Tímto dik Pétě za zpracovaný první dva okruhy.

1. Analýza

1.1 Posloupnosti a řady čísel a funkcí

1.1.1 Limity posloupností a součty řad

Definice *Posloupností reálných čísel* rozumíme jakékoliv zobrazení z množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$.

Definice Buď $M = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Pak posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je (shora, zdola) *omezená*, pokud množina M je (shora, zdola) omezená v $\mathbb{R}$.

Definice Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je *neklesající*, jestliže
$a_n \leq a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Analogicky klesající, nerostoucí, rostoucí, monotónní, ryze monotónní.

Definice Řekneme, že $A \in \mathbb{R}$ je *vlastní limita* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, jestliže

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |a_n - A| < \epsilon.$$

Definice Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu ∞, pokud

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n > K.$$

Analogicky limita $-\infty$, tyto limity jsou *nevlastní*.

Věta (ekvivalentní podmínka limity) Nechť $K > 0$. Platí $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ právě tehdy, když

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |a_n - A| < K\epsilon.$$

Definice Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je *konvergentní*, pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$

Věta (jednoznačnost limity) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Definice Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost, pak řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je *vybraná* z $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pokud existuje rostoucí posloupnost celých čísel $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $b_k = a_{n_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Věta (o limitě vybrané posloupnosti) Pokud posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má limitu $A \in \mathbb{R}^*$, pak každá vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má také limitu A.

Věta (o aritmetice limit) Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou posloupnosti a platí $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Pak

i. $\lim_{n\to\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$,

ii. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$,

iii. Pokud $B \neq 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (o součinu omezené a nulové) Nechť $a_n \to 0$ a nechť $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je omezená posloupnost. Pak $a_n b_n \to 0$.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (vztah uspořádání a limity) Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, resp. $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jsou posloupnosti s limitami A, resp. B, a nechť platí

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n \leq b_n.$$

Pak $A \leq B$.

Věta (o dvou policajtech) Nechť

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n$$

a nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} b_n$. Pak $lim_{n\to\infty} c_n = A$.
Plus jednostranné verze této věty.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (o monotónní posloupnosti) Každá monotónní posloupnost má limitu.

Definice Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost, definujeme

$$\alpha_k = \inf_{n\geq k}\{a_n\}, \quad \beta_k = \sup_{n\geq k}\{a_n\}.$$

Pak α_k je neklesající posloupnost, β_k je nerostoucí posloupnost a definujeme

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \alpha_k, \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \beta_k.$$

Věta Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost. Pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} a_n = A \wedge \limsup_{n\to\infty} a_n = A.$$

Definice Řekneme, že $H \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pokud existuje vybraná posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ taková, že $b_k \to H$.

Věta (Bolzano - Weierstrass) Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní.

Věta (Bolzano - Cauchy) Posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ má vlastní limitu $\Leftrightarrow$ splňuje podmínku

$$(BC) \quad \forall\epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n,m \in \mathbb{N},\; n,m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \epsilon.$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Definice Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. *Částečným součtem řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ definujeme součet $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_n$. *Součtem řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definice Řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje* (diverguje) pokud konverguje (diverguje) posloupnost $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Věta (nutná podmínka konvergence) Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

1.1.2 Kritéria absolutní a neabsolutní konvergence číselných řad

Řady s nezápornými členy

Věta (srovnávací kritérium) Nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq n_0 : a_n \leq b_n$, pak

i. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverguje,

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (limitní srovnávací kritérium) Nechť $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \in \langle 0, \infty\rangle$, pak

i. $K \in (0,\infty) \Rightarrow \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\Big)$,

ii. $K = 0 \Rightarrow \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje}\Big)$,

iii. $K = \infty \Rightarrow \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konverguje}\Big)$.

Věta (D'Alambertovo podílové kritérium)

- Pokud
$$\exists q \in (0,1) \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N},\; n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q,$$
pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. Speciálně, je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

- Pokud
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$
pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje. Speciálně, je-li $lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (Cauchyho odmocninové kritérium)

- Pokud
$$\exists q \in (0{,}1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q,$$
pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. Speciálně, je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Pokud $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje. Speciálně je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (Raabeho kritérium)

- Nechť $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.
- Nechť $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 1$ pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Věta (kondenzační kritérium) Nechť $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_{n+1} \leq a_n$, pak
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje.}$$

Obecné řady

Definice Řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje *absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$. Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, ale ne absolutně, řekneme, že konverguje *neabsolutně.*

Věta (Bolzano - Cauchy pro řady) Platí
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n{,}k \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\right| < \epsilon.$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (vztah konvergence a absolutní konvergence) Pokud řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak konverguje.

Věta (Leibnizovo kritérium) Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí posloupnost. Pak

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Definice Řekneme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ má *omezené částečné součty*, pokud platí

$$\exists K > 0\ \forall m \in \mathbb{N} : \left|\sum_{i=0}^{m} a_i\right| < K.$$

Věta (Ábel - Dirichlet). Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost a $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je nerostoucí nezáporná posloupnost. Jestliže platí alespoň jedna z podmínek

(A) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje,

(D) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ má omezené částečné součty a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

1.1.3 Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

Definice Nechť $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou funkce definované na množině $M \subseteq \mathbb{R}$ (nebo na metrickém prostoru (M,ρ)) s hodnotami v $\mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově* k f na M, jestliže $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tj. pokud

$$\forall x \in M\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Tento vztah značíme $f_n \to f$.
Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f na M *stejnoměrně*, pokud

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

značíme $f_n \rightrightarrows f$.
Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f na M *lokálně stejnoměrně*, pokud $\forall x \in M \exists r > 0 :\ f_n \rightrightarrows f$ na $\mathcal{U}(x,r)$.

Věta (charakterizace stejnoměrné konvergence) Nechť $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou funkce definované na množině $M \subseteq \mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$. Platí $f_n \rightrightarrows f$ právě tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definice Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *cauchyovská*, pokud

$$\forall x \in M\ \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n,m \in \mathbb{N},\ n,m \geq n_0 :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *stejnoměrně cauchyovská*, pokud

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n,m \in \mathbb{N},\ n,m \geq n_0 :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon.$$

Definice Řekneme, že množina M (metrický prostor (M,ρ)) je *úplná*, pokud každá cauchyovská posloupnost v ní je konvergentní.

Věta (vztah konvergence a cauchyovskosti) Nechť funkce $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ zobrazují do úplného prostoru. Pak je posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (stejnoměrně) konvergentní právě tehdy, když je (stejnoměrně) cauchyovská.

Věta (o stejnoměrné konvergenci a spojitosti) Nechť jsou funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ spojité a nechť $f_n \rightrightarrows f$. Pak f je také spojitá.

Věta (Moore-Osgoodova) Nechť jsou funkce $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ definované na M, $x_0 \in M$ a nechť platí

i. $f_n \rightrightarrows f$ na M,

ii. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{x \to x_0} f_n(x) =: \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Potom existuje $\lim_{n\to\infty} \alpha_n$ a platí $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Věta (záměna limity a derivace) Nechť jsou funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ definované na intervalu (a,b), $a < b$ a nechť platí

i. f_n mají vlastní derivaci na (a,b) $\forall n \in \mathbb{N}$,

ii. $\exists c \in (a,b):\ \{f_n(c)\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní,

iii. $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně konvergentní na (a,b).

Pak existuje funkce f taková, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f, f má vlastní derivaci na (a,b) a posloupnost $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f' na (a,b).

Věta (limita a primitivní funkce) Nechť funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ mají na intervalu (a,b), $a < b$ primitivní funkce $F_n, n \in \mathbb{N}$ a posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na (a,b). Pak posloupnost $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k F, kde F je primitivní funkce k f.

Věta (záměna limity a integrálu) Nechť jsou funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ newtonovsky integrovatelné na intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle a,b\rangle$. Pak funkce f je také newtonovsky integrovatelná na $\langle a,b\rangle$ a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Definice Řekneme, že množina K (metrický prostor (K, ρ)) je *kompaktní*, pokud z každé posloupnosti v něm lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Věta (Diniho) Nechť je množina K (metrický prostor (K,ρ)) kompaktní a nechť funkce $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ jsou spojité, zobrazující z K do $\mathbb{R}$, a $f_n \to f$. Pokud $\forall x \in K$ je $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní, pak $f_n \rightrightarrows f$ na K.

Definice Nechť jsou funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ definované na množině M. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je (*stejnoměrně, lokálně stejnoměrně*) *konvergentní*, pokud je (stejnoměrně, lokálně stejnoměrně) konvergentní posloupnost jejích částečných součtů.

Definice Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ je *majorantní* řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na M, pokud $|f_n(x)| \leq g_n(x)$, $\forall x \in M, \forall n \in \mathbb{N}$.

Věta (srovnávací kritérium pro stejnoměrnou konvergenci) Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ majorantní řadě $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ na M a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ je stejnoměrně konvergentní na M. Pak i řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ jsou stejnoměrně konvergentní na M.

Věta (Weierstrassovo kritérium) Nechť platí $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in M$ a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Pak jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ stejnoměrně konvergentní na M.

Věta (záměna sumy a derivace) Nechť mají funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ vlastní derivace na intervalu (a,b), $a < b$ a nechť

i. $\exists x_0 \in (a,b):\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverguje,

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konverguje lokálně stejnoměrně na (a,b),

pak i řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje lokálně stejnoměrně $\forall x \in (a,b)$ platí

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Věta (záměna sumy a integrálu) Nechť platí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na (a,b), $a < b$ a nechť jsou funkce $f_n, n \in \mathbb{N}$ newtonovsky integrovatelné na (a,b). Pak i funkce f je newtonovsky integrovatelná na (a,b) a platí

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Definice Řekneme, že posloupnost funkcí $f_n, n \in \mathbb{N}$ je *stejnoměrně omezená* na $M \subseteq \mathbb{R}$, pokud $\exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in M:\ |f_n(x)| < K$.

Věta (Abel-Dirichlet) Nechť funkce $f_n, g_n, n \in \mathbb{N}$ zobrazují z M do $\mathbb{R}$ a nechť platí alespoň jedna z podmínek

(A) i. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na M,

ii. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně omezená na M,

iii. $\forall x \in M$ je $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní.

(D) i. $\{\sum_{i=1}^{n} f_i\}_{n=1}^{\infty}$ je stejnoměrně omezená,

ii. $g_n \rightrightarrows 0$,

iii. $\forall x \in M$ je $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní.

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} g_n f_n$ je stejnoměrně konvergentní na M.

1.1.4 Mocninné řady

Definice Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak řadu funkcí $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ nazýváme *mocninnou řadou* s *koeficienty* a_n a *středem* x_0.

Věta (o existenci poloměru konvergence) Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je mocninná řada. Pak existuje právě jedno číslo $R \in \langle 0, \infty\rangle$ takové, že $\forall x :\ |x-x_0| < R$ platí, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje absolutně a pro $\forall x :\ |x-x_0| > R$ tato řada diverguje. Pro toto R platí vztah

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Zde je vhodné znát myšlenku důkazu.

Definice Číslo R z předchozí věty nazýváme *poloměr konvergence* mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.

Věta (derivace mocninné řady) Označme $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s poloměrem konvergence R. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$ má stejný poloměr konvergence R a v něm platí $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$.

Věta (o integrování mocninné řady) Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ poloměr konvergence $R \in (0, \infty\rangle$, pak pro $|x-x_0| < R$ platí

$$\int \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\Big) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + C.$$

Věta (Abelova) Nechť má mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ poloměr konvergence $R \in (0, \infty)$ a nechť suma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje stejnoměrně pro $x \in \langle x_0, x_0+R\rangle$ a platí

$$\lim_{r\to R_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

Zde je vhodné znát důkaz (alespoň první části věty).

1.2 Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné

1.2.1 Spojitost a derivace funkcí jedné reálné proměnné

Definice *Funkce jedné reálné proměnné* je funkce $f : M \to \mathbb{R}$, kde $M \subseteq \mathbb{R}$.

Definice Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f je definována na nějakém redukovaném okolí bodu a. Řekneme, že $A \in \mathbb{R}^*$ je *limita* funkce f v bodě a, pokud

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x \in \mathcal{U}(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{U}(A,\epsilon),$$

kde $\mathcal{U}$ značí okolí bodu. Tento vztah značíme $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Definice Nechť $a \in \mathbb{R}$ a funkce f je definovaná v bodě a. Řekneme, že funkce f je *spojitá* v bodě a, pokud $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
Definice pro limitu a spojitost zprava a zleva analogicky.

Věta (Heineho) Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$ a nechť f je definována na nějakém redukovaném okolí bodu a. Pak platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \text{ posloupnost } \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ x_n \to a,\ x_n \neq a :\ f(x_n) \to A.$$

Zde je vhodné znát myšlenku důkazu.

Věta (Heineho věta pro spojitost) Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a navíc f definována v nějakém okolí bodu a. Pak f je spojitá v bodě a právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to a$ platí $f(x_n) \to f(a)$.

Věta (jednoznačnost limity) Funkce má v každém bodě nejvýše jednu limitu.

Věta (o aritmetice limit) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a funkce f a g jsou definované na nějakém redukovaném okolí bodu a a nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$,
$\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak platí

i. $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = A + B$,

ii. $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$,

iii. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pokud $B \neq 0$,

pokud jsou výrazy na pravých stranách definované.
Zde je vhodné znát myšlenku důkazu.

Důsledek Pokud funkce f a g jsou spojité v bodě a, pak i $f \pm g$, fg a f/g (pokud $g(a) \neq 0$) jsou spojité v bodě a.

Definice Řekneme, že funkce je *spojitá na intervalu* I, pokud je spojitá ve všech vnitřních bodech intervalu I a spojitá zprava/zleva v jeho krajních bodech.

Definice Nechť $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}$ a nechť $a \in M$, řekneme že f nabývá v bodě a

- svého *maxima (minima)* na M, jestliže $f(x) \le f(a)\ \forall x \in M$ $(\ge)$,
- svého *ostrého maxima (minima)* na M, jestliže $f(x) < f(a)\ \forall x \in M$ $(>)$,
- svého *lokálního maxima (minima)*, pokud $\exists\, \mathcal{U}(a):\ f(x) \le f(a)\ \forall x \in \mathcal{U}(a)$ $(\ge)$,
- svého *ostrého lokálního maxima (minima)*, pokud $\exists\, \mathcal{U}(a):\ f(x) < f(a)$ $\forall x \in \mathcal{U}(a)$ $(>)$.

Věta (spojitost a extrémy) $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f spojitá na $\langle a,b\rangle$. Pak funkce f nabývá na intervalu $\langle a,b\rangle$ maxima a minima.

Věta (spojitost a omezenost) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a f spojitá na $\langle a,b\rangle$. Pak je tam omezená.

Definice *Derivací* funkce f v bodě x_0 rozumíme limitu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pokud tato limita existuje. Značíme $f'(x_0)$.
Alternativně také $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Definice Derivaci funkce f v bodě a nazveme *vlastní*, pokud $f'(a) \in \mathbb{R}$ a *nevlastní*, pokud $f'(a) = \pm\infty$.

Věta (derivace a spojitost) Má-li funkce f v bodě vlastní derivaci, pak je v něm spojitá.

Věta (aritmetika derivací) Platí

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
- $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$, pokud $g(x_0) \neq 0$.

Zde je vhodné znát myšlenku důkazu.

Věta (derivace složené funkce) Nechť má funkce f derivaci v bodě y_0, nechť je funkce g spojitá v bodě x_0 a má v něm derivaci a nechť $y_0 = g(x_0)$. Pak $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.

Věta (derivace inverzní funkce) Nechť je funkce f spojitá a ryze monotónní na (a,b), $x_0 \in (a,b)$ a $y_0 = f(x_0)$. Pokud

1. $f'(x_0) \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ pak $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$,
2. $f'(x_0) = 0$ a f je rostoucí (klesající) v (a,b), pak $(f^{-1})'(y_0) = \infty$ $(-\infty)$.

1.2.2 Hlubší věty o spojitých funkcích

Věta (o nabývání mezihodnot) Nechť je funkce f spojitá na intervalu $\langle a,b \rangle$, $-\infty < a < b < \infty$. Nechť $f(a) < f(b)$ a $y \in (f(a),f(b))$. Pak $\exists x \in (a,b):$ $f(x) = y$. Analogicky pro $f(a) > f(b)$.
Zde je vhodné znát myšlenku důkazu. Na to se mě přímo ptali, ale stačilo jim "sporem přes definici suprema".

Věta (spojitý obraz intervalu) Nechť I je interval a f je spojitá na I. Pak $f(I)$ je také interval.

Věta (o spojitosti inverzní funkce) Nechť f je spojitá rostoucí (klesající) na intervalu I. Pak f^{-1} je spojitá rostoucí (klesající) na $f(I)$.

1.2.3 Věty o střední hodnotě a jejich důsledky

Věta (Rolleova) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť

i. $f \in \mathcal{C}(\langle a,b \rangle)$,

ii. $\exists f'(x)\ \forall x \in (a,b)$,

iii. $f(a) = f(b) = 0$.

Pak $\exists \xi \in (a,b):\ f'(\xi) = 0$. Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (Langrangeova věta o střední hodnotě, Lagrangeova věta o přírůstku funkce) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a

i. $f \in \mathcal{C}(\langle a,b \rangle)$,

ii. $\exists f'(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (Cauchyova) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f,g \in \mathcal{C}(\langle a,b \rangle)$, f a g mají derivaci na (a,b) a v každém bodě je alespoň jedna z nich konečná (tj. $\min\{f'(x),g'(x)\} \in \mathbb{R}$, $\forall x \in (a,b)$), a nechť $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$. Pak existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Věta (L'Hospital) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, nechť f a g mají vlastní derivace v nějakém redukovaném okolí bodu x_0 a platí alespoň jedna z podmínek

i. $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$,

ii. $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$.

Pak
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
pokud limita na pravé straně existuje.
L'Hospitalova věta je důsledkem Cauchyovy věty o střední hodnoty.

Věta (o derivaci zprava) Nechť je f je spojitá zprava v bodě a a nechť $\lim_{x\to a+} f'(x) = A \in \mathbb{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.
Věta o derivaci zprava je důsledkem Lagrangeovy věty o střední hodnotě.

1.2.4 Vztahy monotonie a znaménka derivace

Věta Nechť I je interval, $I \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I)$ a f má na I vlastní derivaci.

i. Pokud $f'(x) \geq 0\ \forall x \in \mathrm{Int}(I)$, pak f je neklesající v I.

ii. Pokud $f'(x) > 0\ \forall x \in \mathrm{Int}(I)$, pak f je rostoucí v I.

iii. Pokud $f'(x) \leq 0\ \forall x \in \mathrm{Int}(I)$, pak f je nerostoucí v I.

iv. Pokud $f'(x) < 0\ \forall x \in \mathrm{Int}(I)$, pak f je klesající v I.

Zde je vhodné znát důkaz.

Důsledek Nechť I je interval a $f'(x) = 0\ \forall x \in I$. Pak f je konstantní na I.

1.2.5 Konvexita

Definice Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ je

- *konvexní* v I, pokud $\forall x,y \in I$, $\forall \lambda \in (0,1)$ platí
  $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$,
- *ryze konvexní* v I, pokud $\forall x,y \in I$, $\forall \lambda \in (0,1), x \neq y$ platí
  $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$,
- *(ryze) konkávní*, pokud $-f$ je (ryze) konvexní.

Věta (konvexita a jednostranné derivace) Nechť f je konvexní na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak existují konečné jednostranné derivace $f'_-(x_0), f'_+(x_0)\ \forall x_0 \in \mathrm{Int}(I)$ a navíc $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$.

Věta (vztah konvexity a spojitosti) Nechť f je konvexní na $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Pak $f \in \mathcal{C}((a,b))$.
Otevřenost intervalu je důležitá. Jedná se o důsledek předchozí věty.

Věta (vztah druhé derivace a konvexity) Nechť f je spojitá na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť má na I spojitou první derivaci. Jestliže $f''(x) \geq 0\ \forall x \in I$ pak f

je konvexní.

Definice Nechť f má vlastní derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f pokud existuje $\delta > 0$ takové, že platí alespoň jedna z podmínek

1. $\forall x \in \mathrm{P}_-(x_0,\delta): \ f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \wedge$
   $\forall x \in \mathrm{P}_+(x_0,\delta): \ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$,
2. $\forall x \in \mathrm{P}_-(x_0,\delta): \ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \wedge$
   $\forall x \in \mathrm{P}_+(x_0,\delta): \ f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Věta (nutná podmínka pro inflexi) Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a $f''(x_0) \neq 0$. Pak x_0 není inflexním bodem f.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (postačující podmínka pro inflexi) Nechť f má spojitou první derivaci v $(a,b) \subset \mathbb{R}$, nechť $x_0 \in (a,b)$ a $\exists \delta > 0$ takové, že platí alespoň jedna z podmínek

1. $\forall x \in \mathrm{P}_-(x_0,\delta): \ f''(x) > 0 \ \wedge \ \forall x \in \mathrm{P}_+(x_0,\delta): \ f''(x_0) < 0$,

2. $\forall x \in \mathrm{P}_-(x_0,\delta): \ f''(x) < 0 \ \wedge \ \forall x \in \mathrm{P}_+(x_0,\delta): \ f''(x_0) > 0$.

Pak x_0 je inflexní bod.
Zde je vhodné znát důkaz.

1.2.6 Taylorův polynom, Taylorovy řady

Definice Nechť $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to x_0$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Definice Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Nechť existuje vlastní $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom polynom

$$T^f_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \, \forall x \in \mathbb{R}$$

je *Taylorův polynom funkce f řádu n v bodě a.*

Věta (Peanova) Nechť $n \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jeden polynom P_n stupně nejvýše n takový, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

tj. $f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$ a to právě polynom $P_n = T^f_{n,x_0}$.

Definice Nechť jsou splněny podmínky definice Taylorova polynomu.
Pak $R^f_{n+1,x_0}(x) := f(x) - T^f_{n,x_0}(x)$ nazýváme *zbytkem* po n-tém členu Taylorova polynomu.

Věta (Taylorova věta o zbytku) Nechť $f,\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0,x \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq x$ a nechť J je uzavřený interval s krajními body x a x_0. Nechť platí

1. $f^{(n+1)}(t) \in \mathbb{R}$, $\forall t \in J$ a
2. $\varphi \in \mathcal{C}(J)$, $0 \neq \varphi'(t) \in \mathbb{R}, \forall t \in \operatorname{Int}(J)$.

Pak existuje $\xi \in \operatorname{Int}(J)$ takové, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)}f^{(n+1)}(\xi).$$

Speciálně volbou $\varphi(t) = t$ dostáváme *Cauchyův tvar zbytku*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}(x-x_0)f^{(n+1)}(\xi),$$

a volbou $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ dostáváme *Lagrangeův tvar zbytku*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Definice Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, nechť f má v x_0 konečné derivace všech řádů. Pak řadu

$$T^f_{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě x_0. Pokud $x_0 = 0$ pak jde o *MacLaurinovu řadu.*

Věta Platí $T^f_{x_0} = f$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$.

Zde je vhodné znát příklady některých Taylorových (MacLaurinových) řad, například pro $e^x,\ \sin x,\ \cos x, \dots$.

1.3 Integrální počet funkcí jedné reálné proměnné

1.3.1 Primitivní funkce, určitý integrál

Definice Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $F,f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *primitivní funkcí* f na (a,b), jestliže $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Věta (primitivní funkce a spojitost) Každá primitivní funkce je spojitá.

Věta (postačující podmínka pro existenci primitivní funkce) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{C}((a,b))$. Pak f má na (a,b) primitivní funkci.

Věta (o jednoznačnosti primitivní funkce) Nechť F a G jsou dvě primitivní funkce k f na intervalu (a,b). Pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $F(x) = G(x) + c, \ \forall x \in (a,b)$.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (linearita primitivní funkce) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce k g na (a,b) a $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha f + \beta g$ má na (a,b) primitivní funkce $\alpha F + \beta G$.

Definice Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Končenou posloupnost $\{x_0, \ldots, x_n\}$ nazveme *dělením intervalu* $\langle a,b \rangle \subset \mathbb{R}$, pokud $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
Řekneme, že D' je *zjemnění* dělení D, pokud každý bod D je zároveň i bodem D'.

Definice Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\{x_0, \ldots, x_n\}$ dělení $\langle a,b \rangle$ a funkce f definovaná na $\langle a,b \rangle$. Označme

$$m_i = \inf_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x), \ M_i = \sup_{x \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle} f(x)$$

a

$$s(f,D) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = S(f,D).$$

$s(f,D)$ nazýváme *dolní součet* a $S(f,D)$ *horní součet* funkce f při dělení D.
Pak definujeme *dolní Riemannův integrál* jako

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\{s(D), D \text{ dělení } \langle a,b \rangle\},$$

a *horní Riemannův integrál* jako

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\{S(D), D \text{ dělení } \langle a,b \rangle\}.$$

Definice Řekneme, že funkce f má *Riemannův integrál* ($f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$), pokud

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

pak tento integrál definujeme jako

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Definice *Norma dělení* D je $||D|| = \max\{(x_i - x_{i-1}), \, i = 1, \ldots, n\}$.
Věta (o horním a dolním součtu zjemnění) Nechť D' je zjemnění dělení D. Pak

$$s(f,D) \leq s(f,D') \leq S(f,D') \leq S(f,D).$$

Věta (aproximace horního a dolního Riemannova integrálu) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a je funkce f omezená na intervalu $\langle a,b \rangle$. Pak $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \forall D$, $\|D\| < \delta$ platí

$$\overline{\int_a^b} f \leq S(f,D) < \overline{\int_a^b} f + \epsilon \ \wedge \ \underline{\int_a^b} f - \epsilon < s(f,D) \leq \underline{\int_a^b} f.$$

Definice Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f,F : (a,b) \to \mathbb{R}$. Pokud platí $F \in \mathcal{C}((a,b))$ a $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)\backslash K$, kde K je konečná množina, pak F je *zobecněná primitivní funkce* k f na (a,b).

Definice Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a F je zobecněná primitivní funkce k f na (a,b). Pak *Newtonovým integrálem* funkce f od a do b rozumíme

$$\int_a^b f = [F]_a^b := \lim_{x \to b-} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x),$$

má-li tento rozdíl smysl. Má-li funkce f Newtonův integrál značíme $f \in \mathcal{N}((a,b))$.

Věta (vztah Newtonova a Riemannova integrálu) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$. Pokud $f \in \mathcal{N}((a,b)) \cap \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$ pak

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f = (\mathcal{R}) \int_a^b f.$$

1.3.2 Základní vlastnosti, vztah k primitivní funkci

Věta (vlastnosti Riemannova integrálu) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(i.) *Linearita*: Nechť $f,g \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pak $f+g \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$, $\lambda f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$ a

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \quad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f.$$

(ii.) *Monotonie*: Nechť $f,g \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$, $f \leq g$ na $\langle a,b \rangle$. Pak

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(iii.) *Aditivita*: Nechť $c \in (a,b)$ a f definovaná na $\langle a,b \rangle$. Pak

$$f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle) \Leftrightarrow f \in \mathcal{R}(\langle a,c \rangle) \ \wedge \ f \in \mathcal{R}(\langle c,b \rangle),$$

a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(iv.) *Absolutní konvergence*: Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$, pak $|f| \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$ a platí

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f| \, .$$

Věta (vztah Riemannova integrálu a primitivní funkce) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$. Pak funkce $F(x) := \int_a^x f$, $\forall x \in \langle a,b \rangle$ je spojitá v $\langle a,b \rangle$ a $F'(x) = f(x)$ pro všechny body spojitosti f.

Věta (o rovnosti integrálů) $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{R}(\langle a,b \rangle)$ a $g : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ taková, že $g = f$ na $\langle a,b \rangle \backslash K$, kde K je konečná množina. Potom

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

Věta (vlastnosti Newtonova integrálu) Newtonův integrál má vlastnosti *linearity* a *monotonie* stejné jako Riemannův. Dále

(iii.) *Linearita*: Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c \in (a,b)$. Pak

$$f \in \mathcal{N}(\langle a,c \rangle),\ f \in \mathcal{N}(\langle c,b \rangle),\ \text{f spojitá v } c\ \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}(\langle a,b \rangle).$$

(iv.) Pokud $|f| \in \mathcal{N}((a,b))$, f spojitá, pak $f \in \mathcal{N}((a,b))$.

Definice Řekneme, že funkce f je *stejnoměrně spojitá* na intervalu I, pokud

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in I :\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

1.3.3 Metody výpočtu

Věta (integrace per partes) Nechť $a,b,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha < \beta$, F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní funkce g na (a,b). Pak na (a,b) platí

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx.$$

Věta (substituční metody) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a

(i.) F je primitivní funkce k f na (a,b) a $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$, $\varphi'(t)$ existuje $\forall t \in (\alpha,\beta)$. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c \quad \forall t \in (\alpha,\beta).$$

(ii.) $\varphi : (\alpha,\beta) \xrightarrow{na} (a,b)$, $0 \neq \varphi'(t)\ \forall t \in (\alpha,\beta)$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a G je primitivní funkce k $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na (a,b). Pak

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(x)).$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (per partes pro Newtonův integrál) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a F je primitivní funkcí k f na (a,b) a G je primitivní funkce k g na (a,b). Pak

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG.$$

Věta (o střední hodnotě pro integrály I.) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C(\langle a,b\rangle)$, $g \geq 0$ v $\langle a,b\rangle \setminus K$, kde K je konečná. Pak

$$\exists \xi \in \langle a,b\rangle : \int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g,$$

pokud integrály $\int_a^b fg$ a $\int_a^b g$ existují.

Věta (o střední hodnotě pro integrály II.) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a $g : \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ monotónní a spojitá. Pak

$$\exists \xi \in \langle a,b\rangle : \int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f.$$

Tyhle dvě věty nemusí asi být tolik důležité, ale věty o středních hodnotách jsou moje fave.

Postup integrace racionální funkce Nechť $Q(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$.

1. Pokud $\mathrm{st}P \geq \mathrm{st}Q$ tak částečné dělení polynomů na tvar $P_1 + \frac{P_2}{Q}$.
2. Rozklad Q na součin ireducibilních dvou a trojčlenů.
3. Rozklad na parciální zlomky.
4. Integrace parciálních zlomků.

Detailní přístup je popsaný na webových stránkách Mgr. Kristýny Kuncové. V archivu má cvika z Analýz 1 a 2 a v nich skvělé materiály.

Goniometrické substituce

1. Pokud $\mathrm{R}(\sin x,\cos x) = \mathrm{R}(-\sin x,-\cos x)$ pak se používá substituce $t = \tan x$, pak

$$dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\ \sin x\cos x = \frac{t}{1+t^2}.$$

2. V jakémkoliv případě lze použít substituci $t = \tan \frac{x}{2}$. Pak

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Věta (Integrální kritérium pro konvergenci řad) Nechť f je spojitá, kladná a nerostoucí na $\langle n_0,\infty)$ a nechť $a_n = f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \int_{n_0}^{\infty} f(x)dx < \infty.$$

Tady se ještě hodí vědět: délka křivky, objem rotačního tělesa, Fubiniova věta a Fubini o substituci. Moc zmatený a ugh.

1.3.4 Základní kritéria existence

Věta (existence Riemannova integrálu I.) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak
$f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Věta (existence Riemannova integrálu II.) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f monotónní na $\langle a,b\rangle$. Pak $f \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$.

Věta (existence Riemannova integrálu III.) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f omezená na $\langle a,b\rangle$. Pak platí

$$\int_a^b f \text{ existuje } \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists D \text{ dělení } \langle a,b\rangle :\ S(f,D) - s(f,D) < \epsilon.$$

Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (existence Newtonova integrálu) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a f je spojitá a omezená na (a,b). Pak $f \in \mathcal{N}((a,b))$.

Věta (srovnávací kritéria pro Newtonův integrál) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

(i.) Pokud $0 \leq f \leq g$ na $\langle a,b)$, f spojitá na $\langle a,b)$, pak

$$g \in \mathcal{N}((a,b)) \Rightarrow f \in \mathcal{N}((a,b)).$$

(ii.) Pokud f a g jsou nezáporné spojité na $\langle a,b)$ a platí

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = c,\ c \in (0,\infty).$$

Pak $f \in \mathcal{N}((a,b)) \Leftrightarrow g \in \mathcal{N}((a,b))$.

Věta (Abel-Dirichlet pro Newtonův integrál) Nechť $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f : \langle a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a F je primitivní funkce k f na $\langle a,b)$, $g : \langle a,b) \to \mathbb{R}$ monotónní a spojitá. Nechť platí alespoň jedna z následujících podmínek:

(A) $f \in \mathcal{N}((a,b))$ a g je omezená na (a,b),

(D) F omezená na (a,b) a $\lim_{x\to b-} g(x) = 0$.

Pak $fg \in \mathcal{N}((a,b))$.

1.4 Funkce více proměnných

1.4.1 Diferenciál a parciální derivace

Tahle kapitola je dost zmatená, ale (zatím) se mi nepodařilo to srovnat. You try.

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$. *Parciální derivace* f v bodě a podle i-té proměnné je

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^i) - f(a)}{t}.$$

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. *Derivací* f *v bodě* a *ve směru* $\vec{v}$ je

$$D_{\vec{v}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}.$$

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární zobrazení. Řekneme, že L je *totální diferenciál* funkce f v bodě a, jestliže

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Věta (o tvaru totálního diferenciálu) Má-li f v bodě a totální diferenciál, pak je v a spojitá, existují v a všechny parciální derivace a platí

$$L(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Věta (postačující podmínka pro existenci totálního diferenciálu) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě a spojité všechny parciální derivace, pak má v a totální diferenciál.

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a f má v a všechny parciální derivace vlastní. *Gradient* funkce f v bodě a je

$$\bigtriangledown f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

Gradient udává směr největšího růstu funkce.

Věta (o gradientu a derivacích ve směru) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Pak $D_{\vec{v}} f(a) = \langle \bigtriangledown f(a), \vec{v} \rangle$.

Definice Nechť F je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^n$ a L je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$. Pak L je *derivací* F v a, pokud

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(a + h) - F(a) - L(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Pak
$$F'(a) = \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a)\right)_{i,j=1}^{k,n}.$$
Tato matice se nazývá *Jakobiho matice.* Je-li $k = n$ pak determinant této matice nazýváme *Jakobián.*

Věta (aritmetika totálního diferenciálu) Nechť $f,g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mají totální diferenciály L_f a L_g v $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak existují totální diferenciály $L_{f\pm g}(a)$, $L_{fg}(a)$, $L_{\alpha f}(a)$ a $L_{\frac{f}{g}}(a)$ pro $g(a) \neq 0$ a platí vztahy
$$L_{f\pm g}(a) = L_f(a) \pm L_g(a),$$
$$L_{\alpha f}(a) = \alpha L_f(a),$$
$$L_{fg}(a) = L_f(a)g(a) + L_g(a)f(a),$$
$$L_{\frac{f}{g}}(a) = \frac{g(a)L_f(a) - f(a)L_g(a)}{g^2}.$$

Věta (o diferenciálu složeného zobrazení, řetízkové pravidlo): Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, $a \in \mathbb{R}^s$, $b \in \mathbb{R}^n$, $b = [g_1(a), \dots, g_n(a)]$ a nechť f má totální diferenciál v b a g_i mají totální diferenciál v a pro všechny $i = 1, \dots, n$. Buď $H(x) = f\Big([g_1(x), \dots, g_n(x)]\Big)$. Pak H má v a totální diferenciál a platí
$$L_H(a)(h) = \sum_{i=1}^{s} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)\right] h_i,$$
speciálně
$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(b)\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a).$$

Věta (o střední hodnotě) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má všechny parciální derivace na úsečce mezi $a,b \in \mathbb{R}^n$. Pak existuje $\xi \in (0,1)$ takové, že
$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big(a + \xi(b-a)\Big) \cdot (b_i - a_i).$$

Definice Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbb{R}$ má v G všechny paricální derivace a nechť $a \in G$. *2. parciální derivace* f jsou
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a).$$

Věta (záměnnost parciálních derivací druhého řádu) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v $a \in \mathbb{R}^n$ spojitou parciální derivaci $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Pak tam je spojitá i parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ a tyto dvě se rovnají.

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ mají totální diferenciál v bodě a pro všechny $i = 1, \dots, n$. *Druhý diferenciál* funkce f v bodě a je

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i \cdot k_j,$$

maticově

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^{n}.$$

Tato matice se nazývá *Hessova matice*.

Definice Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Množina $C^k(G)$ je množina těch funkcí, které mají spojité parciální derivace k-tého řádu na G.

Věta (postačující podmínka pro existenci druhého diferenciálu) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a $f \in C^2(G)$. Pak f má na G druhý diferenciál.

1.4.2 Implicitní funkce

Definice *Explicitní vyjádření funkce* je $y = y(x)$ a *implicitní vyjádření funkce* je $F(x,y) = 0$.

Věta (o implicitní funkci) Nechť $k \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ otevřená množina, $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $F = F(x_1, \dots, x_n, y) = F(x,y)$. Nechť $[a,b] = [a_1, \dots, a_n, b] \in \Omega$ a nechť platí

i. $F(a,b) = 0$,

ii. $F \in C^k(\Omega)$,

iii. $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Pak $\exists \delta_1$, δ_2:

$$\text{(i.) } \forall x \in \mathcal{U}(a,\delta_1)\ \exists! y \in \mathcal{U}(b,\delta_2) : F(x,y) = 0, \text{ tj. } y = y(x),$$

$$\text{(ii.) } y \in C^k\Big(\mathcal{U}(a,\delta_1)\Big) \text{ a } \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}, \forall x \in \mathcal{U}(a, \delta_1),\ i = 1, \dots, n.$$

Věta (o implicitním zobrazení) Nechť $k \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ otevřená množina, $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $F = F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = F(x,y)$, nechť $[a,b] = [a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m] \in \Omega$ a platí

i. $F(a,b) = 0$,

ii. $F \in C^k(\Omega)$,

iii. $\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}(a,b) = \det \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b) \right)_{i,j=1}^{m} \neq 0.$

Pak $\exists \mathcal{U}(a) \subset \mathbb{R}^n$, $\exists \mathcal{U}(b) \subset \mathbb{R}^m$:

$$\forall x \in \mathcal{U}(a) \exists! y \in \mathcal{U}(b) : F(x,y) = 0, \text{ tj. } y = (y_1(x), \ldots, y_m(x)) \text{ a } y \in C^k\Big(\mathcal{U}(a)\Big).$$

1.4.3 Volné a vázané extrémy funkcí více proměnných

Definice Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že funkce f má v a *globální maximum*, pokud $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ f(a) \geq f(x)$. Řekneme, že funkce f má v bodě a *lokální maximum*, jestliže $\exists \mathcal{U}(a) : \ f(a) \geq f(x) \ \forall x \in \mathcal{U}(a)$. Tyto extrémy jsou *volné.*
Analogicky minimum.

Definice Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in M$ *maxima vzhledem k* M, pokud $\forall x \in M : \ f(x) \leq f(a)$. Řekneme, že funkce f má v a *lokální maximum vzhledem k* M, pokud $\exists \mathcal{U}(a) : \ f(x) \leq f(a) \ \forall x \in \mathcal{U}(a) \cap M$. Tyto extrémy jsou *vázané.*
Analogicky minimum.

Definice Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená a nechť $f : G \to \mathbb{R}$. Řekneme, že $x_0 \in G$ je *stacionárním bodem* f, jestliže má f v x_0 všechny parciální derivace prvního řádu nulové.

1.4.4 Nutné a postačující podmínky pro volné extrémy, nutné podmínky pro vázané extrémy

Věta (nutná podmínka pro volný extrém) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{R}$. Má-li f v bodě $a \in G$ lokální extrém vzhledem k G, pak $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ buď neexistuje nebo je nulová pro každé $j = 1, \ldots, n$.

Věta (postačující podmínka pro volný extrém) Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $f : G \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(G)$ a $\bigtriangledown f(a) = 0$.

i. Jestliže $D^2 f(a)$ je pozitivně definitní, pak a je lokální minimum,

ii. jestliže $D^2 f(a)$ je negativně definitní, pak a je lokální maximum,

iii. jestliže $D^2 f(a)$ je indefinitní, pak v a není extrém,

kde $D^2 f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^n$.

Věta (Lagrangeova o vázaných extrémech) Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n+m}$ a $f, g_1, \ldots, g_m : G \to \mathbb{R}$, $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(G)$. Nechť $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+m} : g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0\}$ a nechť $\bigtriangledown g_1, \ldots, \bigtriangledown g_m$ jsou lineárně nezávislé na M. Pokud f má v $a \in M$ lokální extrém vzhledem k M, pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\bigtriangledown f(a) + \lambda_1 \bigtriangledown g_1(a) + \ldots + \lambda_m \bigtriangledown g_m(a) = 0.$$

1.5 Obyčejné diferenciální rovnice

1.5.1 Věta o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy

Definice *Obyčejná diferenciální rovnice* je rovnice tvaru
$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, kde F je reálná funkce.

Definice *Řešením diferenciální rovnice* $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ rozumíme funkci $y = y(x)$ definovanou v neprázdném intervalu (a,b) takovou, že existuje vlastní $y^{(n)}(x)$ pro všechny $x \in (a,b)$ a platí $F(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}(x)) = 0$ na (a,b).

Definice Řekneme, že diferenciální rovnice je *rozřešená* vzhledem k $y^{(n)}$, pokud je tvaru $y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$.

Definice Řekneme, že $(\tilde{y},\tilde{I})$ je *rozšířením řešení* (y,I), pokud je řešením, platí $I \subset \tilde{I}$ a $y = \tilde{y}$ na I.

Definice Řekneme, že (y,I) je *maximální řešení*, pokud neexistuje jeho rozšíření kromě triviálního.

Věta (Peanova) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $[x_0,y_0,\dots,y_{n-1}] \in \Omega$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak existuje okolí $\mathcal{U}(x_0)$ a funkce y definované na $\mathcal{U}(x_0)$ takové, že $y^{(n)}(x) = f(x,y(x),\dots,y^{(n-1)}(x))$ a splňují $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, …, $y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}$.

Definice Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je *lokálně Lipschitzovská vzhledem k posledním n proměnným*, pokud pro každou otevřenou $U \subset \Omega$ existuje $K > 0$ takové, že

$$\forall [x_0,y], [x_0,\tilde{y}] \subset U : \ |f(x_0,y) - f(x_0,\tilde{y})| \le K \|y - \tilde{y}\|_{\mathbb{R}^n},$$

kde y a $\tilde{y}$ jsou n-složkové proměnné.

Věta (Picardova) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $[x_0,y_0,\dots,y_{n-1}] \in \Omega$ a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, která je navíc lokálně Lipschitzovská vzhledem k posledním n proměnným. Pak existuje okolí $\mathcal{U}(x_0)$ a funkce y definované na $\mathcal{U}(x_0)$ takové, že $y^{(n)}(x) = f(x,y(x),\dots,y^{(n-1)}(x))$ a splňují
$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, …, $y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}$. Každá dvě řešení navíc splývají v průniku svých definičních oborů a maximální řešení je určeno jednoznačně.

Věta (Peanova pro $n = 1$) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $[x_0,y_0] \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak existuje $\delta > 0$ a funkce y definované na $\mathcal{U}(x_0,\delta)$ takové, že $y'(x) = f(x,y(x))$ $\forall x \in \mathcal{U}(x_0,\delta)$ a $y(x_0) = y_0$.

Věta (Picardova pro $n = 1$) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $[x_0,y_0] \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá a lokálně Lipschitzovská vzhledem k y. Pak existuje $\delta > 0$ a funkce y definované na $\mathcal{U}(x_0,\delta)$ takové, že $y'(x) = f(x,y(x))$ $\forall x \in \mathcal{U}(x_0,\delta)$ a $y(x_0) = y_0$. Každá dvě řešení navíc splývají v průniku svých definičních oborů a maximální řešení je určeno jednoznačně.

Věta (o tvaru řešení) Nechť $I \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $y \in C(I)$. Pak y je na I řešením rovnice $y' = f(x,y)$ s podmínkou $y(x_0) = y_0$ právě tehdy, když platí

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt, \quad \forall x \in I.$$

Věta (o lepení řešení) Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta,\gamma > 0$, $f \in C^2((a-\delta,a+\gamma))$. Buď y_L řešení $y' = f(x,y)$ na $(a-\delta,a)$ a buď y_R řešení $y' = f(x,y)$ na $(a,a+\gamma)$. Pokud platí $\lim_{x\to a-} y_L(x) = A = \lim_{x\to a+} y_R(x)$, pak

$$y(x) = \begin{cases} y_L(x), & x \in (a-\delta,a), \\ A, & x = a, \\ y_R(x), & x \in (a,a+\delta), \end{cases}$$

je řešením $y' = f(x,y)$ na $(a-\delta,a+\gamma)$.

1.5.2 Jednoduché rovnice prvního řádu a lineární rovnice vyššího řádu s konstantními koeficienty

Věta (existence a jednoznačnost pro separované proměnné) Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $(c,d) \subset \mathbb{R}$, $f \in C((a,b))$, $g \in C((c,d))$, $g \neq 0$ v (c,d). Nechť $x_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$. Pak existuje právě jedno y řešení rovnice $y'(x) = f(x)g(y)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$, definičním oborem je maximální otevřený interval $I \subset (a,b)$ splňující $G(y(x)) = F(x) + k$, kde $k \in \mathbb{R}$ je konstanta a

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt, \quad G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}dt.$$

Řešení je pak tvaru $y(x) = (G^{-1} \circ F)(x)$, $\forall x \in I$.

Definice Úloha ve tvaru z předchozí věty se nazývá *diferenciální rovnice se separovanými proměnnými.*

Věta (metoda integračního faktoru) Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $p,q \in C((a,b))$, P primitivní funkce k p na (a,b) splňující $P(x_0) = 0$, kde $x_0 \in (a,b)$. Nechť $y_0 \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení rovnice $y' + py = q$ splňující $y(x_0) = y_0$ a splňuje

$$y(x)e^{P(x)} = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}dt + y_0.$$

Definice Rovnice tvaru $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = q(x)$, kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $(a,b) \subset R$ a $q \in C((a,b))$ se nazývá *lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty.* Příslušná *homogenní rovnice* je rovnice tvaru $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$.

Definice Bázi všech maximálních řešení homogenní rovnice nazýváme *fundamentální systém* rovnice.

Definice Polynom $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ nazýváme *charakteristický polynom* rovnice.

Věta (o fundamentálním systému) Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, $s \in \mathbb{N}$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice s násobnostmi $r_1, \ldots, r_s$ a nechť $\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_l + i\beta_l$, $l \in \mathbb{N}$ jsou všechny různé komplexní kořeny s násobnostmi $q_1, \ldots, q_l$. Pak funkce

$$\begin{gathered}
e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x},\\
e^{\lambda_2 x},\ xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{r_2-1}e^{\lambda_2 x},\\
\ldots\\
e^{\lambda_s x},\ xe^{\lambda_s x}, \ldots, x^{r_s-1}e^{\lambda_s x},\\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \ldots, x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \ldots, x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\\
e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x,\ xe^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x, \ldots, x^{q_2-1}e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x,\\
e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x,\ xe^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x, \ldots, x^{q_2-1}e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x,\\
\ldots\\
e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x,\ xe^{\alpha_l x}\cos\beta_l x, \ldots, x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\cos\beta_l x,\\
e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x,\ xe^{\alpha_l x}\sin\beta_l x, \ldots, x^{q_l-1}e^{\alpha_l x}\sin\beta_l x,
\end{gathered}$$

tvoří fundamentální systém homogenní rovnice.

Věta (řešení rovnice se specifickou pravou stranou) Nechť $\alpha + i\beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ je k-násobný kořen charakteristického polynomu. Pak rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = Q_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

kde Q_1, Q_2 jsou polynomy má řešení tvaru

$$y(x) = x^k P_1(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + x^k P_2(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x \in \mathbb{R},$$

kde P_1 a P_2 jsou vhodné polynomy stupně $\leq \max\{\mathrm{st}Q_1, \mathrm{st}Q_2\}$.

Věta (o řešení homogenní rovnice) Maximální řešení homogenní rovnice jsou definována na celém $\mathbb{R}$ a tvoří podprostor dimenze n prostoru $C^n(\mathbb{R})$.

Věta (variace konstant) Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $q : (a,b) \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na (a,b). Nechť funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém homogenní rovnice. Nechť jsou funkce $c_1', \ldots, c_n'$ řešením soustavy

$$\begin{gathered}
c_1'(x)y_1(x) + \ldots + c_n'(x)y_n(x) = 0\\
c_1'(x)y_1'(x) + \ldots + c_n'(x)y_n'(x) = 0\\
\ldots\\
c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0\\
c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = q(x),
\end{gathered}$$

a c_i je primitivní funkcí k c_i' na (a,b) pro $i = 1, \ldots, n$. Pak

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i(x)$$

je řešením rovnice $y_{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = q(x)$ na (a,b).

2. Algebra

Algebru nesnáším a učit se jí mě vůbec nebavilo. Některá témata jsem si zpracovala divně a tak je tu vynechám. Je to třeba metoda nejmenších čtverců, pseudoinverze, nebo rozklady matic. Konkrétně rozklady matic jsou pěkná nuda.Taky důkazy jsem si vybírala náhodně a nechci to tak doporučovat. Co já vím, tak u determinantů se na ně ptali (naštěstí ne mě). Have fun.

2.1 Matice a determinanty, soustavy lineárních rovnic

2.1.1 Základní pojmy a operace s maticemi a jejich vlastnosti

Definice *Vektor* je uspořádaná n-tice reálných čísel.

Předpokládám, že sčítání, odčítání vektorů a opačný vektor definovat nemusím.

Definice *Soustavou lineárních rovnic* rozumíme soustavu tvaru

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n,$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{nn}, b_1, \ldots, b_n$ jsou konstanty.

Definice *Ekvivalentní úprava* je taková úprava, která nemění množinu všech řešení.

Definice *Matice* je obdélníkové schéma s reálnými (komplexními) čísly.

Opět nebudu definovat součet matic, násobení skalárem, nulovou matice, diagonálu, čtvercovou matici, diagonální matici ani jednotkovou matici.

Definice *Transponovaná matice* k matici $\mathbb{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ je $\mathbb{A}^T = (b_{ji})_{n\times m}$, kde $b_{ji} = a_{ij}$.

Věta (vlastnosti operací s maticemi) Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ jsou stejnědimenzionální matice, $\mathbb{O}$ je nulová matice a s,t jsou reálné konstanty. Pak

- $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C} = \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C})$,
- $\mathbb{A} + \mathbb{O} = \mathbb{A}$,
- $\mathbb{A} + (-\mathbb{A}) = \mathbb{O}$,

- $\mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$,
- $s(t\mathbb{A}) = (st)\mathbb{A}$,
- $(s+t)\mathbb{A} = s\mathbb{A} + t\mathbb{A}$,
- $s(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = s\mathbb{A} + s\mathbb{B}$,
- $(\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$,
- $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$,
- $(s\mathbb{A})^T = s\mathbb{A}^T$.

Definice *Součin* matice $\mathbb{A} = (\mathbf{a_1}|\mathbf{a_2}|\ldots|\mathbf{a_n})$, kde $\mathbf{a_1},\ldots,\mathbf{a_n}$ jsou vektory, s vektorem $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ je

$$\mathbb{A}\mathbf{b} = b_1\mathbf{a_1} + b_2\mathbf{a_2} + \ldots + b_n\mathbf{a_n}.$$

Definice *Součin dvou matic* $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ a $\mathbb{B} = (\mathbf{b_1}|\ldots|\mathbf{b_p})$ typu $n \times p$ je matice

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \Big(\mathbb{A}\mathbf{b_1}|\mathbb{A}\mathbf{b_2}|\ldots|\mathbb{A}\mathbf{b_p}\Big).$$

Součin matic je definovaný pouze pro matice vhodných typů, pro jiné definován není.

Tvrzení (o prvku na místě ij) Prvek na místě (i,j) v součinu matic $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ je

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_i^T b_j.$$

Věta (vlastnosti násobení matic) Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ a $\mathbb{E}$ jsou matice vhodného typu a $\mathbb{I}$ jsou jednotkové matice. Pak platí

- násobení matic není komutativní,
- $(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{C}$,
- $\mathbb{C}(\mathbb{D} + \mathbb{E}) = \mathbb{C}\mathbb{D} + \mathbb{C}\mathbb{E}$,
- $(\mathbb{B}\mathbb{C})\mathbb{D} = \mathbb{B}(\mathbb{C}\mathbb{D})$,
- $s(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (s\mathbb{A})\mathbb{B} = \mathbb{A}(s\mathbb{B})$,
- $(\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T$,
- $\mathbb{I}_m\mathbb{A} = \mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{I}_n$.

Dál je dobré vědět, co je permutační matice, horní a dolní trojúhelníková matice. Součin těchto stejných dvou dá vždy také takovou.

Definice Matice $\mathbb{A}$ je *invertovatelná*, pokud je čtvercová a existuje matice $\mathbb{X}$ taková, že $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{X}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$. Pak matici $\mathbb{X}$ značíme $\mathbb{A}^{-1}$ a nazýváme *inverzem* k matici $\mathbb{A}$.

Věta (o invertovatelnosti a regularitě) Každá invertovatelná matice je regulární.
Ano, regularita ještě nebyla "zavedená", ale tohle je podle mě fajn vědět už tady.

Věta (o jednoznačnosti inverzu) Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice a nechť $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou čtvercové matice takové, že platí $\mathbb{Y}\mathbb{A} = \mathbb{I}_n$ a $\mathbb{A}\mathbb{X} = \mathbb{I}_n$, pak $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

Věta (vlastnosti inverzu) Nechť $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ jsou regulární, pak platí

- matice $\mathbb{A}^{-1}$ je regulární a platí $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$,
- matice $\mathbb{A}^T$ je regulární a platí $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$,
- matice $t\mathbb{A}$ je regulární a platí $(t\mathbb{A})^{-1} = t^{-1}\mathbb{A}^{-1}$,
- matice $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je regulární a platí $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

2.1.2 Hodnost matice

Definice *Hodnost matice* je počet nenulových řádků v matici v odstupňovaném tvaru. Značíme rank($\mathbb{A}$).
Odstupňovaný tvar v pozdějších kapitolách. Fakt nevím proč je to seřazený takhle.

Definice *Hodnost matice* je dimenze řádkového a sloupcového prostoru matice.

Věta (o hodnosti matice) Platí rank($\mathbb{A}$) = rank($\mathbb{A}^T$)$\leq m, n$. Hodnost se nemění elementárními řádkovými úpravami.

Věta (o hodnosti součinu) platí rank($\mathbb{A}\mathbb{B}$)$\leq$rank($\mathbb{A}$), rank($\mathbb{A}\mathbb{B}$)$\leq$rank($\mathbb{B}$). Pokud je matice $\mathbb{R}$ regulární, pak platí rank($\mathbb{R}\mathbb{A}$) = rank($\mathbb{A}\mathbb{R}$) = rank($\mathbb{A}$).

Věta (o hodnosti čtvercové matice) Matice $\mathbb{A}$ je regulární matice typu $n \times n$ právě tehdy, když rank($\mathbb{A}$)=n.

Věta (Frobeniova) Soustava $\mathbb{A}x = b$ má řešení právě tehdy, když rank($\mathbb{A}$) = rank($\mathbb{A}|b$).

2.1.3 Soustavy lineárních rovnic, Gaussova eliminace, podmínky řešitelnosti

Definice *Lineární rovnice* je rovnice tvaru $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, kde $a_1, \ldots, a_n, b$ jsou dané konstanty a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

Definice *Soustavou lineárních rovnic* rozumíme soustavu tvaru

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array},$$

kde $a_{11}, \ldots, a_{nn}, b_1, \ldots, b_n$ jsou dané konstanty a $x_1, \ldots, x_n$ jsou neznámé.

Definice *Ekvivalentní úpravy* jsou takové úpravy, které nemění množinu všech řešení. Symbol je pro ekvivalentní úpravy je $\sim$.

Definice *Elementární úpravy* nazýváme prohození dvou řádků, vynásobení řádku konstantou $t \neq 0$ a přičtení s-násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Věta (o elementárních úpravách) Elementární úpravy jsou ekvivalentní.

Definice *Rozšířená matice soustavy* z definice je matice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array} \right).$$

Je-li $b = 0$, pak jde o *homogenní soustavu.*

Definice *Matice v odstupňovaném tvaru* je matice typu $m \times n$ taková, která splňuje následující: existuje $r \in \{0,1,\ldots,m\}$ takové, že řádky $r+1, \ldots, m$ jsou nulové a pro indexy sloupce s prvním nenulovým číslem platí $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$.

Gaussova eliminace je proces pro převod matice do odstupňovaného tvaru pomocí ekvivalentních úprav. Eliminace jednoho sloupce funguje následujícím způsobem:

1. Najdeme první nenulový sloupec s indexem k_1. Pokud nenulový sloupec neexistuje, pak je matice nulová a tím pádem v odstupňovaném tvaru.

2. Pokud $a_{1k_1} = 0$, pak prohodíme první řádek s libovolným řádkem i, kde $a_{ik_1} \neq 0$. Výběr specifického řádku závisí na implementaci.

3. Pro každé $i = 2,3,\ldots,m$ přičteme $\left(-\frac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}}\right)$-násobek prvního řádku k i-tému řádku.

4. Postup dále opakujeme s maticí bez prvního řádku.

Věta (o Gaussově eliminaci) Gaussova eliminace vždy převede matici do odstupňovaného tvaru.

Definice *Hodnost matice* je počet nenulových řádků po Gaussově eliminaci.

Definice *Bázové sloupce* jsou sloupce s indexy $k_1, \ldots, k_r$.

Věta (řešitelnost) Po použití Gaussovy eliminace na rozšířenou matici soustavy $(\mathbb{A}|b)$. Pokud b bude bázový sloupec, tak nastává situace $0x_1 + \ldots + 0x_n = d_r$ a soustava nemá řešení. V opačném případě řešení mám.

Způsob pro nalezení je *zpětná substituce*. Nechť P jsou nebázové sloupce. Pak $x_p, p \in P$ jsou *volné proměnné*, neboli *parametry*. Platí, že každá volba hodnot volných proměnných dává právě jedno řešení. Množina řešení pak vypadá následovně

$$\{u + \sum_{p \in P} t_p v_p : t_p \in \mathbb{R}\ \forall p \in P\}.$$

Věta (řešitelnost) Soustava je řešitelná právě tehdy, když b je lineární kombinací sloupců z $\mathbb{A}$.

Věta (Frobeniova) Soustava je řešitelná právě tehdy, když rank($\mathbb{A}$)=rank($\mathbb{A}|b$).

Věta (o všech řešeních) Nechť $u = (x_1, \ldots, x_n)$ je řešení soustavy $\mathbb{A}x = b$ a $W_{\mathbb{A}}$ je množina všech řešení homogenní soustavy. Pak $u + W_{\mathbb{A}}$ je množina všech řešení soustavy.

2.1.4 Determinanty a metody jejich výpočtu

Definice *Permutací* množiny X je bijekce $X \to X$. Symbolem S_X je množina všech permutací na X.

Věta (vlastnosti permutace)

i. $\pi \in S_X \Rightarrow \pi^{-1} \in S_X$,

ii. $\pi, \rho \in S_X \Rightarrow \pi \circ \rho \in S_X$.

Definice *Zápis permutace* na množině $X = (s_1, \ldots, s_n)$ je tvaru

$$\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix}.$$

V případě na množině $X = (1,2, \ldots, n)$ tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix},$$

tj. $\pi(i) = t_i$.

Definice *Cyklus* délky k je permutace splňující $\pi(x_1) = x_2$, $\pi(x_2) = x_3$, $\ldots$, $\pi(x_k) = x_1$ a $\pi(y) = y$, $\forall y \notin \{x_1, \ldots, x_k\}$. Permutaci tvořenou jedním cyklem značíme následovně $\pi = (x_1 x_2 \ldots x_k)$.

Definice Dva cykly jsou *nezávislé*, pokud množiny prvků v cyklech jsou disjunktní.

Definice *Transpozice* je cyklus délky dva.

Věta (rozklad permutace) Každou permutaci lze zapsat jako složení nezávislých cyklů. Tento zápis je jednoznačný až na pořadí cyklů a nazývá se *cyklický*.

Věta (o transpozicích) Každá permutace je složení transpozic.

Zápis složením transpozic se dá zapsat různými způsoby, ale jeho parita (sudost/lichost počtu transpozic v zápisu).

Definice *Znaménko permutace* se značí $\text{sgn}\pi$ a je definováno jako 1, pokud je permutace *sudá*, tedy má sudý počet transpozic, a jako -1, pokud je permutace *lichá*, tedy má lichý počet transpozic.

Věta (výpočet znaménka permutace) Nechť pro permutaci π platí
$\pi = \pi_1 \pi_2 \ldots \pi_m$ rozklad na cykly s délkami $k_1, k_2, \ldots, k_m$. Pak $\text{sgn}(\pi) = \prod_{i=1}^{m} (-1)^{(k_i - 1)}$.

Věta (výpočet znaménka permutace II.) Platí

i. sgn(id)=1,

ii. $\text{sqn}(\pi^{-1})$ $=\text{sgn}(\pi)$,

iii. $\text{sgn}(\pi\rho) = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\rho)$.

Definice *Determinant* matice $\mathbb{A}$ je definován následovně

$$\det\mathbb{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} \text{sgn}(\pi) a_{1r_1} a_{2r_2} \ldots a_{nr_n},$$

kde

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ r_1 & \ldots & r_n \end{pmatrix}.$$

Věta (výpočet determinantu) Platí

i. pro horní trojúhelníkovou matici je determinant součin prvků na diagonále,

ii. $\det(\mathbb{A}^T) = \det(\mathbb{A})$,

iii. $\det(v_1|v_2|\ldots|v_i + u|\ldots|v_n) = \det(v_1|v_2|\ldots|v_i|\ldots|v_n) + \det(v_1|v_2|\ldots|u|\ldots|v_n)$,

iv. $\det(v_1|v_2|\ldots|t \times v_i|\ldots|v_n) = t \times \det(v_1|v_2|\ldots|v_i|\ldots|v_n)$,

v. Pokud matice $\mathbb{B}$ vznikne permutací π sloupců matice $\mathbb{A}$, pak det($\mathbb{B}$) =det($\mathbb{A}$)sgn(π).

Věta (o regularitě) Matice $\mathbb{A}$ je regulární právě tehdy, když má nenulový determinant.

Definice *Minor* matice $\mathbb{A}$ typu $m \times n$ je determinant matice vzniklé z matice $\mathbb{A}$ výběrem k sloupců a k řádků.

Věta (o determinantu součinu) Nechť pro matice $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ existuje jejich součin. Pak platí det($\mathbb{A}\mathbb{B}$)=det($\mathbb{A}$)det($\mathbb{B}$).

Věta (o determinantu inverzu) Nechť je matice $\mathbb{A}$ invertibilní. Pak platí det($\mathbb{A}^{-1}$)=det($\mathbb{A}$)$^{-1}$.

Věta (Cramérovo pravidlo) Nechť je matice $\mathbb{A}$ regulární a $\mathbb{A}x = b$. Pak vektor x lze vypočítat jako

$$x_j = \frac{\det\mathbb{A}_j}{\det\mathbb{A}},$$

kde $\mathbb{A}_j$ je matice $\mathbb{A}$, která má místo j-tého sloupce vektor b.

Definice Nechť $\mathbb{A}$ je čtvercová matice řádu n, a a_{ij} je její prvek. *Algebraický doplněk* matice $\mathbb{A}$ prvku a_{ij} je prvek

$$\mathbb{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbb{M}_{ij}),$$

kde $\mathbb{M}_{ij}$ je matice $\mathbb{A}$ bez i-tého řádku a j-tého sloupce.

Věta (rozvoj podle sloupce) Nechť je matice $\mathbb{A}$ čtvercová řádu n. Pak platí

$$\det\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbb{A}_{ij}.$$

S použitím transpozice se dá odvodit i pravidlo pro rozvoj podle řádku:

$$\det\mathbb{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbb{A}_{ij}.$$

Věta (o falešném rozvoji) Platí $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbb{A}_{ik} = 0$, když $j \neq k$.

Definice *Adjungovaná matice* k matici $\mathbb{A}$ je matice adj($\mathbb{A}$) která má na místě (i,j) prvek $\mathbb{A}_{ji}$.

Věta (o adjungované matici) Platí adj($\mathbb{A}$)$\cdot\mathbb{A}$ = $\mathbb{A}\cdot$adj($\mathbb{A}$)=det($\mathbb{A}$)$\mathbb{I}_n$, tj. pro regulární matici $\mathbb{A}$ platí

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\mathbb{A}}{\det\mathbb{A}}.$$

2.2 Vektorové prostory

2.2.1 Pojem vektorového prostoru, lineární nezávislost, lineární obal, báze a dimenze

Definice *Těleso* je množina prvků T s operacemi sčítání $+ : T \times T \to T$ a násobení $\cdot : T \times T \to T$ splňující:

- $a + b \in T$, $a \cdot b \in T$, $\forall a,b \in T$,
- *asociativita:* $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $\forall a,b,c \in T$,
- *komutativita:* $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$, $\forall a,b \in T$,
- *existence nulového prvku:* $\exists 0 \in T : \; a + 0 = a$,
- *existence jednotkového prvku:* $\exists 1 \in T : \; 1 \cdot a = a$,
- *existence opačného prvku:* $\forall a \in T \; \exists(-a) \in T : \; a + (-a) = 0$,
- *existence inverzu:* $\forall a \in T \; \exists a^{-1} \in T : \; a \cdot a^{-1} = 1$,
- *distributivita:* $(a + b) \cdot c = ac + bc$, $c \cdot (a + b) = ca + cb$.

Definice *Vektorový prostor* nad T je neprázdná množina V se sčítáním $+ : V \times V \to V$ a násobením skalárem $\cdot : T \times V \to V$, splňující

- *komutativita:* $u + v = v + u$, $\forall u,v \in V$,
- *asociativita:* $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u,v,w \in V$,
- *existence nulového prvku:* $\exists \mathbb{O} \in V : \; 0 \cdot u = \mathbb{O}$,
- $r(u + v) = ru + rv$, $\forall r \in T$, $\forall u,v \in V$,
- $(r + s)u = ru + su$, $\forall r,s \in T$, $\forall u \in V$,
- $r(su) = (rs)u$, $\forall r,s \in T$, $\forall u \in V$,
- $1 \cdot u = u$.

Prvky T nazýváme *skaláry*, prvky V nazýváme *vektory*.

Definice Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $X \subseteq V$. *Lineárním obalem* množiny X rozumíme
$\langle X \rangle = \{t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k;\; k \in \mathbb{N}_0,\, v_1, \ldots, v_k \in X,\, t_1, \ldots, t_k \in T\}$, tj. lineární kombinace všech prvků množiny X.

Tvrzení (o lineárním obalu) Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $X \subseteq V$, pak $\langle X \rangle$ je podprostor V.

Definice Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $X \subseteq V$. Pokud $\langle X \rangle = V$, pak X nazveme *množinou generátorů* prostoru V.

Definice *Sloupcový (řádkový) prostor matice* je lineární obal jejích sloupců (řádků), značíme Im($\mathbb{A}$), resp. Im($\mathbb{A}^T$).

Věta (o sloupcových (řádkových) prostorech) Nechť $\mathbb{A}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbb{R}$ je matice typu $m \times m$ regulární. Pak Im($\mathbb{R}\mathbb{A}$)=$\langle \mathbb{R}a_1, \mathbb{R}a_2, \ldots, \mathbb{R}a_n \rangle$. Platí, že elementární sloupcové (řádkové) úpravy nemění sloupcový (řádkový) prostor.

Definice Řekneme, že posloupnost prvků z V je *lineárně závislá*, pokud pro nějaké i platí, že v_i je lineární kombinací $v_1,v_2,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_n$. V opačném případě řekneme, že je *lineárně nezávislá*.

Věta (o nezávislosti) Platí, že posloupnost $\{v_1,\ldots,v_n\}$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když 0 lze vyjádřit pouze jako $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_n$.

Tvrzení (o nezávislosti sloupců matice) Sloupce matice jsou nezávislé, pokud jádro matice je 0, tedy $\mathbb{A}x = 0$ má právě jedno řešení, tj. $x = 0$.

Tvrzení (nezávislost a elementární úpravy) Elementární řádkové i sloupcové úpravy nemění nezávislost řádků i sloupců matice.

Definice *Báze* vektorového prostoru V je posloupnost $(v_1,\ldots,v_n)$, která je lineárně nezávislá a pro kterou platí $\langle v_1,\ldots,v_n \rangle = V$.

Věta (o bázi) Platí

- báze je minimální posloupnost generátorů,
- z každé množiny generátorů prostoru lze vybrat bázi,
- každý konečně generovaný prostor má bázi.

Definice *Dimenze* konečně generovaného prostoru V je počet prvků jeho báze.

Věta (o bázi) Maximální lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru je báze.

Věta (o prostoru dimenze n) Každá množina generátorů prostoru dimenze n má alespoň n prvků a každá n-prvková lineárně nezávislá posloupnost je báze.

Definice Nechť $B = (v_1,\ldots,v_n)$ báze V, $w \in V$. *Souřadnice* w vzhledem k B jsou prvky $(a_1,\ldots,a_n)$ takové, že $w = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n$, značíme $[w]_B$.

Vlastnosti souřadnic Platí

- $[u + w]_B = [u]_B + [w]_B$,
- $[tu]_B = t[u]_B$.

Definice *Matice přechodu* mezi bázemi $B = (v_1, \ldots, v_n)$ a C je

$$[id]_C^B = ([v_1]_C, [v_2]_C, \ldots, [v_n]_C)\,.$$

Věta (o přechodu mezi bázemi) Platí $[x]_C = [id]_C^B [x]_B$.

2.2.2 Steinitzova věta o výměně

Věta (Steinitzova o výměně) Nechť $N = (v_1, \ldots, v_k)$ je lineárně nezávislá posloupnost prvků lineárního prostoru V nad tělesem T a nechť $G = (w_1, \ldots, w_l)$ generuje V. Pak $k \leq l$ a při vhodném uspořádání $G' = (w'_1, \ldots, w'_l)$ posloupnosti G platí, že $(v_1, \ldots, v_k, w'_{k+1}, \ldots, w'_l)$ generuje V.
Zde je vhodné znát celý důkaz. Není nijak složitý, ale nechce se mi psát. Je ve skriptech z LA.

Důsledek I. Každé dvě báze mají stejný počet prvků.

Důsledek II. Každou lineárně nezávislou posloupnost lze doplnit na bázi prvky z libovolné množiny generátorů.

Důsledek III. Maximální posloupnost lineárně nezávislých prvků v konečně generovaném prostoru je bází.

2.2.3 Podprostory a jejich dimenze

Definice Řekneme, že U je *podprostor* lineárního prostoru V, pokud $U \subseteq V$ a je uzavřená na operace sčítání a násobení skalárem. Značíme $U \leq V$.

Věta (o jádru matice) Pro libovolnou matici typu $m \times n$ nad tělesem T platí, že její jádro je podprostor T^n.

Věta (o lineárním obalu) Nechť $X \subseteq V$, pak $\langle X \rangle$ je podprostor V.

Věta (o řádkovém a sloupcovém prostoru matice) Pro libovolnou matici typu $m \times n$ nad tělesem T platí, že její řádkový a sloupcový prostor jsou podprostory T^n, resp. T^m.

Definice Sloupec matice nazveme *bázový*, pokud není lineární kombinací předchozích sloupců.

Věta (o bázový sloupcích) Bázové sloupce matice tvoří bázi sloupcového prostoru matice.

Věta (o dimenzi řádkového a sloupcového prostoru) Platí $\dim(\mathrm{Im}A)=\dim(\mathrm{Im}A^T)$.

Definice *Hodnost matice* je dimenze jejího řádkového (nebo sloupcového) prostoru.

Věta (průnik podprostorů) Nechť I je indexová množina a V_i, $i \in I$ jsou podprostory lineárního prostoru V, pak i

$$\bigcap_{i \in I} V_i$$

je podprostor V.

Definice Nechť I je indexová množina a V_i, $i \in I$ jsou podprostory lineárního prostoru V. Pak jejich *součet* definujeme jako

$$\sum_{i \in I} V_i = \langle \bigcup_{i \in I} V_i \rangle.$$

Věta (o dimenzi součtu a průniku) Pro U,V podprostory lineárního prostoru W platí

$$\dim(U) + \dim(V) = \dim(U \cap V) + \dim(U \cup V).$$

Věta (o dimenzi podprostoru) Nechť U je podprostor V, pak $\dim(U) \leq \dim(V)$.

2.2.4 Skalární součin, ortogonalizační proces, ortonormální báze

Definice Nechť $v = (v_1, \ldots, v_n)$ a $u = (u_1, \ldots, u_n)$ jsou vektory nad $\mathbb{R}$. *Standardní skalární součin* je $u \cdot v = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$.

Definice *Eukleidovská norma (délka)* vektoru u je $||u|| = \sqrt{u \cdot u}$.

Definice *Úhel* mezi vektory u a v je číslo α definované jako

$$u \cdot v = ||u|| \cdot ||v|| \cdot cos\alpha.$$

Dva vektory jsou *kolmé*, pokud $u \cdot v = 0$.

Věta (vlastnosti skalárního součinu nad $\mathbb{R}$) Nechť u,v,w jsou vektory nad $\mathbb{R}$ a t je skalár. Platí

- $u \cdot v = v \cdot u$,
- $u \cdot (tv) = t(u \cdot v)$,
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$,
- $u \cdot u \geq 0$ a $u \cdot u = 0 \iff u = 0$.

Definice Nechť $v = (v_1, \ldots ,v_n)$ a $u = (u_1, \ldots ,u_n)$ jsou vektory nad $\mathbb{C}$. *Standardní skalární součin* je $u \cdot v = \overline{u}_1 v_1 + \ldots + \overline{u}_n v_n$.

Definice *Hermitovsky sdružená matice* k matici $\mathbb{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ je matice $\mathbb{A}^* = (b_{ji})_{n\times m}$, kde $b_{ji} = \overline{a_{ij}}$.

Věta (vlastnosti skalárního součinu nad $\mathbb{C}$) Nechť u,v,w jsou vektory nad $\mathbb{C}$ a t je skalár. Platí

- $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$,
- $u \cdot (tv) = t(u \cdot v)$,
- $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$,
- $u \cdot u \geq 0, \ \in \mathbb{R}$ a $u \cdot u = 0 \ \Leftrightarrow \ u = 0$.

Definice Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. *Obecný skalární součin* definujeme jako zobrazení $\langle .,. \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$, splňující

i. $\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$,

ii. $\langle u, tv \rangle = t\langle u,v \rangle$,

iii. $\langle u, v + w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$,

iv. $\langle u,u \rangle \geq 0$ a $\langle u,u \rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ u = 0$.

Definice *Hermitovská matice* je taková komplexní matice, která splňuje $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}$.

Definice *Pozitivně definitní matice* je taková matice $\mathbb{A}$, která splňuje $u^*\mathbb{A}u \geq 0$ a $u^*\mathbb{A}u = 0 \ \Leftrightarrow \ u = 0$.

Věta (o skalárním součinu daném maticí) Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, resp. $\mathbb{C}^{n\times n}$. Pak $\langle u,v \rangle = u^*\mathbb{A}v$ je skalární součin právě tehdy, když je $\mathbb{A}$ hermitovská, pozitivně definitní.

Definice *Obecná norma* je definovaná jako $||u|| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$. Řekneme, že vektor je *jednotkový*, pokud platí $||u|| = 1$.

Věta (vlastnosti normy) Nechť u,v jsou vektory a t je skalár. Pak platí

i. $||u|| \geq 0$ a $||u|| = 0, \ \Leftrightarrow \ u = 0$,

ii. $||tu|| = |t|||u||$,

iii. *rovnoběžníkové pravidlo* $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2)$.

Věta (Cauchyho-Schwartzova nerovnost) Nechť u,v jsou vektory. Platí

$$|\langle u,v\rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

Rovnost platí právě tehdy, když jsou vektory u a v lineárně závislé.

Věta (Trojúhelníková nerovnost) Nechť u,v jsou vektory. Pak platí

$$||u+v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

Definice *Úhel* mezi vektory u a v je číslo $\alpha \in (0,\pi\rangle$ splňující

$$cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}.$$

Věta (cosinová) Nechť u,v jsou vektory a α úhel mezi nimi. Pak platí

$$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2||u|| \cdot ||v|| cos\alpha.$$

Definice Řekneme, že vektory u a v jsou *kolmé*, pokud platí $\langle u,v\rangle = 0$.

Definice Řekneme, že množina vektorů M je *ortogonální*, pokud každé dva její prvky jsou na sebe kolmé.

Definice Řekneme, že množina vektorů M je *ortonormální*, pokud je ortogonální a tvořena jednotkovými vektory.

Věta (o ortogonální posloupnosti) Každá ortogonální posloupnost je lineárně nezávislá.

Věta (o kanonické bázi) Kanonická báze je ortonormální.

Věta (Pythagorova) Pokud jsou u,v kolmé vektory, pak $||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Věta (souřadnice vzhledem k ortonormální bázi) Nechť $B = (v_1, \ldots, v_n)$ je ortonormální báze lineárního prostoru V a $u \in V$. Pak platí

$$u = \langle v_1, u\rangle v_1 + \ldots + \langle v_n, u\rangle v_n.$$

Věta (skalární součin a ortonormální báze) Nechť B je ortonormální báze vektorového prostoru V a $u,v \in V$. Pak platí $\langle u,v\rangle = [u]_B^*[v]_B$.

Gramova - Schmidtova ortogonalizace je proces který z libovolné lineárně nezávislé posloupnosti vektorů udělá ortonormální posloupnost generující stejný prostor. Vstupem je lineárně nezávislá posloupnost $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Algoritmus postupuje ve třech krocích:

1. $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$,
2. $u_i' = v_i - \langle u_1, v_i\rangle u_1 - \ldots - \langle u_{i-1}, v_i\rangle u_{i-1}$,
3. $u_i = \frac{u_i'}{||u_i'||}$.

$\forall i \in \{2, \ldots, n\}$. Výstupem je ortonormální posloupnost $\{u_1, \ldots, u_n\}$ taková, že $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$.

Věta (o Gramově-Schmidtově ortogonalizaci) Převede tímto způsobem každou lineárně nezávislou posloupnost.

Důsledek V každém konečně dimenzionálním prostoru se skalárním součinem existuje ortonormální báze.

2.2.5 Ortogonální projekce, metoda nejmenších čtverců a pseudoinverze

Definice Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, $v \in V$ a W je podprostor V. Prvek $w \in W$ nazýváme *ortogonální projekce* vektoru v na podprostor W, jestliže $(v - w) \perp W$.

Věta (o aproximaci) Je-li W podprostor V, $v \in V$ a w je ortogonální projekce v na W, pak $\forall u \in W, u \neq w$ platí $||u - w|| < ||v - u||$, tedy ortogonální projekce je určena jednoznačně.
Zde je jednoduchý důkaz, dobré vědět.

Věta (o projekci a bázi) Nechť V je vektorový prostor, $v \in V$ a W je konečně generovaný podprostor V s ortonormální bází $B = (u_1, \ldots, u_k)^T$. Pak prvek

$$w = \langle u_1,v\rangle u_1 + \langle u_2,v\rangle u_2 + \ldots + \langle u_k,v\rangle u_k$$

je ortogonální projekcí v na W.

Důsledek Pro ortogonální bázi to je

$$w = \frac{\langle u_1,v\rangle}{||u_1||^2}u_1 + \frac{\langle u_2,v\rangle}{||u_2||^2}u_2 + \ldots + \frac{\langle u_k,v\rangle}{||u_k||^2}u_k.$$

Definice Nechť $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ a $b \in \mathbb{C}^n$. *Problém nejmenších čtverců* (LS) je úloha určení $x \in \mathbb{C}^m$ takového, které minimalizuje $||f||_E$ za podmínky $\mathbb{A}x = b + f$.

Téma *metody nejmenších čtverců a pseudoinverze* nemám zpracované dobře a rozhodně se tím nebudu chlubit. Takže si to udělejte sami. Love.

2.2.6 Diagonalizace a ortogonální diagonalizace

Věta (mocnění diagonální matice) $[diag(a_1, \ldots, a_k)]^n = diag(a_1^n, \ldots, a_k^n)$.

Definice Matice $A \in T^{n \times n}$ je *diagonalizovatelná*, má-li vůči nějaké bázi diagonální matici.

Věta (o diagonalizovatelnosti matice) Matice A je diagonalizovatelná právě tehdy, když existuje báze prostoru T^n tvořena vlastními vektory matice A.

Definice Matice X a Y téhož řádu nad týmž tělesem se nazývají *podobné*, existuje-li regulární matice R taková, že $Y = R^{-1}XR$.

Věta (diagonalizovatelnost a podobnost) Čtvercová matice je diagonalizovatelná právě tehdy, když je podobná nějaké diagonální matici.

Věta (diagonalizovatelnost a vlastní čísla) Nechť matice A řádu n má n navzájem různých vlastních čísel. Pak je diagonalizovatelná.

Věta (o diagonalizovatelnosti a násobnosti) Buď A čtvercová matice rádu n nad T. Pak následující je ekvivalentní

i. A diagonalizovatelná,

ii. A má n vlastních čísel včetně algebraických násobností a geometrická násobnost každého vlastního čísla je rovna algebraické.

Definice Řekneme, že reálná (komplexní) čtvercová matice A je *ortogonálně (unitárně) diagonalizovatelná*, existuje-li ortonormální báze B prostoru $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$), že $[f_A]_B^B$ je diagonální.

Definice Matice X a Y jsou *ortogonálně (unitárně) podobné*, existuje-li ortogonální (unitární) matice U taková, že $Y = U^{-1}XU$ ($Y = U^*XU$).

Věta (o ortogonální diagonalizovatelnosti) Nechť A je čtvercová matice nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Pak následující je ekvivalentní

i. A je ortogonálně (unitárně) diagonalizovatelná,

ii. $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) má ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory matice A,

iii. A je ortogonálně (unitárně) podobná diagonální matici.

Věta (o ortogonální diagonalizovatelnosti II.) A čtvercová nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Pak následující je ekvivalentní

i. A ortogonálně (unitárně) diagonalizovatelná,

ii. A má

- n vlastních čísel včetně algebraických násobností,
- geometrická násobnost každého vlastního čísla je rovna algebraické,
- pro každá dvě různá vlastní čísla λ_i a λ_j platí $M_{\lambda_i} \perp M_{\lambda_j}$.

Definice A je *normální*, pokud $A^*A = AA^*$.

Věta (spektrální věta pro normální matice) Nechť A je čtvercová komplexní matice. Pak následující je ekvivalentní

(i) A je unitárně diagonalizovatelná,

(ii) A je normální.

Věta (spektrální věta pro hermitovské matice) Nechť A je čtvercová komplexní matice. Pak následující je ekvivalentní

(i) A je unitárně diagonalizovatelná a všechna její vlastní čísla jsou reálná,

(ii) A je hermitovská.

Věta (spektrální věta pro symetrické matice) Nechť A je čtvercová reálná matice. Pak následující je ekvivalentní

(i) A je ortogonálně diagonalizovatelná,

(ii) A je symetrická.

Věta (spektrální věta pro pozitivně (semi) definitní matice) Nechť A je čtvercová komplexní matice. Pak následující je ekvivalentní

(i) A je unitárně diagonalizovatelná a všechna její vlastní čísla jsou reálná kladná (nezáporná),

(ii) A je pozitivně (semi) definitní.

Věta (o hermitovské a pozitivně definitní matici) Nechť je matice A hermitovská (symetrická). Pak je pozitivně (semi) definitní právě tehdy, když má všechna vlastní čísla kladná (nezáporná).

Věta (spektrální věta pro unitární matice) Nechť A je čtvercová komplexní matice. Pak následující je ekvivalentní

(i) A je unitárně diagonalizovatelná a pro všechna vlastní čísla platí $|\lambda| = 1$,

(ii) A je unitární.

2.2.7 Různé typy rozkladů matic

Tahle kapitola je obecně dost nahovno a vůbec mě nebavila. Takže tyhle poznámky nejsou **vůbec** dobrý, ale za účelem kompletnosti to sem dám taky. Určitě se doporučuji tohle učit úplně odjinud a třeba si to sem k tomu dopsat. Nebo to zapálit.

Jordanův rozklad

- Jde o jisté zobecnění diagonalizovatelnosti.
- $A = RDR^{-1}$, R regulární matice, D blokově diagonální matice s Jordanovými buňkami
$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix},$$
D se nazývá *Jordanova matice*.
- λ_i v Jordanových blocích jsou vlastní čísla matice A.
- Jednomu vlastnímu číslu může patřit více bloků = geometrická násobnost vlastního čísla.
- Součet dimenzí těchto bloků je algebraická násobnost.
- Rozklad je jednoznačný až na pořadí buněk.
- Jordanův rozklad není stabilní.
- Vektory se hledají pomocí tzv. Jordanových řetízků
$$(A - \lambda I)\, v_1 = 0,\ \ (A - \lambda I)\, v_2 = v_1, \dots$$
a pak se umístí do matice R.

L-U rozklad

- Pouze pro čtvercové regulární matice.
- L-U rozklad není jednoznačný.
- Pokud se při Gaussově eliminaci nemusí prohazovat řádky, pak $A = LU$, L je dolní trojúhelníková matice s jedničkami na diagonále, U horní trojúhelníková matice s nenulovými čísly na diagonále. Jedná se o zápis Gaussovy eliminace - každý její krok je přenásobení maticí zleva a ty dohromady dají matici L.
- Pokud je při Gaussově eliminaci potřeba prohazovat řádky, pak $PA = LU$, kde P je permutační matice.

QR rozklad

- Pro obecnou komplexní matici.
- Je dražší, ale stabilnější, než L-U rozklad.
- Je jednoznačný.
- Jedná se o maticový zápis Gram-Schmidtovy ortogonalizace.
- $A = QR$, kde Q je ortonormální matice a R je dolní trojúhelníková matice.
- Postup je Gram-Schmidtův ortogonalizační proces na sloupce matice A dá sloupce matice $Q = (u_1, \ldots, u_k)$

$$R = \begin{bmatrix} ||u_1'|| & \langle u_1, v_2 \rangle & \ldots & \langle u_1, v_k \rangle \\ 0 & ||u_2'|| & \ldots & \langle u_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & ||u_k'|| \end{bmatrix}.$$

- Obecně se ho dá docílit pomocí Givensových rotací či Householderových reflexí.

Spektrální rozklad

- Pro A normální, hermitovskou pozitivně definitní, s vlastními čísly $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r = 0$ a $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$.
- $A = UDU^*$, U je unitární a D je diagonální.
- U je složená z vlastních vektorů matice A.
- D má vlastní čísla matice A na diagonále.
- Užitečný rozklad pro inverz, $A^{-1} = U^* D^{-1} U$.

Singulární rozklad

- Pro obecnou komplexní matici.
- Platí A^*A i AA^* jsou Hermitovské pozitivně definitní, mají stejná vlastní čísla a když v_j je vlastní vektor A^*A, pak $Av_j/\sqrt{\lambda_j}$ je vlastní vektor matice AA^* $\forall j = 1, \ldots, r$.
- $u_{r+1}, \ldots, u_n$ pak najdeme jako libovolnou ortonormální bázi ortogonálního doplňku.
- Singulární čísla $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$, pak platí $Av_j = \sigma_j u_j$ $\forall j = 1, \ldots, r$, pak $AV = U\Sigma$, tj. $A = U\Sigma V^*$, kde U, V jsou unitární a

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}.$$

- Mooreova-Penroseova pseudoinverze: $A^+ = V\Sigma^+ U^*$, kde
$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \Sigma_r^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix},$$
a tedy $A^+ = (A^* A^{-1})A^*$, $A^+ = (A^*)(AA^*)^{-1}$.

Choleského rozklad

- Jedná se o speciální případ L-U rozkladu.
- Pro $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je hermitovská pozitivně definitní.
- $A = LL^*$, L horní trojúhelníková.

Schurův rozklad

- Pro obecnou čtvercovou matici.
- $A = URU^*$, U unitární, R horní trojúhelníková s vlastními čísly matice A na diagonále.

2.3 Lineární a bilineární formy

2.3.1 Lineární, bilineární a kvadratické formy, matice lineárních zobrazení, vlastní čísla lineárních zobrazení a matic, charakteristický polynom

Definice Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá *lineární*, pokud splňuje
$f(u) + f(v) = f(u + v)$ a $f(tu) = tf(u)$ $\forall u,v \in V$, $\forall t \in T$.

Věta (zobrazení určené maticí) Zobrazení určené maticí A, $f_A(x) := Ax$, je lineární.

Definice Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ je báze prostoru V a C je báze W. Pak *matice f vzhledem k B a C* je
$$[f]_C^B = ([f(v_1)]_C \,|\, [f(v_2)]_C \,|\, \ldots \,|\, [f(v_n)]_C)\,.$$

Věta (o matici zobrazení) Platí $[f(x)]_C = [f]_C^B [x]_B$.

Věta (skládání lineárních zobrazení) Nechť U, V, W jsou vektorové prostory nad T, $f : U \to V$ a $g : V \to W$ jsou lineární, pak $gf : U \to W$ je lineární. Pokud navíc B je báze U, C je báze V a D je báze W, pak
$$[gf]_D^B = [g]_D^C\, [f]_C^B\,.$$

Věta (inverz lineárního zobrazení) Nechť $f : U \to V$ je vzájemně jednoznačné lineární zobrazení, pak $f^{-1} : V \to U$ je také lineární zobrazení a $[f^{-1}]_B^C = \left([f]_C^B\right)^{-1}$.

Věta (o matici zobrazení a matici přechodů bází) Platí

$$[f]_B^B = \left([id]_C^B\right)^{-1} \cdot [f]_C^C \cdot [id]_C^B .$$

Definice Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Lineární zobrazení f nazveme *lineární forma*, je-li $f : V \to T$. *Jádrem* f jsou ty $x \in V$ že $f(x) = 0$ a *obraz* je $\{f(x), x \in V\}$.

Věta (o jádru a obraze) Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení, B je báze U a C je báze V. Pak

$$[\mathrm{Ker} f]_B = \mathrm{Ker}\, [f]_C^B \,,\; [\mathrm{Im} f]_C = \mathrm{Im}\, [f]_C^B .$$

Definice Nechť f je lineární forma na V a B je báze V. Pak *matice f vzhledem k bázi B* je

$$[f]^B = (f(v_1), \ldots, f(v_n)) .$$

Definice *Bilineární forma* je zobrazení $f : V \times V \to T$ lineární v obou složkách. Pro bilineární formu f definujeme *kvadratickou formu* tvořenou f,
$f_2 : V \to T$, $f_2(v) = f(v,v)$.

Definice Nechť $B = (v_1, \ldots, v_n)$ je báze vektorového prostoru V nad tělesem T a nechť f je bilineární forma na V. *Maticí f vzhledem k B* je čtvercová matice řádu n kde na (i,j) místě je $f(v_i,v_j)$. Tuto matici značíme $[f]_B$.

Tvrzení (o matici bilineární formy) Platí $f(x,y) = [x]_B^T\, [f]_B\, [y]_B$.

Definice Řekneme, že bilineární forma f je *symetrická*, pokud $f(x,y) = f(y,x)$ a *antisymetrická*, pokud $f(x,y) = -f(y,x)$.

Věta (o (anti)symetrické formě) f je (anti)symetrická právě tehdy, když $[f]_B$ je (anti)symetrická matice.

Věta (o rozkladu bilineární formy) Nechť T je těleso charakteristiky různé od dvou. Pak existuje jednoznačný rozklad $f = f_s + f_a$, kde

$$f_s(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) + f(y,x)\right), \qquad f_a(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x,y) - f(y,x)\right).$$

Věta (součin matic a skládání zobrazení): Nechť $f_A : T^n \to T^m$ a $f_B : T^p \to T^n$. Pak $f_A f_B : T^p \to T^m$ a platí $f_A f_B = f_{AB}$.

Definice Nechť $f : V \to V$ je lineární operátor. Pak řekneme, že $\lambda \in T$ je *vlastní číslo* f, pokud existuje vektor $x \neq 0$ takový, že $f(x) = \lambda x$. Takové x nazýváme *vlastní vektor* f příslušný λ. Stejná definice platí i pro matice.

Věta (o vlastním čísle 0) Operátor f má vlastní číslo 0 právě tehdy, když f není prostý. Matice A má vlastní číslo 0 právě tehdy, když A je singulární.

Věta (o vlastních číslech a vektorech) Platí λ je vlastní číslo f právě tehdy, kdy $(f - \lambda \mathrm{id})$ není prostý. Je-li λ vlastní číslo, pak množina M_λ všech vlastních vektorů je podprostor V a M_λ=Ker$(f - \lambda \mathrm{id})$. To samé platí pro matice (místo "není prostý"je "singulární").

Věta (o vlastním číslu a determinantu) Nechť A je čtvercová řádu n nad tělesem T. Pak $\lambda \in T$ je vlastním číslem matice A právě tehdy, když $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Nechť f je lineární operátor na konečně generovaném prostoru V dimenze n nad tělesem T a B je báze V. Pak $\lambda \in T$ je vlastním číslem operátoru f právě tehdy, když λ je vlastním číslem matice $[f]_B^B$.

Definice *Charakteristický polynom* matice A je $p_A(\lambda)$ =det$(A - \lambda I_n)$

Věta (charakteristický polynom podobných matic) Dvě podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Definice *Charakteristický polynom* operátoru f je $p_f(\lambda)$ =det$([f]_B^B - \lambda I_n)$

Definice *Algebraická násobnost* vlastního čísla je jeho násobnost jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta (o počtu vlastních čísel) Každá matice/operátor nad tělesem dimenze n má nejvýše n vlastních čísel včetně algebraických násobností.

2.3.2 Polární báze a zákon setrvačnosti pro kvadratické formy

Tato kapitola se zabývá pouze symetrickými bilineárními formami - ty jsou vzájemně jednoznačné s kvadratickými.

Definice Nechť f je symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru V, x, $y \in V$. Řekneme, že x a y jsou *f-ortogonální*, pokud $f(x,y) = 0$. Řekneme, že báze $B = (v_1, \dots, v_n)$ prostor V je *f-ortogonální*, pokud $f(v_i,v_j) = 0$, $\forall i \neq j$, tedy matice f vzhledem k B, $[f]_B$ je diagonální.

Definice *Hodnost* bilineární formy f je hodnost její matice k libovolní bázi.

Definice *Polární báze* vzhledem k f je libovolná f-ortogonální báze.

V téhle kapitole je vhodné vědět, jak dostat f-ortogonální bázi - tj. symetrické úpravy a tak.

Věta (o existenci polární báze) Každá symetrická bilineární forma f na konečně generovaném prostoru nad tělesem charakteristiky různé od dvou, má polární bázi.

Věta (zákon setrvačnosti kvadratických forem) Nechť f je symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru V dimenze n a C, C' jsou báze V takové, že

$$[f]_C = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k},\underbrace{-1,\dots,-1}_{t},\underbrace{0,\dots,0}_{m})$$
$$[f]_{C'} = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{k'},\underbrace{-1,\dots,-1}_{t'},\underbrace{0,\dots,0}_{m'})$$

Pak $k = k'$, $t = t'$ a $m = m'$.

Definice Čísla k, t a m z minulé věty nazveme *pozitivní index setrvačnosti* formy f, *negativní index* formy f a *nulita* formy f, značíme $n_+(f)$, $n_-(f)$ a $n_0(f)$. Uspořádanou trojici $(n_0(f), n_+(f), n_-(f))$ nazveme *signatura* formy f.

Definice Řekneme, že symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru je *pozitivně definitní* právě tehdy, je-li $f_2(x) > 0 \ \forall x \neq 0 \in V$.

Věta (o signatuře a pozitivní definitnosti) f pozitivně definitní právě tehdy, když $n_+(f) = n$.

Věta (o ortonormální diagonalizaci) Nechť V je reálný vektorový prostor dimenze n se skalárním součinem $\langle , \rangle$ a f symetrická bilineární forma na V. Pak existuje báze B prostoru V, která je f-ortogonální a zároveň ortonormální vzhledem k $\langle , \rangle$.

2.3.3 Matice jednoduchých geometrických zobrazení

- otočení v $\mathbb{R}^2$ o úhel α:
$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$
- osová symetrie vzhledem k ose x v $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}.$$
- symetrie vzhledem k přímce procházející středem, uzavírající úhel s osou x:
$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{bmatrix}.$$

- ortogonální projekce na osu x:
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$
- ortogonální projekce na přímku procházející středem, uzavírající úhel α s osou x:
$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha\\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha\end{bmatrix}.$$
- Givensova rotace: otočení o úhel α vůči e_i, e_j
$$G_{ij}(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & \cos\alpha & \dots & -\sin\alpha & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & \sin\alpha & \dots & \cos\alpha & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}.$$
- Householderova reflexe: zrcadlení podle nadroviny dimenze $n-1$ pomocí jejího normálového vektoru q, $||q||=1$. Platí
$$x=(x-x_q)+x_q,\ x_q=(qq^T)x,$$
pak zrcadlový je
$$y=(x-x_q)-x_q=(\mathbb{I}-2qq^T)x.$$
Tedy
$$H(q)=(\mathbb{I}-2qq^T).$$

2.4 Základy teorie grup a komutativních okruhů

2.4.1 Základní vlastnosti grup

Definice *Grupa* je algebra (množina s operacemi) $G=(G,*,',e)$ typu (2,1,0) splňující $\forall a,b,c\in G$

(1) $a*(b*c)=(a*b)*c$,

(2) $\exists! e:\ a*e=e*a=a$,

(3) $\exists! a':\ a*a'=a'*a=e$,

tj. e je jednotka a a' inverzní prvek k prvku a. Grupa je *Ábelovská*, pokud navíc $\forall a,b\in G:\ a*b=b*a$.

Definice Nechť G je grupa, pak $H\subseteq G$ je *podgrupa*, když $\forall a,b\in H$ je $a'\in H$, $a*b\in H$ a $e\in H$. Pak $H=(H,^*|_H,^{'}|_H,e)$. Podgrupy se dělí na *vlastní* a *nevlastní*. Nevlastní jsou podgrupy G a e, vlastní jsou všechny ostatní.

Definice Grupa je

- *aditivní*, pokud je tvaru $T = (T, +, -, 0)$,

- *multiplikativní*, pokud je tvaru $T^* = (T \setminus \{0\}, *, ^{-1}, 1)$,

pro libovolné těleso T.

Definice *Cyklické grupy* jsou $\mathbb{Z}_n = (\{0,1,\ldots,n-1\}, +_{\text{mod } n}, -_{\text{mod } n}, 0)$. Pak multiplikativní grupa $\mathbb{Z}_n^*$ má právě prvky nesoudělné s $n \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Definice Definujeme grupy

- *Symetrická grupa* je grupa $S_X = (\{\pi : \ \pi \text{ permutace na } X\}, \circ, ^{-1}, id)$ s podgrupami
  - *alternující podgrupa* A_n všech sudých permutací,
  - *dihedrální podgrupa* D_{2n} všech symetrií pravidelného n-úhelníku.
- *Maticová grupa* je grupa $GL_n(T) = \{(A : A \in T^{n\times n} \text{ regulární}), \cdot, ^{-1}, \mathbb{I}\}$ s podgrupami
  - $SL_n(T)$ podgrupa matic s determinantem rovným 1,
  - $O_n(T)$ podgrupa ortogonálních matic.

Věta (vlastnosti operací v grupě)

i. $a * c = b * c \vee c * a = c * b \Rightarrow a = b$,

ii. $a * u = a \vee u * a = a \Rightarrow u = e$,

iii. $a * u = e \vee u * a = e \Rightarrow u = a'$,

iv. $(a')' = a$,

v. $(a * b)' = b' * a'$.

Definice Nejmenší podgrupa G obsahující množinu $X \subset G$ je $\langle X \rangle_G$.

Věta (o lineárním obalu)
$\langle X \rangle_G = \{(k_1 \times x_1) * \cdots * (k_n \times x_n); n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\}$, kde $\times$ je mocnění v multiplikativní grupě a násobení v aditivní grupě.

Definice $G = (G, *, ', e)$, $H = (H, \cdot, ^{-1}, 1)$ pak $\varphi : G \to H$ je *homomorfismus*, pokud

- $\varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$,
- $\varphi(a') = \varphi(a)^{-1}$,

- $\varphi(e) = 1$.

Pokud je navíc bijekce, tak se nazývá *izomorfismus*.

Definice *Jádro* homomorfismu je $\mathrm{Ker}\varphi = \{a \in G : \varphi(a) = 1\}$, *obraz* homomorfismu je $\mathrm{Im}\varphi = \{b \in H : b = \varphi(a)\}$.

Věta (o homomorfismu) Platí

i. φ je homomorfismus $\Leftrightarrow \varphi(a * b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$,

ii. $\mathrm{Ker}\varphi$ je podgrupa G, $\mathrm{Im}\varphi$ je podgrupa H,

iii. φ je prostý homomorfismus $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\varphi = \{e\}$.

Definice *Direktní součin grup* $G_i = (G_i, *_i, '_i, e_i)$ je
$G_1 \times \cdots \times G_n = (G_1 \times \cdots \times G_n, *, ', e)$, kde $(a_1, \ldots, a_n) * (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 *_1 b_1, \ldots, a_n *_n b_n)$ a podobně se všemi operacemi.

Věta (o rozkladu $\mathbb{Z}_M$) Nechť $M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$, kde $m_1, \ldots, m_n$ jsou po dvou nesoudělná. Pak $\mathbb{Z}_M \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_n}$.
Zde je vhodné znát důkaz.

Věta (Cayleyova a lineární reprezentace grup) Každá konečná grupa je izomorfní nějaké podgrupě některé symetrické (obecné lineární) grupy.

Definice *Řád grupy* je počet prvků G, značíme $|G|$, *řád prvku* a v G je počet prvků $\langle a \rangle_G$, značíme $\mathrm{ord}(a)$.

Věta (o řádu prvku) $\mathrm{ord}(a)$ = nejmenší přirozené n takové, že $n \times a = e$, pokud takové neexistuje, tak inf, tj. v aditivní grupě $na = 0$ a v multiplikativní grupě $a^n = 1$. Platí, že $\mathrm{ord}(a)$ dělí $|G|$ a pokud je $\varphi : G \to H$ izomorfismus, pak $\mathrm{ord}(a)$ = $\mathrm{ord}(\varphi(a))$.

Definice *Cyklická grupa* je grupa, která je generovaná jedním prvkem.

Věta (izomorfismus cyklických grup) Nechť je G cyklická. Pokud je G nekonečná, pak je izomorfní grupě $\mathbb{Z}$. Pokud je G konečná, pak existuje n takové, že G je izomorfní grupě $\mathbb{Z}_n$.

Věta (o podgrupách cyklických grup) Podgrupy cyklických grup jsou také cyklické.

Věta (o $\mathbb{Z}_p^*$) Grupa $\mathbb{Z}_p^*$ je cyklická pro p prvočíslo a pak je tato grupa izomorfní grupě $\mathbb{Z}_{p-1}$.

Věta (o symetrické grupě) Platí

i. řád permutace π v grupě S_X je nejmenší společný násobek délek cyklů,

ii. S_n je generovaná všemi transpozicemi, A_n je generovaná všemi trojcykly.

Definice $a{,}b \in G$ jsou *konjugované*, pokud $\exists c \in G$ takové, že $a = c \cdot b \cdot c^{-1}$.

Věta (o konjugovaných permutacích) Dvě permutace jsou konjugované právě tehdy, když mají stejný počet cyklů každé délky.

Definice Nechť $G = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ a H podgrupa G. Pak definujeme

- levý rozklad grupy G podle H je $\{aH, a \in G\}$,
- levé rozkladové třídy jsou $aH = \{ah, h \in H\}$,
- levá transverzála obsahuje z každé levé rozkladové třídy právě jeden prvek.

Pravý rozklad, pravé rozkladové třídy a pravou transverzálu definujeme analogicky.

Věta (o rozkladových třídách) $\forall a \in G$ platí $|aH| = |Ha| = |H|$.

Věta (o rozkladech) Levý i pravý rozklad grupy mají stejný počet prvků.

Definice *Index podgrupy* H v G je $[G : H] = |\{aH : a \in G\}| = |\{Ha : a \in G\}|$.

Věta (Lagrangeova) Nechť G je grupa a H je její podgrupa. Pak
$|G| = |H|\,[G : H]$.

Věta (o velikosti podgrupy) Nechť G je konečná grupa a H její podgrupa. Pak $|H|$ dělí $|G|$.

2.4.2 Působení grupy na množině

Definice *Působení grupy* G *na množinu* X je homeomorfismus $\pi : G \to S_X$. Hodnotu $\pi(g)$ na prvku x budeme značit $g(x)$.

Věta (základní vlastnosti působení) Platí $\pi(1) = id$, tj. $1(x) = x$, g^{-1} je inverzní ke g a $(g \cdot h)(x) = g(h(x))$.
Tuhle "větu"jsem si teď přečetla ze svých poznámek a vůbec jí nerozumím, ale nechtěla jsem ji vynechat. Takže here u go, enjoy.

Definice Definujeme *relaci tranzitivity* $x \sim y$ pokud existuje $g \in G$ takové, že $g(x) = y$. Tato relace je ekvivalence a bloky ekvivalence nazýváme *orbity*, $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$.

Definice Řekneme, že x je *pevný bod* permutace π, pokud $\pi(x) = x$.

Definice Množina všech pevných bodů $\pi(g)$ je $X_g = \{x \in X : g(x) = x\}$.

Definice *Stabilizátor prvku* $x \in X$ je $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$.

Věta (o $\boldsymbol{G_x}$) G_x je podgrupa grupy G.

Věta (o velikosti $\boldsymbol{G}$) $\forall x \in X$ platí $|G| = |G_x| \cdot |[x]|$.

Definice $X|_\sim$ je množina všech bloků ekvivalence, tj. $|X|_\sim|$ je počet orbit působení.

Věta (Burnsideova) Nechť G a X jsou konečné, pak

$$|X|_\sim| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} |X_g| \,.$$

2.4.3 Dělitelnost v Eukleidovských oborech, rozšířený Eukleidův algoritmus, existence a jednoznačnost ireducibilních rozkladů

Věta (o dělitelnosti) Nechť $a = q \cdot b + r$. Pak q je celočíselný podíl a r je zbytek po dělení. Řekneme, že b *dělí* a, pokud $\exists q$ takové, že $a = b \cdot q$, píšeme $b|a$.

Věta (o NSD a NSN) Platí

$$\mathrm{NSN}(a,b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{NSD}(a,b)}.$$

Věta (Bézoutova rovnost) $\forall a,b\ \exists u, v : \mathrm{NSD}(a,b) = u \cdot a + v \cdot b$, pak u,v se nazývají *bézoutovy koeficienty.*

Definice Definujeme kongruenci $a \equiv b \pmod m$ pokud dávají stejný zbytek po dělení m, tj. $m|(a - b)$.

Definice *Eulerova funkce* $\varphi(n) =$ počet čísel z $\{1, \ldots, n-1\}$ nesoudělných s n.

Věta (Eulerova funkce a prvočíselný rozklad) Nechť $n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, pak $\varphi(n) = p_1^{k_1-1}(p_1 - 1) \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m-1}(p_m - 1)$.

Věta (Eulerova) Nechť a, m jsou nesoudělná, pak $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

Věta (Čínská věta o zbytcích) Nechť $m_1, \ldots, m_n$ jsou nesoudělná, $M = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$. Pak $\forall u_1, \ldots, u_n\ \exists! x \in \{0, \ldots, M-1\}$ takové, že

$$x \equiv u_1 (\mathrm{mod}\ m_1) \ldots x \equiv u_n (\mathrm{mod}\ m_n).$$

Definice *Komutativní okruh s jednotkou* je $(R, +, -, \cdot, 0, 1)$, pokud platí:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$,

- $a + b = b + a$,
- $a + 0 = a$,
- $a + (-a) = 0$,
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$,
- $a \cdot b = b \cdot a$,
- $a \cdot 1 = a$,
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Pokud navíc $a,b \neq 0 \Rightarrow a \cdot b \neq 0$, tak se jedná o *obor integrity*.
Pokud navíc $\forall a \neq 0\ \exists b :\ a \cdot b = 1$, tak se jedná o *těleso*.

Definice Řekneme, že a *dělí* b v R, pokud $\exists c \in R$ takové, že $b = a \cdot c$.

Definice Řekneme, že a a b jsou *asociované*, pokud $a|b \ \wedge\ b|a$.

Definice Řekneme, že a je *invertibilní*, pokud $a||1$, tj. $\exists b :\ a \cdot b = 1$. Pak b značíme a^{-1}.

Definice Řekneme, že c je *největší společný dělitel* a a b ($c = \mathrm{NSD}(a,b)$), pokud $c|a$ a $c|b$ a pokud pro každé d takové, že $d|a \ \wedge\ d|b$ platí $d|c$.

Definice Řekneme, že a a b jsou *nesoudělná*, pokud $\mathrm{NSD}(a,b) = 1$.

Definice Řekneme, že a je *ireducibilní*, pokud je neinvertibilní a nemá vlastní dělitele.

Definice Obor integrity nazveme *Gaussovský*, pokud má každý neinvertibilní nenulový prvek jednoznačný rozklad na ireducibilní činitele.

Věta (Gaussovské obory a NSD) V Gaussovských oborech existuje pro každou dvojici prvků největší společný dělitel.

Definice *Eukleidovská norma* na R je zobrazení $\nu : R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že

- $\nu(0) = 0$,
- Pokud $a|b$, pak $\nu(a) \leq \nu(b)$,
- $\forall a,b \in R,\ b \neq 0,\ \exists q, r :\ a = bq + r$ a $\nu(r) < \nu(b)$.

Řekneme, že obor integrity R je *Eukleidovský*, pokud na něm existuje eukleidovská norma.

Tvrzení V Eukleidovských oborech platí Bézoutova rovnost.

Euklidův algoritmus:

Vstup: $a,b \in R$, $\nu(a) \geq \nu(b)$,

Výstup: NSD(a,b) a $u,v \in R$: NSD$(a,b) = u \cdot a + v \cdot b$.

- $a_0 = a$, $u_0 = 1$, $v_0 = 0$,
- $a_1 = b$, $u_1 = 0$, $v_1 = 1$.
- Najdeme r,q : $a_{i-1} = a_i \cdot q + r$, $\nu(r) < \nu(a_i)$,
- položíme $a_{i+1} = r$, $u_{i+1} = u_{i-1} - u_i \cdot q$, $v_{i+1} = v_{i-1} - v_i \cdot q$.
- Pokud $a_{i+1} = 0$, pak výsledkem jsou a_i, u_i, v_i.

Věta (Euklidův algoritmus) Euklidův algoritmus funguje a vždy dospěje ke správnému výsledku.

Definice *Ideál* R je $I \subseteq R$ takový, že pro libovolné $a,b \in I$, $u \in R$ platí

i. $-a \in I$,

ii. $a + b \in I$,

iii. $a \cdot u \in I$.

Definice *Hlavní ideál* R je $aR = \{ar, r \in R\} = \{u \in R : a|u\}$.

Věta (Eukleidovské obory a ideály) Každý ideál v Eukleidovském oboru je hlavní ideál.

2.4.4 Kořenová a rozkladová nadtělesa, minimální polynom a stupeň rozšíření těles

Definice *Charakteristika tělesa* je nejmenší číslo n takové, že $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n} = 0$. Pokud takové n neexistuje, tak je charakteristika 0.

Definice *Rozšíření tělesa* T je libovolné nadtěleso $S \supseteq T$.

Definice Nejmenší podtěleso nazýváme *prvotěleso*.

Věta (o prvotělese) je izomorfní buď $\mathbb{Q}$ nebo $\mathbb{Z}_p$.

Definice Nechť I je ideál okruhu R. Definujeme relaci ekvivalence
$a \sim b \;\Leftrightarrow\; a - b \in I$ a bloky ekvivalence $[a] = a + I$ s operacemi

- $[a + b] = [a] + [b]$,

- $-[a] = [-a]$,
- $[a \cdot b] = [a] \cdot [b]$.

Pak $R\Big|_I = (\{[a], a \in R\}, +, -, \cdot, [0])$ je *faktorokruh.*
Ideál I je *maximální*, pokud neexistuje ideál J splňující $I \subset J \subset R$.

Věta (konstrukce faktorokruhů) Nechť R je komutativní okruh s jednotkou a I jeho maximální ideál, pak faktorokruh $R\Big|_I$ je těleso.

Definice Buď $T \subseteq S$ rozšíření těles a $a_1, \ldots, a_n \in S$, pak $T[a_1, \ldots, a_n]$ je nejmenší podokruh S obsahující T a $a_1, \ldots, a_n$; a $T(a_1, \ldots, a_n)$ je nejmenší podtěleso S obsahující T a $a_1, \ldots, a_n$.

Definice Na rozšíření $S \supseteq T$ se dá nahlížet jako na vektorový prostor nad T s násobením $T \times S \to S$. To se značí S_T a jeho dimenze je *stupeň rozšíření*
$[S : T] = \dim S_T$.

Definice Nechť $S \supseteq T$ je rozšíření těles a $a \in S$. Pak a je *algebraický*, existuje-li nenulový polynom z $T[x]$, kde a je kořenem. Pokud prvek a není algebraický, pak je *transcendentní.* Je-li každý prvek rozšíření S algebraický, pak se jedná o *algebraické rozšíření.*

Věta (o rozšířeních konečného stupně) Rozšíření konečného stupně jsou algebraická.

Definice Nechť $S \supseteq T$ je rozšíření a $a \in S$ je algebraický prvek nad T. *Minimální polynom* prvku a nad T je polynom $m_{a,T} \in T[x]$ splňující

i. $m_{a,T}(a) = 0$,

ii. a je kořen $f \in T[x]$ pak $m_{a,T} | f$.

Věta (o $m_{a,T}$) Polynom $m_{a,T}$ je v $T[x]$ ireducibilní.

Věta (o stupni rozšíření) Nechť $S \supseteq T$ je rozšíření, $a \in S$ je algebraický nad T. Pak
$$[T(a) : T] = \deg m_{a,T}.$$

Tvrzení Stupeň $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p}) : \mathbb{Q}] = \deg(x^n - p) = n$.

Věta (o rozšíření rozšíření) Nechť $U \supseteq S \supseteq T$ jsou rozšíření, pak
$$[U : T] = [U : S] \cdot [S : T].$$

Definice Řekneme, že $S \supseteq T$ je *kořenové nadtěleso* polynomu $f \in T[x]$, pokud má f v S kořen a $S = T(a)$.

Věta (o kořenových nadtělesech) Nechť T je těleso a $f \in T[x]$ polynom stupně ≥ 1. Pak

i. existuje kořenové nadtěleso k polynomu f,

ii. je-li f ireducibilní v $T[x]$, pak jsou každá dvě kořenová nadtělesa T-izomorfní.

Definice Řekneme, že $S \supseteq T$ je *rozkladové nadtěleso* polynomu $f \in T[x]$, pokud se f v $S[x]$ rozkládá na lineární činitele, tj. $f || (x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$ pro $a_1, \ldots, a_n \in S$ a navíc $S = T(a_1, \ldots, a_n)$.

Věta (o rozkladových tělesech) Nechť T je těleso, $f \in T[x]$ je polynom stupně ≥ 1. Pak

i. existuje rozkladové nadtěleso f,

ii. každá dvě rozkladová nadtělesa f jsou T-izomorfní.

Definice Řekneme, že těleso T je *algebraicky uzavřené*, má-li v něm každý polynom z $T[x]$ kořen.

Věta (o algebraicky uzavřených tělesech) Algebraicky uzavřená tělesa nemohou být konečná.

Definice Řekneme, že $S \supseteq T$ je *algebraický uzávěr* T, je-li S algebraicky uzavřené a je algebraickým rozšířením tělesa T.

Věta (o algebraickém uzávěru) Ke každému tělesu T existuje algebraický uzávěr a každé dva algebraické uzávěry jsou T-izomorfní.

Printscreenem jsem vystřihal věty a definice z různých skript.
Kalenda 09/10
Skripta Kalendy na komplexku z 2014 přikládám.
Skripta Malého na míru z 2016 přikládám.
Skripta na funkcionálu ze stránek Spurného Spurný 19/20 a přikládám seznam vět.
Na Furirku přikládám seznamy vět z analýzy od Hencla a odkaz na skripta Analýza 2020
Samozřejmě za nic neručím a vlastně ani nedoporučuju se učit jen z tohoto, ale jako přehled co byste měli znát k ssz to snad bude stačit. pis

1 Lebesgueův integrál

σ-algebra je definována jako σ-okruh obsahující celý prostor X.
Je to nejdůležitější množinový systém pro teorii míry. K ověření, že množinový systém $\mathcal{S}$ je σ-algebra stačí tyto axiomy:

(S1-1) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
(S2-2) $A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S}$,
(S3-3) $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{S}$.

Je-li $\mathcal{S}$ σ-algebra na X, dvojice $(X, \mathcal{S})$ se nazývá *měřitelný prostor*. Množiny $A \in \mathcal{S}$ se nazývají $\mathcal{S}$-měřitelné množiny. Nehrozí-li nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných množinách.*

1.10. **Definice** (Generování množinových systémů). Je-li $\mathcal{F}$ libovolný systém podmnožin X, potom existuje nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{F}$. Tuto σ-algebru dostaneme jako průnik všech σ-algeber obsahujících $\mathcal{F}$ a značíme ji $\sigma(\mathcal{F})$.

1.11. **Definice** (Borelovské množiny). Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{G}$ je systém všech jeho otevřených podmnožin. Potom definujeme $\mathcal{B}(X)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{G}$ (viz definice 1.10). σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ obsahuje kromě otevřených množin též všechny uzavřené množiny. $\mathcal{B}(X)$ se nazývá *borelovská σ-algebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny.*

V $\mathbb{R}$ jsou borelovské všechny intervaly, množina všech racionálních čísel, atd. Příklady neborelovských množin se konstruují velmi těžko.

Někdy je výhodné generovat $\mathcal{B}(X)$ jinak než systémem všech otevřených množin. Na $\overline{\mathbb{R}}$ je přirozená topologie generovaná intervaly (a, b), $(a, \infty]$ a $[-\infty, b)$. Tudíž $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ je σ-algebra na $\overline{\mathbb{R}}$ generovaná intervaly. Podobně $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je generovaná intervaly.

1.12. **Definice** (Míra). Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže splňuje

(M1-1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(M2-2) (*σ-additivita*) jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, jsou po dvou disjunktní, potom

$$\mu\Big(\bigcup_j A_j\Big) = \sum_j \mu(A_j).$$

Trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se nazývá *prostor s mírou.*

Zdůrazněme, že definice míry zahrnuje, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je σ-algebra.

1.14. **Definice** (Terminologie teorie míry). Míra μ na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{S})$ se nazývá

(a) *konečná,* jestliže $\mu(X) < \infty$,
(b) *σ-konečná,* jestliže existují $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(X_j) < \infty$ a $X = \bigcup_j X_j$,
(c) *pravděpodobnostní,* jestliže $\mu(X) = 1$,
(d) *úplná,* jestliže každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná (a tudíž také míry nula).

Fráze *skoro všude* nebo *μ-skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X. Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{S}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \setminus N$. Používá se zejména pro rovnost a nerovnosti mezi funkcemi a pro bodovou konvergenci posloupnosti funkcí.

2.1. **Definice** (Lebesgueova vnější míra). Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina. Definujme

$$\ell^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j) : \ Q_j \in \mathcal{I}_n, \ \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset A\Big\}. \tag{2}$$

Množinová funkce $\ell^* \colon A \mapsto \ell^*(A)$, definovaná na potenční množině $2^{\mathbb{R}^n}$, se nazývá *Lebesgueova vnější míra.* Součty, vyskytující se na pravé straně (2) se nazývají *horní součty* k $\ell^*(A)$.

Množinová funkce ℓ^* umí měřit všechny množiny, ale není aditivní. Proto v dalším se budeme snažit z ní vytvořit aditivní funkci (dokonce míru, viz definice 1.12), za což zaplatíme zúžením definičního oboru. Výsledný obor všech měřitelných množin však již bude dostatečně bohatý pro všechny aplikace.

2.2. **Měřitelné množiny a Lebesgueova míra.** Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je (Lebesgueovsky) *měřitelná,* jestliže pro každý interval $Q \in \mathcal{I}_n$ platí

$$\ell(Q) = \ell^*(Q \cap A) + \ell^*(Q \setminus A). \tag{3}$$

Množinu všech Lebesgueovsky měřitelných množin budeme značit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ a množinová funkce

$$\lambda : A \mapsto \ell^*(A), \qquad A \in \mathfrak{M}$$

bude *Lebesgueova míra.*

2.3. **Oznámení věty.** *Nechť $Q \in \mathcal{I}_n$. Potom $Q \in \mathfrak{M}$ a $\lambda(Q) = \ell^*(Q) = \ell(Q)$.*

2.4. **Oznámení věty.** *$\mathfrak{M}$ je σ-algebra obsahující všechny borelovské podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a λ je míra na $\mathfrak{M}$.*

3.3. **Definice** (Měřitelné funkce). Nechť $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že funkce $f \colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ je *$\mathcal{S}$-měřitelná, jestliže* pro každý interval $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ je $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných funkcích.*

3.7. **Větička** (Měřitelnost vzoru). *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $A \subset \mathbb{R}$ je borelovská množina. Potom $\{f \in A\} \in \mathcal{S}$.*

3.8. **Větička** (Měřitelnost složené funkce). *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a φ je spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině $M \subset \overline{\mathbb{R}}$. Potom množina $D' := \{f \in M\}$ je měřitelná a složená funkce $\varphi \circ f$ je měřitelná na D'.*

3.9. **Varování.** Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelný. Také není obecně pravda, že inverzní funkce k měřitelné funkci by byla měřitelná funkce. Viz priklad 19.5

3.10. **Věta** (Operace s měřitelnými funkcemi). *Nechť funkce f, f_j jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak platí následující:*

(a) *Funkce $|f|$, f^+, f^-, f^2 jsou měřitelné na D, $1/f$ je měřitelná na $\{f \neq 0\}$.*
(b) *Funkce $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$, f_1/f_2 jsou měřitelné vždy na množině, kde učiněná operace dává smysl podle úmluvy 3.2.*
(c) *Funkce $\sup_j f_j$, $\inf_j f_j$, $\limsup_j f_j$, $\liminf_j f_j$ jsou měřitelné na D.*
(d) *Množina D' všech bodů, kde existuje $\lim_j f_j$ je měřitelná a $\lim_j f_j$ je měřitelná na D'.*

3.11. **Jednoduché funkce.** Funkci f na $D \in \mathcal{S}$ nazveme *$\mathcal{S}$-jednoduchou*, jestliže f je lineární kombinace charakteristických funkcí množin z $\mathcal{S}$, tj. existují-li množiny $A_j \in \mathcal{S}$ a $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, tak, že

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Pokud bude jasné, jakou σ-algebru máme na mysli, budeme mluvit prostě o jednoduchých funkcích.

3.12. **Aproximace jednoduchými funkcemi.** *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom existují nezáporné jednoduché funkce $f_k \nearrow f$. Navíc, f lze vyjádřit ve tvaru*

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j}, \tag{5}$$

kde $E_j \in \mathcal{S}$.

4.1. **Definice** (Rozklad)**.** Konečný soubor množin $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{S}$ nazveme *rozkladem* nebo *Lebesgueovským dělením* množiny $D \in \mathcal{S}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j = D.$$

4.2. **Terminologická poznámka.** Rozdíl mezi obyčejným "riemannovským" dělením a lebesgueovským spočívá hlavně v tom, že riemannovské dělení je pouze na intervaly, u lebesgueovského se dělí na libovolné měřitelné množiny. Tento rozdíl podstatně přispívá k bohatství třídy lebesgueovsky integrovatelných funkcí.

4.4. **Definice** (Konstrukce integrálu)**.** Nechť $D, D' \in \mathcal{S}$ a $f\colon D' \to \overline{\mathbb{R}}$ je měřitelná funkce. Integrál $\int_D f\,d\mu$ vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme $D' = D$.

1. Je-li f nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$\begin{aligned}\int_D f\,d\mu = \sup\Big\{ \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D,& \\ 0 \le \alpha_j \le f \text{ na } A_j,\ j = 1, \dots, m \Big\}.&\end{aligned} \tag{6}$$

Součty vyskytující se v (6) nazýváme *dolními součty* k funkci f. Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován *vždy*, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D, definujeme

$$\int_D f\,d\mu = \int_D f^+\,d\mu - \int_D f^-\,d\mu, \tag{7}$$

pokud rozdíl v (7) má smysl. Pokud

$$\int_D f^+\,d\mu = \int_D f^-\,d\mu = \infty,$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná (přesně: $\mathcal{S}$-měřitelná) funkce na $D' \neq D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f\,d\mu = \int_{D \cap D'} f\,d\mu.$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D'.

Je-li integrál $\int_D f\,d\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f\,d\mu$ *konverguje* nebo že f je *integrovatelná*.

4.7. **Oznámení věty** (Lebesgueův integrál a Newtonův integrál). Nechť funkce $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a,b) primitivní funkci F.

(a) Je-li f λ-integrovatelná na (a,b), potom existují vlastní jednostranné limity $F(b-)$ a $F(a+)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+).$$

(b) Jestliže $f \geq 0$ a existují vlastní jednostranné limity $F(b-)$ a $F(a+)$, pak f je λ-integrovatelná na (a,b).

4.8. **Věta** (Různé vlastnosti Lebesgueova integrálu). *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a f, g jsou měřitelné funkce na D.*

(a) *Je-li $f \geq 0$, D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$ a $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak*

$$\int_{D_1} f\,d\mu \leq \int_{D_2} f\,d\mu.$$

(b) *Jestliže D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ a $D_1 \cup D_2 = D$, pak*

$$\int_D f\,d\mu = \int_{D_1} f\,d\mu + \int_{D_2} f\,d\mu.$$

(c) *Je-li $\int_D |f|\,d\mu < \infty$, pak $|f| < \infty$ skoro všude.*

(d) *Je-li $\int_D |f|\,d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*

(e) (monotonie) *Jestliže f, g mají integrál a $f \leq g$ skoro všude, pak*

$$\int_D f\,d\mu \leq \int_D g\,d\mu.$$

(f) *Je-li $\int_D g\,d\mu < \infty$ a $|f| \leq g$ skoro všude, pak f je integrovatelná.*

4.14. **Důsledek** (Spojitá závislost na integračním oboru). *Nechť D, $E_k \in \mathcal{S}$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, $\bigcup_k E_k = D$. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na D. Potom*

$$\int_D f\,d\mu = \lim_k \int_{E_k} f\,d\mu.$$

4.15. **Věta** (Linearita integrálu). (a) *Nechť f, g jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom*

$$\int_D (f+g)\,d\mu = \int_D f\,d\mu + \int_D g\,d\mu,$$

má-li pravá strana smysl. (b) *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $\gamma \in \mathbb{R}$. Pokud f má integrál, pak*

$$\int_D \gamma f\,d\mu = \gamma \int_D f\,d\mu.$$

5.4. **Věta** (vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a,b). Potom $(N) \int_a^b f(x)\,dx$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce f. V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.*

5.5. **Důsledek** (Diskuse vztahu mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a,b).

(a) *Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b, konverguje i Newtonův a to absolutně.*

(b) *Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, pak konverguje i Lebesgueův.*

(c) *Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce f, pak oba mají stejnou hodnotu.*

(d) *Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.*

5.6. **Věta** (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a,b]$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b konverguje a je roven integrálu Riemannovu.*

4.13. **Věta** (Levi, Lebesgue, monotone convergence theorem). *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$, $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$, a $f = \lim f_j$. Potom*

$$\int_D f\,d\mu = \lim_j \int_D f_j\,d\mu. \tag{11}$$

6.1. **Lemma** (Fatouovo). *Nechť $D \in S$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D. Potom*

$$\int_D \liminf_j f_j \le \liminf_j \int_D f_j. \tag{15}$$

6.2. **Věta** (Lebesgueova, dominated convergence theorem). *Nechť $D \in S$ a f, f_j, $j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na D. Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná* majoranta*) tak, že*

$$|f_j(x)| \le g(x), \qquad j = 1, 2, \dots, \qquad x \in D. \tag{16}$$

Potom

$$\int_D f = \lim_j \int_D f_j. \tag{17}$$

14.1. **Definice** (Součin měr). Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ-konečné. Uvažujme systém $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ všech podmnožin $X \times Y$ tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. Takovým množinám budeme říkat *měřitelné obdélníky.* Na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ definujeme množinovou funkci $\mu \times \nu$ předpisem

$$(\mu \times \nu)\,(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B).$$

Systém množin $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ generuje tzv. *součinovou σ-algebru* $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} := \sigma(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$. V dalším (věta 14.5) uvidíme, že existuje právě jedna míra ρ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ tak, že

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B), \qquad A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{T}.$$

Tuto míru budeme nazývat *součin měr* μ a ν a značit $\mu \otimes \nu$. Její zúplnění budeme nazývat *úplný součin měr* a značit $(\mathcal{S} \overline{\otimes} \mathcal{T},\ \mu \overline{\otimes} \nu)$.

14.9. **Definice** (Řezy). Nechť $M \subset X \times Y$. Značíme

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in Y : (x, y) \in M\}, \qquad x \in X, \\ M^{*,y} &= \{x \in X : (x, y) \in M\}, \qquad y \in Y. \end{aligned}$$

Tyto množiny se nazývají *řezy.*

14.11. **Věta** (Fubiniova). *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ-konečné. Buď $(\mathcal{R}, \rho)$ součin měr μ a ν a $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\rho})$ jejich úplný součin. Nechť f je $\overline{\rho}$-měřitelná funkce na $\overline{\rho}$-měřitelné množině $M \subset X \times Y$. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y)\,d\overline{\rho}(x, y)$$

má smysl. Potom pro μ-skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y)\,d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_X g\,d\mu$$

a

$$\int_M f(x, y)\,d\overline{\rho}(x, y) = \int_X g\,d\mu = \int_X \Big(\int_{M^{x,*}} f(x, y)\,d\nu(y) \Big)\,d\mu(x). \tag{33}$$

15.3. **Věta** (o substituci). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

2 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty)$ nazýváme *normou* na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem.*

Tvrzení 2. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Funkce $\rho(x,y) = \|x-y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X.

Definice 3. *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

PŘÍKLADY 4.

a) Prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normami $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1,+\infty)$, případně $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n}|x_i|$ pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou Banachovy prostory.

b)
- Nechť K je kompaktní prostor a $C(K)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ všech spojitých funkcí z K do $\mathbb{K}$. Na $C(K)$ zavedeme normu předpisem $\|f\|_\infty = \sup_{x\in K}|f(x)|$ pro $f \in C(K)$. Pak $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor. Platí, že $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, právě když $f_n \rightrightarrows f$. Důkaz úplnosti je stejný jako pro prostor $C([a,b])$ známý z přednášky z matematické analýzy.
- Prostor všech konvergentních posloupností $c = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n \text{ existuje vlastní}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je Banachův prostor. Důkaz lze vést přímo, nebo lze využít faktu, že c je lineárně izometrický prostoru $C(K)$, kde $K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty\{\frac{1}{n}\}$ s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}$ (viz Tvrzení 60(b)).
- Prostor $c_0 = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n = 0\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor Banachova prostoru c (viz Tvrzení 5(b)).
- Prostor $c_{00} = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ (x_n)_{n=1}^\infty \text{ má pouze konečně mnoho nenulových členů}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$ je normovaný lineární prostor, který není Banachův: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků c_{00}, kde $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, je cauchyovská, ale není konvergentní v c_{00}.

- Prostor $\ell_p = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\right\}$, $1 \le p < \infty$ s normou $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ je Banachův prostor. (Je to speciální případ prostorů uvedených níže.)

Tvrzení 4. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.

(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

Definice 7 (ekvivalentní normy)**.** Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le B\|x\|_2$.

Věta 8. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Definice 65. *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X\times X\to\mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x\mapsto\langle x,y\rangle$ je lineární pro každé $y\in X$,

(ii) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$ pro každé $x,y\in X$,

(iii) $\langle x,x\rangle\geq 0$ pro každé $x\in X$,

(iv) $\langle x,x\rangle=0$ právě tehdy, když $x=0$.

Dvojici $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem*.

Definice 67. Prostor se skalárním součinem $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X,\|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$.

PŘÍKLAD 83. Snadno se ověří, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normou $\|\cdot\|_2$ jsou Hilbertovy prostory se skalárním součinem $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$. Obecněji, je-li μ míra, pak prostor $L_2(\mu)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f,g\rangle=\int_X f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$. Speciálně, ℓ_2 je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^\infty x_i\overline{y_i}$.

Podprostor ℓ_2 tvořený vektory pouze s konečně mnoha nenulovými souřadnicemi je prostor se skalárním součinem, který není Hilbertův.

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X\to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineární*, pokud $T(x+y)=T(x)+T(y)$ a $T(\alpha x)=\alpha T(x)$ pro všechna $x,y\in X$ a $\alpha\in\mathbb{K}$.

Definice 45. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\in\mathcal{L}(X,Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x)-T(y)\|=\|x-y\|$ pro všechna $x,y\in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x)-T(y)\|=\|x-y\|$ pro všechna $x,y\in X$.

Důsledek 72. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X\to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x),T(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ pro každé $x,y\in X$.*

Jsou-li $(X,\|\cdot\|_X)$ a $(Y,\|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1\leq p\leq\infty$, pak funkce $(x,y)\mapsto\|(x,y)\|_p$, kde

$$\|(x,y)\|_p=\begin{cases}\left(\|x\|_X^p+\|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p<\infty,\\ \max\{\|x\|_X,\|y\|_Y\} & \text{pro } p=\infty,\end{cases}\tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X\times Y$.

Definice 52. Nechť $(X,\|\cdot\|_X)$ a $(Y,\|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1\leq p\leq\infty$. Pak prostorem $X\oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X\times Y,\|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Věta 73. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak na prostoru $X\oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y, a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X\oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

Tvrzení 37. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X\to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je spojité.

(ii) T je spojité v jednom bodě.

(iii) T *je spojité v* 0.

(iv) *Existuje* $C \geq 0$ *tak, že* $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(v) T *je lipschitzovské.*

(vi) T *je stejnoměrně spojité.*

(vii) $T(A)$ *je omezená pro každou omezenou* $A \subset X$.

(viii) $T(B_X)$ *je omezená.*

(ix) $T\big(U(0,\delta)\big)$ *je omezená pro nějaké* $\delta > 0$.

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Věta 41. *Nechť* X *je normovaný lineární prostor a* Y *je Banachův prostor. Pak* $\mathcal{L}(X,Y)$ *je Banachův prostor.*

Věta 49. *Nechť* $X, \widehat{X}$ *a* Y *jsou normované lineární prostory,* X *je hustý v* $\widehat{X}$ *a* Y *je úplný. Nechť dále* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Pak existuje právě jeden operátor* $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X},Y)$ *rozšiřující* T, *tj.* $\widehat{T}\restriction_X = T$. *Navíc platí* $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

Věta 124 (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť* X *je Banachův prostor,* Y *je normovaný lineární prostor a* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé* $x \in X$ *je* $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Definice 126. Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 127 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)**.** *Nechť* X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *je na. Pak* T *je otevřené zobrazení.*

Důsledek 129 (S. Banach, 1929)**.** *Nechť* X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Pak* T *je izomorfismus* X *na* Y, *právě když* T *je prostý a na.*

Definice 131. Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení* f. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, *má uzavřený graf*, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 132 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)**.** *Nechť* X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T\colon X \to Y$ *je lineární zobrazení. Pak* T *je spojité, právě když má uzavřený graf.*

3 Hilbertovy prostory

Definice 74. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* A.

Definice 26. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme *zobecněnou řadou*. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F : \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Věta 81. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

Definice 82. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- *ortonormální*, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- *maximální ortonormální*, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Poznámka (důležitá). Uvědomme si, že v definici ortonormální báze lze podle Věty 102 v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ podmínku $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ (tj. předpoklad, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ konverguje bezpodmínečně) nahradit podmínkou $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ (tj. obyčejnou konvergencí). Podobně lze v následujících tvrzeních všude, kde předpokládáme konvergenci zobecněné řady $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém, tento předpoklad v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ nahradit předpokladem obyčejné konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$.

Věta 84. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

Důsledek 87. *Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.*

Věta 89 (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.*

Věta 90. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé $x \in X$.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

- Pro Hilbertův prostor $L_2([0, 2\pi])$ je systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx);\ n \in \mathbb{N}\right\}$ ortonormální bází. Ortonormalita plyne z klasické teorie Fourierových řad. Hustota lineárního obalu plyne z Fejérovy[19] věty zkombinované s důsledkem Luzinovy věty. Alternativně lze ukázat, že trigonometrický ortonormální systém je maximální: Nechť $f \in L_2([0, 2\pi])$ je kolmé ke všem prvkům tohoto systému. Protože též $f \in L_1([0, 2\pi])$, můžeme spočítat Fourierovy koeficienty příslušné funkci f. Ty jsou ovšem díky kolmosti rovny 0. Podle věty o jednoznačnosti to znamená, že $f = 0$ s. v., a tedy $f = 0$ v $L_2([0, 2\pi])$.

  Nyní též vidíme, proč se řadě v (ii) ve Větě 112 říká abstraktní Fourierova řada: Pro bázi popsanou výše je to totiž formálně klasická Fourierova řada a čísla $\langle x, e_\gamma\rangle$ jsou přesně klasické Fourierovy koeficienty. Tato Fourierova řada ovšem konverguje ve smyslu prostoru $L_2([0, 2\pi])$, nikoli bodově, jak se studuje v klasické teorii.

Důsledek 91. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

Věta 92 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T\colon H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

Tvrzení 93. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li $\dim X = n \in \mathbb{N}$, pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li $\dim X = \infty$ a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

Věta 78 (Frigyes Riesz, 1934). *Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Lemma 79 (F. Riesz, 1934). *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.*

4 Fourierovy řady

Značení: Symbolem $\mathcal{P}_{2\pi}$ značíme množinu všech lokálně integrovatelných 2π-periodických funkcí na $\mathbf{R}$.

Definice. Nechť a_k, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a b_k, $k \in \mathbf{N}$, jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*. Je-li navíc $n \in \mathbf{N}$, pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickým polynomem stupně n*.

Věta L 17.1 (Fourierovy vzorce). *Nechť $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ a $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ jsou posloupnosti reálných čísel a řada*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

konverguje stejnoměrně k funkci f na $\mathbf{R}$. Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, definované předpisy

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N}\cup\{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N},$$

nazýváme *Fourierovými koeficienty* funkce f. Trigonometrickou řadu

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Fourierovou řadou* funkce f. Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou Sf značíme symbolem $f \sim Sf$. Pro $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$ dále definujeme *částečný součet Fourierovy řady* funkce f předpisem

$$S_nf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Věta L 17.9 (Fourierovy koeficienty určují funkci). *Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom $f = g$ skoro všude.*

Důsledek Vět 11.10 a 11.12: Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ a a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f. Pak platí

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

ve smyslu rovnosti rovnosti L^2 funkcí. Tedy v příslušném metrickém prostoru platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

Navíc platí Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$. Potom funkci

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Dirichletovým jádrem.*

Věta T 17.3 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma). *Nechť $(a, b) \subset \mathbf{R}$ je omezený interval a nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom*

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(tx)\,dx = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(tx)\,dx = 0.$$

Důsledek: Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Fourierovými koeficienty nějaké funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Věta L 17.5 (Diniovo kritérium). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $x \in \mathbf{R}$. Nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$ a nechť dále existují vlastní limity*

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+t)-f(x+)}{t} \qquad \text{a} \qquad \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}.$$

Potom řada Sf konverguje v bodě x a platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Speciálně, má-li funkce f konečné jednostranné derivace v bodě x, potom $Sf(x) = f(x)$.

Definice. Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Definujme veličiny

- $V^+(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1}))^+\right\}$ (kladná variace),
- $V^-(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1}))^-\right\}$ (záporná variace),
- $V(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|\right\}$ (totální variace),

kde supremum bereme přes všechna dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ tvaru $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Dále zaveme značení

$$\begin{aligned} V_f^+(x) &= V^+(f;a,x), \\ V_f^-(x) &= V^-(f;a,x), \\ V_f(x) &= V(f;a,x). \end{aligned}$$

Řekneme, že funkce f má na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ *omezenou variaci*, jestliže $V(f;a,b) < \infty$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathrm{BV}([a,b])$.

Věta T 17.6 (Jordanovo–Dirichletovo kritérium). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $f \in \mathrm{BV}([0,2\pi])$. Potom*

(a) *pro každé $x \in [0,2\pi]$ konverguje Fourierova řada $Sf(x)$ a platí*

$$Sf(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2};$$

(b) *je-li funkce f navíc spojitá na $(a,b) \subset [0,2\pi]$, potom*

$$S_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } [a,b].$$

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že a_n konverguje k $a \in \mathbf{R}$ v Cesarově smyslu, pokud pro posloupnost

$$\sigma_n = \frac{a_0+a_1+\ldots+a_n}{n+1} \text{ konverguje k } a.$$

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom funkci

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Fejérovým jádrem.*

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ a nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme n-tým *částečným Fejérovým součtem* funkce f.

Věta T 17.7 (Fejérova)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$*.*

(a) *Jestliže pro nějaké* $x \in \mathbf{R}$ *existují vlastní limity* $f(x+)$ *a* $f(x-)$*, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

(b) *Je-li funkce* f *spojitá na nějakém intervalu* $(a, b) \subset \mathbf{R}$*, potom*

$$\sigma_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } (a, b).$$

Věta L 17.8 (Weierstrassova - trigonometrická verze)**.** *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *je spojitá na* $\mathbf{R}$*. Nechť* $\varepsilon > 0$*. Potom existuje trigonometrický polynom* $T \in \mathcal{T}$ *splující*

$$\|f - T\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

5 Funkce komplexní proměnné

Definice:

(1) **Komplexní funkcí komplexní proměnné** rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$.

(2) Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné a $a \in \mathbb{C}$. **Derivací funkce f podle komplexní proměnné v bodě** a (stručněji **derivací funkce f v bodě** a) rozumíme (komplexní) číslo

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud limita na pravé straně existuje (v $\mathbb{C}$).

Poznámka:

(1) Pro derivaci podle komplexní proměnné platí věty o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce ve stejné podobě jako pro derivaci v $\mathbb{R}$.

(2) Má-li f v bodě $a \in \mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné, je v bodě a spojitá.

(3) Je-li f komplexní funkce komplexní proměnné, g komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$, pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

pokud obě derivace na pravé straně existují.

Věta 3:

Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné. Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ odpovídající f při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$; tj. takovou, že

$$f(x + iy) = \tilde{f}_1(x, y) + i\tilde{f}_2(x, y)$$

pro $x + iy$ z definičního oboru f.

(1) (**Cauchy-Riemannovy podmínky**) Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné, právě když $\tilde{f}$ má v bodě (a, b) totální diferenciál a platí

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a, b) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b).$$

(2) Existuje-li $f'(z)$, je Jacobiho determinant $\tilde{f}$ v bodě (a, b) roven $|f'(z)|^2$. Speciálně, Jakobiho matice $\tilde{f}$ v bodě (a, b) je regulární, právě když $f'(z) \neq 0$.

Definice:

- Nechť $M \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je **holomorfní na množině** M, jestliže existuje otevřená množina $G \supset M$ taková, že f má derivaci (podle komplexní proměnné) v každém bodě množiny G.
- Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celá funkce**.

Cestou neboli **po částech hladkou křivkou** v $\mathbb{C}$ rozumíme křivku $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, pro kterou existuje takové dělení $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$, že pro každé $j = 1, \ldots, n$ je funkce φ třídy C^1 na $[s_{j-1}, s_j]$ (tj. derivace φ' je spojitá na (s_{j-1}, s_j) a má v krajních bodech s_{j-1} a s_j vlastní jednostranné limity).

Je-li navíc $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **integrál funkce f podél cesty** φ vzorcem

$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde integrál na pravé straně je zobecněný Riemannův, tj. roven

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Věta 3:

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G. Pak pro každou cestu $\varphi : [a, b] \to G$ platí $\displaystyle\int_\varphi f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Speciálně, je-li φ uzavřená cesta v G, pak $\displaystyle\int_\varphi f = 0$.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Ω je **souvislá** (tj. pro každou neprázdnou $G \subset \Omega$ takovou, že G i $\Omega \setminus G$ jsou otevřené množiny, platí $G = \Omega$).

Definice:

Otevřenou souvislou podmnožinu $\mathbb{C}$ nazýváme **oblast**.

Definice:

Nechť φ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Pak **index bodu a vzhledem ke křivce** φ je definován vzorcem

$$\operatorname{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z - a}\,\mathrm{d}z.$$

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina a $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že bod z_0 je **hromadným bodem množiny** M, jestliže každé okolí bodu z_0 obsahuje nějaký bod množiny M různý od z_0. Je-li navíc $\Omega \subset \mathbb{C}$ množina obsahující M, říkáme, že M je **izolovaná v** Ω, jestliže nemá v Ω žádný hromadný bod.

Definice. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina.

(i) Symbolem $H(G)$ budeme značit množinu všech komplexních funkcí holomorfních na G.

(ii) Funkce $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ se nazývá **meromorfní**, jestliže je spojitá na G a existuje množina $M \subset G$, která je izolovaná v G (tj. nemá v G hromadný bod), taková, že f je holomorfní na $G \setminus M$.

(iii) Množinu všech funkcí meromorfních na G značíme $M(G)$.

Poznámka. V bodech výjimečné množiny M z definice má meromorfní funkce **nejvýše pól** (tj. buď pól nebo odstranitelnou singularitu).

Definice. **Řetězcem** rozumíme výraz tvaru

$$\varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \varphi_n, \tag{*}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou cesty. Řetězec (*) se nazývá **cykl**, pokud jsou cesty $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ uzavřené.

- **obraz řetězce** Γ jako

$$\langle \Gamma \rangle = \langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle \cup \cdots \cup \langle \varphi_n \rangle;$$

- je-li $f : \langle \Gamma \rangle \to \mathbb{C}$ spojitá, pak **integrál funkce** f **podél** Γ jako

$$\int_\Gamma f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f + \cdots + \int_{\varphi_n} f;$$

Je-li Γ cykl a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$, pak **index bodu** a **vzhledem k cyklu** Γ je

$$\operatorname{ind}_\Gamma a = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z-a} \, \mathrm{d}z.$$

Věta 2 (globální Cauchyova věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Pak pro každou funkci f holomorfní na Ω platí*

$$\int_\Gamma f = 0$$

a

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle.$$

Věta 14 (Cauchyův vzorec pro vyšší derivace). *Nechť f je holomorfní na $\overline{U(a,r)}$ (kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$). Pak f má na $U(a,r)$ derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z \in U(a,r)$ platí*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w,$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r.

Důsledek. *Je-li f holomorfní na množině $M \subset \mathbb{C}$, je i f' holomorfní na M.*

Věta 21: O jednoznačnosti

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f, g jsou funkce holomorfní na Ω. Jestliže množina

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v Ω (tj. není izolovaná v Ω), pak $f = g$ na Ω.

Definice:

Laurentovou řadou o středu $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$(*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. **Regulární částí** řady $(*)$ rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

hlavní částí řady $(*)$ rozumíme symbol

$$(**) \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n.$$

Říkáme, že **hlavní část řady** $(*)$ **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}.$$

Součet této řady nazveme **součtem hlavní části řady** $(*)$ a značíme jej rovněž $(**)$.

Říkáme, že **řada** $(*)$ **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. **Součtem řady** $(*)$ rozumíme součet součtu regulární části a součtu hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n.$$

Definice:

Nechť $0 \le r < R \le +\infty$ a $a \in \mathbb{C}$. Pak označme

$$P(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Tuto množinu nazveme **mezikružím o středu** a, **vnitřním poloměru** r **a vnějším poloměru** R.

Věta 3:

Mějme Laurentovu řadu $(*)$. Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$, pro která platí:

- Regulární část řady $(*)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ a diverguje pro $|z - a| > R$.
- Hlavní část řady $(*)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$ a diverguje pro $|z - a| < r$.

Je-li $r < R$, pak řada $(*)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na mezikruží $P(a, r, R)$ a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží pak nazýváme **mezikružím konvergence řady (*)**.

Věta 6:

Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pak f je v $P(a, r, R)$ součtem Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

o středu a, která na $P(a, r, R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r, R)$ je libovolné a φ_ρ je jako ve Větě 4.

Definice:

Nechť f je holomorfní funkce v $P(a, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Nechť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

je Laurentova řada funkce f v $P(a, R)$. Pak **reziduem funkce** f **v bodě** a rozumíme číslo

$$\operatorname{res}_a f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} f,$$

kde $\rho \in (0, R)$ a φ_ρ je jako ve Větě 4.

Věta 3 (obecná reziduová věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť $M \subset \Omega$ je izolovaná v Ω, $M \cap \langle \Gamma \rangle = \emptyset$ a f je funkce holomorfní v $\Omega \setminus M$. Pak platí:*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a f.$$

V sumě na pravé straně přitom je jen konečně mnoho nenulových sčítanců.