ESERCIZI

Negli esercizi seguenti, data una matrice A, indichiamo con $A(i,-)$ la sua i-esima riga e con $A(-,j)$ la sua j-esima colonna.

(1) Calcolare il determinante delle seguenti matrici utilizzando i suggerimenti.

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Suggerimento: $A(3,-) = A(1,-) + A(2,-)$. (Svolgimento utilizzando il suggerimento: poiché una riga è combinazione lineare di altre righe, il determinante è nullo) Controllare che il determinante sia nullo utilizzando Laplace o la regola di Sarrus.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Suggerimento. Prima di calcolare il determinante con lo sviluppo di Laplace operare le seguenti trasformazioni elementari, che non cambiano il determinante.
1. Sostituire la colonna $B(-,1)$ con $B(-,1) - B(-,4)$. 2. Sostituire la colonna $B(-,2)$ con $B(-,2) - B(-,4)$. 3. Sostituire la colonna $B(-,3)$ con $B(-,3) + B(-,4)$.

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Utilizzare la regola di Sarrus e controllare il risultato con lo sviuppo di Laplace sulla prima colonna.

(2) Calcolare il determinante della seguente matrice, trasformandola in una matrice triangolare superiore utilizzando solo trasformazioni elementari.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Se C è la matrice dell'esercizio precedente, trovare una matrice D (prodotto di matrici elementari) tale che DC è una matrice triangolare superiore.

(4) Utilizzando solo le seguenti proprietà (e NON lo sviluppo di Laplace)
- multilinearità del determinante;
- il determinante della matrice colonna $[e_1, \ldots, e_n]$ è uguale ad 1;
- se una matrice ha due colonne uguali, allora il determinante è nullo,

calcolare i determinanti delle seguenti matrici di vettori colonna. Scrivere poi esplicitamente la matrice e calcolare il determinante in altro modo (Sarruss o Laplace).

(a)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [2e_1 + e_2, e_2];$$

Esempio di svolgimento:

$$det[2e_1 + e_2, e_2] = 2det[e_1, e_2] + det[e_2, e_2] = 2 + 0 = 2$$

(b) $A_2 = [e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_3]$;

(c) $A_3 = [e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3]$.

(5) Utilizzando il determinante, calcolare l'area del parallelogramma di $\mathbb{R}^2$ formato dai vettori $(1, 2)$, $(5, 2)$.

(6) Utilizzando il determinante, calcolare il volume del parallelepipedo di $\mathbb{R}^3$ formato dai vettori $(1, 2, 3)$, $(5, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$.

(7) Utilizzando la nozione di determinante, stabilire se i vettori v_1, v_2, v_3 di $\mathbb{R}^3$ sono indipendenti, per

(a) $v_1 = (1, -2, 1), v_2 = (2, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)$;

(b) $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (2, -1, 3), v_3 = (3, 0, 5)$;

(c) $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (2, -1, 3), v_3 = (3, 0, 1)$.

(prima di calcolare il determinante, cercare di semplificare le matrici coinvolte).

(8) Per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ i vettori

$$v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (2, -1, 3), v_3 = (3, 0, h) \in \mathbb{R}^3$$

sono indipendenti?

(9) Considerare la matrice quadrata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Utilizzando il determinante, dimostrare che A è invertibile.

(b) Trovare l'inversa A^{-1} con il metodo delle matrici elementari ed il suo determinante.

(c) Esprimere le soluzioni del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

tramite la matrice A^{-1}.

(10) Dato $h \in \mathbb{R}$ considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} h & 0 & 3 \\ 2 & -1 & h \\ h+2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Per quali valori del parametro h si ha $det(A) = 0$?

(b) Per quali valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ la matrice è invertibile?

(c) Per quali valori del parametro h il sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ ha una sola soluzione, oppure infinite soluzioni o nessuna soluzione?
[Risposta: per $h \neq 0$ c'è una sola soluzione, per $h = 0$ ci sono infinite soluzioni]

(11) Data una matrice quadrata A di dimensione n possiamo calcolarne sia il rango, che il determinante.

(a) Per quali matrici si ha $rg(A) = 0$?

(b) Se $rg(A) = n$, cosa possiamo dire di $det(A)$?

(c) Se $det(A) = 0$, cosa possiamo dire di $rg(A)$?