Printscreenem jsem vystřihal věty a definice z různých skript.
Kalenda 09/10
Skripta Kalendy na komplexku z 2014 přikládám.
Skripta Malého na míru z 2016 přikládám.
Skripta na funkcionálu ze stránek Spurného Spurný 19/20 a přikládám seznam vět.
Na Furirku přikládám seznamy vět z analýzy od Hencla a odkaz na skripta Analýza 2020
Samozřejmě za nic neručím a vlastně ani nedoporučuju se učit jen z tohoto, ale jako přehled co byste měli znát k ssz to snad bude stačit. pis

1 Lebesgueův integrál

σ-algebra je definována jako σ-okruh obsahující celý prostor X.
Je to nejdůležitější množinový systém pro teorii míry. K ověření, že množinový systém $\mathcal{S}$ je σ-algebra stačí tyto axiomy:
(S1-1) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
(S2-2) $A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S}$,
(S3-3) $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{S}$.
Je-li $\mathcal{S}$ σ-algebra na X, dvojice $(X, \mathcal{S})$ se nazývá *měřitelný prostor*. Množiny $A \in \mathcal{S}$ se nazývají $\mathcal{S}$-měřitelné množiny. Nehrozí-li nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných množinách*.

1.10. **Definice** (Generování množinových systémů)**.** Je-li $\mathcal{F}$ libovolný systém podmnožin X, potom existuje nejmenší σ-algebra obsahující $\mathcal{F}$. Tuto σ-algebru dostaneme jako průnik všech σ-algeber obsahujících $\mathcal{F}$ a značíme ji $\sigma(\mathcal{F})$.

1.11. **Definice** (Borelovské množiny)**.** Nechť X je topologický prostor a $\mathcal{G}$ je systém všech jeho otevřených podmnožin. Potom definujeme $\mathcal{B}(X)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující $\mathcal{G}$ (viz definice 1.10). σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ obsahuje kromě otevřených množin též všechny uzavřené množiny. $\mathcal{B}(X)$ se nazývá *borelovská σ-algebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny*.

V $\mathbb{R}$ jsou borelovské všechny intervaly, množina všech racionálních čísel, atd. Příklady neborelovských množin se konstruují velmi těžko.

Někdy je výhodné generovat $\mathcal{B}(X)$ jinak než systémem všech otevřených množin. Na $\overline{\mathbb{R}}$ je přirozená topologie generovaná intervaly (a, b), $(a, \infty]$ a $[-\infty, b)$. Tudíž $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ je σ-algebra na $\overline{\mathbb{R}}$ generovaná intervaly. Podobně $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je generovaná intervaly.

1.12. **Definice** (Míra)**.** Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže splňuje
(M1-1) $\mu(\emptyset) = 0$,
(M2-2) (*σ-additivita*) jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, jsou po dvou disjunktní, potom

$$\mu(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j).$$

Trojice $(X, \mathcal{S}, \mu)$ se nazývá *prostor s mírou*.

Zdůrazněme, že definice míry zahrnuje, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je σ-algebra.

1.14. **Definice** (Terminologie teorie míry). Míra μ na měřitelném prostoru $(X, \mathcal{S})$ se nazývá

(a) *konečná,* jestliže $\mu(X) < \infty$,
(b) *σ-konečná,* jestliže existují $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(X_j) < \infty$ a $X = \bigcup_j X_j$,
(c) *pravděpodobnostní,* jestliže $\mu(X) = 1$,
(d) *úplná,* jestliže každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná (a tudíž také míry nula).

Fráze *skoro všude* nebo *μ-skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X. Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{S}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \setminus N$. Používá se zejména pro rovnost a nerovnosti mezi funkcemi a pro bodovou konvergenci posloupnosti funkcí.

2.1. **Definice** (Lebesgueova vnější míra). Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je libovolná množina. Definujme

$$\ell^*(A) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell(Q_j) : \ Q_j \in \mathcal{I}_n, \ \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset A\Big\}. \tag{2}$$

Množinová funkce $\ell^* \colon A \mapsto \ell^*(A)$, definovaná na potenční množině $2^{\mathbb{R}^n}$, se nazývá *Lebesgueova vnější míra.* Součty, vyskytující se na pravé straně (2) se nazývají *horní součty* k $\ell^*(A)$.

Množinová funkce ℓ^* umí měřit všechny množiny, ale není aditivní. Proto v dalším se budeme snažit z ní vytvořit aditivní funkci (dokonce míru, viz definice 1.12), za což zaplatíme zúžením definičního oboru. Výsledný obor všech měřitelných množin však již bude dostatečně bohatý pro všechny aplikace.

2.2. **Měřitelné množiny a Lebesgueova míra.** Řekneme, že množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je (Lebesgueovsky) *měřitelná*, jestliže pro každý interval $Q \in \mathcal{I}_n$ platí

$$\ell(Q) = \ell^*(Q \cap A) + \ell^*(Q \setminus A). \tag{3}$$

Množinu všech Lebesgueovsky měřitelných množin budeme značit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ a množinová funkce

$$\lambda : A \mapsto \ell^*(A), \qquad A \in \mathfrak{M}$$

bude *Lebesgueova míra.*

2.3. **Oznámení věty.** *Nechť $Q \in \mathcal{I}_n$. Potom $Q \in \mathfrak{M}$ a $\lambda(Q) = \ell^*(Q) = \ell(Q)$.*

2.4. **Oznámení věty.** *$\mathfrak{M}$ je σ-algebra obsahující všechny borelovské podmnožiny $\mathbb{R}^n$ a λ je míra na $\mathfrak{M}$.*

3.3. **Definice** (Měřitelné funkce). Nechť $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že funkce $f \colon D \to \overline{\mathbb{R}}$ je *$\mathcal{S}$-měřitelná, jestliže* pro každý interval $I \subset \overline{\mathbb{R}}$ je $f^{-1}(I) \in \mathcal{S}$. Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných funkcích.*

3.7. **Větička** (Měřitelnost vzoru). *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $A \subset \mathbb{R}$ je borelovská množina. Potom $\{f \in A\} \in \mathcal{S}$.*

3.8. **Větička** (Měřitelnost složené funkce). *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a φ je spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině $M \subset \overline{\mathbb{R}}$. Potom množina $D' := \{f \in M\}$ je měřitelná a složená funkce $\varphi \circ f$ je měřitelná na D'.*

3.9. **Varování.** Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelný. Také není obecně pravda, že inverzní funkce k měřitelné funkci by byla měřitelná funkce. Viz priklad 19.5

3.10. **Věta** (Operace s měřitelnými funkcemi). *Nechť funkce f, f_j jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak platí následující:*

(a) *Funkce $|f|$, f^+, f^-, f^2 jsou měřitelné na D, $1/f$ je měřitelná na $\{f \neq 0\}$.*
(b) *Funkce $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$, f_1/f_2 jsou měřitelné vždy na množině, kde učiněná operace dává smysl podle úmluvy 3.2.*
(c) *Funkce $\sup_j f_j$, $\inf_j f_j$, $\limsup_j f_j$, $\liminf_j f_j$ jsou měřitelné na D.*
(d) *Množina D' všech bodů, kde existuje $\lim_j f_j$ je měřitelná a $\lim_j f_j$ je měřitelná na D'.*

3.11. **Jednoduché funkce.** Funkci f na $D \in \mathcal{S}$ nazveme *$\mathcal{S}$-jednoduchou*, jestliže f je lineární kombinace charakteristických funkcí množin z $\mathcal{S}$, tj. existují-li množiny $A_j \in \mathcal{S}$ a $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, tak, že

$$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Pokud bude jasné, jakou σ-algebru máme na mysli, budeme mluvit prostě o jednoduchých funkcích.

3.12. **Aproximace jednoduchými funkcemi.** *Nechť $(X, \mathcal{S})$ je měřitelný prostor. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom existují nezáporné jednoduché funkce $f_k \nearrow f$. Navíc, f lze vyjádřit ve tvaru*

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j}, \tag{5}$$

kde $E_j \in \mathcal{S}$.

4.1. **Definice** (Rozklad)**.** Konečný soubor množin $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{S}$ nazveme *rozkladem* nebo *Lebesgueovským dělením* množiny $D \in \mathcal{S}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j = D.$$

4.2. **Terminologická poznámka.** Rozdíl mezi obyčejným "riemannovským" dělením a lebesgueovským spočívá hlavně v tom, že riemannovské dělení je pouze na intervaly, u lebesgueovského se dělí na libovolné měřitelné množiny. Tento rozdíl podstatně přispívá k bohatství třídy lebesgueovsky integrovatelných funkcí.

4.4. **Definice** (Konstrukce integrálu)**.** Nechť $D, D' \in \mathcal{S}$ a $f\colon D' \to \overline{\mathbb{R}}$ je měřitelná funkce. Integrál $\int_D f\,d\mu$ vybudujeme ve třech krocích. V prvních dvou krocích předpokládáme $D' = D$.

1. Je-li f nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$\begin{aligned} \int_D f\,d\mu = \sup\Big\{ &\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je rozklad } D, \\ &\qquad 0 \le \alpha_j \le f \text{ na } A_j,\ j = 1, \dots, m \Big\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Součty vyskytující se v (6) nazýváme *dolními součty* k funkci f. Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován *vždy*, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D, definujeme

$$\int_D f\,d\mu = \int_D f^+\,d\mu - \int_D f^-\,d\mu, \tag{7}$$

pokud rozdíl v (7) má smysl. Pokud

$$\int_D f^+\,d\mu = \int_D f^-\,d\mu = \infty,$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná (přesně: $\mathcal{S}$-měřitelná) funkce na $D' \neq D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f\,d\mu = \int_{D \cap D'} f\,d\mu.$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D'.

Je-li integrál $\int_D f\,d\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f\,d\mu$ *konverguje* nebo že f je *integrovatelná*.

4.7. **Oznámení věty** (Lebesgueův integrál a Newtonův integrál). Nechť funkce $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ má na intervalu (a, b) primitivní funkci F.

(a) Je-li f λ-integrovatelná na (a, b), potom existují vlastní jednostranné limity $F(b-)$ a $F(a+)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-) - F(a+).$$

(b) Jestliže $f \geq 0$ a existují vlastní jednostranné limity $F(b-)$ a $F(a+)$, pak f je λ-integrovatelná na (a, b).

4.8. **Věta** (Různé vlastnosti Lebesgueova integrálu). *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a f, g jsou měřitelné funkce na D.*

(a) *Je-li $f \geq 0$, D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$ a $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak*

$$\int_{D_1} f\,d\mu \leq \int_{D_2} f\,d\mu.$$

(b) *Jestliže D_1, $D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ a $D_1 \cup D_2 = D$, pak*

$$\int_D f\,d\mu = \int_{D_1} f\,d\mu + \int_{D_2} f\,d\mu.$$

(c) *Je-li $\int_D |f|\,d\mu < \infty$, pak $|f| < \infty$ skoro všude.*

(d) *Je-li $\int_D |f|\,d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.*

(e) (monotonie) *Jestliže f, g mají integrál a $f \leq g$ skoro všude, pak*

$$\int_D f\,d\mu \leq \int_D g\,d\mu.$$

(f) *Je-li $\int_D g\,d\mu < \infty$ a $|f| \leq g$ skoro všude, pak f je integrovatelná.*

4.14. **Důsledek** (Spojitá závislost na integračním oboru). *Nechť D, $E_k \in \mathcal{S}$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, $\bigcup_k E_k = D$. Nechť f je nezáporná měřitelná funkce na D. Potom*

$$\int_D f\,d\mu = \lim_k \int_{E_k} f\,d\mu.$$

4.15. **Věta** (Linearita integrálu). (a) *Nechť f, g jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom*

$$\int_D (f+g)\,d\mu = \int_D f\,d\mu + \int_D g\,d\mu,$$

má-li pravá strana smysl. (b) *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $\gamma \in \mathbb{R}$. Pokud f má integrál, pak*

$$\int_D \gamma f\,d\mu = \gamma \int_D f\,d\mu.$$

5.4. **Věta** (vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom $(N) \int_a^b f(x)\,dx$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce f. V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.*

5.5. **Důsledek** (Diskuse vztahu mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem). Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b).

(a) *Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b, konverguje i Newtonův a to absolutně.*

(b) *Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, pak konverguje i Lebesgueův.*

(c) *Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce f, pak oba mají stejnou hodnotu.*

(d) *Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje neabsolutně, pak Lebesgueův integrál nemá smysl.*

5.6. **Věta** (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem). *Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b konverguje a je roven integrálu Riemannovu.*

4.13. **Věta** (Levi, Lebesgue, monotone convergence theorem). *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$, $0 \le f_1 \le f_2 \le \dots$, a $f = \lim f_j$. Potom*

$$\int_D f\,d\mu = \lim_j \int_D f_j\,d\mu. \tag{11}$$

6.1. **Lemma** (Fatouovo). *Nechť $D \in S$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D. Potom*

$$\int_D \liminf_j f_j \le \liminf_j \int_D f_j. \tag{15}$$

6.2. **Věta** (Lebesgueova, dominated convergence theorem). *Nechť $D \in S$ a f, f_j, $j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na D. Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná* majoranta*) tak, že*

$$|f_j(x)| \le g(x), \qquad j = 1, 2, \dots, \qquad x \in D. \tag{16}$$

Potom

$$\int_D f = \lim_j \int_D f_j. \tag{17}$$

14.1. **Definice** (Součin měr). Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$, a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ-konečné. Uvažujme systém $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ všech podmnožin $X \times Y$ tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{T}$. Takovým množinám budeme říkat *měřitelné obdélníky.* Na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ definujeme množinovou funkci $\mu \times \nu$ předpisem

$$(\mu{\times}\nu)\ (A \times B) = \mu(A)\,\nu(B).$$

Systém množin $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ generuje tzv. *součinovou σ-algebru* $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T} := \sigma(\mathcal{S} \times \mathcal{T})$. V dalším (věta 14.5) uvidíme, že existuje právě jedna míra ρ na $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ tak, že

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B), \qquad A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{T}.$$

Tuto míru budeme nazývat *součin měr* μ a ν a značit $\mu{\otimes}\nu$. Její zúplnění budeme nazývat *úplný součin měr* a značit $(\mathcal{S}\overline{\otimes}\mathcal{T},\ \mu\overline{\otimes}\nu)$.

14.9. **Definice** (Řezy). Nechť $M \subset X \times Y$. Značíme

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in Y : (x, y) \in M\}, \qquad && x \in X, \\ M^{*,y} &= \{x \in X : (x, y) \in M\}, \qquad && y \in Y. \end{aligned}$$

Tyto množiny se nazývají *řezy.*

14.11. **Věta** (Fubiniova). *Nechť $(X, \mathcal{S}, \mu)$ a $(Y, \mathcal{T}, \nu)$ jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ-konečné. Buď $(\mathcal{R}, \rho)$ součin měr μ a ν a $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\rho})$ jejich úplný součin. Nechť f je $\overline{\rho}$-měřitelná funkce na $\overline{\rho}$-měřitelné množině $M \subset X \times Y$. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y)\,d\overline{\rho}(x, y)$$

má smysl. Potom pro μ-skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y)\,d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_X g\,d\mu$$

a

$$\int_M f(x, y)\,d\overline{\rho}(x, y) = \int_X g\,d\mu = \int_X \Big(\int_{M^{x,*}} f(x, y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x). \tag{33}$$

15.3. **Věta** (o substituci). *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_M u(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t))|J\varphi(t)|\,dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

2 Banachovy a Hilbertovy prostory

Definice 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ nazýváme *normou* na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem.*

Tvrzení 2. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X.

Definice 3. *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

PŘÍKLADY 4.

a) Prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normami $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \in [1, +\infty)$, případně $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ jsou Banachovy prostory.

b)
- Nechť K je kompaktní prostor a $C(K)$ je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ všech spojitých funkcí z K do $\mathbb{K}$. Na $C(K)$ zavedeme normu předpisem $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$ pro $f \in C(K)$. Pak $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ je Banachův prostor. Platí, že $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, právě když $f_n \rightrightarrows f$. Důkaz úplnosti je stejný jako pro prostor $C([a, b])$ známý z přednášky z matematické analýzy.
- Prostor všech konvergentních posloupností $c = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n \text{ existuje vlastní}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je Banachův prostor. Důkaz lze vést přímo, nebo lze využít faktu, že c je lineárně izometrický prostoru $C(K)$, kde $K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^\infty \{\frac{1}{n}\}$ s metrikou zděděnou z $\mathbb{R}$ (viz Tvrzení 60(b)).
- Prostor $c_0 = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \lim x_n = 0\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je Banachův prostor. Je to totiž uzavřený podprostor Banachova prostoru c (viz Tvrzení 5(b)).
- Prostor $c_{00} = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ (x_n)_{n=1}^\infty \text{ má pouze konečně mnoho nenulových členů}\right\}$ se supremovou normou $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je normovaný lineární prostor, který není Banachův: Posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ prvků c_{00}, kde $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)$, je cauchyovská, ale není konvergentní v c_{00}.

- Prostor $\ell_p = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K};\ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty\right\}$, $1 \le p < \infty$ s normou $\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ je Banachův prostor. (Je to speciální případ prostorů uvedených níže.)

Tvrzení 4. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.

(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

Definice 7 (ekvivalentní normy)**.** Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le B\|x\|_2$.

Věta 8. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Definice 65. *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem.*

Definice 67. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

PŘÍKLAD 83. Snadno se ověří, že prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ s normou $\|\cdot\|_2$ jsou Hilbertovy prostory se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$. Obecněji, je-li μ míra, pak prostor $L_2(\mu)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f, g\rangle = \int_X f\,\overline{g}\,\mathrm{d}\mu$. Speciálně, ℓ_2 je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y_i}$.

Podprostor ℓ_2 tvořený vektory pouze s konečně mnoha nenulovými souřadnicemi je prostor se skalárním součinem, který není Hilbertův.

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineární*, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 45. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Důsledek 72. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T\colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 52. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Věta 73. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak na prostoru $X \oplus_2 Y$ existuje skalární součin, který rozšiřuje skalární součiny na X a Y, a který indukuje normu $\|\cdot\|_2$. Speciálně, jsou-li X, Y Hilbertovy prostory, pak $X \oplus_2 Y$ je Hilbertův prostor.*

Tvrzení 37. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je spojité.

(ii) T je spojité v jednom bodě.

(iii) T *je spojité v* 0.

(iv) *Existuje* $C \geq 0$ *tak, že* $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(v) T *je lipschitzovské.*

(vi) T *je stejnoměrně spojité.*

(vii) $T(A)$ *je omezená pro každou omezenou* $A \subset X$.

(viii) $T(B_X)$ *je omezená.*

(ix) $T\big(U(0,\delta)\big)$ *je omezená pro nějaké* $\delta > 0$.

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Věta 41. *Nechť* X *je normovaný lineární prostor a* Y *je Banachův prostor. Pak* $\mathcal{L}(X,Y)$ *je Banachův prostor.*

Věta 49. *Nechť* $X, \widehat{X}$ *a* Y *jsou normované lineární prostory,* X *je hustý v* $\widehat{X}$ *a* Y *je úplný. Nechť dále* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Pak existuje právě jeden operátor* $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X},Y)$ *rozšiřující* T, *tj.* $\widehat{T}\restriction_X = T$. *Navíc platí* $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

Věta 124 (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť* X *je Banachův prostor,* Y *je normovaný lineární prostor a* $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé* $x \in X$ *je* $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Definice 126. Zobrazení $f: X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 127 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)**.** *Nechť* X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *je na. Pak* T *je otevřené zobrazení.*

Důsledek 129 (S. Banach, 1929)**.** *Nechť* X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. *Pak* T *je izomorfismus* X *na* Y, *právě když* T *je prostý a na.*

Definice 131. Je-li $f: X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení* f. Říkáme, že zobrazení $f: X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, *má uzavřený graf*, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 132 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)**.** *Nechť* X, Y *jsou Banachovy prostory a* $T: X \to Y$ *je lineární zobrazení. Pak* T *je spojité, právě když má uzavřený graf.*

3 Hilbertovy prostory

Definice 74. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^{\perp} = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* A.

Definice 26. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme *zobecněnou řadou*. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F: \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma}\|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Věta 81. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

Definice 82. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- *ortonormální*, pokud $A \subset S_X$ a $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- *maximální ortonormální*, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Poznámka (důležitá). Uvědomme si, že v definici ortonormální báze lze podle Věty 102 v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ podmínku $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$ (tj. předpoklad, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ konverguje bezpodmínečně) nahradit podmínkou $x = \sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ (tj. obyčejnou konvergencí). Podobně lze v následujících tvrzeních všude, kde předpokládáme konvergenci zobecněné řady $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$, kde $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém, tento předpoklad v případě $\Gamma = \mathbb{N}$ nahradit předpokladem obyčejné konvergence řady $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$.

Věta 84. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

Důsledek 87. *Každá ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem je lineárně nezávislá.*

Věta 89 (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.*

Věta 90. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v X. Uvažujme následující tvrzení:*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma}\langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé $x \in X$.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Pak (i)⇔(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je-li X Hilbertův, pak jsou všechna tvrzení ekvivalentní.

- Pro Hilbertův prostor $L_2([0, 2\pi])$ je systém $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx);\ n \in \mathbb{N}\right\}$ ortonormální bází. Ortonormalita plyne z klasické teorie Fourierových řad. Hustota lineárního obalu plyne z Fejérovy[19] věty zkombinované s důsledkem Luzinovy věty. Alternativně lze ukázat, že trigonometrický ortonormální systém je maximální: Nechť $f \in L_2([0, 2\pi])$ je kolmé ke všem prvkům tohoto systému. Protože též $f \in L_1([0, 2\pi])$, můžeme spočítat Fourierovy koeficienty příslušné funkci f. Ty jsou ovšem díky kolmosti rovny 0. Podle věty o jednoznačnosti to znamená, že $f = 0$ s. v., a tedy $f = 0$ v $L_2([0, 2\pi])$.

  Nyní též vidíme, proč se řadě v (ii) ve Větě 112 říká abstraktní Fourierova řada: Pro bázi popsanou výše je to totiž formálně klasická Fourierova řada a čísla $\langle x, e_\gamma\rangle$ jsou přesně klasické Fourierovy koeficienty. Tato Fourierova řada ovšem konverguje ve smyslu prostoru $L_2([0, 2\pi])$, nikoli bodově, jak se studuje v klasické teorii.

Důsledek 91. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

Věta 92 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T: H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

Tvrzení 93. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Je-li $\dim X = n \in \mathbb{N}$, pak každá ortonormální báze má n prvků. Je-li $\dim X = \infty$ a X je separabilní, pak každá ortonormální báze je nekonečná spočetná.*

Věta 78 (Frigyes Riesz, 1934). *Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Lemma 79 (F. Riesz, 1934). *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.*

4 Fourierovy řady

Značení: Symbolem $\mathcal{P}_{2\pi}$ značíme množinu všech lokálně integrovatelných 2π-periodických funkcí na $\mathbf{R}$.

Definice. Nechť a_k, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ a b_k, $k \in \mathbf{N}$, jsou posloupnosti reálných čísel. Pak řadu funkcí

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickou řadou.* Je-li navíc $n \in \mathbf{N}$, pak funkci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *trigonometrickým polynomem stupně n.*

Věta L 17.1 (Fourierovy vzorce). *Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti reálných čísel a řada*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

konverguje stejnoměrně k funkci f na $\mathbf{R}$. Potom

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$. Pak posloupnosti reálných čísel $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, definované předpisy

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \in \mathbf{N},$$

nazýváme *Fourierovými koeficienty* funkce f. Trigonometrickou řadu

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Fourierovou řadou* funkce f. Vztah mezi funkcí f a její Fourierovou řadou Sf značíme symbolem $f \sim Sf$. Pro $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ dále definujeme *částečný součet Fourierovy řady* funkce f předpisem

$$S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Věta L 17.9 (Fourierovy koeficienty určují funkci). *Nechť $f, g \in \mathcal{P}_{2\pi}$ mají stejné Fourierovy koeficienty. Potom $f = g$ skoro všude.*

Důsledek Vět 11.10 a 11.12: Nechť $f \in L^2(0, 2\pi)$ a a_k, b_k jsou Fourierovy koeficienty f. Pak platí

$$f(x) = S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ve smyslu rovnosti rovnosti L^2 funkcí. Tedy v příslušném metrickém prostoru platí

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Navíc platí Parsevalova rovnost

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom funkci

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Dirichletovým jádrem.*

Věta T 17.3 (Riemannovo–Lebesgueovo lemma). *Nechť $(a, b) \subset \mathbf{R}$ je omezený interval a nechť $f \in L^1(a, b)$. Potom*

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \cos(tx)\, dx = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t \to \infty} \int_a^b f(x) \sin(tx)\, dx = 0.$$

Důsledek: Jsou-li posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Fourierovými koeficienty nějaké funkce $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, pak $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$.

Věta L 17.5 (Diniovo kritérium). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $x \in \mathbf{R}$. Nechť existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$ a nechť dále existují vlastní limity*

$$\lim_{t\to 0_+} \frac{f(x+t)-f(x+)}{t} \qquad \text{a} \qquad \lim_{t\to 0_+} \frac{f(x-t)-f(x-)}{t}.$$

Potom řada Sf konverguje v bodě x a platí

$$Sf(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}.$$

Speciálně, má-li funkce f konečné jednostranné derivace v bodě x, potom $Sf(x) = f(x)$.

Definice. Nechť $[a,b] \subset \mathbf{R}$ je uzavřený interval a nechť $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Definujme veličiny

- $V^+(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1}))^+\right\}$ (kladná variace),
- $V^-(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n (f(x_i)-f(x_{i-1}))^-\right\}$ (záporná variace),
- $V(f;a,b) := \sup_D \left\{\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|\right\}$ (totální variace),

kde supremum bereme přes všechna dělení $D = \{x_i\}_{i=0}^n$ intervalu $[a,b]$ tvaru $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. Dále zaveme značení

$$\begin{aligned} V_f^+(x) &= V^+(f;a,x), \\ V_f^-(x) &= V^-(f;a,x), \\ V_f(x) &= V(f;a,x). \end{aligned}$$

Řekneme, že funkce f má na intervalu $I \subset \mathbf{R}$ *omezenou variaci*, jestliže $V(f;a,b) < \infty$. Množinu všech funkcí s omezenou variací na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathrm{BV}([a,b])$.

Věta T 17.6 (Jordanovo–Dirichletovo kritérium). *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ a nechť $f \in \mathrm{BV}([0,2\pi])$. Potom*

(a) *pro každé $x \in [0,2\pi]$ konverguje Fourierova řada $Sf(x)$ a platí*

$$Sf(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2};$$

(b) *je-li funkce f navíc spojitá na $(a,b) \subset [0,2\pi]$, potom*

$$S_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } [a,b].$$

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost reálných čísel. Řekneme, že a_n konverguje k $a \in \mathbf{R}$ v Cesarově smyslu, pokud pro posloupnost

$$\sigma_n = \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1} \text{ konverguje k } a.$$

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Potom funkci

$$K_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme *Fejérovým jádrem*.

Definice. Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$, $x \in \mathbf{R}$ a nechť $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$. Pak výraz

$$\sigma_n f(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

nazýváme n-tým *částečným Fejérovým součtem* funkce f.

Věta T 17.7 (Fejérova)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$.*

(a) *Jestliže pro nějaké $x \in \mathbf{R}$ existují vlastní limity $f(x+)$ a $f(x-)$, potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

(b) *Je-li funkce f spojitá na nějakém intervalu $(a, b) \subset \mathbf{R}$, potom*

$$\sigma_n f \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} f \quad \text{na } (a, b).$$

Věta L 17.8 (Weierstrassova - trigonometrická verze)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}_{2\pi}$ je spojitá na $\mathbf{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje trigonometrický polynom $T \in \mathcal{T}$ splující*

$$\|f - T\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

5 Funkce komplexní proměnné

Definice:

(1) **Komplexní funkcí komplexní proměnné** rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$.

(2) Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné a $a \in \mathbb{C}$. **Derivací funkce f podle komplexní proměnné v bodě** a (stručněji **derivací funkce f v bodě** a) rozumíme (komplexní) číslo

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud limita na pravé straně existuje (v $\mathbb{C}$).

Poznámka:

(1) Pro derivaci podle komplexní proměnné platí věty o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce ve stejné podobě jako pro derivaci v $\mathbb{R}$.

(2) Má-li f v bodě $a \in \mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné, je v bodě a spojitá.

(3) Je-li f komplexní funkce komplexní proměnné, g komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$, pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

pokud obě derivace na pravé straně existují.

Věta 3:

Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné. Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ odpovídající f při ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$; tj. takovou, že

$$f(x + iy) = \tilde{f}_1(x, y) + i\tilde{f}_2(x, y)$$

pro $x + iy$ z definičního oboru f.

(1) (**Cauchy-Riemannovy podmínky**) Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Pak f má v bodě z derivaci podle komplexní proměnné, právě když $\tilde{f}$ má v bodě (a, b) totální diferenciál a platí

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a, b) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b).$$

(2) Existuje-li $f'(z)$, je Jacobiho determinant $\tilde{f}$ v bodě (a, b) roven $|f'(z)|^2$. Speciálně, Jacobiho matice $\tilde{f}$ v bodě (a, b) je regulární, právě když $f'(z) \neq 0$.

Definice:

- Nechť $M \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je **holomorfní na množině** M, jestliže existuje otevřená množina $G \supset M$ taková, že f má derivaci (podle komplexní proměnné) v každém bodě množiny G.
- Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá **celá funkce**.

Cestou neboli **po částech hladkou křivkou** v $\mathbb{C}$ rozumíme křivku $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, pro kterou existuje takové dělení $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$, že pro každé $j = 1, \ldots, n$ je funkce φ třídy C^1 na $[s_{j-1}, s_j]$ (tj. derivace φ' je spojitá na (s_{j-1}, s_j) a má v krajních bodech s_{j-1} a s_j vlastní jednostranné limity).

Je-li navíc $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **integrál funkce f podél cesty** φ vzorcem

$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

kde integrál na pravé straně je zobecněný Riemannův, tj. roven

$$\sum_{j=1}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Věta 3:

Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G. Pak pro každou cestu $\varphi : [a, b] \to G$ platí $\displaystyle\int_\varphi f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$.

Speciálně, je-li φ uzavřená cesta v G, pak $\displaystyle\int_\varphi f = 0$.

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Ω je **souvislá** (tj. pro každou neprázdnou $G \subset \Omega$ takovou, že G i $\Omega \setminus G$ jsou otevřené množiny, platí $G = \Omega$).

Definice:

Otevřenou souvislou podmnožinu $\mathbb{C}$ nazýváme **oblast**.

Definice:

Nechť φ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Pak **index bodu a vzhledem ke křivce** φ je definován vzorcem

$$\operatorname{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina a $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že bod z_0 je **hromadným bodem množiny** M, jestliže každé okolí bodu z_0 obsahuje nějaký bod množiny M různý od z_0. Je-li navíc $\Omega \subset \mathbb{C}$ množina obsahující M, říkáme, že M je **izolovaná v** Ω, jestliže nemá v Ω žádný hromadný bod.

Definice. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je neprázdná otevřená množina.

(i) Symbolem $H(G)$ budeme značit množinu všech komplexních funkcí holomorfních na G.

(ii) Funkce $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ se nazývá **meromorfní**, jestliže je spojitá na G a existuje množina $M \subset G$, která je izolovaná v G (tj. nemá v G hromadný bod), taková, že f je holomorfní na $G \setminus M$.

(iii) Množinu všech funkcí meromorfních na G značíme $M(G)$.

Poznámka. V bodech výjimečné množiny M z definice má meromorfní funkce **nejvýše pól** (tj. buď pól nebo odstranitelnou singularitu).

Definice. **Řetězcem** rozumíme výraz tvaru

$$\varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \varphi_n, \tag{*}$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jsou cesty. Řetězec (*) se nazývá **cykl**, pokud jsou cesty $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ uzavřené.

- **obraz řetězce** Γ jako

$$\langle \Gamma \rangle = \langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle \cup \cdots \cup \langle \varphi_n \rangle;$$

- je-li $f : \langle \Gamma \rangle \to \mathbb{C}$ spojitá, pak **integrál funkce** f **podél** Γ jako

$$\int_\Gamma f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f + \cdots + \int_{\varphi_n} f;$$

Je-li Γ cykl a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle \Gamma \rangle$, pak **index bodu** a **vzhledem k cyklu** Γ je

$$\operatorname{ind}_\Gamma a = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{z-a} \, \mathrm{d}z.$$

Věta 2 (globální Cauchyova věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Pak pro každou funkci f holomorfní na Ω platí*

$$\int_\Gamma f = 0$$

a

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega \setminus \langle \Gamma \rangle.$$

Věta 14 (Cauchyův vzorec pro vyšší derivace). *Nechť f je holomorfní na $\overline{U(a,r)}$ (kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$). Pak f má na $U(a,r)$ derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z \in U(a,r)$ platí*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w,$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r.

Důsledek. *Je-li f holomorfní na množině $M \subset \mathbb{C}$, je i f' holomorfní na M.*

Věta 21: O jednoznačnosti

Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f, g jsou funkce holomorfní na Ω. Jestliže množina

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v Ω (tj. není izolovaná v Ω), pak $f = g$ na Ω.

Definice:

Laurentovou řadou o středu $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$(*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. **Regulární částí** řady $(*)$ rozumíme mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

hlavní částí řady $(*)$ rozumíme symbol

$$(**) \qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n.$$

Říkáme, že **hlavní část řady** $(*)$ **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}.$$

Součet této řady nazveme **součtem hlavní části řady** $(*)$ a značíme jej rovněž $(**)$.

Říkáme, že **řada** $(*)$ **konverguje** (**v bodě** z, **absolutně**, **stejnoměrně na množině** M, **lokálně stejnoměrně na množině** M, atp.), pokud příslušnou vlastnost má regulární i hlavní část. **Součtem řady** $(*)$ rozumíme součet součtu regulární části a součtu hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-a)^n.$$

Definice:

Nechť $0 \le r < R \le +\infty$ a $a \in \mathbb{C}$. Pak označme

$$P(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}.$$

Tuto množinu nazveme **mezikružím o středu** a, **vnitřním poloměru** r **a vnějším poloměru** R.

Věta 3:

Mějme Laurentovu řadu $(*)$. Pak existují $r, R \in [0, +\infty]$, pro která platí:

- Regulární část řady $(*)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ a diverguje pro $|z - a| > R$.
- Hlavní část řady $(*)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\}$ a diverguje pro $|z - a| < r$.

Je-li $r < R$, pak řada $(*)$ konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na mezikruží $P(a, r, R)$ a její součet je na tomto mezikruží holomorfní. Toto mezikruží pak nazýváme **mezikružím konvergence řady (*)**.

Věta 6:

Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a, r, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pak f je v $P(a, r, R)$ součtem Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

o středu a, která na $P(a, r, R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

kde $\rho \in (r, R)$ je libovolné a φ_ρ je jako ve Větě 4.

Definice:

Nechť f je holomorfní funkce v $P(a, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Nechť

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

je Laurentova řada funkce f v $P(a, R)$. Pak **reziduem funkce f v bodě** a rozumíme číslo

$$\operatorname{res}_a f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} f,$$

kde $\rho \in (0, R)$ a φ_ρ je jako ve Větě 4.

Věta 3 (obecná reziduová věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť $M \subset \Omega$ je izolovaná v Ω, $M \cap \langle \Gamma \rangle = \emptyset$ a f je funkce holomorfní v $\Omega \setminus M$. Pak platí:*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a f.$$

V sumě na pravé straně přitom je jen konečně mnoho nenulových sčítanců.