ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI

Prima di svolgere gli esercizi, leggere attentamente le slides pubblicate su elearning.

(1) Trovare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi, determinandone anche la posizione come punto sul piano di Argand-Gauss.

$$z = 3, \quad z = -3, \quad z = i - \sqrt{3}, \quad z = -i\pi/2.$$

(2) Svolgere le operazioni sottoindicate trovando la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

$$(1-2i) + (\sqrt{2} - i); \quad (1-2i) + (\sqrt{2} - i); \quad (1+2i) \cdot (1-2i); \qquad (1-2i)^3$$

$$(1+i)^3; \qquad \frac{3-2i}{-1+i}; \qquad 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

(3) Determinare le seguenti potenze dell'unità immaginaria (trovandone la parte reale e la parte immaginaria):

$$i^{12}, \quad i^{17}, \quad i^{-15}$$

(4) Se $z = a + ib$, il numero complesso $\overline{z} = a - ib$ si dice il *coniugato* di z. Dati due numeri complessi z, z' dimostrare che $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'$, $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z}'$ (in particolare, vale $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$).
Quali sono i numeri complessi tali che $z = \overline{z}$?

(5) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del coniugato del numero $(1-i)^3$.

(6) Verificare che il numero complesso $z = -1 + 2i$ e il suo coniugato $\bar{z}$ soddisfano l'equazione $z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0$. Più in generale, usando l'esercizio (4) mostrare che se un numero z è soluzione di un'equazione

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0,$$

dove i coefficienti a_i sono reali, allora anche $\overline{z}$ è soluzione del polinomio.

(7) Se z è un numero complesso, indichiamo con $|z|$ il suo modulo (ovvero, la lunghezza del vettore che rappresenta z sul piano di Argand-Gauss). Sia E la relazione d'equivalenza definita sui numeri complessi da

$$z \; E \; z' \quad \Leftrightarrow \quad |z| = |z'|.$$

Determinare la classe del numero i ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su $\mathbb{C}$.

(8) Sia $z = 1/2 + i\sqrt{3}/2$. Calcolare la forma trigonometrica di z e di z^3. Risolvere lo stesso esercizio per i numeri: $1/2 - i\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/2 + i/2$ e $3/\sqrt{2} - i3/\sqrt{2}$.

(9) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z che ha modulo 2 e argomento $\frac{5\pi}{6}$. Svolgere lo stesso esercizio se il modulo è $\sqrt{2}$ e l'argomento è $75°$.

(10) Trovare la parte reale, la parte immaginaria, il modulo e l'argomento principale dei seguenti numeri complessi:

$$z = 3, \quad z = -3, \quad z = i - \sqrt{3}, \quad z = -i\pi/2.$$

(11) Sia z il numero complesso $1 + i$. Il numero complesso z^3 è:

il doppio di $i - 1$;	**V** | **F**
$2\sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4}))$;	**V** | **F**
$2(cos(90°) + isen(90°))$	**V** | **F**

(12) Sia $z = \rho(cos(\theta)+isen(\theta))$ un numero complesso non nullo, scritto in forma trigonometrica. Trovare la forma trigonometrica del coniugato di z e quella dell'inverso di z.

(13) Trovare un numero complesso z_0 tale che per qualsiasi numero complesso z il numero $z_0 z$ sia ottenuto ruotando il vettore z intorno all'origine in senso antiorario di 45 gradi.
Svolgere lo stesso esercizio per la rotazione oraria di $\frac{\pi}{2}$ radianti.

(14) Siano $z = \rho(cos(\theta)+isen(\theta))$ e $z' = \rho'(cos(\theta')+isen(\theta'))$ due numeri complessi in forma trigonometrica. L'argomento di

$$\frac{z^2}{2z'}$$

è:

$2\theta - \theta'$;	**V** | **F**
$\frac{\theta^2}{2\theta'}$;	**V** | **F**
$\theta - \theta'$	**V** | **F**

(15) Sia $z = 1/2 + i\sqrt{3}/2$. Determinare il numero $z^{39} - z^{36}$.

(16) Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni, verificando la correttezza del risultato.

$$z^4 = -1, \qquad z^3 = 1+i, \qquad z^3 = -1+i \qquad z^7 = 1, \qquad z^5 = -1/2+i\sqrt{3}/2.$$

(17) Sia ρ la relazione d'equivalenza definita sui numeri complessi non nulli da

$$z\rho z' \quad \Leftrightarrow \quad Arg(z) = Arg(z')$$

Determinare la classe del numero i ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di ρ su $\mathbb{C}$.

(18) Sia $z = 2/\sqrt{2} - i2/\sqrt{2}$. Calcolare la forma trigonometrica di z, di z^{10} e di z^{-2}.