1. Úvod

1.1. Výroky a metody důkazů

- Výrok je tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé či ne.
- Vytváření nových výroků: Logické spojky & a $\vee$, Implikace $\Rightarrow$, Ekvivalence $\Leftrightarrow$, Negace $\neg$.
- Obecný kvatifikátor $\forall$ a existenční kvantifikátor $\exists$.
- Negace výroků.

Konec 1. přednášky 3.10.

Metody důkazů tvrzení:

- Přímý důkaz: $\big(A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow B\big) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.
- Nepřímý důkaz: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- Důkaz sporem: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \,\&\, \neg B)$
- Matematická indukce:
  $V(1) \,\&\, \big(\forall n \in \mathbf{N};\ V(n) \Rightarrow V(n+1)\big) \Rightarrow (\forall n \in \mathbf{N},\ V(n))$

1.2. Množina reálných čísel

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že M je *omezená shora* (*omezená zdola*), jestliže existuje $a \in \mathbf{R}$ tak, že pro všechna $x \in M$ platí $x \leq a$ $(x \geq a)$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je shora omezená. Číslo $s \in \mathbf{R}$ nazýváme *supremem* M pokud

$$(i)\ \forall x \in M : x \leq s;$$
$$(ii)\ \forall y \in \mathbf{R},\ y < s\ \exists x \in M : y < x.$$

Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je zdola omezená. Číslo $i \in \mathbf{R}$ nazýváme *infimem* M pokud

$$(i)\ \forall x \in M : i \leq x;$$
$$(ii)\ \forall y \in \mathbf{R},\ i < y\ \exists x \in M : x < y.$$

Příklady: a) $\sup[0,1] = 1$
b) $\sup(0,1) = 1$

Definice. Na množině $\mathbf{R}$ je dána relace $\leq$ $(\subset \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, operace sčítání $+$, operace násobení $\cdot$ a množina $\mathbf{R}$ obsahuje prvky 0 a 1 tak, že platí

$I\ (i)\ \forall x,y,z \in \mathbf{R}:\ x + (y+z) = (x+y)+z$	asociativita +
$(ii)\ \forall x,y \in \mathbf{R}:\ x+y = y+x$	komutativita +
$(iii)\ \forall x \in \mathbf{R}:\ x+0 = x$	existence 0
$(iv)\ \forall x \in \mathbf{R}\ \exists -x \in \mathbf{R}:\ x+(-x) = 0$	existence opačného prvku +
$(iv)\ \forall x,y,z \in \mathbf{R}:\ x(yz) = (xy)z$	asociativita $\cdot$
$(v)\ \forall x,y \in \mathbf{R}:\ xy = yx$	komutativita +
$(vi)\ \forall x \in \mathbf{R}:\ x1 = x$	existence 1
$(vii)\ \forall x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbf{R}:\ xx^{-1} = 1$	existence opačného prvku $\cdot$
$(viii)\ \forall x,y,z \in \mathbf{R}:\ (x+y)z = xz+yz$	distributivita

II (*i*) $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \& \ y \leq x) \Rightarrow x = y$ — slabá antisymetrie
(*ii*) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ (x \leq y \ \& \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ — transitivita
(*iii*) $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (x \leq y) \vee (y \leq x)$ — dichotomie
(*iv*) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ — sčítání a $\leq$
(*v*) $\forall x, y \in \mathbf{R}: \ (0 \leq x \ \& \ 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy)$ — násobení a $\leq$

III Je-li $M \subset \mathbf{R}$ neprázdná shora omezená množina, pak existuje supremum M.

Konec 2. přednášky 5.10.

Věta L 1.1 (o existenci infima)**.** *Nechť $M \subset \mathbf{R}$ je neprázdná zdola omezená množina. Pak existuje* $\inf M$.

Věta L 1.2 (Archimedova vlastnost)**.** *Ke každému $x \in \mathbf{R}$ existuje $n \in \mathbf{N}$ tak, že $x < n$.*

Věta L 1.3 (hustota $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$)**.** *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Pak existují $q \in \mathbf{Q}$ a $r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tak, že $q \in (a, b)$ a $r \in (a, b)$.*

Věta BD 1.4 (o n-té odmocnině)**.** *Nechť $n \in \mathbf{N}$ a $x \in [0, \infty)$. Pak existuje právě jedno $y \in [0, \infty)$ tak, že $y^n = x$.*

2. Posloupnosti

2.1. Úvod

Definice. Jestliže ke každému $n \in \mathbf{N}$ je přiřazeno $a_n \in \mathbf{R}$, pak říkáme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\}$ je *posloupnost* reálných čísel.

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je *omezená*, jestliže množina členů posloupnosti $\{a_n\}$ je omezená podmnožina $\mathbf{R}$. Analogicky definijeme *omezenost shora* a *omezenost zdola.*

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ je:
neklesající, jestliže $\forall n \in \mathbf{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$,
nerostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbf{N}$ $a_n \geq a_{n+1}$,
klesající, jestliže $\forall n \in \mathbf{N}$ $a_n > a_{n+1}$,
rostoucí, jestliže $\forall n \in \mathbf{N}$ $a_n < a_{n+1}$.

2.2. Vlastní limita posloupnosti

Definice. Nechť $A \in \mathbf{R}$ a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost. Řekneme, že A je *(vlastní) limitou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N} \ \forall n \geq n_0, \ n \in \mathbf{N} \ : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Značíme $\lim_{n \to \infty} a_n = A$.

Příklady: Z definice ukažte
a) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$,
b) $\lim_{n \to \infty} (-1)^n$ neexistuje,
c) pro každé $A \in \mathbf{R}$ je limita konstantní posloupnosti $\lim_{n \to \infty} A = A$.

Konec 3. přednášky 10.10.

Věta L 2.1 (jednoznačnost vlastní limity)**.** *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Věta L 2.2 (o omezenosti konvergentní posloupnosti)**.** *Nechť* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu. Pak je* $\{a_n\}$ *omezená.*

Definice. Řekneme, že posloupnost $\{b_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ je vybraná z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, jestliže existuje rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ tak, že $b_k = a_{n_k}$.

Věta L 2.3 (o limitě vybrané posloupnosti)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ *a nechť* $\{b_k\}$ *je vybraná a* $\{a_n\}$. *Pak* $\lim_{k\to\infty} b_k = A$.

Věta T 2.4 (aritmetika limit)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}$. *Pak platí*

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$$
$$(ii)\ \lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$$
$$(iii)\ \textit{pokud } b_n \neq 0 \textit{ pro každé } n \in \mathbf{N} \textit{ a } B \neq 0,\ \textit{pak } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Příklady: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$,
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$
c) Obecně neplatí

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

například

$$0 = \lim_{n\to\infty} (-1)^n + (-1)^{n+1} \neq \lim_{n\to\infty} (-1)^n + \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}.$$

Konec 4. přednášky 12.10.

Věta L 2.5 (limita a uspořádání)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}$.
(i) *Jestliže* $A < B$, *pak existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n < b_n$.
(ii) *Jestliže existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$ *takové, že pro každé* $n \geq n_0$ *platí* $a_n \geq b_n$, *pak* $A \geq B$.

Věta L 2.6 (o dvou strážnících)**.** *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti splňující:*
(i) $\exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ a_n \leq c_n \leq b_n$,
(ii) $\lim a_n = \lim b_n = A \in \mathbf{R}$.
Pak $\lim c_n = A$.

Příklady: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$,
c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,
d) pro každé $a > 0$ je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Věta L 2.7 (o limitě součinu omezené a mizející posloupnosti)**.** *Nechť* $\lim a_n = 0$ *a* $\{b_n\}$ *je omezená. Pak* $\lim a_n b_n = 0$.

Příklad: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

2.3. Nevlastní limita posloupnosti

Definice. Řekneme, že poloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ má *(nevlastní) limitu* $+\infty$ (respektive $-\infty$), pokud :

$$\forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbf{N} :\ a_n > K$$
$$(\forall K \in \mathbf{R}\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \geq n_0,\ n \in \mathbf{N} :\ a_n < K).$$

Příklad: $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

Věty 2.1, 2.3, 2.5 a 2.6 platí i v případě, že uvažujeme nevlastní limity.
Konec 5. přednášky 17.10.

Definice. *Rozšířená reálná osa* je množina $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\}$ s následujícími vlastnostmi:

$$
\begin{array}{lrr}
\text{Uspořádání:} & \forall a \in \mathbf{R} & -\infty < a < \infty \\
\text{Absolutní hodnota:} & & |+\infty| = |-\infty| = +\infty \\
\text{Sčítání:} & \forall a \in \mathbf{R}^* \setminus \{+\infty\} & -\infty + a = -\infty \\
 & \forall a \in \mathbf{R}^* \setminus \{-\infty\} & +\infty + a = +\infty \\
\text{Násobení:} & \forall a \in \mathbf{R}^*,\ a > 0 & a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \\
 & \forall a \in \mathbf{R}^*,\ a < 0 & a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \\
\text{Dělení:} & \forall a \in \mathbf{R} & \dfrac{a}{\pm\infty} = 0.
\end{array}
$$

Výrazy $-\infty + \infty$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\text{cokoli}}{0}$ nejsou definovány.

Poznámka: *Rozšířená definice* sup *a* inf*:*.
Je-li $A \neq \emptyset$ shora neomezená, tak definujme $\sup A = \infty$.
Je-li $A \neq \emptyset$ zdola neomezená, tak definujme $\inf A = \infty$.
Pro prázdnou množinu $A = \emptyset$ definujme $\sup A = -\infty$ a $\inf A = \infty$.

Věta L 2.4 (aritmetika limit podruhé)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}^*$ *a* $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}^*$. *Pak platí*

(*i*) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$, *pokud je výraz* $A + B$ *definován*
(*ii*) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$, *pokud je výraz* AB *definován*
(*iii*) *pokud* $b_n \neq 0$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *a* $B \neq 0$, *pak* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$,
pokud je výraz $\dfrac{A}{B}$ *definován.*

Příklady: a) $\lim_{n\to\infty}(n+1) - n = 1$ a $\lim_{n\to\infty}(n+2) - n = 2$, tedy limita typu $\infty - \infty$ může být cokoliv.
b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}}$ neexistuje.

Věta L 2.8 (limita typu $A/0$)**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}^*$, $A > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *a existuje* $n_0 \in \mathbf{N}$, *že pro každé* $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ *platí* $b_n > 0$. *Pak* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

2.4. Hlubší věty o limitách

Věta L 2.9 (o limitě monotónní posloupnosti)**.** *Každá monotónní posloupnost má limitu.*

Příklad: a) Nechť $a_1 = 10$ a $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$. Spočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$.
b) Toto nelze aplikovat mechanicky - viz $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$.

Konec 6. přednášky 19.10.

Věta L 2.10 (Cantorův princip vložených intervalů). *Nechť* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost uzavřených intervalů splňující:*

$$(i)\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \text{ pro každé } n \in \mathbf{N},$$
$$(ii)\ \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Pak je množina $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ *jednobodová.*

Věta T 2.11 (Bolzano-Weirstrass). *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost a označme $b_n = \sup\{a_k;\ k \geq n\}$ a $c_n = \inf\{a_k;\ k \geq n\}$. Je-li $\{a_n\}$ shora (zdola) neomezená, pak klademe $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ($\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$). Číslo $\lim_{n\to\infty} b_n$ nazýváme *limes superior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a značíme $\limsup_{n\to\infty} a_n$. Číslo $\lim_{n\to\infty} c_n$ nazýváme *limes inferior* posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a značíme $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Příklad: $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ a $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$.

Věta T 2.12 (vztah limity, limes superior a limes inferior). *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel a* $A \in \mathbf{R}^*$. *Pak*

$$\lim a_n = A \in \mathbf{R}^* \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}^*.$$

Konec 7. přednášky 24.10.

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že A je *hromadná hodnota* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu hromadných hodnot značíme $H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$.

Příklad: $H(\{(-1)^n\}_{n\in\mathbf{N}}) = \{-1, 1\}$; $H(\{\sin(\frac{\pi}{2}n)\}_{n\in\mathbf{N}}) = \{-1, 0, 1\}$.

Věta T 2.13 (o hromadných hodnotách posloupnosti). *Nechť* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných čísel. Potom* $\limsup_{n\to\infty} a_n$ *a* $\liminf_{n\to\infty} a_n$ *jsou hromadnými hodnotami posloupnosti* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a pro každou hromadnou hodnotu* $A \in \mathbf{R}^*$ *této posloupnosti platí*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq A \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Důsledky: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a $A \in \mathbf{R}^*$. Pak
a) $H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) \neq \emptyset$;
b) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \min H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$ a $\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$;
c) je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, pak $H(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{A\}$.

Věta T 2.14 (BC podmínka). *Posloupnost* $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *má vlastní limitu, právě když splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku, tedy*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall m, n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0,\ m \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Konec 8. přednášky 26.10.

3. Řady

3.1. Úvod

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost. Číslo $s_m = a_1+a_2+\ldots+a_m$ nazveme *m-tým částečným součtem* řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Součtem* nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}_{m\in\mathbf{N}}$, pokud tato limita existuje. Je-li tato limita konečná, pak řekneme, že řada je *konvergentní*. Je-li tato limita nekonečná nebo neexistuje, pak řekneme, že řada je *divergentní*. Tuto limitu budeme značit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje.
3) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje pro $|q| < 1$.

Věta L 3.1 (nutná podmínka konvergence)**.** *Jestliže je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Varování: Z $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ neplyne konvergence $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Věta L 3.2 (konvergence součtu řad)**.** (*i*) *Nechť $\alpha \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n \text{ konverguje } .$$

(*ii*) *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ konverguje a } \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

3.2. Řady s nezápornými členy

Pozorování: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je řada s nezápornými členy. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, nebo má součet $+\infty$.

Věta L 3.3 (srovnávací kritérium)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a nechť existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Pak*

$$(i) \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje,}$$

$$(ii) \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverguje.}$$

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3^n}$ konverguje.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ diverguje.
Konec 9. přednášky 2.11.

Věta L 3.4 (limitní srovnávací kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy a nechť* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A \in \mathbf{R}^*$. *Pak*

$$(i)\ \text{Jestliže } A \in (0,\infty),\ \text{pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje},$$

$$(ii)\ \text{Jestliže } A = 0,\ \text{pak } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje},$$

$$(ii)\ \text{Jestliže } A = \infty,\ \text{pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje.}$$

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3n}$ diverguje.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ konverguje.

Věta L 3.5 (Cauchyovo odmocninové kritérium). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy.*

$$(i)\ \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 :\ \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje},$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje},$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje},$$

$$(iv) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje},$$

$$(v) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje},$$

Poznámka: 1) Existuje-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, tak o konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nelze nic říct. Například $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ konverguje.
Z této konvergence a Věty 3.1. plyne, že $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$.

Konec 10. přednášky 7.11.

Věta L 3.6 (d'Alambertovo podílové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy.*

$$(i)\ \exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq n_0 : \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{konverguje},$$

$$(ii) \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{konverguje},$$

$$(iii) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{konverguje},$$

$$(iv) \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{diverguje}.$$

Příklad: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro každé $x > 0$.

Věta T 3.7 (kondenzační kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy splňující* $a_{n+1} \leq a_n$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$. *Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textit{konverguje} \ \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \ \textit{konverguje}.$$

Důsledek. Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \ \text{konverguje} \ \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

$$(ii) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\alpha n} \ \text{konverguje} \ \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

Konec 11. přednášky 9.11.

3.3. Neabsolutní konvergence řad

Definice. Nechť pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konveguje. Pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně.*

Věta L 3.8 (Bolzano-Cauchyho podmínka pro konvergenci řad)**.** *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě tehdy, když je splněna následující podmínka*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbf{N}\ \forall m, n \in \mathbf{N},\ m \geq n_0,\ n \geq n_0 : \quad \Big| \sum_{j=n}^{m} a_j \Big| < \varepsilon.$$

Věta L 3.9 (vztah konvergence a absolutní konvergence)**.** *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje.*

Důsledky. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada.

$$(1)\ \text{Pokud} \ \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1, \ \text{pak} \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{konverguje}.$$

$$(2)\ \text{Pokud} \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1, \ \text{pak} \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{konverguje}.$$

Navíc platí i

$$(1')\text{ Pokud } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

$$(2')\text{ Pokud } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1, \text{ pak } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverguje.}$$

Příklad: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konverguje pro každé $x < 0$.
2. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ v závislosti na $x \in \mathbf{R}$.

Věta T 3.10 (Leibnitzovo kritérium). *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Pak*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ konverguje } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konverguje. Tedy z konvergence řady neplyne absolutní konvergence.

Konec 12. přednášky 14.11.

Lemma (Abelova parciální sumace). *Nechť $m, n \in \mathbf{N}$ a $m \leq n$ a nechť $a_m, \dots, a_n, b_m, \dots, b_n \in \mathbf{R}$. Označme $s_k = \sum_{i=m}^{k} a_i$. Pak platí*

$$\sum_{i=m}^{n} a_i b_i = \sum_{i=m}^{n-1} s_i (b_i - b_{i+1}) + s_n b_n.$$

Věta T 3.11 (Abel-Dirichletovo kritérium). *Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ je posloupnost reálných čísel a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost nezáporných čísel. Nechť je splněna alespoň jedna z následujících podmínek*

$$(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ je konvergentní,}$$

$$(D) \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ má omezené častečné součty, tedy}$$

$$\exists K > 0\ \forall m \in \mathbf{N}: \quad |s_m| = \Big|\sum_{i=1}^{m} a_i\Big| < K.$$

Pak je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergentní.

Příklad: 1) $\{\sin n\}_{n\in\mathbf{N}}$ a $\{\cos n\}_{n\in\mathbf{N}}$ mají omezené částečné součty.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ konvergují neabsolutně.

3.4. Přerovnávání řad a součin řad

Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada a $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ je bijekce. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ nazýváme *přerovnáním řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta T 3.12 (o přerovnání absolutně konvergentní řady). *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je její přerovnání. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)}$ je absolutně konvergentní řada a má stejný součet jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Konec 13. přednášky 16.11.

Věta BD 3.13 (Riemann). *Neabsolutně konvergentní řadu lze přerovnat k libovolnému součtu z* $\mathbf{R}^*$. *Neboli: Nechť pro konvergentní řadu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *platí* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$. *Pak pro libovolné* $s \in \mathbf{R}^*$ *existuje bijekce* $p : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *taková, že*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p(n)} = s.$$

Definice. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady. *Cauchyovským součinem* těchto řad nazveme řadu

$$\sum_{k=2}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} b_i \Big).$$

Věta T 3.14 (o součinu řad). *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergují absolutně. Pak*

$$\sum_{k=2}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{k-1} a_{k-i} b_i \Big) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Big) \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \Big).$$

3.5. Limita posloupnosti a součet řady v komplexním oboru

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti. Pak $c_n = a_b + ib_n$ je komplexní posloupnost. Řekneme, že $\lim_{n\to\infty} c_n = A + iB$, pokud existují $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbf{R}$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbf{R}$.

Příklady: 1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+2i}{3+in}$.
2) $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i)^n$.

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě reálné posloupnosti a $c_n = a_n + ib_n$. Řekneme, že komplexní řada $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konverguje k $A + iB$, pokud konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$.

Příklad: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konverguje pro $q \in \mathbf{C}$, $|q| < 1$.

Věta L 3.15 (vztah konvergence a absolutní konvergence pro komplexní řady). *Nechť* c_n *je komplexní posloupnost a řada* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ *konverguje. Pak řada* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konverguje.*

Příklad: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konverguje pro všechna $z \in \mathbf{C}$.
Konec 14. přednášky 21.11.

4. Funkce jedné reálné proměnné

4.1. Základní definice

Definice. *Funkcí jedné reálné proměnné* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbf{R}$, kde $M \subset \mathbf{R}$.

Definice. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, je

rostoucí, jestliže	$\forall x, y \in M,\ x < y :$	$f(x) < f(y)$,
klesající, jestliže	$\forall x, y \in M,\ x < y :$	$f(x) > f(y)$,
nerostoucí, jestliže	$\forall x, y \in M,\ x < y :$	$f(x) \geq f(y)$,
neklesající, jestliže	$\forall x, y \in M,\ x < y :$	$f(x) \leq f(y)$.

Definice. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, je

sudá, jestliže $\quad \forall x \in M : \quad (-x \in M)\&(f(x) = f(-x))$,

lichá, jestliže $\quad \forall x \in M : \quad (-x \in M)\&(f(x) = -f(-x))$,

periodická, jestliže $\quad \exists p > 0,\ \forall x \in M : \quad (x + p \in M)\&(x - p \in M)\&(f(x) = f(x + p))$.

Definice. Řekneme, že funkce $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, je *omezená (omezená shora, omezená zdola), jestliže $f(M)$ je omezená (shora omezená, zdola omezená) podmnožina* $\mathbf{R}$.

Definice. Nechť $\delta > 0$ a $a \in \mathbf{R}$. *Prstencové okolí* bodu je

$$P(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}; \quad P(+\infty, \delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty); \quad P(-\infty, \delta) = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Pravé a levé prstencové okolí bodu a je

$$P_+(a, \delta) = (a, a + \delta); \quad P_-(a, \delta) = (a - \delta, a).$$

Okolí bodu je

$$B(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta); \quad B(+\infty, \delta) = (\tfrac{1}{\delta}, +\infty); \quad B(-\infty, \delta) = (-\infty, -\tfrac{1}{\delta}).$$

Pravé a levé okolí bodu a je

$$B_+(a, \delta) = [a, a + \delta); \quad B_-(a, \delta) = (a - \delta, a].$$

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbf{R}^*$ *limitu* rovnou $A \in \mathbf{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : \quad f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Značíme $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

Poznámky: 1) Pro $a \in \mathbf{R}$ a $A \in \mathbf{R}$ lze $\lim_{x \to a} f(x) = A$ definovat jako

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\} : \ f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon).$$

2) $\lim_{x \to a} f(x) = A$ lze ekvivalentně zapsat

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ f(P(a, \delta)) \subset B(A, \varepsilon).$$

Příklady: 1) $\lim_{x \to a} x = a$.
2) $\lim_{x \to a} c = c$ pro libovolnou konstantu $c \in \mathbf{R}$.

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že f má v bodě $a \in \mathbf{R}$ *limitu zprava (zleva)* rovnou $A \in \mathbf{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_+(a, \delta) : \quad f(x) \in B(A, \varepsilon)$$

$$\big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P_-(a, \delta) : \quad f(x) \in B(A, \varepsilon)\big).$$

Značíme $\lim_{x \to a+} f(x) = A$ ($\lim_{x \to a-} f(x) = A$).

Příklady: 1) $\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ a $\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$.
2) $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$ a $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Poznámka:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = A \text{ a } \lim_{x \to a-} f(x) = A.$$

Definice. Nechť $f : M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$, $a \in M$. Řekneme, že f je v a *spojitá (spojitá zprava, spojitá zleva)*, jestliže

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \; (\lim_{x\to a+} f(x) = f(a), \; \lim_{x\to a-} f(x) = f(a)).$$

Příklady: 1) Funkce $f(x) = x$ je spojitá na $\mathbf{R}$.
2) Dirichletova funkce

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

není nikde spojitá.
3) Riemannova funkce

$$D(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{pro } x \in \mathbf{Q}, \; x = \frac{p}{q} \text{ pro } p \in \mathbf{Z}, \; q \in \mathbf{N} \text{ nesoudělná} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

je spojitá na $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

4.2. Věty o limitách

Věta T 4.1 (Heine)**.** *Nechť $A \in \mathbf{R}^*$, $f : M \to \mathbf{R}$ a f je definována na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbf{R}^*$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(*i*) $\lim_{x\to a} f(x) = A$

(*ii*) *pro každou posloupnost $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ takovou, že*

$$x_n \in M, \; \forall n \in \mathbf{N} \; x_n \neq a, \; \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ platí } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Příklad: $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ neexistuje.
Konec 15. přednášky 23.11.

Věta L 4.2 (o jednoznačnosti limity)**.** *Funkce f má v daném bodě nejvýše jednu limitu.*

Věta L 4.3 (limita a omezenost)**.** *Nechť f má vlastní limitu v bodě $a \in \mathbf{R}^*$. Pak existuje $\delta > 0$ tak, že f je na $P(a, \delta)$ omezená.*

Věta L 4.4 (o aritmetice limit)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbf{R}^*$ a $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbf{R}^*$. Pak platí*

(*i*) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B$, *pokud je výraz $A + B$ definován*

(*ii*) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB$, *pokud je výraz AB definován*

(*iii*) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, *pokud je výraz $\dfrac{A}{B}$ definován.*

Důsledek Věty 4: Nechť jsou funkce f a g spojité v bodě $a \in \mathbf{R}$. Pak jsou funkce $f + g$, $f \cdot g$ spojité v a. Pokud je navíc $g(a) \neq 0$, pak je i funkce $\frac{f}{g}$ spojitá v a.

Speciálně polynomy jsou spojité na $\mathbf{R}$ a racionální lomené funkce $\frac{P(x)}{Q(x)}$ jsou spojité ve všech x, kde $Q(x) \neq 0$.

Věta L 4.5 (limita a uspořádání)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}^*$.*
(*i*) *Nechť $\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x)$. Pak existuje prstencové okolí $P(a, \delta)$ tak, že*

$$\forall x \in P(a, \delta) : \quad f(x) > g(x).$$

(ii) Nechť existuje prstencové okolí bodu $P(a,\delta)$ tak, že

$$\forall x \in P(a,\delta): \quad f(x) \le g(x).$$

Nechť existují $\lim_{x\to a} f(x)$ *a* $\lim_{x\to a} g(x)$. *Potom platí*

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

(iii) Nechť na nějakém prstencovém okolí $P(a,\delta)$ platí $f(x) \le h(x) \le g(x)$. Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. *Pak existuje* $\lim_{x\to a} h(x)$ *a všechny tři limity se rovnají.*

Příklad: $\lim_{x\to 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$.

Konec 16. přednášky 28.11.

Věta T 4.6 (limita složené funkce)**.** *Nechť funkce f a g splňují:*

$$(i) \lim_{x\to c} g(x) = A,$$

$$(ii) \lim_{y\to A} f(y) = B.$$

Je-li navíc splněna alespoň jedna z podmínek

$$(S)\ f \text{ je spojitá v } A,$$

$$(P)\ \exists \eta > 0\ \forall x \in P(c,\eta): \ g(x) \ne A,$$

pak platí $\lim_{x\to c} f(g(x)) = B$.

Příklady: 1) $f(x) = \sqrt{x}$ je spojitá na $(0,\infty)$.
2) $\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x^2} = 1$.
3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = 1$.
4) Pro $g(x) \equiv 0$ a $f(x) = 1$ pro $x \ne 0$ a $f(0) = 0$ věta o limitě složené funkce neplatí.

Věta L 4.7 (limita monotónní funkce)**.** *Nechť f je monotónní na intervalu (a,b), $a,b \in \mathbf{R}^*$. Potom existuje* $\lim_{x\to a+} f(x)$ *i* $\lim_{x\to b-} f(x)$.

4.3. Funkce spojité na intervalu

Definice. Vnitřními body intervalu J rozumíme ty body z J, které nejsou krajními.

Definice. Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je spojitá na J, jestliže je spojitá ve všech vnitřních bodech J. Je-li počáteční bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zprava v tomto bodě a je-li koncový bod J prvkem J, tak požadujeme i spojitost zleva v tomto bodě.

Věta T 4.8 (Darboux)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a,b]$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) = y$.*

Konec 17. přednášky 30.11.

Důsledek. Nechť J je interval. Nechť funkce $f: J \to \mathbf{R}$ je spojitá. Pak je $f(J)$ interval.

Definice. Nechť $f: M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$. Řekneme, že funkce f nabývá v bodě $a \in M$

maxima na M jestliže $\forall x \in M:$ $\quad f(x) \le f(a)$,

minima na M jestliže $\forall x \in M:$ $\quad f(x) \ge f(a)$,

ostrého maxima na M jestliže $\forall x \in M,\ x \ne a:$ $\quad f(x) < f(a)$,

ostrého minima na M jestliže $\forall x \in M,\ x \ne a:$ $\quad f(x) > f(a)$, *lokálního maxima (ostrého lokálního maxima, ostrého lokálního minima, lokálního minima)*, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že f nabývá na $M \cap B(a, \delta)$ svého maxima (ostrého maxima, ostrého minima, minima).

Věta T 4.9 (spojitost funkce a nabývaní extrémů)**.** *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak funkce f nabýva na $[a, b]$ svého maxima a minima.*

Důsledek. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak je funkce f na $[a, b]$ omezená.

Definice. Nechť f je funkce a J je interval. Řekneme, že f je prostá na J, jestliže pro všechna $x, y \in J$ platí $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Pro prostou funkci $f : J \to \mathbf{R}$ definujeme funkci $f^{-1} : f(J) \to \mathbf{R}$ předpisem $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Věta T 4.10 (o inverzní funkci)**.** *Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom je funkce f^{-1} spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

Příklad: Funkce $x \to x^n$ je spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$, a proto je funkce $x \to \sqrt[n]{x}$ spojitá a rostoucí na $[0, \infty)$.

Konec 18. přednášky 5.12.

4.4. Elementární funkce

Věta T 4.11 (zavedení exponenciely)**.** *Existuje funkce* $\exp : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *splňující:*

$$a)\ \exp(x) \text{ je rostoucí na } \mathbf{R},$$
$$b)\ \forall x, y \in \mathbf{R} \quad \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y),$$
$$c)\ \exp(0) = 1,$$
$$d)\ \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1,$$
$$e)\ \exp(x) \text{ je spojitá na } \mathbf{R}.$$

Definice. Funkci inverzní k exponenciele exp je *logaritmus* log.

Věta T 4.12 (vlastnosti logaritmu)**.** *Funkce* log *splňuje:*

$$a)\ \log : (0, \infty) \to \mathbf{R} \text{ je spojitá rostoucí funkce},$$
$$b)\ \forall x, y > 0 \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y),$$
$$c)\ \lim_{x \to 1} \frac{\log(x)}{x - 1} = 1.$$

Definice. Nechť $a > 0$ a $b \in \mathbf{R}$. Pak definujeme $a^b = \exp(b \log(a))$. Je-li $b > 0$ pak definujeme $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$.

Příklad: $\lim_{n \to \infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ a $\lim_{n \to \infty}(1 + \frac{p}{n})^n = e^p$.

Konec 19. přednášky 7.12.

Věta BD 4.13 (zavedení sinu a cosinu)**.** *Existují funkce* $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *a* $\cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *splňující:*

$$a)\ \forall x, y \in \mathbf{R} \quad \begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \cos(-x) &= \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x, \end{aligned}$$

$b)$ *existuje kladné číslo π tak, že* $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \frac{1}{2}\pi]$ *a* $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$,

$$c)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Příklad: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Definice. Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ a $y \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$ definujeme funkce *tangens* a *cotangens* předpisem

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ a } \operatorname{cotg} y = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Věta L 4.14 (spojitost sinu a cosinu)**.** *Funkce* sin, cos, tan *a* cotg *jsou spojité na svém definičním oboru.*

Definice. Nechť

$$\begin{aligned}
&\sin^* x = \sin x \text{ pro } x \in [\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\\
&\cos^* x = \cos x \text{ pro } x \in [0, \pi],\\
&\tan^* x = \tan x \text{ pro } x \in (\tfrac{-\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) \text{ a}\\
&\operatorname{cotg}^* x = \operatorname{cotg} x \text{ pro } x \in (0, \pi).
\end{aligned}$$

Definujeme arcsin (respektive arccos, arctan, arccotg) jako inverzní funkci k funkci $\sin^*$ (respektive $\cos^*$, $\tan^*$, cotg^*).

4.5. Derivace funkce

Definice. Nechť f je reálná funkce a $a \in \mathbf{R}$. Pak *derivací f v bodě a* budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

derivací f v bodě a zprava budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h};$$

derivací f v bodě a zleva budeme rozumět

$$f'(a) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Poznámky: 1) $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
2) $f'(a) = A \Leftrightarrow \big(f'_+(a) = A \text{ a } f'_-(a) = A\big)$.

Příklady: 1) derivace $|x|$
2) derivace $\operatorname{sgn} x$
3) $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Věta L 4.15 (vztah derivace a spojitosti)**.** *Nechť má funkce f v bodě $a \in \mathbf{R}$ derivaci $f'(a) \in \mathbf{R}$. Pak je f v bodě a spojitá.*

Věta T 4.16 (aritmetika derivací)**.** *Nechť $f'(a)$ a $g'(a)$ existují.*

(i) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, *pokud má pravá strana smysl.*

(ii) *Nechť je g spojitá v a, pak* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
pokud má pravá strana smysl.

(iii) *Nechť je g spojitá v a a $g(a) \neq 0$, pak* $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$,
pokud má pravá strana smysl.

Konec 20. přednášky 12.12.

Věta T 4.17 (derivace složené funkce)**.** *Nechť f má derivaci v bodě y_0, g má derivaci v x_0 a je v x_0 spojitá a $y_0 = g(x_0)$. Pak*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0),$$

je-li výraz vpravo definován.

Příklad: Zderivujte e^{x^2+x}.

Věta L 4.18 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť f je na intervalu (a, b) spojitá a rostoucí (respektive klesající). Nechť f má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

Derivace elementárních funkcí:

$(const)' = 0$ $\qquad$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$ pro $x \in (0, \infty)$ $\qquad$ $(e^x)' = e^x$

$(x^a)' = ax^{a-1}$ pro $x \in (0, \infty)$, $a \in \mathbf{R}$ $\qquad$ $(a^x)' = a^x \log a$ pro $x \in \mathbf{R}$, $a \in (0, \infty)$

$(\sin x)' = \cos x$ $\qquad$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $(\mathrm{cotg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $\qquad$ $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $\qquad$ $(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Konec 21. přednášky 14.12.

Věta L 4.19 (Fermatova)**.** *Nechť $a \in \mathbf{R}$ je bod lokálního extrému funkce f na M. Pak $f'(a)$ neexistuje, nebo $f'(a) = 0$.*

Věta L 4.20 (Rolleova věta)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $[a, b]$, $f'(x)$ existuje pro každé $x \in (a, b)$ a $f(a) = f(b)$. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.*

Věta L 4.21 (Lagrangeova věta o střední hodnotě)**.** *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$ a má derivaci v každém bodě intervalu (a, b). Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Definice. Nechť J je interval. Množinu všech vnitřních bodů J nazýváme *vnitřek* J a značíme $\mathrm{int}\, J$.

Věta L 4.22 (o vztahu derivace a monotonie)**.** *Nechť $J \subset \mathbf{R}$ je interval a f je spojitá na J a v každém vnitřním bodě J má derivaci.*

(i) Je-li $f'(x) > 0$ na $\mathrm{int}\, J$, pak je f rostoucí na J.

(ii) Je-li $f'(x) < 0$ na $\mathrm{int}\, J$, pak je f klesající na J.

(iii) Je-li $f'(x) \geq 0$ na $\mathrm{int}\, J$, pak je f neklesající na J.

(iv) Je-li $f'(x) \leq 0$ na $\mathrm{int}\, J$, pak je f nerostoucí na J.

Věta T 4.23 (Cauchyova věta o střední hodnotě). *Nechť f, g jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ takové, že f má v každém bodě (a, b) derivaci a g má v každém bodě vlastní derivaci různou od nuly. Pak existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Konec 22. přednášky 19.12.

Věta T 4.24 (l'Hospitalovo pravidlo).
(i) *Nechť $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ a nechť existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(ii) *Nechť $a \in \mathbf{R}^*$, $\lim_{x\to a+} |g(x)| = \infty$ a nechť existuje $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Pak*

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Příklady: 1) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$.
2) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log^a n}{n^b}$ pro $a, b > 0$.

Varovné příklady: 1) $\lim_{x\to 0} \frac{1+2x}{1+3x} \neq \frac{2}{3}$
2) $\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+2\sin x} \neq \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+2\cos x}$

Věta L 4.25 (derivace a limita derivace). *Nechť je funkce f spojitá zprava v a a nechť existuje $\lim_{x\to a+} f'(x) = A \in \mathbf{R}^*$. Pak $f'_+(a) = A$.*

Příklady: Spočtěte derivaci a jednostranné derivace funkce $|\operatorname{arctan}(x-1)|$ na $\mathbf{R}$.

1.3. Krátký výlet do nekonečna

Definice. Řekneme, že množiny A, B mají *stejnou mohutnost*, pokud existuje bijekce A na B. Značíme $A \approx B$.

Řekneme, že množina A má *mohutnost menší nebo rovnu monutnosti* B, pokud existuje prosté zobrazení A do B. Značíme $A \preceq B$.

Řekneme, že množina A má *menší mohutnost* než B, pokud $A \preceq B$, ale neplatí $B \preceq A$. Značíme $A \prec B$.

Příklady: 1) $\mathbf{N} \approx \mathbf{Z}$, 2) $\mathbf{N} \approx \mathbf{Q}$, 3) $\mathbf{N} \prec \mathbf{R}$.

Definice. Řekneme, že množina A je *konečná*, má-li konečný počet prvků.
Řekneme, že množina A je *spočetná*, jestliže $A \approx \mathbf{N}$, nebo je A konečná.
Řekneme, že množina A je *nespočetná*, jestliže $\mathbf{N} \prec A$.

Tvrzení. Nechť A_n, $n \in \mathbf{N}$, jsou spočetné množiny. Pak $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ je spočetná.

Příklady: 1) $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \{[n_1, n_2] : \ n_1, n_2 \in \mathbf{N}\}$ je spočetná.
2) $\mathbf{Q}^k = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times \ldots \times \mathbf{Q}$ je spočetná pro $k \in \mathbf{N}$.

Konec 23. přednášky 21.12.

4.6. Konvexní a konkávní funkce

Definice. Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a nechť f má vlastní n-tou derivaci na okolí bodu a. Pak $n+1$-*ní derivací* funkce f v bodě a budeme rozumět

$$f^{(n+1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h}.$$

Definice. Funkce f na intervalu I nazveme *konvexní (konkávní)*, jestliže

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Funkci nazveme *ryze konvexní (ryze konkávní)*, jsou-li příslušné nerovnosti ostré.

Poznámka: Ekvivalentně lze definovat, že funkce f je na I konvexní, pokud

$$\forall x, y \in I,\ x < y,\ \forall \alpha \in (0,1) \text{ platí } f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Věta T 4.26 (vztah druhé derivace a konvexity (konkávity))**.** *Nechť f má na intervalu (a,b) spojitou první derivaci.*

$$\text{Jestliže } \forall x \in (a,b): \ f''(x) > 0, \text{ pak } f \text{ je ryze konvexní.}$$
$$\text{Jestliže } \forall x \in (a,b): \ f''(x) < 0, \text{ pak } f \text{ je ryze konkávní.}$$
$$\text{Jestliže } \forall x \in (a,b): \ f''(x) \geq 0, \text{ pak } f \text{ je konvexní.}$$
$$\text{Jestliže } \forall x \in (a,b): \ f''(x) \leq 0, \text{ pak } f \text{ je konkávní.}$$

Lemma. *Nechť je funkce f je na intervalu I konvexní, pak*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Lemma'. *Nechť je funkce f je na intervalu I ryze konvexní, pak*

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Věta T 4.27 (konvexita a jednostranné derivace)**.** *Nechť f je konvexní na intervalu J a $a \in \operatorname{int} J$. Pak $f'_+(a) \in \mathbf{R}$ a $f'_-(a) \in \mathbf{R}$.*

Příklad: Funkce $f(x) = |x|$ je na $[-1,1]$ konvexní, ale neexistuje $f'(0)$.

Věta L 4.28 (konvexita a spojitost)**.** *Nechť f je konvexní na otevřeném intervalu J. Pak je f spojitá na J.*

Konec 24. přednášky 4.1.

Definice. Nechť f má vlastní derivaci v bodě $a \in \mathbf{R}$. Označme

$$T_a = \{[x,y];\ x \in \mathbf{R},\ y = f(a) + f'(a)(x-a)\}.$$

Řekneme, že bod $[x, f(x)]$, $x \in D_f$ leží *nad (pod) tečnou* T_a, jestliže platí

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a) \quad \big(f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)\big).$$

Definice. Funkce f má v bodě a inflexi (a je inflexní bod), jestliže $f'(a) \in \mathbf{R}$ a existuje $\Delta > 0$ tak, že

(i) $\forall x \in (a-\Delta, a):$ $[x, f(x)]$ leží nad tečnou,

(ii) $\forall x \in (a, a+\Delta):$ $[x, f(x)]$ leží pod tečnou,

nebo

(i) $\forall x \in (a-\Delta, a):$ $[x, f(x)]$ leží pod tečnou,

(ii) $\forall x \in (a, a+\Delta):$ $[x, f(x)]$ leží nad tečnou,

Věta T 4.29 (nutná podmínka pro inflexi)**.** *Nechť $f''(a) \neq 0$. Pak a není inflexní bod funkce f.*

Příklad: Funkce $f(x) = x^4$ splňuje $f''(0) = 0$, ale v 0 není inflexní bod.

Věta T 4.30 (postačující podmínka pro inflexi)**.** *Nechť f má spojitou první derivaci na intervalu (a, b). Nechť $z \in (a, b)$ a platí*

$$\forall x \in (a, z) : f''(x) > 0 \text{ a } \forall x \in (z, b) : f''(x) < 0.$$

Pak z je inflexní bod f.

Konec 25. přednášky 9.1.

4.7. Průběh funkce

Definice. Řekneme, že funkce $ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, je *asymptotou funkce f v ∞ (resp. $-\infty$)*, jestliže

$$\lim_{x\to\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0 \quad (\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0).$$

Věta L 4.31 (tvar asymptoty)**.** *Funkce f má v ∞ asymptotu $ax + b$, právě když*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbf{R} \text{ a } \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - ax\big) = b \in \mathbf{R}.$$

Při vyšetření průběhu funkce provádíme následující kroky:

1. Určíme definiční obor a obor spojitosti funkce.
2. Zjistíme průsečíky se souřadnými osami.
3. Zjistíme symetrii funkce: lichost, sudost, periodicita.
4. Dopočítáme limity v 'krajních bodech definičního oboru'.
5. Spočteme první derivaci, určíme intervaly monotonie a nalezneme lokální a globální extrémý.
6. Spočteme druhou derivaci a určíme intervaly, kde je f konvexní nebo konkávní.
7. Vypočteme asymptoty funkce.
8. Načtneme graf funkce a určíme obor hodnot.

Konec 26. přednášky 11.1.