Esercizi: Conseguenza Logica, Logica Predicativa

1. Quali delle seguenti regole sono corrette rispetto alla conseguenza logica? Ovvero per quali delle seguenti regole, se una valutazione rende vere tutte le premesse della regola (formule sopra la linea della regole) allora rende vera anche la conclusione (formula sotto la linea dell regola)? Nel caso la regola non sia corretta, fornisci una valutazione che rende vere le premesse e falsa la conclusione della regola.

$$\frac{F \to G \quad \neg G}{\neg F}\;; \qquad \frac{F \to \neg G \quad G}{\neg F}\;; \qquad \frac{G \quad F \to G}{F}\;; \qquad \frac{F \to G \quad \neg F}{\neg G}\;;$$

2. Sia x un numero naturale e sia $P(x)$ il predicato "x è pari" e $Q(x)$ il predicato "x è dispari". Stabilisci stabilisci per ognuna delle formule seguenti se è vera o falsa.

   (a) $P(3) \to Q(3)$; P(3)=F Q(3)=V not(P(3)+Q(3) = V+V=V

   (b) $P(3) \to Q(4)$; P(3)=F -> Q(4)=F = notP(3) or Q(4)

   (c) $\forall x(P(x) \to Q(x))$;

   (d) $\exists x(P(x) \land Q(x))$;

   (e) $\exists x(\neg P(x) \land \neg Q(x))$;

   (f) $\forall x(\neg P(x) \to \neg Q(x))$;

3. Sia x un numero intero. Per ognuna delle formule seguenti, stabilire se è vera o falsa, dove usiamo $P \leftrightarrow Q$ come abbreviazione per $(P \to Q) \land (Q \to P)$:

   (a) $\forall x(x - 1 \geq 5 \to x \geq 4)$;

   (b) $\forall x(x - 1 \leq 5 \to x \leq 4)$;

   (c) $\forall x(x \geq 4 \to x - 1 \geq 5)$;

   (d) $\forall x(x \leq 4 \to x - 1 \leq 5)$;

   (e) $\forall x(x \leq 4 \leftrightarrow x - 1 \leq 5)$.

4. Considera due predicati $D(x)$ e $P(x)$ che significano "x dorme" e "x piglia pesci" rispettivamente. Formalizza le seguenti frasi:

   (a) Chi dorme non piglia pesci.

   (b) Chi non dorme non piglia pesci.

   (c) Chi dorme piglia pesci.

   (d) Chi non dorme piglia pesci.

   (e) C'è qualcuno che dorme e piglia pesci.

   (f) C'è qualcuno che non dorme e piglia pesci.

   (g) Chi non piglia pesci, dorme.

5. Per ognuna delle formule seguenti, stabilisci se è logicamente equivalente alla formula $\neg\forall x(P(x) \to Q(x))$. In caso negativo, descrivi una interpretazione in cui una delle due formule è vera e l'altra è falsa.

   (a) $\forall x(\neg P(x) \to \neg Q(x))$;

   (b) $\neg\forall x(\neg P(x) \to \neg Q(x))$;

   (c) $\neg\forall x(\neg Q(x) \to \neg P(x))$;

   (d) $\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))$;

   (e) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$.

6. Considera le seguenti frasi

   (a) Tutti gli attori ed i giornalisti invitati alla festa sono in ritardo.

   (b) Qualcuno è puntuale.

   (c) Qualche invitato non è né attore né giornalista.

   Utilizzando il linguaggio {A,G,I,P}, dove $A(x)$ sta per x *è un attore*, $G(x)$ sta per x *è un giornalista*, $I(x)$ sta per x *è invitato alla festa* e $P(x)$ sta per x *è puntuale*, traduci le frasi precedenti in formule F, G, H e trova un esempio di situazione reale in cui F, G sono vere e H è falsa.

7. Dimostra che se nell'esempio precedente la seconda frase viene sostituita da *qualche invitato è puntuale*, allora non è più possibile trovare un esempio in cui F, G sono vere e H è falsa. In questo caso, quindi, la verità di F, G implica la verità di H, ovvero H è una conseguenza necessaria di F, G.

8. Formalizza le frasi seguenti, con opportuni predicati (considerando *antipatico* come la negazione di *simpatico*):

   (a) tutti gli stupidi sono presuntuosi o vanitosi;

   (b) i presuntuosi sono antipatici;

   (c) le persone simpatiche non sono vanitose;

   (d) tutti gli stupidi sono antipatici.

   Possiamo dire che la quarta frase è una conseguenza logica delle precedenti?

9. Interpretando g come "Gianni", $\ell(x, y)$ come "x lavora con y" e $a(x, y)$ "x apprezza y", tradurre le seguenti frasi con formule:

   (a) Tutti apprezzano Gianni;

   (b) c'è qualcuno che lavora con Gianni ma non lo apprezza;

   (c) non tutti quelli che lavorano con Gianni lo apprezzano;

   Una volta tradotte le frasi, scrivi le loro negazioni, spostando il simbolo di negazione fino ad arrivare ai predicati ℓ, a mantenendo lo stesso significato; infine traduci la formula ottenuta nel linguaggio naturale.

10. Interprtando g come *Gianni*, $a(x, y)$ come x *ama* y, $o(x, y)$ come x *odia* y, traduci le seguenti frasi:

    (a) Qualcuno ama Gianni ed è odiato da lui;

    (b) Gianni odia tutti ma è amato da qualcuno;

    (c) tutti quelli che amano Gianni, sono odiati da Gianni;

    (d) non è detto che, se due persone non si odiano, si amino.

    Una volta tradotte le frasi, scrivi le loro negazioni, spostando il simbolo di negazione fino ad arrivare ai predicati a, o mantenendo lo stesso significato; infine traduci la formula ottenuta nel linguaggio naturale.

11. Considera i predicati $G(x)$, $L(x)$, $T(x, y)$ che significano rispettivamente, 'x è una gazzella ' e 'x è un leone', 'x teme y" . Formalizza le seguenti frasi:

    (a) Ogni gazzella teme tutti.

    (b) Ogni gazzella teme tutti i leoni.

    (c) Ogni gazzella teme qualche leone.

    (d) C'è una gazzella che non teme alcun leone.

    (e) Nessun leone teme una gazzella.