ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLO SCRITTO

PRIMA PARTE

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Se A, B sono insiemi e $(A \times B) \subseteq (B \times A)$ allora $A = B$ **V** | **F**
2. Se A, B sono insiemi allora vale sempre $(A \setminus B) \cup B = A$. **V** | **F**
3. Se $A = \{(-1, 1)\}$ allora $A \subseteq P(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$. **V** | **F**
4. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (-n, n)$ è suriettiva. **V** | **F**
5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (-n, n)$ è iniettiva. **V** | **F**
6. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = n - 5$ è suriettiva. **V** | **F**
7. La funzione $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ definita da
$$f(n) = \{n\}$$
è iniettiva. **V** | **F**
8. Se una funzione ha un'inversa, allora è iniettiva. **V** | **F**
9. Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ è definita da $f(n) = -n^2$ e $Y = \{0, -1, -2\}$ allora $1 \in f^{-1}(Y)$. **V** | **F**
10. Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite da: $f(x) = -x^2, \qquad g(x) = -x + 1$.
Se $h = g \circ f$ allora $h(2) = -1$. **V** | **F**
11. La funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = z^2$ è invertibile. **V** | **F**
12. La relazione binaria R definita sugli interi da
$$xRy \quad \Leftrightarrow x + y = 1$$
è transitiva. **V** | **F**
13. La relazione binaria R definita sui sottoinsiemi dei numeri naturali da
$$(X, Y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$
è simmetrica. **V** | **F**
14. Il resto della divisione di -7 per -12 è -5. **V** | **F**
15. $-11 \equiv_8 -3$ **V** | **F**
16. 4 è l'opposto di 5 modulo 9. **V** | **F**
17. 4 è l'inverso moltiplcativo di 6 modulo 25. **V** | **F**
18. $(14)^{75} + 39 \times 30^{1724} - 37^2 \equiv_{13} 8$ **V** | **F**
19. Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su un insieme non vuoto A, a, b, c elementi di A e $[a]$ la classe di equivalenza dell'elemento a. Quali delle seguenti affermazioni sono vere, qualsiasi sia A e $\sim$?
   (a) se $a \sim b$ e $c \sim a$ allora $b \sim c$; **V** | **F**
   (b) se $b \notin [a]$ allora $b \not\sim a$; **V** | **F**
   (c) se $b \in [a]$ allora $a = b$; **V** | **F**
   (d) se $a = b$ allora $b \subseteq [a]$ **V** | **F**

ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLO SCRITTO

SECONDA PARTE

1 Funzioni

1. Sia $\mathbb{N}^*$ l'insieme di numeri naturali non nulli e $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ definita da $f(n,m) = n^m$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

2. Sia $\mathbb{N}^*$ l'insieme dei numeri naturali non nulli e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (0,n)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

3. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(x) = x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1,5\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

2 Relazioni

4. Sia $A = \{0,1,\ldots,9\}$ ed R la relazione definita su $A \times A$ da

$$aRb \qquad \Leftrightarrow \qquad a+b \leq 9$$

   (a) Stalilire se R è riflessiva.
   (b) Stalilire se R è simmetrica.
   (c) Stalilire se R è transitiva.

5. Sia $A = \{0,1,\ldots,9\}$ ed E la relazione d'equivalenza definita su $A \times A$ da

$$(a,b)E(a',b') \qquad \Leftrightarrow \qquad a+b = a'+b'$$

   (a) I due elementi $(1,0)$ e $(0,1)$ sono in relazione?
   (b) La coppia $(1,1)$ appartiene alla classe d'equivalenza della coppia $(2,2)$?
   (c) Descrivi gli elementi che appartengono alla classe d'equivalenza di $(0,0)$ e quelli che appartengono alla classe d'equivalenza di $(1,2)$.
   (d) Quante sono le classi d'equivalenza di E su $A \times A$?

3 Induzione

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

8. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $7^n - 1$ è divisibile per 6.

9. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ è divisibile per 13.

4 Combinatoria

10. Sia A un insieme finito con 10 elementi.
    (a) Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A \times A$?
    (b) Quanti sono i sottoinsiemi di A?
    (c) Quanti sono gli elementi (a, b, c) di $A \times A \times A$ con $a \neq b, b \neq c, c \neq a$?
11. Sia A un insieme finito con 15 elementi e $a, b \in A$, con $a \neq b$.
    (a) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3?
    (b) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a?
    (c) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a ma non contengono b?
    (d) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono sia a che b?
    (e) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a oppure b?
12. Le targhe automobilistiche di uno stato sono composte da 11 caratteri, dove un carattere è una delle 26 lettere dell'alfabeto inglese.
    (a) Quante macchine possono essere immatricolate?
    (b) Quante sono le targhe che contengono esattamente quattro a?
    (c) Quante sono le targhe che contengono esattamente quattro a consecutive?

5 Congruenze

13. Considerare la relazione d'equivalenza modulo 25.
    (a) Determinare l'opposto additivo di 3 modulo 25.
    (b) Determinare se 3 e 5 hanno un inverso moltiplicativo modulo 25 e in caso affermativo determinare l'inverso.
    (c) Trovare l'inverso moltiplicativo di 4 modulo 25.
14. Determinare un numero n tale che $0 \leq n < 11$ e tale che $n \equiv_{11} 13^2 - 10^4 + 22^{100}$.
15. Stabilire l'ultima cifra decimale del numero 27^{13}.