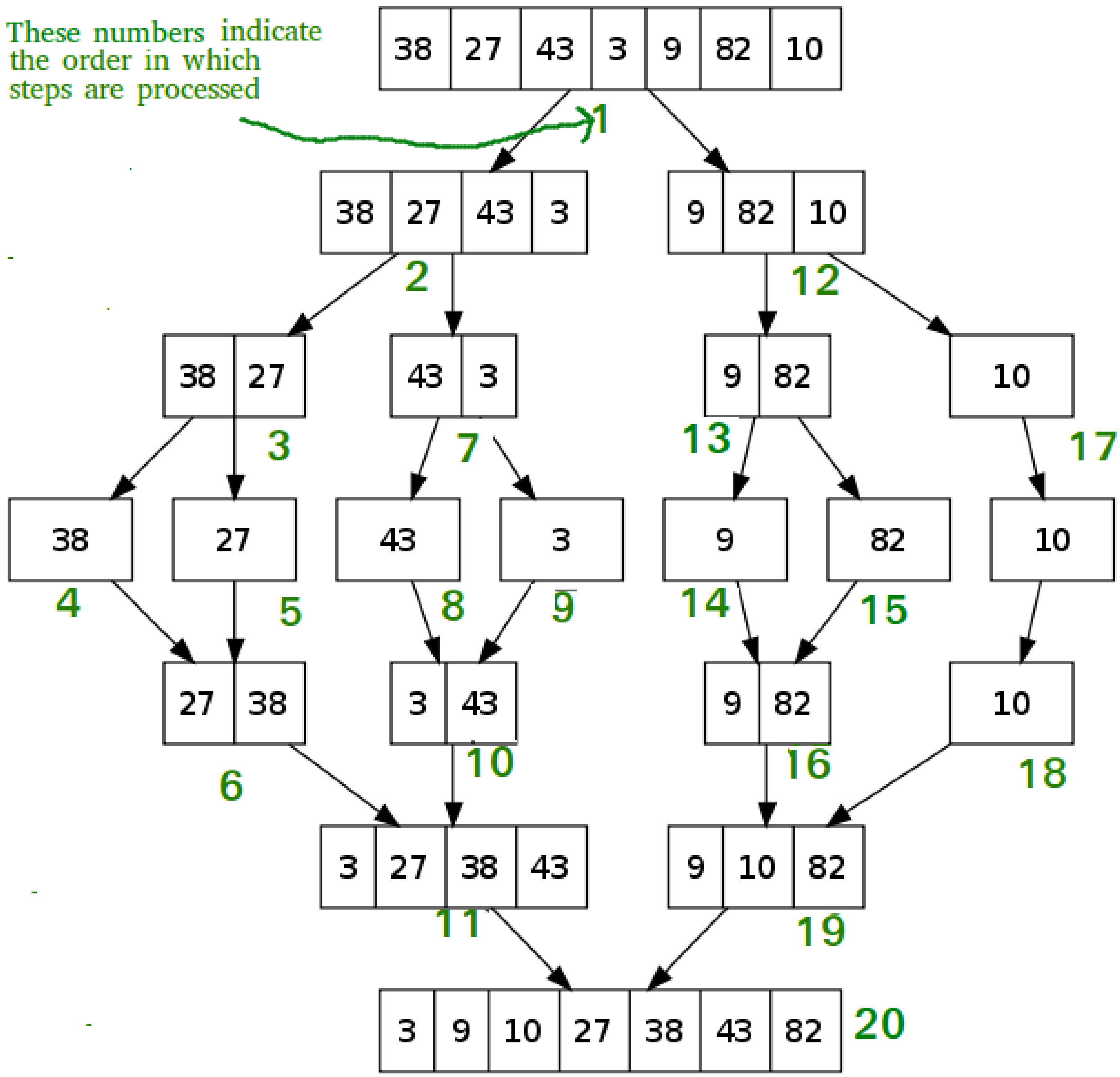
MERGESORT

2022-10-14



DESCRIZIONE

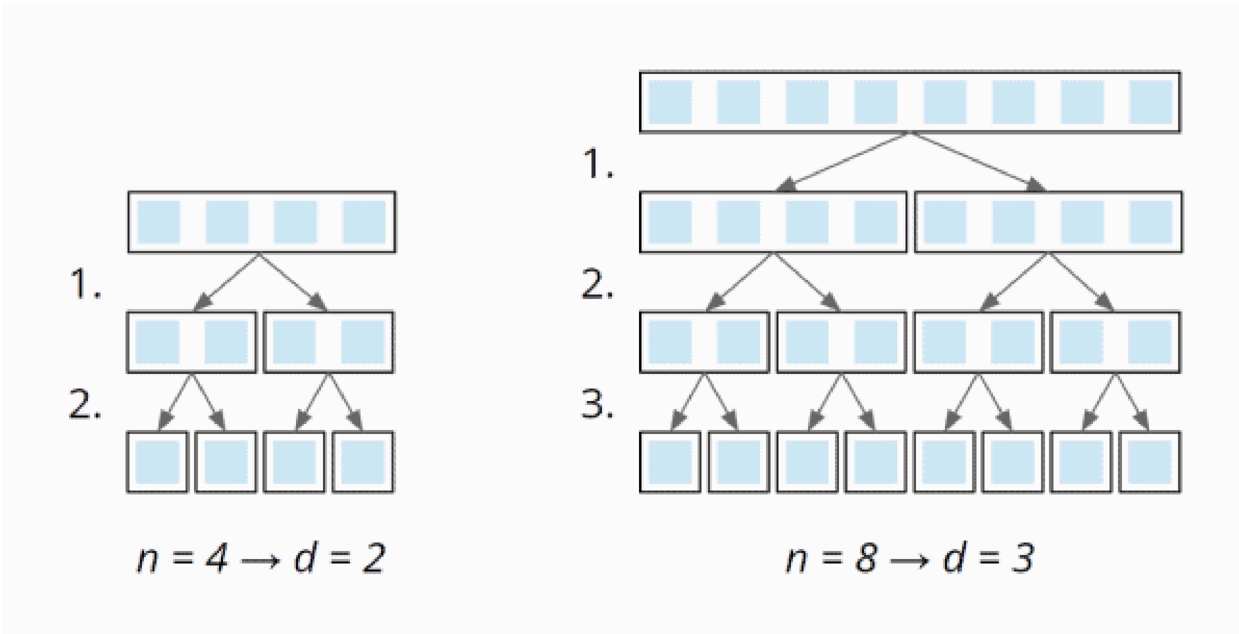
- **SI TRATTA DI UN ALGORITMO DIVIDE ET IMPERA**
- **LO SCOPO È L'ORDINAMENTO DEGLI ELEMENTI NEL VETTORE**
  - CRESCENTE: spiegato nel documento

    - DESCRESCENTE: scambiare < con > nei confronti
- **UNA LISTA DI UN ELEMENTO È ORDINATA**
- **SFRUTTA LA TECNICA DELLA RICORSIONE**
    - DIVIDE A METÀ L'ARRAY IN INPUT
    - ORDINA RICORSIVAMENTE LE DUE METÀ
        * CASO BASE: LISTA DI UN ELEMENTO
    - UNISCE LE DUE METÀ ORDINANDOLE
- **ARRAY DI SUPPORTO:**
    - è necessario un array di copia per il confronto degli elementi
    - gli esiti del confronto vengono aggiornati nell'array di input iniziale

```
minimo = 0
massimo =1000
lunghezza=10000
# vettore di 10000 interi randomico tra 0 e 1000
vettore = floor(runif(lunghezza,minimo,massimo))
# array di supporto vuoto
copyArray=vector("integer",lunghezza)
```

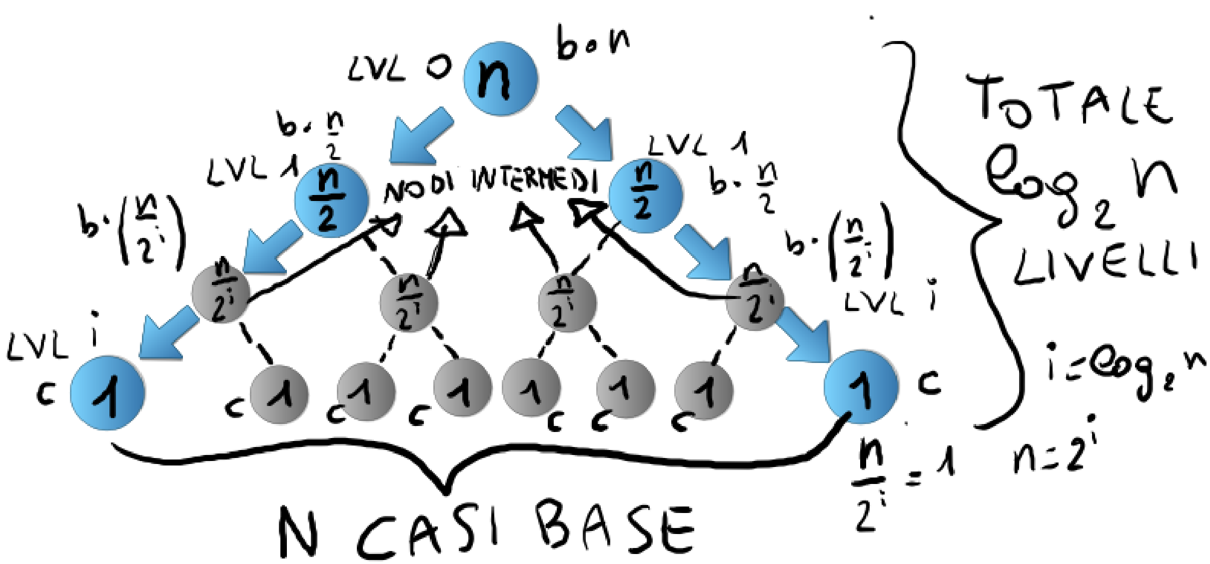
SEPARAZIONE

```
mergeSort = function(startIndex, endIndex){
  if (startIndex < endIndex){     # costo = c
    middleIndex = startIndex + (endIndex-startIndex)/2  #costo = c --> Theta(1)
    # chiamate rircorsive per le due metà separate
    mergeSort(startIndex,middleIndex)    # costo = T(N/2)
    mergeSort(middleIndex+1,endIndex)    # costo = T(N/2)
    # unione delle due metà ordinate
    unisci(startIndex,middleIndex,endIndex)  # costo = c * n operazioni = Theta(N)
  }
  # la porzione di riferimento contiene 0/1 elementi
  # di conseguenza già ordinati
}
```



- Dato N dimensione iniziale
- d = numero di divisioni
- Sono necessarie $log_2(N)$ divisioni al fine di ottenere elementi singoli

Trattandosi di un algoritmo ricorsivo per semplificare i conti occorre creare l'albero delle chiamate ricorsive, e valutare l'andamento dei costi per i vari nodi



- **CERCHIO = NODO/DIMENSIONE ; FRECCIA = ARCO/CHIAMATA RICORSIVA UNIDIREZIONALE**
- La dimensione indica la lunghezza del vettore in input alla funzione MERGESORT
- Secondo la procedura l'array viene diviso a metà fino a ottenere vettori di un unico elemento, quindi ordinati
- Il livello espresso dalla lettera i indica la "profondità" del nodo a partire dal nodo radice

- 0 = RADICE
- i = i-esimo livello con nodi di dimensone $dim = \frac{n}{2^i}$
- end = nodi con dimensione 1
  - $dim = \frac{n}{2^i} = 1$
  - $n = 2^i$
  - $i = log_2(n)$

OPERAZIONI ESEGUITE

- if (start < end) –> costo unitario
  - FALSO
    - dimensione di riferimento <= 1, vettore già ordinato
    - costo nullo perchè non viene eseguita alcuna istruzione
  - VERO
    - 2 chiamate ricorsive con dimezzamento dell'input
      - 2* T(n/2) calcolato ricorsivamente
    - 1 chiamata alla funzione unione con costo lineare O(N) in quanto scandisce ogni elemento dell'array in input a mergeSort()

TEMPO

$$T(N) = (n <= 1)?\Theta(1) : 2 * T(N/2) + O(N)$$

CORRETTEZZA

IPOTESI: MergeSort(vettore,start,end) termina con vettore[start;end] ordinato

DIMOSTRAZIONE

SI DIMOSTRA CON LA TECNICA DELL'INDUZIONE

CASO BASE: MergeSort(vettore,start,end) termina con un vettore ordinato quando effettua 0 chiamate ricorsive, quindi quando start <= end (vedi codice)

PASSO INDUTTIVO IPOTESI INDUTTIVA: MergeSort(vettore,start,end) **ordina vettore[start;end]** con massimo **h chiamate ricorsive,** con $h = log_2(end - start + 1)$

TESI: MergeSort() ordina con h+1 chiamate

- h+1>0 –> start<end
- le prime due chiamate sono
  - mergeSort(vettore, start, middle)
  - mergeSort(vettore,middle+1,end)
- restano ancora h-1 chiamate
  - per ipotesi sappiamo che l'algoritmo è corretto se effettua h chiamate
  - di conseguenza sappiamo che con h-1 chiamate l'algoritmo produce un risultato corretto

UNIONE

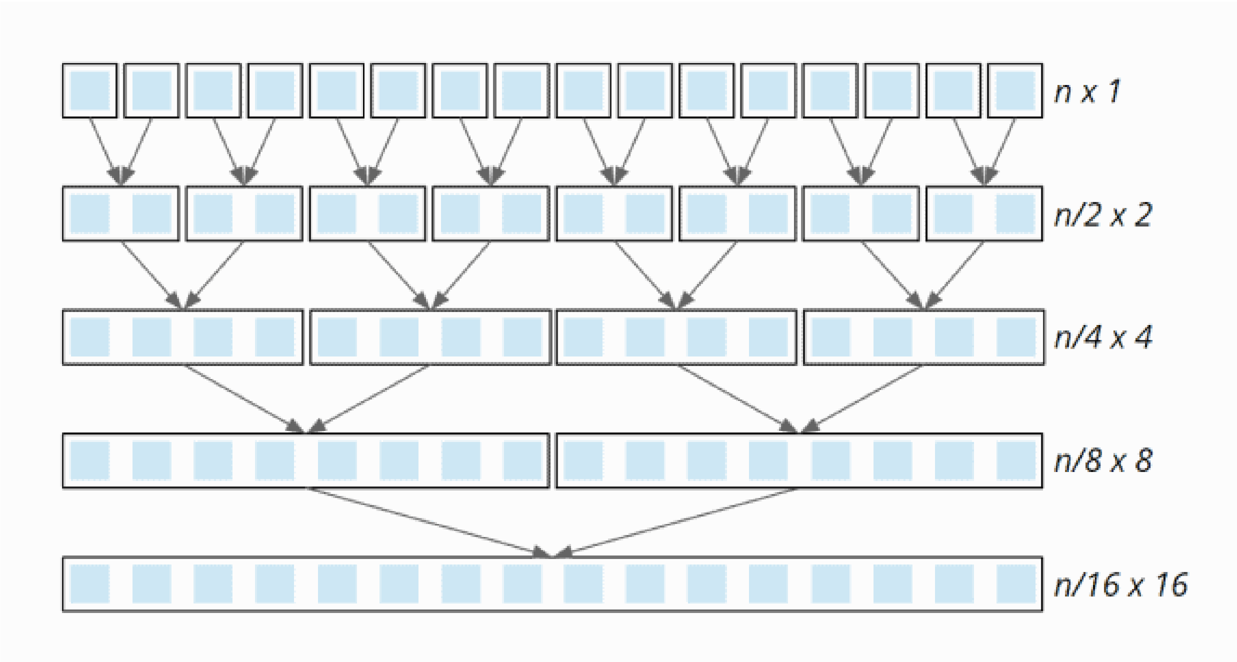
- Le due metà sono ordinate
- Controllare gli elementi da sinistra a destra per ognuno dei due vettori
- Viene inserito il minore/maggiore e viene incrementato l'indice di ricerca per la metà in cui era presente l'elemento appena inserito

OPERAZIONI ESEGUITE

```
unisci = function(startIndex,middleIndex,endIndex){
   #indice di confronto metà SX
  leftIndex=startIndex  # costo = c
  #indice di confronto metà DX
  rightIndex=middleIndex+1 # costo = c
  #indice di aggiornamento del vettore originale
  inputIndex=startIndex  # costo = c


  # copia degli elementi selezionati da endIndex-startIndex nell'array di supporto, quindi entrambe le
  for (i in startIndex:endIndex){   #costo =  2c*(endIndex-startIndex) = 2c*(n+1)
    copyArray[i] = vettore[i]  # costo = c*n
  }

  # costo = O(n) perchè vengono scanditi tutti gli n elementi per i vari confronti
  while(leftIndex<=middleIndex && rightIndex<=endIndex){
        if (copyArray[leftIndex]<= copyArray[rightIndex]){
            inputArr[inputIndex] = copyArray[leftIndex]
            leftIndex = leftIndex+1    # sposta l'indice per cercare il successivo
        } else {
            inputArr[inputIndex]=copyArray[rightIndex]
            rightIndex=rightIndex+1
        }
        # incremento del contatore dell'inputArray
        inputIndex=inputIndex+1
  }
  # il ciclo finisce quando una delle due metà ha esaurito gli elementi


  # controlla se ci sono elementi nella metà SX
  while(leftIndex<=middleIndex){  # costo = O(N/2)  perchè viene scandita solo la metà di SX
    vettore[inputIndex] = copyArray[leftIndex]
    leftIndex = leftIndex+1
    inputIndex = inputIndex+1
  }

  # nel caso in cui la metà di DX avesse ancora elementi da scrivere significa che essi sono maggiori d
  # e quindi appaiono nel vettore originale in ordine corretto


}
```

- Inzializzazione contatori, ciascuno con costo unitario c
- n operazioni per eseguire la copia

- massimo n operazioni per i test del while
  - n perchè vengono scanditi tutti gli elementi delle due metà nel caso peggiore in cui ci siano elementi alternati
- operazioni dentro il while, eseguite a seconda del risultato del while e degli if interni
- massimo n/2 operazioni per il secondo while di controllo



- N elementi singoli iniziali
- Si uniscono a coppie, come descritto nell'algoritmo ricorsivo
  - merge(start,middle,end)
  - prima metà = arr[start,middle]
  - seconda metà = arr[middle+1,end]
- Il numero totale di unioni è descritto nel grafico, e corrisponde sempre a $log_2(N)$
- Ogni unione ha un costo che corrisponde a
  - $T(N) = O(N) + O(N/2) + \Theta(1) = O(N)$

COMPLESSITÀ TEMPORALE

CASE	TIME COMPLEXITY	# COMPARISONS	WHEN?
Worst Case	O(N logN)	N logN	Specific distribution
Average Case	O(N logN)	0.74 NlogN	Average
Best Case	O(N logN)	0.50 NlogN	Already sorted

L'algoritmo di mergeSort viene influenzato dalla tipologia di vettore in input

- Complessità temporiale invariata, in quanto sono necessarie tutte le $log_2(N)$ operazioni di separazione e $log_2(N)$ di unione

C ALGO

- main.c = file eseguibile che si interfaccia con l'utente
- merge.h = versione in C dell'algoritmo riportato sopra
- mergeArr.h = versione non ottimizzata di mergeSort a causa di operazioni inutili e onerose da eseguire

TEMPO

```
MERGESORT O(n*logn)
MERGESORT OTTIMIZZATO CON INDICI
TEMPO TRASCORSO 0.059241 seconds
```

JAVA ALGO

- main.java = programma eseguibile
- Abstaction.java = classe contenente l'algoritmo efficiente mergeSort()

COMPLESSITÀ SPAZIALE

- Vettore in INPUT di dimensione N –> non viene contato in quanto input
- Vettore di SUPPORTO anch'esso di dimensione N
  - Se la dimensione N raddoppia, anche il vettore di SUPPORTO raddoppia
- Le chiamate ricorsive vengono inserie nello STACK
  - Il numero totale di chiamate ricorsive è $nC = log_2(N)$
  - Perciò lo STACK sarà occupato per nC spazi
  - anche nC dipende dalla dimensione del vettore di INPUT
- NON È IN PLACE in quanto la dimensione occupata dalla memoria non è prefissata, ma dipende dalla dimensione del vettore INPUT

STABILITÀ

Se due elementi sono uguali, quello che occuperà la posizione più a SX dell'array finale deve essere quello che era più a SX nell'array di INPUT

- Questa condizione è verificata dal test effettuato nell'algoritmo di UNIIONE
  - if (copyArray[leftIndex] <= copyArray[rigthIndex])
    - inputArr[inputIndex] = copyArray[leftIndex]
    - viene mantenuto l'ordine iniziale