarrow$ Předpokládejme, že je každá báze cauchyovská báze filtru konvergentní a nechť je cauchyovský net $\{x_i\}$ v X dán. Pak je systém $\mathcal{F} = \{F_i;\ i \in I\}$, kde $F_i = \{x_j;\ j \geq i\}$, báze filtru, která je navíc cauchyovská. Je-li totiž $U \in \tau(0)$ dáno a $i_0 \in I$ je volena tak, že $x_i - x_j \in U$ kdykoliv $i, j \geq i_0$, pak množina F_{i_0} splňuje $F_{i_0} - F_{i_0} \subset U$. Je-li nyní $x \in X$ limita $\mathcal{F}$, platí $x = \lim x_i$. Pro dané $U \in \tau(0)$ totiž nalezneme vyvážené $V \in \tau(0)$ obsažené v U a zvolíme $i_0 \in I$ takové, aby $x_i - x_j \in V$ kdykoliv $i, j \geq i_0$. Nechť $i_1 \in I$ splňuje $F_{i_1} \subset x + V$. Nechť $i_2 \in I$ splňuje $i_2 \geq i_0, i_1$. pak pro $i \geq i_2$ platí

$$x_i = (x_i - x_{i_2}) + x_{i_2} \in V + F_{i_2} \subset V + F_{i_1} \subset x + V + V \subset x + U.$$

Tím je důkaz dokončen.

$\square$

TVRZENÍ 101. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Každý konvergentní net je cauchyovský.
(b) Je-li $A \subset X$ úplná, je uzavřená.
(c) Je-li $A \subset X$ úplná a $B \subset A$ uzavřená, je B úplná.
(d) Nechť $A \subset X$. Pak A je kompaktní právě tehdy, když A je úplná a totálně omezená.

DŮKAZ. Důkaz tvrzení(a),(b) a (c) je zcela přímočarý.

(d) $\Rightarrow$ Nechť A je kompaktní. Díky Tvrzení 7.27 stačí ověřit úplnost A. Nechť tedy $\{x_i\}_{i \in I}$ je net v A. Vzhledem ke kompaktnosti A existuje indexová množina J a zobrazení $\phi\colon J \to I$ takové, že prvky $y_j = x_{\phi(j)}$ tvoří konvergentní podnet $\{x_i\}$. Nechť $x \in A$ je limita $\{y_j\}$ a nechť $U \in \tau(0)$ je dáno. Zvolíme $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$ a vybereme index $i_0 \in I$ takový, že $x_i - x_{i'} \in V$ pro každé $i, i' \geq i_0$. Nechť $j_1 \in J$ splňuje $\phi(j) \geq i_0$ pro každé $j \geq j_1$ a nechť $j_2 \in J$ je takové, že $y_j - x \in V$ pro každé $j \in J$ splňující $j \geq j_2$. Zvolme $j_0 \geq j_1, j_2$.

Uvažujme nyní libovolné $i \geq \phi(j_0)$. Pak $\phi(j_0) \geq i_0$, a tedy

$$x_i - x = x_i - x_{\phi(j_0)} + x_{\phi(j_0)} - x = (x_i - x_{\phi(j_0)}) + (y_{j_0} - x) \in V + V \subset U.$$

Tedy $x_i \to x$.

$\Longleftarrow$ Nechť nyní A je úplná a totálně omezená. K ověření kompaktnosti A použijeme Tvrzení 79. Nechť tedy $\mathcal{F} \subset \pm(X)$ je systém uzavřených množin s konečnou průnikovou vlastností. Pak systém $\mathcal{G} = \{\bigcap \mathcal{F}';\ \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ konečná$\}$ je báze filtru, a dle Tvrzení 57 existuje ultrafiltr $\mathcal{H}$ obsahující $\mathcal{G}$.

Ukážeme, že

$$\text{pro každou množinu } U \in \tau(0) \text{ existuje } H \in \mathcal{H} \text{ splňující } H - H \subset U. \tag{12}$$

Pro dané $U \in \tau(0)$ totiž nalezneme $V \in \tau(0)$ takové, že $V - V \subset U$. Díky totální omezenosti A existuje $D \subset A$ konečná taková, že $A \subset D + V$. Pak existuje alespoň jeden bod $x \in D$ takový, že pro každé $H \in \mathcal{H}$ platí $(x + \overline{V}) \cap H \neq \emptyset$.

V opačném případě bychom totiž měli množiny $H_x \in \mathcal{H}$, $x \in D$, takové, že $(x + \overline{V}) \cap H_x = \emptyset$. Máme-li nyní libovolné $y \in \bigcap_{x \in D} H_x$, existuje $x \in D$ takové, že $y \in x + \overline{V}$. Pak ale $y \in (x + \overline{V}) \cap H_x$. Tedy $\bigcap_{x \in D} H_x = \emptyset$, což je spor.

Z maximality $\mathcal{H}$ nyní plyne, že $x + V \in \mathcal{H}$. Pokud by tomu totiž tak nebylo, systém

$$\mathcal{C} = \{C \subset A;\ \exists H \in \mathcal{H} \text{ splňující } C \supset H \cap (x + V)\}$$

by byl filtr obsahující $\mathcal{H}$, který by navíc splňoval $\mathcal{A} \neq \mathcal{H}$.

Proto

$$(x + V) - (x + V) = V - V \subset U.$$

Tím je tvrzení(12) ověřeno.

Systém $\mathcal{H}$ nyní uvažujme uspořádaný inkluzí, tj. $H_1 \leq H_2$ pokud $H_1 \supset H_2$. Pak $(\mathcal{H}, \leq)$ je nahoru usměrněná částečně uspořádaná množina. Pro každé $H \in \mathcal{H}$ zvolíme $x_H \in H$. Pak $\{x_H\}_{H \in \mathcal{H}}$ je cauchyovský net. Vskutku, je-li $U \in \tau(0)$ dáno, nalezneme $H \in \mathcal{H}$ splňující $H - H \subset U$. Pak pro $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ takové, že $H_1, H_2 \subset H$, platí

$$x_{H_1} - x_{H_2} \in H_1 - H_2 \subset H - H \subset U.$$

Existuje proto $x \in A$ takové, že $\lim x_H = x$. Nyní stačí jen ukázat, že $x \in \bigcap \mathcal{F}$.

Nechť $F \in \mathcal{F}$ je libovolná. Mějme $U \in \tau(0)$ dáno. Pak existuje $H \in \mathcal{H}$ takové, že $x_{H'} \in U$ kdykoliv $H' \in \mathcal{H}$ splňuje $H' \subset H$. Pak $F \cap H \in \mathcal{H}$, a tedy

$$F \cap U \supset (F \cap H) \cap U \neq \emptyset.$$

Tedy $x \in \overline{F}$. Jelikož F je uzavřená, máme $x \in F$. Důkaz je tak hotov.

□

TVRZENÍ 102. *Nechť (X_i, τ_i), $i \in I$, jsou úplné topologické vektorové prostory. Pak $\prod_{i \in I} X_i$ je též úplný.*

DŮKAZ. Nechť $X = \prod_{i \in I} X_i$ a $p_i \colon ZX \to X_i$ jsou kanonické projekce. Nechť $\mathcal{F}$ je cauchyovská báze filtru v X. Pak pro každé $i \in I$ je $p_i(\mathcal{F})$ je cauchyovská báze filtru v X_i. Tedy existuje $x_i \in X_i$ takové, že $x_i = \lim p_i(\mathcal{F})$. Označme $x = \{x_i\}$. Nyní satčí ověřit, že $x = \lim \mathcal{F}$.

Nechť tedy $U \subset X$ je okolí 0. Z definice topologie na X plyne existence vyvážených množin $U_i \in \tau_i(0)$ takových, že $\prod_{i \in I} U_i \subset U$ a přitom množina $J = \{i \in I;\ U_i \neq X_i\}$ je konečná. Nalezneme $F_j \in \mathcal{F}$ takové, že $p_j(F_j) \subset x_j + U_j$, $j \in J$. Nechť $F \in \mathcal{F}$ splňuje $F \subset \bigcap_{j \in J} F_j$. Pak $F \subset x + U$.

Vksutku, je-li $y = \{y_i\} \in F$, pro $j \in J$ platí $y \in F_j$, a tedy $y_j \in p_j(F_j) \subset x_j + U_j$. Dostáváme tak

$$y_j - x_j \in U_j, \quad j \in J, \qquad y_i - x_i \in U_i = X_i, \quad i \in I \setminus J.$$

Tedy $y \in x + U$.

Proto $x = \lim \mathcal{F}$ a důkaz je hotov.

□

TVRZENÍ 103. *Nechť (X, τ), (Y, σ) jsou topologické vektorové prostory. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Nechť $f \colon X \to Y$ je stejnoměrně spojité. Pokud je $\{x_i\}$ je cauchovský net v X, je $\{f(x_i)\}$ cauchyovský net v Y.

(b) Je-li M hustý podprostor X, Y je úplný a $g \colon M \to Y$ je stejnoměrně spojité, existuje právě jedno stejnoměrně spojité zobrazení $h \colon X \to Y$ rozšiřující g.

(c) Je-li M hustý podprostor X, Y je úplný a $g \colon M \to Y$ je spojité a lineární, existuje právě jedno spojité, lineární zobrazení $h \colon X \to Y$ rozšiřující g.

DŮKAZ. Tvrzení (a) je zřejmé.

(b) Je-li stejnoměrně spojité $g \colon M \to Y$ dáno, pro každé $x \in X$ položíme

$$\mathcal{F}_x = \{(x + U) \cap M;\ U \in \tau(0)\}.$$

Pak $\mathcal{F}_x$ je báze filtru takové, že $g(\mathcal{F}_x)$ je cauchyovská báze filtru. Je-li totiž $V \in \sigma(0)$ dáno, nalezneme $U \in \tau(0)$ takové, že $g(x_1) - g(x_2) \in V$ kdykoliv $x_1, x_2 \in M$ splňují $x_1 - x_2 \in U$. Pak

$$g((x + U) \cap M) - g((x + U) \cap M) \subset V,$$

a tedy $g(\mathcal{F}_x)$ je cauchyovský.

Vzhledem k úplnosti prostoru Y tak můžeme definovat

$$h(x) = \lim g(\mathcal{F}_x), \quad x \in X.$$

Všimněme si, že díky spojitosti g platí $h = g$ na M. Pro dané $x \in M$ a $V \in \sigma(0)$ nalezneme vyvážené $V' \in \sigma(0)$ takové, že $V' + V' \subset V$. Nechť $U \in \tau(0)$ je takové, že $g((x + U) \cap M) \subset g(x) + V'$. Z definice limity báze filtru nyní dostáváme existenci množiny $W \in \tau(0)$ takové, že $g((x+W)\cap M) \subset h(x)+V'$. Pak pro $z \in (x+U\cap W)\cap M$ platí

$$g(x)-h(x) = (g(x)-g(z)) + (g(z)-h(x)) \in V'+V' \subset V.$$

Jelikož V bylo libovolné, $g(x)=h(x)$.

Ověříme nyní stejnoměrnou spojitost h. Nechť $V \in \sigma(0)$ je libovolné. Zvolíme vyvážené okolí $V_1 \in \sigma(0)$ splňující $V_1+V_1+V_1 \subset V$. Nechť $U_1 \in \tau(0)$ je vyvážené okolí takové, že $g(U_1\cap M)-g(U_1\cap M) \subset V_1$. Nalezneme vyvážené $U_2 \in \tau(0)$ tak, aby platilo $U_2+U_2+U_2 \subset U_1$. Nechť $x_1, x_2 \in X$ splňují $x_1-x_2 \in U_2$. Z definice limity báze filtru nalezneme vyvážené $U_3\tau(0)$ takové, že

$$g((x_i+U_3)\cap M) \subset h(x_i)+V_1, \quad i=1,2.$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $U_3 \subset U_2$. Vybereme nyní $z_i \in (x_i+U_3)\cap M$, $i=1,2$. Pak

$$z_1-z_2 = (z_1-x_1)+(x_1-x_2)+(x_2-z_2) \in U_3+U_2+U_3 \subset U_2+U_2+U_2 \subset U_1.$$

Tedy $g(z_1)-g(z_2) \in V_1$. Dostáváme tak

$$h(x_1)-h(x_2) = (h(x_1)-g(z_1)) + (g(z_1)-g(z_2)) + (g(z_2)-h(x_2)) \in V_1+V_1+V_1 \subset V.$$

Funkce h je tak stejnoměrně spojitá.

(c) Nechť lineární, spojité zobrazení $g\colon M \to Y$ je dáno. Dle (b) je stejnoměrně spojité, a tedy díky (c) existuje jeho stejnoměrně spojité rozšíření $h\colon X \to Y$. To však je již lineární. Mějme totiž $x_1, x_2 \in X$ dány. Nechť $V \in \sigma(0)$ je libovolné. Zvolíme vyvážené $V_1 \in \sigma(0)$ splňující. Nalezneme vyvážené $U_1 \in \tau(0)$ takové, že $h(x_1+x_2+U_1) \subset h(x_1+x_2)+V_1$. Nechť $U_2 \in \tau(0)$ je vyvážené okolí splňující $U_2+U_2 \subset U_1$ a

$$h(x_i+U_2) \subset h(x_i)+V_1, \quad i=1,2.$$

Zvolíme $z_i \in (x_i+U_2)\cap M$, $i=1,2$. Pak

$$h(z_1+z_2)-h(z_1)-h(z_2) = g(z_1+z_2)-g(z_1)-g(z_2) = 0$$

a

$$z_1+z_2 = (z_1-x_1)+(z_2-x_2)+(x_1+x_2) \in x_1+x_2+U_2+U_2 \subset x_1+x_2+U_1.$$

Tedy dostáváme

$$\begin{aligned} h(x_1+x_2)-(h(x_1)+h(x_2)) &= (h(x_1+x_2)-h(z_1+z_2)) + (h(z_1+z_2)-h(z_1)-h(z_2)) \\ &\quad + (h(z_1)-h(x_1)) + (h(z_2)-h(x_2)) \in V_1+V_1+V_1 \subset V. \end{aligned}$$

Jelikož V bylo libovolné, $h(x_1+x_2) = h(x_1)+h(x_2)$.

Obdobně se ověří rovnost $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ platná pro každé $x \in X$ a $\lambda \in \mathbb{K}$. Nechť totiž $V \in \sigma(0)$ je dáno. Zvolíme vyvážené $V_1 \in \sigma(0)$ splňující $V_1+\lambda V_1 \subset V$. Nechť vyvážené $U_1, U_2 \in \tau(0)$ splňují

$$h(x+U_1) \subset h(x_1)+V_1 \quad \text{a} \quad h(\lambda x+U_2) \in h(\lambda x)+V_1.$$

Zvolíme dále $U_3 \subset U_1 \cap \lambda^{-1}U_2$ a $z \in (x+U_3)\cap M$. Pak

$$\lambda z \in (\lambda x+\lambda U_3)\cap M \subset (\lambda x+U_2)\cap M$$

a

$$h(\lambda z) = g(\lambda z) = \lambda g(z) = \lambda h(z).$$

Proto platí

$$h(\lambda x)-\lambda h(x) = (h(\lambda x)-h(\lambda z)) + (h(\lambda z)-\lambda h(z)) + \lambda\,(h(z)-h(x)) \in V_1+\lambda V_1 \subset V.$$

Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 104. *Nechť X je topologický vektorový prostor. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Existuje úplný topologický vektorový prostor Y a lineární zobrazení $\phi\colon X \to Y$ takové, že ϕ je homeomorfismus X na $\phi(X)$ a $\phi(X)$ je hustý v Y.

(b) Pokud topologický vektorový prostor Z a zobrazení $\psi\colon X \to Z$ splňují (a), existuje izomorfismus $\omega\colon Y \to Z$ prostoru Y na Z takový, že $\omega(\phi(x)) = \psi(x)$, $x \in X$.

Pokud X je lokálně konvexní, Y lze též zkonstruovat jako lokálně konvexní.

DŮKAZ. (a) Konstrukci prostoru Y provedeme následovně. Uvažujme systém

$$\mathfrak{F} = \{\mathcal{F};\ \mathcal{F} \text{ je cauchyovská báze filtru v } X\}.$$

Označme $\mathcal{F}_0 = \{F \subset X;\ 0 \in F, F \text{ omezená}\}$. Na množině $\mathfrak{F}$ definujeme operace $+\colon \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}$ jako

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 &= \{F_1 + F_2;\ F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2\}, \quad \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F},\\ \lambda\mathcal{F} &= \{\lambda F;\ F \in \mathcal{F}\}, \quad \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \mathcal{F} \in \mathfrak{F},\\ 0\mathcal{F} &= \mathcal{F}_0, \quad \mathcal{F} \in \mathfrak{F}.\end{aligned}$$

Přímočarým způsobem se nyní ověří, že tyto operace jsou dobře definované.

Krok 1. Definujeme relaci $\sim$ na $\mathfrak{F}$ jako

$$\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2 \quad \text{pokud} \quad \lim(\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2) = 0.$$

Ověříme, že $\sim$ je relace ekvivalence na $\mathfrak{F}$. Je-li $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}$ a $U \in \tau(0)$, existuje $F \in \mathcal{F}$ splňující $F - F \subset U$. Tím jsme ověřili, že $\lim(\mathcal{F} - \mathcal{F}) = 0$, tj $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}$.

Pokud $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ a $U \in \tau(0)$ je dáno, nalezneme vyvážené $V \in \tau(0)$ obsažené v U. Pokud $F_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$, splňují $F_1 - F_2 \subset V$, platí pro ně též $F_2 - F_1 \subset V \subset U$. Tedy $\mathcal{F}_2 \sim \mathcal{F}_1$.

Pokud $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ a $\mathcal{F}_2 \sum \mathcal{F}_3$ a $U \in \tau(0)$ je dáno, zvolíme vyvážené $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$. Nechť $F_i \in \mathcal{F}_i$, $i = 1, 2, 3$, splňují $F_1 - F_2 \subset V$ a $F_2 - F_3 \subset V$, pak

$$F_1 - F_3 \subset (F_1 - F_2) + (F_2 - F_3) \subset V + V \subset U.$$

Tedy $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_3$.

Dále je $\sim$ invariantní vzhledem k operacím $+$ a $\cdot$, tj. pokud $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$ a $\lambda \in \mathbb{K}$ a $\mathcal{F}_3 \in \mathfrak{F}$ jsou libovolné, platí $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3 \sim \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \sim \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1$ a $\lambda\mathcal{F}_1 \sim \lambda\mathcal{F}_2$.

Krok 2. Uvažujme množinu $Y = \mathfrak{F}/\sim$. Díky vlastnostem $\sim$ je tato množina s operacemi

$$[\mathcal{F}_1] + [\mathcal{F}_2] = [\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2] \quad \text{a} \quad \lambda[\mathcal{F}_1] = [\lambda\mathcal{F}_1], \qquad \lambda \in \mathbb{K}, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F},$$

vektorový prostor.

Vskutku, $+$ je komutativní, jelikož $[\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2] = [\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1]$ pro každé $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathfrak{F}$. Asociativita se ověří přímočaře. Třída $[\mathcal{F}_0]$ je nulový element Y a je-li $[\mathcal{F}] \in Y$, je $[-\mathcal{F}]$ inverzní prvek k $[\mathcal{F}]$. Snadno se též ověří asociativita násobení a distributivita.

Krok 3. Definujeme topologii σ na Y následujícím způsobem. Pro každé vyvážené okolí $U \in \tau(0)$ definujeme množinu $S_U \subset Y$ takto:

$$[\mathcal{F}] \in S_U \Leftrightarrow \exists \mathcal{H} \in [\mathcal{F}]\, \exists H \in \mathcal{H}\colon H \subset U.$$

Ukážeme, že systém $\mathcal{S} = \{S_U;\ U \in \tau(0) \text{ vyvážené}\}$ splňuje podmínky (1), (2) a (3) z Věty 7.8.

Každé S_U je vyvážené. Platí-li totiž pro nějaké $\mathcal{H} \in [\mathcal{F}]$ a $H \in \mathcal{H}$ inkluze $H \subset U$, máme $\lambda H \in \lambda\mathcal{H} \in [\lambda\mathcal{F}]$ a $\lambda H \subset \lambda U \subset U$. Tedy $\lambda[\mathcal{F}] \in S_U$ kdykoliv $[\mathcal{F}] \in S_U$.

Každé S_U je pohlcující. Nechť $U \in \tau(0)$ vyvážené a $[\mathcal{F}] \in Y$ jsou dány. Zvolíme $V \in \tau(0)$ vyvážené, které splňuje $V + V \subset U$. Nechť $F \in \mathcal{F}$ je nalezeno tak, aby $F - F \subset V$. Zvolíme libovolné $x \in F$. Pak

$$F - x \subset F - F \subset V,$$

tj. $F \subset x + V$. Nechť $s \geq 1$ je takové, že $x \in sV$. Pak

$$F \subset x + V \subset sV + V \subset sV + sV = s(V + V) \subset sU.$$

Nechť $r \in [0, s^{-1}]$ je libovolné. Pak $rF \in r\mathcal{F} \in r[\mathcal{F}]$ a $rF \subset rsU \subset U$. Tedy $r[\mathcal{F}] \in S_U$ pro každé $r \in [0, s^{-1}]$, tj. S_U je pohlcující.

Systém $\mathcal{S}$ je báze filtru. To plyne ze snadno ověřitelné inkluze $S_{U_3} \subset S_{U_1} \cap S_{U_2}$ platné pro každé vyvážené $U_1, U_2, U_3 \in \tau(0)$ splňující $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

Pro každé nenulové $[\mathcal{F}] \in Y$ existuje S_U bod $[\mathcal{F}]$ neobsahující. Nechť nenulové $[\mathcal{F}] \in Y$ je dáno. Pak není pravda, že $\lim \mathcal{F} = 0$, a tedy existuje vyvážené $U \in \tau(0)$ takové, že pro každé $F \in \mathcal{F}$ platí $F \not\subset U$. Zvolme vyvážené $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$. Pak $[\mathcal{F}] \notin S_V$.

Vskutku, kdyby existovalo $\mathcal{H} \in [\mathcal{F}]$ a $H \in \mathcal{H}$ splňující $H \subset V$, z faktu $\lim(\mathcal{F} - \mathcal{H}) = 0$ bychom nalezli $H' \in \mathcal{H}$ a $F' \in \mathcal{F}$ splňující $F' - H' \subset V$. Nechť $H'' \in \mathcal{H}$ splňuje $H'' \subset H \cap H'$. Pak by platilo

$$F' \subset (F' - H'') + H'' \subset (F' - H') + H \subset V + V \subset U,$$

což by byl spor.

Pro každé S_U existuje S_V splňující $S_V + S_V \subset S_U$. Je-li dáno $U \in \tau(0)$ vyvážené, nalezneme vyvážené $V \in \tau(0)$ splňující $V + V \subset U$. Pak $S_V + S_V \subset S_U$. Vskutku, nechť $[\mathcal{F}_1], [\mathcal{F}_2] \in S_V$. Pak pro $i = 1, 2$ existují $\mathcal{H}_i \in \mathfrak{F}$ a $H_i \in \mathcal{H}_i$ takové, že $\mathcal{H}_i \in [\mathcal{F}_i]$ a $H_i \subset V$. Pak $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 \in [\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2]$ a $H_1 + H_2 \subset V + V \subset U$. Tedy $[\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2] \in S_U$.

Dle Věty 7.8 tedy existuje jednoznačně určená topologie σ na Y, se kterou je Y topologický vektorový prostor a $\mathcal{S}$ je báze okolí 0.

Krok 4. Uvažujme zobrazení $\phi\colon X \to Y$ definované jako

$$\phi(x) = [\mathcal{F}_x], \quad x \in X \setminus \{0\},$$

kde $\mathcal{F}_x = \{F \subset X;\ x \in F\}$.

Zobrazení ϕ je dobře definované, neboť $\mathcal{F}_x \in \mathfrak{F}$ pro každé $x \in X$. Navíc $\mathcal{F}_{x_1} + \mathcal{F}_{x_2} = \mathcal{F}_{x_1+x_2}$, $x_1, x_2 \in X$, a $\mathcal{F}_{\lambda x} = \lambda \mathcal{F}_x$ pro $\lambda \in \mathbb{K}$ a $x \in X$. Z těchto vztahů tedy plyne, že ϕ je lineární.

Zobrazení ϕ je dokonce spojité. K tomu stačí ověřit jeho spojitost v 0. Pro dané vyvážené $U \in \tau(0)$ uvažujme množinu S_U. Pak zjevně $\phi(U) \subset S_U$, tj. ϕ je spojité v 0.

Krok 5. Ukažme, že Y je úplný prostor. Nechť $\mathfrak{A}$ je cauchyovská báze filtru v Y. Nechť $\mathfrak{B}$ značí systém všech vyvážených prvků $\tau(0)$. Uvažujme množinu $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ s uspořádáním definovaným jako $(A, U) \le (A', U')$, pokud $A \supset A'$ a $U \supset U'$. Pak $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ je nahoru usměrněná částečně uspořádaná množina. Pro každé $y \in Y$ zvolíme $\mathcal{F}_y \in \mathfrak{F}$ takové, že $y = [\mathcal{F}_y]$. Pro každé $(A, U) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ vybereme $y_A \in A$ a zvolíme $F_{(A,U)} \in \mathcal{F}_y$ splňující $F_{(A,U)} - F_{(A,U)} \subset U$. Nyní vybereme libovolné $x_{(A,U)} \in F_{(A,U)}$.

Systém $\{x_{(A,U)}\}$ je nyní cauchyovský net v X. Vskutku, nechť $U \in \mathfrak{B}$ je dáno. Zvolíme $V \in \mathfrak{B}$ splňující

$$V + V + V + V + V + V + V + V \subset U$$

a dále nechť pro $A_0 \in \mathfrak{A}$ platí $A_0 - A_0 \subset S_V$. Nechť $(A_1, V_1) \ge (A_0, V_0)$. Pro $i = 0, 1$ pak platí $F_{(A_i,V_i)} - F_{(A_i,V_i)} \subset V$.

Jelikož $A_1 \subset A_0$, máme

$$[\mathcal{F}_{y_{A_0}} - \mathcal{F}_{y_{A_1}}] = [\mathcal{F}_{y_{A_0}}] - [\mathcal{F}_{y_{A_1}}] = y_{A_0} - y_{A_1} \in S_V.$$

Dle definice tedy existují $\mathcal{H} \in [\mathcal{F}_{y_{A_0}} - \mathcal{F}_{y_{A_1}}]$ a $H \in \mathcal{H}$ takové, že $H \subset V$. Jelikož $\lim(\mathcal{H} - (\mathcal{F}_{y_{A_0}} - \mathcal{F}_{A_1})) = 0$, existují množiny $F_0 \in \mathcal{F}_{y_{A_0}}$ a $F_1 \in \mathcal{F}_{y_{A_1}}$ takové, že $H - (F_0 - F_1) \subset V$. Nalezneme množiny $F_0' \in \mathcal{F}_{y_{A_0}}$ a $F_1' \in \mathcal{F}_{y_{A_1}}$ takové, že $F_i' \subset F_{(A_i,V_i)} \cap F_i$, $i = 0, 1$. Vybereme $x_i' \in F_i'$. Pak

$$x_1' - x_0' \in F_0' - F_1' \subset F_0 - F_1 \subset ((F_0 - F_1) - H) + H \subset V + V.$$

Pak máme

$$\begin{aligned} x_{(A_1,V_1)} - x_{(A_0,V_0)} &= \big(x_{(A_1,V_1)} - x_1'\big) + \big(x_1' - x_0'\big) + \big(x_0' - x_{(A_0,V_0)}\big) \in \big(F_{(A_1,V_1)} - F_1'\big) + (V + V) + \big(F_0' - F_{(A_0,V_0)}\big) \\ &\subset \big(F_{(A_1,V_1)} - F_{(A_1,V_1)}\big) + (V + V) + \big(F_{(A_0,V_0)} - F_{(A_0,V_0)}\big) \subset V + V + V + V. \end{aligned}$$

Máme-li tedy libovolné prvky (A_2, V_2), (A_1, V_1) množiny $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, které majorizují (A_0, V_0), platí

$$x_{(A_2,V_2)} - x_{(A_1,V_1)} = \big(x_{(A_2,V_2)} - x_{(A_0,V_0)}\big) + \big(x_{(A_0,V_0)} - x_{(A_1,V_1)}\big) \in V + V + V + V + V + V + V + V \subset U.$$

Tedy net $\{x_{(A,U)}\}$ je cauchyovský.

Pro každé $(A, U) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ položme

$$H_{(A,U)} = \{x_{(A',U')};\ (A', U') \ge (A, U)\}$$

a uvažujme bázi filtru

$$\mathcal{H} = \{H_{(A,U)};\ (A, U) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}\}.$$

Snadno se ověří, že $\mathcal{H}$ je cauchyovská.

Nyní zbývá dokázat, že $[\mathscr{H}] = \lim \mathfrak{A}$. Mějme tedy $U \in \mathfrak{B}$ libovolné. Hledáme $A \in \mathfrak{A}$ splňující $A \subset [\mathscr{H}] + S_U$. Zvolíme $V \in \mathfrak{B}$ takové, že $V + V + V + V \subset U$. Nechť $A_0 \in \mathfrak{A}$ splňuje $A_0 - A_0 \subset S_V$. Nechť $(A, W) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ splňuje

$$x_{(A',V')} - x_{(A'',V'')} \in V, \quad (A', U'), (A'', U'') \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \text{ majorizují } (A, W).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $A \subset A_0$ a $W \subset V$. Ukážeme, že A je hledaná množina.

Nechť $y \in A$ je libovolné. Pak

$$[\mathcal{F}_y - \mathcal{F}_{y_A}] = [\mathcal{F}_y] - [\mathcal{F}_{y_A}] = y - y_A \in A_0 - A_0 \subset S_V.$$

Tedy existuje $\mathcal{C} \in [\mathcal{F}_y - \mathcal{F}_{y_A}]$ a $C_1 \in \mathcal{C}$ takové, že $C_1 \subset V$. Jelikož $\lim(\mathcal{C} - (\mathcal{F}_y - \mathcal{F}_{y_A})) = 0$, existují $C_2 \in \mathcal{C}$, $F \in \mathcal{F}_y$ a $F_A \in \mathcal{F}_{y_A}$ takové, že $(F - F_A) - C_2 \subset V$. Pak pro $C_3 \in \mathcal{C}$ splňující $C_3 \subset C_1 \cap C_2$ máme

$$F - F_A \subset (F - F_A) - C_3 + C_3 \subset (F - F_A) - C_2 + C_1 \subset V + V.$$

Uvažujme množinu $H_{(A,W)}$. Pak pro libovolné $x \in F$ a $x_{(A',W')}$, kde $(A', W') \geq (A, W)$ zvolíme $z \in F_A \cap F_{(A,W)}$. Pak

$$\begin{aligned} x - x_{(A',W')} &= (x - z) + \big(z - x_{(A,W)}\big) + \big(x_{(A,W)} - x_{(A',W')}\big) \in (F - F_A) + \big(F_{(A,W)} - F_{(A,W)}\big) + V \\ &\subset V + V + W + V \subset V + V + V + V \subset U. \end{aligned}$$

Tedy $F - H_{(A,W)} \in \mathcal{F}_y - \mathscr{H}$ a $F - H_{(A,W)} \subset U$. To znamená, že $[\mathcal{F}_y - \mathscr{H}] \in S_U$. Proto

$$y - [\mathscr{H}] = [\mathcal{F}_y] - [\mathscr{H}] = [\mathcal{F}_y - \mathscr{H}] \in S_U,$$

čili

$$y \in [\mathscr{H}] + S_U.$$

Tím je ověřen fakt $[\mathscr{H}] = \lim \mathfrak{A}$.

Prostor $\phi(X)$ je hustý v Y. Nejprve si povšimneme, že $\phi(X)$ protíná každé $S_U \in \mathcal{S}$. Máme-li totiž nějaké S_U dáno, zvolíme libovolné $x \in U$. Okamžitě je pak vidět z definice, že $\phi(x) = [\mathcal{F}_x] \in S_U$.

Nechť nyní $y \in Y$ a $S_U \in \mathcal{S}$ jsou dány. Nalezneme $x_1 \in S_U \cap \phi(X)$. Pak $x_1 - y \in S_U$, a tedy existuje $S_V \in \mathcal{S}$ splňující $x_1 - y + S_V \subset S_U$. Nalezneme $x_2 \in S_V$. Pak

$$x_1 + x_2 - y \in x_1 - y + S_V \subset S_U.$$

Tedy $x_1 + x_2 \in (y + S_U) \cap \phi(X)$, a tedy je $\phi(X)$ hustý v Y.

Konstrukce pro lokálně konvenxí prostor. Předpokládejme, že X je navíc lokálně konvexní. Pak uvažujeme systém

$$\mathcal{S} = \{S_U;\ U \in \tau(0) \text{ vyvážená, konvexní}\}$$

a provedeme konstrukci Y jako výše. K důkazu lokální konvexity pak stačí ukázat, že množiny S_U jsou konvexní. Nechť tedy $[\mathcal{F}_1], [\mathcal{F}_2] \in S_U$ a $\lambda \in [0, 1]$ jsou dány. Pak pro $i = 1, 2$ existují $\mathscr{H}_i \in \mathfrak{F}$ a $H_i \in \mathscr{H}_i$ takové, že $\mathscr{H}_i \in [\mathcal{F}_i]$ a $H_i \subset U$. Pak

$$\lambda H_1 + (1 - \lambda) H_2 \in \lambda \mathscr{H}_1 + (1 - \lambda)\mathscr{H}_2 \in [\lambda \mathcal{F}_1 + (1 - \lambda)\mathcal{F}_2] = \lambda[\mathcal{F}_1] + (1 - \lambda)[\mathcal{F}_2]$$

a

$$\lambda H_1 + (1 - \lambda) H_2 \subset U.$$

Tedy $\lambda[\mathcal{F}_1] + (1 - \lambda)[\mathcal{F}_2] \in S_U$.

(b) Ukážeme nyní jednoznačnost prostoru Y. Nechť Y_i a $\phi_i \colon X \to Y_i$, $i = 1, 2$, jsou objekty splňující (a). Označme $\alpha \colon \phi_1(X) \to \phi_2(X)$ definované jako $\alpha = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$. Pak α je spojité lineární zobrazení, a tedy je stejnoměrně spojité. Dle Tvrzení 103 existují spojitá, lineární zobrazení $\psi_1 \colon Y_1 \to Y_2$ a $\psi_2 \colon Y_2 \to Y_1$ splňující $\psi_1 = \alpha$ na $\phi_1(X)$ a $\psi_2 = \alpha^{-1}$ na $\phi_2(X)$.

Ukážeme, že ψ_1 je bijekce Y_1 na Y_2, jejíž inverze je rovna ψ_2. Nechť nejprve $y_2 \in Y_2$ je dáno. Nalezneme net $\{x_i\}$ takový, že $\phi_2(x_i) \to y_2$. Pak je net $\{\alpha^{-1}(\phi_2(x_i))\}$ cauchyovský, a tedy konverguje k nějakému $y_1 \in Y_1$. Pak

$$\psi_1(y_1) = \lim \psi_1(\alpha^{-1}(\phi_2(x_i))) = \lim \psi_1(\phi_1(x_i)) = \lim \phi_2(x_i) = y_2.$$

Tedy ψ_1 je surjektivní.

Nechť nyní $y_1 \in Y_1$ je dáno. Ukážeme, že $y_1 = \psi_2(\psi_1(y_1))$. Označíme $y_2 = \psi_1(y_1)$. Zvolíme net $\{x_i\}$ v X takový, že $y_1 = \lim \phi_1(x_i)$. Pak

$$y_2 = \psi_1(y_1) = \lim \psi_1(\phi_1(x_i)) = \lim \alpha(\phi_1(x_i)) = \lim \phi_2(x_i).$$

Proto máme

$$\psi_2(y_2) = \lim \psi_2(\phi_2(x_i)) = \lim \alpha^{-1}(\phi_2(x_i)) = \lim \phi_1(x_i) = y_1.$$

Tedy ψ_1 je požadovaný izomorfismus Y_1 na Y_2.

□

6. Prostory měr

6.1. Komplexní míry

DEFINICE 105. (a) Nechť X je množina a Σ je σ-algebra na X. Pak dvojici (X, Σ) nazýváme měřitelným prostorem a prvky Σ jsou měřitelné množiny.

(b) Nechť (X, Σ) je měřitelný prostor. Pak $\mu\colon \Sigma \to [0, \infty]$ je nezáporná míra, pokud $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pro každý disjunktní, spočetný systém měřitelných množin. Pokud $\mu(X) < \infty$, je μ konečná. Pokud lze psát $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ a $\mu(X_n) < \infty$, je μ σ-konečná.

(c) Nechť (X, Σ) je měřitelný prostor. Pak $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{K}$ je (znaménková nebo komplexní) míra, pokud $\mu(\emptyset) = 0$ a $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ pro každý disjunktní, spočetný systém měřitelných množin.

(d) Nechť μ je míra na (X, Σ). Pro $A \in \Sigma$ označme $\pi(A)$ systém všech spočetných, měřitelných rozkladů A, tj. $\mathcal{A} \in \pi(A)$ právě tehdy, když $A = \bigcup \mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \Sigma$ a $\mathcal{A}$ je spočetný. Zobrazení $|\mu|\colon \Sigma \to [0, +\infty)$ definované jako

$$|\mu|(A) = \sup_{\mathcal{B} \in \pi(A)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)|, \quad A \in \Sigma,$$

je konečná míra.

DEFINICE 106. Nechť μ, ν jsou míry na (X, Σ).

(a) Řekneme, že $\nu \ll \mu$, pokud $\nu(A) = 0$, kdykoliv $\mu(A) = 0$.

(b) Pokud existují disjunktní množiny $A, B \in \Sigma$ takové, že $X = A \cup B$ a pro každou $C \in \Sigma$ platí $\mu(B \cap C) = \nu(A \cap C) = 0$, řekneme, že μ, ν jsou navzájem singulární (píšeme $\mu \perp \nu$).

VĚTA 107 (Radon-Nikodym). *Nechť μ je σ-konečná (nezáporná) míra na (X, Σ) a λ je komplexní míra na (X, Σ). Pak platí následující tvrzení.*

(a) Existuje právě jedna dvojice měr λ_a, λ_s taková, že $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, $\lambda_a \ll \mu$ a $\lambda_s \perp \mu$.
(b) Existuje právě jedna funkce $h \in L_1(\mu)$ splňující

$$\lambda_a(A) = \int_A h \, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

Navíc platí

$$|\lambda|(A) = \int_A |h| \, d\mu, \quad A \in \Sigma.$$

VĚTA 108 (Hahnův rozklad). *Nechť μ je reálná míra na (X, Σ). Položme*

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) \quad a \quad \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu).$$

Pak $\mu^+ \perp \mu^-$.

VĚTA 109 (Jordanova dekompozice). *Nechť μ je míra na (X, Σ). Pak existují nezáporné konečné míry μ_j, $j = 0, 1, 2, 3$, takové, že $\mu = \sum_{j=1}^{3} i^j \mu_j$ a platí*

$$\mu_j(A) \le |\mu|(A), \quad A \in \Sigma, j = 0, 1, 2, 3.$$

DŮKAZ. Pišme $\mu = \alpha + i\beta$, kde α, β jsou reálné míry na Σ. Vzhledem k tomu, že $\alpha^+ \perp \alpha^-$, existuje množina $Y \in \Sigma$ taková, že $\alpha^+(X \setminus Y) = \alpha^-(Y) = 0$. Pak pro každou $A \in \Sigma$ platí

$$\begin{aligned}\alpha^+(A) &= |\alpha^+(A)| = |\alpha^+(A \cap Y)| = |\alpha^+(A \cap Y) + \alpha^-(A \cap Y)| = |\alpha(A \cap Y)| \le |\alpha(A \cap Y) + i\beta(A \cap Y)| \\ &= |\mu(A \cap Y)| \le |\mu|(A \cap Y) \le |\mu|(A).\end{aligned}$$

Podobně ukážeme, že míry $\alpha^-, \beta^+, \beta^-$ jsou majorizovány $|\mu|$. Tedy

$$\mu = \alpha^+ - \alpha^- + i(\beta^+ - \beta^-)$$

je hledaný rozklad.

□

TVRZENÍ 110. *Nechť μ je míra na (X, Σ). Pak pro každé $f \in L_1(|\mu|)$ je $\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ dobře definovaný a platí*

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \le \int_X |f| \, \mathrm{d}|\mu|.$$

Speciálně pro každé $A \in \Sigma$ platí $|\mu(A)| \le |\mu|(A)$.

DEFINICE 111. Nechť (X, Σ) je měřitelný prostor. Nechť $M(X)$ značí prostor všech měr na (X, Σ), kde vektorové operace definujeme bodově a uvažujeme normu $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

VĚTA 112. *Nechť (X, Σ) je měřitelný prostor, pak $M(X)$ je Banachův prostor. Navíc platí $|\mu + \nu| \le |\mu| + |\nu|$, $\mu, \nu \in M(X)$.*

DŮKAZ. Zjevně je $M(X)$ vektorový prostor. Pro $\mu, \nu \in M(X)$ máme

$$|(\mu + \nu)(A)| \le |\mu(A)| + |\nu(A)| \le |\mu|(A) + |\nu|(A), \quad A \in \Sigma.$$

Z této nerovnosti již snadno plyne odhad $|\mu + \nu| \le |\mu| + |\nu|$.

Krok 1. Pro $\mu \in M(X)$ a $c \in \mathbb{K}$ platí

$$|c\mu|(X) = \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |c\mu(B)| = |\mu|(A) = |c| \sup_{\mathcal{B} \in \pi(A)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| = |c| \|\mu\|.$$

Dále pro $\mu, \nu \in M(X)$ platí

$$\begin{aligned}\|\mu + \nu\| = |\mu + \nu|(X) &= \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu + \nu(B)| \\ &\le \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| + \sup_{\mathcal{B} \in \pi(X)} \sum_{B \in \mathcal{B}} |\nu(B)| = \|\mu\| + \|\nu\|.\end{aligned}$$

Konečně pokud $\|\mu\| = 0$, tj. $|\mu|(X) = 0$, pak pro každé $A \in \Sigma$ máme

$$|\mu(A)| \le |\mu|(A) \le |\mu|(X) = 0,$$

a tedy $\mu = 0$. Proto je $M(X)$ normovaný prostor.

Krok 2. K důkazu úplnosti použijeme Větu 1.30. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ je absolutně konvergentní řada v $M(X)$. Pro libovolné $A \in \Sigma$ pak máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n(A)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu_n\| < \infty,$$

a tedy lze položit

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A), \quad A \in \Sigma.$$

Zjevně je pak μ konečně aditivní a platí $\mu(\emptyset) = 0$.

Nechť $\{C_k\}$ je klesající posloupnost měřitelných množin splňujících $\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = \emptyset$. Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \|\mu_n\| < \varepsilon$. Jelikož pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\lim_{k\to\infty} |\mu_n|(A_k) = 0$, existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $|\mu_n|(C_k) < \frac{\varepsilon}{n_0}$, $n = 1, \dots, n_0$. Pak pro $k \geq k_0$ platí

$$|\mu(C_k)| = |\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(C_k)| \leq |\sum_{n=1}^{n_0} \mu_n(C_k)| + |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mu_n(A_k)| \leq \sum_{n=1}^{n_0} |\mu_n|(A_k) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|\mu_n\| \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{n_0} + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Tedy $\mu(C_k) \to 0$.

Nechť nyní $\{A_j\}$ je disjunktní systém měřitelných množin a $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$. Položme $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ a $C_n = A \setminus B_n$, $n \in \mathbb{N}$. Pak $\{C_n\}$ je klesající posloupnost s vlastností $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$. Dle předcházející úvahy tedy máme pro

$$|\mu(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)| = |\mu(B_n) + \mu(C_n) - \mu(\cup_{k=1}^{n} A_k)| = |\mu(B_n) + \mu(C_n) - \mu(B_n)| = |\mu(C_n)| \to 0.$$

Tedy $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Krok 3. Ověřme nyní, že $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\nu_n(A) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu_k(A), \quad A \in \Sigma.$$

Dle předcházejícího jsou míry ν_n v $M(X)$ a platí $\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k = \nu_n$. Pro libovolné $\mathcal{B} \in \pi(X)$ nyní máme

$$\sum_{B\in\mathcal{B}} |(\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k)(B)| = \sum_{B\in\mathcal{B}} |\nu_n(B)| \leq \sum_{B\in\mathcal{B}} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\mu_k(B)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum_{B\in\mathcal{B}} |\mu_k(B)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\mu_k\|.$$

Tedy $\|\mu - \sum_{k=1}^{n} \mu_k\| \to 0$.

□

6.2. Borelovské množiny a funkce

DEFINICE 113. (a) Nechť (X, τ) je topologický prostor. Symbolem $\mathrm{Bs}(X)$ označíme σ-algebru genrovanou τ.

(b) Nechť (X, τ) a (Y, σ) jsou topologické prostory a $f : X \to Y$ je zobrazení. Pak f je borelovské, pokud $f^{-1}(V) \in \mathrm{Bs}(X)$ pro každou $V \in \sigma$.

TVRZENÍ 114. *Nechť X je topologický prostor a $Y \subset X$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Platí

$$\mathrm{Bs}(Y) = \{Y \cap B;\ B \in \mathrm{Bs}(X)\}.$$

(b) Pokud $Y \in \mathrm{Bs}(X)$, pak $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathrm{Bs}(X)$.

DŮKAZ. (a) Pišme σ pro topologii Y. Označme $\mathcal{A} = \{Y \cap A;\ A \in \mathrm{Bs}(X)\}$. Zjevně je $\mathcal{A}$ σ-algebra obsahující otevřené množiny Y, a tedy $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathcal{A}$. Nechť nyní $\mathcal{B}$ je libovolná σ-algebra v Y obsahující σ. Položme

$$\mathcal{C} = \{C \subset X;\ Y \cap C \in \mathcal{B}\}.$$

Pak $\mathcal{C}$ je σ-algebra v X obsahující τ. Tedy $\mathcal{C} \supset \mathrm{Bs}(X)$, z čehož plyne $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Jelikož $\mathcal{B}$ byla libovolná, platí $\mathcal{A} \subset \mathrm{Bs}(Y)$.

Tvrzení (b) nyní plyne z (a).

□

TVRZENÍ 115. *Nechť X, Y, Z jsou topologické prostory. Nechť $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$ jsou borlovská zobrazení. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každou $B \in \mathrm{Bs}(Y)$ platí $f^{-1}(B) \in \mathrm{Bs}(X)$.

(b) Zobrazení $g \circ f$ je borelovské.

DŮKAZ. (a) Označme
$$\mathcal{B} = \{B \subset Y;\ f^{-1}(B) \in \mathrm{Bs}(X)\}.$$
Pak $\mathcal{B}$ je σ-algebra obsahující otevřené množiny prostoru Y, a tedy $\mathrm{Bs}(Y) \subset \mathcal{B}$.

Tvrzení (b) okamžitě plyne z (a).

□

6.3. Aproximace spojitými funkcemi

VĚTA 116 (Luzin). *Nechť X je topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je konečná (nezáporná) míra na $\mathcal{S}$, která splňuje*
$$\mu(A) = \inf\{\mu(U);\ U \supset A \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(F);\ F \subset A \text{ uzavřená}\}, \quad A \in \mathcal{S}. \tag{13}$$
Nechť Y je topologický prostor se spočetnou bází. Pak pro každou μ-měřitelnou funkci $f : X \to Y$ a $\varepsilon > 0$ existuje $F \subset X$ uzavřená taková, že $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ a $f \restriction_F$ je spojitá.

DŮKAZ. Nechť $\{V_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je báze otevřených množin v Y. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme z regularity μ uzavřenou množinu F_n a otevřenou množinu U_n v X takové, že
$$F_n \subset f^{-1}(V_n) \cap U_n \quad \text{a} \quad \mu(U_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$
Pak je $F = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n \setminus F_n)$ uzavřená a platí $\mu(X \setminus F) < \frac{\varepsilon}{2}$. Konečně je $f \restriction_F$ spojitá, protože pro $n \in \mathbb{N}$ je množina
$$(f \restriction_F)^{-1}(V_n) = f^{-1}(V_n) \cap F = U_n \cap F$$
otevřená v F.

□

DŮSLEDEK 117. *Nechť X je normální topologický prostor, $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X obsahující borelovské množiny a μ je σ-konečná míra na $\mathcal{S}$ splňující* (13). *Pak platí následující tvrzení.*

(a) Je-li Y topologický prostor se spočetnou bází a $f : X \to Y$ je μ-měřitelná funkce, existuje borelovská funkce $g : X \to Y$ rovnající se f μ-skoro všude.
(b) Nechť $f : X \to \mathbb{K}$ je μ-měřitelná. Pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých funkcí na X taková, že $\|f_n\|_\infty \le \|f\|_\infty$ a $f_n \to f$ μ-skoro všude.
(c) Nechť $1 \le p < \infty$. Pak $C_b(X)$ je hustý v $L_p(X, \mathcal{S}, \mu)$.

DŮKAZ. (a) Pišme $X = \bigcup X_n$, kde $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$ jsou konečné míry. Díky (13) μ můžeme předpokládat, že X_n jsou borelovské. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ uvažujme měřitelný prostor $(X_n, \mathcal{S}_n, \mu_n)$, kde $\mathcal{S}_n = \{A \cap X_n;\ A \in \mathcal{S}\}$ a $\mu_n(B) = \mu(A \cap X_n)$ pro libovolnou množinu $A \in \mathcal{S}$ splňující $A \cap X_n = B$. Pak μ_n splňuje předpoklady Věty 23, a tedy existuje množina $H_n \subset X_n$ taková, že H_n je uzavřená v X_n, $f \restriction_{H_n}$ je spojitá a $\mu_n(X_n \setminus H_n) < 2^{-n-1}$. Dále nalezneme $V_n \subset X_n$ uzavřenou v X splňující $\mu(X_n \setminus V_n) < 2^{-n-1}$. Pak $F_n = H_n \cap V_n$ je podmnožina X_n, která je uzavřená v X a $f \restriction_{F_n}$ je spojitá. Nakonec si povšimněme, že
$$\mu(X_n \setminus F_n) \le \mu(X_n \setminus H_n) + \mu(X_n \setminus V_n) = \mu_n(X_n \setminus H_n) + \mu(X_n \setminus V_n) < 2 \cdot 2^{-n-1} = 2^{-n}.$$

Tedy jsme zkonstruovali posloupnost $\{F_n\}$ uzavřených množin v X takovou, že $F_n \subset X_n$, $f \restriction_{F_n}$ je spojitá a $\mu(X_n \setminus F_n) < 2^{-n}$.

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$. Zvolíme $y_0 \in Y$. Pak je funkce
$$g = \begin{cases} f & \text{na } \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \\ y_0 & \text{jinak,} \end{cases}$$
borelovská a rovna f μ-skoro všude. Označíme-li totiž $A = \{x \in X;\ f(x) = g(x)\}$, pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme
$$\mu(X_k \setminus A) \le \mu(X_k \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j) \le \mu(X_n \setminus F_n) < 2^{-n}, \quad n \ge k.$$

Tedy $\mu(X_k \setminus A) = 0$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Protože $\chi_{X_k \setminus A} \nearrow \chi_{X \setminus A}$, díky Leviho větě dostáváme

$$\mu(X \setminus A) = \int \chi_{X \setminus A} \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{k\to\infty} \chi_{X_k \setminus A} \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \mu(X_k \setminus A) = 0.$$

(b) Nechť X_n a F_n jsou jako výše. Díky Tietzově větě najdeme spojité funkce $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ splňující $f_n = f\restriction_{F_n}$ a $\|f_n\|_\infty \le \|f\restriction_{F_n}\|_\infty \le \|f\|_\infty$. Pak $f_n \to f$ na $\bigcup_{n=1}^\infty F_n$, tedy μ-skoro všude.

(c) Nechť $f \in L_p(\mu)$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Položme

$$A = \{x \in X;\ |f(x)| > 0\} \quad \text{a} \quad A_n = \{x \in X;\ \frac{1}{n} \le |f(x)| \le n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\chi_{A_n} \nearrow \chi_A$, a tedy

$$\int_{A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \to \int_A |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu.$$

Lze tak nalézt $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_{X\setminus A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Podobně nalezneme uzavřenou množinu $H \subset A_n$ a otevřenou množinu $U \supset A_n$ tak, aby $\int_{U\setminus H} |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$ a $\mu(U \setminus H) < \frac{\varepsilon}{n^p}$. Jelikož $\mu(H) < \infty$, dle Luzinovy věty 116 existuje $F \subset H$ uzavřená množina taková, že $\mu(H \setminus F) < \frac{\varepsilon}{n^p}$ a $f\restriction_F$ je spojitá. Nechť $g \in C_c(X)$ splňuje $g = f$ na F, $\operatorname{supp} g \subset U$ a $\|g\|_\infty \le \|f\restriction_F\|_\infty \le n$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\int_X |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_{X\setminus U} |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{U\setminus F} |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_F |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu \\
&\le \int_{X\setminus U} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + 2^{p-1} \left(\int_{U\setminus F} |g|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{U\setminus F} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right) \\
&\le \int_{X\setminus A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + 2^{p-1} \left(n^p \mu(U \setminus F) + \int_{U\setminus H} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{H\setminus F} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \right) \\
&\le \varepsilon + 2^{p-1} \left(n^p (\mu(U \setminus H) + \mu(H \setminus F)) + \varepsilon + n^p \mu(H \setminus F) \right) \\
&= \varepsilon (1 + 4 \cdot 2^{p-1}).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen.

□

6.4. Radonovy míry

VĚTA 118 (Rieszova o reprezentaci funkcionálů na $C_c(X)$). *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor a $\Lambda \colon C_c(X) \to \mathbb{C}$ je lineární forma splňující $Tf \ge 0$ pro každou $f \in C_c(X)$ nezápornou. Pak existuje σ-algebra Σ a nezáporná míra μ na (X, Σ) s následujícími vlastnostmi.*

(a) Platí $\mathrm{Bs}(X) \subset \Sigma$.

(b) Pro každou kompaktní množinu $K \subset X$ platí $\mu(K) < \infty$.

(c) Pro každou $A \in \Sigma$ platí

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U);\ A \subset U,\ U \text{ otevřená}\}. \tag{14}$$

(d) Je-li A otevřená nebo $A \in \Sigma$ splňuje $\mu(A) < \infty$, platí

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K);\ K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}. \tag{15}$$

(e) Míra μ je úplná, tj. $A \in \Sigma$, pokud existuje $B \in \Sigma$ splňující $A \subset B$ a $\mu(B) = 0$.

(f) Pro každou $f \in C_c(X)$ platí $\Lambda f = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.

(g) Míra μ je vlastnostmi (a)–(f) určena jednoznačně.

DŮKAZ. Důkaz je veden následujícím způsobem. Pomocí funkcionálu Λ zkonstruujeme vhodnou vnější míru, na kterou použijemm Carathódoryovu konstrukci. O vzniklé míře pak dokážeme, že splňuje požadované podmínky.

Krok 1. Položme

$$\mu'(U) = \sup\{\Lambda f;\ f \in C_c(X), 0 \le f \le \chi_U, \operatorname{supp} f \subset U\}, \quad U \subset X \text{ otevřená}.$$

Pak zjevně platí

- $\mu'(\emptyset) = 0$,
- $\mu'(U) \le \mu'(V)$, jsou-li $U, V \subset X$ otevřené a $U \subset V$.

Nyní definujeme funkci μ^* na podmnožinách X jako

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu'(U);\ U \supset E \text{ otevřená}\}, \quad E \subset X.$$

Pak μ^* je monotónní subaditivní množinová funkce definovaná na všech podmnožinách X, která se rovná μ' na otevřených množinách X.

Monotonie je zřejmá. Abychom ukázali subaditivitu, nechť $E_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, jsou dány. Položme $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\mu^*(E_n) < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Vezměme $U_n \supset E_n$ splňující $\mu'(U_n) \le \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Položme $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Nechť $f \in C_c(X)$ splňuje $0 \le f \le \chi_U$, $\operatorname{supp} f \subset U$ a $\mu'(U) < \Lambda(f) + \varepsilon$. Položíme-li $L = \operatorname{supp} f$, dostaneme kompaktní podmnožinu U. Existuje tedy index $m \in \mathbb{N}$ takový, že $L \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i$. Dle Lemmatu 87 existují funkce $g_1, \dots, g_m \in C_c(X)$ splňující

$$0 \le g_i \le \chi_{U_i},\ \operatorname{supp} g_i \subset U_i, \quad i = 1, \dots, m, \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{m} g_i = 1 \text{ na } L.$$

Položme $h_i = f g_i$, $i = 1, \dots, m$. Pak

$$0 \le h_i \le \chi_{U_i}, supph_i \subset U_i, \quad i = 1, \dots, m, \qquad \text{a} \qquad f = \sum_{i=1}^{m} h_i.$$

Tedy

$$\Lambda(f) = \sum_{i=1}^{m} \Lambda(h_i) \le \sum_{i=1}^{m} \mu'(U_i) \le \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\mu^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\Big) = 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Jelikož $f \in C_c(X)$ splňující $0 \le f \le \chi_U$ a $\operatorname{supp} f \subset U$ byla libovolná, platí $\mu'(U) \le 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$. Z definice μ' plyne $\mu^*(E) \le 2\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$. Tedy μ^* je vnější míra na X.

Krok 2. Ukažme, že pro disjunktní otevřené množiny U, V platí $\mu^*(U \cup V) = \mu^*(U) + \mu^*(V)$.

Je třeba ukázat nerovnost„$\ge$“. Pokud $\mu^*(U \cup V) = \infty$, nerovnost platí triviálně. Předpokládejme tedy konečnost čísla $\mu^*(U \cup V)$. Pak také $\mu^*(U)$ i $\mu^*(V)$ jsou konečná.

Nechť $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme $f, g \in C_c(X)$ spojité funkce splňující $0 \le f \le \chi_U$, $\operatorname{supp} f \subset U$ a $0 \le g \le \chi_V$, $\operatorname{supp} g \subset V$ takové, že $\Lambda(f) \ge \mu^*(U) - \varepsilon$ a $\Lambda(g) \ge \mu^*(V) - \varepsilon$. Pak $0 \le f + g \le \chi_{U \cup V}$ a $\operatorname{supp}(f + g) \subset U \cup V$, a tedy

$$\mu^*(U \cup V) \ge \Lambda(f + g) = \Lambda f + \Lambda g \ge \mu^*(U) + \mu^*(V) - 2\varepsilon.$$

Tedy $\mu^*(U \cup V) \ge \mu^*(U) + \mu^*(V)$. Tím je důkaz hotov.

Krok 3. Označme

$$\Sigma = \{E \subset X;\ \mu^*(T) = \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \setminus E), T \subset X\}.$$

Dle Caratheódoryho konstrukce je pak Σ σ-algebra a $\mu = \mu^* \restriction_{\Sigma}$ je úplná míra.

Je třeba ukázat, že Σ obsahuje všechny borelovské podmnožiny X. K tomu stačí ověřit, že Σ obsahuje všechny otevřené množiny, tj. že platí

$$\forall U \subset X \text{ otevřená } \forall T \subset X \colon \mu^*(T) = \mu^*(T \cap U) + \mu^*(T \setminus U). \tag{16}$$

Mějme tedy otevřenou neprázdnou množinu $U \subset X$ a testovací množinu $T \subset K$. Díky σ-aditivitě μ^* stačí ukázat nerovnost„$\ge$“. Lze tedy předpokládat, že $\mu^*(T) < \infty$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme $W \supset T$ otevřenou splňující $\mu^*(W) \le \mu^*(T) + \varepsilon$. Z definice nalezneme $f \in C_c(X)$ takovou, že $0 \le f \le \chi_{W \cap U}$, $\operatorname{supp} f \subset W \cap U$ a $\Lambda f > \mu^*(W \cap U) - \varepsilon$. Protože $\operatorname{supp} f \subset W \cap U$, existuje otevřená množina V splňující

$$\operatorname{supp} f \subset V \subset \overline{V} \subset W \cap U.$$

Pak
$$\mu^*(V) \geq \Lambda f \geq \mu^*(W \cap U) - \varepsilon.$$
Pak V a $W \setminus \overline{V}$ jsou disjunktní otevřené množiny. Použitím Lemmatu **??**(c) tedy dostáváme
$$\begin{aligned}\mu^*(T) &\geq \mu^*(W) - \varepsilon \geq \mu^*(V \cup (W \setminus \overline{V})) - \varepsilon = \mu^*(V) + \mu^*(W \setminus \overline{V}) - \varepsilon \\ &\geq \mu^*(W \cap U) + \mu^*(W \setminus U) - 2\varepsilon \geq \mu^*(T \cap U) + \mu^*(T \setminus U) - 2\varepsilon.\end{aligned}$$
Tedy $\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap U) + \mu^*(T \setminus U)$ pro každou $T \subset K$. Protože obrácená nerovnost plyne ze subaditivity μ^*, platí (16).

Krok 4. Ověříme nyní vlastnosti (a)–(e). Vlastnost (a) plyne z předchozího.

Nechť $K \subset X$ je kompaktní. Pro každé $x \in K$ nalezneme relativně kompaktní, otevřenou množinu U_x obsahující x. Vybereme konečně mnoho bodů $x_1, \dots, x_n \in K$ tak, že $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Pak U je otevřená množina s kompaktním uzávěrem. Sestrojíme-li tedy funkci $f \in C_c(X)$ splňující $\chi_K \leq f \leq \chi_U$ a $\operatorname{supp} f \subset U$, máme
$$\mu(K) \leq \int_X f \, d\mu = \Lambda f < \infty.$$
Vlastnost (b) proto platí.

Jelikož pro každou $A \in \Sigma$ platí
$$\mu(A) = \mu^*(A) = \inf\{\mu'(U);\ U \supset E \text{ otevřená}\} = \inf\{\mu(U);\ U \supset E \text{ otevřená}\},$$
platí (c).

Je-li A otevřená, platí $\mu(A) = \mu'(A)$. Nechť $a \geq 0$ splňující $\mu(A) > a$ je dáno. Nalezneme $f \in C_c(X)$ takovou, že $\Lambda f > a$, $\operatorname{supp} f \subset U$ a $0 \leq f \leq \chi_U$. Sestrojíme $g \in C_c(X)$ splňující $\chi_{\operatorname{supp} f} \leq g \leq \chi_U$. Pak pro $K = \operatorname{supp} f$ máme
$$\mu(K) \geq \int_X g \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu > a.$$
Tedy (d) platí pro A otevřenou.

Nechť $A \in \Sigma$ má konečnou míru. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $U \subset X$ otevřenou, která obsahuje A a má konečnou míru. Dále zvolíme kompakt $L \subset U$ splňující $\mu(U \setminus L) < \varepsilon$. Konečně nechť V je otevřená nadmnožina $U \setminus A$ splňující $\mu(V \setminus (U \setminus A)) < \varepsilon$. Položme $K = L \cap (X \setminus V)$. Pak K je kompaktní množina a máme
$$A \setminus K \subset (U \setminus L) \cup (A \cap V) \subset (U \setminus L) \cup (V \setminus (U \setminus A)).$$
Tedy $\mu(A \setminus K) < 2\varepsilon$ a vlastnost (d) je ověřena. Úplnost μ, jak již bylo zmíněno, plyne přímo z Caratheódoryovy konstrukce.

Krok 5. Ukažme, že $\Lambda f = \int_X f \, d\mu$ pro každou $f \in C_c(X)$. Zjevně stačí dokázat tuto rovnost pro každou reálnou spojitou funkci, což díky linearitě znamená ověřit nerovnost $\Lambda f \leq \int f \, d\mu$ pro každou reálnou $f \in C_c(X)$. Je-li reálná $f \in C_c(X)$ dána, zvolme $a \in (0, +\infty)$ tak, aby $\operatorname{Rng} f \subset [-a, a]$. Zvolme $\varepsilon > 0$ a body $y_0 < -a < y_1 < \cdots < y_{n-1} \leq a < y_n$, kde $y_i - y_{i-1} < \varepsilon$ pro $i = 1, \dots, n$. Pak množiny
$$E_i = \{x \in \operatorname{supp} f;\ y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}, \quad i = 1, \dots, n,$$
tvoří borelovský rozklad $\operatorname{supp} f$ pomocí množin konečné míry. Pro $i = 1, \dots, n$, nechť U_i jsou otevřené množiny splňující
$$\mu(U_i) \leq \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{a} \quad E_i \subset U_i \subset \{x \in \operatorname{supp} f;\ f(x) < y_i + \varepsilon\}$$
(takové množiny existují díky (d) a spojitosti f). Systém $\{U_1, \dots, U_n\}$ tvoří otevřené pokrytí $\operatorname{supp} f$, a tedy z Lemmatu 87 existují funkce $g_1, \dots, g_n \in C_c(X)$ splňující
$$0 \leq g_i \leq \chi_{U_i}, supp g_i \subset U_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{a} \quad \sum_{i=1}^n g_i = 1.$$

Pak máme $g_i f \le (y_i+\varepsilon)g_i$ a $(y_i-\varepsilon)\chi_{E_i} \le f\chi_{E_i}$, $i=1,\dots,n$, a tedy

$$\begin{aligned}
\Lambda f &= \Lambda(\sum_{i=1}^n g_i f) = \sum_{i=1}^n \Lambda(g_i f) \le \sum_{i=1}^n (y_i+\varepsilon)\Lambda g_i \\
&\le \sum_{i=1}^n (y_i+\varepsilon)\mu(U_i) \le \sum_{i=1}^n (y_i+\varepsilon)(\mu(E_i)+\frac{\varepsilon}{n}) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i+\varepsilon)\mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (y_i+\varepsilon) \\
&= \sum_{i=1}^n (y_i-\varepsilon)\mu(E_i) + 2\varepsilon\sum_{i=1}^n \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}\sum_{i=1}^n (y_i+\varepsilon) \\
&\le \sum_{i=1}^n \int_{E_i} (y_i-\varepsilon)\,\mathrm{d}\mu + 2\varepsilon\mu(\operatorname{supp} f) + \frac{\varepsilon}{n} n(a+2\varepsilon) \\
&\le \sum_{i=1}^n \int_{E_i} f\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon(2\mu(\operatorname{supp} f) + a + 2\varepsilon) \\
&= \int_K f\,\mathrm{d}\mu + \varepsilon(2\mu(\operatorname{supp} f) + a + 2\varepsilon).
\end{aligned}$$

Tím je důkaz třetího kroku dokončen.

Krok 6. Nechť μ, ν jsou dvě míry splňující $\int_K f\,\mathrm{d}\mu = \Lambda f = \int_K f\,\mathrm{d}\nu$ pro každou $f \in C_c(X)$. Nechť $K \subset X$ je kompaktní. Pro $\varepsilon > 0$ nalezneme otevřenou množinu U splňující $\mu(U) < \mu(K)+\varepsilon$. Nechť $f \in C_c(X)$ splňuje $\chi_K \le f \le \chi_U$. Pak

$$\nu(K) \le \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu \le \mu(U) \le \mu(K)+\varepsilon$$

Tedy $\nu(K) \le \mu(K)$ pro každý kompakt K. Prohozením rolí μ a ν dostaneme rovnost μ a ν na kompaktních množinách, což díky vlastnostem (c) a (d) znamená $\mu = \nu$.

□

VĚTA 119. *Nechť X je lokálně kompaktní, σ-kompaktní topologický prostor. Nechť Σ a μ mají vlastnosti popsané ve Větě 118. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Pro každou $A \in \Sigma$ a $\varepsilon > 0$ existuje uzavřená množina F a otevřená množina U taková, že $F \subset A \subset U$ a $\mu(U \setminus F) < \varepsilon$.

(b) Pro každou $A \in \mathrm{Bs}(X)$ platí

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U);\ A \subset U,\ U \text{ otevřená}\} = \sup\{\mu(K);\ K \subset A,\ K \text{ kompakt}\}.$$

VĚTA 120 (Hustota $C_c(X)$). *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor a μ je nezáporná míra splňující vlastnosti (a)–(e) z Věty 118. Nechť $1 \le p < \infty$. Pak $C_c(X)$ je hustý podprostor $L_p(\mu)$.*

DŮKAZ. Symbolem Σ označme systém všech μ-měřitelných množin. Nechť $f \in L_p(\mu)$ je nenulová a $\varepsilon > 0$ je dáno. Položme

$$A = \{x \in X;\ |f(x)| > 0\} \quad \text{a} \quad A_n = \{x \in X;\ \frac{1}{n} \le |f(x)| \le n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\chi_{A_n} \nearrow \chi_A$, a tedy

$$\int_{A_n} |f|^p\,\mathrm{d}\mu \to \int_A |f|^p\,\mathrm{d}\mu = \int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu.$$

Lze tak nalézt $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\int_{X\setminus A_n} |f|^p\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.

Podobně nalezneme kompakt $K \subset A_n$ a otevřenou množinu $U \supset A_n$ tak, aby $\int_{U\setminus K} |f|^p\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$ a $\mu(U \setminus K) < \frac{\varepsilon}{n^p}$. Jelikož $\mu(K) < \infty$, dle Luzinovy věty 116 existuje $F \subset K$ uzavřená množina taková, že $\mu(K \setminus F) < \frac{\varepsilon}{n^p}$ a $f\restriction_F$ je spojitá. Nechť $g \in C_c(X)$ splňuje $g = f$ na F, $\operatorname{supp} g \subset U$ a $\|g\|_\infty \leq \|f\restriction_F\|_\infty \leq n$. Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\int_X |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_{X\setminus U} |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{U\setminus F} |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_F |g-f|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_{X\setminus U} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + 2^{p-1}\left(\int_{U\setminus F} |g|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{U\setminus F} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right) \\ &\leq \int_{X\setminus A_n} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + 2^{p-1}\left(n^p\mu(U\setminus F) + \int_{U\setminus K} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{K\setminus F} |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right) \\ &\leq \varepsilon + 2^{p-1}\left(n^p(\mu(U\setminus K) + \mu(K\setminus F)) + \varepsilon + n^p\mu(K\setminus F)\right) \\ &= \varepsilon(1 + 4\cdot 2^{p-1}).\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen.

□

VĚTA 121 (Rieszova o reprezentaci funkcionálů na $C_0(X)$). *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor a $T \in (C_0(X))^*$. Pak existuje σ-algebra Σ a komplexní míra μ na (X, Σ) taková, že*

(a) $|\mu|$ a Σ splňují (a)–(e) z Věty 118.
(b) Pro každou $f \in C_0(X)$ platí $Tf = \int_X f \,\mathrm{d}\mu$.
(c) Platí $\|T\| = \|\mu\|$.
(d) Míra μ je vlastnostmi (a), (b) určena jednoznačně.

DŮKAZ. *Krok 1.* Je-li $\mu \in M(K)$, máme

$$|\varphi_\mu(f)| \leq |\int_k f \,\mathrm{d}\mu| \leq \int_K |f| \,\mathrm{d}|\mu| \leq |\mu|(K)\|f\|, \quad f \in C(K).$$

Tedy $\|\varphi_\mu\| \leq |\mu|(K) = \|\mu\|$. Na druhou stranu, existuje borelovská funkce h splňující $|h| = 1$ a $d\mu = h d|\mu|$. Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost spojitých funkcí nepřesahujících v normě 1 taková, že $f_n \to \overline{h}$ $|\mu|$-skoro všude (Důsledek 24(b)). Pak

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_K \overline{h}h \,\mathrm{d}|\mu| = \int_K 1 \,\mathrm{d}|\mu| = |\mu|(K) = \|\mu\|.$$

Tedy $\|\varphi_\mu\| \geq \|\mu\|$.

Krok 2. Ukažme, že I je na. Nechť $\Phi \in (C(X))^*$ o normě 1 je dáno. Nechť $C_c^+(X)$ a $C_c(X, \mathbb{R})$ značí nezáporné, respektive reálné funkce z $C_c(X)$. Položme

$$\Lambda f = \sup\{|\Phi h|;\ h \in C_c(X), |h| \leq f\}, \quad f \in C_c^+(X).$$

Pak pro $f \in C_c^+(X)$ platí

$$\Lambda f = \sup\{|\Phi h|;\ h \in C_c(X), |h| \leq f\} \leq \sup\{\|\Phi\|\|h\|;\ h \in C_c(X), |h| \leq f\} \leq \|\Phi\|\|f\| \leq \|f\|,$$

a tedy je Λ dobře definované zobrazení. Dále platí

$$\Lambda(C_c^+(K)) \subset [0, +\infty), \quad \Lambda f_1 \leq \Lambda f_2 \text{ pro } f_1 \leq f_2 \text{ v } C_c^+(K), \quad \Lambda(cf) = c\Lambda f,\ c \geq 0,\ f \in C_c + (K).$$

Ukážeme, že

$$\Lambda(f+g) = \Lambda f + \Lambda g, \quad f, g \in C_c^+(K). \tag{17}$$

Pro $\varepsilon > 0$ najdeme $h_1, h_2 \in C_c(X)$ takové, že $|h_1| \leq f$, $|h_2| \leq g$ a

$$\Lambda f \leq |\Phi(h_1)| + \varepsilon \quad \text{a} \quad \Lambda g \leq |\Phi(h_2)| + \varepsilon.$$

Nechť α_1, α_2 jsou komplexní jednotky splňující $\alpha_i\Phi(h_i) = |\Phi(h_i)|$, $i = 1, 2$. Pak

$$\begin{aligned}\Lambda f + \Lambda g &\leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + 2\varepsilon = \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\ &\leq \Lambda(|h_1| + |h_2|) + 2\varepsilon \leq \Lambda(f+g) + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Obráceně, nechť $h \in C_c(X)$ splňuje $|h| \le f + g$. Položme

$$V = \{x \in K;\ f(x) + g(x) > 0\}$$

a

$$h_1(x) = \begin{cases} \frac{f(x)h(x)}{f(x)+g(x)}, & x \in V, \\ 0, & x \in X \setminus V, \end{cases} \qquad h_2(x) = \begin{cases} \frac{g(x)h(x)}{f(x)+g(x)}, & x \in V, \\ 0, & x \in X \setminus V, \end{cases}$$

Funkce h_i jsou zjevně spojité v bodech množiny V, v bodech doplňku se spojitost odvodí díky odhadu $|h_i| \le |h|$ a vlastnosti $|h| = 0$ na $X \setminus V$. Kelikož je V relativně kompaktní množina, máme $h_i \in C_c(X)$, $i = 1, 2$. Protože $h_1 + h_2 = h$ a $|h_1| \le f$, $|h_2| \le g$, máme

$$|\Phi(h)| = |\Phi(h_1) + \Phi(h_2)| \le |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \le \Lambda f + \Lambda g.$$

Rovnost (17) je tedy ověřena.

Zobrazení Λ lze nyní lineárně rozšířit na $C_c(X, \mathbb{R})$ pomocí předpisu

$$\Lambda f = \Lambda f_1 - \Lambda f_2, \quad f = f_1 - f_2, f_1, f_2 \in C_+(K), f \in C_{\mathbb{R}}(K).$$

Poznamenejme, že tato definice je korektní, jelikož máme-li $f = f_1 - f_2 = g_1 - g_2$, kde $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C_c^+(X)$, pak

$$f_1 + g_2 = g_1 + f_2,$$

a tedy $\Lambda(f_1) - \Lambda(f_2) = \Lambda(g_1) - \Lambda(g_2)$.

Dále dodefinujeme Λ na $C_c(X)$ pomocí vzorce

$$\Lambda f = \Lambda(\operatorname{Re} f) + i\Lambda(\operatorname{Im} f), \quad f \in C_c(X).$$

Tím jsme obdrželi nezáporný funkcionál Λ na $C_c(X)$ s vlastností

$$|\Phi(f)| \le \Lambda(|f|), \quad f \in C_c(X).$$

Dle Věty **??** existuje nezáporná míra λ s vlastnostmi (a)–(f) Z Věty 118. Pak platí

$$\lambda(X) = \|\Phi\|. \tag{18}$$

Vskutku, naleznenem kompakty K_n, $n \in \mathbb{N}$, splňující $\lambda(K_n) \nearrow \lambda(X)$ a zvolíme $f_n \in C_c(X)$ takové, že $\chi_K \le f \le 1$. Pak

$$\lambda(X) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \Lambda(f_n) \le \|\Phi\|.$$

Na druhou stranu pro $f \in C_0(X)$ o normě 1 platí

$$|\Phi(f)| \le \Lambda(|f|) = \int_X |f| \, d\lambda \le \lambda(X).$$

Protože

$$|\Phi(f)| \le \Lambda(|f|) = \int_X |f| \, d\lambda = \|f\|_{L_1(\lambda)} \lambda(X) = \|f\|_{L_1(\lambda)} \|\Phi\|, \quad f \in C_c(X),$$

a $C_c(X)$ je hustý podprostor $L_1(\lambda)$ (Důsledek 24(c)), lze Φ chápat jako prvek prostoru $(L_1(\lambda))^*$ (viz Větu 1.62). Tedy dle Věty 2.15(d) existuje $g \in B_{L_\infty(\lambda)}$ taková, že

$$\Phi(f) = \int_X fg \, d\lambda, \quad f \in C_c(X).$$

Nechť Σ značí σ-algebru všech λ-měřitelných množin. Položme

$$\mu(A) = \int_A g \, d\lambda, \quad A \in \Sigma.$$

Ověříme, že se jedná o požadovaný prvek $M(X)$ reprezentující Φ.

Vlastnosti (a), (e) a (f) plynou přímo z definice.

Dále dle Věty 107 platí

$$|\mu|(A) = \int_A |g| \, d\lambda, \quad A \in \Sigma.$$

Tedy pro $K \subset X$ kompaktní platí

$$|\mu|(K) = \int_K |g|\,\mathrm{d}\lambda \le \lambda(K) < \infty.$$

Tedy (b) platí.

Je-li $A \in \Sigma$ dána, nechť $\{U_n\}$ je nereostouc posloupnost otevřených nadmnožin A splňující $\lambda(U_n) \searrow \lambda(A)$. Pak $\chi_{U_n}|g| \to \chi_A|g|$ λ-skoro všude, a z Lebesgueovy věty tak máme

$$|\mu|(A) = \int_A |g|\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{U_n} |g|\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} |\mu|(K_n).$$

Tedy (c) platí.

Je-li $A \in \Sigma$, nechť $\{K_n\}$ je neklesající posloupnost kompaktů v A splňující $\lambda(K_n) \nearrow \lambda(A)$. Pak jako výše z Lebesgueovy věty máme

$$|\mu|(A) = \int_A |g|\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} |g|\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} |\mu|(K_n).$$

Tedy $|\mu|$ splňuje (d) platí.

Nechť nyní $f \in C_0(X)$ je libovolná. Pak existuje posloupnost $\{f_n\}$ v $C_c(X)$ nepřevyšující v normě $\|f\|$ taková, že $f_n \rightrightarrows f$. Pak

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi(f_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu.$$

Tedy μ reprezentuje Φ a důkaz surjektivity I je dokončen.

Krok 3. Ukážeme, že míra μ je jednozančně určena. Předpokládejme, že též ν splňuje (a)–(c) z tvrzení. Symbolem Υ označme σ-algebru všech ν-měřitelných množine.

Nechť $A \in \mathrm{Bs}(X)$ je libovolná. Nalezneme neklesající posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ a nerostoucí posloupnost otevřených množin $\{U_n\}$ takové, že $K_n \subset A \subset U_n$, $n \in \mathbb{N}$, a

$$|\mu|(U_n \setminus K_n) + |\nu|(U_n \setminus K_n) \to 0.$$

Nalezneme funkce $f_n \in C_c(X)$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\chi_{K_n} \le f \le \chi_{U_n}$. Pak $f_n \to \chi_A$ skoro všude vzhledem k míře $|\mu|$ i $|\nu|$. Tedy

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,\mathrm{d}\nu = \nu(A).$$

Tedy $\mu = \nu$ na borelovských podmnožinách X.

Nechť nyní $A \in \Sigma$ je libovolná. Pak existují posloupnost $\{B_n\}$ a $\{C_n\}$ borelovských množin v X takové, že $B_n \subset A \subset C_n$, $n \in \mathbb{N}$, $|\mu|C_n \setminus B_n \searrow 0$. Položme $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ a $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. Pak

$$A \setminus B \subset C \setminus B$$

a $|\nu|(C \setminus B) = |\mu|(C \setminus B) = 0$. Tedy $A \setminus B$ je podmnožina množiny $|\nu|$-míry 0, takž je obsažena v Υ. Proto i $A = B \cup (A \setminus B)$ je v Υ a máme

$$\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B) = \nu(B) + \nu(A \setminus B) = \nu(A).$$

Tedy $\Sigma \subset \Upsilon$ a $\mu = \nu$ na Σ.

Prohozením rolí μ a ν dostaneme požadovanou rovnost $\Sigma = \Upsilon$ a $\mu = \nu$.

□

DEFINICE 122. Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. O míře μ na X řekneme, že je Radonova, pokud je definována na σ-algebře Σ takovým způsobem, že $|\mu|$ a Σ splňují (a)-(e) z Věty 118. Jsou-li μ, ν dvě Radonovy míry, položíme

$$T_{\mu+\nu} f = \int_X f\,\mathrm{d}\mu + \int_X f\,\mathrm{d}\nu, \quad f \in C_0(X).$$

Dle Věty 121 existuje právě jedna míra $\lambda \in M(X)$ splňující

$$\int_X f \,\mathrm{d}\lambda = T_{\mu+\nu}, \quad f \in C_0(X).$$

Tuto míru označíme jako $\mu + \nu$. Podobně budeme chápat míru $c\mu$, kde $c \in \mathbb{K}$ a $\mu \in M(X)$.

Dále na $M(X)$ uvažujme normu danou totální variací, tj. $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

VĚTA 123. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Pak $M(X)$ je Banachův prostor, který je pomocí zobrazení $\mu \mapsto T_\mu$, kde*

$$T_\mu(f) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu, \quad f \in C_0(X),$$

izometricky izomorfní prostoru $(C_0(X))^*$.

Dále pro $\mu, \nu \in M(X)$ a $a, b \in \mathbb{K}$ platí

$$(a\mu + b\nu)(A) = a\mu(A) + b\nu(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(X).$$

DŮKAZ. Vzhledem k identifikaci $M(X)$ s $(C_0(X))^*$ je $M(X)$ jakožto duální prostor úplný.

Nechť $\mu, \nu \in M(X)$ jsou dány. Definujeme komplexní míru λ na $\mathrm{Bs}(X)$ jako

$$\lambda(A) = \mu(A) + \nu(A), \quad A \in \mathrm{Bs}(X).$$

Pak $|\lambda|$ splňuje (b),(c),(d) Věty 118. Ihned totiž vidíme, že $|\lambda| \le |\mu| + |\nu|$, takže z platnosti těchto vlastností pro míry $|\mu|$ a $|\nu|$ snadno odvodíme jejich splnění i pro míru $|\lambda|$.

Dále platí, že $\int_X f \,\mathrm{d}\lambda = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X f \,\mathrm{d}\nu$ pro každou $f \in C_0(X)$. Pro jednoduchou borelovskou funkci tvaru $f = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$ totiž platí

$$\int_X f \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^n c_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^n c_k(\mu(A_k) + \nu(A_k)) = \sum_{k=1}^n c_k \mu(A_k) + \sum_{k=1}^n c_k \nu(A_k) = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X f \,\mathrm{d}\nu.$$

Jelikož lze každou funkci $f \in C_0(X)$ stejnoměrně aproximovat takovýmito funkcemi, platí požadovaná rovnost.

Nechť $\omega \in M(X)$ je dána definicí $\mu + \nu$, tj. ω je ten jednoznačně určený prvek $M(X)$ splňující

$$\int_X f \,\mathrm{d}\omega = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X f \,\mathrm{d}\nu, \quad f \in C_0(X).$$

Chceme ukázat, že $\omega = \lambda$ na $\mathrm{Bs}(X)$.

Nechť nejprve $U \subset X$ je otevřená a $K \subset X$ je kompaktní splňující $K \subset U$. Nechť $f \in C_c(X)$ splňuje $\mathrm{Rng}\, f \subset [0,1]$, $f = 1$ na K a $f = 0$ na $X \setminus U$. Pak

$$|\omega(U) - \int_X f \,\mathrm{d}\omega| = |\int_U (1-f) \,\mathrm{d}\omega| \le \int_{U \setminus K} |1-f| \,\mathrm{d}|\omega| \le |\omega|(U \setminus K). \tag{19}$$

Analogickou nerovnost odovodíme i pro λ.

Nechť nyní $A \in \mathrm{Bs}(X)$ je libovolná. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme kompakt K a otevřenou množinu U splňující $K \subset A \subset U$ a $|\omega|(U \setminus K) + |\lambda|(U \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Zvolme $f \in C_c(X)$ jako výše. Pak díky (19) máme

$$\begin{aligned}
|\omega(A) - \lambda(A)| &= |\omega(U) - \omega(U \setminus A) - \lambda(U) + \lambda(U \setminus A)| \\
&\le |\omega(U) - \int_X f \,\mathrm{d}\omega| + |\omega(U \setminus A)| + |\int_X f \,\mathrm{d}\omega - \int_X f \,\mathrm{d}\lambda| + |\int_X f \,\mathrm{d}\lambda - \lambda(U)| + |\lambda(U \setminus A)| \\
&\le |\omega|(U \setminus K) + |\omega|(U \setminus A) + |\lambda|(U \setminus K) + |\lambda|(U \setminus A) \\
&\le 2(|\omega|(U \setminus K) + |\lambda|(U \setminus K)) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\lambda(A) = \omega(A)$, což znamená

$$\lambda(A) = \omega(A) = (\mu + \nu)(A).$$

Důkaz rovnosti $(c\mu)(A) = c\mu(A)$ pro $A \in \mathrm{Bs}(X)$ a $c \in \mathbb{K}$ je analogický (a výrazně jednodušší).

□

DEFINICE 124. Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Nechť $\mu \in M(X)$.

(a) Řekneme, že μ je spojitá, pokud $|\mu|(\{x\}) = 0$ pro každé $x \in X$. Množinu všech spojitých měr značíme $M_{\mathrm{c}}(X)$.

(b) Řekneme, že μ je diskrétní, pokud existuje spočetná množina $C \subset X$ splňující $|\mu|(X \setminus C) = 0$. Množinu všech diskrétních měr značíme $M_{\mathrm{d}}(X)$.

(c) Řekneme, že μ je Diracova míra v bodě $x \in X$, pokud $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = f(x)$ pro každou $f \in C_0(X)$. Míru μ pak značíme ε_x.

(d) Molekulární mírou myslíme prvek množiny

$$M_{\mathrm{mol}}(X) = \operatorname{conv}\{\varepsilon_x;\ x \in X\}.$$

(e) Symbolem $M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ rozumíme množinu

$$M_{\mathrm{ac},\mu} = \{\nu \in M(X);\ \nu\restriction_{\mathrm{Bs}(X)} \ll |\mu|\restriction_{\mathrm{Bs}(X)}\}.$$

TVRZENÍ 125. *Nechť X je lokálně kompaktní topologický prostor. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Množiny $M_{\mathrm{d}}(X)$ a $M_{\mathrm{c}}(X)$ jsou uzavřené podprostory $M(X)$.

(b) Míra μ je diskrétní právě tehdy, když existuje $C = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subset X$ spočetná a posloupnost $a \in \ell_1$ taková, že $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_{x_n}$.

(c) Je-li $\mu \in M(X)$, pak $M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ je uzavřený podprostor $M(X)$, který je izometricky izomorfní s $L_1(|\mu|)$.

DŮKAZ. (a) Jsou-li μ, ν spojité míry na X, pak pro $x \in X$ platí

$$|\mu + \nu|(\{x\}) \le |\mu|(\{x\}) + |\nu|(\{x\} = 0,$$

tj. $\mu + \nu \in M_{\mathrm{c}}(X)$.

Jsou-li $\mu, \nu \in M(X)$ diskrétní a $C_1, C_2 \subset X$ jsou příslušné spočetné množiny, pak $C = C_1 \cup C_2$ je spočetná a

$$|\mu + \nu|(X \setminus C) \le |\mu|(X \setminus C_1) + |\nu|(X \setminus C_2) = 0$$

Tedy $\mu + \nu \in M_{\mathrm{d}}(X)$.

Podobně se ukážeme, že $M_{\mathrm{c}}(X)$ i $M_{\mathrm{d}}(X)$ jsou uzavřené na násobení skalárem.

Nechť $\{\mu_n\}$ je posloupnost v $M_{\mathrm{c}}(X)$ konvergující k $\mu \in M(X)$. Uvažujme restrikce těchto měr na $\mathrm{Bs}(X)$. Pak

$$|\mu|(\{x\}) = |\mu - \mu_n + \mu_n|(\{x\}) \le |\mu - \mu_n|(\{x\}) + |\mu_n|(\{x\}) \le |\mu - \mu_n|(X) \to 0.$$

Tedy μ je spojitá.

Podobně pro posloupnost $\{\mu_n\}$ v $M_{\mathrm{d}}(X)$ konvergující k $\mu \in M(X)$ vybereme příslušné spočetné množiny C_n, $n \in \mathbb{N}$. Pak $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ je spočetná a

$$|\mu|(X \setminus C) \le |\mu - \mu_n|(X \setminus C) \le |\mu - \mu_n|(X) + |\mu_n|(X \setminus C_n) = \|\mu - \mu_n\|.$$

Tedy $\mu \in M_{\mathrm{d}}(X)$.

(b) Nechť $C = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ je množina příslušná μ. Položme $a_n = \mu(\{x_n\})$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(\{x_n\})| = |\mu|(C) = |\mu|(X) = \|\mu\| < \infty,$$

a zjevně $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon_{x_n}$.

(c) Uvažujme restrikci míry μ na $\mathrm{Bs}(X)$. Přímo z definice se ověří, že množina $M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ je podprostor $M(X)$. Pro každou $\nu \in M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ existuje jednoznačně určená borelovská $f_\nu \in L_1(\mu, \mathrm{Bs}(X))$ taková, že

$$\nu(A) = \int_A f_\nu \,\mathrm{d}|\mu|, \quad A \in \mathrm{Bs}(X).$$

Pak zobrazení $I\colon \nu \mapsto f_\nu$ je hledaný izomorfismus $M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ na $L_1(|\mu|)$, který je izometrií díky rovnosti

$$\|\nu\| = \int_X |f_\nu| \,\mathrm{d}|\mu| = \|f_\nu\|_{L_1(|\mu|)}.$$

Vzhledem k úplnosti $L_1(|\mu|)$ je $M_{\mathrm{ac},\mu}(X)$ úplný prostor.

$\square$

LEMMA 126. *Nechť X je topologický vektorový prostor a Y je jeho hustý podprostor. Nechť $U \in \tau(0)$. Pak w^*-topologie splývá na U° s topologií $\sigma(X^*, Y)$.*

Speciálně, je-li Y hustý podprostor normovaného lineárního prostoru X, na B_{X^*} splývá $\sigma(X^*, Y)$ s w^*-topologií.

DŮKAZ. Dle Věty 7.109 je U° w^*-kompaktní množina. Díky hustotě Y je topologie $\sigma(X^*, Y)$ na U° Hausdorffova, přičemž každá $\sigma(X^*, Y)$-otevřená množina je též w^*-otevřená. Zobrazení $Id : (U^\circ, w^*) \to (U^\circ, \sigma(X^*, Y))$ je tedy spojité, prosté zobrazení kompaktního prostoru do Hausdorffova prostoru. Jedná se tedy o homeomorfismus, což znamená, že tyto topologie splývají.

$\square$

LEMMA 127. *Nechť X je lokálně kompaktní prostor a $M^1(X)$ značí množinu všech pravděpodobnostních měr v $M(X)$. Pak je množina $M_{\mathrm{mol}}(X)$ hustá v $(M^1(X), w^*)$.*

DŮKAZ. Nechť $\mu \in M^1(X)$ je dáno. Na základě Lemmatu 126 stačí ukázat, že pro každou $f \in C_c(X)$ a $\varepsilon > 0$ existuje $\nu \in M_{\mathrm{mol}}(X)$ splňující $|\mu(f) - \nu(f)| < \varepsilon$. Nechť tedy $f \in C_c(X)$ a $\varepsilon > 0$ je dáno. Označme $M = \|f\|$. Pro každé $x \in \operatorname{supp} f$ existuje okolí U_x obsahující x takové, že $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2M}$, $y \in U_x$. Pak $|f(y_1) - f(y_2)| < \frac{\varepsilon}{M}$ pro každé $y_1, y_2 \in U_x$. Vybereme konečně mnoho $x_1, \dots, x_n \in \operatorname{supp} f$ splňující $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$. Označíme $A_0 = \emptyset$ a definujeme

$$A_i = U_{x_i} \setminus \bigcup_{j=0}^{n} U_{x_j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nakonec označme $A_{n+1} = X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i$. Pak A_i, $i = 1, \dots, n+1$, jsou navzájem disjunktní borelovské množiny a $X = \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$. Dále položíme

$$c_i = \mu(A_i), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

a pro každé $i \in \{1, \dots, n+1\}$ vybereme $x_i \in A_i$, pokud $c_i > 0$. Dále vybereme bod $u \in X$ a položíme $x_i = u$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ splňující $c_i = 0$. Pokud $A_{n+1} \neq \emptyset$ a $c_{n+1} = 0$, vybereme $v \in A_{n+1}$ a položíme $x_{n+1} = v$. Nakonec definujeme

$$\nu = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \varepsilon_{x_i}.$$

Protože $c_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n+1$, a

$$\sum_{i=1}^{n+1} c_i = \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \mu(X) = 1,$$

je míra ν molekulární.

Dále platí

$$\begin{aligned}
|\mu(f) - \nu(f)| &= |\int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1} c_i f(x_i)| = |\sum_{i=1}^{n+1} \int_{A_i} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1} c_i f(x_i)| \\
&|\sum_{i=1}^{n+1} \int_{A_i} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{A_i} f(x_i)\,\mathrm{d}\mu(x)| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \int_{A_i} |f(x) - f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |f(x) - f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{A_{n+1}} |f(x) - f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |f(x) - f(x_i)|\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} c_i = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen.

□

LEMMA 128. *Nechť X je lokálně kompaktní prostor a $\mu \in M(X)$ splňuje $\mu(X) = \|\mu\|$. Pak μ je nezáporná.*

DŮKAZ. Stačí ověřit, že $\int_X f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$ pro každou $f \in C_c(X)$ splňující $0 \leq f \leq 1$. Nechť tedy f je taková funkce a $\varepsilon > 0$ je libovolné. Nalezneme kompakt $L \subset X$ takový, že $\operatorname{supp} f \subset L$ a $|\mu|(X \setminus L) < \varepsilon$. Nalezneme funkci $g \in C_0(X)$ takovou, že $0 \leq g \leq 1$ a $g = 1$ na L. Pak platí $0 \leq f - g \leq 1$ na X, a dostáváme tak

$$\begin{aligned}
\|\mu\| &\geq |\int_X (g - f)\,\mathrm{d}\mu| \geq \int_X (g - f)\,\mathrm{d}\mu = \int_L g\,\mathrm{d}\mu + \int_{X\setminus L} g\,\mathrm{d}\mu - \int_X f\,\mathrm{d}\mu \\
&\geq \mu(L) - |\mu|(X \setminus L) - \int_X f\,\mathrm{d}\mu = \mu(X) - \mu(X \setminus L) - |\mu|(X \setminus L) - \int_X f\,\mathrm{d}\mu \\
&\geq \|\mu\| - 2\varepsilon - \int_X f\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Tedy $\int_X f\,\mathrm{d}\mu \geq -2\varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$, a důkaz je tak dokončen.

□

6.5. Operace s Radonovými mírami

DEFINICE 129. Restrikce míry.

DEFINICE 130. Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní topologické prostory. Nechť $\varphi\colon X \to Y$ je spojité zobrazení. Pro každou $\mu \in M(X)$ položme

$$T_\mu g = \int_X g \circ \varphi \,\mathrm{d}\mu, \quad g \in C_0(Y).$$

Pak $T_\mu \in (C_0(Y))^*$, a tedy existuje právě jedna míra $\nu \in M(Y)$ splňující $T_\mu = \int_Y g\,\mathrm{d}\nu$. Míru ν nazveme obrazem míry a označíme $\varphi(\mu)$.

TVRZENÍ 131. *Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní topologické prostory. Nechť $\varphi\colon X \to Y$ je spojité zobrazení a nechť $\varphi\colon M(X) \to M(Y)$ je zobrazení definované výše. Pak platí následující tvrzení.*
(a) Pro každou $A \in \mathrm{Bs}(Y)$ platí rovnost $\varphi(\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$.
(b) Platí

$$\int_Y g\,\mathrm{d}\varphi(\mu) = \int_X g \circ \varphi\,\mathrm{d}\mu, \quad g \in \mathrm{Bf}^b(Y).$$

(c) Zobrazení $T\colon \mu \mapsto \varphi(\mu)$ je prvek $\mathcal{L}(M(X), M(Y))$ o normě 1.

DŮKAZ. (a) Položme

$$\lambda(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \mathrm{Bs}(Y).$$

Pak λ je (komplexní) míra na $\mathrm{Bs}(Y)$.

Zřejmě platí

$$|\lambda(A)| = |\mu(\varphi^{-1}(A)| \leq |\mu|(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \mathrm{Bs}(Y),$$

z čehož dostáváme

$$|\lambda|(A) \leq |\mu|(\varphi^{-1}(A)), \quad A \in \mathrm{Bs}(Y),$$

Dále ověříme, že $|\lambda|$ splňuje (c) a (d) z Věty 118. Vskutku, uvažujme libovolnou $A \in \mathrm{Bs}(Y)$ a libovolné $\varepsilon > 0$. Pak existuje $K \subset \varphi^{-1}(A)$ splňující $|\mu|(\varphi^{-1}(A) - K) < \varepsilon$. Množina $L = \varphi(K)$ je kompaktní a obsažená v A. Tedy

$$|\lambda|(A \setminus L) \leq |\mu|(\varphi^{-1}(A \setminus L) = |\mu|(\varphi^{-1}(A) \setminus \varphi^{-1}(L)) \leq |\mu|(\varphi^{-1}(A) \setminus K) < \varepsilon.$$

Abychom ukázali vnější aproximaci, pro $\varepsilon > 0$ dané použijeme již dokázanou vnitřní aproximaci pro množinu $Y \setminus A$, a dostaneme tak kompakt splňující $|\lambda|((Y \setminus A) \setminus K) < \varepsilon$. Pak $U = Y \setminus K$ je otevřená, obsahuje A a platí pro ni

$$|\mu|(U \setminus A) = |\lambda|((Y \setminus A) \setminus K) < \varepsilon.$$

Dalším krokem důkazu je odvození rovnosti

$$\int_Y g \, \mathrm{d}\lambda = \int_X (g \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu, \quad g \in \mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(Y). \tag{20}$$

Pro jednoduchou funkci $g = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{A_k}$, kde $\{A_1, \dots, A_n\}$ je borelovský rozklad Y však platí

$$\int_Y g \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=1}^n c_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi^{-1}(A_k) = \int_X \sum_{k=1}^n c_k \chi_{\varphi^{-1}(A_k)} \, \mathrm{d}\mu = \int_X (g \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu. \tag{21}$$

Libovolný prvek $\mathrm{Bf}^{\mathrm{b}}(Y)$ je pak stejnoměrně aproximovatelný funkcemi tohoto typu, takže rovnost (20) je ověřena.

Přistupme konečně k důkazu rovnosti $\nu = \lambda$ na $\mathrm{Bs}(Y)$. pro dané $A \in \mathrm{Bs}(Y)$ a $\varepsilon > 0$ nalezneme kompakt $K \subset Y$ a otevřenou množinu $U \subset Y$ takové, že $K \subset A \subset U$ a

$$|\nu|(U \setminus K) + |\lambda|(U \setminus K) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť $g \in C_{\mathrm{c}}(Y)$ splňuje $0 \leq g \leq 1$, $g = 0$ vně U a $g = 1$ na K. Pak

$$\begin{aligned}
|\lambda(A) - \nu(A)| &\leq |\lambda(U) - \int_Y g \, \mathrm{d}\lambda| + |\int_Y g \, \mathrm{d}\lambda - \int_Y g \, \mathrm{d}\nu| + |\lambda(U \setminus A)| + |\nu(U) - \int_Y g \, \mathrm{d}\nu| + |\nu(U \setminus A)| \\
&\leq |\lambda|(U \setminus A) + |\nu|(U \setminus A) + \int_U |1 - g| \, \mathrm{d}|\lambda| + \int_U |1 - g| \, \mathrm{d}|\nu| + |\int_X (g \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu - \int_X (g \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu| \\
&\leq 2(|\lambda|(U \setminus K) + |\nu|(U \setminus K)) \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tedy $\nu = \lambda$ na $\mathrm{Bs}(Y)$ a (a) je tak dokázáno.

Tvrzení (b) snadno plyne z (a) pomocí aproximace jednoduchými funkcemi (viz (21)).

(c) Zobrazení T je zjevně lineární. Pro $\mu_1, \mu_2 \in M(X)$ totiž nechť jsou T_μ, T_ν a $T_{\mu+\nu}$ funkcionály z Definice 130. Pak

$$\int_Y g \, \mathrm{d}\varphi(\mu+\nu) = \int_X (g \circ \varphi) \, \mathrm{d}(\mu+\nu) = \int_X (g \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu + \int_X (g \circ \varphi) \, \mathrm{d}\nu = \int_Y g \, \mathrm{d}\varphi(\mu) + \int_Y g \, \mathrm{d}\varphi(\nu), \quad g \in C_0(Y).$$

Vzhledem k Definici 122 tak dostáváme $\varphi(\mu + \nu) = \varphi(\mu) + \varphi(\nu)$. Podobně se ověří rovnost $\varphi(c\mu) = c\varphi(\mu)$ pro $\mu \in M(X)$ a $c \in \mathbb{K}$.

Nechť $\mu \in M(X)$ a $\nu = \varphi(\mu)$. Pro libovolnou $g \in C_0(Y)$ o normě 1 pak platí

$$|\int_Y g \, \mathrm{d}\nu| = |\int_X (g \circ \varphi) \, \mathrm{d}\mu| \leq \int_X |g \circ \varphi| \, \mathrm{d}|\mu| \leq |\mu|(X) = \|\mu\|.$$

Tedy

$$\|\nu\| = \sup_{g \in B_{C_0(Y)}} |\int_Y g \, \mathrm{d}\nu| \leq \|\mu\|,$$

takže $\|T\| \leq 1$.

□

DEFINICE 132. Nechť $f_i \colon X_i \to \mathbb{K}$ je funkce na množině X_i, $i = 1, 2$. Pak funkce $f_1 \otimes f_2 \colon X_1 \times X_2 \to \mathbb{K}$ je definovaná jako

$$(f_1 \otimes f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2), \quad (x_{,1}, x_2) \in X_1 \times X_2.$$

LEMMA 133. *Nechť X_i, $i = 1, 2$, jsou lokálně kompaktní prostory. Položme*

$$\mathcal{A} = \{\sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i; \; f_1, \dots, f_n \in C_{\mathrm{c}}(X_1), g_1, \dots, g_n \in C_{\mathrm{c}}(X_2), n \in \mathbb{N}\}.$$

Pak $\overline{\mathcal{A}} = C_0(X_1, \times X_2)$.

DŮKAZ. Systém $\mathcal{A}$ zjevně splňuje předpoklady Věty **??**, a tedy je hustý v $C_0(X_1 \times X_2)$. □

LEMMA 134. *Pro* $i = 1, 2$ *uvažujme lokálně kompaktní prostor* X_i *s nezápornou Radonovou mírou* μ_i *definované na* σ*-algebře* Σ_i. *Pro danou* $f \in C_c(X_1 \times X_2)$ *uvažujme funkce*

$$\varphi_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1,$$
$$\varphi_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2.$$

Pak $\varphi_i \in C_c(X_i)$, $i = 1, 2$, *a platí*

$$\int_{X_1} \varphi_1(x_1)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \varphi_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2). \tag{22}$$

DŮKAZ. *Krok 1.* Ukážeme, že existují kompakty $K_i \subset X_i, i = 1, 2$, takové, že supp $f \subset K_1 \times K_2$. Vskutku, pro každé $x =\in$ supp f nalezneme kompaktní množiny $U_x \subset X_1$ a $V_x \subset X_2$ takové, že $x \in \mathrm{Int}(U_x \times V_x)$. Vybereme konečnou množinu $F \subset$ supp f takovou, že supp $f \subset \bigcup_{x\in F}(U_x \times V_x)$. Pak $K_1 = \bigcup_{x\in F} U_x$ a $K_2 = \bigcup_{x\in F} V_x$ jsou požadované množiny.

Krok 2. Ukážeme, že funkce φ_1 je spojitá. Nechť $x_1 \in X_1$ je dáno a nechť $\varepsilon > 0$ je libovolné. Pro každé $y \in K_2$ nalezneme otevřené množiny $U_u \subset X_1$ a $V_y \subset X_2$ takové, že $(x_1, y) \in U_y \times V_y$ a

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon, \quad x', x'' \in U_y, y', y'' \in V_y.$$

Jelikož je množina $\{x_1\} \times K_2$ kompaktní, existuje $F \subset K_2$ konečná taková, že

$$\{x_1\} \times K_2 \subset \bigcup_{y\in F}(U_y \times V_y).$$

Pak je $U = \bigcap_{y\in F} U_y$ okolí x_1.

Pro libovolné $x \in U$ a $z \in K_2$ pak máme $|f(x, z) - f(x_1, z)| < \varepsilon$. Vskutku, je-li totiž $y \in F$ zvoleno tak, že $(x_1, z) \in U_y \times V_y$, platí $x_1, x \in U_y$ a $z \in V_y$, a tedy

$$|f(x, z) - f(x_1, z)| < \varepsilon.$$

Z tohoto odhadu plyne nerovnost

$$|\varphi_1(x) - \varphi_1(x_1)| \leq \int_{X_2} |f(x, z) - f(x_1, z)|\,\mathrm{d}\mu_2(z) \leq \varepsilon\mu_2(K_2).$$

Krok 3. Uvažujme míry $\nu_i = \mu_i \restriction_{K_i}, i = 1, 2$, a nechť $\nu = \nu_1 \times \nu_2$. Jsou-li $f_i \in C_c(X_i)$, $i = 1, 2$, dané funkce, je zjevně funkce $f_1 \otimes f_2$ ν-měřitelná. Díky Lemmatu 133 je i funkce f ν-měřitelná. Dle Fubiniovy věty jsou funkce

$$\psi_1(x_1) = \int_{X_2} |f(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}\nu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1,$$
$$\psi_2(x_2) = \int_{X_1} |f(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}\nu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2.$$

ν_1, respektive ν_2-měřitelné, a platí

$$\int_{X_1} \psi_1(x_1)\,\mathrm{d}\nu(x_1) = \int_{X_1\times X_2} |f(x_1, x_2)|\,\mathrm{d}\nu(x_1, x_2) = \int_{X_2} \psi_2(x_2)\,\mathrm{d}\nu(x_2).$$

Jelikož je f spojitá funkce s kompaktním nosičem, tyto integrály jsou konečné. Opětovným užitím Fubinovy věty, tentokrát pro funkci f, dostáváme ν_i-měřitelnost funkcí

$$\tau_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\nu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1,$$
$$\tau_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\nu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2$$

a platnost rovnosti

$$\int_{X_1} \tau_1(x_1)\,\mathrm{d}\nu_1(x_1) = \int_{X_2} \tau_2(x_2)\,\mathrm{d}\nu_2(x_2).$$

Vzhledem k tomu, že $\varphi_i = \tau_i$ a

$$\int_{X_i} \varphi_i\,\mathrm{d}\mu_i = \int_{X_i} \varphi_i\,\mathrm{d}\nu_i,$$

dostáváme rovnost (22).

□

VĚTA 135. *Nechť μ_i je nezáporná Radonova míra na lokálně kompaktním toplogickém prostoru X_i, $i = 1, 2$. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Zobrazení

$$Tf = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2) \right) \mathrm{d}\mu_1(x_1), \quad f \in C_c(X_1 \times X_2),$$

je dobře definovaný nezáporný funkcionál na $C_c(X_1 \times X_2)$.

(b) Nechť μ je Radonova míra odpovídající funckionálu T. Pak pro každou baireovskou μ-integrovatelnou funkci $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{K}$ jsou funkce

$$\varphi_1(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1,$$
$$\varphi_2(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2.$$

μ_1, respektive μ_2-integrovatelné a platí

$$\int_{X_1} \varphi_1(x_1)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu(x_1, x_2) = \int_{X_2} \varphi_2(x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_2).$$

DŮKAZ. Tvrzení (a) plyne z Lemmatu 134.

(b) Pro funkci $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{K}$ řekneme, že pro ni platí Fubinova věta, pokud

- $f \in L_1(\mu)$,
- funkce

$$\varphi_f(x_1) = \int_{X_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_2(x_2), \quad x_1 \in X_1,$$
$$\psi_f(x_2) = \int_{X_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}\mu_1(x_1), \quad x_2 \in X_2.$$

  jsou $L_1(\mu_1)$, respektive v $L_1(\mu_2)$ a
- platí

$$\int_{X_1 \times X_2} f\,\mathrm{d}\mu = \int_{X_1} \varphi_f\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_{X_2} \psi_f\,\mathrm{d}\mu_2. \tag{23}$$

(Tento fakt budeme zapisovat $f \in \mathrm{FV}$.)

Označme dále

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathrm{Baire}(X_1 \times X_2);\ f \in \mathrm{FV}\}.$$

Dle Lemmatu 134 platí $C_c(X_1 \times X_2) \subset \mathcal{F}$.

Krok 1. V prvním kroku ukážeme, že $C(X_1 \times X_2) \cap L_1(\mu) \subset \mathcal{F}$. Nechť tedy $f \in C(X_1 \times X_2)$ je μ-integrovatelná funkce na $X_1 \times X_2$.

□

ZNAČENÍ 136. Nechť X_1, X_2 jsou lokálně kompaktní topologické prostory.

Nechť $\mu_i \in M(X_i)$ jsou nezáporné míry na σ-algebře Σ_i, $i = 1, 2$, Nechť ω je součin měr μ_1 a μ_2 na součinové σ-algebře generované Σ_1 a Σ_2 a nechť $\mu_1 \times \mu_2$ značí míru vzniklou zúplněním míry ω. Nechť Υ značí systém všech $\mu_1 \times \mu_2$ měřitelných množin.

LEMMA 137. *Mějme objekty jako ve Značení 136. Pak platí následující tvrzení.*

(a) Jsou-li f_i μ_i-měřitelné funkce na X_i, $i = 1, 2$, je $f_1 \otimes f_2$ $\mu_1 \times \mu_2$ měřitelná funkce.

(b) Každá $f \in C_0(X_1 \times X_2)$ je $\mu_1 \times \mu_2$-měřitelná.

(c) Zobrazení

$$\Lambda f = \int_{X_1 \times X_2} f \, \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2), \qquad f \in C_0(X),$$

je nezáporný funkcionál na $C_0(X)$ splňující $\|\Lambda\| \le \|\mu_1\| \|\mu_2\|$.

DŮKAZ. (a) Je-li f_i tvaru χ_{A_i}, kde $A_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2$, pak $f_1 \otimes f_2 = \chi_{A_1 \times A_2}$, a tedy se jedná o $\mu_1 \times \mu_2$-měřitelnou funkci. Tvrzení tak platí i pro jednoduché funkce. Pokud $f_{\ge} 0$, $i = 1, 2$, aproximujeme je neklesající posloupností jednoduchých funkcí. Pro f_i reálné provedeme rozklad na kladnou a zápornou část a konečně pro komplexní funkce použijeme rozklad na reálnou a imaginární část.

(b)

(c) Tvrzení plyne z (b), neboť měřitelnost se zachovává na (stejnoměrné) limity.

(d) Každá funkce z $C_0(X_1 \times X_2)$ je $\mu_1 \times \mu_2$-integrovatelná, a tedy je Λ dobře definované lineární zobrazení na $C_0(X_1 \times X_2)$. Jelikož máme

$$|\Lambda f| \le \int_{X_1 \times X_2} |f| \, \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) \le \|f\| \mu_1(X_1) \mu_2(X_2), \qquad f \in C_0(X_1 \times X_2),$$

je jeho norma odhadnuta součinem $\|\mu_1\| \|\mu_2\|$.

□

VĚTA 138. *Mějme objekty jako ve Značení 136. Nechť Λ je definován jako v Lemmatu 137. Jednoznačně určenou nezápornou míru v $M(X_1 \times X_2)$ danou Větou 121 označme symbolem λ. Nechť Σ je systém všech λ-měřitelných množin.*

Pak $\Sigma = \Upsilon$ a $\lambda = \mu_1 \times \mu_2$.

DŮKAZ. Chceme dokázat $\Sigma = \Upsilon$ a rovnost

$$\lambda(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(A), \qquad A \in \Sigma. \tag{24}$$

Krok 1. Dokažme nejprve, že pro všechny množiny tvaru $A = A_1 \times A_2$, $A_i \in \mathrm{Bs}(X_i)$, $i = 1, 2$, platí rovnost (24).

Nechť tedy $A_i \in \mathrm{Bs}(X_i)$, $i = 1, 2$, jsou dány. Nechť $\varepsilon > 0$. Nalezneme kompakt K a otevřenou množinu U takové, že $K \subset A_1 \times A_2 \subset U$ $\lambda(U \setminus K) < \varepsilon$. Pro $i = 1, 2$ nalezneme kompakty L_i a otevřené množiny U_i takové, že $K_i \subset A_i \subset U_i$ a $\mu_i(U_i \setminus L_i) < \varepsilon$. Položme $K_i = L_1 \cup p_i(K)$. Pak též $K_i \subset A_i$ a $K_1 \times K_2 \supset K$. Nechť $f_i \in C_c(X_i)$ jsou funkce splňující $\chi_{K_i} \le \chi_{U_i}$ a nechť $f \in C_c(X_1 \times X_2)$ splňuje $\chi_{K_1 \times K_2} \le f \le \chi_U$. položme $h = f(f_1 \otimes f_2)$. Pak $\chi_{K_1 \times K_2} \le h \le \chi_{U \cap (U_1 \times U_2)}$. Kombinací těchto faktů dohromady dostáváme

$$\begin{aligned}
|(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) - \lambda(A_1 \times A_2)| &\le |\int_{X_1 \times X_2} (\chi_{A_1 \times A_2} - h) \, \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2)| \\
&\quad + |\int_{X_1 \times X_2} h \, \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) - \int_{X_1 \times X_2} h \, \mathrm{d}\lambda| + |\int_{X_1 \times X_2} (h - \chi_{A_1 \times A_2}) \, \mathrm{d}\lambda| \\
&\le \int_{(U_1 \times U_2) \setminus (K_1 \times K_2)} 1 \, \mathrm{d}(\mu_1 \times \mu_2) + \int_{U \setminus K} 1 \, \mathrm{d}\lambda \le \mu_1(U_1 \setminus K_1) \mu_2(U_2) + \mu_1(U_1) \mu_2(U_2 \setminus K_2) + \lambda(U \setminus K) \\
&< 3\varepsilon \|\mu_1\| \|\mu_2\|.
\end{aligned}$$

Tedy (24) pro $A_1 \times A_2$ platí.

Krok 2. Označme

$$\mathcal{A} = \{A \in \Sigma \cap \Upsilon;\ \ (24) \text{ platí pro } A\}.$$

Ukážeme, že $\mathcal{A}$ je σ-algebra.

Již víme, že $\emptyset$ i $X_1 \times X_2$ náleží do $\mathcal{A}$. Pokud $A \in \mathcal{A}$, pak

$$\lambda((X_1\times X_2)\setminus A) = \lambda(X_1\times X_2)-\lambda(A) = (\mu_1\times\mu_2)(X_1\times X_2)-(\mu_1\times\mu_2)(A) = (\mu_1\times\mu_2)((X_1\times X_2)\setminus A),$$

a tedy $\mathcal{A}$ je uzavřená na doplňky. Zjevně je uzavřená na disjunktní sjednocení, a tedy i na konečná sjednocení. Ze σ-aditivity uvažovaných měr je $\mathcal{A}$ uzavřená i na spočetná sjednocení.

Krok 3. Nyní ukážeme, že každá otevřená množina v $X_1 \times X_2$ je obsažena v $\mathcal{A}$. Nechť tedy $U \subset X_1 \times X_2$ je daná otevřená množina. Nalezneme rostoucí posloupnost kompaktů $\{K_n\}$ v $X_1 \times X_2$ takovou, že $K_n \subset U$ a $\lambda(K_n) \nearrow \lambda(U)$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Pro každé $x \in K_n$ nalezneme otevřené okolí tvaru $U_{1^x} \times U_2^x$, kde $U_i^x \subset X_i$, takové, že $x \in U_1^x \times U_2^x \subset U$. Z kompaktnosti vybereme konečně mnoho takovýchto bázových množin, které pokrývají K_n. Jelikož jsou bázové otevřené množiny obsaženy v $\mathcal{A}$ (viz první krok) a $\mathcal{A}$ je σ-algebra, sjednocením těchto okolí dostaneme borelovskou množinu $A_n \in \mathcal{A}$ splňující $K_n \subset A_n \subset U$. Položme $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Pak $\lambda(U \setminus A) = 0$.

Pro $i = 1, 2$ položme $U_i = p_i(U)$, kde $p_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ je kanonická projekce. Pak U_i jsou otevřené množiny, a tedy existují kompaktní množiny F_n^i v X_i takové, že tvoří neklesající posloupnosti, platí $F_n^i \subset U_i$ a pro $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ a $F_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ platí

$$\mu_1(U_1 \setminus F_1) + \mu_2(U_2 \setminus F_2) = 0.$$

Dostali jsme tak objekty splňující

$$U \setminus A \subset ((F_1 \times F_2) \setminus A) \cup ((U_1 \setminus F_1) \times X_2) \cup (X_1 \times (U_2 \setminus F_2)),$$

přičemž množiny na pravé straně mají $\mu_1 \times \mu_2$ míru 0. Z úplnosti $\mu_1 \times \mu_2$ plyne, že $U \setminus A \in \Upsilon$. Tedy $U = A \cup (U \setminus A) \in \Upsilon$ a platí

$$\lambda(U) = \lambda(A)+\lambda(U\setminus A) = \lambda(A) = (\mu_1\times\mu_2)(A) = (\mu_1\times\mu_2)(A)+(\mu_1\times\mu_2)(U\setminus A) = (\mu_1\times\mu_2)(U).$$

Tedy $\mathcal{A}$ obsahuje všechny otevřené, a proto i borelovské množiny $X_1 \times X_2$. Tedy (24) platí na $\mathrm{Bs}(X_1 \times X_2)$.

Krok 4. Ukažme nyní, že $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}$ pro každou dvojici $A_i \in \Sigma_i$, $i = 1, 2$. Mějme tedy takovéto množiny. Nalezneme množiny $K_i, U_i \in \mathrm{Bs}(X_i)$ takové, že $K_i \subset A_i \subset U_i$ a $\mu_i(U_i \setminus K_i) = 0$. Pak $K_1 \times K_2 \subset A_1 \times A_2 \subset U_1 \times U_2$ a

$$(U_1 \times U_2) \setminus (K_1 \times K_2) \subset ((U_1 \setminus K_1) \times U_2) \cup (U_1 \times (U_2 \setminus K_2)).$$

Množina na pravé straně je obsažena v $\mathcal{A}$ a má $\mu_1 \times \mu_2$ míru 0. Tedy je i λ-nulová, což vzhledem k úplnosti λ implikuje, že $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}$.

Nechť Ω je součinová σ-algebra generovaná Σ_1 a Σ_2. Jelikož je $\mathcal{A}$ σ-algebra, platí $\Omega \subset \mathcal{A}$.

Je-li nyní $A \in \Upsilon$ dána, existuje $B, C \in \Omega$ takové, že $B \subset A \subset C$ a $(\mu_1 \times \mu_2)(B \setminus C) = 0$. Pak $B \setminus C \in \Sigma$ a $\lambda(B \setminus C) = 0$. Proto $A \in \Sigma$ a platí pro ni (24). Tím máme ověřeno, že $\Upsilon \subset \Sigma$ a (24) platí na Υ.

Je-li nyní $A \in \Sigma$, existují $B, C \in \mathrm{Bs}(X_1 \times X_2)$ splňující $B \subset A \subset C$ a $\lambda(B \setminus C) = 0$. Jako výše tak z úplnosti $\mu_1 \times \mu_2$ máme $A \in \Upsilon$ a $\lambda(A) = (\mu_1 \times \mu_2)(A)$. Tím je důkaz dokončen.

$\square$

DEFINICE 139 (Součin Radonových měr). Nechť X, Y jsou lokálně kompaktní topologické prostory a $\mu \in M(X)$ a $\mu \in M(Y)$. Pišme $\mu = \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_k$ a $\nu = \sum_{k=0}^{3} i^k \nu_k$, kde $\mu_k \in M(X)$ a $\nu_k \in M(Y)$, $k = 0, 1, 2, 3$, jsou nezáporné elementy.

Definujme

$$(\mu \times \nu) = \sum_{k,l=0}^{3} i^{k+l} (\mu_k \times \nu_l).$$

VĚTA 140. *Mějme objekty jako v Definici 139. Pak $\mu \times \nu \in M(X \times Y)$ a platí $\|\mu \times \nu\| \le \|\mu\|\|\nu\|$.*

DŮKAZ. Díky Větě 138 jsou míry $\mu_k \times \nu_l \in M(X \times Y)$. Navíc platí díky Fubiniově větě

$$\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x), \qquad f \in C_0(X \times Y).$$

Tedy pro každý prvek $f \in C_0(X \times Y)$ máme

$$\begin{aligned} |\int_{X\times Y} f \,\mathrm{d}(\mu \times \nu)| &\le \int_X |\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)|\,\mathrm{d}|\mu|(x) \le \int_X \int_Y |f(x,y)|\,\mathrm{d}|\nu|(y)\,\mathrm{d}|\mu|(x) \\ &\le \|f\| |\nu|(Y) |\mu|(X) = \|f\| \|\mu\| \|\nu\|. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen.

$\square$