Complemento Ortogonale

(1) Dati i vettori $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1), v_3 = (1, 0, 2)$ in $\mathbb{R}^3$ considerare il sottospazio $W = L(v_1, v_2)$.
   (a) Dimostrare che $B =< v_1, v_2 >$ è una base di W.
   (b) Trovare le coordinate del vettore v_3 rispetto alla base B.
   (c) Scrivere l'equazione parametrica di W.
   (d) Trovare un vettore w ortogonale al piano W.
   (e) Scrivere l'equazione cartesiana di W.
   (f) Trovare una base ortonormale per W.
   (g) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W.

(2) Sia W il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{(h + k, h - k, h) : h, k \in \mathbb{R}\}$$

   (a) Trovare una base ortonormale B di W.
   (b) Trovare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W.
   (c) Scrivere il vettore $v = (1, 0, 1)$ come somma di un vettore in W e di un vettore in $W^\perp$.

(3) In $\mathbb{R}^3$, considerare il vettore $v = (1, 0, 1)$ e la retta r di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

   (a) Trovare un vettore w che abbia la stessa direzione della retta.
   (b) Calcolando i prodotti scalari $v \cdot w$ e $w \cdot w$, trovare la proiezione ortogonale $v_{||}$ del vettore v sulla retta r e un vettore $v^\perp$ perpendicolare ad r tale che $v = v_{||} + v^\perp$.

(4) In $\mathbb{R}^3$ considerare il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ dato dal piano per l'origine di equazione cartesiana $x - 2y + z = 0$ ed il sottospazio W' dato dal piano per l'origine di equazione cartesiana $x + y + z = 0$.
   (a) Trovare una base per il sottospazio W ed una per il sottospazio W'.
   (b) Determinare il sottospazio $W \cap W'$ e una sua base.
   (c) Determinare $W + W'$.

(5) Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (2, 1, 0).$$

   (a) I vettori v_1, v_2, v_3 sono indipendenti?
   (b) Trovare una base per il sottospazio $W = L(v_1, v_2, v_3)$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3, del punto precedente.
   (c) Descrivere il complemento ortogonale $W^\perp$ di W e trovare una base di $W^\perp$

(6) Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0, x + 2z = 0\},$$

$$T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y - z = 0, x + 2z = 0\}$$

(a) Dimostrare che S è una retta di $\mathbb{R}^3$, trovandone l'equazione parametrica.
(b) Dimostrare che T è un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$, trovando una base di T.
(c) Trovare $S^\perp$ e $T^\perp$, in $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, rispettivamente.

(7) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si consideri il seguente sottospazio vettoriale:

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0\}$$

(a) Dimostrare che se $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ allora $B =< v_1, v_2 >$ è una base di W.
(b) Trovare una base ortonormale di W a partire dalla base B.
(c) Determinare se il vettore $(-1, 1, 1)$ appartiene o meno al complemento ortogonale $W^\perp$ di W.
(d) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ del sottospazio W e la sua dimensione.
(e) Determinare una base B' di $W^\perp$.

(8) Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si consideri il seguente sottospazio vettoriale:

$$W := \{(h, k, -h, -k) : \ h, k \in \mathbb{R}\}$$

(a) Determinare una base di W e la sua dimensione.
(b) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$.
(c) Trovare una base ortonormale $B =< v_1, v_2 >$ di W e una base ortonormale $B' =< w_1, w_2 >$ di $W^\perp$.
(d) Considerare la base ortonormale $< v_1, v_2, w_1, w_2 >$ di $\mathbb{R}^4$ ottenuta dalle basi precedenti e trovare le coordinate del vettore $(1, 0, 1, 1)$ rispetto a questa base.

(9) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si consideri il seguente sottospazio vettoriale:

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 0 \text{ e } -x - y + z = 0\}$$

(a) Utilizzando il metodo di Gauss, risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

che descrive lo spazio W e trovare un'equazione parametrica per W.
(b) Determinare la dimensione di W e una sua base.
(c) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W e la sua equazione cartesiana.