Úvod do komplexní analýzy

Doc. RNDr. Ondřej Kalenda, PhD., DSc.

Texty k přednáškám – doplněny důkazy

Obsah

1 Úvod

1.1 Množina komplexních čísel

Definice:

Množinou komplexních čísel rozumíme množinu $\mathbb{R}^2$ (tj. množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel) s následujícími operacemi:

- sčítání a násobení reálným číslem (definovanými stejně jako v $\mathbb{R}^2$);
- násobení definované vzorcem

$$(x,y)\cdot(a,b)=(xa-yb,xb+ya),\qquad (x,y),(a,b)\in\mathbb{R}^2.$$

Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$.

Základní vlastnosti $\mathbb{C}$:

(1) Množina $\mathbb{C}$ s operacemi sčítání a násobení tvoří komutativní těleso, nulovým prvkem je $(0,0)$, jednotkovým prvkem je $(1,0)$. Inverzním prvkem k nenulovému prvku (x,y) je prvek $(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2})$.

(2) Zobrazení množiny $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ definované předpisem $x\mapsto(x,0)$ je tělesový izomorfismus $\mathbb{R}$ na $\{(x,y)\in\mathbb{C}:y=0\}$. Tudíž $\mathbb{R}$ budeme uvažovat jako podtěleso $\mathbb{C}$.

(3) Na $\mathbb{C}$ není definováno uspořádání. Na $\mathbb{C}$ ani nelze definovat uspořádání tak, aby bylo uspořádaným tělesem.

Proč právě $\mathbb{R}^2$?

- V $\mathbb{R}$ není řešitelná rovnice $x^2+1=0$, v $\mathbb{C}$ má každý polynom stupně alespoň 1 alespoň jeden kořen. (Dokážeme později.)
- Pro $n>2$ lze na $\mathbb{R}^n$ definovat „rozumné“ násobení jen pro $n=4$ (tzv. kvaterniony, které tvoří nekomutativní těleso) a pro $n=8$ (tzv. oktoniony nebo Cayleyho čísla, pro ně už násobení není ani asociativní).

Zápisy komplexního čísla:

- Označme $i=(0,1)$. Pak $i^2=(-1,0)$ a číslo i nazýváme **imaginární jednotkou**.
- **Algebraický zápis komplexního čísla:** $(x,y)=x+iy$. Přitom zkracujeme zápis $x+i0=x$ a $0+iy=iy$.
- **Maticový zápis komplexního čísla:**

$$(x,y)=x+iy=\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix}.$$

  Potom násobení komplexních čísel odpovídá násobení matic.

Definice:

Nechť $z=(x,y)=x+iy=\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix}$, kde $x,y\in\mathbb{R}$. Pak definujeme:

- $\operatorname{Re} z=x$ (**reálná část** komplexního čísla z);
- $\operatorname{Im} z=y$ (**imaginární část** komplexního čísla z);
- $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\det\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix}}$ (**absolutní hodnota** komplexního čísla z);
- $\overline{z}=x-iy$ (**komplexně sdružené číslo** ke komplexnímu číslu z).

Pro každá $z, w \in \mathbb{C}$ platí:

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

(2) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$;

(3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

(4) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$;

(5) $|\overline{z}| = |z|$.

$\mathbb{C}$ jako metrický prostor:

Při ztotožnění $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ je $|z|$ rovno eukleidovské normě z. Vzorec $d(z, w) = |z - w|$ definuje tedy **metriku** na $\mathbb{C}$. Tudíž víme například, co je to **okolí bodu** $U(a, r)$, **otevřená množina**, **uzavřená množina**, **konvergence posloupnosti** v $\mathbb{C}$, **spojitost a limita zobrazení** z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$, z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{R}$ i z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.

Poznámka:

Funkce $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto \overline{z}$ a $z \mapsto |z|$ jsou spojité na $\mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ jako vektorový prostor:

(1) $\mathbb{C}$ je vektorový prostor dimenze 2 nad $\mathbb{R}$. V tomto případě lineární zobrazení $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$ mají tvar

$$(x, y) \mapsto (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou libovolná.

(2) $\mathbb{C}$ je vektorový prostor dimenze 1 nad $\mathbb{C}$. V tomto případě mají lineární zobrazení $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$ tvar

$$z \mapsto z \cdot w,$$

kde $w \in \mathbb{C}$ je libovolné; při identifikaci $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ je to tvar

$$(x, y) \mapsto (x, y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolná.

1.2 Komplexní funkce reálné proměnné

Definice:

(1) **Komplexní funkcí reálné proměnné** rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

(2) Nechť $f : M \to \mathbb{C}$ je zobrazení. Pak definujeme funkce $\operatorname{Re} f : M \to \mathbb{R}$ a $\operatorname{Im} f : M \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f : &\quad x \mapsto \operatorname{Re}(f(x)), \quad x \in M, \\ \operatorname{Im} f : &\quad x \mapsto \operatorname{Im}(f(x)), \quad x \in M. \end{aligned}$$

(3) Nechť f je komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$. **Derivací funkce f v bodě** x rozumíme číslo

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$).

(4) Funkce $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ je **primitivní funkce k f na** (a, b), jestliže $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Věta 1:

Nechť $f : M \to \mathbb{C}$ je komplexní funkce reálné proměnné, $a \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{C}$. Pak platí

(1) $\lim_{x\to a+} f(x) = z$, právě když

$$\lim_{x\to a+} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} z \text{ a } \lim_{x\to a+} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} z.$$

Podobně pro limity zleva a oboustranné.

(2) f je spojitá (zleva, zprava) v bodě a, právě když obě funkce $\operatorname{Re} f$ a $\operatorname{Im} f$ jsou spojité (zleva, zprava) v bodě a.

(3) $f'(x)$ existuje, právě když existují vlastní derivace $(\operatorname{Re} f)'(x)$ a $(\operatorname{Im} f)'(x)$. Pak

$$f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x).$$

(4) Funkce $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ je primitivní funkce k f na (a, b), právě když $\operatorname{Re} F$ je primitivní funkcí k $\operatorname{Re} f$ na (a, b) a $\operatorname{Im} F$ je primitivní funkcí k $\operatorname{Im} f$ na (a, b).

Důkaz: Zřejmé

Definice:

Nechť f je komplexní funkce reálné proměnné. **Integrál (Riemannův, Newtonův, Lebesgueův) z funkce f od a do b** definujeme jako číslo

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f,$$

pokud oba integrály na pravé straně konvergují.

Věta 2:

Nechť $a < b$ jsou reálná čísla a $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak platí

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f| \le (b - a) \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Důkaz:

Pro důkaz první nerovnosti označme

$$w := \int_a^b f.$$

Pak protože levá strana je reálná, platí:

$$\left| \int_a^b f \right|^2 = w\overline{w} = \int_a^b f\overline{w} = \operatorname{Re} \int_a^b f\overline{w} = \int_a^b \operatorname{Re}(f\overline{w}) \le \int_a^b |f\overline{w}| = |w| \int_a^b |f|.$$

Pokud $w = 0$, pak tvrzení platí. Jinak vydělíme nerovnost $|w|$ a dostáváme tvrzení věty.

1.3 Komplexní funkce komplexní proměnné

Definice:

(1) **Komplexní funkcí komplexní proměnné** rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$.

(2) Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné a $a \in \mathbb{C}$. **Derivací funkce f podle komplexní proměnné v bodě** a (stručněji **derivací funkce f v bodě** a) rozumíme (komplexní) číslo

$$f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud limita na pravé straně existuje (v $\mathbb{C}$).

Poznámka:

(1) Pro derivaci podle komplexní proměnné platí věty o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce ve stejné podobě jako pro derivaci v $\mathbb{R}$.

(2) Má-li f v bodě $a \in \mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné, je v bodě a spojitá.

(3) Je-li f komplexní funkce komplexní proměnné, g komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$, pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

pokud obě derivace na pravé straně existují.

Věta 3:

Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné. Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ odpovídající f při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$; tj. takovou, že

$$f(x + iy) = \tilde{f}_1(x, y) + i\tilde{f}_2(x, y)$$

pro $x + iy$ z definičního oboru f.

(1) (**Cauchy-Riemannovy podmínky**) Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné, právě když $\tilde{f}$ má v bodě (a, b) totální diferenciál a platí

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a, b) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b).$$

(2) Existuje-li $f'(z)$, je Jacobiho determinant $\tilde{f}$ v bodě (a, b) roven $|f'(z)|^2$. Speciálně, Jakobiho matice $\tilde{f}$ v bodě (a, b) je regulární, právě když $f'(z) \neq 0$.

Důkaz:

(1)

$$f'(z) = u + iv = w \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} = w \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z) - hw}{h} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z) - hw}{|h|} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) - (h_1, h_2) \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}}{\|(h_1, h_2)\|} = (0, 0) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{zobrazení } (h_1, h_2) \mapsto (h_1, h_2) \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} \text{ je totální diferenciál } \tilde{f} \text{ v bodě } (a, b).$$

(2)

$$\det \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix} = u^2 + v^2 = |f'(z)|^2.$$

Poznámka:

Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená konvexní množina a $f : G \to \mathbb{C}$ splňuje $f'(z) = 0$ pro všechna $z \in G$, je f konstantní na G.

Definice:

- Nechť $M \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je **holomorfní na množině** M, jestliže existuje otevřená množina $G \supset M$ taková, že f má derivaci (podle komplexní proměnné) v každém bodě množiny G.
- Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celá funkce**.

2 Mocninné řady a elementární celé funkce

2.1 Mocninné řady - připomenutí

Definice:

Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Nekonečnou řadu funkcí tvaru

$$\text{(M)} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

nazýváme **mocninnou řadou o středu** a.

Poloměrem konvergence řady (M) rozumíme $R \in [0, +\infty]$ definované vzorcem

$$R = \sup\{r \in [0, +\infty) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \text{ konverguje}\}.$$

Množinu

$$U(a, R) = \{z \in \mathbb{C} \, |z-a| < R\},$$

pak nazýváme **kruhem konvergence** řady (M).

Věta 1:

(1) Každá mocninná řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na svém kruhu konvergence.

(2) Položme $L = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Pak poloměr konvergence řady (M) je

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & L > 0, \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$

(3) Existuje-li $\lim_{n \to \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$, rovná se číslu L z předchozího bodu.

(4) Mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ mají stejný poloměr konvergence jako řada (M).

Důkaz:

(1) Weierstrassovo kritérium.

(2) Cauchyho odmocňovací kritérium.

(3) d'Alembertovo kritérium.

(4) Plyne z (2).

Věta 2: Derivace a integrace mocninné řady

Uvažujme řadu (M) a nechť $R > 0$ její poloměr konvergence. Definujme funkci $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in U(a, R)$. Pak platí:

(1) Funkce f je spojitá na $U(a, R)$.

(2) Funkce f je holomorfní na $U(a, R)$ a platí

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \qquad z \in U(a, R).$$

(3) Funkce $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ je holomorfní na $U(a, R)$ a pro každé $z \in U(a, R)$ platí $F'(z) = f(z)$.

Důkaz:

(1) Mocninná řada (M) je lokálně stejnoměrně konvergentní v $U(a,R)$, tedy spojitá.

(2) Mocninná řada $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}$ konverguje lokálně stejnoměrně na $U(a,R)$, tedy lze přehodit derivaci a sumu.

(3) Bod (2) aplikujeme na $F(z)$.

2.2 Elementární celé funkce

Definice:

Pro $z \in \mathbb{C}$ definujme

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Funkci exp nazýváme **exponenciální funkce**, krátce **exponenciála**. Dále označme $e = \exp(1)$.

Věta 3: Vlastnosti exponenciální funkce

Platí:

(E1) Funkce exp je definovaná na $\mathbb{C}$, je na $\mathbb{C}$ holomorfní a platí $\exp'(z) = \exp(z)$ pro $z \in \mathbb{C}$.

(E2) $\exp(0) = 1$.

(E3) $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ pro $z, w \in \mathbb{C}$.

(E4) $\exp(z) \neq 0$ pro $z \in \mathbb{C}$.

(E5) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ pro $z \in \mathbb{C}$.

(E6) Funkce exp zobrazuje $\mathbb{R}$ na interval $(0, +\infty)$, je na $\mathbb{R}$ rostoucí a (ryze) konvexní.

(E7) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ pro $z \in \mathbb{C}$.

Důkaz:

(E1) Poloměr konvergence je $+\infty$ podle V1 (3).

$$\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{pro } n \to \infty \quad \Rightarrow \quad R = +\infty.$$

Tedy platí podle V2.

(E2) Z definice.

(E3) Volme $w \in \mathbb{C}$ pevné, definujme funkci $f(z) = \exp(z+w)\exp(-z)$. Pak $f(0) = \exp(w)$ a f je konstantní, protože

$$f'(z) = \exp(z+w)\exp(-z) + (-1)\exp(z+w)\exp(-z) = 0.$$

Tedy $f(z) = \exp(z+w)\exp(-z) = \exp(w)$ pro každé $z \in \mathbb{C}$. Volme $w = x+y$, $z = -y$, pak

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

(E4) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $1 = \exp(0) = \exp(z)\exp(-z)$.

(E5) Plyne z vlastností funkce $z \mapsto \overline{z}$ a toho, že $\frac{1}{n!}$ je z $\mathbb{R}$.

(E6) Podle **(E5)** zobrazuje exp $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$. $\exp(0) = 1$ a $\exp(z) \neq 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$, ze spojitosti tedy $\exp(z) > 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$ (také $\exp'(z) > 0$ a $\exp''(z) > 0$ pro každé $z \in \mathbb{C}$). Dále platí:

$$\exp(n) = \exp(1)^n = e^n \to +\infty \quad \text{pro } n \to +\infty,$$

$$\exp(-n) = \exp(-1)^n \to 0 \quad \text{pro } n \to +\infty.$$

(E7) Platí:

$$|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\overline{z}) = \exp(z+\overline{z}) = \exp(2\operatorname{Re} z) = \exp(\operatorname{Re} z)^2.$$

Výraz lze odmocnit, protože $\exp(\operatorname{Re} z) > 0$ dle **(E6)**.

Definice:

Pro $z \in \mathbb{C}$ položme

- $\cos(z) = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$ (funkce **kosinus**);
- $\sin(z) = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$ (funkce **sinus**);
- $\cosh(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}$ (funkce **hyperbolický kosinus**);
- $\sinh(z) = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}$ (funkce **hyperbolický sinus**);

Věta 4: Vlastnosti goniometrických a hyperbolických funkcí

(1) Funkce cos, sin, cosh, sinh jsou definovány na $\mathbb{C}$, přičemž funkce cos a cosh jsou sudé a funkce sin a sinh jsou liché.

(2) $\cos(0) = \cosh(0) = 1$, $\sin(0) = \sinh(0) = 0$.

(3) Funkce cos, sin, cosh, sinh jsou holomorfní na $\mathbb{C}$ a pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned} \cos'(z) &= -\sin(z) & \qquad \cosh'(z) &= \sinh(z) \\ \sin'(z) &= \cos(z) & \qquad \sinh'(z) &= \cosh(z) \end{aligned}$$

(4) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\cosh(iz) = \cos(z), \quad \sinh(iz) = i\sin(z), \quad \exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z).$$

(5) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} & \qquad \cosh(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} & \qquad \sinh(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

(6) Funkce cos, sin, cosh a sinh nabývají na $\mathbb{R}$ reálných hodnot.

(7) Pro každá $z, w \in \mathbb{C}$ platí

$$\begin{aligned} \cos(z+w) &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) & \qquad \cosh(z+w) &= \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w) \\ \sin(z+w) &= \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) & \qquad \sinh(z+w) &= \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w) \end{aligned}$$

(8) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \qquad \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1.$$

(9) $\cos(2) < 0$, a tedy můžeme definovat

$$\pi = 2 \cdot \min\{x > 0 : \cos(x) = 0\}.$$

Pak platí $\pi < 4$.

(10) Na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$ je funkce sin rostoucí a konkávní, funkce cos klesající a konkávní; $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(11) $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$.

(12) Pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $\cos(z + \pi) = -\cos(z)$, $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$.

(13) Funkce sin a cos jsou periodické s periodou 2π; funkce cosh, sinh a exp jsou periodické s periodou $2\pi i$.

(14) Nechť $z, w \in \mathbb{C}$. Pak $\exp(z) = \exp(w)$, právě když $z - w$ je celočíselný násobek $2\pi i$.

(15) Nechť $z \in \mathbb{C}$. Pak $\sin(z) = 0$, právě když z je celočíselný násobek π.

(16) Funkce exp zobrazuje $\mathbb{C}$ na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Důkaz:

(1) Z definice.

(2) Z definice.

(3) Protože funkce exp je holomorfní. Derivace získáme zderivováním vzorců.

(4) Z definice.

(5) Z definice.

(6) Protože koeficienty mocninných řad jsou z $\mathbb{R}$.

(7) Ověříme výpočtem.

(8) Podle (7).

$$1 = \cos(0) = \cos(z + (-z)) = \cos(z)\cos(-z) - \sin(z)\sin(-z) = \cos^2(z) + \sin^2(z).$$

$$1 = \cosh(0) = \cosh(z + (-z)) = \cosh(z)\cosh(-z) + \sinh(z)\sinh(-z) = \cosh^2(z) - \sinh^2(z).$$

(9)

$$\cos 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} = \underbrace{1 - \frac{4}{2!} + \frac{16}{4!}}_{<0} + \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!} + \frac{2^{4n}}{(4n)!}\right)}_{\frac{2^{4n-2}}{(4n)!}\underbrace{(4-4n(4n-1))}_{<0}} < 0.$$

(10) Nechť $z \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Podle (iii) $\sin'(z) = \cos(z) \geq 0$, tedy funkce sin je rostoucí. $\sin(0) = 0$, tedy $\sin(z) \geq 0$. Z toho pak plyne, že cos je klesající. Konkávnost podobně určíme z druhých derivací. $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ a $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$. Pak z (7) plyne, že $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

(11) Plyne ze součtových vzorců.

(12) Plyne ze součtových vzorců.

(13) Plyne z (4) a (12).

(14) Nechť $\exp(z) = \exp(w)$, pak $\exp(z - w) = 1$. Označme $z - w = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Pak $\exp(x + iy) = 1$, tedy také $|\exp(x + iy)| = \exp(x) = 1$. Z toho plyne $x = 0$, protože funkce exp je prostá na $\mathbb{R}$. Tedy $\exp(iy) = 1 = \cos(y) + i\sin(y)$, proto musí platit $\cos(y) = 1$ a $\sin(y) = 0$, což je ekvivalentní s podmínkou, že y je celočíselný násobek 2π.

(15)

$$0 = \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} = e^{-iz} \quad \overset{(14)}{\Leftrightarrow} \quad iz - (-iz) = 2iz = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}, \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

(16) Z V3 **(E4)** víme, že funkce exp zobrazuje $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Nechť $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ libovolné, hledáme $z = x + iy$, aby $\exp(z) = w$. Číslo w lze napsat ve tvaru $w = |w|(u + iv)$, kde u, $v \in \mathbb{R}$, $u^2 + v^2 = 1$. Platí

$$|w| = |\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z) = \exp x.$$

Víme, že $|w| > 0$ a exp zobrazuje $\mathbb{R}$ na $(0, \infty)$ (V3 **(E6)**), tedy existuje $x \in \mathbb{R}$, že $|w| = \exp(x)$.
Dále chceme najít $y \in \mathbb{R}$ tak, aby $\exp(iy) = \cos(y) + i\sin(y) = u + iv$. Protože $u^2 + v^2 = 1$, u, $v \in [-1, 1]$. Víme, že cos je spojitý, $\cos(0) = 1$ a $\cos(\pi) = -1$, existuje tedy $y \in [0, \pi]$ takové, že $\cos(y) = \cos(-y) = u$. Pak protože $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ je $|\sin(y)| = v$, tedy buď $\sin(y) = v$, nebo $\sin(-y) = v$.
Máme tedy $z = x + iy$ takové, že platí

$$\exp(z) = \exp(x)(\cos(y) + i\sin(y)) = |w|(u + iv) = w.$$

2.3 Logaritmus, argument, obecná mocnina

Definice:

- **Reálný logaritmus**, tj. inverzní funkci k $\exp|_{\mathbb{R}}$ budeme značit ln.
- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ označme
$$\mathrm{Log}(z) = \{w \in \mathbb{C} : \exp(w) = z\}.$$
- Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. **Hlavní hodnotou logaritmu** čísla z nazýváme takové $w \in \mathrm{Log}(z)$, pro které $\mathrm{Im}\, w \in (-\pi, \pi]$. Hlavní hodnotu logaritmu čísla z značíme $\log(z)$.
- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definujme
$$\mathrm{Arg}(z) = \{\mathrm{Im}\, w : w \in \mathrm{Log}(z)\}$$
a
$$\arg(z) = \mathrm{Im} \log(z).$$
Číslo $\arg(z)$ nazýváme **hlavní hodnota argumentu** čísla z.

Věta 5:

(1) Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je $\mathrm{Log}(z) \neq \emptyset$ a platí $\mathrm{Log}(z) = \{\log(z) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$.

(2) Funkce log je inverzní funkcí k funkci $\exp|_{\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z \in (-\pi, \pi]\}}$.

(3) Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $\log(z) = \ln|z| + i \arg(z)$.

(4) Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí $z = |z|(\cos \arg(z) + i \sin \arg(z))$ (**goniometrický zápis komplexního čísla** z).

(5) Nechť $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Pak platí
$$\arg(z) = \begin{cases} \arcsin \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } \mathrm{Re}\, z > 0, \\ \arccos \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } \mathrm{Im}\, z > 0, \\ -\arccos \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|} = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } \mathrm{Im}\, z < 0. \end{cases}$$

(6) Funkce arg je spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(7) Funkce log je spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

(8) Funkce log je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a na této množině platí $\log'(z) = \frac{1}{z}$.

Důkaz:

(1) Plyne z V4 (14) a (16).

(2) Z definice.

(3) $\mathrm{Im} \log(z) = \arg(z)$ z definice.
Z V3 **(E7)** víme $\exp(\mathrm{Re} \log(z)) = |\exp(\log(z))| = |z|$, tedy $\mathrm{Re} \log(z) = \ln|z|$.

(4) $z = \exp(\log(z)) = \exp(\ln|z| + i \arg(z)) = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$.

(5) Vyjádříme si z následovně:
$$z = x + iy = \sqrt{(}x^2 + y^2) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$
Pak $\arg(z) = \alpha \in (-\pi, \pi)$, pro které
$$\cos(\alpha) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad \sin(\alpha) = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$
$$\begin{array}{lclcl} x > 0 & \Leftrightarrow & \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) & \Leftrightarrow & \alpha = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ y > 0 & \Leftrightarrow & \alpha \in (0, \pi) & \Leftrightarrow & \alpha = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ y < 0 & \Leftrightarrow & \alpha \in (-\pi, 0) & \Leftrightarrow & \alpha = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{array}$$

(6) Každý bod z $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ patří alespoň do jedné z polorovin ($x > 0$, $y > 0$ nebo $y < 0$), kde je dán spojitým vzorcem. Tedy funkce je spojitá v každém bodě.

(7) Reálná část je spojitá (víme z reálné analýzy). Imaginární část je spojitá podle bodu (6).

(8) Nechť $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$:

$$\begin{aligned}\log'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{\log(z)-\log(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{\log(z)-\log(z_0)}{\exp(\log(z))-\exp(\log(z_0))} \overset{\text{VOLSF}}{=} \\ &\overset{\text{VOLSF}}{=} \lim_{y\to\log(z_0)} \frac{y-\log(z_0)}{\exp(y)-\exp(\log(z_0))} = \frac{1}{\exp'(\log(z_0))} = \frac{1}{z_0}.\end{aligned}$$

Předpoklady věty o limitě složené funkce jsou splněny, protože funkce log je spojitá a prostá.

Definice:

Nechť $z, a \in \mathbb{C}$, přičemž $z \neq 0$. Pak definujeme

- $M_a(z) = \{\exp(aw) : w \in \mathrm{Log}(z)\}$ (**a-tá mocnina komplexního čísla** z)
- $m_a(z) = \exp(a\log(z))$ (**hlavní hodnota a-té mocniny komplexního čísla** z)
- Je-li $z > 0$, značíme $z^a = m_a(z) = \exp(a\ln(z))$.

Věta 6:

Nechť $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(1) Je-li $n \in \mathbb{Z}$, obsahuje množina $M_n(z)$ právě jeden prvek, a to prvek z^n, kde

$$z^0 = 1; \qquad z^n = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{n\text{-krát}} \text{ pro } n > 0; \qquad z^n = \frac{1}{z^{-n}} \text{ pro } n < 0.$$

(2) Je-li $n \in \mathbb{N}$, obsahuje množina $M_{1/n}(z)$ právě n prvků.

Důkaz:

(1) Když je $w \in \mathrm{Log}(z)$, znamená to, že $w = \log(z) + 2k\pi i$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Dále pak

$$\exp(nw) = \exp(n\log(z) + 2nk\pi i) = \exp(n\log(z)) = \begin{cases} (\exp(\log(z)))^n = z^n, & n > 0, \\ 1, & n = 0, \\ \dfrac{1}{(\exp(-n\log(z)))} = \dfrac{1}{z^{-n}}, & n < 0. \end{cases}$$

(2) Platí

$$\exp\left(\frac{1}{n}w\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln|z| + \frac{i}{n}\arg(z) + \frac{2k\pi i}{n}\right).$$

Pro k_1, k_2 vyjde totéž právě tehdy, když $k_1 - k_2$ je násobek n.

3 Křivkový integrál

3.1 Křivky a křivkový integrál v $\mathbb{C}$

Definice:

Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení uzavřeného intervalu do $\mathbb{C}$, tj. spojitou funkci $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla. Je-li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ křivka, pak

- **obrazem křivky** φ rozumíme její obor hodnot, tj. množinu

$$\langle\varphi\rangle = \varphi([a, b]) = \{\varphi(t) : t \in [a, b]\};$$

- **počátečním bodem křivky** φ rozumíme bod $\varphi(a)$, **koncovým bodem** bod $\varphi(b)$;
- křivku φ nazýváme **uzavřenou**, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- **opačnou křivkou k** φ rozumíme křivku $\dot{-}\varphi : [-b, -a] \to \mathbb{C}$ definovanou vzorcem $\dot{-}\varphi(t) = \varphi(-t)$;
- je-li navíc $\psi : [c, d] \to \mathbb{C}$ křivka, pro kterou $\psi(c) = \varphi(b)$, pak jejich **spojením** $\varphi \dot{+} \psi$ rozumíme křivku definovanou na intervalu $[a, b + d - c]$ vzorcem

$$(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b], \\ \psi(t - b + c), & t \in [b, b + d - c]; \end{cases}$$

- **délkou křivky** φ rozumíme

$$V(\varphi) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\}.$$

Křivku $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, nazýváme **kladně orientovaná kružnice o středu** a **a poloměru** r. Opačnou křivku nazýváme **záporně orientovaná kružnice**.

Křivku $\varphi(t) = a + t(b - a)$, $t \in [0, 1]$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, nazýváme **orientovaná úsečka** $[a, b]$.

Cestou neboli **po částech hladkou křivkou** v $\mathbb{C}$ rozumíme křivku $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, pro kterou existuje takové dělení $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$, že pro každé $j = 1, \ldots, n$ je funkce φ třídy C^1 na $[s_{j-1}, s_j]$ (tj. derivace φ' je spojitá na (s_{j-1}, s_j) a má v krajních bodech s_{j-1} a s_j vlastní jednostranné limity).

Je-li navíc $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **integrál funkce** f **podél cesty** φ vzorcem

$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde integrál na pravé straně je zobecněný Riemannův, tj. roven

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka:

Je-li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ cesta, pak $V(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$.

Věta 1:

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta.

(1) Nechť h je rostoucí zobrazení intervalu $[c, d]$ na interval $[a, b]$, které je třídy C^1. Pak

$$\int_{\varphi\circ h} f = \int_\varphi f \text{ pro každou spojitou } f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}.$$

(2) $\displaystyle\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_{\varphi} f$ pro každou spojitou $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$.

(3) Je-li $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ cesta splňující $\psi(c) = \varphi(b)$, pak

$$\int_{\varphi \dot{+} \psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \text{ pro každou spojitou } f : \langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle \to \mathbb{C}.$$

(4) $\displaystyle\left|\int_{\varphi} f\right| \leq V(\varphi) \cdot \max_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|$ pro každou spojitou $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$.

Důkaz:

(1) Plyne z věty o substituci.

(2) Plyne z věty o substituci.

(3) Plyne z věty o substituci a aditivity zobecněného Riemannova integrálu.

(4) Protože funknce f je spojitá a $\langle\varphi\rangle$ je kompaktní množina, nabývá f na $\langle\varphi\rangle$ maxima. Pak platí

$$\left|\int_{\varphi} f\right| = \left|\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(\varphi(t))|}_{\leq \max\limits_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|} |\varphi'(t)| \leq \max_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)| \int_a^b |\varphi'(t)| = \max_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)| V(\varphi).$$

Věta 2:

Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné spojitá na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$. Pak

$$f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[a,a+h]} f.$$

Důkaz:

Pro každou konstantu $c \in \mathbb{C}$ platí

$$\int_{[a,a+h]} c = \int_0^1 ch \,\mathrm{d}t = ch.$$

S využitím tohoto vztahu dostáváme

$$\left|\frac{1}{h}\int_{[a,a+h]} f(z) - f(a)\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\int_{[a,a+h]} (f(z) - f(a))\right)\right| \overset{\text{V1(4)}}{\leq} \frac{1}{|h|}|h| \underbrace{\max_{z\in[a,a+h]} |f(z) - f(a)|}_{\to 0}.$$

Definice:

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkci $F : G \to \mathbb{C}$ nazýváme **primitivní funkcí k f na G**, pokud $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in G$.

Věta 3:

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G. Pak pro každou cestu $\varphi : [a,b] \to G$ platí $\displaystyle\int_{\varphi} f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Speciálně, je-li φ uzavřená cesta v G, pak $\displaystyle\int_{\varphi} f = 0$.

Důkaz:

$$\int_\varphi f = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} (F\circ\varphi)'(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{j=1}^n (F(\varphi(s_j)) - F(\varphi s_{j-1})) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Věta 4: Charakterizace oblasti

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.

(1) Ω je **souvislá** (tj. pro každou neprázdnou $G \subset \Omega$ takovou, že G i $\Omega \setminus G$ jsou otevřené množiny, platí $G = \Omega$).

(2) Ω je **křivkově souvislá** (tj. pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje spojité zobrazení $\varphi : [0, 1] \to \Omega$, pro které $\varphi(0) = z$ a $\varphi(1) = w$).

(3) Každé dva body v Ω lze spojit lomenou čárou v Ω (tj. pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje konečná posloupnost bodů $z = u_0, u_1, \ldots, u_n = w$ taková, že pro každé $j = 1, \ldots, n$ úsečka spojující u_{j-1} a u_j leží celá v Ω).

Důkaz:

(3) $\Rightarrow$ (2) Lomená čára je křivka.

(2) $\Rightarrow$ (1) Předpokládejme, že Ω je nesouvislá, pak $\Omega = U \cup V$, kde U, V jsou otevřené, neprázdné a disjunktní množiny. Nechť $u \in U$ a $v \in V$, pak z křivkové souvislosti plyne, že existuje spojité zobrazení $\varphi : [0, 1] \to \Omega$ takové, že $\varphi(0) = u$ a $\varphi(1) = v$. Množiny $\varphi^{-1}(U)$, $\varphi^{-1}(V)$ jsou disjunktní, otevřené v intervalu $[0, 1]$ a neprázdné ($0 \in \varphi^{-1}(U)$, $1 \in \varphi^{-1}(V)$) a platí $\varphi^{-1}(U) \cup \varphi^{-1}(V) = [0, 1]$. Ale interval $[0, 1]$ je souvislá množina, tedy docházíme ke sporu.

(1) $\Rightarrow$ (3) Zvolme $a \in \Omega$ a definujme množinu $M := \{z \in \Omega : a$ lze spojit se z lomenou čarou v $\Omega\}$.

- $M \neq \emptyset$ (obsahuje a).
- M je otevřená. Nechť $z \in M$, pak existuje $r > 0$ takové, že $\mathcal{U}(z, r) \subset \Omega$, protože Ω je otevřená. Pro libovolné $w \in \mathcal{U}(z, r)$ pak úsečka zw leží v Ω. Vezmeme-li lomenou čáru z a do z a prodloužíme ji o zw, dostaneme lomenou čáru z a do w, tedy $\mathcal{U}(z, r) \subset M$.
- $\Omega \setminus M$ je otevřená. Nechť $z \in \Omega \setminus M$, pak existuje $r > 0$ takové, že $\mathcal{U}(z, r) \subset \Omega$, protože Ω je otevřená. Platí, že $\mathcal{U}(z, r) \subset \Omega \setminus M$, protože kdyby $w \in \mathcal{U}(z, r) \cap M$, pak vezmu lomenou čáru z a do w a prodloužím ji o úsečku wz, odtud pak $z \in M$.

Tedy $M = \Omega$, protože Ω je souvislá.

Definice:

Otevřenou souvislou podmnožinu $\mathbb{C}$ nazýváme **oblast**.

Věta 5: primitivní funkce a křivkový integrál

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.

(1) f má v Ω primitivní funkci.

(2) Křivkový integrál v Ω **nezávisí na cestě**, tj. kdykoli $\varphi : [a, b] \to \Omega$ a $\psi : [c, d] \to \Omega$ jsou dvě cesty splňující $\varphi(a) = \psi(c)$ a $\varphi(b) = \psi(d)$, pak $\displaystyle\int_\varphi f = \int_\psi f$.

(3) Pro každou uzavřenou cestu $\varphi : [a, b] \to \Omega$ je $\displaystyle\int_\varphi f = 0$.

DŮKAZ:

(1) ⇒ (3) Plyne z Věty 3.

(3) ⇒ (2) Pro φ a ψ ze znění věty platí

$$\int_\varphi f - \int_\psi f = \int_\varphi f + \int_{\dot{-}\,\psi} f = \int_{\varphi \dot{+} (\dot{-}\,\psi)} f = 0,$$

protože křivka $\varphi \dot{+} (\dot{-}\,\psi)$ je uzavřená křivka.

(2) ⇒ (1) Zvolme $a \in \Omega$ libovolné. Pro každé $z \in \Omega$ zvolme cestu φ_z z a do z v Ω (např. lomenou čáru). Definujme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$. Dokážeme, že F je primitivní funkce k f na Ω. Mějme $z \in \Omega$ libovolné, $r > 0$ tak, aby $\mathcal{U}(z, r) \subset \Omega$, $h \in C$, $0 < |h| < r$, pak platí

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\varphi_{z+h}} f - \int_{\varphi_z} f\right) = \frac{1}{h}\int_{(\dot{-}\,\varphi_z)\dot{+}\varphi_{z+h}} f = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f \overset{h\to 0}{\to} f(z).$$

Tedy $F'(z) = f(z)$.

3.2 Integrály a křivkové integrály závislé na parametru

Věta 6: O derivaci integrálu podle komplexní proměnné

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast. Nechť funkce $F : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ splňuje následující podmínky:

(1) Pro každé $z \in \Omega$ je funkce $t \mapsto F(t, z)$ měřitelná na intervalu I.

(2) Pro skoro všechna $t \in I$ má funkce $z \mapsto F(t, z)$ spojitou derivaci podle komplexní proměnné na Ω.

(3) Existuje $z_0 \in \Omega$, pro které je funkce $t \mapsto F(t, z_0)$ integrovatelná na I.

(4) Pro každé $z \in \Omega$ existuje U okolí z a integrovatelná funkce h na I, pro kterou platí $\left|\frac{\partial F}{\partial z}(t, w)\right| \leq h(t)$ pro všechna $w \in \Omega$ pro skoro všechna $t \in I$.

Potom funkce

$$g(z) = \int_I F(t, z)\,\mathrm{d}t, \qquad z \in \Omega$$

je holomorfní na Ω a pro $z \in \Omega$ platí

$$g'(z) = \int_I \frac{\partial F}{\partial z}(t, z)\,\mathrm{d}t.$$

DŮKAZ: Někdy jindy

Věta 7: O záměně křivkového integrálu a . . .

Nechť $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta.

(1) Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce a tyto funkce nechť na $\langle\varphi\rangle$ konvergují stejnoměrně k funkci f. Pak $\displaystyle\int_\varphi f_n \to \int_\varphi f$.

(2) Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce a tyto funkce nechť na $\langle\varphi\rangle$ konvergují bodově ke spojité funkci f. Je-li posloupnost funkce (f_n) stejně omezená na $\langle\varphi\rangle$, pak $\displaystyle\int_\varphi f_n \to \int_\varphi f$.

(3) Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a $F : \langle\varphi\rangle \times G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak funkce

$$g(w) = \int_\varphi F(z, w)\,\mathrm{d}z, \qquad w \in G$$

je spojitá na G.

(4) Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $F : \langle\varphi\rangle \times G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a parciální derivace funkce F podle druhé proměnné (tj. derivace funkce $w \mapsto F(z,w)$ podle komplexní proměnné) je spojitá na $\langle\varphi\rangle \times G$. Potom funkce

$$g(w) = \int_\varphi F(z,w)\,\mathrm{d}z, \qquad w \in G$$

je holomorfní na G a pro $w \in G$ platí

$$g'(w) = \int_\varphi \frac{\partial F}{\partial w}(z,w)\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz:

(1) Protože φ je po částech hladká a φ' je omezená, pak $f_n(\varphi(t))\varphi'(t) \rightrightarrows f(\varphi(t))\varphi'(t)$ na $[a,b]$ vyjma dělících bodů. Pak plyne z věty z reálné analýzy.

(2) $f_n(\varphi(t))\varphi'(t) \to f(\varphi(t))\varphi'(t)$ bodově na $[a,b]$ vyjma dělících bodů. Posloupnost $\{f_n(\varphi(t))\varphi'(t)\}$ je stejně omezená. Pak plyne z Lebesgueovy věty.

(3)

$$g(w) = \int_a^b F(\varphi(t),w)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkce $F(\varphi(t),w)$ je spojitá v proměnné w až na konečně mnoho bodů a měřitelná v proměnné t. Zvolme $w_0 \in G$ libovolné a najděme $\varepsilon > 0$ takové, že $\overline{\mathcal{U}(w_0,\varepsilon)} \subset G$. Protože F je spojitá, je také omezená na $\langle\varphi\rangle \times \overline{\mathcal{U}(w_0,\varepsilon)}$ a na tomto kompaktu platí $|F| \leq M$. Platí

$$|F(\varphi(t),w)\varphi'(t)| \leq M \sup \varphi' \quad \forall t \in [a,b],\ w \in \overline{\mathcal{U}(w_0,\varepsilon)},$$

tedy existuje integrovatelná majoranta. Pak podle věty o spojitosti podle parametru je g spojitá v bodě w_0. Bod w_0 jsme zvolili libovolně, proto g je spojitá.

(4)

$$g(w) = \int_a^b F(\varphi(t),w)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ověříme předpoklady Věty 6, pak to z ní plyne.

3.3 Spojité větve logaritmu, index bodu ke křivce

Věta 8:

Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která na $\langle\varphi\rangle$ nenabývá hodnoty 0. Pak existuje spojitá funkce $L : [a,b] \to \mathbb{C}$ taková, že $f(\varphi(t)) = e^{L(t)}$ pro $t \in [a,b]$. Jsou-li L_1 a L_2 dvě takové funkce, pak existuje $k \in \mathbb{Z}$, že $L_1(t) - L_2(t) = 2k\pi i$ pro $t \in [a,b]$.

Je-li navíc φ cesta, f je holomorfní na $\langle\varphi\rangle$ a f' spojitá na $\langle\varphi\rangle$, lze volit

$$L(t) = \log(f(\varphi(a))) + \int_a^t \frac{f'(\varphi(s))}{f(\varphi(s))}\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Důkaz:

Existence obecně – nedělal.

Jednoznačnost: Jestliže $e^{L_1(t)} = e^{L_2(t)}$ pak $e^{L_1(t)-L_2(t)} = 1$. Tedy $\frac{L_1-L_2}{2\pi i}$ je spojitá funkce na $[a,b]$, která nabývá jen celočíselných hodnot, což je konstanta.

Pro cestu: Definujme $L(t)$ vzorcem ze zadání. Chceme ukázat, že $e^{L(t)} = f(\varphi(t)),\ t \in [a,b]$. Definujme $g(t) = e^{L(t)}$. Pak pro všechna $t \in [a,b]$ až na konečně mnoho platí

$$g'(t) = e^{L(t)}\frac{f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))}\varphi'(t),$$

$$g'(t) - g(t)\frac{f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))}\varphi'(t) = 0,$$
$$\frac{g'(t)f(\varphi(t)) - g(t)f'(\varphi(t))\varphi'(t)}{f(\varphi(t))} = 0,$$
$$\frac{g'(t)(f\circ\varphi)(t) - g(t)(f\circ\varphi)'(t)}{((f\circ\varphi)(t))^2} = 0,$$
$$\left(\frac{g}{f\circ\varphi}\right)' = 0.$$

Funkce $g/f\circ\varphi$ je spojitá na $[a,b]$ a až na konečně mnoho bodů t má derivaci rovnou nule, tedy je to konstanta na $[a,b]$. V bodě a má hodnotu 1, tedy $g/f\circ\varphi = 1$ na $[a,b]$, z čehož dostáváme: $f\circ\varphi = g = e^L$.

Definice:

Nechť φ, f a L jsou jako ve Větě 8. Pak **přírůstkem logaritmu funkce** f **podél křivky** φ rozumíme číslo
$$\Delta_\varphi \log(f) = L(b) - L(a).$$

Věta 9:

Je-li φ cesta, f holomorfní na $\langle\varphi\rangle$ a f' spojitá na $\langle\varphi\rangle$, pak
$$\Delta_\varphi \log(f) = \int_\varphi \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Důkaz:

Plyne z Věty 8 a toho, že
$$\int_\varphi \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_a^b \frac{f'(\varphi(t))}{f(\varphi(t))}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka:

Později dokážeme, že je-li f holomorfní, je f' automaticky spojitá.

Definice:

Nechť φ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle$. Pak **index bodu** a **vzhledem ke křivce** φ je definován vzorcem
$$\operatorname{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Poznámka:

Je-li φ uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C}\setminus\langle\varphi\rangle$, pak $\operatorname{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i}\Delta_\varphi \log(z-a)$.

Definice:

Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina. Množinu $A \subset M$ nazveme **komponentou množiny** M, je-li maximální souvislou podmnožinou M (tj. je-li A souvislá a přitom každá množina B splňující $A \subsetneqq B \subset M$ je nesouvislá).

Věta 10:

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak každá její komponenta je otevřená množina.

Důkaz:

Buď A komponenta Ω a $a \in A$, pak

$$A = \bigcup \{B \subset \Omega \text{ souvislá}, \ a \in B\},$$

což je souvislá množina. Protože Ω je otevřená, pak existuje $r > 0$ takové, že $\mathcal{U}(a, r) \subset \Omega$, ale $\mathcal{U}(a, r)$ je souvislá, tedy $\mathcal{U}(a, r) \subset A$.

Věta 11: Vlastnosti funkce $\operatorname{ind}_\varphi a$

Nechť φ je uzavřená cesta. Pro $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ položme $\iota(a) = \operatorname{ind}_\varphi a$.

(1) Funkce ι nabývá jen celočíselných hodnot.

(2) Funkce ι je konstantní na každé komponentě množiny $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$.

(3) Funkce ι je rovna nule na neomezené komponentě množiny $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$.

Důkaz:

(1) Plyne z toho, že φ je uzavřená a

$$\iota(a) = \frac{1}{2\pi i} \Delta_\varphi \log(z - a).$$

(2) Z Věty 7 bod (3) plyne, že ι je spojitá na $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$

(3) Existuje $r > 0$ takové, že $\langle \varphi \rangle \subset \mathcal{U}(0, r)$. Pro $|a| > r$ platí

$$|\iota(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z - a} \,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{1}{2\pi} V(\varphi) \frac{1}{|a| - r} \overset{|a| \to \infty}{\to} 0.$$

Poznámka:

(1) Je-li φ kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r, pak

$$\operatorname{ind}_\varphi z = \begin{cases} 1 & \text{pro } z \in U(a, r), \\ 0, & \text{je-li } |z - a| > r. \end{cases}$$

(2) Platí **Jordanova věta**: Je-li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ uzavřená cesta taková, že φ je prostá na $[a, b)$, pak množina $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ má právě dvě komponenty – jednu neomezenou (na ní je index roven nule) a jednu omezenou (na ní je index roven buď 1 nebo -1).

(3) Platí následující **propichovací věta**: Nechť φ je uzavřená cesta, $a, b \in \mathbb{C}$ taková, že $b - a > 0$, úsečka spojující body a, b protíná $\langle \varphi \rangle$ v jediném bodě z_0, ten je různý od a, b, existuje jediné t_0, pro které $\varphi(t_0) = z_0$, a $\operatorname{Im} \varphi'(t_0) \neq 0$. Pak

$$\operatorname{ind}_\varphi a - \operatorname{ind}_\varphi b = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \varphi'(t_0).$$

3.4 Lokální Cauchyova věta a její důsledky

Definice:

Nechť $a, b, c \in \mathbb{C}$. **Trojúhelníkem** $\triangle abc$ rozumíme konvexní obal množiny $\{a, b, c\}$, tj. nejmenší konvexní množinu obsahující body a, b, c. **Obvodem trojúhelníka** $\triangle abc$ rozumíme křivku

$$\partial \triangle abc = [a, b] \dotplus [b, c] \dotplus [c, a].$$

Věta 12: Cauchy-Goursatova věta pro trojúhelník

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f je holomorfní funkce na Ω. Pak

$$\int_{\partial \triangle abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \triangle abc \text{ obsažený v } \Omega.$$

Důkaz:

Pokud a, b, c leží na přímce, pak věta platí i pro f, která je pouze spojitá.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že

$$\int_{\partial \triangle abc} f = I \neq 0.$$

Tento integrál se dá napsat jako součet integrálů přes čtyři menší trojúhelníky

$$\int_{\partial \triangle abc} f = \int_{\partial \triangle ab'c'} f + \int_{\partial \triangle c'ba'} f + \int_{\partial \triangle a'cb'} f + \int_{\partial \triangle a'b'c'} f.$$

Vytvoříme následující posloupnost trojúhelníků

$$\begin{aligned} \triangle_1 &:= \triangle abc, \\ \triangle_2 &:= \text{jeden ze čtyř menších, pro který platí } \left| \int_{\partial \triangle_2} f \right| \geq \frac{|I|}{4}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

pokračujeme indukcí. Dostáváme $\{\triangle_n\}$ klesající posloupnost uzavřených množin, jejichž diametr jde k nule. Podle Cantorovy věty platí

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \triangle_n = \{z_0\}.$$

Protože f je holomorfní, existuje $f'(z_0)$, tj.

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right) = 0.$$

Nechť $\varepsilon > 0$ libovolné. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| < \delta$:

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0|.$$

Jelikož průměr trojúhelníků $\triangle_n$ se blíží k nule, existuje n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$: $\triangle_n \subset \mathcal{U}(z_0, \delta)$. Pak pro $n \geq n_0$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{|I|}{4^{n-1}} &\leq \left| \int_{\partial \triangle_n} f(z) \, \mathrm{d}z \right| = \\ &= \left| \int_{\partial \triangle_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) \, \mathrm{d}z + \underbrace{\int_{\partial \triangle_n} \underbrace{(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))}_{\text{polynom, tedy má PF na } \mathbb{C}} \mathrm{d}z}_{= 0 \text{ podle V3}} \right| = \\ &= \left| \int_{\partial \triangle_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) \, \mathrm{d}z \right| \leq \\ &\overset{\text{V1(4)}}{\leq} \underbrace{V(\partial \triangle_n)}_{= \frac{1}{2^{n-1}} V(\partial \triangle_1)} \sup_{z \in \partial \triangle_n} \underbrace{|f(z) - f(z_0) - f'(z)(z - z_0)|}_{\leq \varepsilon |z - z_0| \leq \varepsilon \operatorname{diam} \triangle_n \leq \varepsilon V(\partial \triangle_n)} \leq \varepsilon (V(\partial \triangle_1))^2 \frac{1}{4^{n-1}}. \end{aligned}$$

Tedy $|I| \leq \varepsilon (V(\partial \triangle_1))^2$. Protože ε bylo libovolné, je $|I| = 0$, což je spor. Proto platí

$$\int_{\partial \triangle abc} f = 0.$$

Důsledek:

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $p \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je funkce spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak

$$\int_{\partial \triangle abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \triangle abc \text{ obsažený v } \Omega.$$

DůKAZ:

(1) Bod $p \notin \triangle abc$, pak plyne tvrzení z V12.

(2) Bod p je jeden z vrcholů $\triangle abc$. BÚNO $p = a$. Nechť $\varepsilon > 0$ libovolné, označ $b' = a + \varepsilon(b-a)$, $c' = a + \varepsilon(c-a)$.

$$\int_{\partial \triangle abc} f = \int_{\partial \triangle ab'c'} f + \underbrace{\int_{\partial \triangle b'bc} f + \int_{\partial \triangle cc'b'} f}_{= 0 \text{ podle V12}} = \int_{\partial \triangle ab'c'} f$$

$$\left| \int_{\partial \triangle abc} f \right| = \left| \int_{\partial \triangle ab'c'} f \right| \leq V(\partial \triangle ab'c') \max_{z \in \triangle abc} |f(z)| = \varepsilon V(\triangle abc) \max_{z \in \triangle abc} |f(z)|.$$

Protože ε bylo libovolné

$$\int_{\partial \triangle abc} f = 0.$$

(3) Bod p leží na straně $\triangle abc$.

$$\int_{\partial \triangle abc} f = \int_{\partial \triangle apc} f + \int_{\partial \triangle pbc} = 0$$

podle (2).

(4) Bod p leží uvnitř $\triangle abc$.

$$\int_{\partial \triangle abc} f = \int_{\partial \triangle ac'c} f + \int_{\partial \triangle c'bc} = 0$$

podle (3).

Definice:

Množina $M \subset \mathbb{C}$ se nazývá **hvězdovitá**, pokud existuje takové $a \in M$, že pro každé $b \in M$ je úsečka spojující body a, b celá obsažena v M.

Věta 13: Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina, $p \in \Omega$ a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která je holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak f má na Ω primitivní funkci, a tedy $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v Ω.

DůKAZ:

Nechť a je ten „bod hvězdovitosti“. Definujme

$$F(z) := \int_{[a,z]} f, \quad z \in \Omega.$$

Dokážeme, že $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in \Omega$. Zvolme $z \in \Omega$, nechť $r > 0$ tak, aby $\mathcal{U}(z,r) \subset \Omega$, $h \in \mathbb{C}$, $0 < |h| < r$, pak $z + h \in \mathcal{U}(z,r)$ a $\triangle a, z, z+h \subset \Omega$.

$$\begin{aligned} F'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{[a,z+h]} f - \int_{[a,z]} f \right) = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Bigg(\underbrace{\int_{\partial \triangle a, z+h, z} f}_{= 0 \text{ podle V12}} + \int_{[z,z+h]} f \Bigg) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f \overset{\text{V2}}{=} f(z). \end{aligned}$$

Jak vypadají hvězdovité množiny?

- Konvexní množina je hvězdovitá,
- $\mathbb{C}\backslash$polopřímka je hvězdovitá,
- $\mathbb{C}\backslash$bod není hvězdovitá.

Poznámka: O nalepování

Nechť Ω_1 a Ω_2 jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{C}$, pro které $\Omega_1 \cap \Omega_2$ je souvislá množina. Nechť funkce f má primitivní funkci v Ω_1 i v Ω_2. Pak f má primitivní funkci v $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Důkaz:

Nechť F_1 je primitivní funkce na Ω_1, F_2 je primitivní funkce na Ω_2. Na $\Omega_1 \cap \Omega_2$ máme dvě primitivní funkce. $(F_1 - F_2)' = 0$, tedy $F_1 = F_2 + C$ na $\Omega_1 \cap \Omega_2$, protože $\Omega_1 \cap \Omega_2$ je souvislá. Pak funkce $F(z)$ definovaná

$$F(z) = \begin{cases} F_1(z), & z \in \Omega_1 \\ F_2(z) + C, & z \in \Omega_2 \end{cases}$$

je primitivní funkcí k funkci f na $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Věta 14: Cauchyův vzorec pro kruh

Nechť f je holomorfní na uzavřeném kruhu o středu $a \in \mathbb{C}$ a poloměru $r > 0$ (tj. na $\overline{U(a,r)}$) a φ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r. Pak pro každé $z \in U(a,r)$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w.$$

Důkaz:

Z definice holomorfní funkce na množině existuje $G \subset \mathbb{C}$ otevřená taková, že $\overline{\mathcal{U}(a,r)} \subset G$ a f je holomorfní na G. Pro $z \in \varphi$ existuje $r_z > 0$ tak, že $\mathcal{U}(z, r_z) \subset G$. Označme

$$\Omega = \mathcal{U}(a,r) \bigcup_{z \in \varphi} \mathcal{U}(z, r_z),$$

pak Ω je hvězdovitá, f je holomorfní na Ω a $\overline{\mathcal{U}(a,r)} \subset \Omega \subset G$. Pro $z \in \Omega$ libovolné definujme pomocnou funkci

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}, & w \neq z \\ f'(z), & w = z \end{cases}$$

Tato fukce je holomorfní na $\Omega \setminus \{z\}$ a spojitá na Ω, tedy podle V13

$$0 = \int_\varphi g(w) \, \mathrm{d}w = \int_\varphi \frac{f(w) - f(z)}{w-z} \, \mathrm{d}w$$

$$\Rightarrow \quad \int_\varphi \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w = \int_\varphi \frac{f(z)}{w-z} \, \mathrm{d}w = f(z) \int_\varphi \frac{\mathrm{d}w}{w-z} = f(z) 2\pi i \operatorname{ind}_\varphi a = f(z) 2\pi i$$

$$\Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w.$$

Důsledek: Vlastnost průměru pro holomorfní funkce

Nechť f je holomorfní na $\overline{U(a,r)}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Pak platí

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) \, \mathrm{d}t.$$

Důkaz:

Aplikace Cauchyova vzorce pro $z = a$.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{w-a}\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{re^{it}} re^{it} i\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,\mathrm{d}t.$$

Věta 15: Cauchyův vzorec pro vyšší derivace

Nechť f je holomorfní na $\overline{U(a,r)}$ (kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$). Pak f má na $U(a,r)$ derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z \in U(a,r)$ platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w,$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r.

Důkaz:

Podle V14

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \underbrace{\frac{f(w)}{w-z}}_{=:F(z,w)}\,\mathrm{d}w.$$

Funkce $F(w,z)$ je spojitá na $\mathcal{U}(a,r) \times \langle\varphi\rangle$ a její derivace všech řádů podle z jsou spojité:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{f(w)}{(w-z)^2},\\ &\vdots\\ \frac{\partial^n F}{\partial z^n} &= n!\frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Tedy z V7(4) dostáváme indukcí

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(z,w)\,\mathrm{d}w = \frac{n!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}w.$$

Důsledek:

Je-li f holomorfní na množině $M \subset \mathbb{C}$, je i f' holomorfní na M.

Důkaz:

BÚNO M je otevřená. Buď $a \in M$ libovolné, pak existuje $r > 0$ tak, že $\overline{\mathcal{U}(a,r)} \subset M$. Podle V15 je funkce f' holomorfní na $\mathcal{U}(a,r)$. Bod a byl libovolný, tedy f' je holomorfní na M.

Důsledek:

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $p \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je funkce spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak f je holomorfní na Ω.

Důkaz:

Nechť $a \in \Omega$, pak existuje $r > 0$ tak, že $\mathcal{U}(a,r) \subset \Omega$. Podle V13 má f primitivní funkci na $\mathcal{U}(a,r)$. Z předchozího důsledku dostáváme, že f je holomorfní na $\mathcal{U}(a,r)$, tedy na Ω, jelikož a bylo libovolné.

Věta 16: Vyjádření mocninnou řadou

Nechť f je funkce holomorfní na $U(a,r)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Pak je f na $U(a,r)$ součtem mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

o středu a, která na $U(a,r)$ konverguje. Koeficienty této řady jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(symbolem $f^{(0)}$ rozumíme f).

Důkaz:

Jednoznačnost. Nechť

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \mathcal{U}(a,r).$$

Pak $c_0 = f(a)$ a dále

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} \quad \Rightarrow \quad f'(a) = c_1, \\ &\vdots \\ f^{(k)}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n (z-a)^{n-k} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(a) = k! c_k. \end{aligned}$$

Existence. Vezměme $\rho \in (0,r)$, nechť $\varphi(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Dle Cauchyho vzorce pro kruh

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w \quad \forall\, z \in \mathcal{U}(a,\rho).$$

Buď $z \in \mathcal{U}(a,\rho)$ pevné, pak pro $w \in \langle \varphi \rangle$ platí

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\frac{z-a}{w-a}}_{|\cdots|<1} \Big)^n$$

a tato řada je stejnoměrně konvergentní z Weierstrassova kritéria. Tedy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \overset{*}{=}$$

Platí následující odhad

$$\left| \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \right| \le \max_{w \in \langle \varphi \rangle} |f(w)| \frac{1}{\rho} \cdot \underbrace{\left| \frac{z-a}{\rho} \right|^n}_{<1}.$$

Řada je tedy podle Weierstrassova kritéria stejnoměrně konvergentní, proto lze zaměnit sumu a integrál.

$$\overset{*}{=} \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\varphi} \frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right)}_{=c_n} (z-a)^n \Bigg] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{na } \mathcal{U}(a,\rho).$$

Protože ρ je libovolné z $(0,r)$ a víme, že platí jednoznačnost, platí to na $\mathcal{U}(a,r)$.

Věta 17: Cauchyovy odhady

Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ na $U(a,R)$. Pro $r \in (0,R)$ označme

$$M_r = \max\{|f(z)| : |z-a| = r\}.$$

Pak pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí $|c_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$.

Důkaz:

Nechť $\varphi_r = a + re^{it}$, $t \in (0, 2\pi]$. Pak platí

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_r} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, \mathrm{d}w \right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{M_r}{r^{n+1}} = \frac{M_r}{r^n}.$$

Věta 18: Liouvilleova věta

Každá omezená celá funkce je konstantní.

Důkaz:

Funkce f je celá, tj.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Funkce f je omezená, tj. existuje $M > 0$ tak, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ $|f(z)| \leq M$. Tedy pro každé $r \in (0,\infty)$ je $M_r \leq M$. Pak podle V17 platí pro $n \in \mathbb{N}$ a pro $r \in (0,\infty)$

$$|c_n| \leq \frac{M_r}{r^n} \leq \frac{M}{r^n} \to 0 \quad \text{pro } r \to \infty.$$

Proto $c_n = 0$ pro $n \geq 1$, tedy $f(z) = c_0$, $z \in \mathbb{C}$, tj. f je konstanta.

Poznámka:

Platí obecněji: Nechť f je celá funkce a $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$. Pak f je polynom stupně menšího než n.

($\lim_{z\to\infty} g(z) = w$ znamená: Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $R > 0$, že pro každé $|z| > R$ platí $|g(z) - w| < \varepsilon$.)

Důkaz:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{r\to\infty} \frac{M_r}{r^n} = 0.$$

Pro $k \geq n$ platí

$$|c_k| \leq \frac{M_r}{r^k} = \underbrace{\frac{M_r}{r^n}}_{\to 0} \underbrace{\frac{1}{r^{k-n}}}_{\leq 1} \to 0 \quad \text{pro } r \to \infty.$$

Tedy $c_k = 0$ pro $k \geq n$.

Věta 19: Základní věta algebry

Každý polynom stupně alespoň 1 s komplexními koeficienty má aspoň jeden kořen v $\mathbb{C}$.

Důkaz:

Sporem. Nechť polynom $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, nemá kořeny v $\mathbb{C}$. Pak funkce $f = \frac{1}{P(z)}$ je celá. Pak

$$f(z) = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} \overset{z\neq 0}{=} \underbrace{\frac{1}{z^n}}_{\to 0} \underbrace{\frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}}}_{\to \frac{1}{a_n}} \to 0 \quad \text{pro } z \to \infty.$$

Tedy f je omezená. Podle V18 je f konstantní, $f = 0$, což je spor.

Důsledek: Rozklad na kořenové činitele

Nechť

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

je polynom s komplexními koeficienty, přičemž $n \geq 1$ a $a_n \neq 0$. Pak existují komplexní čísla $w_1, \ldots, w_n$ taková, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$P(z) = a_n(z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n).$$

Čísla $w_1, \ldots, w_n$ jsou určena jednoznačně až na pořadí.

Důkaz:

Věta o dělení polynomů: P, Q polynomy, $\deg Q < \deg P \Rightarrow \exists!$ R, S polynomy, $\deg S < \deg Q$: $P(z) = R(z)Q(z) + S(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Podle V19 existuje w_1 kořen P. Podle věty o dělení polynomů pak $P(z) = (z - w_1)\tilde{P}(z)$, kde $\deg \tilde{P} = n-1$. Pokračujeme indukcí.

Věta 20: O kořenech holomorfní funkce

Nechť f je funkce holomorfní na $U(a,r)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Předpokládejme, že $f(a) = 0$ a f není konstantní nulová funkce na $U(a,r)$. Pak existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$ a funkce g holomorfní na $U(a,r)$ taková, že $g(a) \neq 0$ a

$$f(z) = (z-a)^p g(z) \text{ pro } z \in U(a,r).$$

Důkaz:

Funkci f lze napsat jako součet mocninné řady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \mathcal{U}(a,r).$$

Protože $f(a) = 0$, $c_0 = 0$. Označ p nejmenší takové číslo, že $c_p \neq 0$, pak $p \geq 1$.

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^p \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}}_{=:g(z)}.$$

Pak $g(a) = c_p \neq 0$.

Jednoznačnost. Předpokládejme, že $(z-a)^p g_1(z) = (z-a)^g_2(z)$. BÚNO $q \geq p$, pak pro $z \neq a$ platí $g_1(z) = (z-a)^{q-p} g_2(z)$.

- $q > p$: $g_1(z) = 0$, což je spor,
- $q = p$: $g_1(z) = g_2(z)$.

Definice:

Je-li f, a a p jako ve Větě 20, říkáme, že bod a je **p-násobný kořen funkce** f.

Definice:

Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina a $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že bod z_0 je **hromadným bodem množiny** M, jestliže každé okolí bodu z_0 obsahuje nějaký bod množiny M různý od z_0. Je-li navíc $\Omega \subset \mathbb{C}$ množina obsahující M, říkáme, že M je **izolovaná v** Ω, jestliže nemá v Ω žádný hromadný bod.

Věta 21: O jednoznačnosti

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f, g jsou funkce holomorfní na Ω. Jestliže množina

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v Ω (tj. není izolovaná v Ω), pak $f = g$ na Ω.

DŮKAZ:

Označme $h := f - g$, h je holomorfní na Ω. $A := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\} = \{z \in \Omega : h(z) = 0\}$, $M := \{z \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : h^{(n)}(z) = 0\}$.

- M je relativně uzavřená v Ω.
$$M = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{z \in \Omega : h^{(n)}(z) = 0\}$$
a $h^{(n)}$ je spojitá na Ω.
- M je relativně otevřená v Ω.
Nechť $a \in M$, pak existuje $r > 0$ tak, že $\mathcal{U}(a, r) \subset \Omega$, h je holomorfní na $\mathcal{U}(a, r)$, tedy lze rozvinout v mocninnou řadu
$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \mathcal{U}(a, r),$$
$$c_n = \frac{h^{(n)}(a)}{n!} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
Tedy $h \equiv 0$ na $\mathcal{U}(a, r)$ a proto $\mathcal{U}(a, r) \subset M$.
- $M \neq \emptyset$: a je hromadný bod $A \Rightarrow a \in M$.
Nechť $a \in \Omega$ je hromadný bod A, pak $a \in \overline{A} = A$, tedy $h(a) = 0$. Existuje $r > 0$ tak, že $\mathcal{U}(a, r) \subset \Omega$. Pak platí jedna z možností
  - $h \equiv 0$ na $\mathcal{U}(a, r) \Rightarrow \mathcal{U}(a, r) \subset M$,
  - $h \not\equiv 0$ na $\mathcal{U}(a, r) \Rightarrow$ existují $p \in \mathbb{N}$ a u holomorfní na $\mathcal{U}(a, r)$, $u(a) \neq 0$ $h(z) = (z-a)^p u(z)$, $z \in \mathcal{U}(a, r)$. Protože $u(a) \neq 0$, existuje $\rho \in (0, r)$, $h \not\equiv 0$ na $\mathcal{U}(a, \rho)$. Pak $\mathcal{U}(a, \rho) \cap A = a$, tedy a není hromadný bod, což je spor. Proto platí první možnost.

Dohromady dostáváme, že $M = \Omega$, tedy $h \equiv 0$ na Ω.

Důsledek:

Jsou-li f, g dvě celé funkce, které se shodují na $\mathbb{R}$, pak $f = g$ na $\mathbb{C}$.

Věta 22: Princip maxima modulu

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je nekonstantní holomorfní funkce na Ω. Pak $|f|$ nenabývá nikde v Ω lokálního maxima.

DŮKAZ:

Sporem. Nechť $|f|$ nabývá v bodě $a \in \Omega$ svého maxima na $\mathcal{U}(a, r) \subset \Omega$ (BÚNO $r < 1$). Označ $c := |f(a)|$, potom $|f(z)| \leq c$ na $\mathcal{U}(a, r)$. Zvolme libovolné $\rho \in (0, r)$ a označme $\varphi = a + \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Pak

$$c = |f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{w-a} \, \mathrm{d}w \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + \rho e^{it})| \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c \, \mathrm{d}t = c,$$

proto platí rovnosti a tedy $|f(a + \rho e^{it})| = c$ na $[0, 2\pi]$. Protože ρ bylo libovolné z $(0, r)$, tak $|f| = c$ na $\mathcal{U}(a, r)$.

(1) Buď $c = 0$ a pak $f = 0$ na $\mathcal{U}(a, r)$,

(2) nebo $c \neq 0$. Potom $\overline{f} = \frac{|f|^2}{f} = \frac{c^2}{f}$ je holomorfní na $\mathcal{U}(a, r)$. Z C-R podmínek je f konstantní na $\mathcal{U}(a, r)$.

Podle V21 je f konstantní na Ω, což je spor.

Důsledek:

Nechť Ω je omezená oblast a f je funkce spojitá na $\overline{\Omega}$, která je holomorfní na Ω. Pak $|f|$ nabývá svého maxima na $\overline{\Omega}$ na hranici. Speciálním případem je $\Omega = U(a,r)$.

DůKAZ:

Funkce f zřejmě nabývá svého maxima. Kdyby nabývala maxima uvnitř, tak je f konstantní podle V22.

Věta 23: Weierstrassova věta

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená, funkce f_n jsou holomorfní v Ω a konvergují k funkci f lokálně stejnoměrně v Ω. Pak f je holomorfní v Ω a pro každé $p \in \mathbb{N}$ funkce $f_n^{(p)}$ konvergují k $f^{(p)}$ lokálně stejnoměrně v Ω.

DůKAZ:

(1) Nejprve dokážeme, že f je holomorfní na Ω.
Buď $a \in \Omega$ libovolné, $r > 0$ tak, aby $\overline{\mathcal{U}(a,r)} \subset \Omega$. Nechť $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$, pak

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f_n(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w, \quad z \in \mathcal{U}(a,r).$$

Nechť $a \in \mathcal{U}(a,r)$ pevné. Chceme dokázat, že $\frac{f_(w)}{w-z} \rightrightarrows \frac{f(w)}{w-a}$ na $\langle\varphi\rangle$.

$$\sup_{w\in\langle\varphi\rangle} \left|\frac{f_n(w)-f(w)}{w-a}\right| \le \frac{\max\limits_{w\in\langle\varphi\rangle} |f_n(w)-f(w)|}{r-|z-a|} \to 0 \quad \text{pro } n\to\infty,$$

protože $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$. Podle V7(1) lze přehodit limitu a integrál, tedy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Proto podle V7(4) je f holomorfní na $\mathcal{U}(a,r)$. Bod a byl libovolný, tedy f je holomorfní na Ω. Navíc dle V15

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{(w-z)^{p+1}}\,\mathrm{d}w, \quad z \in \mathcal{U}(a,r).$$

(2) Nechť $a \in \Omega$ libovolné, $r > 0$ tak, aby $\overline{\mathcal{U}(a,r)} \subset \Omega$. Chceme dokázat, že $f_n^{(p)} \rightrightarrows f^{(p)}$ na $\mathcal{U}(a,\frac{r}{2})$.
Označme $\varphi = a + re^{it}$, $t \in [0,2\pi)$, buď $z \in \mathcal{U}(a,\frac{r}{2})$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\left|f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z)\right| = \left|\frac{p!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f_n(w)-f(w)}{(w-z)^{p+1}}\,\mathrm{d}w\right| \le \frac{p!}{2\pi} 2\pi r \frac{\max\limits_{w\in\langle\varphi\rangle}|f_n(w)-f(w)|}{\left(\frac{r}{2}\right)^{p+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \sup_{z\in\mathcal{U}(a,\frac{r}{2})} \left|f_n^{(p)}(z) - f^{(p)}(z)\right| \le \frac{p!2^{p+1}}{r^p} \max_{w\in\langle\varphi\rangle} |f_n(w)-f(w)| \to 0 \quad \text{pro } n\to\infty,$$

protože $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle\varphi\rangle$. Tedy $f_n^{(p)} \rightrightarrows f^{(p)}$ na $\mathcal{U}(a,\frac{r}{2})$. Bod a byl libovolný, proto $f_n^{(p)} \to f^{(p)}$ lokálně stejnoměrně na Ω.

Věta 24: Morerova věta

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce taková, že

$$\int_{\partial\triangle abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \triangle abc \text{ obsažený v } \Omega.$$

Pak f je holomorfní na Ω.

Důkaz:

Buď $a \in \Omega$ libovolné, $r > 0$ tak, aby $\mathcal{U}(a,r) \subset \Omega$. Definujme funkci F předpisem

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,\mathrm{d}w, \quad z \in \mathcal{U}(a,r).$$

Tato definice je korektní, protože f je spojitá funkce. Pak pro $z \in \mathcal{U}(a,r)$ platí

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\int_{[a,z+h]} f - \int_{[a,z]} f\right] \overset{(*)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f \overset{\text{V2}}{=} f(z),$$

kde v rovnosti $(*)$ využijeme předpoklad, že integrál z funkce f přes každý trojúhelník je nulový. Dostáváme, že F je holomorfní na $\mathcal{U}(a,r)$ (má derivaci), tedy i $f = F'$ je holomorfní na $\mathcal{U}(a,r)$. Bod a byl libovolný, proto f je holomorfní na Ω.

Poznámka:

Věta 24 platí i v případě, že místo trojúhelníků uvažujeme obdélníky, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami.

4

4.1 Rozšíření $\mathbb{C}$ o ∞, Riemannova sféra

Definice:

Označme $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pro $\varepsilon > 0$ položme

$$U(\infty, \varepsilon) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C}, |z| > \frac{1}{\varepsilon}\}.$$

Nechť f je funkce definovaná na podmnožině $\overline{\mathbb{C}}$ s hodnotami v $\overline{\mathbb{C}}$. Řekneme, že f **má v bodě** $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ **limitu** $w \in \overline{\mathbb{C}}$, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé $z \in U(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ platí $f(z) \in U(w, \varepsilon)$. Má-li f v bodě z_0 limitu $f(z_0)$, říkáme, že f je **spojitá v** z_0. Na $\overline{\mathbb{C}}$ dále rozšíříme operace následovně:

$$\begin{aligned} z + \infty = \infty + z = \infty - z = z - \infty &= \infty && \text{pro } z \in \mathbb{C},\\ z \cdot \infty = \infty \cdot z = \frac{z}{0} &= \infty && \text{pro } z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\},\\ \frac{\infty}{z} = \infty \qquad \text{a} \qquad \frac{z}{\infty} &= 0 && \text{pro } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Nedefinované jsou následující výrazy:

$$\infty + \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Poznámka:

Operace jsou rozšířeny tak, aby platila věta o aritmetice limit s dodatkem „má-li pravá strana smysl".

Věta 1:

Označme $\mathbb{S}_2$ jednotkovou sféru v $\mathbb{R}^3$, tj.

$$\mathbb{S}_2 = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}.$$

Dále definujme zobrazení $\chi : \mathbb{S}_2 \to \overline{\mathbb{C}}$ předpisem

$$\chi(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \infty, & (\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 1),\\ \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak χ je prosté zobrazení $\mathbb{S}_2$ na $\overline{\mathbb{C}}$ a $\chi|_{\mathbb{S}_2 \setminus \{(0,0,1)\}}$ je homeomorfismus $\mathbb{S}_2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ na $\mathbb{C}$.

Definujme dále metriku ρ^* na $\overline{\mathbb{C}}$ předpisem

$$\rho^*(z, w) = \rho_e(\chi^{-1}(z), \chi^{-1}(w)), \qquad z, w \in \overline{\mathbb{C}},$$

kde ρ_e je eukleidovská metrika na $\mathbb{R}^3$. Pak limita a spojitost funkcí z $\overline{\mathbb{C}}$ do $\overline{\mathbb{C}}$ definovaná výše se shoduje s limitou a spojitostí v metrice ρ^*.

4.2 Izolované singularity holomorfních funkcí

Definice:

Nechť $a \in \overline{\mathbb{C}}$ a $r > 0$. **Prstencovým okolím bodu** a **o poloměru** r rozumíme množinu $P(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\}$.

Věta 2: Casorati-Weierstrassova

Nechť $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ a funkce f je holomorfní na $P(a, r)$. Pak nastává právě jedna z následujících možností:

(1) Existuje takové $\rho \in (0, r)$, že f je omezená na $P(a, \rho)$. Pak existuje vlastní $\lim_{z \to a} f(z)$. Dodefinujeme-li funkci f v bodě a hodnotou této limity, dostaneme funkci holomorfní na $U(a, r)$. (Pak říkáme, že f má v bodě a **odstranitelnou singularitu**.)

(2) $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$. Pak existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$, pro které existuje vlastní nenulová $\lim_{z \to a}(z-a)^p f(z)$. Navíc existují jednoznačně určená čísla $a_{-p}, a_{-(p-1)}, \ldots, a_{-1} \in \mathbb{C}$, $a_{-p} \neq 0$, že funkce

$$f - \frac{a_{-1}}{z-a} - \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} - \ldots - \frac{a_{-p}}{(z-a)^p} \qquad (*)$$

má v bodě a odstranitelnou singularitu. (Pak říkáme, že f má v bodě a **pól násobnosti** p.)

(3) $\lim_{z \to a} f(z)$ neexistuje. Pak pro každé $\rho \in (0, r)$ je $f(P(a, \rho))$ hustá v $\mathbb{C}$. (Říkáme, že f má v bodě a **podstatnou singularitu**.)

Důkaz:

(1) Nechť f je omezená na $\mathcal{P}(a, \rho)$. Pak buď $f \equiv 0$ a je to jasné, nebo $f \not\equiv 0$. V tom případě definujeme funkci $g(z) = (z-a)f(z)$. Funkce g je holomorfní na $\mathcal{P}(a, \rho)$ a $\lim_{z \to a} g(z) = 0$. Po dodefinování je g holomorfní na $\mathcal{U}(a, \rho)$ a $g(a) = 0$. Podle věty o kořenech holomorfní funkce

$$g(z) = (z-a)^p h(z),$$

kde h je holomorfní na $\mathcal{U}(a, \rho)$ a $h(a) \neq 0$. Pak $f(z) = (z-a)^{p-1} h(z)$, limita f v bodě a existuje a lze funkci f dodefinovat její hodnotou. Po dodefinování je f holomorfní na $\mathcal{U}(a, \rho)$, tedy i na $\mathcal{U}(a, r)$.

(2) Nechť $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$, pak

$$\lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

Definujme funkci g předpisem

$$g = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq a, \\ 0, & z = a \end{cases}$$

Funkce g je holomorfní na $\mathcal{U}(a, r)$ a $g(a) = 0$. Podle věty o kořenech holomorfní funkce existují $p \in \mathbb{N}$ a h holomorfní na $\mathcal{U}(a, r)$, $h(a) \neq 0$ tak, že

$$g(z) = (z-a)^p h(z).$$

Funkci f pak lze napsat ve tvaru

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^p} \cdot \frac{1}{h(z)}$$

a platí

$$\lim_{z \to a} (z-a)^p f(z) = \frac{1}{h(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Na okolí $\mathcal{U}(a, r)$ je $\frac{1}{h}$ holomorfní, lze ji tedy rozvinout v mocninnou řadu

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in \mathcal{U}(a, r)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}, \quad z \in \mathcal{P}(a, r) \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} c_n (z-a)^{n-p} + \underbrace{\sum_{n=p}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}}_{\text{holomorfní na } \mathcal{U}(a, r)} \end{aligned}$$

a platí $a_{-p} = c_0 = \frac{1}{h(a)} \neq 0$.

Jednoznačnost. Sporem. Nechť (a_{-i}) a (b_{-i}) jsou čísla splňující $(*)$, pak funkce

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{a_{-j} - b_{-j}}{(z-a)^j} = f - \sum_{j=1}^{p} \frac{b_{-j}}{(z-a)^j} - \left(f - \sum_{j=1}^{p} \frac{a_{-j}}{(z-a)^j} \right)$$

má v bodě a odstranitelnou singularitu, protože je to rozdíl dvou funkcí, které mají odstranitelnou singularitu v a. Pokud je nějaký ze sčítanců nenulový, pak

$$\lim_{z \to a} \sum_{j=1}^{p} \frac{a_{-j} - b_{-j}}{(z-a)^j} = \infty,$$

což je spor.

(3) Sporem. Nechť existuje $\rho \in (0, r)$, existuje $b \in \mathbb{C}$ a existuje $\delta > 0$ tak, že $f(\mathcal{P}(a, \rho)) \cap \mathcal{U}(b, \delta) = \emptyset$, tj. pro každé $z \in \mathcal{P}(a, \rho) : |f(z) - b| \geq \delta$, tedy

$$\left| \frac{1}{f(z) - b} \right| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Pak funkce $g = (f(z) - b)^{-1}$ je omezená a holomorfní na $\mathcal{P}(a, \rho)$ a podle bodu (1) existuje

$$\lim_{z \to a} g(z) = c \in \mathbb{C},$$

ale pak

$$\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{z \to a} \left(\frac{1}{g(z)} + b \right) = \frac{1}{c} + b,$$

tedy existuje, což je spor.

Poznámka:

Platí dokonce **Velká Picardova věta**: Má-li f v bodě z_0 podstatnou singularitu, pak v každém prstencovém okolí z_0 nabývá f všech hodnot z $\mathbb{C}$ s výjimkou nejvýše jedné.

Definice:

Nechť f je funkce definovaná na $U(\infty, r)$ pro nějaké $r > 0$. Řekneme, že

(1) f je **holomorfní v bodě** ∞,

(2) f **má v bodě** ∞ **kořen násobnosti** p,

pokud příslušnou vlastnost má funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ v bodě 0. Je-li f holomorfní na $P(\infty, r)$ pro nějaké $r > 0$, pak říkáme, že f **má v bodě** ∞ **odstranitelnou singularitu** (**pól násobnosti** p, **podstatnou singularitu**), jestliže příslušný typ singularity má funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ v bodě 0.

4.3 Laurentovy řady a funkce holomorfní v mezikruží

Poznámka:

Jméno Laurent se čte francouzsky, tj. přibližně **Lorán**.

Definice:

Laurentovou řadou o středu $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$(*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. **Regulární částí** řady $(*)$ rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

hlavní částí řady $(*)$ rozumíme symbol

$$(**) \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n.$$

Říkáme, že **hlavní část řady** $(*)$ **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}.$$

Součet této řady nazveme **součtem hlavní části řady** $(*)$ a značíme jej rovněž $(**)$.

Říkáme, že **řada** $(*)$ **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. **Součtem řady** $(*)$ rozumíme součet součtu regulární části a součtu hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n.$$

Definice:

Nechť $0 \le r < R \le +\infty$ a $a \in \mathbb{C}$. Pak označme

$$P(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Tuto množinu nazveme **mezikružím o středu** a**, vnitřním poloměru** r **a vnějším poloměru** R.

Věta 3:

Mějme Laurentovu řadu $(*)$. Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$, pro která platí:

- Regulární část řady $(*)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ a diverguje pro $|z-a| > R$.
- Hlavní část řady $(*)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$ a diverguje pro $|z-a| < r$.

Je-li $r < R$, pak řada $(*)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na mezikruží $P(a,r,R)$ a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží pak nazýváme **mezikružím konvergence řady (*)**.

Důkaz:

(1) Buď R poloměr konvergence regulární části

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

(2) Na hlavní část použijeme Cauchyho kritérium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}(z-a)^{-n}|} = \frac{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}}{|z-a|} \begin{cases} <1 & \dots \quad \text{konverguje absolutně,} \\ >1 & \dots \quad \text{diverguje.} \end{cases}$$

Označme $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$, pak pro $|z-a| > r$ řada konverguje absolutně a pro $|z-a| < r$ řada diverguje.

Nechť $\rho > r$, pak hlavní část řady konverguje stejnoměrně na $\{z : |z-a| \geq \rho\}$, protože $|a_{-n}(z-a)^{-n}| \leq |a_{-n}|\rho^{-n}$ a řada $\sum a_{-n}\rho^n$ konverguje absolutně dle Cauchyho kritéria.

(3) Nechť $r < R$, pak řada $(*)$ na $\mathcal{P}(a, r, R)$ konverguje z definice absolutně a lokálně stejnoměrně. Podle Weierstrassovy věty je tedy součet holomorfní funkce.

Věta 4:

Nechť $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ a $\theta \in [0, 2\pi)$. Nechť

$$G = P(a, r, R) \setminus \{a + te^{i\theta} : t \in (0, +\infty)\}.$$

Pak pro množinu G platí Cauchyova věta, tj., pro každou f holomorfní na G a každou uzavřenou křivku φ v G platí $\int_\varphi f = 0$.

Důkaz:

Ukážeme, že každá f holomorfní má na G primitivní funkci.

1. krok: Chceme: $\exists\, c > 0\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ je množina $\{a + se^{it} : s \in (r, R), t \in (\alpha, \alpha + c)\}$ hvězdovitá.

Nechť $u \in (r, R)$, stačí zvolit $c = 2 \arccos \frac{r}{u}$, pak platí.

2. krok: Nalepuji.

Na každé výseči existuje primitivní funkce, protože je to hvězdovitá množina. Jejich průnik je souvislá množina, tedy na sjednocení také existuje primitivní funkce.

Věta 5:

Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pro $\rho \in (r, R)$ označme φ_ρ kladně orientovanou kružnici o středu a a poloměru ρ. Pak platí:

(1) $\int_{\varphi_\rho} f$ nezávisí na ρ, tj. nabývá stejné hodnoty pro každé $\rho \in (r, R)$.

(2) (Cauchyův vzorec pro mezikruží) Nechť $z \in P(a, r, R)$ a $r < \rho_1 < |z-a| < \rho_2 < R$. Pak

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w - \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w \right).$$

Důkaz:

(1) Podle V4 platí

$$\int_{\mu_1} f = \int_{\mu_2} f = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{\mu_1} f + \int_{\mu_2} f = \int_{\varphi_{\rho_1}} f - \int_{\varphi_{\rho_2}} f.$$

(2) Definujme pomocnou funkci g

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & w \neq z, \\ f'(a), & w = a. \end{cases}$$

Potom g je holomorfní na $\mathcal{P}(a,r,R)$ kromě bodu z. V bodě z je spojitá, tedy g je holomorfní na $\mathcal{P}(a,r,R)$.

$$\int_{\varphi_{\rho_1}} g = \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + f(z)\underbrace{\int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w}_{=2\pi i\,\underbrace{\mathrm{ind}_{\varphi_{\rho_1}} z}_{=1}} = \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + f(z)2\pi i,$$

$$\int_{\varphi_{\rho_2}} g = \int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,\mathrm{d}w = \int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w + f(z)\underbrace{\int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w}_{=2\pi i\,\underbrace{\mathrm{ind}_{\varphi_{\rho_2}} z}_{=0}} = \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Podle bodu (1) se tyto dva integrály rovnají, dostáváme tedy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right).$$

Věta 6:

Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a,r,R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pak f je v $P(a,r,R)$ součtem Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

o středu a, která na $P(a,r,R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r,R)$ je libovolné a φ_ρ je jako ve Větě 4.

Důkaz:

Jednoznačnost. Nechť $\rho \in (r,R)$,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad z \in \mathcal{P}(a,r,R).$$

$$\int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_\rho} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^{n-m-1}\,\mathrm{d}z \overset{(*)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \underbrace{\int_{\varphi_\rho} (z-a)^{n-m-1}\,\mathrm{d}z}_{\substack{=0, \quad n\neq m \\ =2\pi i, \quad n=m}} = 2\pi i a_m,$$

kde $(*)$ platí, protože řada je stejnoměrně konvergentní na $\langle\varphi_\rho\rangle$.

Existence. Nechť $z \in \mathcal{P}(a,r,R)$, $r < \rho_1 < |z-a| < \rho_2 < R$. Podle V5

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w - \int_{\varphi_{\rho_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w\right).$$

Nechť $w \in \langle\varphi_{\rho_2}\rangle$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}.$$

Nechť $w \in \langle \varphi_{\rho_1} \rangle$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{\frac{w-a}{z-a} - 1} = -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$

Tyto řady jsou stejnoměrně konvergentní na $\langle \varphi_{\rho_2} \rangle$, resp. $\langle \varphi_{\rho_1} \rangle$. Pak

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\varphi_{\rho_2}} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w + \int_{\varphi_{\rho_1}} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \right) = \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\rho_2}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \,\mathrm{d}w \right) (z-a)^n}_{\text{regulární část}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{\rho_1}} f(w)(w-a)^n \,\mathrm{d}w \right) (z-a)^{-n-1}}_{\text{hlavní část}} . \end{aligned}$$

Věta 7:

Nechť f je holomorfní funkce v $P(a,R) = P(a,0,R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ je Laurentova řada funkce f v $P(a,R)$. Pak platí:

(1) f má v bodě a odstranitelnou singularitu, právě když $a_n = 0$ pro každé $n < 0$.

(2) f má v bodě a pól násobnosti p, právě když $a_{-p} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -p$.

(3) f má v bodě a podstatnou singularitu, právě když $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.

Důkaz:

(1) $\Leftarrow$ V tomto případě je Laurentova řada vlastně mocninná řada a ta je holomorfní na $\mathcal{U}(a,R)$.

$\Rightarrow$ Funkce f má v bodě a odstranitelnou singularitu, proto po dodefinování je f holomorfní na $\mathcal{U}(a,R)$ a lze tedy rozvinout v mocninnou řadu na $\mathcal{U}(a,R)$. Tato mocninná řada je zároveň Laurentova řada v $\mathcal{P}(a,R)$. Z jednoznačnosti rozvoje plyne $a_n = 0$ pro $n < 0$.

(2) $\Leftarrow$ $\lim\limits_{z \to a} (z-a)^p f(z) = a_{-p} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ … pól násobnosti p.

$\Rightarrow$ Funkce $(z-a)^p f(z)$ má v bodě a odstranitelnou singularitu

$$(z-a)^p f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-p}$$

a to je ta Laurentova řada. (Navíc $c_0 \neq 0$.)

(3) To jsou ty zbývající možnosti.

Definice:

Nechť f je holomorfní funkce v $P(a,R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Nechť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

je Laurentova řada funkce f v $P(a,R)$. Pak **reziduem funkce** f **v bodě** a rozumíme číslo

$$\operatorname{res}_a f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} f,$$

kde $\rho \in (0,R)$ a φ_ρ je jako ve Větě 4.

Věta 8: Reziduová věta

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $M \subset \Omega$ konečná množina a $\varphi : [a,b] \to \Omega \setminus M$ uzavřená cesta. Předpokládejme, že pro Ω a φ platí Cauchyova věta, tj. $\int_\varphi g = 0$ pro každou funkci g holomorfní na Ω. Pak pro každou funkci f holomorfní na $\Omega \setminus M$ platí

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_\varphi a.$$

DŮKAZ:

Pro $a \in M$ existuje $r > 0$ tak, že $\mathcal{P}(a,r) \subset \Omega \setminus M$, tedy f je holomorfní na $\mathcal{P}(a,r)$ a lze ji na $\mathcal{P}(a,r)$ rozvinout v Laurentovu řadu. Nechť H_a označuje hlavní část Laurentovy řady funkce f v $\mathcal{P}(a,r)$. Pak H_a konverguje lokálně stejnoměrně na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, což plyne z V3 ($r = 0$). Tedy součet této řady je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Vezměmě funkci

$$g(z) = f(z) - \sum_{a \in M} H_a(z),$$

která je holomorfní na $\Omega \setminus M$ a v každém bodě M má odstranitelnou singularitu: Nechť $b \in M$, pak

$$g(z) = \underbrace{(z) - H_b(z)}_{(+)} - \sum_{a \in M \setminus \{b\}} H_a(z)$$

a $(+)$ je v $\mathcal{P}(b,r)$ regulární část Laurentovy řady, tedy g lze v bodě b dodefinovat a pak je holomorfní. Proto

$$0 = \int_\varphi g = \int_\varphi \left(f - \sum_{a \in M} H_a \right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_\varphi f = \int_\varphi \sum_{a \in M} H_a(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in M} \int_\varphi H_a(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{a \in M} \int_\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}^a}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{a \in M} \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^a \underbrace{\int_\varphi \frac{1}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z}_{\substack{= 0, \quad n \geq 2 \\ = 2\pi i \operatorname{ind}_\varphi a, \quad n = 1}} = \sum_{a \in M} c_{-1}^a \operatorname{ind}_\varphi a 2\pi i = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_\varphi a.$$

Věta 9: Některé metody výpočtu reziduí

Nechť f a g jsou holomorfní funkce v nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{C}$.

(1) Má-li funkce f v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to a} (f(z)(z-a)^p)^{(p-1)}.$$

(2) Jsou-li f, g holomorfní v bodě a a g má v bodě a kořen násobnosti 1 (tj. $g(a) = 0$ a $g'(a) \neq 0$), pak $\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$.

(3) Je-li f holomorfní v a a g má v a pól násobnosti 1, pak $\operatorname{res}_a(fg) = f(a) \cdot \operatorname{res}_a g$.

(4) Je-li f holomorfní v bodě a a g má v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\operatorname{res}_a(fg) = \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} b_{-k},$$

kde b_n je koeficient u $(z-a)^n$ v Laurentově řadě funkce g v prstencovém okolí bodu a.

DŮKAZ: Bez důkazu.

4.4 Limity některých integrálů

Lemma 10: Jordanovo

Nechť $\xi \in \mathbb{R}$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \xi, |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Re} z\leq\xi}} f(z) = 0.$$

Pro $r > |\xi|$ nechť φ_r je křivka definovaná vztahem $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha_r, 2\pi - \alpha_r]$, kde $\alpha_r \in (0, \pi)$ je takové, že $\operatorname{Re}(re^{i\alpha_r}) = \xi$. Pak pro každé $x > 0$ platí

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\varphi_r} f(z)e^{xz}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Pokud navíc

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Re} z\leq\xi}} zf(z) = 0,$$

pak tvrzení platí i pro $x = 0$.

Důkaz:

Nechť $\alpha_r = \arccos\frac{\xi}{r}$. Označme $M_r = \max_{z\in\langle\varphi_r\rangle} |f(z)|$, podle předpokladu $M_r \to 0$ pro $r \to \infty$. Pak

$$\left|\int_{\varphi_r} f(z)e^{xz}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_{\alpha_r}^{2\pi-\alpha_r} f(re^{it})e^{xre^{it}}re^{it}i\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\alpha_r}^{2\pi-\alpha_r} M_r e^{xr\cos t}r\,\mathrm{d}t = 2M_r\int_{\alpha_r}^{\pi} e^{xr\cos t}r\,\mathrm{d}t = (*).$$

Pokud $\xi > 0$, pokračujeme následovně

$$(*) = 2M_r\Bigg(\underbrace{\int_{\alpha_r}^{\frac{\pi}{2}} e^{xr\cos t}r\,\mathrm{d}t}_{(1)} + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{xr\cos t}r\,\mathrm{d}t}_{(2)}\Bigg) \to 0, \quad r\to\infty,$$

protože $M_r \to 0$ pro $r \to \infty$ a (1), (2) jsou omezené:

$$(1) \quad \leq \quad \int_{\alpha_r}^{\frac{\pi}{2}} e^{xr\cos\alpha_r}r\,\mathrm{d}t = e^{xr\cos\alpha_r}r\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_r\right) = e^{\xi x}\xi\underbrace{\frac{r}{\xi}\arcsin\frac{\xi}{r}}_{\to 1} \to e^{\xi x}\xi, \quad r\to\infty,$$

$$(2) \quad \leq \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{xr\left(1-\frac{2}{\pi}t\right)}r\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{xr\left(1-\frac{2}{\pi}t\right)}}{-x\frac{2}{\pi}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{e^{-xr}-1}{-\frac{2}{\pi}x} = \frac{1-e^{-xr}}{\frac{2}{\pi}x} \leq \frac{\pi}{2x}.$$

Pokud $\xi \leq 0$, pak

$$(*) \leq 2M_r\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{xr\cos t}r\,\mathrm{d}t}_{(2)} \to 0, \quad r\to\infty.$$

Lemma 11: Jordanovo – jiná varianta

Nechť $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \arg z\in[\alpha,\beta]}} f(z) = 0.$$

Pro $r > 0$ nechť φ_r je křivka definovaná vztahem $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pak pro každé $x > 0$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\varphi_r} f(z)e^{ixz}\,\mathrm{d}z = 0.$$

Důkaz:

$$\int_{\varphi_r} f(z)e^{ixz}\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta f(re^{it})e^{ixre^{it}}re^{it}i\,\mathrm{d}t.$$

Nechť $g(z) = f(-iz)$, pak pro případ $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ to odpovídá L10 pro g a $\xi = 0$. Buď ψ_r křivka z L10. Pokud je výseč menší, platí všechny odhady z důkazu L10 a dokáže se to stejně, protože

$$\int_{\psi_r} g(z)e^{xz}\,\mathrm{d}z = i\int_{\psi_r} f(z)e^{ixz}\,\mathrm{d}z.$$

Lemma 12:

Nechť $a \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu a. Dále nechť $\alpha < \beta$ a $\varphi_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pak platí:

(1) Pokud f je holomorfní v bodě a, pak $\lim_{r\to 0_+} \int_{\varphi_r} f = 0$.

(2) Pokud f má v bodě a pól násobnosti 1, pak

$$\lim_{r\to 0_+} \int_{\varphi_r} f = i(\beta - \alpha)\operatorname{res}_a f.$$

Důkaz:

Nechť f má v bodě a pól násobnosti 1, pak

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + f_0(z), \quad z \in \mathcal{P}(a, r),$$

kde f_0 je holomorfní na $\mathcal{U}(a, r)$.

$$\int_{\varphi_r} f = \int_{\varphi_r} \frac{c_{-1}}{z-a}\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_r} f,$$

$$\int_{\varphi_r} \frac{c_{-1}}{z-a}\,\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \frac{c_{-1}}{re^{it}}re^{it}i\,\mathrm{d}t = i(\beta-\alpha)c_{-1} = i(\beta-\alpha)\operatorname{res}_a f,$$

$$\left|\int_{\varphi_r} f_0\right| \le V(\varphi_r)\max_{z\in\langle\varphi_r\rangle}|f_0(z)| = |\beta-\alpha|r\underbrace{\max_{z\in\langle\varphi_r\rangle}|f_0(z)|}_{\text{omezené}} \to 0, \quad r \to 0_+.$$

Tedy

$$\lim_{r\to 0_+} \int_{\varphi_r} f = i(\beta - \alpha)\operatorname{res}_a f.$$

Poznámka:

V případě, že f má v bodě a pól vyšší násobnosti, pak uvedená limita je rovna ∞ s výjimkou „speciálních případů f, α, β“. Přesněji: Nechť f má v bodě a pól násobnosti p a c_k, $k \in \mathbb{Z}$ jsou koeficienty Laurentova rozvoje f v prstencovém okolí bodu a. Pokud pro každé $k \in \{2, \dots, p\}$ platí $c_{-k}(e^{i(k-1)\alpha} - e^{i(k-1)\beta}) = 0$, pak limita je stejná, jako pro pól násobnosti 1; jinak je ∞. V případě, že koeficienty c_k jsou reálné a počítáme jen limitu reálné či imaginární části integrálu, je speciálních případů více (místo $e^{i\cdot(\dots)}$ je v podmínce $\cos(\dots)$ resp. $\sin(\dots)$).

5 Laplaceova transformace

5.1 Definice a základní vlastnosti

Značení:

Symbolem L_1^+ budeme značit množinu všech funkcí f s následujícími vlastnostmi:

(1) f je definována skoro všude na intervalu $[0,+\infty)$ a její hodnoty jsou komplexní čísla.

(2) Pro každé $T \in (0,+\infty)$ je f lebesgueovsky integrovatelná na $[0,T]$.

(3) Existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že funkce $t \mapsto f(t)e^{-ct}$ patří do $L^1(0,+\infty)$.

Poznámka:

Nechť $f \in L_1^+$ a $c \in \mathbb{R}$ splňuje podmínku z třetího bodu. Pak tuto podmínku splňuje i každé $c' > c$. Označme c_f infimum všech c splňujících podmínku z třetího bodu. Pak $c_f \in [-\infty,+\infty)$ a infimum se může a nemusí nabývat.

Věta 1: Vlastnosti L_1^+

- L_1^+ je komplexní vektorový prostor.
- Je-li $f \in L_1^+$ a $k > 0$, pak i funkce $g : t \mapsto t^k f(t)$ patří do L_1^+, přičemž $c_g = c_f$.
- Je-li $f \in L_1^+$ a $\gamma \in \mathbb{C}$, pak i funkce $g : t \mapsto e^{\gamma t} f(t)$ patří do L_1^+, přičemž $c_g = c_f + \operatorname{Re}\gamma$.

Definice:

Laplaceovou transformací funkce $f \in L_1^+$ rozumíme funkci $\mathcal{L}f$ definovanou předpisem

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t, \qquad p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} p > c_f.$$

Pokud se infimum v definici c_f nabývá, definujeme $\mathcal{L}f$ týmž vzorcem pro $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geq c_f$.

Věta 2: Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

Nechť $f \in L_1^+$. Pak platí:

(1) Pro každé $c > c_f$ je $\mathcal{L}f$ omezená v polorovině $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq c\}$.

(2) Pro každé $c > c_f$ je $\lim\limits_{\substack{p \to +\infty \\ \operatorname{Re} p \geq c}} \mathcal{L}f(p) = 0$.

(3) $\mathcal{L}f$ je holomorfní v polorovině $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > c_f\}$ a

$$(\mathcal{L}f)'(p) = \mathcal{L}(-tf(t))(p) \text{ pro } p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} p > c_f.$$

Pokud se infimum v definici c_f nabývá, platí (1) a (2) i pro $c = c_f$ a navíc je $\mathcal{L}f$ spojitá na svém definičním oboru.

Důkaz:

(1) Označme $p = x + iy$, $x,\ y \in \mathbb{R}$, $x \geq c$. Pak

$$|\mathcal{L}f(p)| = \left| \int_0^\infty f(t)e^{-(x+iy)t}\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^\infty |f(t)|e^{-ct}\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

(2) Stačí dokázat pro $f \in L^1(0,\infty)$, pak se to jen posune.

(i) Dokážeme, že to platí pro $f = \chi_{(a,b)}$, $0 \le a < b < \infty$.

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^\infty \chi_{(a,b)} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_a^b = -\frac{1}{p}\left(e^{-pb} - e^{-pa}\right),$$

$$|\mathcal{L}f(p)| \le \frac{1}{|p|}\left(e^{-b\operatorname{Re}p} + e^{-a\operatorname{Re}p}\right) \le \frac{2}{|p|}.$$

(ii) Platí pro lineární kombinace charakteristických funkcí.

(iii) Nechť $f \in L^1(0,\infty)$ libovolná. Pro $\varepsilon > 0$ existuje g po částech konstantní tak, že $\|f - g\| \le \frac{\varepsilon}{2}$. Podle bodu (ii) existuje $r > 0$ tak, že pro $|p| > r$ a $\operatorname{Re}p \ge 0$ je $|\mathcal{L}g(p)| \le \frac{\varepsilon}{2}$.

$$|\mathcal{L}(f-g)(p)| \le \int_0^\infty |f(t) - g(t)| \underbrace{e^{-\operatorname{Re}pt}}_{\le 1}\,\mathrm{d}t \le \int_0^\infty |f - g| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Tedy pro $|p| \ge r$, $\operatorname{Re}p > 0$ dostáváme

$$|\mathcal{L}f(p)| \le |\mathcal{L}g(p)| + |\mathcal{L}(f-g)(p)| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(3) Funkce $f(t)e^{-pt}$ je měřitelná v t a spojitá v p. Derivace podle p existuje pro všechna $t \in (0,\infty)$:

$$\frac{\partial}{\partial p}(f(t)e^{-pt}) = -tf(t)e^{-pt},$$

$$|\frac{\partial}{\partial p}(f(t)e^{-pt})| \le t|f(t)|e^{-ct},$$

kde pravá strana je integrovatelná na $(0,\infty)$ podle $V1$ a tedy je to integrovatelná majoranta. Předpoklady věty o derivaci podle parametru jsou splněny a tvrzení proto platí.

Poznámka:

(1) Při počítání Laplaceovy transformace obvykle nepotřebujeme znát přesnou hodnotu c_f. Jelikož $\mathcal{L}f$ je holomorfní, je určena svými hodnotami na libovolné polorovině tvaru $\{p \in \mathbb{C} : \Re p > c\}$.

(2) Uvažme množinu funkcí holomorfních na nějaké polorovině uvedého tvaru, přičemž dvě takové funkce ztotožníme, pokud se rovnají na nějaké polorovině téhož tvaru. Na této množině lze přirozeným způsobem definovat operace, s nimiž tvoří vektorový prostor. (Jde o tzv. **germy** funkcí.)

Věta 3: Laplaceova transformace některých funkcí

(1) $\mathcal{L}(1)(p) = \frac{1}{p}$, $\operatorname{Re}p > 0$;

(2) $\mathcal{L}(e^{\alpha t})(p) = \frac{1}{p-\alpha}$, $\operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$;

(3) $\mathcal{L}(t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$, $\operatorname{Re}p > 0$, $n \in \mathbb{N}$;

(4) $\mathcal{L}(t^\nu)(p) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{m_{\nu+1}(p)}$, $\operatorname{Re}p > 0$, $\nu \in (-1,+\infty)$;

(5) $\mathcal{L}(t^n e^{\alpha t})(p) = \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$, $\operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

DŮKAZ:

(1) Sami.

(2) Sami.

(3) Per partes + indukce.

(4) Nechť $\nu \in (-1,\infty)$. Pro $\operatorname{Re} s > 0$ definujeme

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Funkce t^ν je z L^1_+, $c_{t^\nu} \le 0$, a proto $\mathcal{L}(t^\nu)$ je holomorfní na $\{p : \operatorname{Re} p > 0\}$.

$$\mathcal{L}(t^\nu)(p) = \int_0^\infty t^\nu e^{-pt}\,\mathrm{d}t \overset{t=\frac{\tau}{p}}{=} \int_0^\infty \frac{t^\nu}{p^\nu} e^{-\tau} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}\tau = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}.$$

Tedy tento vzorec platí pro $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$. Z věty o jednoznačnosti pak platí i pro $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > 0$.

Věta 4: Laplaceova transformace a operace

(1) $\mathcal{L}$ je lineární zobrazení.

(2) $\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}f(\frac{p}{\alpha})$, $f \in L_1^+$, $\alpha > 0$.

(3) Nechť $f \in L_1^+$ a $\tau > 0$. Definujme funkci f_τ předpisem

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau, \\ f(t-\tau) & t \ge \tau. \end{cases}$$

Pak $\mathcal{L}f_\tau(p) = e^{-p\tau}\mathcal{L}f(p)$.

(4) $\mathcal{L}(e^{\sigma t} f(t))(p) = \mathcal{L}f(p-\sigma)$, $f \in L_1^+$, $\sigma \in \mathbb{C}$.

(5) Nechť $f \in L_1^+$. Definujme funkci F předpisem $F(t) = \int_0^t f$. Pak $F \in L_1^+$ a $\mathcal{L}(F)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$.

(6) Nechť f má spojitou derivaci na $[0,+\infty)$, přičemž v bodě 0 uvažujeme derivaci zprava. Pokud $f' \in L_1^+$, pak $\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}f(p) - f(0)$.

(7) Nechť funkce $\frac{f(t)}{t}$ patří do L_1^+. Pak i $f \in L_1^+$ a

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p) = \lim_{r\to+\infty} \int_{[p,p+r]} \mathcal{L}f.$$

(8) Nechť $f_1, f_2 \in L_1^+$. Pak jejich konvoluce definovaná vzorcem

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \in [0,+\infty),$$

patří do L_1^+ a platí $\mathcal{L}(f_1 * f_2) = \mathcal{L}(f_1)\mathcal{L}(f_2)$.

Důkaz:

(1) Z definice.

(2) Z definice.

(3) Z definice.

(4) Z definice.

(5) Formálně provedeme výpočet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}F(p) &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right) e^{-pt}\,\mathrm{d}t \overset{\mathrm{FV}}{=} \int_{\{(u,t),0\le u\le t\}} f(u)e^{-pt}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \overset{\mathrm{FV}}{=} \\ &\overset{\mathrm{FV}}{=} \int_0^\infty \left(\int_u^\infty f(u)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u)\left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_u^\infty \mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u)e^{-pu}\frac{1}{p}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{p}\mathcal{L}f(p) \end{aligned}$$

Funkce f je z $\mathcal{L}^1_+$ a $\operatorname{Re} f > c_f$, $\operatorname{Re} f > 0$:

$$\int_{(u,t),0\le u\le t} |f(u)e^{-pt}|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty |f(u)|\frac{e^{-u\operatorname{Re} p}}{\operatorname{Re} p}\,\mathrm{d}u < \infty.$$

V předchozím výpočtu jsme tedy mohli použít Fubiniho větu a výpočet je v pořádku.

(6) Bez důkazu.

(7) Bez důkazu.

5.2 Inverzní formule

Věta 5: Prostota Laplaceovy transformace

Nechť $f \in L_1^+$. Existuje-li takové $c > c_f$, že $\mathcal{L}f$ je nulová na polorovině $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > c\}$, pak $f = 0$ skoro všude na $[0, +\infty)$.

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a F je funkce holomorfní na polorovině $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > c\}$, pro kterou platí $\lim\limits_{\substack{p \to +\infty \\ \operatorname{Re} p \geq c}} F(p) = 0$. Zvolme libovolně $\xi > c$ a pro $t \in \mathbb{R}$ položme

$$\mathcal{L}_{-1}(F)(t) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{[\xi - iy, \xi + iy]} F(p) e^{ipt} \, \mathrm{d}p,$$

pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$).

Věta 6:

Nechť c a F je jako výše.

(1) Nechť $t \in \mathbb{R}$ je libovolné. Pak existence a hodnota $\mathcal{L}_{-1}(F)(t)$ nezávisí na volbě $\xi \in (c, +\infty)$.

(2) Nechť pro nějaké $\xi > c$ je funkce $u \mapsto F(\xi + iu)$ integrovatelná na $\mathbb{R}$. Pak platí:

  (i) Funkce $f(t) = \mathcal{L}_{-1}(F)(t)$ je definována na $\mathbb{R}$.

  (ii) $f|_{[0,+\infty)}$ patří do L_1^+ a $c_{f|_{[0,+\infty)}} \leq \xi$.

  (iii) $\mathcal{L}(f|_{[0,+\infty)}) = F$.

Věta 7:

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a F je funkce holomorfní na polorovině $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > c\}$. Dále nechť existují taková $A, B > 0$, že

$$|F(p)| \leq \frac{A}{|p|^2} \qquad \text{pro } p \in \mathbb{C}, |p| \geq B, \operatorname{Re} p > c.$$

Definujme funkci f předpisem $f(t) = \mathcal{L}_{-1}(F)(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. Pak platí:

(1) f je spojitá na $\mathbb{R}$ a $f(t) = 0$ pro $t \leq 0$.

(2) Existují taková $\alpha, \beta \geq 0$, že $|f(t)| \leq \alpha e^{\beta t}$ pro $t \geq 0$.

(3) $\mathcal{L}(f|_{[0,+\infty)}) = F$.

Věta 8:

Nechť M označuje množinu všech komplexních lineárních kombinací funkcí tvaru $t^n e^{\alpha t}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, zúžených na interval $[0, +\infty)$ a N nechť označuje množinu všech racionálních funkcí, které mají v ∞ limitu nula (tedy stupeň jmenovatele je větší než stupeň čitatele). Pak platí:

(1) $\mathcal{L}$ zobrazuje M prostě na N.

(2) Pro každé $f \in M$ je $f = \mathcal{L}_{-1}(\mathcal{L}(f))$.

(3) Nechť $F \in N$ a nechť kořeny jmenovatele jsou $p_1, \ldots, p_k$. Pak

$$\mathcal{L}_{-1}(F)(t) = \begin{cases} \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{p_j}(F(p)e^{pt}) & \text{pro } t > 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

(4) Nechť $F \in N$. Pak $\lim_{t \to 0+} \mathcal{L}_{-1}(F)(t) = 0$, právě když stupeň jmenovatele je alespoň o dva větší než stupeň čitatele.