

Printscreenem jsem vystříhal věty a definice z různých skript.
 Kalenda 09/10
 Skripta Kalendy na komplexku z 2014 přikládám.
 Skripta Malého na míru z 2016 přikládám.
 Skripta na funkcionálu ze stránek Spurného Spurný 19/20 a přikládám seznam vět.
 Na Furirku přikládám seznamy vět z analýzy od Hencla a odkaz na skripta Analýza 2020
 Samozřejmě za nic neručím a vlastně ani nedoporučuju se učit jen z tohoto, ale jako
 přehled co byste měli znát k ssz to snad bude stačit. pis

1 Lebesgueův integrál

σ -algebra je definována jako σ -okruh obsahující celý prostor X .
 Je to nejdůležitější množinový systém pro teorii míry. K ověření, že množinový
 systém \mathcal{S} je σ -algebra stačí tyto axiomy:
 (S1-1) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
 (S2-2) $A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S}$,
 (S3-3) $A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \dots \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{S}$.

Je-li \mathcal{S} σ -algebra na X , dvojice (X, \mathcal{S}) se nazývá *měřitelný prostor*. Množiny $A \in \mathcal{S}$ se nazývají \mathcal{S} -měřitelné množiny. Nehrozí-li nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných množinách*.

1.10. **Definice** (Generování množinových systémů). Je-li \mathcal{F} libovolný systém podmnožin X , potom existuje nejmenší σ -algebra obsahující \mathcal{F} . Tuto σ -algebru dostaneme jako průnik všech σ -algeber obsahujících \mathcal{F} a značíme ji $\sigma(\mathcal{F})$.

1.11. **Definice** (Borelovské množiny). Nechť X je topologický prostor a \mathcal{G} je systém všech jeho otevřených podmnožin. Potom definujeme $\mathcal{B}(X)$ jako nejmenší σ -algebru obsahující \mathcal{G} (viz definice 1.10). σ -algebra $\mathcal{B}(X)$ obsahuje kromě otevřených množin též všechny uzavřené množiny. $\mathcal{B}(X)$ se nazývá *borelovská σ -algebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny*.

V \mathbb{R} jsou borelovské všechny intervaly, množina všech racionálních čísel, atd. Příklady neborelovských množin se konstruují velmi těžko.

Někdy je výhodné generovat $\mathcal{B}(X)$ jinak než systémem všech otevřených množin. Na $\overline{\mathbb{R}}$ je přirozená topologie generovaná intervaly (a, b) , (a, ∞) a $[-\infty, b)$. Tudíž $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ je σ -algebra na $\overline{\mathbb{R}}$ generovaná intervaly. Podobně $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je generovaná intervaly.

1.12. **Definice** (Míra). Nechť (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže splňuje

(M1-1) $\mu(\emptyset) = 0$,
 (M2-2) (σ -additivita) jestliže $A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \dots$, jsou po dvou disjunktní, potom

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j \mu(A_j).$$

Trojice (X, \mathcal{S}, μ) se nazývá *prostor s mírou*.

Zdůrazněme, že definice míry zahrnuje, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je σ -algebra.

1.14. **Definice** (Terminologie teorie míry). Míra μ na měřitelném prostoru (X, \mathcal{S}) se nazývá

- (a) *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$,
- (b) *σ -konečná*, jestliže existují $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(X_j) < \infty$ a $X = \bigcup_j X_j$,
- (c) *pravděpodobnostní*, jestliže $\mu(X) = 1$,
- (d) *úplná*, jestliže každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná (a tudíž také míry nula).

Fráze *skoro všude* nebo *μ -skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X . Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{S}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \setminus N$. Používá se zejména pro rovnost a nerovnosti mezi funkcemi a pro bodovou konvergenci posloupnosti funkcí.

2.1. **Definice** (Lebesgueova vnější míra). Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina. Definujme

$$(2) \quad \ell^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j) : Q_j \in \mathcal{I}_n, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset A \right\}.$$

Množinová funkce $\ell^*: A \mapsto \ell^*(A)$, definovaná na potenční množině $2^{\mathbb{R}^n}$, se nazývá *Lebesgueova vnější míra*. Součty, vyskytující se na pravé straně (2) se nazývají *horní součty* k $\ell^*(A)$.

Množinová funkce ℓ^* umí měřit všechny množiny, ale není aditivní. Proto v dalším se budeme snažit z ní vytvořit aditivní funkci (dokonce míru, viz [definice 1.12](#)), za což zaplatíme zúžením definičního oboru. Výsledný obor všech měřitelných množin však již bude dostatečně bohatý pro všechny aplikace.

2.2. **Měřitelné množiny a Lebesgueova míra.** Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je (*Lebesgueovsky měřitelná*, jestliže pro každý interval $Q \in \mathcal{I}_n$ platí

$$(3) \quad \ell(Q) = \ell^*(Q \cap A) + \ell^*(Q \setminus A).$$

Množinu všech Lebesgueovsky měřitelných množin budeme značit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ a množinová funkce

$$\lambda: A \mapsto \ell^*(A), \quad A \in \mathfrak{M}$$

bude *Lebesgueova míra*.

2.3. **Oznámení věty.** Nechť $Q \in \mathcal{I}_n$. Potom $Q \in \mathfrak{M}$ a $\lambda(Q) = \ell^*(Q) = \ell(Q)$.

2.4. **Oznámení věty.** \mathfrak{M} je σ -algebra obsahující všechny borelovské podmnožiny \mathbb{R}^n a λ je míra na \mathfrak{M} .

3.3. **Definice** (Měřitelné funkce). Nechť $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že funkce $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je *\mathcal{S} -měřitelná*, jestliže pro každý interval $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ je $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných funkciích*.

3.7. **Větička** (Měřitelnost vzoru). Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $A \subset \mathbb{R}$ je borelovská množina. Potom $\{f \in A\} \in \mathcal{S}$.

3.8. **Větička** (Měřitelnost složené funkce). Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a φ je spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině $M \subset \overline{\mathbb{R}}$. Potom množina $D' := \{f \in M\}$ je měřitelná a složená funkce $\varphi \circ f$ je měřitelná na D' .

3.9. **Varování.** Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelný. Také není obecně pravda, že inverzní funkce k měřitelné funkci by byla měřitelná funkce. Viz [priklad 19.5](#)

3.10. **Věta** (Operace s měřitelnými funkcemi). Nechť funkce f, f_j jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak platí následující:

- (a) Funkce $|f|, f^+, f^-, f^2$ jsou měřitelné na D , $1/f$ je měřitelná na $\{f \neq 0\}$.
- (b) Funkce $f_1 + f_2, f_1 - f_2, f_1 f_2, f_1/f_2$ jsou měřitelné vždy na množině, kde učiněná operace dává smysl podle [úmluvy 3.2](#).
- (c) Funkce $\sup_j f_j, \inf_j f_j, \limsup_j f_j, \liminf_j f_j$ jsou měřitelné na D .
- (d) Množina D' všech bodů, kde existuje $\lim_j f_j$ je měřitelná a $\lim_j f_j$ je měřitelná na D' .

3.11. Jednoduché funkce. Funkci f na $D \in \mathcal{S}$ nazveme \mathcal{S} -jednoduchou, jestliže f je lineární kombinace charakteristických funkcí množin z \mathcal{S} , tj. existují-li množiny $A_j \in \mathcal{S}$ a $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, tak, že

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Pokud bude jasné, jakou σ -algebru máme na mysli, budeme mluvit prostě o jednoduchých funkciích.

3.12. Aproximace jednoduchými funkciemi. Nechť (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom existují nezáporné jednoduché funkce $f_k \nearrow f$. Navíc, f lze vyjádřit ve tvaru

$$(5) \quad f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j},$$

kde $E_j \in \mathcal{S}$.

4.1. Definice (Rozklad). Konečný soubor množin $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{S}$ nazveme *rozkladem* nebo *Lebesgueovským dělením* množiny $D \in \mathcal{S}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{j=1}^m A_j = D.$$

4.2. Terminologická poznámka. Rozdíl mezi obyčejným “riemannovským” dělením a lebesgueovským spočívá hlavně v tom, že riemannovské dělení je pouze na intervaly, u lebesgueovského se dělí na libovolné měřitelné množiny. Tento rozdíl podstatně přispívá k bohatství třídy lebesgueovský integrovatelných funkcí.

4.4. Definice (Konstrukce integrálu). Nechť $D, D' \in \mathcal{S}$ a $f: D' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ je měřitelná funkce. Integrál $\int_D f d\mu$ vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme $D' = D$.

1. Je-li f nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$(6) \quad \int_D f d\mu = \sup \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D, \right. \\ \left. 0 \leq \alpha_j \leq f \text{ na } A_j, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Součty vyskytující se v (6) nazýváme *dolními součty* k funkci f . Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován *vždy*, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D , definujeme

$$(7) \quad \int_D f d\mu = \int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu,$$

pokud rozdíl v (7) má smysl. Pokud

$$\int_D f^+ d\mu = \int_D f^- d\mu = \infty,$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná (přesně: \mathcal{S} -měřitelná) funkce na $D' \neq D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f d\mu = \int_{D \cap D'} f d\mu.$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D' .

Je-li integrál $\int_D f d\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f d\mu$ *konverguje* nebo že f je *integrovatelná*.

4.7. Oznámení věty (Lebesgueův integrál a Newtonův integrál). Nechť funkce $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b) primitivní funkci F .

(a) Je-li f λ -integrovatelná na (a, b) , potom existují vlastní jednostranné limity $F(b-)$ a $F(a+)$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a+).$$

(b) Jestliže $f \geq 0$ a existují vlastní jednostranné limity $F(b-)$ a $F(a+)$, pak f je λ -integrovatelná na (a, b) .

4.8. Věta (Různé vlastnosti Lebesgueova integrálu). Nechť $D \in \mathcal{S}$ a f, g jsou měřitelné funkce na D .

(a) Je-li $f \geq 0$, $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$ a $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak

$$\int_{D_1} f d\mu \leq \int_{D_2} f d\mu.$$

(b) Jestliže $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ a $D_1 \cup D_2 = D$, pak

$$\int_D f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu.$$

(c) Je-li $\int_D |f| d\mu < \infty$, pak $|f| < \infty$ skoro všude.

(d) Je-li $\int_D |f| d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.

(e) (monotonie) Jestliže f, g mají integrál a $f \leq g$ skoro všude, pak

$$\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu.$$

(f) Je-li $\int_D g d\mu < \infty$ a $|f| \leq g$ skoro všude, pak f je integrovatelná.

4.14. Důsledek (Spojitá závislost na integračním oboru). Nechť $D, E_k \in \mathcal{S}$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots, \bigcup_k E_k = D$. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na D . Potom

$$\int_D f d\mu = \lim_k \int_{E_k} f d\mu.$$

4.15. Věta (Linearita integrálu). (a) Nechť f, g jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom

$$\int_D (f + g) d\mu = \int_D f d\mu + \int_D g d\mu,$$

má-li pravá strana smysl. (b) Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $\gamma \in \mathbb{R}$. Pokud f má integrál, pak

$$\int_D \gamma f d\mu = \gamma \int_D f d\mu.$$

5.4. Věta (vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a, b) . Potom $(N) \int_a^b f(x) dx$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce f . V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.

5.5. Důsledek (Diskuse vztahu mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b) .

(a) Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b , konverguje i Newtonův a to absolutně.

(b) Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, pak konverguje i Lebesgueův.

(c) Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce f , pak oba mají stejnou hodnotu.

(d) Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.

5.6. Věta (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem). Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b konverguje a je roven integrálu Riemannovu.

4.13. **Věta** (Levi, Lebesgue, monotone convergence theorem). Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, a $f = \lim f_j$. Potom

$$(11) \quad \int_D f d\mu = \lim_j \int_D f_j d\mu.$$

6.1. **Lemma** (Fatouovo). Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D . Potom

$$(15) \quad \int_D \liminf_j f_j \leq \liminf_j \int_D f_j.$$

6.2. **Věta** (Lebesgueova, dominated convergence theorem). Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $f, f_j, j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na D . Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f . Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná majoranta) tak, že

$$(16) \quad |f_j(x)| \leq g(x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad x \in D.$$

Potom

$$(17) \quad \int_D f = \lim_j \int_D f_j.$$

14.1. **Definice** (Součin měr). Nechť (X, \mathcal{S}, μ) , a (Y, \mathcal{T}, ν) jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ -konečné. Uvažujme systém $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ všech podmnožin $X \times Y$ tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. Takovým množinám budeme říkat *měřitelné obdélníky*. Na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ definujeme množinovou funkci $\mu \times \nu$ předpisem

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B).$$

Systém množin $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ generuje tzv. *součinovou σ -algebrou* $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} := \sigma(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$. V dalším ([věta 14.5](#)) uvidíme, že existuje právě jedna míra ρ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ tak, že

$$\rho(A \times B) = \mu(A) \nu(B), \quad A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}.$$

Tuto míru budeme nazývat *součin měr* μ a ν a značit $\mu \otimes \nu$. Její zúplnění budeme nazývat *úplný součin měr* a značit $(\mathcal{S} \overline{\otimes} \mathcal{T}, \mu \overline{\otimes} \nu)$.

14.9. **Definice** (Řezy). Nechť $M \subset X \times Y$. Značíme

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in Y : (x, y) \in M\}, & x \in X, \\ M^{*,y} &= \{x \in X : (x, y) \in M\}, & y \in Y. \end{aligned}$$

Tyto množiny se nazývají *řezy*.

14.11. **Věta** (Fubiniova). Nechť (X, \mathcal{S}, μ) a (Y, \mathcal{T}, ν) jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ -konečné. Budě (\mathcal{R}, ρ) součin měr μ a ν a $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\rho})$ jejich úplný součin. Nechť f je $\overline{\rho}$ -měřitelná funkce na $\overline{\rho}$ -měřitelné množině $M \subset X \times Y$. Předpokládejme, že integrál

$$\int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y)$$

má smysl. Potom pro μ -skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_X g d\mu$$

a

$$(33) \quad \int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y) = \int_X g d\mu = \int_X \left(\int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

15.3. Věta (o substituci). Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom

$$\int_M u(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t)) |J\varphi(t)| dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

2 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 1. Nechť X je vektorový prostor nad \mathbb{K} . Funkci $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ nazýváme *normou* na X , pokud

- (i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem*.

Tvrzení 2. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} .

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X .

Definice 3. *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

PŘÍKLADY 4.

- a) Prostory \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n s normami $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, +\infty)$, případně $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou Banachovy prostory.
- b) • Nechť K je kompaktní prostor a $C(K)$ je vektorový prostor nad \mathbb{K} všech spojitých funkcí z K do \mathbb{K} . Na $C(K)$ zavedeme normu předpisem $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$ pro $f \in C(K)$. Pak $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor. Platí, že $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, právě když $f_n \Rightarrow f$. Důkaz úplnosti je stejný jako pro prostor $C([a, b])$ známý z přednášky z matematické analýzy.
- Prostor všech konvergentních posloupností $c = \{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}; \lim x_n$ existuje vlastní} se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je Banachův prostor. Důkaz lze vést přímo, nebo lze využít faktu, že c je lineárně izometrický prostoru $C(K)$, kde $K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty \{\frac{1}{n}\}$ s metrikou zděděnou z \mathbb{R} (viz Tvrzení 60(b)).
- Prostor $c_0 = \{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}; \lim x_n = 0\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor Banachova prostoru c (viz Tvrzení 5(b)).
- Prostor $c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}; (x_n)_{n=1}^\infty$ má pouze konečně mnoho nenulových členů} se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je normovaný lineární prostor, který není Banachův: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků c_{00} , kde $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, je cauchyovská, ale není konvergentní v c_{00} .
- Prostor $\ell_p = \{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}; \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\}$, $1 \leq p < \infty$ s normou $\|(x_n)\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ je Banachův prostor. (Je to speciální případ prostorů uvedených níže.)

Tvrzení 4. Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.

- (a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X .
- (b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X .

Definice 7 (ekvivalentní normy). Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou normy na X . Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8. Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Definice 65. Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad \mathbb{K} rozumíme funkci $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

- (i) funkce $x \mapsto \langle x, y \rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pro každé $x, y \in X$,
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,
- (iv) $\langle x, x \rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem*.

Definice 67. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

PŘÍKLAD 83. Snadno se ověří, že prostory \mathbb{R}^n a \mathbb{C}^n s normou $\|\cdot\|_2$ jsou Hilbertovy prostory se skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$. Obecněji, je-li μ míra, pak prostor $L_2(\mu)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f, g \rangle = \int_X f \bar{g} d\mu$. Speciálně, ℓ_2 je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$.

Podprostor ℓ_2 tvořený vektory pouze s konečně mnoha nenulovými souřadnicemi je prostor se skalárním součinem, který není Hilbertův.

Připomeňme si, že zobrazení $T: X \rightarrow Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad \mathbb{K} se nazývá *lineární*, pokud $T(x + y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 45. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- *izomorfismus* X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\text{Rng } T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- *izometrie* X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Důsledek 72. Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T: X \rightarrow Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in X$.

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad \mathbb{K} a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 52. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Věta 73. Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad \mathbb{K} . Pak na prostoru $X \oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y , a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X \oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.

Tvrzení 37. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) T je spojité.
- (ii) T je spojité v jednom bodě.

- (iii) T je spojité v 0.
- (iv) Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.
- (v) T je lipschitzovské.
- (vi) T je stejnoměrně spojité.
- (vii) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
- (viii) $T(B_X)$ je omezená.
- (ix) $T(U(0, \delta))$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Věta 41. Necht' X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Věta 49. Necht' X, \widehat{X} a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v \widehat{X} a Y je úplný. Necht' dále $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X}, Y)$ rozšiřující T , tj. $\widehat{T}|_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

Věta 124 (Princip stejnoměrné omezenosti). Necht' X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\sup\{\|T\|; T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.
- (ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|; T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Definice 126. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 127 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930). Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.

Důsledek 129 (S. Banach, 1929). Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y , právě když T je prostý a na.

Definice 131. Je-li $f: X \rightarrow Y$ zobrazení množiny X do množiny Y , pak množinu

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$$

nazýváme grafem zobrazení f . Říkáme, že zobrazení $f: X \rightarrow Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má uzavřený graf, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 132 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932). Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.

3 Hilbertovy prostory

Definice 74. Necht' X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají ortogonální (na sebe kolmé), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A, y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X; x \perp A\}$ se nazývá ortogonální doplněk A .

Definice 26. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X . Symbol $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazveme *zobecněnou řadou*. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ . Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F: \left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = 0$.

Věta 81. Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.

Definice 82. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortonormální, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- maximální ortonormální, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A ;
- ortonormální báze, pokud $A = \{e_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ .

POZNÁMKA (důležitá). Uvědomme si, že v definici ortonormální báze lze podle Věty 102 v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ podmítku $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$ (tj. předpoklad, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ konverguje bezpodmínečně) nahradit podmírkou $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ (tj. obyčejnou konvergenci). Podobně lze v následujících tvrzeních všude, kde předpokládáme konvergenci zobecněné řady $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální systém, tento předpoklad v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ nahradit předpokladem obyčejné konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$.

Věta 84. Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.

Důsledek 87. Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.

Věta 89 (Besselova nerovnost). Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.

Věta 90. Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální systém v X . Uvažujme následující tvrzení:

- (i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).
- (ii) $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ pro každé $x \in X$.
- (iii) $\{e_\gamma\}$ je ortonormální báze.
- (iv) $X = \overline{\text{span}}\{e_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$.
- (v) $\{e_\gamma\}$ je maximální ortonormální systém.

Pak (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Rightarrow (v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

- Pro Hilbertův prostor $L_2([0, 2\pi])$ je systém $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx); n \in \mathbb{N} \right\}$ ortonormální bází. Ortonormalita plyne z klasické teorie Fourierových řad. Hustota lineárního obalu plyne z Fejérovy¹⁹ věty zkombinované s důsledkem Luzinovy věty. Alternativně lze ukázat, že trigonometrický ortonormální systém je maximální: Nechť $f \in L_2([0, 2\pi])$ je kolmé ke všem prvkům tohoto systému. Protože též $f \in L_1([0, 2\pi])$, můžeme spočítat Fourierovy koeficienty příslušné funkci f . Ty jsou ovšem díky kolmosti rovny 0. Podle věty o jednoznačnosti to znamená, že $f = 0$ s. v., a tedy $f = 0$ v $L_2([0, 2\pi])$.

Nyní též vidíme, proč se řadě v (ii) ve Větě 112 říká abstraktní Fourierova řada: Pro bázi popsanou výše je to totiž formálně klasická Fourierova řada a čísla $\langle x, e_\gamma \rangle$ jsou přesně klasické Fourierovy koeficienty. Tato Fourierova řada ovšem konverguje ve smyslu prostoru $L_2([0, 2\pi])$, nikoli bodově, jak se studuje v klasické teorii.

Důsledek 91. Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

Věta 92 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H , je zobrazení $T: H \rightarrow \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ .

Tvrzení 93. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li $\dim X = n \in \mathbb{N}$, pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li $\dim X = \infty$ a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.

Věta 78 (Frigyes Riesz, 1934). Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H . Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$.

Lemma 79 (F. Riesz, 1934). Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \text{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.

4 Fourierovy řady

Značení: Symbolem $\mathcal{P}_{2\pi}$ značíme množinu všech lokálně integrovatelných 2π -periodických funkcí na \mathbf{R} .

Definice. Nechť a_k , $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a b_k , $k \in \mathbf{N}$, jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickou řadou*. Je-li navíc $n \in \mathbf{N}$, pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickým polynomem stupně n* .

Věta L 17.1 (Fourierovy vzorce). Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

konverguje stejnoměrně k funkci f na \mathbf{R} . Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, definované předpisy

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

nazýváme *Fourierovými koeficienty* funkce f . Trigonometrickou řadu

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Fourierovou řadou* funkce f . Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou Sf značíme symbolem $f \sim Sf$. Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ dále definujeme *částečný součet Fourierovy řady* funkce f předpisem

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Věta L 17.9 (Fourierovy koeficienty určují funkci). *Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom $f = g$ skoro všude.*

Důsledek Vět 11.10 a 11.12: Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ a a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f . Pak platí

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve smyslu rovnosti rovnosti L^2 funkcí. Tedy v příslušném metrickém prostoru platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Navíc platí Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Věta T 17.3 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma). *Nechť $(a, b) \subset \mathbf{R}$ je omezený interval a nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx) dx = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx) dx = 0.$$

Důsledek: Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Fourierovými koeficienty nějaké funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Věta L 17.5 (Diniovo kritérium). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $x \in \mathbf{R}$. Nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$ a nechť dále existují vlastní limity*

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t} \quad \text{a} \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x-t) - f(x-)}{t}.$$

Potom řada Sf konverguje v bodě x a platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Speciálně, má-li funkce f konečné jednostranné derivace v bodě x , potom $Sf(x) = f(x)$.

Definice. Nechť $[a, b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Definujme veličiny

$$V(f; a, b) := \sup_D \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \right\} \text{ (totální variace),}$$

kde supremum bereme přes všechna dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ tvaru $a = x_0 < \dots < x_n = b$.

Řekneme, že funkce f má na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ omezenou variaci, jestliže $V(f; a, b) < \infty$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu $[a, b]$ značíme $\text{BV}([a, b])$.

Věta T 17.6 (Jordanovo–Dirichletovo kritérium). Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $f \in \text{BV}([0, 2\pi])$. Potom

(a) pro každé $x \in [0, 2\pi]$ konverguje Fourierova řada $Sf(x)$ a platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2};$$

(b) je-li funkce f navíc spojitá na $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, potom

$$S_n f \xrightarrow{\text{loc}} f \quad \text{na } [a, b].$$

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ a nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme n -tým částečným Fejérovým součtem funkce f .

Věta T 17.7 (Fejérova). Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$.

(a) Jestliže pro nějaké $x \in \mathbf{R}$ existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$, potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

(b) Je-li funkce f spojitá na nějakém intervalu $(a, b) \subset \mathbf{R}$, potom

$$\sigma_n f \xrightarrow{\text{loc}} f \quad \text{na } (a, b).$$

Věta L 17.8 (Weierstrassova - trigonometrická verze). Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ je spojitá na \mathbf{R} . Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje trigonometrický polynom $T \in \mathcal{T}$ splující

$$\|f - T\|_{\mathcal{C}(\mathbf{R})} < \varepsilon.$$

5 Funkce komplexní proměnné

Definice:

- (1) Komplexní funkci komplexní proměnné rozumíme zobrazení $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$.
- (2) Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné a $a \in \mathbb{C}$. Derivací funkce f podle komplexní proměnné v bodě a (strukčněji derivací funkce f v bodě a) rozumíme (komplexní) číslo

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud limita na pravé straně existuje (v \mathbb{C}).

Poznámka:

- (1) Pro derivaci podle komplexní proměnné platí věty o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce ve stejně podobě jako pro derivaci v \mathbb{R} .
- (2) Má-li f v bodě $a \in \mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné, je v bodě a spojitá.
- (3) Je-li f komplexní funkce komplexní proměnné, g komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$, pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

pokud obě derivace na pravé straně existují.

Věta 3:

Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné. Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v \mathbb{R}^2 odpovídající f při ztotožnění \mathbb{C} a \mathbb{R}^2 ; tj. takovou, že

$$f(x + iy) = \tilde{f}_1(x, y) + i\tilde{f}_2(x, y)$$

pro $x + iy$ z definičního oboru f .

- (1) **(Cauchy-Riemannovy podmínky)** Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné, právě když \tilde{f} má v bodě (a, b) totální diferenciál a platí

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a, b) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b).$$

- (2) Existuje-li $f'(z)$, je Jakobiho determinant \tilde{f} v bodě (a, b) roven $|f'(z)|^2$. Speciálně, Jakobiho matice \tilde{f} v bodě (a, b) je regulární, právě když $f'(z) \neq 0$.

Definice:

- Nechť $M \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je **holomorfní na množině M** , jestliže existuje otevřená množina $G \supset M$ taková, že f má derivaci (podle komplexní proměnné) v každém bodě množiny G .
- Funkce holomorfní na \mathbb{C} se nazývá **celá funkce**.

Cestou neboli **po částech hladkou křivkou** v \mathbb{C} rozumíme křivku $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, pro kterou existuje takové dělení $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$, že pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy C^1 na $[s_{j-1}, s_j]$ (tj. derivace φ' je spojitá na (s_{j-1}, s_j) a má v krajních bodech s_{j-1} a s_j vlastní jednostranné limity).

Je-li navíc $f : \langle \varphi \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **integrál funkce f podél cesty φ** vzorcem

$$\int_{\varphi} f = \int_{\varphi} f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt,$$

kde integrál na pravé straně je zobecněný Riemannův, tj. roven

$$\sum_{j=1}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Věta 3:

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G . Pak pro každou cestu $\varphi : [a, b] \rightarrow G$ platí $\int_{\varphi} f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Speciálně, je-li φ uzavřená cesta v G , pak $\int_{\varphi} f = 0$.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Ω je **souvislá** (tj. pro každou neprázdnou $G \subset \Omega$ takovou, že G i $\Omega \setminus G$ jsou otevřené množiny, platí $G = \Omega$).

Definice:

Otevřenou souvislou podmnožinu \mathbb{C} nazýváme **oblast**.

Definice:

Nechť φ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$. Pak **index bodu a vzhledem ke křivce φ** je definován vzorcem

$$\text{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z-a} dz.$$

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina a $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že bod z_0 je **hromadným bodem množiny M** , jestliže každé okolí bodu z_0 obsahuje nějaký bod množiny M různý od z_0 . Je-li navíc $\Omega \subset \mathbb{C}$ množina obsahující M , říkáme, že M je **izolovaná v Ω** , jestliže nemá v Ω žádný hromadný bod.

Definice. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina.

- (i) Symbolem $H(G)$ budeme značit množinu všech komplexních funkcí holomorfních na G .
- (ii) Funkce $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ se nazývá **meromorfní**, jestliže je spojitá na G a existuje množina $M \subset G$, která je izolovaná v G (tj. nemá v G hromadný bod), taková, že f je holomorfní na $G \setminus M$.
- (iii) Množinu všech funkcí meromorfních na G značíme $M(G)$.

Poznámka. V bodech výjimečné množiny M z definice má meromorfní funkce **nejvýše pól** (tj. buď pól nebo odstranitelnou singularitu).

Definice. **Řetězcem** rozumíme výraz tvaru

$$(*) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou cesty. Řetězec $(*)$ se nazývá **cykl**, pokud jsou cesty $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ uzavřené.

- **obraz řetězce Γ** jako

$$\langle \Gamma \rangle = \langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle \cup \cdots \cup \langle \varphi_n \rangle;$$

- je-li $f : \langle \Gamma \rangle \rightarrow \mathbb{C}$ spojitá, pak **integrál funkce f podél Γ** jako

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f + \cdots + \int_{\varphi_n} f;$$

Je-li Γ cykl a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$, pak **index bodu a vzhledem k cyklu Γ** je

$$\text{ind}_\Gamma a = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z-a} dz.$$

Věta 2 (globální Cauchyova věta). Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\text{ind}_\Gamma a = 0$. Pak pro každou funkci f holomorfní na Ω platí

$$\int_\Gamma f = 0$$

a

$$f(z) \cdot \text{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \quad z \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle.$$

Věta 14 (Cauchyův vzorec pro vyšší derivace). Nechť f je holomorfní na $\overline{U(a,r)}$ (kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$). Pak f má na $U(a,r)$ derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z \in U(a,r)$ platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw,$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r .

Důsledek. Je-li f holomorfní na množině $M \subset \mathbb{C}$, je i f' holomorfní na M .

Věta 21: O jednoznačnosti

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f, g jsou funkce holomorfní na Ω . Jestliže množina

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v Ω (tj. není izolovaná v Ω), pak $f = g$ na Ω .

Definice:

Laurentovou řadou o středu $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$(*) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. Regulární částí řady $(*)$ rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

hlavní částí řady $(*)$ rozumíme symbol

$$(**) \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n.$$

Říkáme, že **hlavní část řady (*) konverguje (v bodě z , absolutně, stejnoměrně na množině M , lokálně stejnoměrně na množině M , atp.)**, pokud příslušnou vlastnost má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}.$$

Součet této řady nazveme **součtem hlavní části řady (*)** a značíme jej rovněž (**).

Říkáme, že **řada (*) konverguje (v bodě z , absolutně, stejnoměrně na množině M , lokálně stejnoměrně na množině M , atp.)**, pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. **Součtem řady (*)** rozumíme součet součtu regulární části a součtu hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n.$$

Definice:

Nechť $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $a \in \mathbb{C}$. Pak označme

$$P(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Tuto množinu nazveme **mezikružím o středu a , vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R** .

Věta 3:

Mějme Laurentovu řadu (*). Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$, pro která platí:

- Regulární část řady (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ a diverguje pro $|z-a| > R$.
- Hlavní část řady (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$ a diverguje pro $|z-a| < r$.

Je-li $r < R$, pak řada (*) konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na mezikruží $P(a, r, R)$ a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží pak nazýváme **mezikružím konvergence řady (*)**.

Věta 6:

Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pak f je v $P(a, r, R)$ součtem Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

o středu a , která na $P(a, r, R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r, R)$ je libovolné a φ_ρ je jako ve Větě 4.

Definice:

Nechť f je holomorfní funkce v $P(a, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Nechť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

je Laurentova řada funkce f v $P(a, R)$. Pak **reziduem funkce f v bodě a** rozumíme číslo

$$\text{res}_a f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} f,$$

kde $\rho \in (0, R)$ a φ_ρ je jako ve Větě 4.

Věta 3 (obecná reziduová věta). Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\text{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť $M \subset \Omega$ je izolovaná v Ω , $M \cap \langle \Gamma \rangle = \emptyset$ a f je funkce holomorfní v $\Omega \setminus M$. Pak platí:

$$\int_{\Gamma} f = 2\pi i \sum_{a \in M} \text{ind}_\Gamma a \cdot \text{res}_a f.$$

V sumě na pravé straně přitom je jen konečně mnoho nenulových sčítanců.