I. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

Definice 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|: X \to [0,\infty)$ nazýváme *normou* na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem.*

Tvrzení 2. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X.

(b) Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na X.

(c) Zobrazení $+: X \times X \to X$ a $\cdot: \mathbb{K} \times X \to X$ jsou spojitá.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \le r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Definice 3. *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Tvrzení 4. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.

(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

Definice 5. Nechť P je metrický prostor a ρ, σ jsou metriky na P. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou *ekvivalentní*, pokud $x_n \overset{\rho}{\to} x$, právě když $x_n \overset{\sigma}{\to} x$ pro $\{x_n\} \subset P$, $x \in P$. Řekneme, že metriky ρ a σ jsou *skoro stejné*, pokud existují $A, B > 0$ taková, že $A\sigma(x, y) \le \rho(x, y) \le B\sigma(x, y)$ pro všechna $x, y \in P$.

Tvrzení 6. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a ρ_1, ρ_2 jsou příslušné metriky. Pak ρ_1 a ρ_2 jsou skoro stejné, právě když jsou ekvivalentní.*

Definice 7 (ekvivalentní normy)**.** Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le B\|x\|_2$.

Věta 8. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Lemma 9. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.*

Tvrzení 10. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X,\|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X,\|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.

(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

(iii) Zobrazení $Id: (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.

(iv) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.

Definice 11. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *konvexní kombinací* vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \ge 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Fakt 12. *Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.*

Definice 13. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. *Konvexním obalem* M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 14. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak*

$$\operatorname{conv} M = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Definice 15. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Fakt 16. *Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x,r)$, resp. $B(x,r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0,r) \subset M$, resp. $B(0,r) \subset M$.*

Definice 17. Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme *uzavřený lineární obal* M jako $\overline{\operatorname{span}}\, M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a *uzavřený konvexní obal* M jako $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 18. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.*

Tvrzení 19. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}}\, M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}}\, M = \overline{\operatorname{conv} M}$.*

Věta 20. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak* $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ *je uzavřený.*

Důsledek 21. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

Věta 22.

(a) Prostor c_0 je separabilní.

(b) Prostor ℓ_∞ je neseparabilní.

(c) Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $C(K)$ separabilní.

(d) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná a $1 \leq p < \infty$. Pak prostor $L_p(\Omega, \lambda)$ je separabilní.

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 23. Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *konverguje* k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je *absolutně konvergentní*, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Fakt 24. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X. Pak*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Věta 25 (Test úplnosti)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Definice 26. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme *zobecněnou řadou*. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\|x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Definice 27. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset\colon \left\|\sum_{\gamma\in F'} x_\gamma\right\| < \varepsilon.$$

Věta 28. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X. Pak platí:*

(a) Její součet je určen jednoznačně.

(b) Splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

(c) Je-li $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = x$, pak $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_{\pi(\gamma)} = x$ pro každou permutaci (tj. bijekci) $\pi\colon \Gamma \to \Gamma$.

(d) $\left(\|x_\gamma\|\right)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

Tvrzení 29. *Nechť $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když*

$$\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathcal{F}(\Gamma)\right\} < +\infty.$$

Potom platí

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\left\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F\in\mathcal{F}(\Gamma)\right\}.$$

Věta 30. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

(b) Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.

(c) Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda\subset\Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ konvergentní.

Tvrzení 31.

(a) Nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x\in X$. Pak i řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje k x.

(b) Nechť řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ v normovaném lineárním prostoru X konverguje k $x\in X$ a nechť zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku. Pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje k x.

(c) Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost nezáporných čísel. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ (a obě pak mají stejný součet).

Důsledek 32. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\}\subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je absolutně konvergentní.*

Definice 33. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x\in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *konverguje bezpodmínečně* (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

Věta 34. *Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně.

(ii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ke stejnému součtu.

(iii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$.

Věta 35. *Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.*
Každá řada v $\mathbb{R}$ je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.

3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X\to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineární*, pokud $T(x+y) = T(x)+T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y\in X$ a $\alpha\in\mathbb{K}$.

Fakt 36. *Nechť X, Y jsou vektorové prostory, $T\colon X\to Y$ je lineární zobrazení a $M\subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní.*

Tvrzení 37. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X\to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je spojité.

(ii) T je spojité v jednom bodě.

(iii) *T je spojité v 0.*

(iv) *Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(v) *T je lipschitzovské.*

(vi) *T je stejnoměrně spojité.*

(vii) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*

(viii) *$T(B_X)$ je omezená.*

(ix) *$T\big(U(0,\delta)\big)$ je omezená pro nějaké $\delta > 0$.*

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 38. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(a) *$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) *$\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.*

(c) *$\|T\| = \inf\{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X\}$.*

Fakt 39. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.*

Fakt 40. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.*

Věta 41. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachův prostor.*

Definice 42. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej *duálním prostorem* k prostoru X.

Věta 43. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

Lemma 44. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $f \in X^*$. Pak pro každé $x \in X$ platí $|f(x)| = \|f\| \operatorname{dist}(x, \operatorname{Ker} f)$.*

Definice 45. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- *izomorfní*, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- *izometrické*, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- *izomorfně vnořen* do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- *izometricky vnořen* do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Poznámka 46. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 47. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) *$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.*

(c) *Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený v Y.*

Fakt 48. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$.*

(a) *Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.*

(b) *Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.*

Věta 49. *Nechť X, $\widehat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\widehat{X}$ a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X},Y)$ rozšiřující T, tj. $\widehat{T}\restriction_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

4. Konečněrozměrné prostory

Lemma 50 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918)). *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že* $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Věta 51. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.

(iii) B_X je kompaktní.

(iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.

(v) Každá lineární forma na X je spojitá.

(vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 52. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 53. Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme *faktorprostorem* prostoru X podle Y nebo též *kvocientem* X podle Y. Dále definujeme tzv. *kanonické kvocientové zobrazení* $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}\|_{X/Y} &= \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \\ &= \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y), \end{aligned}$$

Tato norma se nazývá *kanonická kvocientová norma*.

Tvrzení 54. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

Věta 55. *Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

Definice 56. Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je *direktním (též algebraickým) součtem* A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá *algebraický doplněk* A v X.

Definice 57. Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá *(lineární) projekce*, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 58. *Nechť X je vektorový prostor.*

(a) Je-li $P\colon X \to X$ lineární projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.

(b) Je-li Y podprostor X a $P\colon X \to Y$ lineární zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.

Tvrzení 59. *Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$. Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.*

Věta 60. *Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Prostor Y má algebraický doplněk v X.

(b) Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y; speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

Definice 61. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak *kodimenzí* Y (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 62. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je *topologickým součtem* A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá *topologický doplněk* A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je *komplementovaný* (v X).

Věta 63. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory.*

(a) Je-li $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, jsou Y a Z uzavřené.

(b) Je-li X Banachův a $X = Y \oplus Z$, kde Y a Z jsou uzavřené, je $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$.

Věta 64. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když zobrazení $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ je izomorfismus.*

6. Hilbertovy prostory

Definice 65. *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem.*

Tvrzení 66 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak*

(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ pro každé $x, y \in X$.

(ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X.

Definice 67. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Tvrzení 68. *Nechť $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak funkce $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

Fakt 69. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle.$$

Tvrzení 70 (rovnoběžníkové pravidlo)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Tvrzení 71 (polarizační vzorec). *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y\rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

Důsledek 72. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

Věta 73. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak na prostoru $X \oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y, a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X \oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

Definice 74. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x, y\rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* A.

Fakt 75 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.). *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \dots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Lemma 76. *Ortogonální doplněk množiny v prostoru se skalárním součinem je uzavřený podprostor.*

Lemma 77. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y\rangle = \langle z, y\rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.*

Věta 78 (Frigyes Riesz, 1934). *Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Lemma 79 (F. Riesz, 1934). *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.*

Věta 80 (F. Riesz, 1934). *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_{\mathrm{t}} Y^\perp$ a projekce $P_Y\colon H \to Y$ příslušná rozkladu $H = Y \oplus Y^\perp$ má následující vlastnosti:*

(i) $\|P_Y(x) - x\| = \operatorname{dist}(x, Y) \le \|x\|$ *pro každé* $x \in H$,

(ii) $\|P_Y(x)\| \le \|x\|$ *pro každé* $x \in H$.

Věta 81. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

Definice 82. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- *ortonormální*, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- *maximální ortonormální*, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Fakt 83. *Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.*

Věta 84. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

Lemma 85. *Nechť $\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální soustava v prostoru se skalárním součinem a $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde x_γ jsou skaláry. Pak $x_\gamma = \langle x, e_\gamma\rangle$ pro každé $\gamma \in \Gamma$.*

Fakt 86. *Nechť $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem. Pak $\big\|\sum_{i\in F} a_i e_i\big\|^2 = \sum_{i\in F} |a_i|^2$ pro libovolné skaláry a_i, $i \in F$.*

Důsledek 87. *Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.*

Lemma 88. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_i\}_{i\in F}$ je konečná ortonormální množina v X. Označme $Y = \operatorname{span}\{e_i;\ i \in F\}$. Pak pro každé $x \in X$ je $x - \sum_{i\in F}\langle x, e_i\rangle e_i \in Y^{\perp}$.*

Věta 89 (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \le \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.*

Věta 90. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé $x \in X$.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

Důsledek 91. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

Věta 92 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907))**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T\colon H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

Tvrzení 93. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li* $\dim X = n \in \mathbb{N}$, *pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li* $\dim X = \infty$ *a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

Věta 94 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.*

Lemma 95. *Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy* $\operatorname{codim}\operatorname{Ker} f = 1$.

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

1. Hahnova-Banachova věta

Tvrzení 96. *Nechť X je komplexní vektorový prostor. Pak funkce $f\colon X \to \mathbb{C}$ je (komplexní) lineární forma, právě když* $\operatorname{Re} f$ *je reálně-lineární forma na $X_{\mathbb{R}}$ a platí* $\operatorname{Im} f(x) = -\operatorname{Re} f(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

Definice 97. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární funkcionál*, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p\colon X \to [0, +\infty)$ se nazývá *pseudonorma*, pokud platí

- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 98 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))**.** *Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.*

(a) Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

Věta 99 (Hahnova-Banachova)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

Důsledek 100. *Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \ne f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).*

Důsledek 101 (Duální vyjádření normy)**.** *Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.*

Věta 102 (Oddělování bodu a podprostoru)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f \restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

Věta 103. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.

(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

Definice 104. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. *anihilátor* množiny A jako

$$A^{\perp} = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. *zpětný anihilátor* jako

$$B_{\perp} = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Lemma 105. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*

(a) $A^{\perp}$ je uzavřený podprostor X^*,

(b) $B_{\perp}$ je uzavřený podprostor X,

(c) $(A^{\perp})_{\perp} = \overline{\operatorname{span}} A$,

(d) $(B_{\perp})^{\perp} \supset \overline{\operatorname{span}} B$.

2. Reprezentace duálů

Tvrzení 106. *Nechť X a Y jsou izometrické normované lineární prostory. Pak i prostory X^* a Y^* jsou izometrické.*

Definice 107. Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme *sdruženým exponentem* k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Věta 108 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)**.**

(a) Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I \colon \ell_1 \to c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(b) Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I \colon \ell_q \to \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I \colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} fg \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I \colon L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 109. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p. Pak zobrazení $I \colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

Definice 110. Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je *nezáporný*, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Fakt 111. *Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak Λ je monotónní, tj. $\Lambda(f) \leq \Lambda(g)$ kdykoli $f, g \in C(K)$ jsou reálné funkce splňující $f \leq g$. Dále Λ je automaticky spojitý a pro reálnou $f \in C(K)$ platí $|\Lambda(f)| \leq \Lambda(|f|)$. Tedy v reálném případě platí $\|\Lambda\| = \Lambda(1)$.*

Věta 112 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)**.** *Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.*

Věta 113 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)**.** *Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Věta 114. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.*

(a) Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I : Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

(b) Zobrazení $I : X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem

$$I(\widehat{f}) = f \restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^\perp$.

3. Druhý duál a reflexivita

Definice 115. Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme *druhým duálem*.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. *evaluační funkcionál* $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 116. Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá *kanonické vnoření X do X^{**}*.

Tvrzení 117. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}*

Tvrzení 118. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak* $\dim X^* = \dim X$*, a to i v případě, že* $\dim X = \infty$.

Věta 119. *Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.*

Definice 120. Banachův prostor X se nazývá *reflexivní*, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 121. *Každý Hilbertův prostor je reflexivní.*

Věta 122. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.

(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.

(d) Jsou-li X, Y reflexivní, je prostor $X \oplus_p Y$ reflexivní pro libovolné $1 \leq p \leq \infty$.

(e) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

Příklady 123.

(a) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(b) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(c) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

(d) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

III. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 124 (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Důsledek 125. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X,Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.*

Definice 126. Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 127 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Lemma 128 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0,s) \subset \overline{T(U(0,r))}$, pak dokonce $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.*

Důsledek 129 (S. Banach, 1929)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.*

Důsledek 130. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak platí:*

(a) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \leq c\|y\|$.

(b) Zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.

Definice 131. Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení f*. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, *má uzavřený graf*, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 132 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.*

IV. Lineární operátory

1. Duální operátory

Definice 133. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá *duální* (nebo též *adjungovaný*) operátor k T. (Ve Větě 134 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

Věta 134. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X,Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.

Věta 135. *Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, pak platí*

(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

(d) $\overline{\operatorname{Rng} T^*} \subset (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

(e) Jsou-li navíc X, Y Banachovy a $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak* $\operatorname{Rng} T^* = (\operatorname{Ker} T)^{\perp}$.

Tvrzení 136 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Tedy $T^{**}(\varepsilon_X(X)) \subset \varepsilon_Y(Y)$ a označíme-li $\varepsilon\colon Y \to \varepsilon_Y(Y)$, $\varepsilon = \varepsilon_Y$, a $S\colon \varepsilon_X(X) \to \varepsilon_Y(Y)$, $S = T^{**}\restriction_{\varepsilon_X(X)}$, pak $T = \varepsilon^{-1} \circ S \circ \varepsilon_X$.

Věta 137. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(a) T^* je prostý, právě když $\operatorname{Rng} T$ *je hustý v Y.*

(b) Je-li T izomorfismus na, pak T^* je izomorfismus na a platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(c) Je-li T izometrie na, pak T^* je izometrie na.

Jsou-li X, Y úplné, pak v (b) a (c) platí i opačné implikace.

2. Kompaktní operátory

Definice 138. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá *kompaktní operátor*, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá *konečněrozměrný*, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 139. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T : X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.

(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.

(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

Tvrzení 140. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$.*

(a) Je-li Z normovaný lineární prostor a Y je podprostor Z, pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.

(b) Je-li Z uzavřený podprostor Y a $\operatorname{Rng} T \subset Z$, *pak $T \in \mathcal{K}(X, Z)$.*

Věta 141. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.

(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.

(c) Pokud je Y Banachův prostor, pak $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.

(d) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.

(e) Pokud X a Y jsou úplné, $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ a $\operatorname{Rng} T$ *je uzavřený, pak $T \in \mathcal{F}(X, Y)$.*

Věta 142 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.*

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 143. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.*

Definice 144. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *vlastním číslem* operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme *vlastním prostorem* příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají *vlastní vektory* příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá *bodové spektrum* operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Věta 145. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

Lemma 146. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je invertibilní. Pak $\lambda \in \sigma(T)$, právě když $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T^{-1})$.*

Tvrzení 147. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$ je izomorfismus na. Pak $\sigma(T) \subset \left\{\lambda \in \mathbb{C};\ \frac{1}{\|T^{-1}\|} \leq |\lambda| \leq \|T\|\right\}$.*

Věta 148. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$.*

Tvrzení 149. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Jestliže $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$. Jestliže $T \in \mathcal{F}(X)$ a $\dim X > \dim \operatorname{Rng} T$, pak $0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

Věta 150. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$. Je-li X Banachův, pak $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.*

Věta 151 (Fredholmova alternativa)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Důsledek 152. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

Lemma 153. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Věta 154. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.*

Důsledek 155. *Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.*

Věta 156 (Druhá Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \left(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\right)_{\perp},$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \left(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\right)^{\perp}.$$

Věta 157 (Třetí Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

V. Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

1. Konvoluce funkcí

Definice 158. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. *Konvoluce funkce f s funkcí g* je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x - y) \,\mathrm{d}\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Věta 159. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.

(b) Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ na definičních oborech pravých stran.

(c) Nechť $1 \le p, q, r \le \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \ge 2$. Je-li $f \in L_p(\mu)$, $g \in L_q(\mu)$ a $h \in L_r(\mu)$, pak $(f * g) * h = f * (g * h)$ μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$.

Lemma 160. *Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je lebesgueovsky měřitelná.*

(a) Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je funkce $y \mapsto f(x - y)$ lebesgueovsky měřitelná na $\mathbb{R}^d$.

(b) Funkce $(x, y) \mapsto f(y)$ a $(x, y) \mapsto f(x - y)$ jsou lebesgueovsky měřitelné na $(\mathbb{R}^d)^2$.

Lemma 161. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \in L_1(\mu)$. Položíme-li $F(x, y) = f(y)g(x - y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^d$, pak $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Definice 162. Nechť $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x - y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 163. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak zobrazení $\tau : \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojité.*

Věta 164. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \le p, q \le \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^n$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$.

(b) Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

(c) Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D, pak $f * g$ je měřitelná na D.

(d) Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definována μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$.

(e) Nechť $1 \le p, q \le \infty$ splňují $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1$. Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, pak $f * g$ je definovaná μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_r(\mu)$ a platí $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$, kde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.

Definice 165. Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme *multiindexem* délky d. *Řádem multiindexu* α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme). Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ a $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$. Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Definice 166. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K});\ \operatorname{supp} \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá *prostor testovacích funkcí* na A.

Věta 167. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α délky d.*

Definice 168. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat *regularizačním jádrem* (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Věta 169. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

(a) Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

(b) Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \le p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.

Důsledek 170. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $1 \le p < \infty$. Pak množina $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).*

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

Definice 171. Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak *Fourierovou transformací funkce* f rozumíme funkci $\widehat{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

Definice 172. Prostorem $C_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d) = C_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Definice 173. Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|$.

Je-li $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

Lemma 174 (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1853), H. Lebesgue (1903))**.** *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak $\lim\limits_{\|t\|\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i\langle t,x\rangle}\,\mathrm{d}\mu_d(x)$* 0.

Věta 175. *Nechť $f,g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1,\dots,d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) Nechť $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle}f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y\widehat{f}$.

(c) Je-li $c > 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{c})$, pak $\widehat{h}(t) = c^d\widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(d) Je-li $h(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{h} = \overline{\widehat{f}}$.

(e) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = i t_j\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(f) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial\widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(g) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(h) $\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}g\,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d$.

Lemma 176. *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f \in L_1([a,+\infty))$. Předpokládejme dále, že f je absolutně spojitá na každém intervalu $[a,b]$, $b > a$, nebo že f' existuje vlastní na celém $[a,+\infty)$. Je-li $f' \in L_1([a,+\infty))$, pak $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.*

Lemma 177. *Nechť $f,g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, f,g mají (vlastní) derivaci v každém bodě $\mathbb{R}$ a platí $f, f' \in L_1(\mathbb{R})$, g je omezená a g' je spojitá a omezená. Pak $\int_{\mathbb{R}} f'g\,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}} fg'\,\mathrm{d}\lambda$.*

Lemma 178. *Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d,\lambda)$, $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je omezená a $j \in \{1,\dots,d\}$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ existují všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$, pak $\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial f}{\partial x_j}g\,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f\frac{\partial g}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\lambda$.*

Příklad 179. Definujme funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\prod_{j=1}^d \frac{1}{1+t_j^2},$$

funkce $\widehat{g}$ je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{g}\,\mathrm{d}\mu_d = 1$.

Lemma 180. *Nechť $f,g \in L_1(\mu_d)$. Položme $g_n(x) = n^d\widehat{g}(-nx)$ a $h_n(x) = g(\frac{x}{n})$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\widehat{f}(t)e^{i\langle t,x\rangle}h_n(t)\,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

Věta 181 (o inverzi)**.** *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x,t\rangle} \, \mathrm{d}\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek 182. *Fourierova transformace je prosté zobrazení.*

Důsledek 183. *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu_d)$ takové, že $\widehat{f}, \widehat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.*

Věta 184 (Michel Plancherel, 1910)**.** *Existuje právě jedna lineární izometrie $F\colon L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ na taková, že $F(f) = \widehat{f}$ pro každou $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.*

VI. Teorie distribucí

Lemma 185. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.*

(a) Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω. Jestliže $\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $\mu = 0$.

(b) Nechť $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}\lambda = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f = 0$ s. v. na Ω.

(c) Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.

Lemma 186. *Nechť $A, U \subset \mathbb{R}^d$ jsou takové, že $\operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^d \setminus U) > 0$. Pak existuje $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$, $\operatorname{supp} \varphi \subset U$ a $\varphi = 1$ na A.*

Důsledek 187. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní a $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $G \supset K$. Pak existují $U \subset G$ otevřená, $U \supset K$ a $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ taková, že $0 \le \varphi \le 1$ a $\varphi = 1$ na U.*

1. Slabé derivace

Tvrzení 188. *Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in C^1((a, b))$. Pak*

$$\int_a^b f'\varphi \, \mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \, \mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$.

Definice 189. Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$. Řekneme, že *funkce* $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$ je *slabou derivací* funkce f, jestliže

$$\int_a^b g\varphi \, \mathrm{d}\lambda = -\int_a^b f\varphi' \, \mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$. Řekneme, že borelovská komplexní *míra* μ na (a, b) je *slabou derivací* funkce f, jestliže

$$\int_a^b \varphi \, \mathrm{d}\mu = -\int_a^b f\varphi' \, \mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}((a, b))$.

Věta 190. *Slabá derivace funkce $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$ je určena jednoznačně. Přesněji, jsou-li $g_1, g_2 \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$ slabou derivací f, pak $g_1 = g_2$ skoro všude. Jsou-li borelovské komplexní míry μ_1, μ_2 na (a, b) slabou derivací f, pak $\mu_1 = \mu_2$. Jsou-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$ a borelovská komplexní míra μ na (a, b) slabou derivací f, pak $g \in L_1((a, b))$ a $\mu(A) = \int_A g \, \mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset (a, b)$.*

Tvrzení 191. *Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$. Pak f má nulovou slabou derivaci, právě když je s. v. konstantní (tj. existuje $c \in \mathbb{K}$ taková, že $f = c$ s. v. na (a, b)).*

Věta 192. *Nechť $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$.*

(a) Je-li f absolutně spojitá na $[a, b]$, pak má vlastní derivaci s. v., $f' \in L_1((a, b))$ a f' je slabou derivací f. Obráceně, má-li f slabou derivaci $g \in L_1((a, b))$, pak existuje funkce f_0 absolutně spojitá na $[a, b]$ taková, že $f = f_0$ s. v. Potom je $g = f_0'$ s. v.

Obecněji, f má slabou derivaci v $L_1^{\mathrm{loc}}((a, b))$, právě když existuje funkce f_0 lokálně absolutně spojitá na (a, b) taková, že $f = f_0$ s. v.

(b) Funkce f má slabou derivaci rovnou borelovské komplexní míře μ na (a, b), právě když existuje funkce f_0 konečné variace na $[a, b]$ taková, že $f = f_0$ s. v. V tom případě pro každý podinterval $(c, d) \subset (a, b)$ platí $\mu((c, d)) = [f_0]_c^d$.

2. Prostor testovacích funkcí a distribuce

Definice 193. Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ položme

$$\|\varphi\|_N = \max_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_\infty.$$

Pro $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pak definujeme

$$\rho(\varphi, \psi) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{2^N} \min\{\|\varphi - \psi\|_N, 1\}.$$

Věta 194. *Funkce ρ je translačně invariantní metrika na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Tato metrika má následující vlastnosti:*

(a) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- *(i) $\varphi_n \to \varphi$ v metrice ρ.*
- *(ii) $\|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$ pro každé $N \in \mathbb{N}_0$.*
- *(iii) Pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha \varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) Vektorové operace na $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (sčítání a násobení skalárem) jsou v ρ spojité.

(c) Je-li α multiindex délky d, pak zobrazení $\varphi \mapsto D^\alpha \varphi$ je spojité jakožto zobrazení z $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$ do $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \rho)$.

(d) Pro každou kompaktní $K \subset \mathbb{R}^d$ je $(\mathcal{D}(K), \rho)$ úplný metrický prostor.

Definice 195. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Řekneme, že funkcionál $\Phi\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ je spojitý, pokud pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $\Phi\restriction_{(\mathcal{D}(K),\rho)}$ spojitá. Spojité lineární funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$ se nazývají distribuce na Ω. Množinu všech distribucí na Ω značíme $\mathcal{D}(\Omega)^*$.

Věta 196. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda\colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- *(i) $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.*
- *(ii) Λ je spojitý v 0, tj. pro každou $K \subset \Omega$ kompaktní a pro každou posloupnost $\{\varphi_n\} \subset (\mathcal{D}(K), \rho)$ konvergující k 0 platí $\Lambda(\varphi_n) \to 0$.*
- *(iii) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \geq 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.*

Definice 197. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \geq 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_N$ pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, potom nejmenší N s touto vlastností nazveme *řádem distribuce* Λ. Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

3. Operace s distribucemi

Lemma 198. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ má všechny derivace až do řádu k omezené a nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leq k$. Pak*

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \varphi \,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} f D^\alpha \varphi \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Definice 199. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pro multiindex α délky d definujeme *derivaci D^α distribuce Λ* jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(D^\alpha \Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi).$$

Pro funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ definujeme *součin funkce f a distribuce Λ* jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi).$$

Tvrzení 200. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $f \in C^\infty(\Omega)$. Pak platí:*

(a) $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(c) Je-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.

(d) Je-li $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, pak $D^\alpha \Lambda_g = \Lambda_{D^\alpha g}$.

(e) Je-li $d = 1$, $\Omega = (a,b)$ a $g \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$, pak

- *$\Lambda'_g = \Lambda_h$, kde $h \in L_1^{\mathrm{loc}}((a,b))$, právě když h je slabou derivací g;*
- *$\Lambda'_g = \Lambda_\mu$, kde μ je borelovská komplexní míra na (a,b), právě když μ je slabou derivací g.*

Fakt 201. *Nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Pak existují konstanty $c^\alpha_{\beta,\gamma} \in \mathbb{N}$, $\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^d$, $|\beta|+|\gamma| \le |\alpha|$ takové, že pro každou otevřenou $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a každé $f,g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ platí*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\substack{\beta,\gamma\in\mathbb{N}_0^d\\ |\beta|+|\gamma|=|\alpha|}} c^\alpha_{\beta,\gamma} D^\beta f D^\gamma g.$$

Definice 202. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Řekneme, že posloupnost distribucí $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ konverguje k distribuci $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, pokud konverguje bodově, tj. pokud $\Lambda_n(\varphi) \to \Lambda(\varphi)$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Tvrzení 203. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená. Pak platí:*

(a) Jestliže posloupnost $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ konverguje k $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, pak

- *$D^\alpha\Lambda_n \to D^\alpha\Lambda$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$,*
- *$f\Lambda_n \to f\Lambda$ pro každou funkci $f \in C^\infty(\Omega)$.*

(b) Jsou-li $f_n, f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a jestliže pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ platí $\int_K |f_n - f|\,\mathrm{d}\lambda \to 0$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

(c) Je-li $K \subset \Omega$ kompaktní a $\varphi_n \to \varphi$ v $(\mathcal{D}(K),\rho)$, pak $\Lambda_{\varphi_n} \to \Lambda_\varphi$.

(d) Je-li $1 \le p \le \infty$ a $f_n \to f$ v $L_p(\Omega)$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

Věta 204. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $\{\Lambda_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)^*$ taková, že pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existuje $\Lambda(\varphi) = \lim_{n\to\infty}\Lambda_n(\varphi)$. Pak $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.*

Definice 205. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Řekneme, že otevřená množina $G \subset \Omega$ je *nulová* pro Λ, jestliže $\Lambda(\varphi) = 0$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(G)$.

Věta 206. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. Množina $G = \bigcup\{H \subset \Omega;\ H$ je nulová pro $\Lambda\}$ je nulová pro Λ a je to největší nulová množina pro Λ, tj. je-li $H \subset \Omega$ nulová pro Λ, pak $H \subset G$.*

Definice 207. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω. *Nosič distribuce* Λ definujeme jako $\operatorname{supp}\Lambda = \Omega \setminus G$, kde G je největší nulová množina pro Λ.

Věta 208. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a Λ je distribuce na Ω.*

(a) Je-li $f \in C(\Omega)$, pak $\operatorname{supp}\Lambda_f = \operatorname{supp} f$.

(b) Je-li μ borelovská komplexní míra na Ω, pak $\operatorname{supp}\Lambda_\mu = \operatorname{supp}\mu$.

(c) Pokud je $\operatorname{supp}\Lambda$ kompaktní, pak existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C \ge 0$ taková, že $|\Lambda(\varphi)| \le C\|\varphi\|_N$ pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Speciálně, Λ je konečného řádu.

(d) $\operatorname{supp}\Lambda = \{z\}$, právě když $\Lambda = \sum_{|\alpha|\le N} c_\alpha D^\alpha \Lambda_{\delta_z}$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a konstanty c_α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \le N$ ne všechny nulové.

Seznam vět ke zkoušce

- Tvrzení, která není třeba znát: 111, 157, 176, 177, 178, 192, 205-208
- Tvrzení, která není třeba znát s důkazem: 22, 71, 108, 109, 112, 113, 122(c,d,e), 123, 159(c), 164(e), 167, 175(e), 180, 185(c), 191, 201