ESERCIZI SU RELAZIONI D'EQUIVALENZA E CLASSI D'EQUIVALENZA

1. Sia E la relazione su $\mathbb{Z}$ definita da
$$aEb \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$
   (a) Determinare la classe d'equivalenza $[0]_E$ di 0 e la classe $[1]_E$ di 1.
   (b) Più in generale, determinare la classe $[z]_E$ di un elemento $z \in \mathbb{Z}$.
   (c) Stabilire se l'insieme $\mathbb{N}$ è un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su $\mathbb{N}$.

2. Sia A l'insieme di tutte le stringhe finite di almeno un carattere che si possono formare con le cifre $\{0, 1\}$. Sia E la seguente relazione d'equivalenza su A:
$$\sigma E \tau \Leftrightarrow \ \sigma \text{ e } \tau \text{ contengono lo stesso numero di zeri}$$
Ad esempio, $0101E00111$ mentre non vale $01E00$.
   (a) Determinare la classe d'equivalenza della stringa 01.
   (b) Stabilire quali fra i seguenti insiemi è una classe d'equivalenza della relazione E.
      i. $\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$;
      ii. $\{1, 11, 111, \ldots\}$;
      iii. $\{0, 00, 000, \ldots\}$.
   (c) Stabilire quali fra i seguenti insiemi è un insieme di rappresentanti per la relazione E su A.
      i. $\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$;
      ii. $\{1, 11, 111, \ldots\}$;
      iii. $\{0, 00, 000, \ldots\}$.

3. Considerare la relazione d'equivalenza R su $\mathbb{N}$ definita da:
$$a\ R\ b \quad \Leftrightarrow \quad \text{la cifra decimale delle unità di } a \text{ è uguale alla cifra decimale delle unità di } b$$
   (a) Determinare tre numeri che appartengono alla classe d'equivalenza di 0 e tre numeri che appartengono alla classe d'equivalenza di 1
   (b) Determinare la classe d'equivalenza di 0.
   (c) Quali dei seguenti insiemi è un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di R su $\mathbb{N}$?
      (i) $\{0, 10, 100, \ldots, 10^n, \ldots\}$;
      (ii) $\{n : 0 \leq n < 10\}$;
      (iii) l'insieme dei numeri primi.

4. Sia A l'insieme delle stringhe finite di caratteri alfabetici (ad esempio, le stringhe "csae" e "casetta" appartengono all'insieme A). Sia E la relazione d'equivalenza su A definita come segue: se $\sigma, \tau \in A$ allora
$$\sigma E \tau \Leftrightarrow \ \sigma \text{ e } \tau \text{ contengono le stesse lettere}$$
(nota: non si chiede che σ e τ contengano lo stesso numero di occorrenze di una data lettera; ad esempio, vale $aEaa$)
   (a) Determinare la classe d'equivalenza della stringa composta dall'unica lettera a e indicare tre elementi distinti che appartengono alla classe della stringa ab.
   (b) Per ognuno dei seguenti insiemi, determinare se tale insieme è un insieme di rappresentanti delle classi d'equivalenza di E su A, giustificando adeguatamente le risposte (in particolare, in caso negativo spiegare quale condizione viene a mancare).
      - $\{\sigma \in A : \sigma \text{ è una lettera dell'alfabeto}\}$;

- $\{\sigma \in A : \sigma$ non contiene lettere ripetute$\}$.

5. Considerare la relazione d'equivalenza R su $\mathbb{N}$ definita da

$$aRb \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{nella scrittura decimale, } a \text{ e } b \text{ hanno la stessa cifra delle decine}$$

(ad esempio $5R7$ (0 decine) $213R10$ (1 decina))

   (a) Determinare se 123 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Descrivere la classe di equivalenza del numero 1.
   (c) Determinare il numero di classi d'equivalenza della relazione R.
   (d) Determinare quale fra i seguenti insiemi è un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di R su $\mathbb{N}$:
      i. $\{10^n : n \in \mathbb{N}\}$;
      ii. $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 9\}$;
      iii. $\{0, 10, 20, 30, 40, \ldots 90\}$;
      iv. $\mathbb{N}$.

6. Considerare la relazione d'equivalenza R sulle coppie di numeri naturali $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da

$$(a, b)R(c, d) \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{a-b=c-d}$$

   (a) Determinare se $(5, 2)R(2, 5)$ e se $(5, 2)R(7, 4)$.
   (b) Determinare un numero, diverso da $(0, 0)$, che appartiene alla classe d'equivalenza di $(0, 0)$ ed un numero che non vi appartiene.
   (c) Descrivere la classe di equivalenza di $(0, 0)$.
   (d) Determinare quali fra i seguenti insiemi sono insiemi di rappresentanti per le classi d'equivalenza di R su $\mathbb{N}$:
      i. $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a = b\}$;
      ii. $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b = 0\}$;
      iii. $\{(a, a + b) : a, b \in \mathbb{N}\}$.

7. Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$ e E la relazione binaria su A definita da:

$nEm \;\; \Leftrightarrow \;\;$ l'insieme dei numeri primi che dividono n è uguale all'insieme dei numeri primi che dividono m

Dato $n \in \mathbb{N}$ sia $[n]$ la sua classe d'equivalenza rispetto alla relazione E.

   (a) Stabilire se $3 \in [9]$ e se $9 \in [12]$;
   (b) Trovare le classi d'equivalenza dei numeri $2, 3, 6$.
   (c) Per ognuno dei seguenti insiemi determinare se è una classe d'equivalenza della relazione, un insieme di rappresentanti per le classi o nessuno dei due.
      i. $\{2 \cdot 3^n \;:\; n \in \mathbb{N}\}$;
      ii. $\{2^n 3^n \;:\; n > 0\}$;
      iii. $\{2^n 3^m : n > 0$ oppure $m > 0\}$;
      iv. $\{n \in A \;:\;$ per ogni primo p, se p divide n allora p^2 non divide $n\}$.