

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in □ Informatica e □ TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 5 febbraio 2015

Cognome e Nome:

[illegible]

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

FACILITY INFORMATION					FACILITY TYPE	
NAME	ADDRESS	CITY	STATE	ZIP	TYPE	STATUS

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{\ln x - \sqrt{1+2\ln^2 x}}$$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x - \sqrt{2 + x^2}} \right)^{x^2}$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - 2x^3)(2x^2 - x^4 - 3x^3)}{(x + 2)(1 + 2x^3 - x^2)}$$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \log(x^2)}{x^3 - 3x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\log(e^x + 2^x)} - \sqrt{x + 2\sqrt{x}} \right) = -1$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - 3}{x - \sqrt{x^2 - 2x^3}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(2x) - x^{1/(x-1)}}{(x^2 - 1)(3x^2 - 2x - 1) \log x}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{2 \cos x - \sqrt{x+4}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^5 - (1 + 2x^2)(3x^2 + x^4)}{(x + 1)x^5 + (x^3 + 1)(2x^2 - x^3)}$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 2x - 1}{x^3 - x} \right)^{x^2}$$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{x^4 - x^3} + x\sqrt{1 + 4x^2})$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + x \operatorname{sen} 4x}{x^3 - \sqrt{x^6 - 2x^5}}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{x-1} - \sqrt{x^2 e^{2x-2} + xe^x - 1})$

$$\text{n) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(\cos(\frac{1}{x}) - e^{1/x})}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} = 4$$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$(a) \quad \frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} \geq x+1, \quad (b) \quad 3 \min\{x+1, \max\{-x-2, 2x\}\} \geq x,$$

(c) $\sqrt{\frac{4-4x^2}{4x+5}} \leq 2.$

3. Dimostrare *per induzione* che $2n + (2n + 1) + (2n + 2) + \cdots + 3(n + 1) = (n + 4)(5n + 3)/2$ se $n > 1$.

4. Poniamo $X = \{(1+4(-1)^n n)/(2+3n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che $7/4$ è l'estremo superiore e -5 è l'estremo inferiore di X , stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.



Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in □ Informatica e □ TWM

Analisi Matematica, tema D

Compitino del 5 febbraio 2015

Cognome e Nome:

[illegible]

Matricola:

Documento d'identità (se chiesto):

--	--	--	--	--	--	--

Si prega di consegnare anche il presente testo. Non si possono consultare libri o appunti o calcolatori. Le risposte vanno giustificate.

1. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x - \sqrt{x^2 - 1})}{\ln x - \sqrt{1 + 3 \ln^2 x}}$$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{\cos x - \sqrt{1 - 3x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\log(e^x - 2^x)} - \sqrt{x + 3\sqrt{x}} \right)$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x - \sqrt{1+x^2}} \right)^{x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(2x) - x^{1/(x-1)}}{(x^2 - 1)(1 - 4x + 3x^2) \log x}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(e^{1/x} - \cos(\frac{1}{x}))}{x + \sqrt{x^2 - 2x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 + x^5 - (2x^2 + 1)(3x^2 + x^4)}{(x^3 - 1)(x^3 + 2x^2) - x^5(x + 1)}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^{1/x} - 3}{2x - \sqrt{4x^2 - x^3}}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{x^4 - x^3} + x\sqrt{4x^2 - 1})$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + x + 1}{x^3 + 3x} \right)^{x^2}$$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{x+1} - \sqrt{x^2 e^{2x+2} - xe^x + 1})$

$$\text{m) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \log(x^2)}{x^3 - 3x + 2}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - 5x^3)(2x - x^4 + 4x^3)}{(4x + 1)(3 + x^3 - x^2)}$$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x - 2x \operatorname{sen} x}{x^3 - \sqrt{x^6 - 3x^5}}$

2. Risolvere le disequazioni seguenti:

$$(a) \quad \frac{16}{3(2-x)} - \frac{25}{3(5-x)} \leq x+1, \quad (b) \quad 3 \min\{-x, \max\{2(-x-1), x-1\}\} + x+1 \geq 0,$$

(c) $\sqrt{\frac{x^2 + 2x}{4x - 1}} \leq 1.$

3. Dimostrare *per induzione* che $(2n+1)+(2n+2)+(2n+3)+\cdots+(3n-2) = (n-2)(5n-1)/2$ se $n > 3$.

4. Poniamo $Y = \{(5 + 2(-1)^n n)/(3 - 2n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Dimostrare che 3 è l'estremo superiore e -9 è l'estremo inferiore di Y , stabilendo anche se sono massimo e minimo.

Punti: 2 per ogni limite, 3 per ogni disequazione, 6 per ogni altro esercizio.

Dipartimento di Matematica e Informatica
Corso di Laurea in Informatica e TWM

Analisi Matematica, tema A

Compitino del 5 febbraio 2015

Svolgimento

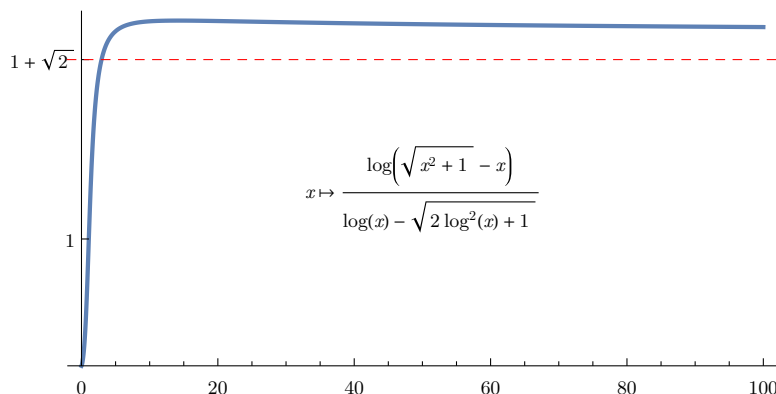
Le figure che seguono ogni calcolo di limite, nonché quelle che accompagnano i **complementi** servono ad allargare l'orizzonte per il lettore, e non sono minimamente richieste nello svolgimento del compito d'esame. Gli schemi usati nella soluzione delle disequazioni sono invece parte integrante dello svolgimento; sono consigliati ma non obbligatori.

1. a. Nel limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{\ln x - \sqrt{1+2\ln^2 x}}$$

il numeratore è il logaritmo di una forma indeterminata $+\infty - \infty$, mentre il denominatore è esso stesso indeterminato del tipo $+\infty - \infty$. Dentro al logaritmo al numeratore moltiplichiamo e dividiamo per $\sqrt{1+x^2} + x$, mentre al denominatore è più veloce raccogliere il termine principale dentro la radice:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} - x)}{\ln x - \sqrt{1+2\ln^2 x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)}{\ln x - (\ln x)\sqrt{\frac{1}{\ln^2 x} + 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 1 - \ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{\ln x} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{\ln^2 x} + 2}}}_{\rightarrow 1 - \sqrt{2} \neq 0} = \\ &= -\frac{1}{1 - \sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x\sqrt{1+x^{-2}} + x)}{\ln x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x(\sqrt{1+x^{-2}} + 1))}{\ln x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + \ln(\sqrt{1+x^{-2}} + 1)}{\ln x} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\overbrace{\ln(\sqrt{1+x^{-2}} + 1)}^{\rightarrow 2}}{\underbrace{\ln x}_{\rightarrow +\infty}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \cdot (1 + 0) = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1^2} = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

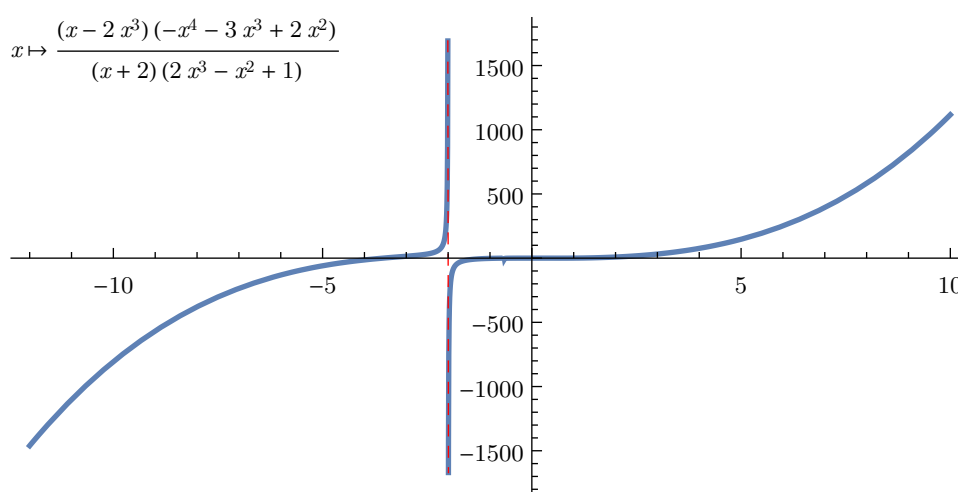


b. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - 2x^3)(2x^2 - x^4 - 3x^3)}{(x + 2)(1 + 2x^3 - x^2)}$$

si presenta nella forma indeterminata ∞/∞ . Numeratore e denominatore sono (prodotti di) polinomi. Raccogliamo i termini di grado massimo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - 2x^3)(2x^2 - x^4 - 3x^3)}{(x + 2)(1 + 2x^3 - x^2)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(x^{-2} - 2) \cdot x^4(2x^{-2} - 1 - 3x^{-1})}{x(1 + 2x^{-1}) \cdot x^3(x^{-3} + 2 - x^{-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{3+4-1-3} \cdot \frac{\overbrace{(x^{-2} - 2)(2x^{-2} - 1 - 3x^{-1})}^{\rightarrow (-2)(-1)}}{\underbrace{(1 + 2x^{-1})(x^{-3} + 2 - x^{-1})}_{\rightarrow 1 \cdot 2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \frac{2}{2} = -\infty. \end{aligned}$$

**c. Il limite**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\log(e^x + 2^x)} - \sqrt{x + 2\sqrt{x}} \right)$$

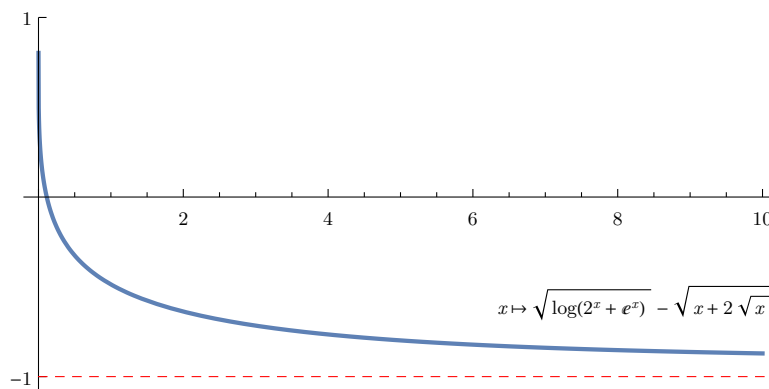
è della forma indeterminata $+\infty - \infty$. Mettiamo in evidenza i termine principali:

$$\begin{aligned} \sqrt{\log(e^x + 2^x)} - \sqrt{x + 2\sqrt{x}} &= \sqrt{\log(e^x(1 + (2/e)^x))} - \sqrt{x(1 + 2\sqrt{1/x})} = \\ &= \sqrt{\log e^x + \log(1 + (2/e)^x)} - \sqrt{x} \sqrt{1 + 2\sqrt{1/x}} = \\ &= \sqrt{x + \log(1 + (2/e)^x)} - \sqrt{x} \sqrt{1 + 2\sqrt{1/x}} = \\ &= \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{\log(1 + (2/e)^x)}{\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \sqrt{1 + 2\sqrt{1/x}} = \\ &= \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{\log(1 + (2/e)^x)}{\sqrt{x}}} - \sqrt{1 + 2\sqrt{1/x}} \right)}_{\rightarrow 1 - 1 = 0}. \end{aligned}$$

Si ottiene una forma indeterminata $\infty \cdot 0$ perché i termini principali si elidono. Quindi torniamo indietro e moltiplichiamo e dividiamo per la differenza delle radici:

$$\begin{aligned} \sqrt{\log(e^x + 2^x)} - \sqrt{x + 2\sqrt{x}} &= \frac{\log(e^x + 2^x) - (x + 2\sqrt{x})}{\sqrt{\log(e^x + 2^x)} + \sqrt{x + 2\sqrt{x}}} = \\ &= \frac{x + \log(1 + (2/e)^x) - x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{\log(e^x + 2^x)} + \sqrt{x + 2\sqrt{x}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-2\sqrt{x} + \log(1 + (2/e)^x)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\log(1 + (2/e)^x)}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 + 2\sqrt{1/x}}} = \\
&= \underbrace{\left(-2 + \frac{\log(1 + (2/e)^x)}{\sqrt{x}}\right)}_{\rightarrow -2+0} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 + \frac{\log(1 + (2/e)^x)}{\sqrt{x}}} + \sqrt{1 + 2\sqrt{1/x}}}_{\rightarrow 1+1=2}} \rightarrow \\
&\rightarrow (-2) \cdot \frac{1}{2} = -1
\end{aligned}$$



d. Nel limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(2x) - x^{1/(x-1)}}{(x^2 - 1)(3x^2 - 2x - 1) \log x}$$

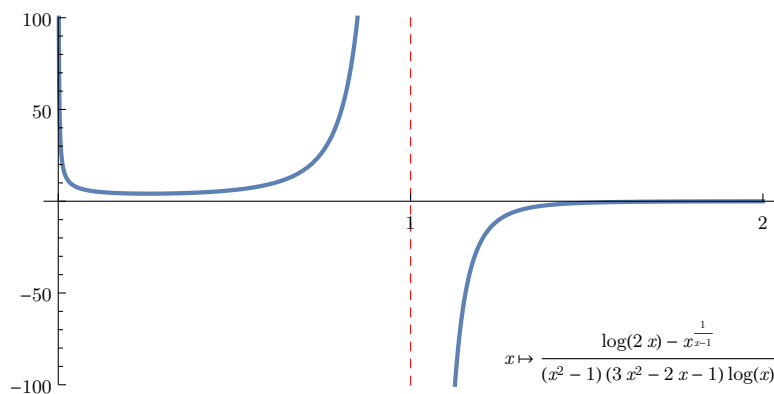
il numeratore è nella forma indeterminata $\log 2 - 1^{\pm\infty}$ mentre il denominatore tende a 0. Può convenire fare un cambio di variabile del tipo $y = x - 1$ (ossia $x = 1 + y$) per riportarci a un limite per $y \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(2x) - x^{1/(x-1)}}{(x^2 - 1)(3x^2 - 2x - 1) \log x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(2(y+1)) - (1+y)^{1/y}}{((y+1)^2 - 1)(3(y+1)^2 - 2(y+1) - 1) \log(1+y)} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(2+2y) - (1+y)^{1/y}}{(y^2 + 2y)(3y^2 + 4y) \log(1+y)} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(2+2y) - (1+y)^{1/y}}{y(y+2) \cdot y(3y+4) \log(1+y)} = \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^2 \cdot y} \cdot \frac{\overbrace{\log(2+2y) - (1+y)^{1/y}}^{\rightarrow \log 2 - e}}{\underbrace{(y+2)(3y+4) \cdot \frac{\log(1+y)}{y}}_{\rightarrow 2 \cdot 4 \cdot 1}} = \frac{2-e}{8} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^3}.
\end{aligned}$$

L'ultimo limite è infinito con segno opposto a seconda che $y \rightarrow 0^{\pm}$, cioè che $x \rightarrow 1^{\pm}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\log(2x) - x^{1/(x-1)}}{(x^2 - 1)(3x^2 - 2x - 1) \log x} &= \frac{\overbrace{2-e}^{<0}}{8} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y^3} = -\infty, \\
\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log(2x) - x^{1/(x-1)}}{(x^2 - 1)(3x^2 - 2x - 1) \log x} &= \frac{\overbrace{2-e}^{<0}}{8} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{y^3} = +\infty.
\end{aligned}$$

Concludiamo che il limite cercato non esiste.



e. Nel limite

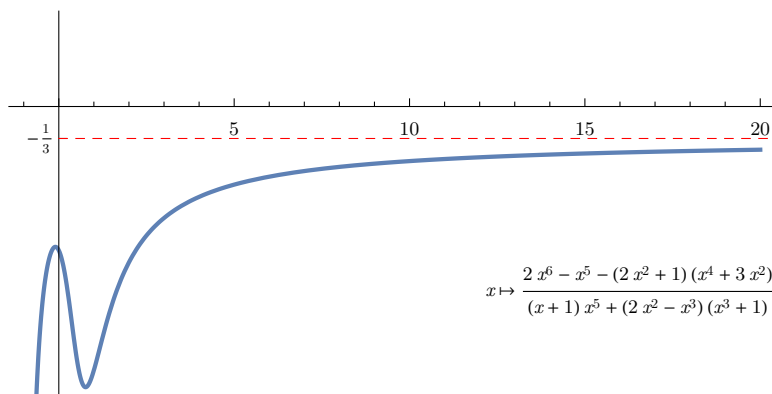
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^6 - x^5 - (1 + 2x^2)(3x^2 + x^4)}{(x + 1)x^5 + (x^3 + 1)(2x^2 - x^3)}$$

numeratore e denominatore sono polinomi ma non in forma normale. Vediamo cosa succede mettendo in evidenza i termini principali senza applicare la proprietà distributiva:

$$\begin{aligned} \frac{2x^6 - x^5 - (1 + 2x^2)(3x^2 + x^4)}{(x + 1)x^5 + (x^3 + 1)(2x^2 - x^3)} &= \frac{x^6(2 - x^{-1}) - x^2(x^{-2} + 1) \cdot x^4(3x^{-2} + 2)}{x^6(1 + x^{-1}) + x^3(1 + x^{-3})x^3(2x^{-1} - 1)} = \\ &= \frac{\overbrace{(2 - x^{-1}) - (x^{-2} + 1)(3x^{-2} + 2)}^{\rightarrow 2 - 2 = 0}}{\underbrace{(1 + x^{-1}) + (1 + x^{-3})(2x^{-1} - 1)}_{\rightarrow 1 - 1 = 0}}. \end{aligned}$$

Niente da fare, viene una forma indeterminata 0/0. Cambiamo strada e applichiamo la proprietà distributiva per ridurre numeratore e denominatore in forma normale:

$$\begin{aligned} \frac{2x^6 - x^5 - (1 + 2x^2)(3x^2 + x^4)}{(x + 1)x^5 + (x^3 + 1)(2x^2 - x^3)} &= \frac{2x^6 - x^5 - (3x^2 + x^4 + 6x^4 + 2x^6)}{x^6 + x^5 + 2x^5 - x^6 + 2x^2 - x^3} = \\ &= \frac{2x^6 - x^5 - 3x^2 - 7x^4 - 2x^6}{3x^5 - x^3 + 2x^2} = \frac{-x^5 - 7x^4 - 3x^2}{3x^5 - x^3 + 2x^2} = \\ &= \frac{-1 - 7x^{-1} - 3x^{-3}}{3 - x^{-2} + 2x^{-3}} \rightarrow \frac{-1 + 0}{3 + 0} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$



f. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{x^4 - x^3} + x\sqrt{1 + 4x^2})$$

si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Proviamo a mettere in evidenza i termini principali sotto le radici, facendo attenzione che $x \rightarrow -\infty$, per cui $\sqrt{x^2} = |x| = -x$:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^4 - x^3} + x\sqrt{1 + 4x^2} &= 2\sqrt{x^4(1 - x^{-1})} + x\sqrt{x^2(x^{-2} + 4)} = \\ &= 2\sqrt{x^4}\sqrt{1 - x^{-1}} + x\sqrt{x^2}\sqrt{x^{-2} + 4} = 2x^2\sqrt{1 - x^{-1}} + x \cdot |x|\sqrt{x^{-2} + 4} = \\ &= 2x^2\sqrt{1 - x^{-1}} - x^2\sqrt{x^{-2} + 4} = \underbrace{x^2}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{(2\sqrt{1 - x^{-1}} - \sqrt{x^{-2} + 4})}_{\rightarrow 2 - 2 = 0}. \end{aligned}$$

Viene una forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Cambiamo strada, moltiplicando numeratore e denominatore per la differenza, in modo che si elidano i termini principali al numeratore mentre si sommino al denominatore:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^4 - x^3} + x\sqrt{1 + 4x^2} &= \frac{(2\sqrt{x^4 - x^3} + x\sqrt{1 + 4x^2})(2\sqrt{x^4 - x^3} - x\sqrt{1 + 4x^2})}{2\sqrt{x^4 - x^3} - x\sqrt{1 + 4x^2}} = \\ &= \frac{(2\sqrt{x^4 - x^3})^2 - (x\sqrt{1 + 4x^2})^2}{2\sqrt{x^4 - x^3} - x\sqrt{1 + 4x^2}} = \frac{4(x^4 - x^3) - x^2(1 + 4x^2)}{2\sqrt{x^4 - x^3} - x\sqrt{1 + 4x^2}} = \\ &= \frac{4x^4 - 4x^3 - x^2 - 4x^4}{2\sqrt{x^4 - x^3} - x\sqrt{1 + 4x^2}} = \frac{-4x^3 - x^2}{2\sqrt{x^4 - x^3} - x\sqrt{1 + 4x^2}} = \\ &= \frac{x^3(-4 - x^{-1})}{x^2(2\sqrt{1 - x^{-1}} + \sqrt{x^{-2} + 4})} = x \cdot \frac{-4 - x^{-1}}{2\sqrt{1 - x^{-1}} + \sqrt{x^{-2} + 4}}. \end{aligned}$$

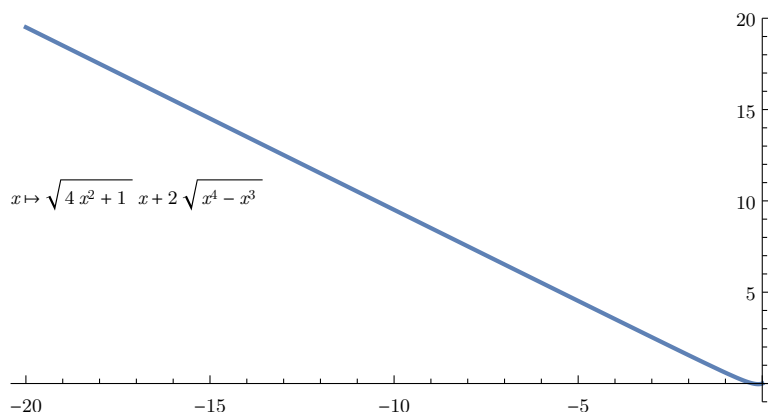
L'ultima espressione non è più indeterminata:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{x^4 - x^3} + x\sqrt{1 + 4x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{-4 - x^{-1}}{2\sqrt{1 - x^{-1}} + \sqrt{x^{-2} + 4}} = (-\infty) \cdot \frac{-4}{2 + 2} = +\infty.$$

Qualcuna sarebbe stata tentata di “trascurare” i termini x^3 e 1 dentro le radici e procedere così:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{x^4 - x^3} + x\sqrt{1 + 4x^2}) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{x^4} + x\sqrt{4x^2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + x \cdot 2|x|) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 2x^2) = 0, \end{aligned}$$

con risultato platealmente sbagliato.



g. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{x-1} - \sqrt{x^2 e^{2x-2} + xe^x - 1})$$

Si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$. Mettendo in evidenza i termini principali sotto la radice

$$\begin{aligned} xe^{x-1} - \sqrt{x^2 e^{2x-2} + xe^x - 1} &= xe^{x-1} - \sqrt{x^2 e^{2x-2} (1 + x^{-1} e^{-x+2} - x^{-2} e^{-2x+2})} = \\ &= \underbrace{xe^{x-1}}_{\rightarrow +\infty} \left(1 - \underbrace{\sqrt{1 + x^{-1} e^{-x+2} - x^{-2} e^{-2x+2}}}_{\rightarrow 1-1=0} \right) \end{aligned}$$

viene una forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Moltiplichiamo e dividiamo per la somma, in modo che al numeratore i termini principali si elidano, mentre al denominatore si sommino:

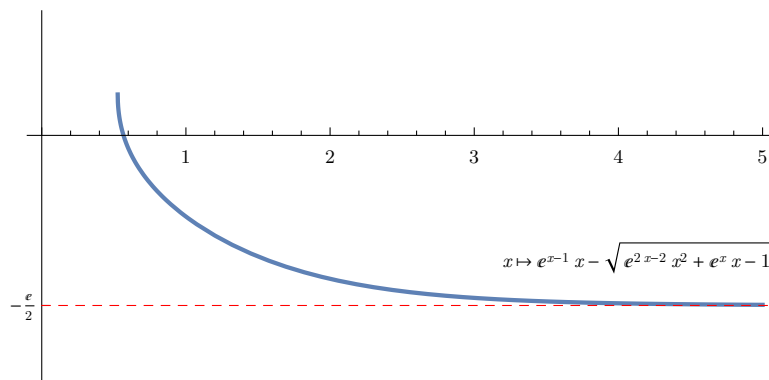
$$\begin{aligned} xe^{x-1} - \sqrt{x^2 e^{2x-2} + xe^x - 1} &= \frac{(xe^{x-1} - \sqrt{x^2 e^{2x-2} + xe^x - 1})(xe^{x-1} + \sqrt{x^2 e^{2x-2} + xe^x - 1})}{xe^{x-1} + \sqrt{x^2 e^{2x-2} + xe^x - 1}} = \\ &= \frac{(xe^{x-1})^2 - (x^2 e^{2x-2} + xe^x - 1)}{xe^{x-1} (1 + \sqrt{1 + x^{-1} e^{-x+2} - x^{-2} e^{-2x+2}})} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 e^{2x-2} - x^2 e^{2x-2} - x e^x + 1}{x e^{x-1} (1 + \sqrt{1 + x^{-1} e^{-x+2}} - x^{-2} e^{-2x+2})} = \\
&= \frac{-x e^x + 1}{x e^{x-1} (1 + \sqrt{1 + x^{-1} e^{-x+2}} - x^{-2} e^{-2x+2})} = \\
&= \frac{x e^x (-1 + x^{-1} e^{-x})}{x e^{x-1} (1 + \sqrt{1 + x^{-1} e^{-x+2}} - x^{-2} e^{-2x+2})} = \\
&= \frac{x e^x}{x e^{x-1}} \cdot \frac{-1 + x^{-1} e^{-x}}{1 + \sqrt{1 + x^{-1} e^{-x+2}} - x^{-2} e^{-2x+2}} = \\
&= e^{x-x+1} \cdot \frac{-1 + x^{-1} e^{-x}}{1 + \sqrt{1 + x^{-1} e^{-x+2}} - x^{-2} e^{-2x+2}} = \\
&= e \cdot \frac{-1 + x^{-1} e^{-x}}{1 + \sqrt{1 + x^{-1} e^{-x+2}} - x^{-2} e^{-2x+2}} \rightarrow e \cdot \frac{-1+0}{1+1} = -\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

Qualcuno forse sarebbe stato tentato di “trascurare” i termini trascurabili $x e^x - 1$ dentro la radice:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{x-1} - \sqrt{x^2 e^{2x-2} + x e^x - 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{x-1} - \sqrt{x^2 e^{2x-2}}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x e^{x-1} - x e^{x-1}) = 0,$$

con risultato errato.



h. Nel limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x - \sqrt{2 + x^2}} \right)^{x^2}$$

al denominatore abbiamo una forma indeterminata $+\infty - \infty$, che si risolve raccogliendo il termine principale dentro la radice:

$$\begin{aligned}
2x - \sqrt{2 + x^2} &= 2x - \sqrt{x^2(2x^{-2} + 1)} = 2x - |x| \sqrt{2x^{-2} + 1} = \\
&= x(2 - \sqrt{2x^{-2} + 1}) \rightarrow +\infty \cdot (2 - 1) = +\infty.
\end{aligned}$$

Quindi nel limite originale dentro la parentesi abbiamo una forma indeterminata ∞/∞ , che possiamo risolvere così:

$$\frac{x}{2x - \sqrt{2 + x^2}} = \frac{x}{x(2 - \sqrt{2x^{-2} + 1})} = \frac{1}{2 - \sqrt{2x^{-2} + 1}} \rightarrow \frac{1}{2 - 1} = 1.$$

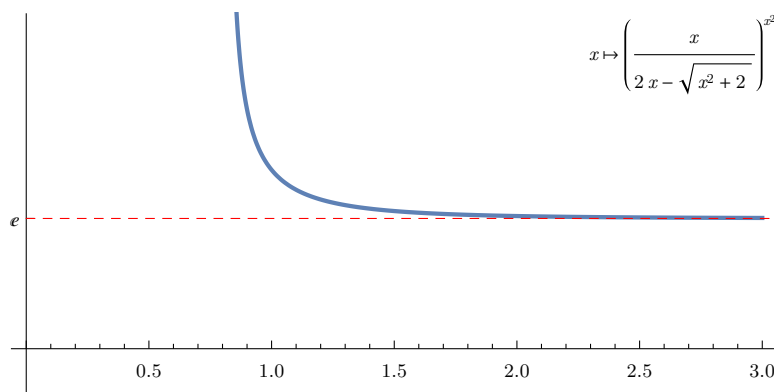
Il limite originale è dunque della forma indeterminata 1^∞ . La procedura standard in questi casi è di prendere i logaritmi e riportarsi al limite notevole $(\log(1 + y))/y \rightarrow 1$ per $y \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
\log \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x - \sqrt{2 + x^2}} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{x}{2x - \sqrt{2 + x^2}} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \left(\frac{x}{2x - \sqrt{2 + x^2}} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \left(1 + \underbrace{\frac{x}{2x - \sqrt{2 + x^2}} - 1}_{\rightarrow 1 - 1 = 0} \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}} - 1 \right) \underbrace{\left(\frac{\log\left(1 + \frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}} - 1\right)}{\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}} - 1} \right)}_{\rightarrow 1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{x - (2x - \sqrt{2+x^2})}{2x - \sqrt{2+x^2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{-x + \sqrt{2+x^2}}{x(2 - \sqrt{2x^{-2}+1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (-x + \sqrt{2+x^2}) \cdot \underbrace{\frac{1}{2 - \sqrt{2x^{-2}+1}}}_{\rightarrow 2-1=1} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (-x + \sqrt{2+x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{(-x + \sqrt{2+x^2})(-x - \sqrt{2+x^2})}{-x - \sqrt{2+x^2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{(-x)^2 - (2+x^2)}{-x - \sqrt{x^2(2x^{-2}+1)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{x^2 - 2 - x^2}{x(-1 - \sqrt{2x^{-2}+1})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{-1 - \sqrt{2x^{-2}+1}} = \frac{-2}{-1-1} = 1.
\end{aligned}$$

Torniamo infine al limite originale:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}} \right)^{x^2} = \exp \left(\log \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x - \sqrt{2+x^2}} \right)^{x^2} \right) = \exp 1 = e^1 = e.$$



i. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \log(x^2)}{x^3 - 3x + 2}$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Il denominatore si può scomporre in fattori usando la regola di Ruffini sapendo che una delle radici è 1: $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$. Il fattore restante di secondo grado ha radici $(-1 \pm \sqrt{1+8})/2 = (-1 \pm 3)/2$, e quindi si scompone a sua volta come $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$. Possiamo quindi semplificare

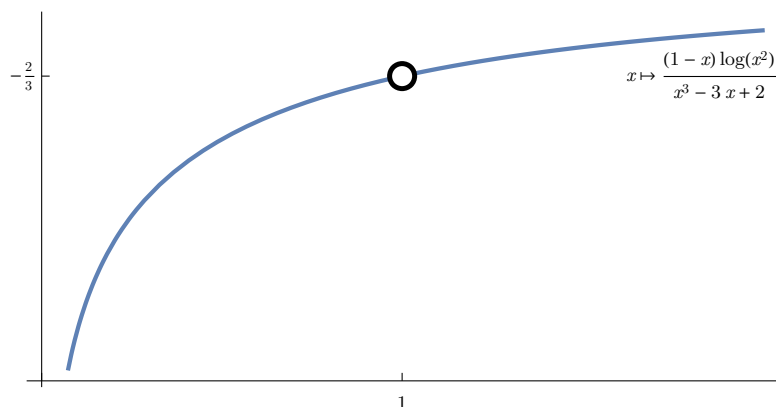
$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \log(x^2)}{x^3 - 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \log(x^2)}{(x-1)^2(x+2)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x^2)}{(x-1)(x+2)} = \\
&= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \log x}{x-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+2}}_{\rightarrow 1+2=3} = - \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}.
\end{aligned}$$

Facciamo il cambio di variabile $y = x - 1$, cioè $x = 1 + y$, in modo da riportarci alla situazione più familiare $y \rightarrow 0$:

$$- \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1} = - \frac{2}{3} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = - \frac{2}{3} \cdot 1 = - \frac{2}{3}.$$

Si poteva fare la sostituzione $y = x - 1$ anche nell'espressione di partenza, con conti un poco diversi.



j. Nel limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - 3}{x - \sqrt{x^2 - 2x^3}}$$

il numeratore tende a $e - 3 < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - 3}{x - \sqrt{x^2 - 2x^3}} = (e - 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 2x^3}}$$

e il denominatore tende a 0, per cui il limite è $\pm\infty$, col segno dipendente dal segno del denominatore. Esaminiamo meglio il denominatore:

$$x - \sqrt{x^2 - 2x^3} = x - \sqrt{x^2(1 - 2x)} = x - |x|\sqrt{1 - 2x} = \begin{cases} x - x\sqrt{1 - 2x} & \text{se } x > 0, \\ x + x\sqrt{1 - 2x} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

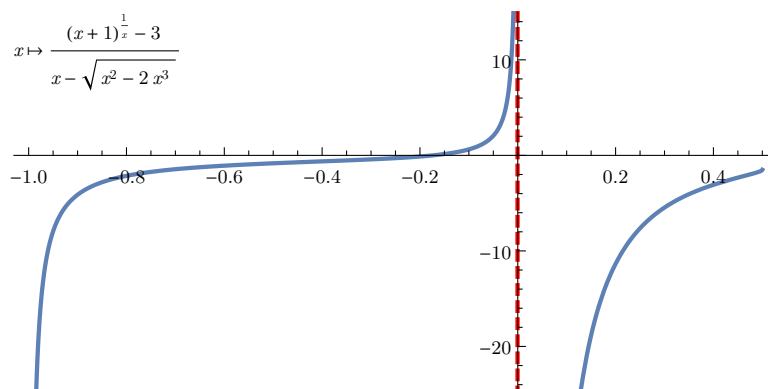
Il limite da sinistra è facile perché il denominatore è chiaramente negativo:

$$\begin{aligned} (e - 3) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 2x^3}} &= (e - 3) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x + x\sqrt{1 - 2x}} = (e - 3) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \sqrt{1 - 2x}}}_{\rightarrow 1+1=2} = \\ &= (e - 3)(-\infty)(1/2) = +\infty. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il limite da destra, un modo di risolvere il segno è di moltiplicare e dividere per la somma:

$$\begin{aligned} (e - 3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 2x^3}} &= (e - 3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x^3}}{(x - \sqrt{x^2 - 2x^3})(x + \sqrt{x^2 - 2x^3})} = \\ &= (e - 3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x\sqrt{1 - 2x}}{x^2 - (x^2 - 2x^3)} = \\ &= (e - 3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 + \sqrt{1 - 2x})}{2x^3} = \\ &= (e - 3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x^2} \cdot \underbrace{(1 + \sqrt{1 - 2x})}_{\rightarrow 1+1=2} = (e - 3)(+\infty) \cdot 2 = -\infty. \end{aligned}$$

Concludiamo che il limite iniziale non esiste.



k. Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{2 \cos x - \sqrt{x+4}}$$

si presenta nella forma indeterminata $0/0$. Proviamo a eliminare la radice quadrata moltiplicando e dividendo per la somma:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{2 \cos x - \sqrt{x+4}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{(2 \cos x - \sqrt{x+4})(2 \cos x + \sqrt{x+4})} \cdot \underbrace{(2 \cos x + \sqrt{x+4})}_{\rightarrow 2+2=4} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{(2 \cos x)^2 - (x+4)} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{4 \cos^2 x - x - 4} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{4(1 - \sin^2 x) - x - 4} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{-4 \sin^2 x - x} = \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{4 \sin^2 x + x} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{x} \cdot \underbrace{\frac{1}{4x \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + 1}}_{\rightarrow 0+1} = \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{x}. \end{aligned}$$

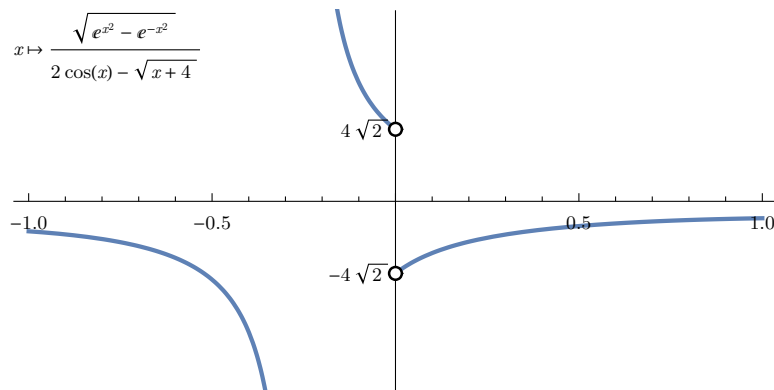
Per semplificare il numeratore cerchiamo di riportarci al limite notevole $(e^t - 1)/t \rightarrow 1$ per $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{x} &= -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{-x^2}(e^{2x^2} - 1)}}{x} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{e^{-x^2/2}}_{\rightarrow e^0=1} \cdot \frac{\sqrt{e^{2x^2} - 1}}{x} = \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{2x^2} - 1}}{x} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x^2 \cdot \frac{e^{2x^2} - 1}{2x^2}}}{x} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| \sqrt{2}}{x} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{e^{2x^2} - 1}{2x^2}}}_{\rightarrow \sqrt{1}} = \\ &= -4\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}. \end{aligned}$$

A questo punto bisogna distinguere i limiti da sinistra e da destra:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{2 \cos x - \sqrt{x+4}} &= -4\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = -4\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = -4\sqrt{2} \cdot 1 = -4\sqrt{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{e^{x^2} - e^{-x^2}}}{2 \cos x - \sqrt{x+4}} &= -4\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -4\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -4\sqrt{2} \cdot (-1) = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

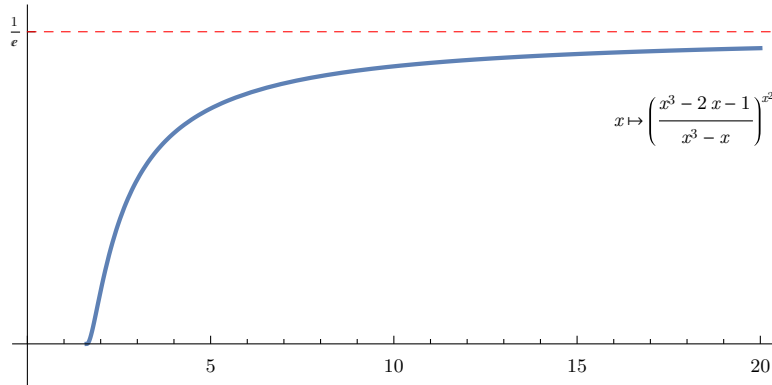
I limiti da sinistra e da destra sono diversi. Il limite di partenza non esiste.

**l.** Il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 2x - 1}{x^3 - x} \right)^{x^2}$$

si presenta nella forma indeterminata 1^∞ . Riportiamoci al limite notevole $(\log(1+t))/t \rightarrow 1$ per $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 2x - 1}{x^3 - x} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \log \left(\frac{x^3 - 2x - 1}{x^3 - x} \right)^{x^2} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{x^3 - 2x - 1}{x^3 - x} \right)^{x^2} = \\
 &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \left(\frac{x^3 - 2x - 1}{x^3 - x} \right) = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \left(1 + \frac{x^3 - 2x - 1}{x^3 - x} - 1 \right) = \\
 &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \left(1 + \frac{x^3 - 2x - 1 - (x^3 - x)}{x^3 - x} \right) = \\
 &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log \left(1 + \underbrace{\frac{-x - 1}{x^3 - x}}_{\rightarrow 0} \right) = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{-x - 1}{x^3 - x} \cdot \underbrace{\frac{\log \left(1 + \frac{-x - 1}{x^3 - x} \right)}{\frac{-x - 1}{x^3 - x}}}_{\rightarrow 1} = \\
 &= \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{-x - 1}{x^3 - x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 - x^2}{x^3 - x} = \exp \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - x^{-1}}{1 - x^{-2}} = \\
 &= \exp(-1) = \frac{1}{e}.
 \end{aligned}$$



m. Nel limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + x \sin 4x}{x^3 - \sqrt{x^6 - 2x^5}}$$

al numeratore c'è $\cos x$ che è oscillante, e $x \sin 4x$, che è il prodotto di x , che va a $+\infty$, per $\sin 4x$, che è oscillante. Sembra quindi che il numeratore abbia oscillazioni sempre più ampie al crescere di x . In particolare il numeratore non pare avere limite. Il denominatore è della forma indeterminata $+\infty - \infty$, in cui i termini principali sono gli stessi. Cerchiamo di semplificarlo moltiplicando e dividendo per la somma:

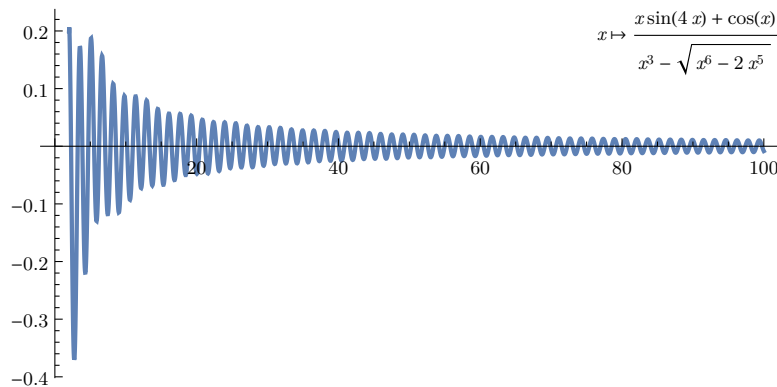
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + x \sin 4x}{x^3 - \sqrt{x^6 - 2x^5}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + x \sin 4x}{(x^3 - \sqrt{x^6 - 2x^5})(x^3 + \sqrt{x^6 - 2x^5})} \cdot (x^3 + \sqrt{x^6 - 2x^5}) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + x \sin 4x}{x^6 - (x^6 - 2x^5)} \cdot (x^3 + \sqrt{x^6(1 - 2x^{-1})}) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + x \sin 4x}{2x^5} \cdot (x^3 + x^3 \sqrt{1 - 2x^{-1}}) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + x \sin 4x}{2x^5} \cdot x^3 \underbrace{(1 + \sqrt{1 - 2x^{-1}})}_{\rightarrow 1+1=2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + x \sin 4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin 4x}{x} \right).
 \end{aligned}$$

Sapendo che seno e coseno sono sempre compresi fra -1 e 1 , per $x > 0$ valgono le disuguaglianze

$$\underbrace{\frac{-1}{x^2}}_{\rightarrow 0} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 0}, \quad \underbrace{\frac{-1}{x}}_{\rightarrow 0} \leq \frac{\sin 4x}{x} \leq \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0}.$$

Per il teorema del confronto quindi anche le funzioni comprese fra le disuguaglianze tendono a 0. Possiamo infine applicare il teorema del limite della somma:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\cos x}{x^2} + \frac{\sin 4x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 4x}{x} = 0 + 0 = 0.$$



n. Nel limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{1/x} \right)}{2x + \sqrt{4x^2 + x}}$$

il numeratore si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$, e il denominatore in quella $-\infty + \infty$ con termini principali uguale. Cominciamo a semplificare il denominatore moltiplicando e dividendo per la differenza:

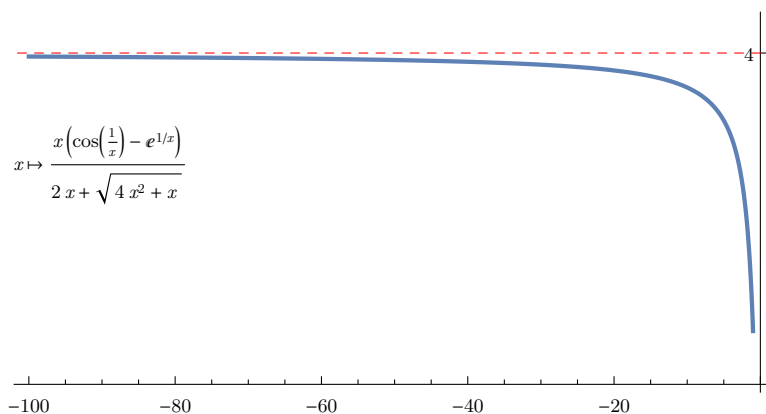
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{1/x} \right)}{2x + \sqrt{4x^2 + x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{1/x} \right)}{(2x + \sqrt{4x^2 + x})(2x - \sqrt{4x^2 + x})} \cdot (2x - \sqrt{4x^2 + x}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{1/x} \right)}{(2x)^2 - (4x^2 + x)} \cdot (2x - \sqrt{x^2(4 + x^{-1})}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{1/x} \right)}{4x^2 - 4x^2 - x} \cdot (2x - |x|\sqrt{4 + x^{-1}}) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{1/x} \right)}{x} \cdot (2x - (-x)\sqrt{4 + x^{-1}}) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{1/x} \right)}{x} \cdot (2x + x\sqrt{4 + x^{-1}}) = \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - e^{1/x} \right)}{x} \cdot x \underbrace{(2 + \sqrt{4 + x^{-1}})}_{\rightarrow 2+2=4} = \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\cos \frac{1}{x} - e^{1/x} \right). \end{aligned}$$

Può convenire fare il cambio di variabile $t = 1/x$, con $t \rightarrow 0^-$:

$$-4 \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\cos \frac{1}{x} - e^{1/x} \right) = -4 \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{t} (\cos t - e^t) = -4 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos t - e^t}{t}.$$

Cerchiamo ora di riportarci ai limiti notevoli $(1 - \cos t)/t^2 \rightarrow 1/2$, $(e^t - 1)/t \rightarrow 1$ per $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} -4 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos t - e^t}{t} &= -4 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos t - 1 + 1 - e^t}{t} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\cos t + 1 - 1 + e^t}{t} = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos t + e^t - 1}{t} = 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 - \cos t}{t} + \frac{e^t - 1}{t} \right) = \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(t \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos t}{t^2}}_{\rightarrow 1/2} + \underbrace{\frac{e^t - 1}{t}}_{\rightarrow 1} \right) = 4(0 + 1) = 4. \end{aligned}$$



2. a. Per risolvere la disequazione

$$\frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} \geq x+1$$

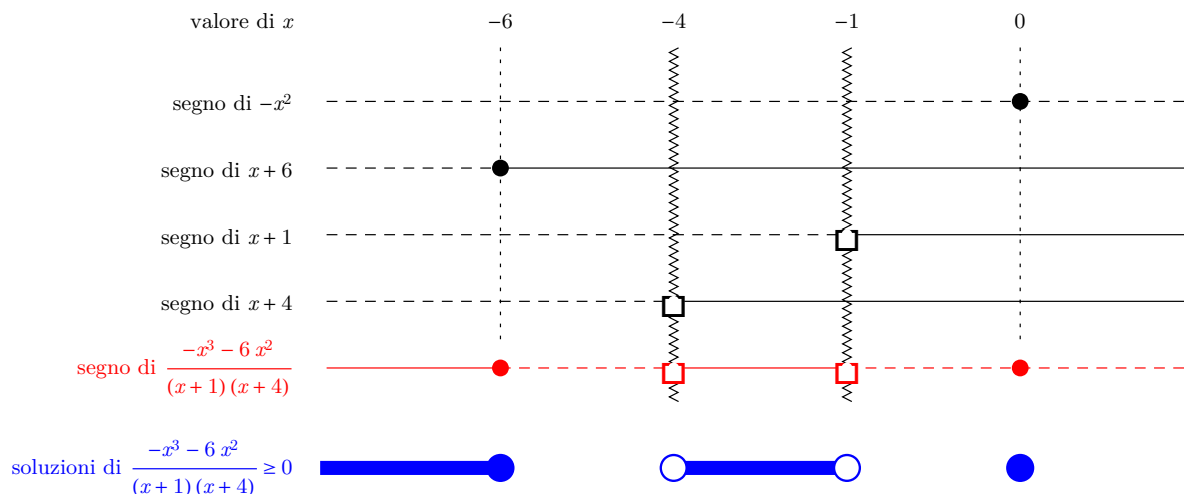
ci riportiamo alla regola dei segni portando tutto al primo membro

$$\frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} \geq x+1 \iff \frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} - x - 1 \geq 0,$$

e facendo denominatore comune:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} - (x+1) &= \frac{32(x+1) - 5(x+4) - (x+1)3(x+1)(x+4)}{3(x+1)(x+4)} = \\ &= \frac{32x + 32 - 5x - 20 - 3(x^2 + 2x + 1)(x+4)}{3(x+1)(x+4)} = \\ &= \frac{27x + 12 - 3(x^3 + 2x^2 + x + 4x^2 + 8x + 4)}{3(x+1)(x+4)} = \\ &= \frac{27x + 12 - 3(x^3 + 6x^2 + 9x + 4)}{3(x+1)(x+4)} = \\ &= \frac{27x + 12 - 3x^3 - 18x^2 - 27x - 12}{3(x+1)(x+4)} = \\ &= \frac{-3x^3 - 18x^2}{3(x+1)(x+4)} = \frac{-3x^2(x+6)}{3(x+1)(x+4)} = \frac{-x^2(x+6)}{(x+1)(x+4)}. \end{aligned}$$

Che a nessuno venga in mente di “togliere x^2 ” perché è “positivo”. Lo studio del segno e la soluzione della disequazione sono nello schema seguente:

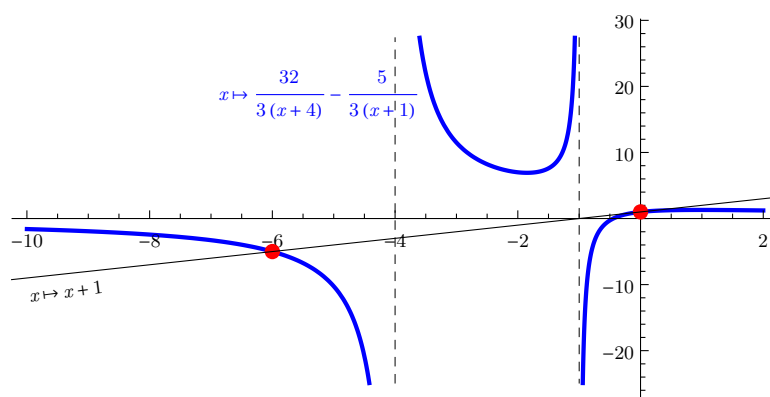


Si intende che i tratti orizzontali (neri o rossi) continui significano segno +, quelli tratteggiati il segno -, i pallini neri significano il segno 0 al numeratore, i quadratini bucati un segno 0 al denominatore, la linea a zigzag verticale segnala punti dove non esiste l'espressione (tipicamente uno zero del denominatore). Le linee continue blu e i pallini pieni blu vogliono dire invece soluzioni della disequazione, mentre i pallini vuoti vogliono dire non soluzione.

Concludendo,

$$\frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)} \geq x+1 \iff x \leq -6 \vee -4 < x < -1 \vee x = 0.$$

Complemento. Per chi non si capacitasse della soluzione isolata $x = 0$, la figura seguente può essere illuminante: il grafico della funzione $x \mapsto \frac{32}{3(x+4)} - \frac{5}{3(x+1)}$ è tangente alla retta $y = x + 1$ proprio nel punto di ascissa 0, mentre nei punti attorno sta sotto.



b. La disequazione

$$3 \min\{x+1, \max\{-x-2, 2x\}\} \geq x$$

si può ricondurre all'unione di sistemi che non contengono max o min:

$$\begin{aligned} 3 \min\{x+1, \max\{-x-2, 2x\}\} \geq x &\iff \\ \iff \begin{cases} -x-2 \geq 2x \\ 3 \min\{x+1, -x-2\} \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -x-2 < 2x \\ 3 \min\{x+1, 2x\} \geq x \end{cases} &\iff \\ \iff \begin{cases} -x-2 \geq 2x \\ x+1 \geq -x-2 \\ 3(-x-2) \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -x-2 \geq 2x \\ x+1 < -x-2 \\ 3(x+1) \geq x \end{cases} &\iff \\ \vee \begin{cases} -x-2 < 2x \\ x+1 \geq 2x \\ 3(2x) \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -x-2 < 2x \\ x+1 < 2x \\ 3(x+1) \geq x \end{cases} &\iff \\ \iff \begin{cases} -3x \geq 2 \\ 2x \geq -3 \\ -3x-6 \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -3x \geq 2 \\ 2x < -3 \\ 3x+3 \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -3x < 2 \\ -x \geq -1 \\ 6x \geq x \end{cases} \vee \begin{cases} -3x < 2 \\ -x < -1 \\ 3x+3 \geq x \end{cases} &\iff \\ \iff \begin{cases} x \leq -2/3 \\ x \geq -3/2 \\ x \leq -3/2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq -2/3 \\ x < -3/2 \\ x \geq -3/2 \end{cases} \vee \begin{cases} x > -2/3 \\ x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > -2/3 \\ x > 1 \\ x \geq -3/2 \end{cases} &\iff \end{aligned}$$

valore di x

soluzioni di $x \leq -\frac{2}{3}$

soluzioni di $x \geq -\frac{3}{2}$

soluzioni di $x \leq -\frac{3}{2}$

intersezione

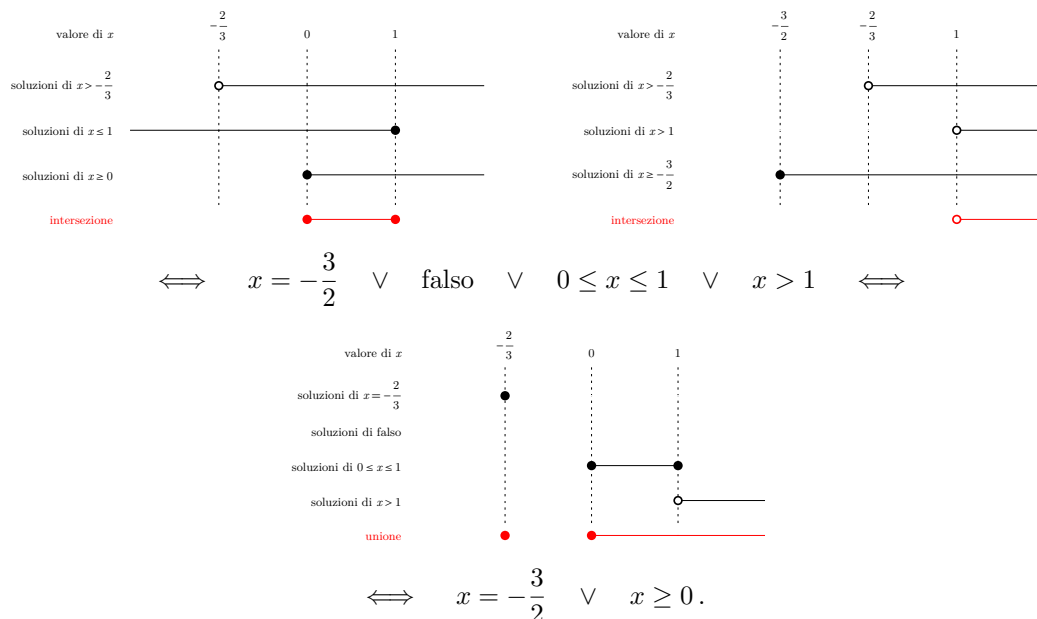
valore di x

soluzioni di $x \leq -\frac{2}{3}$

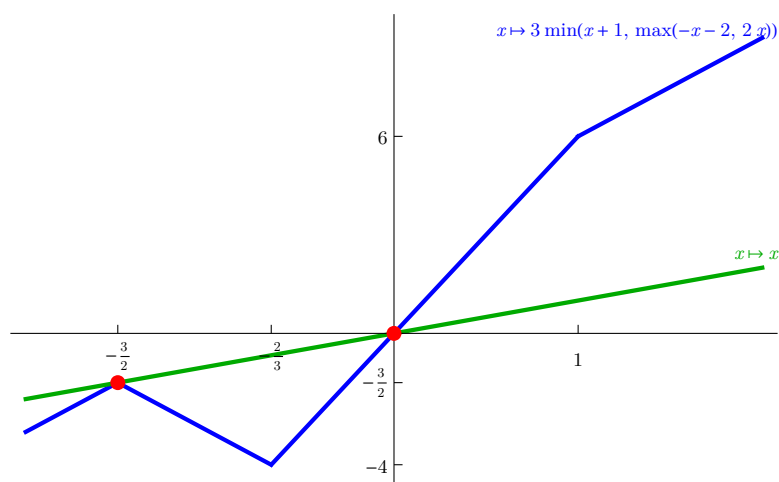
soluzioni di $x < -\frac{3}{2}$

soluzioni di $x \geq -\frac{3}{2}$

intersezione



Complemento. Un grafico delle due funzioni $x \mapsto 3 \min\{x+1, \max\{-x-2, 2x\}\}$ e $x \mapsto x$ può far capire la soluzione isolata $x = -3/2$: in quel punto la funzione vale 0, mentre nei punti attorno è negativa (il grafico è angoloso).

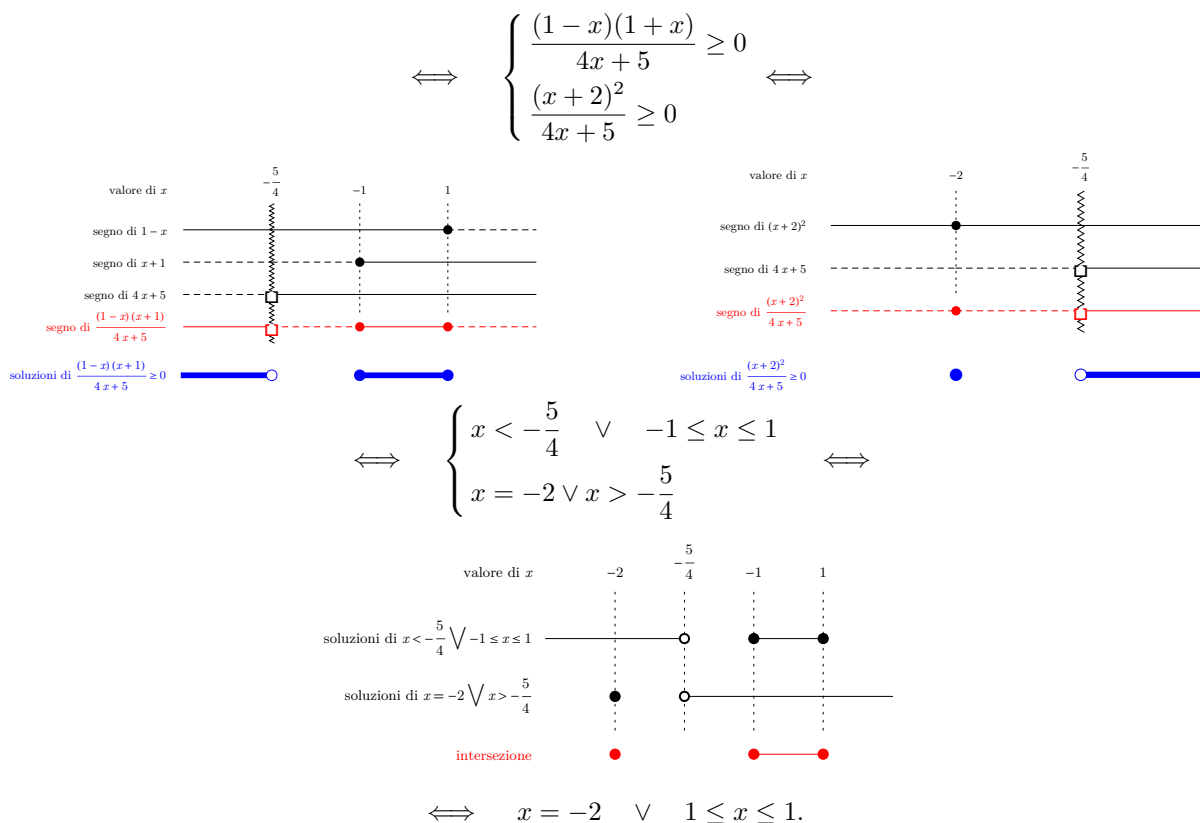


c. La disequazione

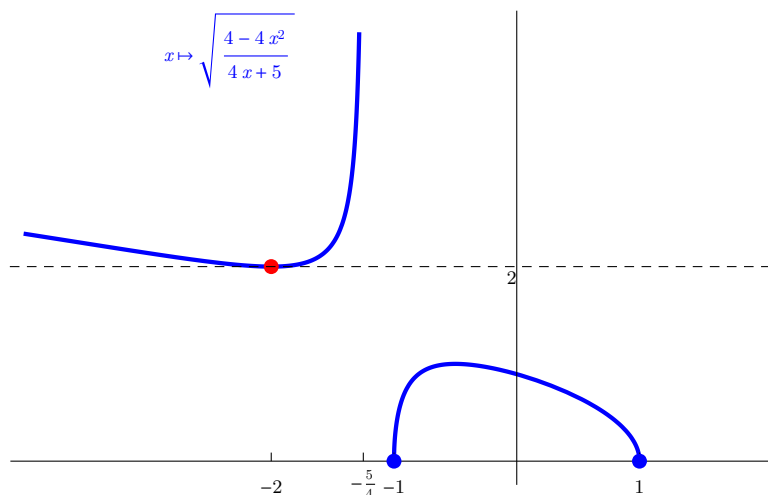
$$\sqrt{\frac{4-4x^2}{4x+5}} \leq 2$$

si presenta nella forma $\sqrt{A} \leq B$, che equivale a un sistema che non contiene radicali:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4-4x^2}{4x+5}} \leq 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4-4x^2}{4x+5} \geq 0 \\ 2 \geq 0 \\ \frac{4-4x^2}{4x+5} \leq 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x^2}{4x+5} \geq 0 \\ \text{vero} \\ \frac{4-4x^2}{4x+5} - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1-x)(1+x)}{4x+5} \geq 0 \\ \frac{4-4x^2-4(4x+5)}{4x+5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1-x)(1+x)}{4x+5} \geq 0 \\ \frac{4-4x^2-16x-20}{4x+5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1-x)(1+x)}{4x+5} \geq 0 \\ \frac{-4x^2-16x-16}{4x+5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1-x)(1+x)}{4x+5} \geq 0 \\ -4\frac{x^2+4x+4}{4x+5} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$



Complemento. Per capacitarsi della soluzione isolata -2 forse può aiutare un grafico della funzione $x \mapsto \sqrt{(4-4x^2)/(4x+5)}$:



4. Bisogna dimostrare per induzione che

$$2n + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + 3(n+1) = \frac{(n+4)(5n+3)}{2}$$

quando $n \geq 1$. Il primo compito è di capire cosa vogliono dire i puntini di sospensione al primo membro della formula. Il pezzo $2n + (2n+1) + (2n+2)$ è la somma di tre numeri interi consecutivi a partire da $2n$. A destra dei puntini c'è $+3(n+1)$, che sembra l'ultimo addendo di una somma, ed è un numero intero. Sembra ragionevole che si intenda la somma di tutti i numeri interi da $2n$ a $3(n+1)$ compresi. Questo ha senso se $2n \leq 3(n+1)$, che equivale a $2n \leq 3n+3$, cioè $n \geq -3$, che per noi è verificato. Definiamo il predicato da dimostrare vero:

$$\mathcal{P}(n) := \left(2n + (2n+1) + (2n+2) + \cdots + 3(n+1) = \frac{(n+4)(5n+3)}{2} \right).$$

Il caso base è $\mathcal{P}(1)$. Per $n = 1$ il primo membro vale

$$2n + (2n + 1) + (2n + 2) + \cdots + 3(n + 1) = 2 \cdot 1 + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 1 + 2) + \cdots + 3(1 + 1) = \\ = 2 + 3 + 4 + \cdots + 6 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20,$$

mentre il secondo membro vale

$$\frac{(n + 4)(5n + 3)}{2} = \frac{(1 + 4)(5 \cdot 1 + 3)}{2} = \frac{5 \cdot 8}{2} = 20.$$

I due membri hanno lo stesso valore, per cui $\mathcal{P}(1)$ è vera. Per il passo induttivo scriviamo $\mathcal{P}(n)$ per disteso

$$\mathcal{P}(n): \quad 2n + (2n + 1) + (2n + 2) + \cdots + 3(n + 1) = \frac{(n + 4)(5n + 3)}{2}$$

che va confrontato con $\mathcal{P}(n + 1)$

$$\mathcal{P}(n+1): \quad 2(n+1) + (2(n+1)+1) + (2(n+1)+2) + \cdots + 3((n+1)+1) = \frac{((n+1)+4)(5(n+1)+3)}{2}.$$

Svolgiamo le parentesi interne a $\mathcal{P}(n + 1)$:

$$(2n + 2) + (2n + 3) + (2n + 4) + \cdots + (3n + 6) = \frac{(n + 5)(5n + 8)}{2},$$

Le somme ai primi membri di $\mathcal{P}(n)$ e $\mathcal{P}(n + 1)$ hanno dei termini in comune, che mettiamo in evidenza incolonnando i termini uguali:

$$\begin{array}{c} \text{in } \mathcal{P}(n) \text{ ma} \\ \text{non in } \mathcal{P}(n+1) \end{array} \overbrace{2n + (2n + 1)} + \overbrace{(2n + 2) + (2n + 3) + \cdots + (3n + 3)}^{\text{in comune}} \\ \underbrace{(2n + 2) + (2n + 3) + \cdots + (3n + 3)}_{\text{in comune}} + \underbrace{(3n + 4) + (3n + 5) + (3n + 6)}_{\substack{\text{in } \mathcal{P}(n+1) \text{ ma} \\ \text{non in } \mathcal{P}(n)}}.$$

In comune ci sono tutti gli addendi compresi fra $2n + 2$ e $3n + 3$. I due addendi $2n + (2n + 1)$ compare nella prima riga ma non nella seconda. I quattro termini $(3n + 4) + (3n + 5) + (3n + 6)$ sono nella seconda ma non nella prima. Quindi per passare dalla prima riga alla seconda si deve togliere $2n + (2n + 1)$ e aggiungere $(3n + 4) + (3n + 5) + (3n + 6)$. Facendo questa operazione ad *entrambi* i membri di $\mathcal{P}(n)$ otteniamo

$$\begin{aligned} (2n + 2) + (2n + 3) + (2n + 4) + \cdots + (3n + 6) &\stackrel{?}{=} \\ &\stackrel{?}{=} \frac{(n + 4)(5n + 3)}{2} - (2n + (2n + 1)) + ((3n + 4) + (3n + 5) + (3n + 6)). \end{aligned}$$

Dobbiamo decidere se questa espressione è equivalente a $\mathcal{P}(n + 1)$. Manipoliamo il secondo membro per vedere se per caso coincide con quello che vorremmo, cioè $(n + 5)(5n + 8)/2$:

$$\begin{aligned} \frac{(n + 4)(5n + 3)}{2} - (2n + (2n + 1)) + ((3n + 4) + (3n + 5) + (3n + 6)) &= \\ &= \frac{5n^2 + 3n + 20n + 12}{2} - 2n - 2n - 1 + 3n + 4 + 3n + 5 + 3n + 6 = \\ &= \frac{5n^2 + 23n + 12}{2} + 5n + 14 = \frac{5n^2 + 23n + 12 + 2(5n + 14)}{2} = \\ &= \frac{5n^2 + 23n + 12 + 10n + 28}{2} = \frac{5n^2 + 33n + 40}{2}. \end{aligned}$$

Questo dovrebbe essere uguale a $(n + 5)(5n + 8)/2$. Applicando a questo la proprietà distributiva effettivamente viene

$$\frac{(n + 5)(5n + 8)}{2} = \frac{n^2 + 8n + 25n + 40}{2} = \frac{n^2 + 33n + 40}{2}.$$

Concludiamo che il passo induttivo $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ è valido.

Alla formula $2n + (2n+1) + (2n+2) + \dots + 3(n+1) = (n+4)(5n+3)/2$ si può arrivare direttamente, senza induzione, se si dà per nota la formula

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Infatti a $2n + (2n+1) + (2n+2) + \dots + 3(n+1)$ si può arrivare partendo da $1 + 2 + 3 + \dots + 3(n+1)$ e togliendogli $1 + 2 + 3 + \dots + (2n-1)$:

$$\begin{aligned} 2n + (2n+1) + (2n+2) + \dots + 3(n+1) &= \left(1 + 2 + \dots + 3(n+1)\right) - \left(1 + 2 + \dots + (2n-1)\right) = \\ &= \frac{(3(n+1))(3(n+1)+1)}{2} - \frac{(2n-1)((2n-1)+1)}{2} = \\ &= \frac{3(n+1)(3n+4)}{2} - \frac{(2n-1) \cdot 2n}{2} = \\ &= \frac{3(3n^2 + 4n + 3n + 4) - (4n^2 - 2n)}{2} = \\ &= \frac{9n^2 + 21n + 12 - 4n^2 + 2n}{2} = \\ &= \frac{5n^2 + 23n + 12}{2} \end{aligned}$$

che coincide effettivamente con

$$\frac{(n+4)(5n+3)}{2} = \frac{5n^2 + 3n + 20n + 12}{2} = \frac{5n^2 + 23n + 12}{2}.$$

Questa procedura non induttiva è perfettamente corretta, ma l'esercizio chiedeva espressamente una dimostrazione per induzione.

4. Dimostrare che $7/4$ è l'estremo superiore dell'insieme

$$X = \left\{ \frac{1 + 4(-1)^n n}{2 + 3n} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

significa dimostrare che $7/4$ è maggiorante e che non ci sono maggioranti più piccoli di $7/4$. Vediamo se $7/4$ è minorante, lavorando sulle disuguaglianze come se n fosse variabile reale, invece che intera:

$$\begin{aligned} \frac{1 + 4(-1)^n n}{2 + 3n} \leq \frac{7}{4} &\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \frac{1 + 4n}{2 + 3n} \leq \frac{7}{4} \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \frac{1 - 4n}{2 + 3n} \leq \frac{7}{4} \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \frac{1 + 4n}{2 + 3n} - \frac{7}{4} \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \frac{1 - 4n}{2 + 3n} - \frac{7}{4} \leq 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \frac{4 + 16n - 14 - 21n}{2 + 3n} \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \frac{4 - 16n - 14 - 21n}{2 + 3n} \leq 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \frac{-5n - 10}{2 + 3n} \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \frac{-37n - 10}{2 + 3n} \leq 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ n \leq -2 \vee n > -2/3 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ n < -2/3 \vee n \geq -10/37 \end{cases} \iff \\ &\iff (n \text{ è pari}) \vee (n \text{ è dispari}) \iff n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

n	$\frac{1+4(-1)^n n}{2+3n}$
-10	1.3929
-9	-1.4800
-8	1.4091
-7	-1.5263
-6	1.4375
-5	-1.6154
-4	1.5000
-3	-1.8571
-2	1.7500
-1	-5.0000
0	0.5000
1	-0.6000
2	1.1250
3	-1.0000
4	1.2143
5	-1.1176
6	1.2500
7	-1.1739
8	1.2692
9	-1.2069
10	1.2813



Abbiamo usato il fatto che la condizione $n \leq -2 \vee n > -2/3$ lascia fuori soltanto il -1 fra gli interi, che però è dispari. La condizione $n < -2/3 \vee n \geq -10/37$ comprende tutti gli interi, sia pari che dispari.

Per decidere se $7/4$ è o no il massimo di X ripercorriamo i calcoli precedenti trasformando i " \leq " in " $=$ ": otteniamo che l'uguaglianza $(1 + 4(-1)^n n) / (2 + 3n) = 7/4$ vale per $n = -2$. Concludiamo che $7/4$ è il massimo di X .

Per decidere se -5 è estremo inferiore di X , cominciamo a verificare se -5 è minorante:

$$\begin{aligned}
 \frac{1 + 4(-1)^n n}{2 + 3n} \geq -5 &\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \frac{1 + 4n}{2 + 3n} \geq -5 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \frac{1 - 4n}{2 + 3n} \geq -5 \end{cases} \iff \\
 &\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \frac{1 + 4n}{2 + 3n} + 5 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \frac{1 - 4n}{2 + 3n} + 5 \geq 0 \end{cases} \iff \\
 &\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \frac{1 + 4n + 10 + 15n}{2 + 3n} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \frac{1 - 4n + 10 + 15n}{2 + 3n} \geq 0 \end{cases} \iff \\
 &\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ \frac{19n + 11}{2 + 3n} \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ \frac{11n + 11}{2 + 3n} \geq 0 \end{cases} \iff \\
 &\iff \begin{cases} n \text{ è pari} \\ n < -2/3 \vee n \geq -11/19 \end{cases} \vee \begin{cases} n \text{ è dispari} \\ n \leq -1 \vee n > -2/3 \end{cases} \iff \\
 (n \text{ è pari}) \vee (n \text{ è dispari}) &\iff n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



Si è usato il fatto che sia la condizione $n < -2/3 \vee n \geq -11/19$ che la $n \leq -1 \vee n > -2/3$ comprendono tutti i numeri interi, sia pari che dispari.

Ripercorrendo i conti con $= -5$ al posto di ≥ -5 si vede che l'uguaglianza vale per $n = -1$, che è dispari. Quindi -5 è il minimo di X .

Complemento. La struttura dell'insieme X :

