Esercizi su Trasformazioni lineari e matrici

(1) Considerare la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare la trasformazione lineare T_A.
(b) Determinare il $Ker(T_A)$ e l'immagine di T_A, stabilendo anche la loro dimensione.
(c) Determinare se T_A è iniettiva, suriettiva, biunivoca.

(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (0, x + y + z, y).$$

(a) Trovare la matrice A per cui vale $T_A = F$.
(b) Determinare $Ker(F), Im(F)$ e le loro dimensioni, stabilendo se F è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

(3) Sia A la seguente matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Se $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice A rispetto alla base canonica. Determinare $T_A(1, 1, 1)$ e, più in generale, determinare il valore $T_A(x, y, z)$ sul generico vettore (x, y, z) del dominio.
(b) Determinare $Im(T_A)$, $Ker(T_A)$, una base per $Im(T_A)$ e una base per $Ker(T_A)$.
(c) Stablire se T_A è iniettiva o suriettiva.

(4) (a) Determinare la trasformazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ che manda: e_1 in $(1, 0, 1, 0)$, e_2 in $(0, 0, 0, 0)$ ed e_3 in $(1, 1, 0, 0)$. Determinare se la trasformazione trovata è iniettiva o suriettiva.
(b) Determinare due trasformazioni lineari distinte da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ che mandano e_1 in $(1, 0, 1, 0)$ ed e_3 in $(1, 1, 0, 0)$.

(5) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (x + y + z, x + y, x, 0).$$

(a) Determinare la matrice A tale che $T_A = F$.
(b) Determinare $Im(F)$, $Ker(F)$ e le loro dimensioni; in base a quanto trovato, stabilire se F è iniettiva o suriettiva.
(c) Determinare, se possibile, una base per $Im(F)$, un vettore che appartiene a $Im(F)$, ed uno che non vi appartiene.
(d) Determinare il sottospazio $Im(F)^\perp$ (ovvero il sottospazio ortogonale di $Im(F)$ in $\mathbb{R}^4$).