SIMULAZIONE SCRITTO II MODULO

QUIZ: ogni risposta corretta vale 1 punto, sbagliata $-1/2$, non data 0.

1. Una matrice quadrata con determinante uguale a zero ha sempre rango uguale a zero. **V** | **F**

2. In $\mathbb{R}^n$, n vettori linearmente indipendenti generano tutto lo spazio. **V** | **F**

3. Il sottospazio $W = \{(2h, 2h, 2h) : h \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 2. **V** | **F**

4. Se una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ ha rango 4 allora è iniettiva. **V** | **F**

5. I vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ sono ortogonali. **V** | **F**

6. I vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono indipendenti in $\mathbb{R}^3$. **V** | **F**

7. Il numero complesso $(1+i)/2$ è l'inverso moltiplicativo del numero complesso $1-i$. **V** | **F**

8. La matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -100 & 73 \\ 0 & 20 & 34 & -27 \\ 0 & 0 & 4 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
è invertibile. **V** | **F**

9. Sia T una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; vale sempre che:
   (a) se T è suriettiva allora $m \leq n$
   (b) se T è iniettiva allora $m = n$;
   (c) se $Ker(T) = \{\vec{0}\}$ allora T è biunivoca;
   (d) se $m = n$ allora T è biunivoca.

10. Se $B = [v_1, \ldots, v_k]$ è una base per il sottospazio $W \leq \mathbb{R}^n$ allora:
   (a) anche $B' = [v_2, \ldots, v_k]$ è una base di W;
   (b) i vettori $v_2, \ldots, v_k$ sono indipendenti;
   (c) il vettore v_1 è combinazione lineare degli altri vettori della base;
   (d) se $v \in W \setminus B$, i vettori $v, v_1, \ldots, v_k$ sono indipendenti.

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (-2x + 2y, -2y + 2z, 0)$.

   (a) Determinare $Ker(T), Im(T)$ e le loro dimensioni, stabilendo se T è iniettiva, suriettiva o biunivoca. Se possibile, trovare un vettore non nullo che appartiene a $Ker(T)$ ed un vettore non nullo che appartiene a $Im(T)$.

   (b) Stabilire se il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è un autovettore di T e se si, per quale autovalore.

   (c) Trovare gli autovalori di T ed i relativi autospazi.

   (d) Determinare se T è diagonalizzabile.

2. (a) Dare la definizione di base di $\mathbb{R}^n$.

   (b) Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   i. Dimostrare che $B = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

   ii. Determinare le matrici di cambiamento di base, dalla base canonica alla base B e viceversa.

   iii. Determinare le coordinate del vettore $v = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in base B.

3. (a) Dare la definizione di sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

   (b) Considerare il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y = 0 \text{ e } y + 2z = 0 \text{ e } x + z = 0\}$$

   i. Determinare le equazioni parametriche di W, stabilendo se si tratta di un piano, una retta o un punto.

   ii. Trovare una base di W.

   iii. Determinare la matrice di proiezione ortogonale su W e la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ su W.

Answer Key for Exam $\boxed{\text{A}}$

QUIZ: ogni risposta corretta vale 1 punto, sbagliata −1/2, non data 0.

1. Una matrice quadrata con determinante uguale a zero ha sempre rango uguale a zero. $\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ Falso: ad esempio, la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ha determinante zero e rango 1

2. In $\mathbb{R}^n$, n vettori linearmente indipendenti generano tutto lo spazio. $\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ Vero

3. Il sottospazio $W = \{(2h, 2h, 2h) : h \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 2. $\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ Falso: ha dimensione 1

4. Se una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ ha rango 4 allora è iniettiva. $\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ Vero: poiché $dim(Ker(T)) + rg(T) = 4$ se T ha rango 4 si ha $Ker(T) = \{\vec{0}\}$, quindi T è iniettiva.

5. I vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$ sono ortogonali. $\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ Falso: il loro prodotto scalare non è nullo

6. I vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono indipendenti in $\mathbb{R}^3$. $\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ Falso: il determinante della matrice che ha per colonne i vettori è nullo.

7. Il numero complesso $(1 + i)/2$ è l'inverso moltiplicativo del numero complesso $1 - i$. $\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ Vero

8. La matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -100 & 73 \\ 0 & 20 & 34 & -27 \\ 0 & 0 & 4 & -7/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
è invertibile. $\boxed{\textbf{V}}\boxed{\textbf{F}}$ V: il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale ed è diverso da zero.

9. Sia T una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; vale sempre che:
   - $\boxed{\text{(a)}}$ se T è suriettiva allora $m \leq n$
   - (b) se T è iniettiva allora $m = n$;
   - (c) se $Ker(T) = \{\vec{0}\}$ allora T è biunivoca;
   - (d) se $m = n$ allora T è biunivoca.

10. Se $B = [v_1, \ldots, v_k]$ è una base per il sottospazio $W \leq \mathbb{R}^n$ allora:
    - (a) anche $B' = [v_2, \ldots, v_k]$ è una base di W;
    - $\boxed{\text{(b)}}$ i vettori $v_2, \ldots, v_k$ sono indipendenti;
    - (c) il vettore v_1 è combinazione lineare degli altri vettori della base;
    - (d) se $v \in W \setminus B$, i vettori $v, v_1, \ldots, v_k$ sono indipendenti.

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (-2x + 2y, -2y + 2z, 0)$.

   (a) Determinare $Ker(T), Im(T)$ e le loro dimensioni, stabilendo se T è iniettiva, suriettiva o biunivoca. Se possibile, trovare un vettore non nullo che appartiene a $Ker(T)$ ed un vettore non nullo che appartiene a $Im(T)$. **SOL**

   $$Ker(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases} \}$$

   Risolvendo il sistema, otteniamo

   $$Ker(T) = \{(h, h, h) : h \in \mathbb{R}\}$$

   Quindi $Ker(T)$ ha dimensione 1 ed il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in Ker(T)$. T non è iniettiva perché la dimensione del nucleo è diversa da 0. In particolare, T non è biunivoca.

   $$Im(T) = \{(-2x + 2y, -2y + 2z, 0) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

   Da $dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = 3$ segue che $dim(Im(T)) = 2$. T non è suriettiva perché l'immagine è un sottospazio proprio del codominio. Un vettore non nullo del $Ker(T)$ è $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ mentre un vettore che non appartiene all'immagine è, ad esempio, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Stabilire se il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è un autovettore di T e se si, per quale autovalore.

   SOL $T(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, quindi $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è un autovettore di T per l'autovalore 0.

   (c) Trovare gli autovalori di T ed i relativi autospazi. **SOL** Per trovare gli autovalori di T dobbiamo trovare le radici del polinomio caratteristico

   $$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (-2-\lambda)^2(-\lambda)$$

   Le radici di $p(\lambda)$ sono $\lambda = 0$ e $\lambda = -2$, quindi questi sono gli unici autovalori. Gli autospazi corrispondenti sono $Aut_0 = Ker(F)$, già determinato in precedenza e e Aut_{-2} che si ottiene risolvendo il sistema:

   $$(A - (-2)I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   La matrice $A - (-2)I$ è:

   $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e quindi il sistema che dobbiamo risolvere è

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha come soluzione l'insieme dei vettori $Aut_{-2} = \{(h, 0, 0) : h \in \mathbb{R}\}$.

(d) Determinare se T è diagonalizzabile. **SOL** T non è diagonalizzabile perché $dim(Aut_0)+dim(Aut_{-2}) = 2 < 3$ e quindi non è possibile trovare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di T.

2. (a) Dare la definizione di base di $\mathbb{R}^n$. **SOL** Vedere slides.

(b) Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

i. Dimostrare che $B = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$. **SOL** Consideriamo la matrice che ha per colonne i vettori v_1, v_2, v_3 e calcoliamone il determinante (sviluppando secondo l'ultima colonna):

$$det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 1((-1) \cdot (-1)) = 1$$

Poiché il determinante è non nullo, $B = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

ii. Determinare le matrici di cambiamento di base, dalla base canonica alla base B e viceversa. **SOL** La matrice di cambiamento di base, dalla base B alla base canonica, è la matrice (indicata ancora con B) che ha come colonne i vettori della base. Per questa matrice avremo, $v = B||v||^B$, per ogni vettore v, mentre il cambiamento dalla base canonica alla base B è dato dalla matrice inversa B^{-1}. Possiamo calcolare l'inversa con il metodo delle due colonne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi che la matrice di cambiamento di base, dalla base canonica alla base B, è:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\0 & -1 & -1\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

iii. Determinare le coordinate del vettore $v = \begin{bmatrix}-1/2\\-2\\1\end{bmatrix}$ in base B.

$$||v||^B = B^{-1}\begin{bmatrix}-1/2\\-2\\1\end{bmatrix} = -1/2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\-7/2\end{bmatrix}$$

3. (a) Dare la definizione di sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. **SOL** Vedere slides.

   (b) Considerare il seguente sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x - y = 0 \text{ e } y + 2z = 0 \text{ e } x + z = 0\}$$

i. Determinare le equazioni parametriche di W, stabilendo se si tratta di un piano, una retta o un punto.

SOL Risolvendo il sistema che definisce W, ovvero $\begin{cases}2x - y = 0\\ y + 2z = 0\\ x + z = 0\end{cases}$

troviamo che il sottospazio W è una retta di equazione parametrica:

$$\begin{cases}x = -h\\ y = -2h \qquad , h \in \mathbb{R}\\ z = h\end{cases}$$

ii. Trovare una base di W. **SOL** Una base di W è data, per esempio, da $B = [v]$, dove $v = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$.

iii. Determinare la matrice di proiezione ortogonale su W e la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ su W. **SOL** Considerando il vettore $v = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$ di W, la matrice di proiezione può essere definita da:

$$P = vv^T/v^Tv = 6^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 4 & -2\\-1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

e la proiezione del vettore $v = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ su W è

$$Pv = 6^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 4 & -2\\-1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 6^{-1}\begin{bmatrix}2\\4\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\2/3\\-1/3\end{bmatrix}$$