Esercizi

(1) Sia $B =< (1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0) >$.
  (a) Dimostrare che B è una base.
  (b) Trovare la matrice di cambiamento di base dalla base B alla base $\mathcal{E}_3$, ovvero la matrice $\mathcal{M}_B^{\mathcal{E}_3}$.
  (c) Calcolare l'inversa della matrice $\mathcal{M}_B^{\mathcal{E}_3}$ trovata al punto precedente.
  (d) Verificare che la matrice trovata al punto precedente coincide con la matrice di cambiamento di base $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^B$ dalla base $\mathcal{E}_3$ alla base B.
  (e) Trovare le coordinate del vettore $v = (-1, 2, 3)$ nella base B utilizzando la matrici del cambiamento di base opportuna.

(2) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (-x, -x, -z)$.
  (a) Trovare la matrice $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(T)$ che corrisponde a T rispetto alla base canonica.
  (b) Sia B la base dell'esercizio precedente, $B =< v_1, v_2, v_3) >$ dove $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 0, 1), v_3 = (0, 1, 0)$. Trovare la matrice $M_B^B(T)$ che corrisponde a T rispetto alla base B.
  (c) Se $v = 2v_1 - v_2 + 3v_3$, calcola le coordinate in base B del vettore $T(v)$, utilizzando la matrice $M_B^B(T)$ trovata al punto precedente.

(3) Sia A la seguente matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  (a) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice A rispetto alla base canonica. Determinare $T(1, 1, 1)$ e, più in generale, determinare il valore $T(x, y, z)$ sul generico vettore (x, y, z) del dominio.
  (b) Determinare $Im(T)$, $Ker(T)$, una base per $Im(T)$ e una base per $Ker(T)$.
  (c) Considera la base $B =< v_1, v_2, v_3 >$, dove

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, -2, 0), v_3 = (0, 0, 2).$$

  Determina le matrici di cambiamento di base da B alla base canonica e viceversa.
  (d) Determina la matrice $M_B^B(T)$ che corrisponde alla trasformazione T rispetto alla base B, sia direttamente che utilizzando le matrici $A = M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(T)$, $M_B^{\mathcal{E}_3}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^B$.

(4) Sia A la seguente matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  (a) Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice A rispetto alla base canonica, determinare se il vettore $(0, 1, 0)$ è un autovettore di F, e, in caso positivo, qual è l'autovalore corrispondente.

  (b) Il valore 0 è un autovalore per F?

(5) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (y, x, 0).$$

(a) Stabilire se i seguenti vettori sono autovettori di F. In caso affermativo, stabilire quali sono gli autovalori corrispondenti.

$$v_1 = (1,1,0), v_2 = (2,2,0), v_3 = (1,2,1),$$
$$v_4 = (1,-1,0), v_5 = (0,0,0), v_6 = (0,0,1)$$

(b) F è diagonalizzabile? In caso affermativo, determinare una base B di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per F e la matrice $M_B^B(F)$ che corrisponde ad F rispetto a tale base.

(6) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (-x, -x, -z)$.
(a) Calcolare la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica per dominio e codominio.
(b) Verificare che $(1, 1, -1)$ è un autovettore per T, con autovalore -1.
(c) Determinare l'autospazio V_{-1}, la sua dimensione e una sua base.
(d) Determinare se T ha altri autovalori e in caso positivo i relativi autospazi.
(e) Determinare se T è diagonalizzabile; in caso affermativo, trovare una base B di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di T e determinare $M_B^B(T)$.

(7) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da $F(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, z)$.
(a) Trovare la matrice che corrisponde ad F rispetto alla base canonica.
(b) Determinare $Ker(F), Im(F)$ e le loro dimensioni, stabilendo se F è iniettiva, suriettiva o biunivoca.
(c) Stabilire se il vettore $(1, 1, 1)$ è un autovettore di F e se si, per quale autovalore.
(d) Trovare gli autovalori di F ed i relativi autospazi.
(e) F è diagonalizzabile? Se la risposta è positiva, trovare una base di autovettori e la matrice che corrisponde a F in questa base.

(8) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (x, x + z, y).$$

(a) Trovare la matrice che corrisponde ad F rispetto alla base canonica.
(b) Stabilire se il vettore $(1, 1, 1)$ è un autovettore di F e se si, per quale autovalore.
(c) Trovare gli autovalori di F ed i relativi autospazi e stabilire se F è diagonalizzabile.