Poděkování: Velký dík patří Lubošovi Pickovi a Mirkovi Zelenému. Vetšina znění vět a definic je převzata z jejich souborů/poznámek.

15. Křivkový a plošný integrál

Motivace: Délka křivky, obsah plochy, váha nehomogenního drátu, váha nehomogenní desky

15.1. Hausdorffovy míry

Motivace: Lebesgueova míra je matematickým vyjádřením intuitivního pojmu objem (v dimenzi 3) nebo povrch (v dimenzi 2). Podobně chceme matematicky vyjádřit pojem délky nebo povrchu v dimenzi 3.

Značení: Symbolem λ^n budeme značit n-dimenzionální Lebesgueovu míru na $\mathbf{R}^n$. Symbolem λ^n budeme značit n-dimenzionální vnější Lebesgueovu míru na $\mathbf{R}^n$.

Značení: Pro $k > 0$ označme

$$\alpha_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}, \tag{15.1}$$

kde

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx, \quad s > 0.$$

V přednášce z teorie míry a integrálu se dokazuje, že pro koule v $\mathbf{R}^n$ platí

$$\lambda^n(B(x,r)) = \alpha_n r^n.$$

Definice. Nechť $k,\ n \in \mathbf{N}$ a $k \leq n$. Pro $A \subset \mathbf{R}^n$ a $\delta > 0$ položme

$$\mathcal{H}^k_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^\infty \alpha_k(\tfrac{1}{2}\operatorname{diam} A_j)^k;\ A \subset \bigcup_{j=1}^\infty A_j,\ \operatorname{diam} A_j \leq \delta\Big\}.$$

Definujme

$$\mathcal{H}^k(A) = \sup_{\delta>0}\mathcal{H}^k_\delta(A).$$

Množinové funkci $\mathcal{H}^k_\delta$ se říká *k-rozměrný Hausdorffův δ-obsah*, $\mathcal{H}^k$ se nazývá *k-rozměrná Hausdorffova (vnější) míra.* Oprávněnost termínu "Hausdorffova vnější míra" ukážeme později. V geometrické teorii míry je zvykem používat pojem "míra" ve smyslu "vnější míra", proto v literatuře najdeme termín "Hausdorffova míra" používaný i pro Hausdorffovu vnější míru. Koeficient α_k je volen tak, abychom v $\mathbf{R}^n$ dostali $\mathcal{H}^n = \lambda^n$, pro k necelé je jeho význam jen estetický.

Poznámky: 1. Funkce $\delta \mapsto \mathcal{H}^k_\delta(A)$ je zřejmě nerostoucí, a proto existuje limita $\lim_{\delta\to 0+}\mathcal{H}^k_\delta(A)$, která se rovná $\mathcal{H}^k(A)$.

2. V definici $\mathcal{H}^k_\delta(A)$ můžeme pokrývat jen uzavřenými množinami a dostaneme stejnou hodnotu $\mathcal{H}^k_\delta(A)$. Pokrytí $\{A_j\}$ množiny A totiž můžeme nahradit pokrytím $\{\overline{A_j}\}$, neboť uzávěr množiny nezvětšuje diametr. Také můžeme pokrývat jen otevřenými množinami, neboť diametr množiny

$$\bigcup_{x\in A} B(x,\varepsilon)$$

je jen nejvýš o 2ε větší, než průměr A.

Věta L 15.1 (vnější míra)**.** *Nechť $k,\ n \in \mathbf{N}$ a $k \leq n$. Potom množinové funkce $\mathcal{H}^k_\delta$ a $\mathcal{H}^k$ jsou vnější míry na $\mathbf{R}^n$.*

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že množiny $A, B \subset P$ jsou *vzdálené*, jestliže

$$\inf\{\varrho(x,y);\ x \in A, y \in B\} > 0.$$

Řekneme, že vnější míra γ na P je **metrická**, jestliže pro každé dvě vzdálené množiny $A, B \subset P$ platí $\gamma(A\cup B) \geq \gamma(A) + \gamma(B)$. (Opačná nerovnost je splněna pro každou vnější míru.)

Připomeň: Množina $A \subset P$ je měřitelná vůči vnější míře γ na P právě tehdy, když

$$\gamma(T) \geq \gamma(T\cap A) + \gamma(T\setminus A) \text{ pro všechny } T \subset P.$$

Věta L 15.2 (měřitelnost borelovských množin)**.** *Nechť γ je metrická vnější míra na metrickém prostoru (P,ϱ). Potom je každá borelovská podmnožina P γ-měřitelná.*

Důkaz je v Thm 36.4 z Lukeš, Malý: Measure and integral.
Konec 1. přednášky 19.2.

Věta L 15.3 (metričnost Hausdorffovy míry)**.** *Nechť $k,\ n \in \mathbf{N}$ a $k \leq n$. Potom $\mathcal{H}^k$ je metrická vnější míra na $\mathbf{R}^n$. Navíc $\mathcal{H}^k$ je translačně invariantní.*

Důsledek: Každá borelovská množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je $\mathcal{H}^k$-měřitelná.
Značení: Termín k-rozměrná Hausdorffova míra by se měl používat (a budeme používat) pro množinovou funkci, která každé $\mathcal{H}^k$-měřitelně množině $A \subset P$ přiřadí $\mathcal{H}^k(A)$ a na ostatních množinách není definovaná. Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$ je $\mathcal{H}^k$-měřitelná množina a $f\colon A \to \mathbf{R}$ je $\mathcal{H}^k$-měřitelná funkce. Potom symbol

$$\int_A f \, d\mathcal{H}^k$$

budeme používat pro integrál f podle Hausdorffovy míry, ačkoli, striktně vzato, Hausdorffova míra by se měla značit jinak než vnější Hausdorffova míra (podobně jako rozlišujeme λ^n a λ^n).

Věta L 15.4 (regularita Hausdorffovy míry)**.** *Nechť $k,\ n \in \mathbf{N}$, $k \le n$ a $A \subset \mathbf{R}^n$. Potom existuje borelovská množina $B \subset \mathbf{R}^n$ taková, že $A \subset B$ a $\mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}^k(B)$.*

Příklad: Nechť $k,\ n \in \mathbf{N}$ a $k \le n$. Potom

$$0 < \mathcal{H}^k\big([0,1)^k \times \{0\}^{n-k}\big) < \infty.$$

Lze ukázat, že díky naší volbě α_k platí $\mathcal{H}^k\big([0,1)^k \times \{0\}^{n-k}\big) = 1$. To není snadné, ale budeme to používat v důkazu následující věty.
Konec 2. přednášky 20.2.

Věta T 15.5 (souvislost Hausdorffovy a Lebesgueovy míry)**.** *Nechť $n \in \mathbf{N}$ a $A \subset \mathbf{R}^n$. Potom $\mathcal{H}^n(A) = \lambda^n(A)$.*

V důkazu budeme používat teorii Dynkinových systémů z teorie míry:
Věta 12.4 z TMI (o jednoznačnosti). Nechť $\mathcal{F}$ je systém podmnožin X uzavřený na konečné průniky. Nechť ν a μ jsou míry na $\sigma(\mathcal{F})$, které se shodují na $\mathcal{F}$. Jestliže existují $X_k \in \mathcal{F}$ tak, že $\mu(X_k) < \infty$ a $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} X_k = X$, pak $\mu = \nu$ na $\sigma(\mathcal{F})$.

Definice. Nechť $\beta > 0$. Zobrazení $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ nazveme *β-lipschitzovské*, pokud

$$\text{pro všechna } x, y \in \mathbf{R}^n \text{ platí } |f(x) - f(y)| \le \beta|x - y|.$$

Zobrazení f nazýváme *lipschitzovské*, pokud existuje $\beta > 0$ tak, že f je β-lipschitzovské.

Příklady: 1. Nechť $f \in C^1(\mathbf{R})$. Pak f je lipschitzovská na $[0,1]$.
2. $f(x) = |x|$ je 1-lipschitzovská
3. $f(x) = \sqrt{x}$ není lipschitzovská na $[0,1]$.

Věta L 15.6 (vlastnosti Hausdorffovy míry)**.**
(a) *Nechť $k, n \in \mathbf{N}$, $k \le n$, $A \subset \mathbf{R}^k$ a $I\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ je izometrie. Potom*

$$\mathcal{H}^k\big(I(A)\big) = \lambda^k(A).$$

(b) *Nechť $k, m, n \in \mathbf{N}$, $k \le n$, $k \le m$, $A \subset \mathbf{R}^n$ a $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je β-lipschitzovské. Potom*

$$\mathcal{H}^k\big(f(A)\big) \le \beta^k \mathcal{H}^k(A).$$

(c) *Nechť $k_1, k_2, n \in \mathbf{N}$, $k_1 < k_2 \le n$ a $A \subset P$. Jestliže $\mathcal{H}^{k_1}(A) < \infty$, potom $\mathcal{H}^{k_2}(A) = 0$.*

Konec 3. přednášky 26.2.

Věta L 15.7 (první lemma - area formule)**.** *Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \le n$, a $L\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ je prosté lineární zobrazení. Potom pro každou λ^k-měřitelnou množinu $A \subset \mathbf{R}^k$ platí*

$$\mathcal{H}^k(L(A)) = \sqrt{\det L^T L} \cdot \lambda^k(A).$$

Značení: Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \le n$, a $L\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ je lineární zobrazení. Budeme značit $\operatorname{vol} L = \sqrt{\det L^T L}$.
Poznámka: Symbol vol je zvolen podle anglického slova *volume*, které znamená objem. Matice $L^T L$ se nazývá Gramova matice. Podle Lemmatu 15.7 platí $\mathcal{H}^k(L([0,1]^k)) = \operatorname{vol} L$, takže číslo $\operatorname{vol} L$ vyjadřuje k-dimenzionální objem rovnoběžnostěnu $L([0,1]^k)$. Je-li $\varphi \in \mathcal{C}^1(G)$, pak je zobrazení $t \mapsto \operatorname{vol} \varphi'(t)$ spojité na množině G.

Definice. Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \le n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina a $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$. Řekneme, že φ je *regulární* na G, jestliže je třídy $\mathcal{C}^1$ na G a $\varphi'(x)$ je prosté pro každé $x \in G$.

Věta L 15.8 (druhé lemma - area formule -BD)**.** *Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \le n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\beta > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že*
(a) *zobrazení $y \mapsto \varphi\big(\varphi'(x)^{-1}(y)\big)$ je β-lipschitzovské na $\varphi'(x)(V)$,*
(b) *zobrazení $z \mapsto \varphi'(x)\big(\varphi^{-1}(z)\big)$ je β-lipschitzovské na $\varphi(V)$.*

Konec 4. přednášky 27.2.

Věta T 15.9 (třetí lemma - area formule)**.** *Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je prosté regulární zobrazení, $x \in G$ a $\alpha > 1$. Potom existuje okolí V bodu x takové, že pro každou λ^k-měřitelnou $E \subset V$ platí*

$$\alpha^{-1} \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t) \leq \mathcal{H}^k(\varphi(E)) \leq \alpha \int_E \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t).$$

Věta T 15.10 (area formule)**.** *Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je prosté regulární zobrazení a $f : \varphi(G) \to \mathbf{R}$ je borelovská. Potom platí*

$$\int_{\varphi(G)} f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_G f(\varphi(t)) \operatorname{vol} \varphi'(t)\, d\lambda^k(t),$$

pokud integrál na pravé straně konverguje.

Konec 5. přednášky 5.3.

Příklady: 1. Spočtěte obsah plochy

$$S := \Big\{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = x^2 + y^2\Big\}.$$

2. Nechť $f \in C^1(\mathbf{R})$. Spočtěte délku křivky

$$K := \Big\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : \ x \in [0, 1], \ y = f(x)\Big\}.$$

3. Nechť $f \in C^1((a, b)) \cap C([a, b])$ je kladná. Spočtěte obsah rotační plochy

$$P := \Big\{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : \ x \in [a, b], \ z^2 + y^2 = f(x)\Big\}.$$

Definice. Nechť $c\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je regulární křivka. Nechť f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. **Křivkový integrál prvního druhu** $\int_c f\, ds$ definujeme předpisem

$$\int_a^b f(c(t)) \cdot \|c'(t)\| dt,$$

pokud tento integrál konverguje.

Definice. Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená, $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ a f je funkce z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}$. **Plošný integrál prvního druhu** $\int_\varphi f dS$ definujeme předpisem

$$\int_G f(\varphi(t)) \cdot \operatorname{vol} \varphi'(t) dt,$$

pokud tento integrál konverguje.

Poznámka: Fyzikální význam křivkového integrálu prvního druhu je délka (pro $f \equiv 1$) respektive váha nehomogenního drátu.

Fyzikální význam plošného integrálu prvního druhu pro $k = 2$ je obsah (pro $f \equiv 1$) respektive váha nehomogenní desky.

Poznámka: Z Věty 15.10 plyne, že tento integrál nezávisí na parametrizaci.

15.2. Křivky, plochy a jejich orientace

Definice. Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$. Řekneme, že neprázdná množina $M \subset \mathbf{R}^n$ je k**-plocha**, jestliže pro každé $x \in M$ existuje otevřená množina $G \subset \mathbf{R}^k$ a regulární homeomorfismus $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ takový, že $x \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M.

Příklady: (a) Množina $\{0\} \times (0, 1)^2$ je 2-plocha v $\mathbf{R}^3$,

(b) je-li $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, pak $\{x \in \mathbf{R}^n, \ \|x\| = 1\}$ je $(n-1)$-plocha v $\mathbf{R}^n$,

(c) je-li $n, k \in \mathbf{N}$, $k < n$, $H \subset \mathbf{R}^n$ otevřená, $F\colon H \to \mathbf{R}^{n-k}$ je třídy C^1, $\operatorname{rank} F'(x) = n - k$ pro každé $x \in H$ a $M = \{x \in H;\ F(x) = 0\}$ je neprázdná, pak M je k-plocha v $\mathbf{R}^n$.

Definice. Nechť $k, n \in \mathbf{R}^n, k \leq n$, M je k-plocha a $x \in M$. Pak vektor $v \in \mathbf{R}^n$ nazveme **tečným vektorem** k ploše M v bodě x, jestliže existuje otevřený interval I, a spojité zobrazení $c\colon I \to M$ a $t_0 \in I$ takové, že $c(t_0) = x$ a $c'(t_0) = v$.

Množinu všech tečných vektorů k ploše M v bodě x nazýváme **tečným prostorem** k ploše M v bodě x a značíme $T_x(M)$.

Věta L 15.11 (popis tečného prostoru - důkaz jen část)**.** *Nechť $k, n \in \mathbf{N}, k \leq n$, $M \subset \mathbf{R}^n$ je k-plocha a $x \in M$.*

(a) *Potom $T_x(M)$ je k-dimenzionální vektorový prostor.*
(b) *Nechť $G \subset \mathbf{R}^k$ je otevřená množina, $a \in G$ a $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je regulární homeomorfismus takový, že $x = \varphi(a) \in \varphi(G) \subset M$ a $\varphi(G)$ je otevřená v M. Potom $\varphi'(a)(\mathbf{R}^k) = T_x(M)$.*

Příklad: 1. Spočtěte tečný prostor k ploše

$$M := \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, $M \subset \mathbf{R}^n$ je $(n-1)$-plocha a $x \in M$. Řekneme, že $v \in \mathbf{R}^n$ je **normálový vektor** k ploše M v bodě x, jestliže $v \in T_x(M)^{\perp}$.

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$. Pak definujeme **vektorový součin** vektorů $u^1, \dots, u^{n-1}$ předpisem

$$u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = \big(\det([e^i, u^1, \dots, u^{n-1}]\big)_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n.$$

Věta L 15.12 (vlastnosti vektorového součinu)**.** *Nechť $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, a $u^1, \dots, u^{n-1} \in \mathbf{R}^n$.*

(a) *Pro každé $v \in \mathbf{R}^n$ platí*

$$\langle v, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = \det[v, u^1, \dots, u^{n-1}].$$

(b) *Vektory $u^1, \dots, u^{n-1}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když $u^1 \times \cdots \times u^{n-1} = o$.*
(c) *Pro každé $i \in \{1, \dots, n-1\}$ platí $\langle u^i, u^1 \times \cdots \times u^{n-1} \rangle = 0$.*
(d) *Platí $\|u^1 \times \cdots \times u^{n-1}\| = \operatorname{vol}[u^1, \dots, u^{n-1}]$.*

Konec 6. přednášky 6.3.

Poznámka: Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je $(n-1)$-plocha, $x \in M$, $G \subset \mathbf{R}^n$ a φ je příslušný regulární homeomorfismus $\varphi \colon G \to \mathbf{R}^n$ splující $\varphi(a) = x \in \varphi(G) \subset M$. Potom

$$\nu(x) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(\varphi^{-1}(x))}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(\varphi^{-1}(x)) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}(\varphi^{-1}(x))\|},$$

kde $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(t) = (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(t), \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(t))$, je jednotkový normálový vektor k ploše M. Zobrazení ν je spojité na jisté otevřené množině v M obsahující x.

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}, n > 1$, a $M \subset \mathbf{R}^n$ je $(n-1)$-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\nu \colon M \to \mathbf{R}^n$ takové, že $\nu(x) \in T_x(M)^{\perp}$ a $\|\nu(x)\| = 1$ pro každé $x \in M$.

Příklady: a) Pro plochu $M = \{0\} \times (0,1)^2$ určete $\nu(x), x \in M$.
b) Pro plochu $M = \mathbb{S}_2$ určete $\nu(x), x \in M$.
c) Möbiova páska.

Věta T 15.13 (o $(n-1)$-ploše - důkaz jen část)**.** *Nechť $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $z \in \partial\Omega$. Nechť je splněna podmínka*

(R) *existuje okolí U bodu z a* ***rozhraničující*** *funkce $h \colon U \to \mathbf{R}$ taková, že $h \in \mathcal{C}^1(U)$, $\nabla h(z) \neq o$ a $U \cap \Omega = \{x \in U; h(x) < 0\}$.*

Potom existuje okolí $V \subset U$ bodu z takové, že $V \cap \partial\Omega$ je $(n-1)$-plocha. Vektor $\nu_\Omega(z) = \frac{\nabla h(z)}{\|\nabla h(z)\|}$ je jednotkový normálový vektor v bodě z k $V \cap \partial\Omega$ a nezávisí na volbě rozhraničující funkce h.

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $z \in \partial\Omega$. Řekneme, že bod z je **regulárním bodem** hranice Ω, pokud je splněna podmínka (R) z Lemmatu 15.13. Vektor $\nu_\Omega(z)$ nazýváme **vnějším jednotkovým normálovým vektorem** k Ω v bodě z. Množinu všech regulárních bodů hranice Ω značíme $\partial^*\Omega$.

Důsledek: Nechť $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, a $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná omezená otevřená množina. Pokud $\partial^*\Omega \neq \emptyset$, pak $\partial^*\Omega$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν_Ω.

15.3. Gaussova věta

Definice. Nechť $a, b \in \mathbf{R}, a < b$.

(a) Řekneme, že zobrazení $c \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je **(parametrická) křivka**, jestliže je spojité.
(b) Řekneme, že parametrická křivka $c \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je **skoro regulární**, pokud existuje dělení $\{t_i\}_{i=0}^p$ intervalu $[a, b]$ takové, že
- c je třídy $\mathcal{C}^1$ na (t_{i-1}, t_i), $i = 1, \dots, p$,
- $\forall t \in [a, b] \setminus \{t_0, \dots, t_p\} \colon c'(t) \neq 0$.

Definice. Nechť $c \colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ je skoro regulární křivka. Nechť f je vektorové pole z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$. **Křivkový integrál druhého druhu** $\int_c f \cdot dc$ definujeme předpisem

$$\int_a^b \big\langle f(c(t)), c'(t) \big\rangle dt,$$

pokud tento integrál konverguje. Občas ho značíme $\int_c f \, dc$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je $(n-1)$-plocha orientovaná normálovým polem ν a $f\colon M \to \mathbf{R}^n$. **Tok vektorového pole** f orientovanou plochou (M,ν) definujeme jako

$$\int_M \langle f(y), \nu(y)\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

pokud integrál konverguje.

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}$, $G \subset \mathbf{R}^{n-1}$ je otevřená, $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ a f je vektorové pole z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$. **Plošný integrál druhého druhu** $\int_\varphi f \cdot d\varphi$ definujeme předpisem

$$\int_G \Big\langle f(\varphi(t)), \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)\Big\rangle dt,$$

pokud tento integrál konverguje.

Poznámka: Podle area formule je tento integrál roven toku příslušného vektorového pole:

$$\begin{aligned}\int_G \Big\langle f(\varphi(t)), &\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)\Big\rangle dt = \\ &= \int_G \Big\langle f(\varphi(t)), \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)}{\|\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)\|}\Big\rangle \Big\|\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \times \cdots \times \frac{\partial \varphi}{\partial t_{n-1}}(t)\Big\| dt \\ &= \int_{\varphi(G)} \langle f(y), \nu(y)\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y)\end{aligned}$$

Nezávisí tedy na parametrizaci dané plochy.

Poznámka: Fyzikálně si plošný integrál druhého druhu můžeme představit jako tok vektorového pole plochou, například kolik vzduchu proteče skrz φ za jednotku času, pokud známe předpis na tok vzduchu f.

Příklad: Spočtěte plošný integrál druhého druhu z $f(x,y,z) = [x, 2y, 3z]$ přes jednotkovou sféru v $\mathbf{R}^3$.

Konec 7. přednášky 12.3.

Definice. Nechť $U \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbf{R}^n$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **divergenci vektorového pole** f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x).$$

Věta L 15.14 (Gaussova věta o divergenci)**.** *Nechť $n \in \mathbf{N}, n > 1$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je omezená otevřená neprázdná množina, $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < \infty$, $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega \setminus \partial^*\Omega) = 0$ a f je vektorové pole z $\mathbf{R}^n$ do $\mathbf{R}^n$, které je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Pak platí*

$$\int_{\partial\Omega} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y)\big\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x) d\lambda^n(x).$$

Příklad: 1. Tok vzduchu plochou $\partial\Omega$ za jednotku času je roven změně váhy vzduchu uvnitř Ω.
2. Spočtěte plošný integrál druhého druhu z $f(x,y,z) = [x, 2y, 3z]$ přes jednotkovou sféru v $\mathbf{R}^3$.
3. Archimédova věta.

Věta T 15.15 (rozklad jednotky)**.** *Nechť $n \in \mathbf{N}$ a $\varepsilon > 0$. Pak existují funkce $\omega_j\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j \in \mathbf{N}$, takové, že pro každé $j \in \mathbf{N}$ platí*

(a) *ω_j je nezáporná,*
(b) *ω_j je třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^n)$,*
(c) $\operatorname{diam} \operatorname{supp} \omega_j < \varepsilon$,
(d) $\sum_{j=1}^\infty \omega_j = 1$,
(e) *pro každé $x \in \mathbf{R}^n$ existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu x takové, že množina $\{j \in \mathbf{N}; \operatorname{supp} \omega_j \cap U \neq \emptyset\}$ je konečná.*

Věta L 15.16 (popis oblasti)**.** *Nechť $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $z \in \partial\Omega$ je regulární bod hranice Ω a $\nu_\Omega(z)_n > 0$. Potom existuje otevřená množina $W \subset \mathbf{R}^{n-1}$ obsahující bod $[z_1, \dots, z_{n-1}]$, otevřená množina $H \subset \mathbf{R}$ obsahující bod z_n a funkce $\varphi\colon W \to H$ taková, že $\varphi \in \mathcal{C}^1(W)$ a*

$$\{x \in \mathbf{R}^n;\ x_n < \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})\} \cap (W \times H) = \Omega \cap (W \times H).$$

Konec 8. přednášky 13.3.

Věta L 15.17 (lineární isometrie to nezkazí - BD). *Nechť* Ω *a* f *jsou jako ve Větě 15.14 a* $S\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *je lineární isometrie. Potom pro každý regulární bod z hranice* Ω *je bod* $S(z)$ *regulárním bodem hranice* $S(\Omega)$ *a platí* $\nu_{S(\Omega)}(S(z)) = S(\nu_\Omega(z))$. *Dále platí*

$$\int_\Omega \operatorname{div} f(x)d\lambda^n(x) = \int_{S(\Omega)} \operatorname{div}(S\circ f\circ S^{-1})(\tilde{x})d\lambda^n(\tilde{x}),$$

$$\int_{\partial\Omega} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y)\big\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$
$$= \int_{\partial S(\Omega)} \big\langle S\circ f\circ S^{-1}(\tilde{y}), \nu_{S(\Omega)}(\tilde{y})\big\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(\tilde{y}).$$

Věta T 15.18 (jádro pudla). *Nechť* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená omezená množina a* $z \in \partial^*\Omega \cup \Omega$. *Potom existuje otevřená množina* $U \subset \mathbf{R}^n$ *obsahující z taková, že pro každé vektorové pole* f *z* $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}^n$*, které je třídy* $\mathcal{C}^1$ *na otevřené množině obsahující* $\overline{\Omega}$ *a* $\operatorname{supp} f \subset U$*, platí*

$$\int_{\partial\Omega} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y)\big\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x)d\lambda^n(x).$$

Konec 9. přednášky 19.3.

Věta L 15.19 (zbavíme se neregulárních bodů). *Nechť* Ω *a* f *jsou jako ve Větě 15.14 a* $\operatorname{supp} f \cap (\partial\Omega \setminus \partial^*\Omega) = \emptyset$. *Potom*

$$\int_{\partial\Omega} \big\langle f(y), \nu_\Omega(y)\big\rangle d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_\Omega \operatorname{div} f(x)d\lambda^n(x).$$

Věta T 15.20 (aproximace to nezkazí). *Nechť* $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$, $N \subset \mathbf{R}^n$ *je kompaktní a* $\mathcal{H}^{n-1}(N) = 0$. *Potom existují* $\mathcal{C}^1$ *funkce* $v_m\colon \mathbf{R}^n \to [0,1]$, $m \in \mathbf{N}$, *takové, že platí:*

(a) $v_m \to \chi_{\mathbf{R}^n\setminus N}$,
(b) $\int \|\nabla v_m(x)\| d\lambda^n(x) \to 0$,
(c) *pro každé* $m \in \mathbf{N}$ *existuje otevřená množina* $G_m \subset \mathbf{R}^n$ *obsahující* N *taková, že* $v_m|_{G_m} = 0$.

Konec 10. přednášky 20.3.

15.4. Greenova a Stokesova věta - bez důkazu

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je množina, $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ je vektorové pole a $u\colon \Omega \to \mathbf{R}$. řekneme, že u je **potenciál** pole f na Ω, jestliže pro každé $x \in \Omega$ platí $\nabla u(x) = f(x)$. Vektorové pole, které má potenciál, nazýváme **potenciální**.

Věta L 15.21 (věta o potenciálu). *Nechť* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená množina,* $c\colon [a,b] \to \Omega$ *je skoro regulární křivka a* $f\colon \Omega \to \mathbf{R}^n$ *je spojité potenciální vektorové pole s potenciálem* u. *Pak*

$$\int_c f\ dc = \int_c \nabla u\ dc = u(c(b)) - u(c(a)).$$

Příklad: Spočtěte

$$\int_C y\ dx + x\ dy, \text{ kde } C \text{ je křivka}$$

začínající v $[-1,2]$ a končící v $[2,3]$.

Definice. (a) Nechť $U \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbf{R}^2$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x).$$

(b) Nechť $U \subset \mathbf{R}^3$ je otevřená množina a $f\colon U \to \mathbf{R}^3$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$. Pro $x \in U$ definujeme **rotaci** vektorového pole f v bodě $x \in U$ předpisem

$$\operatorname{rot} f(x) = \Big(\tfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(x) - \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3}(x), \tfrac{\partial f_1}{\partial x_3}(x) - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(x), \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\Big).$$

Věta T 15.22 (Greenova). *Nechť* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ *je omezená otevřená neprázdná množina,* $\mathcal{H}^1\big(\partial\Omega\big) < \infty$, $\mathcal{H}^1\big(\partial\Omega \setminus \partial^*\Omega\big) = 0$ *a* f *je vektorové pole z* $\mathbf{R}^2$ *do* $\mathbf{R}^2$*, které je třídy* $\mathcal{C}^1$ *na otevřené množině obsahující* $\overline{\Omega}$. *Nechť* $\tau_\Omega\colon \partial^*\Omega \to \mathbf{R}^2$ *je tečné vektorové pole k* $\partial^*\Omega$ *definované předpisem* $\tau_\Omega(y) = O\nu_\Omega(y)$ *(kde* O *je otočení o* $\frac{\pi}{2}$*). Pak platí*

$$\int_{\partial\Omega} \big\langle f(y), \tau_\Omega(y)\big\rangle d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \operatorname{rot} f(x)d\lambda^2(x).$$

Příklad: Pomocí Greenovy věty spočtěte

$$\int_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy, \text{ kde } C = \{x^2+y^2=1\}$$

je kladně orientovaná.

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^3$ je 2-plocha orientovaná normálovým polem ν, $\Omega \subset G$ je relativně otevřená v G a $\overline{\Omega} \setminus \Omega \subset G$. Řekneme, že $z \in \partial_G \Omega$ je **regulárním** bodem hranice Ω vzhledem ke G, jestliže existuje okolí U bodu z a funkce $h\colon U \to \mathbf{R}$ třídy $\mathcal{C}^1$ taková, že $\nu(z) \times \nabla h(z) \neq 0$ a $\{x \in G \cap U; h(x) < 0\} = \Omega \cap U$. V takovém bodě definujeme

$$\tau_{\Omega,\nu}(z) = \frac{\nu(z) \times \nabla h(z)}{\|\nu(z) \times \nabla h(z)\|}.$$

Poznámka: Definice $\tau_{\Omega,\nu}(z)$ je korektní, neboť lze ukázat nezávislost na rozhraničující funkci.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je 1-plocha. **Orientací** M rozumíme spojité zobrazení $\tau\colon M \to \mathbf{R}^n$ takové, že $\tau(x) \in T_x(M)$ a $\|\tau(x)\| = 1$.

Věta T 15.23 (o regulárních bodech)**.** *Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Označme $\partial_G^*\Omega$ množinu všech regulárních bodů hranice Ω vzhledem ke G. Potom je $\partial_G^*\Omega$ 1-plocha a $\tau_{\Omega,\nu}$ je orientace $\partial_G^*\Omega$.*

Věta T 15.24 (Stokesova)**.** *Nechť G, ν a Ω jsou jako v předchozí definici. Předpokládejme dále, že Ω je omezená, $\mathcal{H}^1(\partial_G\Omega) < \infty$ a $\mathcal{H}^1(\partial_G\Omega \setminus \partial_G^*\Omega) = 0$. Nechť vektorové pole f z $\mathbf{R}^3$ do $\mathbf{R}^3$ je třídy $\mathcal{C}^1$ na otevřené množině obsahující $\overline{\Omega}$. Potom*

$$\int_{\partial_G\Omega} \langle f(y), \tau_{\Omega,\nu}(y)\rangle d\mathcal{H}^1(y) = \int_\Omega \langle \operatorname{rot} f(x), \nu(x)\rangle d\mathcal{H}^2(x).$$

Příklad: Pomocí Stokesovy věty spočtěte

$$\int_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz, \text{ kde } C = \{x^2+y^2=1, x+z=1\}$$

je elipsa kladně orientovaná vůči vektoru $[1,0,1]$.

Konec 11. přednášky 26.3.

16. Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

Všechny integrály v této kapitole jsou Lebesgueovy.

Motivace: 1. Pro které funkce platí $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$?
2. Pro které funkce platí per partes?
3. Nechť $h \in L^1(\mathbf{R})$. Můžeme něco říct o funkci $H(x) = \int_a^x h(t)\,dt$?

16.1. Derivace monotonní funkce

Definice. Nechť J je systém intervalů v $\mathbf{R}$ a $A \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že J *pokrývá* A *ve Vitaliově smyslu*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in A\ \exists I \in J:\ (x \in I) \text{ a } (|I| < \varepsilon).$$

Věta T 16.1 (Vitali)**.** *Nechť $A \subset \mathbf{R}$ je množina, $\lambda^*(A) < \infty$, a nechť J pokrývá A uzavřenými intervaly ve Vitaliově smyslu. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná množina $\{I_1, \dots, I_n\} \subset J$ disjunktních intervalů tak, že*

$$\lambda^*\Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j\Big) < \varepsilon.$$

Definice. Nechť $x \in (a,b)$ a $f:(a,b) \to \mathbf{R}$. Definujme *limes superior* a *limes inferior* jako

$$\limsup_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \sup_{y \in (x-h,x+h)\setminus\{x\}} f(y) \text{ a } \liminf_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0} \inf_{y \in (x-h,x+h)\setminus\{x\}} f(y)$$

Poznámka: Analogicky jako pro posloupnosti platí věta:

$$\exists \lim_{h\to 0} f(x) \Leftrightarrow \limsup_{h\to 0} f(x+h) = \liminf_{h\to 0} f(x+h).$$

Definice. Nechť I je interval, x je vnitřní bod I a $f\colon I \to \mathbf{R}$ je funkce. Definujeme *horní a dolní derivaci* funkce f v bodě x následovně:

$$\overline{D}f(x) = \limsup_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ (horní derivace)},$$
$$\underline{D}f(x) = \liminf_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ (dolní derivace)}.$$

Poznámka: a) Každá monotónní funkce z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.
b) Každá monotónní funkce z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$ má nejvýše spočetně mnoho bodů intervalů konstantnosti.

Věta L 16.2 (míra vzoru a obrazu - BD)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval, Nechť $f\colon I \to \mathbf{R}$ je neklesající funkce, $M \subset I$ a $c > 0$.*
(a) *Je-li $\overline{D}f(x) > c$ na M, potom $\lambda(f(M)) \geq c\lambda(M)$.*
(b) *Je-li $\underline{D}f(x) < c$ na M, potom $\lambda(f(M)) \leq c\lambda(M)$.*

Konec 12. přednášky 27.3.

Věta L 16.3 (derivace monotónní funkce)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval a $f\colon I \to \mathbf{R}$ je monotónní funkce. Potom v skoro každém bodě $x \in I$ existuje $f'(x)$.*

Věta L 16.4 (integrál derivace monotónní funkce)**.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je neklesající funkce a $M \subset [a,b]$ je měřitelná množina. Nechť v každém bodě $x \in M$ existuje vlastní $f'(x)$. Potom f' je lebesgueovsky integrovatelná na M, $f(M)$ je měřitelná a platí*

$$\int_M f'(x)\,dx = \lambda(f(M)).$$

Konec 13. přednášky 2.4.

16.2. Funkce s konečnou variací

Definice. Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Definujme veličiny

- $V^+(f;a,b) := \sup_D \{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^+\}$ (kladná variace),
- $V^-(f;a,b) := \sup_D \{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))^-\}$ (záporná variace),
- $V(f;a,b) := \sup_D \{\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|\}$ (totální variace),

kde supremum bereme přes všechna dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ tvaru $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Dále zaveme značení

$$V_f^+(x) = V^+(f;a,x),$$
$$V_f^-(x) = V^-(f;a,x),$$
$$V_f(x) = V(f;a,x).$$

Řekneme, že funkce f má na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ *omezenou variaci*, jestliže $V(f;a,b) < \infty$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathrm{BV}([a,b])$.

Příklad: Mezi třídami $\mathrm{BV}([a,b])$ a $C([a,b])$ není vztah. Funkce $x \sin \frac{1}{x^2}$ dodefinovaná nulou v nule je spojitá, ale nemá konečnou variaci na $[0,1]$. Charakteristická funkce intervalu $[0,1]$ má konečnou variaci, ale není spojitá na $[-1,1]$.
Poznámka: Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval. Pak třída $\mathrm{BV}([a,b])$ je lineární prostor.
Poznámky: Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Potom
(a) je-li f neklesající na $[a,b]$, pak $V(f;a,b) = V^+(f;a,b) = f(b) - f(a)$, tedy f má konečnou variaci na $[a,b]$.
(b) $V(f;a,b) \geq |f(a) - f(b)|$;
(c) je-li $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, pak $V(f;a,b) = \sum_{i=1}^n V(f;x_{i-1},x_i)$;

Věta L 16.5 (vztah omezené variace a monotonie)**.** *Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$.*
(a) *Má-li f omezenou variaci na $[a,b]$, potom $V_f(x) = V_f^+(x) + V_f^-(x)$ a $f(x) - f(a) = V_f^+(x) - V_f^-(x)$.*
(b) *$f \in \mathrm{BV}(a,b)$ právě tehdy, když existují neklesající funkce u, $v : [a,b] \to \mathbf{R}$ takové, že $f = v - u$ na $[a,b]$.*

Věta L 16.6 (vlastnosti funkcí s omezenou variací)**.** *Nechť $f \in \mathrm{BV}([a,b])$. Potom f je omezená, má jen spočetně mnoho bodů nespojitosti, v každém bodě má limitu zleva a zprava a skoro všude má vlastní derivaci.*

16.3. Absolutně spojité funkce

Definice. Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je *absolutně spojitá* na $[a,b]$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pro každý systém po dvou disjunktních intervalů $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^n$, $(a_j,b_j) \subset [a,b]$, $j = 1,\dots,n$, splňující

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta, \text{ platí } \sum_{j=1}^n |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

Množinu všech absolutně spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathrm{AC}([a,b])$.

Poznámky: (a) $\mathrm{AC}([a,b])$ je lineární prostor.

(b) Platí $f \in \mathrm{Lip}([a,b]) \;\Rightarrow\; f \in \mathrm{AC}([a,b]) \;\Rightarrow\; f \in \mathrm{BV}([a,b]) \cap C([a,b])$, žádnou z implikací nelze obrátit.

Konec 14. přednášky 3.4.

Věta L 16.7 (variace absolutně spojité funkce). *Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Pak $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, takové, že pro každý systém po dvou disjunktních intervalů $\{(a_j,b_j)\}_{j=1}^n$, $(a_j,b_j) \subset [a,b]$, $j = 1,\dots,n$, splňující*

$$\sum_{j=1}^n (b_j - a_j) < \delta, \textit{ platí } \sum_{j=1}^n V(f;a_j,b_j) < \varepsilon.$$

Důsledek: Nechť f je absolutně spojitá funkce na $[a,b]$. Potom funkce V_f^+, V_f^- a V_f jsou také absolutně spojité.

Věta L 16.8 (Luzinova N vlastnost). *Nechť $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ a $N \subset [a,b]$, $\lambda(N) = 0$. Potom*

$$\lambda(f(N)) = 0.$$

Věta L 16.9 (integrál derivace absolutně spojité funkce). *Nechť $f \in \mathrm{AC}([a,b])$. Potom $f' \in L^1([a,b])$ a*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx. \tag{16.1}$$

Věta L 16.10 (neurčitý Lebesgueův integrál). *Nechť $\theta \in L^1([a,b])$ a f je neurčitý Lebesgueův integrál θ, tj. existuje konstanta C tak, že*

$$f(x) = \int_a^x \theta(t)\,dt + C, \qquad x \in [a,b]. \tag{16.2}$$

Potom f je absolutně spojitá a $f' = \theta$ s.v.

Důsledek: Funkce $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ je absolutně spojitá, právě když je neurčitým Lebesgueovým integrálem Lebesgueův nějaké funkce $\theta \in L^1([a,b])$.

Konec 15. přednášky 9.4.

Věta L 16.11 (integrace per partes pro absolutně spojité funkce). *Nechť $f,g \in \mathrm{AC}([a,b])$. Potom*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

Příklady: Cantorova stupňovitá funkce je protipříklad na všechno:
1) Existuje spojitá funkce $f \in BV(0,1) \setminus AC(0,1)$.
2) Existuje spojitá neklesající funkce taková, že $f'(x) = 0$ s.v., ale $f(1) > f(0)$.
3) Existuje spojitá funkce a $N \subset [0,1]$ tak, že $|N| = 0$, ale $|f(N)| > 0$.
4) Existuje spojitá funkce a $A \subset [0,1]$ měřitelná tak, že $f(A)$ není měřitelná.
5) Existuje spojitá funkce a $N \subset [0,1]$ tak, že $|N| = 0$, ale $|f^{-1}(N)| > 0$.
6) Existuje spojitá funkce a $A \subset [0,1]$ měřitelná tak, že $f^{-1}(A)$ není měřitelná.

17. Fourierovy řady

17.1. Základní pojmy

Značení: Symbolem $\mathcal{P}_{2\pi}$ značíme množinu všech lokálně integrovatelných 2π-periodických funkcí na $\mathbf{R}$.

Definice. Nechť a_k, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a b_k, $k \in \mathbf{N}$, jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickou řadou.* Je-li navíc $n \in \mathbf{N}$, pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickým polynomem stupně* n.

Definice. Množinu funkcí $\mathcal{T} = \{1, \cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), \dots\}$ nazýváme *trigonometrickým systémem.*

Poznámka: Trigonometrický systém je ortogonální v následujícím smyslu (viz Věta 11.11): pro každé dvě různé funkce $f, g \in \mathcal{T}$ platí

$$\int_0^{2\pi} f(x) g(x) \, dx = 0.$$

Dále platí

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 \, dx = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} (\cos(kx))^2 \, dx = \int_0^{2\pi} (\sin(kx))^2 \, dx = \pi, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Věta L 17.1 (Fourierovy vzorce). *Nechť* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *a* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti reálných čísel a řada*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

konverguje stejnoměrně k funkci f *na* $\mathbf{R}$*. Potom*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, definované předpisy

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx, \quad k \in \mathbf{N},$$

nazýváme *Fourierovými koeficienty* funkce f. Trigonometrickou řadu

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Fourierovou řadou* funkce f. Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou Sf značíme symbolem $f \sim Sf$. Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ dále definujeme *částečný součet Fourierovy řady* funkce f předpisem

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Důsledek Vět 11.10 a 11.12: Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ a a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f. Pak platí

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve smyslu rovnosti rovnosti L^2 funkcí. Tedy v příslušném metrickém prostoru platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} S_n f(x).$$

Navíc platí Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Motivace: Nechť $f \in P_{2\pi}$. Platí $f(x) = S_f(x)$ pro všechna x, nebo alespoň pro s.v. x? Neplatí dokonce $S_n f(x) \rightrightarrows f(x)$?

Poznámky: (a) Konvence $\frac{a_0}{2}$ je zavedena proto, abychom měli stejný vzorec pro a_k v případě $k = 0$ i v případech $k \in \mathbf{N}$.

(b) V definici $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$ lze integrovat přes libovolný interval délky 2π, tedy

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N}\cup\{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N},$$

pro jakékoli $\alpha \in \mathbf{R}$. Nejčastěji se používá $\alpha = 0$ nebo $\alpha = -\pi$.

(c) Symbol $f \sim Sf$ označuje pouze fakt, že řada stojící vpravo je Fourierovou řadou funkce stojící vlevo. Nevypovídá nic o případné konvergenci řady Sf (stejnoměrné ani bodové). Nelze jej zaměňovat za symbol $f = Sf$, který by znamenal, že řada vpravo bodově konverguje a jejím bodovým součtem je funkce f.

(d) Fourierovy řady lze definovat pro funkce s libovolnou periodou $\ell > 0$. řada má pak tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(\frac{k2\pi x}{\ell}) + b_k\sin(\frac{k2\pi x}{\ell})\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

a vzorce pro koeficienty mají odpovídající tvar.

Konec 16. přednášky 10.4.

Poznámka: Je-li $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ sudá, potom $b_k = 0$, $k \in \mathbf{N}$, a

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N}\cup\{0\}.$$

Je-li f lichá, potom $a_k = 0$, $k \in \mathbf{N}\cup\{0\}$, a

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Trigonometrickou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *cosinovou řadou* a trigonometrickou řadu

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(kx), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *sinovou řadou.*

Příklad: Nechť $f(x) = x^2$ pro $x \in [-\pi, \pi)$ a nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Potom

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos(kx)}{k^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Kdybychom věděli, že řada Sf konverguje k funkci f (alespo bodově), získali bychom po dosazení postupně $x = 0$ a $x = \pi$ vzorce

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

17.2. Bodová konvergence Fourierových řad

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$. Potom funkci

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Dirichletovým jádrem.*

Poznámky:[vlastnosti D_n] Nechť $n \in \mathbf{N}\cup\{0\}$. Potom

(a) D_n je sudá spojitá 2π-periodická funkce splňující $D_n(0) = n + \frac{1}{2}$,

(b) platí

$$D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})}, \quad x \in \mathbf{R},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

(c) platí

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = \pi.$$

Věta L 17.2 (o částečných součtech Fourierovy řady). *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *a* $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. *Potom pro každé* $x \in \mathbf{R}$ *platí*

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_n(y)\, dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+y) + f(x-y)) D_n(y)\, dy.$$

Definice. *Jednoduchou funkcí* nazýváme každou funkci tvaru

$$s(x) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \chi_{E_j}(x), \qquad x \in \mathbf{R},$$

kde $J \in \mathbf{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_J \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ a $E_1, \ldots, E_J$ jsou měřitelné podmnožiny $\mathbf{R}$ splující $\lambda(E_j) < \infty$ pro každé $j \in \{1, \ldots, J\}$.

Poznámka: Množina všech jednoduchých funkcí je hustá v prostoru L^1.

Věta T 17.3 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma). *Nechť* $(a, b) \subset \mathbf{R}$ *je omezený interval a nechť* $f \in L^1(a, b)$. *Potom*

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx)\, dx = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx)\, dx = 0.$$

Důsledek: Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Fourierovými koeficienty nějaké funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Konec 17. přednášky 16.4.

Příklad: Dokažte, že

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

je-li integrál Newtonův.

Věta L 17.4 (Riemannova věta o lokalizaci). *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ *a* $s \in \mathbf{R}$. *Potom* $Sf(x) = s$ *právě tehdy, když existuje* $\delta \in (0, \pi)$ *takové, že*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{\delta} (f(x+t) + f(x-t) - 2s) D_n(t)\, dt = 0.$$

Poznámka: Z Riemannovy věty o lokalizaci plyne, že konvergence Fourierovy řady funkce f v bodě x závisí pouze na hodnotách funkce f na libovolně malém prstencovém okolí bodu x.

Značení: Nechť $x \in \mathbf{R}$ a f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu x. Značíme $f(x+) = \lim_{t \to x_+} f(t)$ a $f(x-) = \lim_{t \to x_-} f(t)$, pokud tyto limity existují.

Věta L 17.5 (Diniovo kritérium). *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *a nechť* $x \in \mathbf{R}$. *Nechť existují vlastní limity* $f(x+)$ *a* $f(x-)$ *a nechť dále existují vlastní limity*

$$\lim_{t \to 0_+} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \qquad \text{a} \qquad \lim_{t \to 0_+} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}.$$

Potom řada Sf *konverguje v bodě* x *a platí*

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, má-li funkce f *konečné jednostranné derivace v bodě* x, *potom* $Sf(x) = f(x)$.

Věta T 17.6 (Jordanovo–Dirichletovo kritérium). *Nechť* $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ *a nechť* $f \in \mathrm{BV}([0, 2\pi])$. *Potom*

(a) *pro každé* $x \in [0, 2\pi]$ *konverguje Fourierova řada* $Sf(x)$ *a platí*

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2};$$

(b) *je-li funkce* f *navíc spojitá na* $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, *potom*

$$S_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } [a, b].$$

Poznámka: Je-li funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ po částech monotónní na (a, b) nebo po částech třídy $\mathcal{C}^1$ na (a, b), pak pro každé $x \in (a, b)$ platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

17.3. Stejnoměrná konvergence - Fejérova věta

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že a_n konverguje k $a \in \mathbf{R}$ v Cesarově smyslu, pokud pro posloupnost

$$\sigma_n = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1} \text{ konverguje k } a.$$

Poznámka: Zřejmě
$$a_n \to a \Longrightarrow a_n \to a \text{ v Cesarově smyslu,}$$
ale opačná implikace neplatí. Například $(-1)^n$ konverguje Cesarovsky k nule, ale nekonverguje.
Konec 18. přednášky 17.4.

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom funkci
$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(x), \quad x \in \mathbf{R},$$
nazýváme *Fejérovým jádrem.*

Poznámky: Nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom
(a) K_n je sudá spojitá 2π-periodická funkce, splující $K_n(0) = \frac{n+1}{2}$,
(b) platí
$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx = \pi,$$
(c) platí
$$K_n(x) = \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin((n+1)\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2, \quad x \in \mathbf{R},\ x \neq 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$
Poznámka: Fejérovo jádro má některé lepší vlastnosti než Dirichletovo jádro. Například je nezáporné a navíc spluje $K_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ na $(0, 2\pi)$. To neplatí pro Dirichletovo jádro, neboť například $D_n(\pi) = \frac{(-1)^n}{2}$.

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ a nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Pak výraz
$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k f(x), \quad x \in \mathbf{R},$$
nazýváme n-tým *částečným Fejérovým součtem* funkce f.

Poznámka: Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ a nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom
$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) K_n(t)\, dt.$$
Věta T 17.7 (Fejérova). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$.*
(a) *Jestliže pro nějaké $x \in \mathbf{R}$ existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$, potom*
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$
(b) *Je-li funkce f spojitá na nějakém intervalu $(a, b) \subset \mathbf{R}$, potom*
$$\sigma_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } (a, b).$$
Poznámka: Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ a nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$. Fejérova věta ukazuje, že jediným možným kandidátem na $Sf(x)$ je hodnota $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ (tedy $f(x)$, je-li f spojitá v x).

Věta L 17.8 (Weierstrassova - trigonometrická verze). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ je spojitá na $\mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje trigonometrický polynom $T \in \mathcal{T}$ splující*
$$\|f - T\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$
Důsledek (Weierstrass): Nechť $f \in C([a, b])$ a $\varepsilon > 0$. Potom existuje polynom $P \in \mathcal{P}$ splující
$$\|f - P\|_{\mathcal{C}([a,b])} < \varepsilon.$$
Konec 19. přednášky 23.4.

Věta L 17.9 (Fourierovy koeficienty určují funkci). *Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom $f = g$ skoro všude.*

Důsledek: Z předchozí věty snadno plyne Věta T 11.12. o maximalitě trigonometrických funkcí. Tedy trigonometrické funkce skutečně tvoří bázi prostoru $L^2(0, 2\pi)$ jak jsme potřebovali u Hilbertových prostorů.

Věta T 17.10 (Hardy-BD). *Nechť $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel splňující $|na_n| \le K$ pro $K \in \mathbf{R}$. Pokud $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje k s v Cesarově smyslu, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$.*

Věta L 17.11 (o Fourierových koeficientech BV funkce)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $f \in \mathrm{BV}([0, 2\pi])$. Pak existuje $K \in \mathbf{R}$, že pro Fourierovy koeficienty f platí*

$$|ka_k| \le K \ a \ |kb_k| \le K.$$

Důsledek: Z předchozích dvou vět a Fejérovy věty nyní již snadno dostáváme Jordan-Dirichletovo kritérium.

Konec 20. přednášky 24.4.

Poznámka: Obecně připouštíme komplexní funkce reálné proměnné. Protože pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí vzorce

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{a} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

je možné přepsat trigonometrický polynom

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve tvaru

$$c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}).$$

K dané komplexní funkci $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ pak dostaneme komplexní Fourierovu řadu

$$Sf(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}),$$

kde

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx, \ k \in \mathbf{Z}.$$

17.4. Fourierova transformace

Motivace: Je těžší vyřešit diferenciální rovnici

$$y'' - y = e^{-x^2},$$

nebo nalézt funkci z splňující

$$-x^2 z(x) - z(x) = e^{-x^2}?$$

Definice. Nechť $f \in L^1(\mathbf{R})$. Pak *Fourierova transformace* f je definována jako

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx$$

a *inverzní Fourierova transformace* f je definována jako

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x}\, dx.$$

Příklad: Spočtěte Fourierovu transformaci funkce $\chi_{[-a,a]}(x)$.

Poznámka: a) Pro $f \in L^2(\mathbf{R})$ platí $\check{\hat{f}} = f$ ve smyslu rovnosti L^2 funkcí.
b) Platí, že existuje-li vlastní $f'(x)$, pak $\check{\hat{f}}(x) = f(x)$.

Příklad: Spočtěte inverzní Fourierovu transformaci k funkci z prvního příkladu.

Připomeň: Nechť $f, \ g \in L^1(\mathbf{R})$. Pak konvoluce funkcí f a g je definována jako

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)\ g(y)\, dy.$$

Věta L 17.12 (Fourierova transformace konvoluce)**.** *Nechť $f, \ g \in L^1(\mathbf{R})$. Pak*

$$(f \hat{*} g)(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega)\ \hat{g}(\omega).$$

Poznámka: Analogicky předchozí větě lze ukázat, že

$$\sqrt{2\pi} (f \check{g})(x) = \check{f} * \check{g}(x)$$

Věta L 17.13 (Fourierova transformace derivace)**.** *Nechť $f \in L^1(\mathbf{R})$, f a f' jsou spojité na $\mathbf{R}$, $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ a $f' \in L^1(\mathbf{R})$. Pak*

$$\hat{f'}(\omega) = i\omega \hat{f}(x).$$

Příklad: Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y = e^{-x^2}.$$

Příklad: Ukažte, že

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\widehat{e^{-|x|}} = \frac{1}{1+\omega^2}.$$

18. Metrické prostory III

18.1. Separabilní metrické prostory

Definice. Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá *separabilní*, jestliže existuje spočetná množina $A \subset P$, která jeho hustá v P.

Příklady: (a) $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$ jsou separabilní,
(ii) $(C([0,1]), \sup)$ je separabilní,
(iii) $\ell^p := \{\{x_n\}_{n=1}^\infty : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ je separabilní pro $1 \le p < \infty$,
(iv) $L^2(0,1)$ je separabilní.

Konec 21. přednášky 30.4.

Věta L 18.1 (nutná podmínka separability)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Nechť existují nespočetná množina A a $\delta > 0$ taková, že pro každá $x, y \in A$, $x \neq y$, platí $\varrho(x,y) \geq \delta$. Potom P není separabilní.*

Příklady: (i) $\ell^\infty = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty,\ x_n \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N},\ \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n| < \infty\}$ není separabilní,
(ii) $(C((0,1)), \sup)$ není separabilní.

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a $\mathcal{B}$ je nějaký systém otevřených podmnožin P. Řekneme, že $\mathcal{B}$ je *báze otevřených množin* (P, ϱ), jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset P$ existuje $\mathcal{B}^* \subset \mathcal{B}$ taková, že $\bigcup \mathcal{B}^* = G$.

Věta L 18.2 (charakterizace separabilních prostorů)**.** *Metrický prostor je separabilní právě tehdy, když v něm existuje spočetná báze otevřených množin.*

Důsledek: Podprostor separabilního prostoru je separabilní.

18.2. Souvislé a obloukově souvislé množiny

Definice. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset P$ je *obojetná*, jestliže je zároveň otevřená i uzavřená.

Příklady: (a) V každém metrickém prostoru (P, ϱ) jsou množiny $\emptyset$ a P obojetné.
(b) V metrickém prostoru $[0,1] \cup (2,3)$ jsou množiny $[0,1]$ i $(2,3)$ obojetné.
(c) Každá podmnožina diskrétního prostoru je obojetná.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je *souvislý*, jestliže není sjednocením dvou disjunktních neprázdných otevřených množin. Řekneme, že množina $A \subset P$ je *souvislá*, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) souvislý.

Konec 22. přednášky 7.5.

Příklady: (a) V každém metrickém prostoru jsou prázdná množina a každá jednobodová množina souvislé.
(b) $([0,1] \cup (2,3), |.|)$ není souvislý.
(c) $(\mathbf{R}, |.|)$ je souvislý.
(d) libovolný interval v $\mathbf{R}$ je souvislý.

Věta L 18.3 (charakterizace souvislých prostorů)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor. Pak jsou následující čtyři výroky ekvivalentní:*
(i) *P není souvislý;*
(ii) *existují dvě uzavřené neprázdné disjunktní množiny F_1, F_2 takové, že $P = F_1 \cup F_2$;*
(iii) *existuje obojetná množina $H \subset P$, která je navíc neprázdná a různá od P;*

Věta T 18.4 (vlastnosti souvislých prostorů)**.** *Nechť (P, ϱ) je metrický prostor.*

a) Nechť (Q, σ) je metrický prostor a $f\colon P \to Q$ je spojité. Nechť $A \subset P$ je souvislá množina, pak $f(A)$ je souvislá v Q.

b) Nechť $A \subset P$ je souvislá a $A \subset B \subset \overline{A}$. Pak B je souvislá. Speciálně $\bar{A}$ je souvislá.

c) Nechť I je neprázdná množina a $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ jsou souvislé podmnožiny P. Nechť každé dvě množiny A_α, A_β, $\alpha, \beta \in I$, se protínají. Potom $A := \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$ je souvislá.

Důsledek: Nechť f je spojité zobrazení intervalu I do metrického prostoru. Potom $f(I)$ je souvislá množina.
Příklad: Nechť

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = \sqrt{1-x^2}\},$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = -\sqrt{1-x^2}\}.$$

Potom A, B jsou souvislé (spojitý obraz intervalu), ale $A \cap B$ není souvislá.

Definice. Řekneme, že množina A je *komponenta* P, jestliže A je maximální souvislá podmnožina P.

Věta L 18.5 (charakterizace komponent)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je neprázdný metrický prostor. Potom*
(a) *komponenty* P *jsou neprázdné a uzavřené,*
(b) *každý bod* P *je obsažen v některé komponentě,*
(c) *komponenty jsou navzájem disjunktní.*

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P, ϱ) je *křivkově souvislý*, jestliže pro každé $x, y \in P$ existuje spojité zobrazení $\gamma\colon [0,1] \to (P, \varrho)$ takové, že $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$. Řekneme, že množina $A \subset P$ je *křivkově souvislá*, jestliže je metrický prostor (A, ϱ) křivkově souvislý.

Konec 23. přednášky 21.5.

Věta L 18.6 (souvislost souvislosti s křivkovou souvislostí)**.** *Každý křivkově souvislá množina v metrickém prostoru je souvislá.*

Příklady: (a) Graf spojité funkce na intervalu je křivkově souvislý.
(b) $(\mathbf{R}^n, |.|)$ je křivkově souvislý.
(c) $(C([0,1]), \sup)$ je křivkově souvislý.
(d) Podmnožina prostoru $\mathbf{R}^2$ definovaná jako graf funkce

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, 0] \\ \sin \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (0, \infty), \end{cases}$$

je příkladem souvislého metrického prostoru, který není křivkově souvislý.
Poznámka: (a) Spojitý obraz křivkově souvislého metrického prostoru je křivkově souvislý.
(b) Uzávěr křivkově souvislé množiny nemusí být křivkově souvislý.
(c) Sjednocení křivkově souvislých množin s neprázdným průnikem je křivkově souvislá množina.

Věta T 18.7 (struktura otevřených podmnožin $\mathbf{R}$)**.** *Je-li* $G \subset \mathbf{R}$ *otevřená, pak existuje spočetný disjunktní systém otevřených intervalů* $\mathcal{I}$ *takový, že* $G = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$.

Věta L 18.8 (vztah kompaktnosti a separability)**.** *Nechť* (P, ϱ) *je kompaktní metrický prostor. Pak* P *je separabilní.*

Konec 24. přednášky 22.5.