Esercizi su Operazioni, Insieme Potenza, Partizioni, Prodotto Cartesiano e Relazioni

27 ottobre 2020

Se A è un insieme, indichiamo con $P(A)$ l'insieme delle parti di A.

1. Se $A = \{0, 2, 5\}$, per ognuno dei seguenti insiemi determinare un elemento che appartiene all'insieme, uno che non vi appartiene, ed un suo sottoinsieme non vuoto.
$$A \times P(A), \qquad P(A) \times P(A), \qquad P(A \times A) \setminus \{\emptyset\}.$$

2. Siano A, B insiemi qualsiasi. Si ha:

V	**F**	se $X \in P(A)$ oppure $X \in P(B)$ allora $X \in P(A \cup B)$;
V	**F**	se $X \in P(A \cup B)$ allora $X \in P(A) \cup P(B)$;
V	**F**	se $X \in P(A \cap B)$ allora $X \in P(A)$ e $X \in P(B)$;
V	**F**	se $X \in P(A) \cap P(B)$ allora $X \in P(A)$ e $X \in P(B)$.
V	**F**	se $X \subseteq A \cup B$ allora $X \subseteq A$ oppure $X \subseteq B$.

3. Trovare un controesempio alla seguente affermazione su insiemi A, B, C:
$$A \cap B = A \cap C \quad \Rightarrow B = C.$$

4. Determinare quali dei seguenti insiemi è una partizione dell'insieme $\mathbb{N}$ (prima di risolvere l'esercizio, rivedere la definizione di partizione sulle schede)
$$P_1 = \{\mathbb{N}\}, \qquad P_2 = \{\{x \in \mathbb{N} : x > 3\}, \{x \in \mathbb{N} : x < 3\}, \{3\}\},$$
$$P_3 = \{\{x \in \mathbb{N} : x \text{ è un multiplo di } 2\}, \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è un multiplo di } 3\ \}\}$$
$$P_4 = \{\{n, 2n\} : n \in \mathbb{N}\}, \qquad P_5 = \{\{n, n+1\} : n \text{ è pari }\}$$

5. Sia $A = \mathbb{N}, B = \{X \in P(\mathbb{N}) : \quad X \text{ ha un numero finito di elementi}\}$ e C la corrispondenza
$$C = \{(n, X) : n \in X\}.$$
Dato un sottoinsieme X finito di $\mathbb{N}$, quanti sono i numeri naturali n tali che $(n, X) \in C$? E dato $n \in \mathbb{N}$, quanti sono i sottoinsiemi X finiti di $\mathbb{N}$ tali che $(n, X) \in C$?

6. Considerare la relazione binaria R definita sugli interi $\mathbb{Z}$ da

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y = 1\}$$

Stabilire se R è riflessiva, simmetrica o transitiva.

7. Se R è la relazione binaria su $\mathbb{N}$ definita da

$R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n + m \text{ è pari}\}$

detrminare se R è simmetrica, riflessiva o transitiva.

8. Sia $A = \mathbb{N}$ e R la relazione su A definita da

$$R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \ n, m \text{ hanno una cifra in comune } \}$$

(ad esempio, $(13, 21) \in R$, perché 13 e 21 hanno entrambi la cifra 1. Determina se R è riflessiva, simmetrica o transitiva.

9. Sia $A = P(\mathbb{N})$ e R la seguente relazione su A:

$$R = \{(X, Y) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) : X \cap Y = \emptyset\}$$

Determinare se R è riflessiva, simmetrica o transitiva.

10. Sia A l'insieme delle parole italiane e R la relazione

$$R = \{(p, q) \in A \times A : \text{ le parole } p, q \text{ iniziano con la stessa lettera}\}$$

(ad esempio, $(barca, banana) \in R$, mentre $(balena, altalena) \notin R$. Determinare se R è riflessiva, simmetrica o transitiva.

11. Sia A l'insieme delle parole dell'alfabeto italiano e R la relazione

$$R = \{(p, q) : \text{ le parole } p, q \text{ iniziano o terminano con la stessa lettera}\}$$

(ad esempio, $(barca, banana) \in R$, ma anche $(balena, altalena) \in R$, perché terminano con la stessa lettera. Determinare se R è riflessiva, simmetrica o transitiva.