

Risolvi i seguenti esercizi giustificando sinteticamente le risposte.

**1. Programmazione in Scheme**

Il seguente programma, basato sulla procedura `lcs-list`, applica una variante dello schema ricorsivo discusso a lezione per calcolare la *lista* delle sottosequenze comuni più lunghe delle stringhe `u` e `v`. Per esempio:

`(lcs-list "arto" "atrio") → ("ato" "aro")`

In particolare, il primo argomento di `lcs-rec` rappresenta un prefisso di qualche soluzione.

```
(define lcs-list ; val : lista di stringhe
  (lambda (u v) (lcs-rec "" u v)) ; u, v : stringhe

(define lcs-rec
  (lambda (p u v)
    (cond
      ((or (string=? u "") (string=? v ""))
       (list p))
      ((char=? (string-ref u 0) (string-ref v 0))
       (lcs-rec (string-append p (substring u 0 1)) (substring u 1) (substring v 1)))
      (else
       (best (lcs-rec p (substring u 1) v) (lcs-rec p u (substring v 1))))
    )))
```

Si intende che la lista restituita da `lcs-rec` contenga stringhe *diverse fra loro* (senza ripetizioni) e, chiaramente, tutte della stessa lunghezza. Date due liste con queste caratteristiche, il compito della procedura `best` è quindi di selezionare tutte e sole le stringhe che faranno parte della soluzione per gli argomenti `p`, `u`, `v`.

Scrivi un programma in Scheme per realizzare la procedura `best`, tenendo conto del contesto in cui è applicata.



## 2. Dati procedurali in Scheme

La procedura `paths` restituisce la *lista* dei percorsi di Manhattan relativi a una mappa in cui gli spostamenti in basso sono rappresentati da caratteri consecutivi della stringa `u` e gli spostamenti a destra da caratteri di `v`. Per esempio:

`(paths "12" "ab") → ("12ab" "1a2b" "1ab2" "a12b" "a1b2" "ab12")`

Più precisamente, il  $k$ -imo spostamento in basso è associato al  $k$ -imo carattere di `u`; l' $n$ -imo spostamento a destra all' $n$ -imo carattere di `v`. Nell'esempio, in particolare, gli spostamenti in basso sono associati a cifre e quelli a destra a lettere minuscole: la terza stringa della lista risultante indica quindi gli spostamenti in questo ordine: uno spostamento iniziale in basso (1), due spostamenti successivi a destra (ab) e uno spostamento finale in basso (2).

Completa la definizione della procedura `paths` riportata nel riquadro.

```
(define paths                                ; val : stringa
  (lambda (u v)                             ; u, v : stringa
    (cond ((string=? u "")                  )
          ( ..... )
          (list u) )
    (else
     (append
      (map ..... )
      (paths (substring u 1) v) )
      (map ..... )
      )
    )))
```

## Programmazione in Java

Gli esercizi successivi fanno riferimento al seguente programma per calcolare il numero di percorsi di Manhattan lungo i collegamenti di un reticolo che si estende in tre dimensioni (problema affrontato anche in Laboratorio):

```
public static long manhattan3D( int i, int j, int k ) { // i, j, k ≥ 0
    Counter v = new Counter();
    manhattan3DRec( i, j, k, v );
    return v.count();
}

private static void manhattan3DRec( int i, int j, int k, Counter v ) {
    if ( ( i == 0 ) && ( j == 0 ) && ( k == 0 ) ) {
        v.incr();
    } else {
        if ( i > 0 ) { manhattan3DRec( i-1, j, k, v ); }
        if ( j > 0 ) { manhattan3DRec( i, j-1, k, v ); }
        if ( k > 0 ) { manhattan3DRec( i, j, k-1, v ); }
    }
}
```

Una particolarità di questa soluzione è che il programma utilizza un oggetto “contatore” di tipo `Counter`, condiviso da tutte le invocazioni ricorsive di `manhattan3DRec`, per contare i cammini — intuitivamente, per contare quante volte si raggiunge il nodo destinazione seguendo tutti i possibili cammini diversi.

Il protocollo della classe `Counter` comprende (\*):

un *costruttore* per creare un nuovo contatore inizializzato a zero; un metodo `void incr()` per incrementare di una unità il contatore; un metodo `void add(long n)` per aggiungere un valore intero non negativo  $n$  al contatore; un metodo `void reset()` per ri-azzerare il contatore; un metodo `long count()` per acquisire il valore del contatore (il conteggio); un metodo `String toString()` che restituisce la stringa che rappresenta il valore corrente del contatore.

### 3. Memoization

Completa il programma riportato nel riquadro, che applica la tecnica *top-down* di *memoization* per realizzare una versione più efficiente di `manhattan3D`.

```
public static long manhattan3D( int i, int j, int k ) { // i,j,k ≥ 0
    Counter v = new Counter();
    ..... h = new ..... ;
    .....
    .....
    .....

    mem( i, j, k, v, h );
    return v.count();
}

private static void mem( int i, int j, int k, Counter v, ..... h ) {
    if ( ..... == UNKNOWN ) {
        if ( ( i == 0 ) && ( j == 0 ) && ( k == 0 ) ) {
            v.incr(); h ..... = 1;
        } else {
            long n = v.count();

            if ( i > 0 ) { mem( ..... ); }
            if ( j > 0 ) { mem( ..... ); }
            if ( k > 0 ) { mem( ..... ); }

            h ..... = ..... ;
        }
    } else {
        v.add( h ..... );
    }
}

private static final long UNKNOWN = -1;
```

### 4. Classi in Java

Definisci la classe `Counter` scegliendo una rappresentazione interna appropriata e realizzando il costruttore e i metodi del protocollo (\*) in accordo a quanto specificato sopra.

## 5. Ricorsione e iterazione

Completa la definizione del metodo statico `manhattan3D`, riportato nel riquadro sottostante, che trasforma la struttura ricorsiva di `manhattan3DRec` in una struttura iterativa basata su uno *stack*.

```
public static long manhattan3D( int i, int j, int k ) { // i,j,k ≥ 0
    Counter v = new Counter();
    Stack<int[]> s = new Stack<int[]>();

    s.push( new int[] { ..... } );
    do {
        int[] f = ..... ;
        if ( (f[0] == 0) && (f[1] == 0) && (f[2] == 0) ) {
            ..... ;
        } else {
            if ( ..... > 0 ) { s.push( new int[] { ..... } ); }
            if ( ..... > 0 ) { ..... }
            if ( ..... > 0 ) { ..... }
        }
    } while ( ..... );
    return v.count();
}
```