SIMULAZIONE ESAME SCRITTO II MODULO ELEMENTI DI MATEMATICA E ALGEBRA LINEARE

QUIZ: ogni risposta corretta vale 1 punto, sbagliata $-1/2$, non data 0.

1. Se una matrice quadrata ha rango massimo, allora è invertibile **V** **F**
2. Se A, B, C sono matrici tali che $A = CB$, allora le colonne di A dipendono linearmente dalle colonne di C. **V** **F**
3. Il sottospazio $W = \{(2h, 2h, 2h) : h \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 2. **V** **F**
4. In $\mathbb{R}^n$, n vettori linearmente indipendenti generano tutto lo spazio. **V** **F**
5. Il numero complesso $(1 + i)/2$ è l'inverso moltiplicativo del numero complesso $1 - i$. **V** **F**
6. I vettori $v_1 = (1/2, -1/2, 1)$ e $v_2 = (-1, 1, -2)$ sono indipendenti in $\mathbb{R}^3$. **V** **F**
7. Esistono matrici non nulle con rango 0. **V** **F**
8. I vettori $(1, 1, 1, 1)$, $(0, 1, 0, -1)$, $(0, 0, 1, 0)$ di $\mathbb{R}^4$ sono dipendenti. **V** **F**

9. Sia A una matrice di dimensione $n \times m$. Allora vale sempre che:
   (a) $rg(A) \leq m$. F se $n<m$
   (b) Se le righe di A sono dipendenti allora $rg(A) = 0$. F
   (c) $rg(A)$ è il più piccolo fra n ed m. V
   (d) Se $n = m$ allora $rg(A) = n$. F

10. Se $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ è una base per il sottospazio $W \leq \mathbb{R}^n$ allora:
   (a) $B' = (v_2, v_3, v_4)$ è una base di W. F
   (b) I vettori v_2, v_3, v_4 sono indipendenti. V
   (c) Il vettore v_1 è combinazione lineare di v_2, v_3, v_4. F
   (d) I vettori v_2, v_3, v_4 sono dipendenti. F

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}), v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Dimostrare che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   (b) Qual è il rango della matrice A che ha come righe i vettori v_1, v_2, v_3?
   (c) La matrice A del punto precedente è invertibile? Se si', trovane l'inversa con il metodo delle due colonne.

(d) Determinare le coordinate del vettore $v = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ in base B.

2. Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}, \qquad W_2 = \{(x, y, z) : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \}$$

(a) Determinare le equazioni parametriche di di W_1 e di W_2 e determinare se si tratta di piani, rette o punti.

(b) Trovare una base B_1 di W_1 e una base B_2 di W_2.

(c) Trovare le coordinate del vettore $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in W_1$ rispetto alla base B_1

3. Considerare il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - \ y + \ z = -1 \\ x + \ y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + z = -3 \end{cases}$$

(a) Se il sistema ammette soluzioni, determinare lo spazio affine delle soluzioni (scritto in forma parametrica).

(b) Trovare l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato (ovvero lo stesso sistema, ma con la colonna dei termini nulli uguale al vettore nullo).

(c) Determinare una base dell'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo.

(d) Determinare il rango della matrice dei coefficienti del sistema.