Esercizi su BASI E DIMENSIONE

ESERCIZI

(1) Determinare se le affermazioni seguenti sono vere o false:

(a) Dati k vettori $v_1, \ldots, v_k$ e un numero reale $t \neq 0$ si ha:

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \text{ sono dipendenti } \Leftrightarrow \ tv_1, tv_2, \ldots, tv_k \text{ sono dipendenti}$$

(b) Dati k vettori $v_1, \ldots, v_k$ e un numero reale $t \neq 0$ si ha:

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \text{ sono indipendenti } \Leftrightarrow \ tv_1, tv_2, \ldots, tv_k \text{ sono indipendenti}$$

(c) Se un sottospazio vettoriale ha dmensione k, allora $k-1$ vettori sono sempre dipendenti.

(d) Se un sottospazio vettoriale ha dmensione k, allora $k-1$ vettori sono sempre indipendenti.

(e) Se un sottospazio vettoriale ha dmensione k, allora $k+1$ vettori sono sempre indipendenti.

(f) Se un sottospazio vettoriale ha dmensione k, allora $k+1$ vettori sono sempre dipendenti.

(g) Se un sottospazio vettoriale W ha dmensione k, allora $k+1$ vettori di W generano sempre W.

(h) Se un sottospazio vettoriale W ha dmensione k, allora k vettori indipendenti di W generano sempre W.

(i) Se un sottospazio vettoriale W ha dmensione k, allora W non può essere generato da $k-1$ vettori,

(j) La dimensione di W è uguale al massimo numero di vettori dipendenti che posso trovare in W.

(k) La dimensione di W è uguale al massimo numero di vettori indipendenti che posso trovare in W.

(l) Uno spazio generato da k vettori non può essere generato da $k-1$ vettori.

(m) Uno spazio generato da k vettori indipendenti non può essere generato da $k-1$ vettori.

(2) In $\mathbb{R}^3$ considerare il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ dato dal piano per l'origine di equazione cartesiana $x - 2y + z = 0$ ed il sottospazio W' dato dal piano per l'origine di equazione cartesiana $x + y + z = 0$.

(a) Trovare una base per il sottospazio W ed una per il sottospazio W'.

(b) Determinare il sottospazio $W \cap W'$ e una sua base.

(c) Determinare una base per $W + W'$.

(d) Confrontare le dimensioni di $W, W', W \cap W', W + W'$, verificando che vale la formula di Grassmann.

(3) Considerare il sottospazio W di $\mathbb{R}^4$ descritto da:

$$W = \{(x, y, z, w) \ : \ x - z = 0 \text{ e } y - w = 0\}$$

(a) Determinare la dimensione di W e una sua base.
(b) Considerare il sottospazio
$$W' := \{(x, y, z, w) \ : \ x - y = 0 \text{ e } z - w = 0\}.$$
Determinare l'intersezione $W \cap W'$ e una sua base.
(c) Usando la formula di Grassmann trova la dimensione di $W + W'$ e una sua base.
(d) Dimostrare che il vettore $w = (2, 1, 1, 0)$ appartiene a $W + W'$ e scrivi le sue coordinate rispetto alla base trovata nel punto precedente.