10. Funkce více proměnných II

10.1. Parciální derivace vyšších řádů

Připomeň: 1. Nechť $K \subset \mathbf{R}^n$. Pak

$$K \text{ je kompaktní} \Leftrightarrow K \text{ je omezená a uzavřená.}$$

2. Nechť $K \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní a $f : K \to \mathbf{R}$ je spojitá. Pak f nabývá na K svého maxima a minima.
3. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $f : G \to \mathbf{R}$ má v $a \in G$ extrém a existuje parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Definice. Nechť f má na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak definujeme pro $a \in G$ a $j \in \{1, \dots, n\}$ *druhou parciální derivaci*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(a) \text{ pro } i \neq j \text{ a } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)(a).$$

Analogicky definujeme parciální derivace vyšších řádů.

Příklad: Spočtěte všechny derivace až do řadu 3 od $f(x, y) = x^2 e^{x+y}$.

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbf{R}$. Řekneme, že $f \in C^1(G)$, pokud existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, na G a jsou to spojité funkce na G. Řekneme, že $f \in C^k(G)$, $k \in \mathbf{N}$, pokud existují všechny parciální derivace f až do řadu k včetně a jsou to spojité funkce na G.

Důsledek: Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená. Z Věty 8.5 dostáváme, že je-li $f \in C^1(G)$, pak existuje totální diferenciál f ve všech bodech G.

Věta T 10.1 (záměnnost parciálních derivací)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G$ a $f \in C^2(G, \mathbf{R})$. Pak*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Příklad: Nechť

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $a \in G$. Nechť $f \in C^2(G)$. Definujeme *Hessovu matici* f jako

$$D^2 f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Podle předchozí věty je tato matice symetrická, a proto můžeme pracovat s následující kvadratickou formou

$$D^2 f(a)(u, v) = u^T D^2 f(a) v \text{ pro každé } u, v \in \mathbf{R}^n.$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $a \in G$. Nechť $f \in C^2(G)$. Pak definujeme *Taylorův polynom f druhého řádu* jako

$$T_2^{f,a}(x) := f(a) + Df(a)(x - a) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(x - a, x - a).$$

Konec 1. přednášky

Věta L 10.2 (Taylorova věta pro druhý řád - bez důkazu)**.** *Nechť $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je třídy C^2 na nějakém okolí bodu $a \in \mathbf{R}^n$. Pak*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_2^{f,a}(x)}{|x - a|^2} = 0.$$

Poznámka: Lze definovat i Taylorovy polynomy řádu k pomocí k-tých parciálních derivací a pro $f \in C^k$ dobře aproximují f.

Věta L 10.3 (o pozitivně definitní kvadratické formě)**.** *Nechť $Q : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je pozitivně definitní kvadratická forma. Potom*

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall h \in \mathbf{R}^n :\ Q(h, h) \geq \varepsilon |h|^2.$$

Věta T 10.4 (postačující podmínky pro lokální extrém). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a nechť $f \in C^2(G)$. Nechť $Df(a) = 0$ (tedy a je bod podezřelý na lokální extrém).*

(i) Je-li $D^2f(a)$ pozitivně definitní, pak a je bod lokálního minima.

(ii) Je-li $D^2f(a)$ negativně definitní, pak a je bod lokálního maxima.

(iii) Je-li $D^2f(a)$ indefinitní, pak v a není extrém.

Příklad: Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ na $\mathbf{R}^2$.

Konec 2. přednášky

10.2. Implicitní funkce a vázané extrémy

Věta T 10.5 (o implicitní funkci). *Nechť $p \in \mathbf{N}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F : G \to \mathbf{R}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in G$ a nechť platí:*

(i) $F \in C^p(G)$,

(ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0.$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x,y) = 0$. Píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in C^p(U)$ a platí

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))} \text{ pro všechna } x \in U \text{ a } j = 1, \ldots, n.$$

Příklad: Nechť

$$M := \big\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 : \ x^3 + y^3 - 2xy = 0\big\}.$$

Ukažte, že na jistém okolí $[1,1]$ lze M napsat jako graf $\varphi(x)$. Spočtěte $\varphi'(1)$ a $\varphi''(1)$.

Poznámka: Navíc platí, že je-li $F \in C^k$, pak $\varphi \in C^k$ a derivace φ lze spočítat derivováním vztahu $F(x, \varphi(x)) = 0$.

Konec 3. přednášky

Věta T 10.6 (o implicitních funkcích). *Nechť $n, m \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}$, $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j : G \to \mathbf{R}$, $j = 1, \ldots, m$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in G$ a nechť platí:*

(i) $F_j \in C^p(G)$ *pro* $j = 1, \ldots, m$,

(ii) $F_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$, *tedy* $F_j(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m) = 0$ *pro* $j = 1, \ldots, m$,

(iii) determinant $m \times m$ matice parciálních derivací F_j je nenulový, tedy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(\tilde{x}, \tilde{y}) & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(\tilde{x}, \tilde{y}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F_j(x,y) = 0$ pro každé $j = 1, \ldots, m$. Píšeme-li $y_j = \varphi_j(x)$, pak $\varphi_j \in C^p(U)$ pro $j = 1 \ldots, m$.

Příklad: Dokažte, že existují funkce $z(x,y)$, $t(x,y)$, které jsou třídy C^2 na nějakém okolí bodu $[1,-1]$ splňující $z(1,-1) = 2$, $t(1,-1) = 0$ a

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}z^2 - t^3 = 0, \quad x + y + z - t - 2 = 0.$$

Spočtěte druhé derivace z a t.

Věta T 10.7 (Lagrangeova věta o vázaných extrémech). *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $m < n, f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(G)$ a mějme množinu*

$$M = \big\{z \in \mathbf{R}^n : g_1(z) = \ldots = g_s(z) = 0\big\}.$$

Je-li $a \in M$ bodem lokálního extrému f vzhledem k M a vektory

$$\Big(\frac{\partial g_1}{\partial z_1}(a), \ \frac{\partial g_1}{\partial z_2}(a), \ldots, \frac{\partial g_1}{\partial z_n}(a)\Big)$$

$$\vdots$$

$$\Big(\frac{\partial g_m}{\partial z_1}(a), \ \frac{\partial g_m}{\partial z_2}(a), \ldots, \frac{\partial g_m}{\partial z_n}(a)\Big)$$

jsou lineárně nezávislé, pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tak, že

$$Df(a) + \lambda_1 Dg_1(a) + \dots + \lambda_m Dg_m(a) = 0$$

neboli

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z_1}(a) + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial z_1}(a) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_n}(a) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial z_n}(a) + \dots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial z_n}(a) = 0.$$

Příklad: 1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ na $M := \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.
2. Sněhulák.

Poznámka: Předchozí věta nám říká, že pokud extrém existuje, tak ho umíme najít z nějaké rovnice. Věta ale nezaručuje existenci extrému!

Konec 4. přednášky

10.3. Regulární zobrazení

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbf{R}^n$. Řekneme, že f je *difeomorfismus* na G, jestliže je f prostá na G, $U = f(G)$ je otevřená množina v $\mathbf{R}^n$, $f \in C^1(G)$ a $f^{-1} \in C^1(U)$.

Věta T 10.8 (o lokálním difeomorfismu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbf{R}^n$ je třídy C^1. Nechť pro $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$. Pak existuje $U \subset G$ okolí a takové, že $f|_U$ je difeomorfismus na U.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená a $f : G \to \mathbf{R}^n$. Řekneme, že f je regulární zobrazení, jestliže $f \in C^1(G)$ a pro každé $a \in G$ platí $J_f(a) \neq 0$.

11. Hilbertovy prostory

Poznámka: Většina vět této sekce i s důkazy se dá najít v knize W. Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru.

11.1. Základní definice

Definice. Nechť H je reálný vektorový prostor. Řekneme, že H je *prostor se skalárním součinem*, jestliže existuje zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2 \to \mathbf{R}$ takové, že

(*i*) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ pro všechna $x, y \in H$,
(*ii*) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ pro všechna $x, y, z \in H$,
(*iii*) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ pro všechna $x, y \in H$ a $\alpha \in \mathbf{R}$,
(*iv*) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pro všechna $x, y \in H$,
(*v*) $\langle x, x \rangle = 0$ jenom tehdy, když $x = 0$.

Definujme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Řekneme, že prvek $x \in H$ je *ortogonální* k $y \in H$, pokud $\langle x, y \rangle = 0$.

Věta L 11.1 (Schwarzova nerovnost)**.** *Pro každé $x, y \in H$ platí*

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Věta L 11.2 (trojúhelníková nerovnost)**.** *Pro každé $x, y \in H$ platí*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Specielně $(H, \|\cdot\|)$ tvoří metrický prostor ($\varrho(x,y) = \|x - y\|$).

Definice. Nechť H prostor se skalárním součinem. Řekneme, že H je *Hilbertův prostor*, pokud je metrický prostor $(H, \|\cdot\|)$ úplný.

Příklady: (1) $(\mathbf{R}^n, \varrho_e)$ je Hilbertův prostor
(2) $l^2 := \big\{\{a_n\}_{n=1}^\infty : \ a_n \in \mathbf{R}, \ \sum_{n=1}^\infty a_n^2 < \infty\big\}$ se skalárním součinem

$$\langle \{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty \rangle = \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$$

je Hilbertův prostor.
(3) $L^2(0,1) := \{f : (0,1) \to \mathbf{R} : \ (L) \int_0^1 |f(x)|^2 \, dx < \infty\}$ se skalárním součinem

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) \, dx$$

je Hilbertův prostor.

Konec 5. přednášky

Věta L 11.3 (spojitost skalárního součinu). *Nechť H je Hilbertův prostor, potom jsou zobrazení $x \to \langle x, y\rangle$, $x \to \langle y, x\rangle$, $x \to \|x\|$ spojitá na H.*

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor a $E \subset H$. Řekneme, že E je konvexní, jestliže pro všechna $x, y \in E$ a $t \in [0,1]$ platí

$$tx + (1-t)y \in E.$$

Věta L 11.4 (o existenci prvku z nejmenší normou). *Nechť H je Hilbertův prostor a $E \subset H$ je konvexní a uzavřená. Potom existuje právě jeden prvek v E s nejmenší normou.*

Definice. Nechť $M \subset H$ je lineární podprostor Hilbertova prostoru H. Definujeme *ortogonální podprostor*

$$M^{\perp} = \{y \in H : \ \langle x, y\rangle = 0 \text{ pro všechna } x \in M\}.$$

Věta T 11.5 (o projekci na podprostor). *Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H.*

(i) Každý prvek $x \in H$ má jednoznačný rozklad $x = P(x) + Q(x)$ tak, že $P(x) \in M$ a $Q(x) \in M^{\perp}$.

(ii) $P(x)$ je bod z M nejbližší k $x, Q(x)$ je bod z $M^{\perp}$ nejbližší k x.

(iii) Zobrazení $P : H \to M$ a $Q : H \to M^{\perp}$ jsou lineární.

(iv) $\|x\|^2 = \|P(x)\|^2 + \|Q(x)\|^2$.

Důsledek: Nechť M je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H a $M \neq H$. Pak existuje $y \in M^{\perp}$, $y \neq 0$.

Příklad: Metoda nejmenších čtverců.
Konec 6. přednášky
Příklad: 1) Nechť M je konečnědimenzionální podprostor Hilbertova prostoru H. Pak M je uzavřený.
2) Spojité funkce $C([0,1])$ tvoří lineární podprostor $L^2(0,1)$, který není uzavřený.
3) $A = \big\{(q_1, q_2, \dots, q_k, 0, 0, \dots) : \ k \in \mathbf{N}, \ q_i \in \mathbf{Q} \text{ pro } i = 1, \dots, k\big\}$ je lineární podprostor l^2, který není uzavřený.

Věta L 11.6 (o reprezentaci lineárního funkcionálu). *Nechť H je Hilbertův prostor $L : H \to \mathbf{R}$ je spojité lineární zobrazení. Pak existuje právě jedno $y \in H$ tak, že*

$$L(x) = \langle x, y\rangle.$$

11.2. Rozklad do Schauderovy báze

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor a A je indexová množina. Množina prvků $u_\alpha \in H$, kde $\alpha \in A$, se nazývá *ortogonální*, pokud

$$\langle u_\alpha, u_\beta\rangle = 0 \text{ pro všechna } \alpha, \ \beta \in A.$$

Ortogonální množina $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ se nazývá *ortonormální*, pokud navíc $\|u_\alpha\| = 1$ pro všechna $\alpha \in A$.

Jestliže $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je ortonormální množina, pak pro každé $x \in H$ definujeme *Fourierovy koeficienty* x vzhledem k u_α jako

$$\hat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha\rangle.$$

Věta L 11.7 (o konečné ortonormální množině). *Nechť H je Hilbertův prostor, $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je ortonormální množina a $F \subset A$ je konečná množina. Označme M_F lineární obal $\{u_\alpha : \ \alpha \in F\}$.*

(i) Nechť $\varphi : A \to \mathbf{R}$ je 0 mimo F. Pro vektor $y = \sum_{\alpha\in F} \varphi(\alpha) u_\alpha$ platí

$$\hat{y}(\alpha) = \varphi(\alpha) \text{ pro každé } \alpha \in A \text{ a } \|y\|^2 = \sum_{\alpha\in F} |\varphi(\alpha)|^2.$$

(ii) Je-li $x \in H$ a $s_F(x) = \sum_{\alpha\in F} \hat{x}(\alpha) u_\alpha$, pak $s_F(x) = P(x)$, kde P je projekce na M_F.

Navíc platí $$\sum_{\alpha\in F} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Definice. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A \subset X$ je *hustá*, pokud $\overline{A} = X$.

Příklady: 1) $\mathbf{Q}$ je hustá v $\mathbf{R}$.
2) $\mathbf{Q}^2$ je hustá v $\mathbf{R}^2$.
3) $A = \big\{(q_1, q_2, \dots, q_k, 0, 0, \dots) : \ k \in \mathbf{N}, \ q_i \in \mathbf{Q} \text{ pro } i = 1, \dots, k\big\}$ je hustá v l^2.
4) Jsou spojité funkce $C([0,1])$ husté v $L^2(0,1)$?
Konec 7. přednášky

Lemma 11.8. *Nechť X, Y jsou metrické prostory, X je úplný a $f : X \to Y$ je spojité. Nechť X_0 je hustá podmnožina X, na které je f izometrie, a nechť $f(X_0)$ je hustá podmnožina Y. Potom f je izometrie X na Y.*

Věta L 11.9 (Riesz-Fischerova věta). *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Nechť P je prostor všech konečných lineárních kombinací vektorů u_i. Potom pro každé $x \in H$ platí nerovnost*
$$\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2 \le \|x\|^2.$$
Zobrazení $x \to \hat{x}$ je spojité lineární zobrazení H na l^2, jehož restrikce na uzávěr $\overline{P}$ je izometrie $\overline{P}$ na l^2.

Důsledek: $L^2(0,1)$ je izometricky izomorfní l^2.

Definice. Nechť H je Hilbertův prostor a $h_i \in H$, $i \in \mathbf{N}$. Řekneme, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} h_i$ *konverguje* k $s \in H$, pokud
$$\lim_{n\to\infty} \Big\| s - \sum_{i=1}^{n} h_i \Big\| = 0.$$

Věta T 11.10 (o maximální ortonormální množině). *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je ortonormální množina. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je maximální ortonormální množina v H.

(ii) Množina P všech konečných lineárních kombinací prvků z $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ je hustá v H.

(iii) Pro každé $x \in H$ platí $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2$.

(iv) Je-li $x, y \in H$, potom $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \hat{y}_i$.

(v) Pro každé $x \in H$ platí $x = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i \ u_i$.

Poznámka: Analogie této věty platí i pro Hilbertův prostor s "nespočetnou bází". Jen je potřeba správně zadefinovat výrazy jako $\sum_{\alpha\in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$ a $\sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha) \ u_\alpha$.

Konec 8. přednášky

11.3. Trigonometrické řady

Definice. Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$. Potom čísla
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \text{ pro } k \in \mathbf{N}_0 \text{ a}$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \text{ pro } k \in \mathbf{N}.$$
nazýváme *Fourierovy koeficienty* funkce f. Trigonometrickou řadu
$$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$
nazýváme *Fourierovou řadou funkce f.*

Věta L 11.11 (o ortogonalitě trigonometrických funkcí). *Nechť $n, m \in \mathbf{N}$, pak*
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,dx = \begin{cases} 0 \ \textit{pro } m \neq n \\ \pi \ \textit{pro } m = n \end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 \ \textit{pro } m \neq n \\ \pi \ \textit{pro } m = n \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,dx = 0\ .$$

Věta T 11.12 (o maximalitě trigonometrických funkcí)**.** *Systém trigonometrických funkcí*

$$\Big\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)\Big\}_{n=1}^{\infty},\ \Big\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)\Big\}_{n=1}^{\infty}\ a\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

tvoří maximální ortonormální množinu v $L^2(0,2\pi)$*. Tedy jediné* $f \in L^2(0,2\pi)$ *takové, že*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\ \sin(nx)\,dx = 0\ \forall n \in \mathbf{N}\ a\ \int_0^{2\pi} f(x)\ \cos(nx)\,dx = 0\ \forall n \in \mathbf{N}_0$$

je identicky nulová funkce.

Z Věty 11.10 dostáváme:
Důsledek: Pro každé $f \in L^2(0,2\pi)$ a a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f. Pak platí

$$f(x) = F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve smyslu rovnosti rovnosti L^2 funkcí. Tedy v příslušném metrickém prostoru platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Navíc platí Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \pi\frac{a_0^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Specielně tedy dostáváme, že trigonometrické polynomy jsou husté v L^2, a tedy spojité funkce $C([0,2\pi])$ jsou husté v $L^2(0,2\pi)$.

Aplikace: 1) mp3 2) jpeg
3) Existují i jiné báze vhodnější pro práci s obrázky - například Rademacherova báze

12. Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

12.1. Bodová a stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí

Definice. Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je interval a nechť máme funkce $f : J \to \mathbf{R}$ a $f_n : J \to \mathbf{R}$ pro $n \in \mathbf{N}$. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n\}$:

- *konverguje bodově* k f na J, pokud pro každé $x \in J$ platí $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, neboli
$$\forall x \in J\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
Značíme $f_n \to f$ na J.
- *konverguje stenoměrně* k f na J, pokud
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in J :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$
Značíme $f_n \rightrightarrows f$ na J.
- *konverguje lokálně stejnoměrně*, pokud pro každý omezený uzavřený interval $[a,b] \subset J$ platí: $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$. Značíme $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na J.

Příklady: 1) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{2^n}$ na $[0,1]$.
2) $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$.
Konec 9. přednášky

Věta L 12.1 (kritérium stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť* $f, f_n : J \to \mathbf{R}$*. Pak*

$$f_n \rightrightarrows f\ \ na\ J \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup\{|f_n(x) - f(x)|;\ x \in J\} = 0.$$

Poznámka: Nechť $f_n, f : J \to \mathbf{R}$ jsou navíc spojité. Pak předchozí věta říká, že

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow f_n \to f \text{ v metrickém prostoru } C(J).$$

Příklady: 1) $f_n(x) = x^n$ na $[0,1]$.
2) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ na $[0,1]$.
3) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ na $[0,1]$.

Věta L 12.2 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro stejnoměrnou konvergenci). *Nechť $f, f_n : J \to \mathbf{R}$. Pak*

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } J \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0\ \forall x \in J: \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Věta L 12.3 (Moore-Osgood). *Nechť x_0 je krajní bod intervalu J (může být i $\pm\infty$). Nechť $f, f_n : J \to \mathbf{R}$ splňují*

(i) $f_n \rightrightarrows f$ na J,

(ii) existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n \in \mathbf{R}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.

Pak existují $\lim_{n\to\infty} a_n$ a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a jsou si rovny, neboli

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Důsledek: Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na I a nechť f_n jsou spojité na I. Pak f je spojitá na I.

Poznámka: Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$. Analogicky lze definovat stejnoměrnou konvergenci i pro funkce $f_n : A \to \mathbf{R}$ a platí, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá funkce.

Příklad: 1) $f_n(x) = x^n$ na $[0, 1]$.
Konec 10. přednášky

Věta L 12.4 (o záměně limity a integrálu). *Nechť funkce $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$ a nechť $f_n \in L([a, b])$. Pak $f \in L([a, b])$ a*

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} (L)\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Věta T 12.5 (o záměně limity a derivace). *Nechť funkce f_n, $n \in \mathbf{N}$, mají vlastní derivaci na intervalu (a, b) a nechť*

(i) existuje $x_0 \in (a, b)$ tak, že $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje ,

(ii) pro derivace f_n' platí $f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na (a, b).

Potom existuje funkce f tak, že $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a, b), f má vlastní derivaci a platí $f_n' \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f'$ na (a, b).

Příklady: 1) $f_n(x) = n$ na $[0, 1]$, bez (i) věta neplatí.

2) $f_n(x) = \frac{1}{n}x$ na $\mathbf{R}$. Dostaneme pouze $f_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ a ne $f_n(x) \rightrightarrows 0$.
Konec 11. přednášky

11.2. Stejnoměrná konvergence řady funkcí

Definice. Řekneme, že řada funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ konverguje *stejnoměrně* (popřípadě *lokálně stejnoměrně*) na intervalu J, pokud posloupnost částečných součtů $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ konverguje stejnoměrně (popřípadě lokálně stejnoměrně) na J.

Věta L 12.6 (nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J. Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na J, pak posloupnost funkcí $u_n(x) \rightrightarrows 0$ na J.*

Příklad: Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

není stejnoměrně konvergentní na $(0, 1)$.

Věta L 12.7 (Weirstrassovo kritérium). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ je řada funkcí definovaná na intervalu J. Pokud pro*

$$\sigma_n := \sup\{|u_n(x)| : \ x \in J\} \text{ platí, že číselná řada } \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \text{ konverguje,}$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \rightrightarrows$ na J.

Příklad: Nechť $\alpha > 1$. Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$$

je stejnoměrně konvergentní na $\mathbf{R}$.

Věta L 12.8 (o spojitosti a derivování řad funkcí)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *je řada funkcí definovaná na intervalu* (a,b)*.*

a) Nechť u_n *jsou spojité na* (a,b) *a nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ *na* (a,b)*. Pak* $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *je spojitá na* (a,b)*.*
b) Nechť funkce u_n*,* $n \in \mathbf{N}$*, mají vlastní derivaci na intervalu* (a,b) *a nechť*

$$(i) \text{ existuje } x_0 \in (a,b) \text{ tak, že } \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) \text{ konverguje },$$

$$(ii) \text{ pro derivace } u_n' \text{ platí } \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} \text{ na } (a,b).$$

Potom je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *dobře definovaná a diferencovatelná a navíc* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} F(x)$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} F'(x)$ *na* (a,b)*.*

Příklad: Je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^3+x^3}$ spojitá a diferencovatelná na $(0,\infty)$?
Konec 12. přednášky

Věta T 12.9 (Abel-Dirichletovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť* $\{a_n(x)\}_{n\in\mathbf{N}}$ *je posloupnost funkcí definovaných na intervalu* J *a nechť* $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost funkcí na* J *taková, že* $b_1(x) \geq b_2(x) \geq \ldots 0$*. Jestliže je některá z následujících podmínek splněna, pak je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows$ *na* J*.*

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \rightrightarrows \text{ na } J \text{ a } b_1 \text{ je omezená,}$$

$$(D)\ b_n \rightrightarrows 0 \text{ na } J \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ má omezené častečné součty, tedy}$$

$$\exists K > 0\ \forall m \in \mathbf{N}\ \forall x \in J: \quad |s_m(x)| = \Big|\sum_{i=1}^{m} a_i(x)\Big| < K.$$

Příklady: 1) Je funkce $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{n^2+x^2}$ spojitá na $[0,\infty)$?
2)Nechť $\alpha \in (0,1]$. Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řady funkcí na $\mathbf{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}.$$

13. Metrické prostory II

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $K \subset P$. Řekneme, že K je *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti prvků K lze vybrat konvergentní podposloupnost s limitou v K.

Opakování: $K \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní, prvě tehdy, když je omezená a uzavřená.
Spojitá funkce na kompaktu nabývá maxima a minima.

13.1. Více o kompaktních a úplných prostorech

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Nechť $\varepsilon > 0$ a $H \subset P$. Řekneme, že H je ε*-síť* prostoru P, pokud

$$P \subset \bigcup_{x \in H} B(x,\varepsilon).$$

Řekneme, že P je *totálně omezený*, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť prostoru P.

Příklady: 1. $([0,1], |.|)$ a $((0,1), |.|)$ jsou totálně omezené.
2. $([0,1]^2, |.|)$ je totálně omezená.

Věta L 13.1 (omezenost a totální omezenost)**.** *Nechť* (P,ϱ) *je totálně omezený metrický prostor. Potom je* P *omezený.*

Konec 13. přednášky

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že P je *kompaktní metrický prostor*, je-li P kompaktní množina v (P,ϱ).

Věta L 13.2 (kompaktnost a totální omezenost)**.** *Nechť* (P,ϱ) *je kompaktní metrický prostor. Potom je* P *totálně omezený.*

Věta T 13.3 (kompaktnost a otevřené pokrytí). *Metrický prostor (P,ϱ) je kompaktní právě tehdy, když z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí. Tedy platí*

$$P \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \text{ pro libovolnou indexovou množinu } A,\ G_\alpha \text{ otevřené } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ existuje konečná } A_0 \subset A \text{ tak , že } P \subset \bigcup_{\alpha\in A_0} G_\alpha.$$

Důsledek (Borel): Nechť $a,b\in \mathbf{R}$, $a<b$, a $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ je systém otevřených intervalů. Pak

$$[a,b] \subset \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha \Rightarrow \text{ existuje konečná } A_0 \subset A \text{ tak , že } [a,b] \subset \bigcup_{\alpha\in A_0} I_\alpha.$$

Důsledek: Lokálně stejnoměrnou konvergenci $f_n \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) můžeme ekvivalentně definovat jako

$$\forall x\in(a,b)\ \exists r>0 \text{ tak, že } f_n \rightrightarrows f \text{ na } [x-r,x+r].$$

Důsledek: Každá spojitá funkce na $[a,b]$ je stejnoměrně spojitá.
Konec 14. přednášky

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost bodů z P. Řekneme, že x_n *splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku* (případně, že je cauchyovská), jestliže platí

$$\forall\varepsilon>0 \exists n_0\in\mathbf{N}\ \forall m,n\in\mathbf{N},\ m,n\ge n_0:\ \varrho(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

Poznámka: Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská.

Definice. Řekneme, že metrický prostor (P,ϱ) je úplný, jestliže každá cauchyovská posloupnost bodů z P je konvergentní.

Příklad: Metrický prostor $l^2 := \left\{\{a_n\}_{n=1}^\infty:\ a_n\in\mathbf{R},\ \sum_{n=1}^\infty a_n^2<\infty\right\}$ s metrikou

$$\varrho(\{a_n\}_{n=1}^\infty,\{b_n\}_{n=1}^\infty) = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty (a_n-b_n)^2}$$

je úplný.

Věta L 13.4 (Cantorova věta o vnořených množinách). *Nechť (P,ϱ) je úplný metrický prostor a F_n je posloupnost neprázdných uzavřených množin v P takových, že $F_{n+1}\subset F_n$ a $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam} F_n=0$. Pak $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ je jednobodová množina.*

Dotazy: Platí tato věta bez předpokladu a) úplnosti P, b) uzavřenosti F_n, c) podmínky $\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam} F_n = 0$?

Věta T 13.5 (o totální omezenosti a úplnosti). *Metrický prostor (P,ϱ) je kompaktní právě tehdy, když je totálně omezený a úplný.*

Věta L 13.6 (o zúplnění metrického prostoru). *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Pak existuje úplný metrický prostor $(\tilde P,\tilde\varrho)$ tak, že $P\subset\tilde P$ a pro všechna $x,y\in P$ platí $\varrho(x,y)=\tilde\varrho(x,y)$.*

Konec 15. přednášky

13.2. Husté a řídké množiny

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A\subset P$ je *hustá*, pokud $\overline{A}=P$.

Příklady: 1) $\mathbf{Q}$ je hustá v $\mathbf{R}$.
2) $\mathbf{Q}^2$ je hustá v $\mathbf{R}^2$.
3) polynomy jsou husté v $C([0,1])$.
4) Může být průnik dvou hustých množin prázdná množina?

Věta L 13.7 (charakterizace hustých množin). *Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a $A\subset P$. Potom je $A\subset P$ je hustá právě tehdy, když pro každou otevřenou neprázdnou množinu $G\subset P$ platí $G\cap A\neq\emptyset$.*

Důsledek: Nechť $G_1,\ G_2\subset P$ jsou otevřené a husté v (P,ϱ). Pak $G_1\cap G_2$ je otevřená a hustá v P.

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A\subset P$ je *řídká*, jestliže $P\setminus\overline{A}$ je hustá.

Příklady: 1) $\mathbf{N}$ je řídká v $\mathbf{R}$.
2) $\mathbf{Q}$ není řídká v $\mathbf{R}$.
3) $\mathbf{R}\times\{0\}$ je řídká v $\mathbf{R}^2$
4) Cantorovo diskontinuum je řídké v $[0,1]$.

Věta L 13.8 (vlastnosti řídkých množin)**.** *Nech (P,ϱ) je metrický prostor a nechť $A,\ B\subset P$. Potom*
(a) *Je-li A řídká v P a $B\subset A$, pak je také B řídká v P,*
(b) *Jsou-li A a B řídké v P, pak $A\cup B$ je řídká v P*
(c) *A je řídká v P právě tehdy, když $\overline{A}$ je řídká v P.*

Definice. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor. Řekneme, že $A\subset P$ je *1. kategorie*, jestliže existují řídké množiny A_n tak, že $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

Řekneme, že $C\subset P$ je *2. kategorie*, jestliže C není první kategorie v P.

Příklady: 1) $\mathbf{Q}$ je 1. kategorie v $\mathbf{R}$.
2) $\mathbf{Q}\times\mathbf{R}$ je 1. kategorie v $\mathbf{R}^2$.
3) $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ je 2. kategorie v $\mathbf{R}$.

Konec 16. přednášky

Věta T 13.9 (Baire)**.** *Nechť (P,ϱ) je úplný metrický prostor. Nechť G_n, $n\in\mathbf{N}$, jsou otevřené a husté v (P,ϱ). Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$ je hustá v (P,ϱ).*

Důsledek: Úplný metrický prostore není první kategorie sám v sobě.

Příklad: Existují $A\cup N=[0,1]$ tak, že A je 1. kategorie a N má nulovou míru?

Věta T 13.10 (o nediferencovatelné funkci)**.** *Existuje spojitá funkce $f:[0,1]\to\mathbf{R}$, která nemá derivaci v žádném bodě z $(0,1)$.*

Konec 17. přednášky

14. Obyčejné diferenciální rovnice

Motivace: 1. Volný pád s odporem vzduchu. Pozice v čase t je $y(t)$:
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=-g+\alpha(\frac{dy(t)}{dt})^2.$$
2. Růst populace
$$\frac{dn(t)}{dt}=kn(t)(M-n(t)).$$
3. kyvadlo délky l, $x(t)$ je úhel kyvadla v čase t:
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{g}{l}\sin x(t).$$

Spousta jevů ve fyzice, chemii, biologii, nebo ekonomii je popsána pomocí diferenciálních rovnic.

14.1. Řešení, existence a jednoznačnost

Definice. Nechť $\Phi:\Omega\subset\mathbf{R}^{n+2}\to\mathbf{R}$. *Obyčejnou diferenciální rovnicí* (ve zkratce ODR) n-tého řádu nazveme

$$\Phi\big(x,y(x),y'(x),\dots,y^{(n)}(x)\big)=0. \tag{14.1}$$

Definice. *Řešení ODR* na intervalu $I\subset\mathbf{R}$ je funkce $y(x)$ splňující

(i) existuje $y^{(k)}(x)$ vlastní pro $k=1,\dots,n$ v I a všechna $x\in I$,

(ii) (14.1) platí pro všechna $x\in I$.

Řešení je dvojice (y,I).

Definice. Řekneme, že $(\tilde y,\tilde I)$ je *rozšířením* (y,I), pokud

(i) $\tilde y$ je řešení (14.1) na $\tilde I$, $\quad(ii)$ $I\subsetneq\tilde I$, $\quad(iii)$ $y=\tilde y$ na I.

Řekneme, že (y,I) je *maximální řešení*, pokud nemá rozšíření.

Cíle studia ODR:

- sestavit rovnici
- existují řešení a kolik jich je?
- najít všechna maximální řešení
- diskuse o jednoznačnosti a kvalitě řešení
- případná fyzikální interpretace

Věta T 14.1 (Peano s $y^{(n)}$ - bez důkazu)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená,* $f : \Omega \to \mathbf{R}$ *je spojitá a* $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in \Omega$. *Pak existuje* $U(x_0)$ *okolí* x_0 *a funkce* $y(x)$ *definovaná na* $U(x_0)$ *tak, že* $y(x)$ *splňuje ODR*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad \forall x \in U(x_0)$$

a počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Věta L 14.2 (o převedení na integrální tvar)**.** *Nechť* $I \subset \mathbf{R}$ *je otevřený interval,* $x_0 \in I$, $f : I \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *spojitá a* $y : I \to \mathbf{R}$ *je spojitá. Pak* y *je řešení ODR*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ na } I \text{ splňující počáteční podmínku } y(x_0) = y_0$$

právě tehdy, když

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \text{ pro všechna } x \in I.$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ je oteřená. Řekneme, že funkce $f : \Omega \to \mathbf{R}$ je *lokálně lipschitzovská* vůči y, pokud pro všechna $U \subset \Omega$ omezené, existuje $K \in \mathbf{R}$ tak, že

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \le K|y - \tilde{y}| \text{ pro všechna } [x, y] \in U \text{ a } [x, \tilde{y}] \in U.$$

Poznámka: Nechť je $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojitá. Pak je f lokálně lipschitzovská vůči y.

Věta T 14.3 (Picard)**.** *Nechť* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ *je otevřená a* $(x_0, y_0) \in \Omega$. *Nechť* $f : \Omega \to \mathbf{R}$ *je spojitá a lokálně lipschitzovská vůči* y. *Pak existuje* $U(x_0)$ *okolí* x_0 *a funkce* $y(x)$ *definovaná na* $U(x_0)$ *tak, že* $y(x)$ *splňuje ODR*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ pro } x \in U(x_0) \text{ s počáteční podmínkou } y(x_0) = y_0.$$

Navíc y *je jediné řešení na* $U(x_0)$.

Konec 18. přednášky

14.2. Rovnice prvního řádu

Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená a $f : \Omega \to \mathbf{R}$ je spojitá. V této kapitole studujeme pouze rovnice typu

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Speciální tvary:

- *(i)* $y' = f(x)$
- *(ii)* $y' = g(y)$
- *(iii)* $y' = g(y)h(x)$ (separované proměnné)
- *(iv)* $y' = h(\frac{y}{x})$ (homogenní rovnice) - substitucí $z = \dfrac{y}{x}$ převedeme na *(iii)*
- *(v)* $y' = a(x)y + b(x)$ (lineární rovnice 1. řádu)
- *(vi)* $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$, (Bernouliho rovnice)- substitucí $z = y^{1-\alpha}$ převedeme na (v)

Věta L 14.4 (o lepení řešení)**.** *Nechť* $\delta > 0$, $\gamma > 0$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ *je otevřená a* $f : \Omega \to \mathbf{R}$ *spojitá. Nechť* y_l *je řešení diferenciální rovnice*

$$y' = f(x, y) \text{ na intervalu } (a - \delta, a)$$

a y_r *je řešení této diferenciální rovnice na intervalu* $(a, a + \gamma)$. *Nechť navíc existují limity*

$$\lim_{x \to a-} y_l(x) = \lim_{x \to a+} y_r(x) = A.$$

Potom funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_l(x) \text{ pro } x \in (a - \delta, a) \\ A \text{ pro } x = a \\ y_r(x) \text{ pro } x \in (a, a + \gamma) \end{cases}$$

je řešení této diferenciální rovnice na intervalu $(a - \delta, a + \gamma)$.

Věta T 14.5 (o existenci řešení separované rovnice - bez důkazu)**.** *Nechť* $h : (a, b) \to \mathbf{R}$ *je spojitá,* $g : (c, d) \to \mathbf{R}$ *je spojitá a nenulová. Potom každým bodem* $[x_0, y_0] \in \Omega := (a, b) \times (c, d)$ *prochází právě jedno řešení rovnice*

$$y' = g(y)h(x).$$

Postup pro řešení rovnice $y' = h(x)g(y)$ se separovanými proměnnými:
(1) Určíme maximální intervaly I v D_h.
(2) Najdeme body, kde $g(c) = 0$. Pak $y(x) \equiv c$ je řešení. Určíme maximální intervaly J, kde je g nenulová.
(3) Pro $x \in I$ hledáme řešení s hodnotami v J rovnice

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Integrováním dostaneme

$$G(y(x)) = H(x) + c,$$

kde H je primitivní k h na I a G je primitivní k $\frac{1}{g}$ na J.
(4) Zafixujeme c a hledáme řešení

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c).$$

Toto je řešení na

$$\{x \in I : \ H(x) + c \in G(J)\}.$$

(5) Z řešení z (4) a konstantních řešení z (2) slepíme všechna maximální řešení.

Příklady: 1. $y' = y^2$
2. $y' = x^2 y$
3. $y' = \sqrt{1 - y^2}$.
Konec 19. přednášky

Postup pro řešení rovnice $y' = a(x)y + b(x)$:
a) Vyřešíme rovnici $y' = a(x)y$ (separované proměnné). Vyjde

$$y(x) = Ke^{A(x)} \text{ pro } K \in \mathbf{R}, \text{ kde } A(x) \text{ je primitivní k } a(x).$$

b) Hledáme jedno partikulární řešení ve tvaru

$$y(x) = K_0(x)e^{A(x)}.$$

Dosazením

$$y'(x) = (K_0(x)e^{A(x)})' = K_0'(x)e^{A(x)} + K_0(x)e^{A(x)}a(x)$$

do rovnice vyjde

$$K_0'(x)e^{A(x)} + K_0(x)e^{A(x)}a(x) = y'(x) = a(x)y(x) + b(x) = a(x)K_0(x)e^{A(x)}.$$

Odtud $K_0'(x) = e^{-A(x)}b(x)$, a tedy K_0 spocteme jako primitivni funkci k $e^{-A(x)}b(x)$.
c) Řešení je celkově partikulární řešení z b) plus obecné řešení homogenní rovnice z a)

$$y(x) = K_0(x)e^{A(x)} + ce^{A(x)}.$$

Příklady: 1. $y' + xy = x$
2. šnek na gumě

14.3. Systémy lineárních ODR a lineární rovnice řádu n

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval a mějme funkce $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b : I \to \mathbf{R}$. *Lineární ODR řádu* n nazvu rovnici

$$y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \text{ pro } x \in I.$$

Je-li $b \equiv 0$ na I, pak se rovnice nazývá homogenní.

Definice. Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval, mějme funkce $b, y : I \to \mathbf{R}^n$ a mějme maticovou funkci $A : I \to \mathbf{R}^{n^2}$. *Systémem ODR prvního řádu* nazveme systém rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n + b_1 \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2,n}y_n + b_2 \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n + b_n \end{aligned}$$

neboli v maticovém zápisu

$$y' = Ay + b.$$

Je-li $b \equiv 0$ na I, pak se rovnice nazývá homogenní.

Konec 20. přednášky

Poznámka: Řešení jedné rovnice řádu n lze převést na řešení systému n rovnic řádu 1: Nechť y řeší

$$y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

s počáteční podmínkou

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Pak n funkcí

$$u_1(x) = y(x),\ u_2(x) = y'(x), \ldots,\ u_n(x) = y^{(n-1)}(x)$$

řeší soustavu

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= b(x) - a_{n-1}(x)u_n(x) - \ldots - a_0(x)u_1(x) \end{aligned}$$

s počáteční podmínkou

$$u_1(x_0) = y_0,\ u_2(x_0) = y_1, \ldots,\ u_n(x_0) = y_{n-1}.$$

V dalším si tedy vyslovíme věty pro soustavy n rovnic řádu 1, které mají okamžitě analogické důsledky pro jednu rovnici řádu n.

Naopak řešení systému n rovnic řádu 1 lze občas, ale ne vždy, převést na jednu rovnici řádu n.

Věta T 14.6 (o existenci řešení systému ODR 1. řádu). *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval a mějme spojité funkce $b_j,\ a_{ij} : I \to \mathbf{R}$ pro $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Nechť $x_0 \in I$, $y^0 \in \mathbf{R}^n$ a $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ je spojitá maticová funkce. Pak existuje právě jedno řešení rovnice*

$$y' = Ay + b \text{ s počáteční podmínkou } y(x_0) = y^0$$

definované na celém I.

Konec 21. přednášky

Věta L 14.7 (prostor řešení systému ODR 1. řádu). *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval a mějme spojité funkce $b_j,\ a_{ij} : I \to \mathbf{R}$ pro $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Označme*

$$L(y) = y' - Ay \text{ a } H = \operatorname{Ker} L = \{y \in C^1(I, \mathbf{R}^n) :\ L(y) = 0 \text{ na } I\}.$$

Pak H je vektorový prostor dimenze n. Označme M množinu všech řešení nehomogenního systému rovnic $Ly = b$ a nechť y_0 je jedno pevné řešení $L(y_0) = b$. Pak

$$M = y_0 + \operatorname{Ker} L.$$

Definice. Libovolnou bázi $\{y_1, \ldots, y_n\}$ prostoru $H = \operatorname{Ker}(y' - Ay)$ (tedy libovolných n lineárně nezávislých řešení homogenní rovnice $y' = Ay$) nazýváme *fundamentálním systémem řešení FSŘ homogenní rovnice* $y' = Ay$.

14.4. Rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Definice. Nechť $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

nazveme *charakteristickým polynomem* rovnice

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Věta T 14.8 (FSŘ pro rovnici n-tého řadu s konstantními koeficienty). *Mějme zadány $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou kořeny charakteristického polynomu násobnosti $s_1, \ldots, s_k$ (tedy $s_1 + \ldots + s_k = n$). Pak funkce*

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x}, \ldots,\ x^{s_1-1}e^{\lambda_1 x}, \ldots,\ e^{\lambda_k x}, \ldots,\ x^{s_k-1}e^{\lambda_k x}$$

tvoří fundamentální systém řešení

$$y^{(n)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0 \text{ na } \mathbf{R}.$$

Konec 22. přednášky

Věta T 14.9 (o speciální pravé straně pro rovnici n-tého řadu - bez důkazu)**.** *Mějme zadány* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$, *nechť* $P_m(x)$ *je polynom* m*-tého stupně a* $(\alpha + i\beta)$ *je* k*-násobný kořen charakteristického polynomu (lze i* $k = 0$, $\alpha = 0$ *nebo* $\beta = 0$*). Pak rovnice*

$$y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = P_n(x) e^{\alpha x} \cos \beta x \quad (\text{ popřípadě } P_n(x) e^{\alpha x} \sin \beta x)$$

má na $\mathbf{R}$ *řešení ve tvaru*

$$y_0(x) = x^k Q_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + x^k R_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x,$$

kde Q_m *a* R_m *jsou polynomy stupně* m*.*

Poznámka: Není-li pravá strana rovnice ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x),$$

kde $\{y_1, \ldots, y_n\}$ tvoří FSŘ rovnice $y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Příklady: 1. $y'' - y = e^x + e^{2x}$
2. $y'' + y = \sin ax$, $a \in \mathbf{R}$
3. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$

Konec 23. přednášky

14.5. Systémy rovnic s konstantními koeficienty

Věta L 14.10 (FSŘ pro soustavu rovnic s konstantními koeficienty)**.** *Nechť má matice* A *všechna vlastní čísla* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *různá a nechť* $v_1, \ldots, v_n$ *jsou příslušné vlastní vektory. Pak vektorové funkce*

$$v_1 e^{\lambda_1 x}, \ldots, \; v_n e^{\lambda_n x}$$

tvoří fundamentální systém řešení

$$y' = Ay \text{ na } \mathbf{R}.$$

Poznámka: Nemá-li matice A všechna vlastní čísla různá, pak lze fundamentální systém také algoritmicky sestrojit. Nechť λ je k-násobné vlastní číslo matice A.

a) Pokud existuje k lineárně nezávislých vlastních vektorů $v_1, v_2, \ldots, v_k$ pak do FSŘ dáme funkce

$$v_1 e^{\lambda x}, \; v_2 e^{\alpha x}, \ldots, v_n e^{\alpha x}.$$

b) Pokud existuje pouze jeden vlasní vektor v_1, tak nalezneme řetězec vektorů $v_2, \ldots, v_k$, aby

$$(A - \lambda E) v_1 = 0, \; (A - \lambda E) v_2 = v_1, \; \ldots, \; (A - \lambda E) v_k = v_{k-1}$$

a do FSŘ dáme funkce

$$v_1 e^{\lambda x}, \; v_1 x e^{\lambda x} + v_2 e^{\lambda x}, \; v_1 \frac{x^2}{2} e^{\lambda x} + v_2 x e^{\lambda x} + v_2 e^{\lambda x}, \ldots, v_1 \frac{x^k}{k!} e^{\lambda x} + \ldots + v_k e^{\lambda x}.$$

c) Pokud existuje více vlastních vektorů, ale ne k tak provedeme něco mezi. Záleží to na Jordanově tvaru matice $A = R^{-1} J R$, kde R je matice rotace. Je-li například

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

pak existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory (jeden pro druhý v_1 a jeden pro třetí řádek v_2). Pro ten první vlastní vektor nalezneme příslušný řetězec délky 2 ($(A - \lambda E) u = v_1$) a do FSŘ dáme

$$v_1 e^{\lambda x}, \; v_1 x e^{\lambda x} + u e^{\lambda x}, \; v_2 e^{\alpha x}.$$

Obecně pro každou Jordanovu buňku velikosti $m \times m$ nalezneme řetězec délky m a příslušné funkce jako v b) dáme do FSŘ.

Odůvodnění: Počítání s exponencielou matice.

Příklady: 1. $y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y$ s počáteční podmínkou $y(0) = (3, 0)$. 2. $y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} y$
3. $y' = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 9 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} y$ 4. $y' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} y$ 5. $y' = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} y$

Definice. Nechť $y^1,\ y^2,\ \dots,\ y^n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice $y' = Ay$. Pak matici

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} y_1^1(x) & \dots & y_1^n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(x) & \dots & y_n^n(x) \end{pmatrix}$$

nazveme *fundamentální maticí soustavy* $y' = Ay$.

Lemma. Nechť φ je fundamentální matice soustavy $y' = Ay$ na intervalu I. Pak $\varphi(x)$ je regulární pro každé $x \in I$.

Věta L 14.11 (tvar řešení pro soustavu ODR)**.** *Nechť $I \subset \mathbf{R}$ je interval, $A : I \to \mathbf{R}^{n\times n}$ a $b : I \to \mathbf{R}^n$ jsou spojité funkce, $x_0 \in I$ a $y^0 \in \mathbf{R}^n$. Pak maximální řešení rovnice $y' = Ay + b$ s počáteční podmínkou $y(x_0) = y^0$ má tvar*

$$y(x) = \varphi(x)\varphi^{-1}(x_0)y^0 + \varphi(x)\int_{x_0}^{x} \varphi^{-1}(t)b(t)\, dt,$$

kde φ je fundamentální matice soustavy.

Jako důsledek tohoto tvrzení lze odvodit Větu 14.9 i následující:

Věta T 14.12 (o speciální pravé straně pro soustavu n-tého řadu - bez důkazu)**.** *Nechť $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ je matice a p, q jsou $n \times 1$ vektory polynomů. Pak soustava*

$$y' = Ay + p(x)e^{ax}\cos bx + q(x)e^{ax}\sin bx$$

má řešení ve tvaru

$$y(x) = \tilde{p}(x)e^{ax}\cos bx + \tilde{q}(x)e^{ax}\sin bx,$$

kde $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ jsou vektory polynomů a

$$\max\{\operatorname{st}\tilde{p}, \operatorname{st}\tilde{q}\} = \max\{\operatorname{st}p, \operatorname{st}q\} + \textit{násobnost } (a+ib) \textit{ jako vlastního čísla } A.$$

Příklad: 1. $y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2e^x \\ 2\sin x \end{pmatrix}$

Poznámka: Není-li pravá strana rovnice ve tvaru kvazipolynomu, pak lze řešení nehomogenní rovnice najít metodou variace konstant ve tvaru

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)y_i(x),$$

kde $\{y_1, \dots, y_n\}$ tvoří FSŘ rovnice $y' = Ay$.

Konec 24. přednášky

14.6. Důkaz Peanovy věty

Věta T 14.13 (Arzela-Ascoli)**.** *Nechť $A \subset C([0,1])$. Pak $\overline{A}$ je kompaktní právě tehdy, když jsou funkce z A stejně omezené a stejně stejnoměrně spojité. Tedy pokud existuje $K > 0$ tak, že*

$$\forall f \in A,\ \forall x \in [0,1] : |f(x)| \le K$$

a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in [0,1], \forall f \in A : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Konec 25. přednášky

Věta T 14.14 (Peano)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená, $f : \Omega \to \mathbf{R}$ je spojitá a $(x_0, y_0) \in \Omega$. Pak existuje $U(x_0)$ okolí x_0 a funkce $y(x)$ definovaná na $U(x_0)$ tak, že $y(x)$ splňuje ODR*

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in U(x_0)$$

a počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

Konec 26. přednášky