Simulazione Scritto

11 -12 - '13

1 Esercizi

PRIMA PARTE

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa:

1. Se $C \cup D \neq \emptyset$ allora vale sempre che $C \neq \emptyset$ e $D \neq \emptyset$. **V** | **F**
2. $\{(2, -3)\} \in P(\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$. **V** | **F**
3. La funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = -z$ è suriettiva. **V** | **F**
4. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (n, -n)$ è suriettiva. **V** | **F**
5. La funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n, m) = n + m$ è suriettiva. **V** | **F**
6. La funzione $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ definita da

$$f(n) = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}$$

   è iniettiva. **V** | **F**
7. Ogni funzione suriettiva è anche biunivoca. **V** | **F**
8. Se $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ è definita da $f(z) = (z + 2)^2$ e $Y = \{0, 2, 9\}$ allora $1 \in f^{-1}(Y)$. **V** | **F**
9. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(z) = -z$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $g(z) = z + 1$. Se $h = f \circ g$ allora $h(z) = -z - 1$. **V** | **F**
10. Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to Pow(\mathbb{Z})$ la funzione definita da $f(x, y) = \{x\}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la funzione definita da $g(z) = (z + 1, z - 1)$. Se $h = f \circ g$ allora $h(z) = \{z\}$. **V** | **F**
11. La relazione binaria R definita sui numeri interi $\mathbb{N}$ da

$$(x, y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad x + y \text{ è un multiplo di } 3$$

   è riflessiva. **V** | **F**

12. La relazione binaria R definita sui sottoinsiemi dei numeri naturali da

$$XRY \quad \Leftrightarrow X \cup (\mathbb{N} \setminus Y) = \mathbb{N}$$

è simmetrica. **V** | **F**

13. Il resto della divisione di -7 per -13 è 5. **V** | **F**

14. $23 \equiv_7 -5$. **V** | **F**

15. $(34^{75} + 36 \times 37^4 - 33^2) \equiv_{35} 12$. **V** | **F**

16. Se $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ e $B = \{0, -1, -2\}$ l'insieme

$$\{(x, y) : x \in A, y \in B, x \neq y\}$$

ha 29 elementi. **V** | **F**

SECONDA PARTE

1. Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(n, m) = n - m$.
   (a) Determinare se la funzione è iniettiva dando una dimostrazione della proprietà o trovando un controesempio.
   (b) Determinare se la funzione è suriettiva dando una dimostrazione della proprietà o trovando un controesempio.

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $5^n - 1$ è divisibile per 4.

3. Sia $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$ ed E la relazione d'equivalenza definita su $A \times A \times A$ da

$$(a, b, c)R(a', b', c') \qquad \Leftrightarrow \qquad b = b'$$

   (a) La terna $(1, 0, 1)$ appartiene alla classe d'equivalenza di $(0, 0, 0)$?
   (b) Descrivi gli elementi che appartengono alla classe d'equivalenza di $(0, 0, 0)$.
   (c) Quante sono le classi d'equivalenza di E su $A \times A \times A$?

2 Soluzioni

PRIMA PARTE

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, dire se è vera o falsa:

1. Falso. Se $C \neq \emptyset$ e $D = \emptyset$ allora $C \cup D = C \neq \emptyset$.
2. Vero. Infatti $\{(2, -3)\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.
3. Vero. Per ogni $z \in \mathbb{Z}$ si ha $z = f(-z)$.
4. Falso. Per esempio $(1, 1)$ non ha controimmagini.
5. Vero. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $n = f(n, 0)$.
6. Vero. Infatti se $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $n_1 \neq n_2$, allora possiamo supporre che $n_1 < n_2$, e dunque $f(n_1) = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n_1\}$ contiene strettamente $f(n_2) = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n_2\}$; in particolare, $n_1 \in f(n_1)$ ma $n_1 \notin f(n_2)$.
7. Falso. Esistono funzioni suriettive che non sono iniettive (ad esempio $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da $f(z) = |z|$) e quindi in particolare non sono biunivoche.
8. Vero. Infatti $f(1) = 9$.
9. Vero. Infatti $h(z) = f(g(z)) = f(z + 1) = -z - 1$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$.
10. Falso. Infatti $h(z) = f(g(z)) = \{z+1\}$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$. Quindi per esempio $h(1) = \{2\} \neq \{1\}$.
11. Falso. Per esempio $(1, 1) \notin R$, dato che $1 + 1 = 2$ non è divisibile per 3.
12. Falso. Per esempio $\{0, 1\}R\{0\}$ ma $\{0\}$ non è in relazione R con $\{0, 1\}$; infatti $\{0, 1\} \cup (\mathbb{N} \setminus \{0\}) = \mathbb{N}$, mentre $1 \notin \{0\} \cup (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ e dunque $\{0\} \cup \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \neq \mathbb{N}$.
13. Falso. Il resto della divisione di -7 per -13 è 6, dato che $-7 = -13 + 6$.
14. Vero. Infatti $23 - (-5) = 23 + 5 = 28$ è divisibile per 7.
15. Falso. Infatti $(34^{75} + 36 \cdot 37^4 - 33^2) \equiv_{35} (-1)^{75} + 1 \cdot 2^4 - (-2)^2 = -1 + 16 - 4 = 13$.
16. Vero. Infatti $\{(x, y) : x \in A, y \in B, x \neq y\} = A \times B \setminus \{(0, 0)\}$, quindi $|\{(x, y) : x \in A, y \in B, x \neq y\}| = 30 - 1 = 29$.

SECONDA PARTE

1. Sia $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(n, m) = n - m$.

   (a) La funzione f non è iniettiva in quanto per esempio $f(1, 0) = 1 = f(2, 1)$.

   (b) La funzione f è surettiva. Infatti, sia $n \in \mathbb{Z}$; se $n \geq 0$ allora $n = f(n, 0)$, mentre se $n < 0$ allora $n = f(0, -n)$.

2. Passo base: per $n = 1$ troviamo $5 - 1$ ̀divisibile per 4, che è vero.
   Passo induttivo: supponiamo che $5^n - 1$ sia divisibile per 4. Allora $5^{n+1} - 1 = 5 \cdot 5^n - 1 = 4 \cdot 5^n + 5^n - 1$. Dunque $5^{n+1} - 1$ è somma di due numeri divisibili per 4 ed è quindi divisibile per 4.

3. (a) La terna $(1, 0, 1)$ appartiene alla classe d'equivalenza di $(0, 0, 0)$ poiché la seconda componente di questi due elementi è la stessa.

   (b) La classe d'equivalenza di $(0, 0, 0)$ rispetto a E è $\{(a, 0, c) : a, c \in A\}$.

   (c) Le classi d'equivalenza di E su $A \times A \times A$ sono 10, cioè una per ognuna delle possibili scelte di $b \in A$.