NUMERI COMPLESSI

- Nella prima parte del corso abbiamo lavorato principalmente con i naturali $\mathbb{N}$, gli interi $\mathbb{Z}$ ed i razionali $\mathbb{Q}$.
- Ogni sistema numerico elencato è un'estensione del sistema numerico precedente, e questa estensione ci permette di risolvere un certo numero di equazioni che nel sistema precedente non avevano soluzione.

$$x + 1 = 0, \quad 2x = 1, \quad x^2 = 2$$

Equazioni di secondo grado

l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzioni in $\mathbb{R}$.
Più in generale, anche se possiamo scrivere un'equazione

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

utilizzando solo numeri naturali come coefficienti, non tutte queste equazioni hanno soluzione nei naturali.
Per avere queste soluzioni è necessario introdurre un altro sistema numerico, quello dei numeri complessi.

Nascita dei numeri complessi

- Perché ci interessano numeri che sono radici di numeri negativi? Sorprendentemente, questi numeri aiutano anche scoprire nuove proprietà dei numeri reali. Tutti conosciamo la formula risolutiva dell'equazione di secondo grado:

  $$ax^2 + bx + c = 0 \text{ ha soluzione } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Nel 1500 si cercava una formula simile per l'equazione di terzo grado. Ad esempio, per un'equazione dei tipo $x^3 + px = q$.

  il matematico italiano Niccolò Fontana (detto Tartaglia) aveva scoperto (utilizzando ragionamenti sui volumi di certi poliedri) che le soluzioni si possono scrivere come

  $$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

  Per Tartaglia ed i suoi contemporanei, la soluzione non aveva senso quando $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$.

Ad esempio, nel caso dell'equazione

$$x^3 - 15x = 4 \text{ la formula di Tartagia dà } x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Tartaglia, Cardano e Ferrari non sapevano dare un significato a radici quadrate di numeri negativi, ed erano costretti a fermarsi, anche se sapevano che l'equazione ha almeno la soluzione reale $x = 4 \ldots$

$$4^3 - 15 \cdot 4 = 64 - 60 = 4$$

Se esistesse un numero "$\sqrt{-1}$", ovvero $(\sqrt{-1})^2 = -1$, allora potremmo trovare anche la soluzione $x = 4$.
Ricordando che $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$, abbiamo

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 =$$

$$8 + 12\sqrt{-1} - 6 + \sqrt{-1} \cdot (-1) = 2 + 11\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{121 \cdot (-1)} = 2 + \sqrt{-121}$$

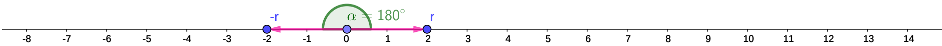
In modo simile si vede che $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$ e

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} =$$

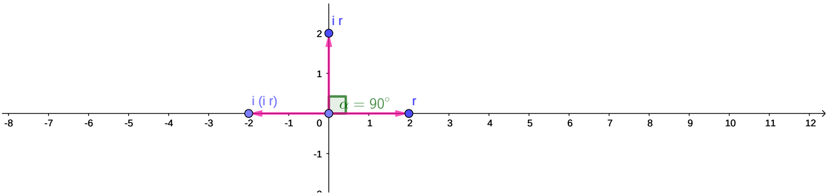
$$2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Fu solo grazie al lavoro sui numeri complessi del matematico Raffaele Bombelli (1526-1572) che la formula risolutiva venne compresa interamente.

Nuovi Numeri

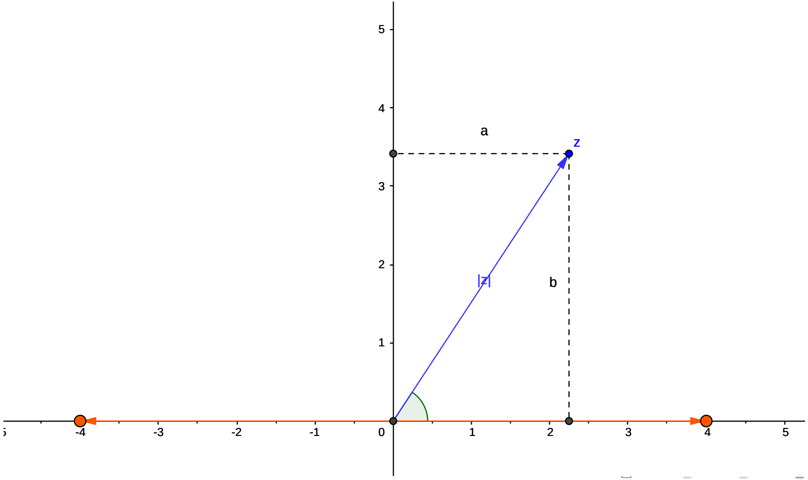


Moltiplicare un numero per -1 corrisponde a ruotare il vettore che rappresenta il numero r di 180 gradi.
Ci serve un nuovo numero i per cui moltiplicare per i corrisponda a ruotare il vettore di 90 gradi.



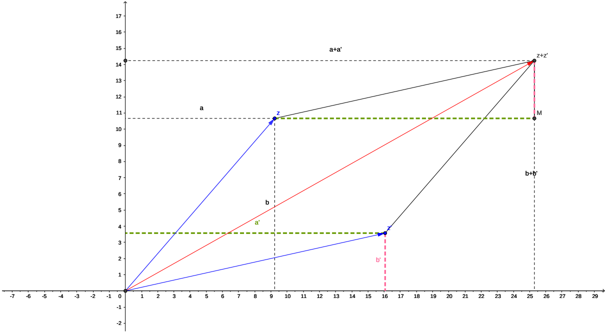
Il Piano di Argand-Gauss

I numeri complessi sono punti del piano, o meglio ancora "vettori" che hanno origine nell'origine degli assi.
I “vecchi” numeri reali sono i vettori che giacciono sull'asse delle ascisse.



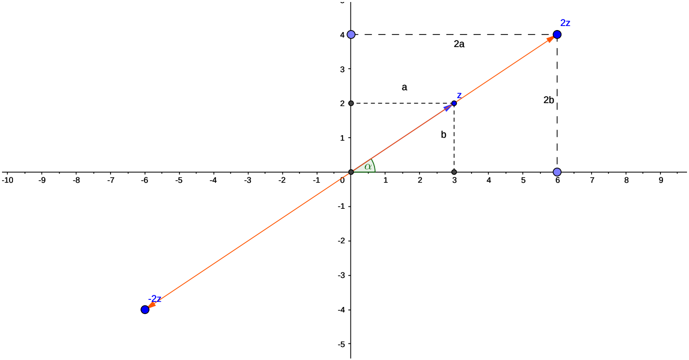
Somme

I numeri complessi si sommano proprio come si sommano i vettori.



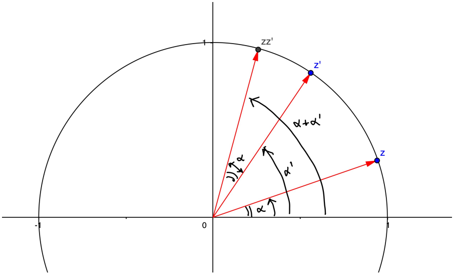
Moltiplicazione con un numero reale

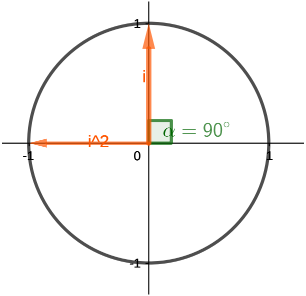
Moltiplicare z per un numero reale $r > 0$ significa moltiplicarne la lunghezza per r senza cambiar direzione o verso.
Moltiplicare z per un numero reale $r < 0$ significa moltiplicarne la lunghezza per $|r|$ senza cambiar direzione e cambiando verso.



Moltiplicazione fra numeri complessi di modulo 1

I numeri complessi che si trovano sulla circonferenza di raggio 1 si moltiplicano sommando gli angoli e mantenendo lunghezza 1:



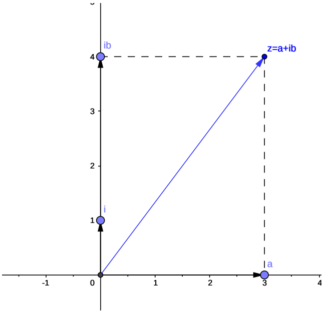


In particolare:

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = \mathrm{i}^2 = -1$$

Rappresentazione Cartesiana dei Numeri Complessi

Ogni numero complesso z si scrive come $z = a + ib$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Se $z = a + ib$ allora:

- a è la parte reale di z : $a = Re(z)$;
- b è la parte immaginaria di z: $b = Im(z)$.

Questa è la rappresentazione cartesiana di un numero complesso.

Operazioni nella rappresentazione cartesiana

$$
\begin{aligned}
(a+\mathrm{i}b) \quad + \quad (a'+\mathrm{i}b') \quad &= \quad (a+a')+\mathrm{i}(b+b') \\
(a+\mathrm{i}b) \quad \cdot \quad (a'+\mathrm{i}b') \quad &= \quad (aa'-bb')+\mathrm{i}(ab'+ba')
\end{aligned}
$$

La formula del prodotto si ottiene applicando la formula distributiva (che è valida per le operazioni citate fra vettori):

$$(a+\mathrm{i}b)\cdot(a'+\mathrm{i}b') = aa'+\mathrm{i}ab'+\mathrm{i}ba'+\mathrm{i}^2bb' = (aa'-bb')+\mathrm{i}(ab'+ba')$$

(utilizzando $\mathrm{i}^2 = -1$).

Operazioni complesse: esistenza dell'opposto

Si dimostra che le operazioni di somma e prodotto su questo nuovo tipo di numeri estendono le operazioni sui numeri reali e verificano le proprietà di associatività, commutatività e distributività della somma rispetto al prodotto. Inoltre:

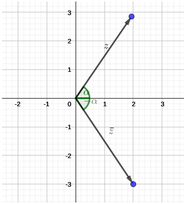
- Il numero reale 0 è l'elemento neutro rispetto alla somma e 1 è l'elemento neutro rispetto al prodotto.
- Ogni numero complesso $z = a + \mathrm{i}b$ ha un opposto: $-z = -a - \mathrm{i}b$ (infatti $a + \mathrm{i}b + -a - \mathrm{i}b = 0$).

Operazioni complesse: esistenza dell'inverso

- Ogni numero complesso $z = a + \mathrm{i}b \neq 0$ ha un inverso z^{-1} ovvero un numero complesso tale che

$$z \cdot z^{-1} = 1$$

Per trovare l'inverso consideramo un altro numero complesso collegato a z: il suo coniugato $\bar{z}$. Se $z = a + \mathrm{i}b$ il coniugato è $z = a - \mathrm{i}b$ (vedi figura).



Se moltiplichiamo z per il suo coniugato $\bar{z}$ otteniamo un numero reale:
$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$.
Ne segue $z \cdot \frac{\bar{z}}{(a^2+b^2)} = 1$ e il numero complesso $\frac{\bar{z}}{(a^2+b^2)}$ è l'inverso di z:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{(a^2 + b^2)} = (a - \mathrm{i}b)(a^2 + b^2)^{-1} = \frac{a}{(a^2 + b^2)} - \mathrm{i}\frac{b}{(a^2 + b^2)}.$$

Svolgere le operazioni e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

ESERCITAZIONE 1

$$z = (1 - 2\mathrm{i}) + (\sqrt{2} - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = (1 + 2\mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = (1 - 2\mathrm{i})^2$$ RISPOSTA

$$z = (1 - 2\mathrm{i})^3$$ RISPOSTA

AVANTI

Svolgere le operazioni e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

ESERCITAZIONE 1

$$z = (1 - 2\mathrm{i}) + (\sqrt{2} - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = (1 + 2\mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = (1 - 2\mathrm{i})^2$$ RISPOSTA

$$z = (1 - 2\mathrm{i})^3$$ RISPOSTA

$z = 1 + \sqrt{2} - 3\mathrm{i}$:
$Re(z) = 1 + \sqrt{2}$, $Im(z) = -3$

AVANTI

Svolgere le operazioni e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

ESERCITAZIONE 1

$$z = (1 - 2\mathrm{i}) + (\sqrt{2} - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = (1 + 2\mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = (1 - 2\mathrm{i})^2$$ RISPOSTA

$$z = (1 - 2\mathrm{i})^3$$ RISPOSTA

$z = 1^2 - (2\mathrm{i})^2 = 1 - (4\mathrm{i}^2) = 1 - 4(-1) = 5$:
$Re(z) = 5$, $Im(z) = 0$

AVANTI

Svolgere le operazioni e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

ESERCITAZIONE 1

$$z = (1 - 2\mathrm{i}) + (\sqrt{2} - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = (1 + 2\mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = (1 - 2\mathrm{i})^2$$ RISPOSTA

$$z = (1 - 2\mathrm{i})^3$$ RISPOSTA

$z = 1^2 + (-2\mathrm{i})^2 - 2 \cdot 2\mathrm{i} = 1 - 4 - 4\mathrm{i} = -3 - 4\mathrm{i}$:
$Re(z) = -3$, $Im(z) = -4$

AVANTI

Svolgere le operazioni e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

ESERCITAZIONE 1

$$z = (1 - 2\mathrm{i}) + (\sqrt{2} - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = (1 + 2\mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = (1 - 2\mathrm{i})^2$$ RISPOSTA

$$z = (1 - 2\mathrm{i})^3$$ RISPOSTA

$z = (1 - 2\mathrm{i})^3 = 1^3 + (-2\mathrm{i})^3 + 3(-2\mathrm{i})^2 + 3(-2\mathrm{i}) = 1 + (-8)(-\mathrm{i}) + 3 \cdot 4\mathrm{i}^2 - 6\mathrm{i} =$
$1 + 8\mathrm{i} - 12 - 6\mathrm{i} = -11 + 2\mathrm{i}$:
$Re(z) = -11$, $Im(z) = 2$

AVANTI

Svolgere le operazioni e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

ESERCITAZIONE 2

$$z = \frac{1}{\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{3-2\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

AVANTI

Svolgere le operazioni e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

ESERCITAZIONE 2

$$z = \frac{1}{\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{3-2\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$z = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = -\mathrm{i}$

AVANTI

Svolgere le operazioni e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

ESERCITAZIONE 2

$$z = \frac{1}{\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{3-2\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$z = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \cdot \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} = -(1+\mathrm{i}) \cdot \mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}$ AVANTI

Svolgere le operazioni e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

ESERCITAZIONE 2

$$z = \frac{1}{\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{3-2\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})} \cdot \frac{(1+\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}$$

AVANTI

Svolgere le operazioni e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

ESERCITAZIONE 2

$$z = \frac{1}{\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

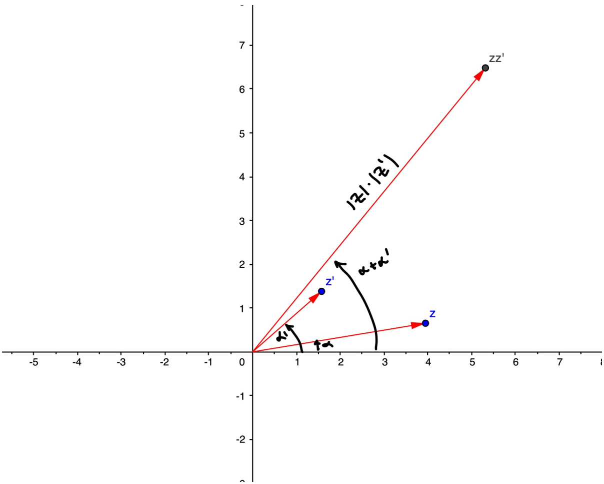
$$z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{3-2\mathrm{i}}{-2-\mathrm{i}}$$ RISPOSTA

$$z = \frac{(3-2\mathrm{i})}{(-2-\mathrm{i})} \cdot \frac{(-2+\mathrm{i})}{(-2+\mathrm{i})} = \frac{(3-2\mathrm{i})\cdot(-2+\mathrm{i})}{5} = \frac{-6-2\mathrm{i}^2+3\mathrm{i}+4\mathrm{i}}{5} = \frac{-4+7\mathrm{i}}{5}$$

AVANTI

Moltiplicazione fra numeri complessi in generale



Coordinate Polari

Un vettore non nullo, ovvero, un numero complesso $z = a + \mathrm{i}b \neq 0$, oltre ad essere identificato con le sue coordinate polari (a, b), può essere univocamente descritto tramite le sue coordinate polari

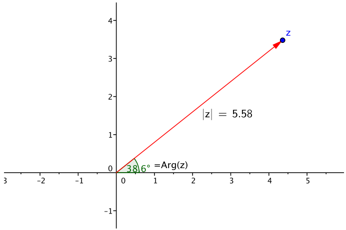
$$(\rho, \theta)$$

(lettere greche che si leggono, rispettivamente, ro e teta):

$$0 < \rho \text{ è la lunghezza del vettore } z\text{. Si indica con } |z| \text{ (il modulo di } z\text{)}$$

$$0 \leq \theta < 360^\circ$$

è la misura in gradi dell'angolo che che si ottiene ruotando l'asse positivo delle ascisse fino a raggiungere il vettore z. Si indica con $Arg(z)$, l'argomento di z



Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 3

$z = \mathrm{i}$ RISPOSTA

$z = 1$ RISPOSTA

$z = -1$ RISPOSTA

$z = -2\mathrm{i}$ RISPOSTA

AVANTI

Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 3

$z = \mathrm{i}$ RISPOSTA

$z = 1$ RISPOSTA

$z = -1$ RISPOSTA

$z = -2\mathrm{i}$ RISPOSTA

$|z| = 1$, $Arg(z) = 90^\circ$

AVANTI

Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 3

$z = \mathrm{i}$ RISPOSTA

$z = 1$ RISPOSTA

$z = -1$ RISPOSTA

$z = -2\mathrm{i}$ RISPOSTA

$|z| = 1$, $Arg(z) = 0^\circ$

AVANTI

Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 3

$z = \mathrm{i}$ RISPOSTA

$z = 1$ RISPOSTA

$z = -1$ RISPOSTA

$z = -2\mathrm{i}$ RISPOSTA

$|z| = 1$, $Arg(z) = 180^\circ$

AVANTI

Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 3

$z = \mathrm{i}$ RISPOSTA

$z = 1$ RISPOSTA

$z = -1$ RISPOSTA

$z = -2\mathrm{i}$ RISPOSTA

$|z| = 2$, $Arg(z) = 270^\circ$

AVANTI

Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 4

$$z = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 1 - \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(-1 - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = -1/2 + \mathrm{i}/2 = (1/2)(-1 + \mathrm{i})$$ RISPOSTA

AVANTI

Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 4

$$z = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 1 - \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(-1 - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = -1/2 + \mathrm{i}/2 = (1/2)(-1 + \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$|z| = \sqrt{2}$, $Arg(z) = 45^\circ$

AVANTI

Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 4

$$z = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 1 - \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(-1 - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = -1/2 + \mathrm{i}/2 = (1/2)(-1 + \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$|z| = \sqrt{2}$, $Arg(z) = 315^\circ = -45^\circ$

AVANTI

Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 4

$$z = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 1 - \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(-1 - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = -1/2 + \mathrm{i}/2 = (1/2)(-1 + \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$|z| = 2\sqrt{2}$, $Arg(z) = 225°$

AVANTI

Trovare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 4

$$z = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 1 - \mathrm{i}$$ RISPOSTA

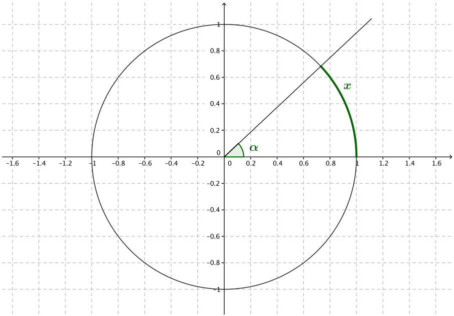
$$z = 2(-1 - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = -1/2 + \mathrm{i}/2 = (1/2)(-1 + \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$|z| = \sqrt{2}/2$, $Arg(z) = 135^\circ$ AVANTI

La misura degli angoli viene usualmente espressa utilizzando gradi o radianti.

Per definire i radianti, consideriamo un angolo con vertice nel centro della circonferenza e un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse.
Definiamo la misura in radianti di un angolo come la lunghezza x dell'arco individuato dall'angolo sulla circonferenza goniometrica.



Notiamo che l'angolo giro, di misura 360°, corrisponde alla circonferenza completa di lunghezza 2π (ricordiamo che $R = 1$).

La relazione fra la misura in gradi, α, di un generico angolo e la misura x in radianti dello stesso angolo è espressa dalla proporzione

$$\boxed{\alpha : 360 = x : 2\pi}$$

Se conosciamo la misura in gradi α di un angolo, otterremo la misura x in radianti tramite l'equazione

$$\boxed{x = 2\pi \frac{\alpha}{360}}$$

Se conosciamo la misura in radianti x di un angolo, otterremo la misura α in gradi tramite l'equazione

$$\boxed{\alpha = 360 \frac{x}{2\pi}}$$

ESEMPI

- Se $\alpha = 45°$, allora $x = \frac{45 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{4}$ radianti.
- Se $\alpha = 90°$, allora $x = \frac{90 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{2}$ radianti.
- Se $\alpha = 180°$, allora $x = \frac{18 \cdot 2\pi}{360} = \pi$ radianti.
- Se $\alpha = 270°$, allora $x = \frac{270 \cdot 2\pi}{360} = \frac{3\pi}{2}$ radianti.
- Se $\alpha = 18°$, allora $x = \frac{18 \cdot 2\pi}{360} = \frac{\pi}{10}$ radianti.
- Se $x = \frac{\pi}{3}$ radianti, allora $\alpha = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{360}{2\pi} = 60°$.
- Se $x = \frac{5}{6}\pi$ radianti, allora $\alpha = \frac{5}{6}\pi \cdot \frac{360}{2\pi} = 150°$.

QUIZ 1: dire se sono corrette le seguenti equivalenze tra gradi e radianti

$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$	VERO	FALSO
$0^\circ = 3\pi$	VERO	FALSO
$\frac{\pi}{10} = 36^\circ$	VERO	FALSO
$1^\circ = \pi$	VERO	FALSO

INDIETRO AVANTI

QUIZ 1: dire se sono corrette le seguenti equivalenze tra gradi e radianti

$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$	VERO	FALSO
$0^\circ = 3\pi$	VERO	FALSO
$\frac{\pi}{10} = 36^\circ$	VERO	FALSO
$1^\circ = \pi$	VERO	FALSO

INDIETRO AVANTI

RISPOSTA

Giusto!

QUIZ 1: dire se sono corrette le seguenti equivalenze tra gradi e radianti

$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$	VERO	FALSO
$0^\circ = 3\pi$	VERO	FALSO
$\frac{\pi}{10} = 36^\circ$	VERO	FALSO
$1^\circ = \pi$	VERO	FALSO

INDIETRO AVANTI

RISPOSTA

Sbagliato: la relazione $\alpha : 360^\circ = x : 2\pi$ è soddisfatta, pertanto l'equivalenza è vera.

QUIZ 1: dire se sono corrette le seguenti equivalenze tra gradi e radianti

$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$	VERO	FALSO
$0^\circ = 3\pi$	VERO	FALSO
$\frac{\pi}{10} = 36^\circ$	VERO	FALSO
$1^\circ = \pi$	VERO	FALSO

INDIETRO AVANTI

RISPOSTA

Sbagliato: la relazione $\alpha : 360^\circ = x : 2\pi$ NON è soddisfatta, pertanto l'equivalenza NON è vera. Un angolo di 0° misura 0 radianti.

QUIZ 1: dire se sono corrette le seguenti equivalenze tra gradi e radianti

$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$	VERO	FALSO
$0^\circ = 3\pi$	VERO	FALSO
$\frac{\pi}{10} = 36^\circ$	VERO	FALSO
$1^\circ = \pi$	VERO	FALSO

INDIETRO AVANTI

RISPOSTA

Giusto!

QUIZ 1: dire se sono corrette le seguenti equivalenze tra gradi e radianti

$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$	VERO	FALSO
$0^\circ = 3\pi$	VERO	FALSO
$\frac{\pi}{10} = 36^\circ$	VERO	FALSO
$1^\circ = \pi$	VERO	FALSO

INDIETRO AVANTI

RISPOSTA

Giusto!

QUIZ 1: dire se sono corrette le seguenti equivalenze tra gradi e radianti

$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$	VERO	FALSO
$0^\circ = 3\pi$	VERO	FALSO
$\frac{\pi}{10} = 36^\circ$	VERO	FALSO
$1^\circ = \pi$	VERO	FALSO

INDIETRO AVANTI

RISPOSTA

Sbagliato: la relazione $\alpha : 360^\circ = x : 2\pi$ è soddisfatta, pertanto l'equivalenza è vera.

QUIZ 1: dire se sono corrette le seguenti equivalenze tra gradi e radianti

$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$	VERO	FALSO
$0^\circ = 3\pi$	VERO	FALSO
$\frac{\pi}{10} = 36^\circ$	VERO	FALSO
$1^\circ = \pi$	VERO	FALSO

INDIETRO AVANTI

RISPOSTA

Sbagliato: la relazione $\alpha : 360^\circ = x : 2\pi$ NON è soddisfatta, pertanto l'equivalenza NON è vera. In particolare si verifica che $\pi = 180^\circ$ e $1^\circ = \frac{1}{180}\pi$.

QUIZ 1: dire se sono corrette le seguenti equivalenze tra gradi e radianti

$135^\circ = \frac{3}{4}\pi$	VERO	FALSO
$0^\circ = 3\pi$	VERO	FALSO
$\frac{\pi}{10} = 36^\circ$	VERO	FALSO
$1^\circ = \pi$	VERO	FALSO

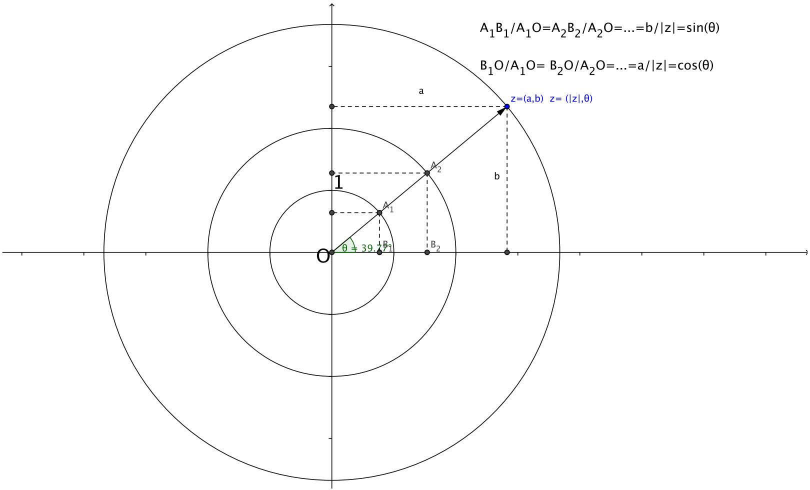
INDIETRO AVANTI

RISPOSTA

Giusto!

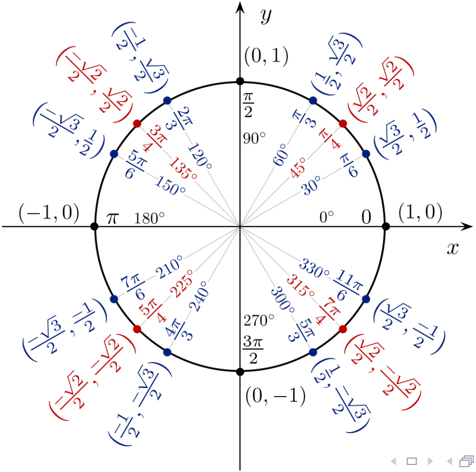
Ripasso di Trigonometria: Teorema di Talete

(ThTalete.ggb)



Coseno e seno di angoli particolari

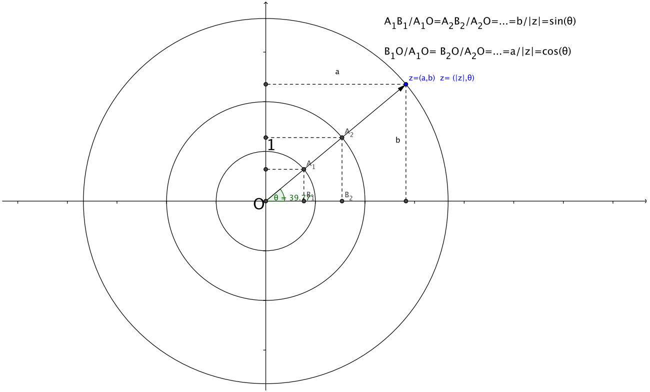
Se la circonferenza su cui si trova il numero complesso z nella precedente scheda ha raggio 1, allora il denominatore nella definizione di seno e coseno sarà pari ad 1 ed il punto z avrà come coordinate $(cos(\theta), sen(\theta))$; ad esempio, $cos(30^\circ) = cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $sin(30^\circ) = sin(\pi/6) = 1/2)$.



Dalle Coordinate Polari alle Coordinate Cartesiane e viceversa

Se $z \neq 0$, $z = (a, b)$ e $z = (|z|, \theta)$ allora $a = |z|cos(\theta)$, $b = |z|sin(\theta)$;

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\quad cos(\theta) = a/|z|$, $\quad sen(\theta) = b/|z|$.

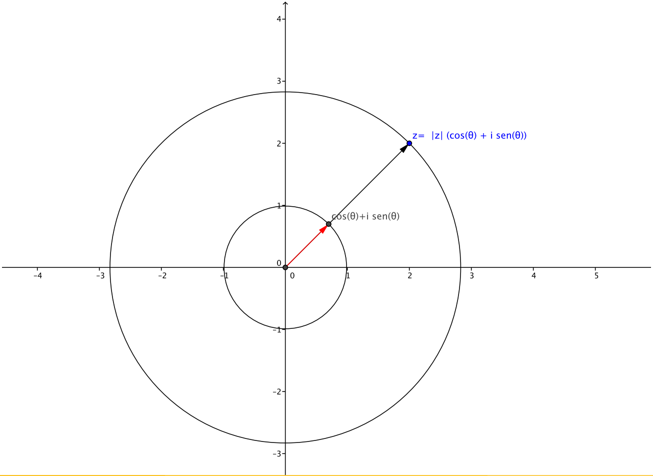


La notazione Trigonometrica dei numeri complessi

Se $z = a + \mathrm{i}b$, poiché $a = |z|cos(\theta)$, $b = |z|sin(\theta)$, possiamo riscrivere z come

$$z = |z|cos(\theta) + \mathrm{i}|z|sin(\theta) = |z|(cos(\theta) + \mathrm{i}sin(\theta))$$

Il numero complesso $cos(\theta) + \mathrm{i}sin(\theta)$ ha modulo 1 e lo stesso argomento di z.



Trovare la forma trigonometrica dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 5

$$z = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 1 - \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(-1 - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = -1/2 + \mathrm{i}/2 = (1/2)(-1 + \mathrm{i})$$ RISPOSTA

AVANTI

Trovare la forma trigonometrica dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 5

$$z = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 1 - \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(-1 - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = -1/2 + \mathrm{i}/2 = (1/2)(-1 + \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = \sqrt{2}(cos(45^\circ) + \mathrm{i}sin(45^\circ)) = \sqrt{2}(cos(\pi/4) + \mathrm{i}sin(\pi/4))$$

AVANTI

Trovare la forma trigonometrica dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 5

$$z = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 1 - \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(-1 - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = -1/2 + \mathrm{i}/2 = (1/2)(-1 + \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = \sqrt{2}(cos(315^\circ) + \mathrm{i}sin(315^\circ)) = \sqrt{2}(cos(7\pi/4) + \mathrm{i}sin(7\pi/4))$$ AVANTI

Trovare la forma trigonometrica dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 5

$$z = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 1 - \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(-1 - \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = -1/2 + \mathrm{i}/2 = (1/2)(-1 + \mathrm{i})$$ RISPOSTA

$$z = 2\sqrt{2}(cos(5\pi/4) + \mathrm{i}sin(5\pi/4)) = 2\sqrt{2}(cos(225^\circ) + \mathrm{i}sin(225^\circ))$$ AVANTI

Trovare la forma trigonometrica dei seguenti numeri complessi

ESERCITAZIONE 5

$z = 1 + \mathrm{i}$ RISPOSTA

$z = 1 - \mathrm{i}$ RISPOSTA

$z = 2(-1 - \mathrm{i})$ RISPOSTA

$z = -1/2 + \mathrm{i}/2 = (1/2)(-1 + \mathrm{i})$ RISPOSTA

$$z = 2\sqrt{2}(cos(3\pi/4) + \mathrm{i}sin(3\pi/4)) = 2\sqrt{2}(cos(135^\circ) + \mathrm{i}sin(135^\circ))$$

AVANTI

Notazione Trigonometrica e Prodotto di numeri complessi

Teorema
Se $z = \rho(cos(\theta)+\mathrm{i}sin(\theta)), \quad z' = \rho'(cos(\theta')+\mathrm{i}sin(\theta'))$,
la forma trigonometrica del prodotto $z \cdot z'$ è:

$$z \cdot z' = \rho\rho'(cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}sin(\theta + \theta'))$$

A parole: il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli dei fattori:

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|;$$

l'argomento del prodotto è la SOMMA degli argomenti dei fattori:

$$Arg(z \cdot z') = Arg(z) + Arg(z').$$

In particolare, poiché $|\mathrm{i}|$=1 e $Arg(\mathrm{i}) = 90^\circ$, moltiplicare un numero complesso z per i equivale a ruotare z di 90° in senso antiorario. (animazione moltiplicazioneplus.ggb)

DIMOSTRAZIONE DELLA REGOLA DEL PRODOTTO

Se $z = \rho(cos(\theta) + \mathrm{i} sin(\theta))$, $\quad z' = \rho'(cos(\theta') + \mathrm{i} sin(\theta'))$, allora si ha:

$$z \cdot z' = \rho(cos(\theta) + \mathrm{i} sin(\theta)) \cdot \rho'(cos(\theta') + \mathrm{i} sin(\theta')) =$$

$$= \rho\rho'((cos(\theta)cos(\theta') - sin(\theta)sin(\theta')) + \mathrm{i}(cos(\theta)sin(\theta') +) sin(\theta')cos(\theta') =$$

$$= \rho\rho'((cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}(sin(\theta + \theta'))$$

(dove l'ultima uguaglianza si ottiene dalla regola per seno e coseno della somma di angoli).

Trovare la forma trigonometrica del prodotto fra z e z' (e rappresentare il risultato sul piano di Argand Gauss):

ESERCITAZIONE 6

$$z = 3(cos(30^\circ) + \mathrm{i}sin(30^\circ)), z' = \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 3(cos(\pi/4) + \mathrm{i}sin(\pi/4)), z' = -\mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(cos(60^\circ) + \mathrm{i}sin(60^\circ)), z' = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(cos(75^\circ) + \mathrm{i}sin(75^\circ)),$$
$$z' = 2(cos(15^\circ) + \mathrm{i}sin(15^\circ))$$ RISPOSTA

AVANTI

Trovare la forma trigonometrica del prodotto fra z e z' (e rappresentare il risultato sul piano di Argand Gauss):

ESERCITAZIONE 6

$$z = 3(cos(30^\circ) + \mathrm{i}sin(30^\circ)), z' = \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 3(cos(\pi/4) + \mathrm{i}sin(\pi/4)), z' = -\mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(cos(60^\circ) + \mathrm{i}sin(60^\circ)), z' = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(cos(75^\circ) + \mathrm{i}sin(75^\circ)),$$

$$z' = 2(cos(15^\circ) + \mathrm{i}sin(15^\circ))$$ RISPOSTA

poiché $z' = 1(cos(90^\circ) + \mathrm{i}sin(90^\circ))$ dalla regola del prodotto otteniamo:
$z \cdot z' = 3(cos(120^\circ) + \mathrm{i}sin(120^\circ))$

AVANTI

Trovare la forma trigonometrica del prodotto fra z e z' (e rappresentare il risultato sul piano di Argand Gauss):

ESERCITAZIONE 6

$$z = 3(cos(30^\circ) + \mathrm{i}sin(30^\circ)), z' = \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 3(cos(\pi/4) + \mathrm{i}sin(\pi/4)), z' = -\mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(cos(60^\circ) + \mathrm{i}sin(60^\circ)), z' = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(cos(75^\circ) + \mathrm{i}sin(75^\circ)),$$

$$z' = 2(cos(15^\circ) + \mathrm{i}sin(15^\circ))$$ RISPOSTA

poiché $z' = 1(cos(3\pi/2) + \mathrm{i}sin(3\pi/2))$ dalla regola del prodotto otteniamo:
$z \cdot z' = 3(cos(7\pi/4) + \mathrm{i}sin(7\pi/4))$

AVANTI

Trovare la forma trigonometrica del prodotto fra z e z' (e rappresentare il risultato sul piano di Argand Gauss):

ESERCITAZIONE 6

$z = 3(cos(30^\circ) + \mathrm{i} sin(30^\circ)), z' = \mathrm{i}$ RISPOSTA

$z = 3(cos(\pi/4) + \mathrm{i} sin(\pi/4)), z' = -\mathrm{i}$ RISPOSTA

$z = 2(cos(60^\circ) + \mathrm{i} sin(60^\circ)), z' = 1 + \mathrm{i}$ RISPOSTA

$z = 2(cos(75^\circ) + \mathrm{i} sin(75^\circ)),$

$z' = 2(cos(15^\circ) + \mathrm{i} sin(15^\circ))$ RISPOSTA

poiché $z' = \sqrt{2}/2(cos(45^\circ) + \mathrm{i} sin(45^\circ))$ dalla regola del prodotto otteniamo:
$z \cdot z' = 2\sqrt{2}(cos(105^\circ) + \mathrm{i} sin(105^\circ))$

AVANTI

Trovare la forma trigonometrica del prodotto fra z e z' (e rappresentare il risultato sul piano di Argand Gauss):

ESERCITAZIONE 6

$$z = 3(cos(30^\circ) + \mathrm{i}sin(30^\circ)), z' = \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 3(cos(\pi/4) + \mathrm{i}sin(\pi/4)), z' = -\mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(cos(60^\circ) + \mathrm{i}sin(60^\circ)), z' = 1 + \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z = 2(cos(75^\circ) + \mathrm{i}sin(75^\circ)),$$

$$z' = 2(cos(15^\circ) + \mathrm{i}sin(15^\circ))$$ RISPOSTA

$z \cdot z' = 4(cos(90^\circ) + \mathrm{i}sin(90^\circ)) = 4\mathrm{i}$

AVANTI

Polinomi

I numeri complessi sono stati inventati per trovare una soluzione all'equazione

$$x^2 = -1,$$

ma in effetti contengono soluzioni per moltissime equazioni, tutte quelle che possiamo costruire a partire da coefficienti complessi, somma e prodotto:

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA, C.F. GAUSS 1799

Ogni equazione polinomiale a coefficienti complessi, cioè ogni equazione della forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

ha sempre almeno una soluzione in $\mathbb{C}$ (anzi, ne ha n se contiamo "le moltiplicità")

Ad esempio esistono cinque soluzioni dell'equazione

$$z^5 = -1,$$

cioè, cinque numeri complessi che elevati alla quinta danno come risultato -1, e l'equazione

$$\pi z^3 + \mathrm{i} z^2 - 2z - 7 = 0$$

ha 3 soluzioni in $\mathbb{C}$.
In questo corso vedremo, tramite esempi, solo un caso particolare del Teorema Fondamentale dell'algebra, ovvero quello delle radici complesse di un numero complesso:

TEOREMA

Se $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, l'equazione

$$z^n = z_0$$

ha esattamente n radici complesse.

Ad esempio, $z^4 = 1$ ha esattamente quattro radici: $1, -1, i, -i$

DIGRESSIONE: UGUAGLIANZA FRA COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

- Siano
$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), z' = \rho'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta'))$$
con $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$,
(ovvero stiamo consideriamo l'argomento principale dei numeri complessi)
Allora :
$$z = z' \Leftrightarrow ?$$

- Se invece i numeri complessi sono rappresentati con argomento che supera 2π, dobbiamo considerare l'uguagianza degli angoli a meno di multipli di 2π.
$$z = z' \Leftrightarrow \rho = \rho' \text{ e } \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$
Ad esempio, $\cos(\pi) + \mathrm{i}sen(\pi) = \cos(3\pi) + \mathrm{i}sen(3\pi)$.

DIGRESSIONE: UGUAGLIANZA FRA COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

- Siano
$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), z' = \rho'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta'))$$
con $0 \leq \theta, \theta' < 2\pi$,
(ovvero stiamo consideriamo l'argomento principale dei numeri complessi)
Allora :
$$z = z' \Leftrightarrow \rho = \rho' \text{ e } \theta = \theta'$$

- Se invece i numeri complessi sono rappresentati con argomento che supera 2π, dobbiamo considerare l'uguagianza degli angoli a meno di multipli di 2π.
$$z = z' \Leftrightarrow \rho = \rho' \text{ e } \theta = \theta' + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$
Ad esempio, $\cos(\pi) + \mathrm{i}sen(\pi) = \cos(3\pi) + \mathrm{i}sen(3\pi)$.

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \,?\,.$$

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \boxed{?}$$

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^4 = 1) \Rightarrow (\rho = 1) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^4 = 1) \Rightarrow (\rho = 1) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (4\theta = \pi + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/4 + k\pi/2), \ k \in \mathbb{Z})$$

(per altri valori di k si ottengono le stesse soluzioni)

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^4 = 1) \Rightarrow (\rho = 1) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (4\theta = \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/4 + k\pi/2),\ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)$, ovvero $z_1 = ?$

(per altri valori di k si ottengono le stesse soluzioni)

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^4 = 1) \Rightarrow (\rho = 1) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (4\theta = \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/4 + k\pi/2),\ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)$, ovvero $z_1 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

(per altri valori di k si ottengono le stesse soluzioni)

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^4 = 1) \Rightarrow (\rho = 1) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0\text{);}$$

$$(\star) \Rightarrow (4\theta = \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/4 + k\pi/2),\ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)$, ovvero $z_1 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

per $k = 1$ otteniamo: $z_2 = \cos(\pi/4 + \pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + \pi/2) = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)$, ovvero $z_2 = ?$

(per altri valori di k si ottengono le stesse soluzioni)

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^4 = 1) \Rightarrow (\rho = 1) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0\text{);}$$

$$(\star) \Rightarrow (4\theta = \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/4 + k\pi/2),\ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)$, ovvero $z_1 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

per $k = 1$ otteniamo: $z_2 = \cos(\pi/4 + \pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + \pi/2) = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)$, ovvero $z_2 = -1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

(per altri valori di k si ottengono le stesse soluzioni)

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^4 = 1) \Rightarrow (\rho = 1) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (4\theta = \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/4 + k\pi/2),\ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)$, ovvero $z_1 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

per $k = 1$ otteniamo: $z_2 = \cos(\pi/4 + \pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + \pi/2) = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)$, ovvero $z_2 = -1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

per $k = 2$ otteniamo: $z_3 = \cos(\pi/4 + \pi) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + \pi) = \cos(5\pi/4) + \mathrm{i}\sin(5\pi/4)$, ovvero $z_3 = ?$

(per altri valori di k si ottengono le stesse soluzioni)

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^4 = 1) \Rightarrow (\rho = 1) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (4\theta = \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/4 + k\pi/2),\ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)$, ovvero $z_1 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

per $k = 1$ otteniamo: $z_2 = \cos(\pi/4 + \pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + \pi/2) = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)$, ovvero $z_2 = -1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

per $k = 2$ otteniamo: $z_3 = \cos(\pi/4 + \pi) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + \pi) = \cos(5\pi/4) + \mathrm{i}\sin(5\pi/4)$, ovvero $z_3 = -1/\sqrt{2} - \mathrm{i}/\sqrt{2}$

(per altri valori di k si ottengono le stesse soluzioni)

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^4 = 1) \Rightarrow (\rho = 1) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (4\theta = \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/4 + k\pi/2),\ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)$, ovvero $z_1 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

per $k = 1$ otteniamo: $z_2 = \cos(\pi/4 + \pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + \pi/2) = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)$, ovvero $z_2 = -1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

per $k = 2$ otteniamo: $z_3 = \cos(\pi/4 + \pi) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + \pi) = \cos(5\pi/4) + \mathrm{i}\sin(5\pi/4)$, ovvero $z_3 = -1/\sqrt{2} - \mathrm{i}/\sqrt{2}$

per $k = 3$ otteniamo: $z_4 = \cos(\pi/4 + 3\pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + 3\pi/2) = \cos(7\pi/4) + \mathrm{i}\sin(7\pi/4)$, ovvero $z_4 = ?$
(per altri valori di k si ottengono le stesse soluzioni)

SOLUZIONI di $z^4 = -1$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per -1:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad -1 = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi).$$

Ne segue:

$$z^4 = \rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)),$$

e quindi

$$\rho^4(\cos(4\theta) + \mathrm{i}\sin(4\theta)) = \cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^4 = 1) \Rightarrow (\rho = 1) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0\text{);}$$

$$(\star) \Rightarrow (4\theta = \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/4 + k\pi/2),\ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)$, ovvero $z_1 = 1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

per $k = 1$ otteniamo: $z_2 = \cos(\pi/4 + \pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + \pi/2) = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)$, ovvero $z_2 = -1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}$

per $k = 2$ otteniamo: $z_3 = \cos(\pi/4 + \pi) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + \pi) = \cos(5\pi/4) + \mathrm{i}\sin(5\pi/4)$, ovvero $z_3 = -1/\sqrt{2} - \mathrm{i}/\sqrt{2}$

per $k = 3$ otteniamo: $z_4 = \cos(\pi/4 + 3\pi/2) + \mathrm{i}\sin(\pi/4 + 3\pi/2) = \cos(7\pi/4) + \mathrm{i}\sin(7\pi/4)$, ovvero $z_4 = 1/\sqrt{2} - \mathrm{i}/\sqrt{2}$
(per altri valori di k si ottengono le stesse soluzioni)

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \text{?}.$$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

Ne segue:

$$z^3 = \boxed{?}$$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

Ne segue:

$$z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)),$$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

Ne segue:

$$z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)),$$

e quindi

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)). \qquad (\star)$$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

Ne segue:

$$z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)),$$

e quindi

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^3 = \sqrt{2}) \Rightarrow (\rho = \sqrt[6]{2}) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R},\, \rho > 0);$$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

Ne segue:

$$z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)),$$

e quindi

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^3 = \sqrt{2}) \Rightarrow (\rho = \sqrt[6]{2}) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (3\theta = \pi/4 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/12 + 2k\pi/3),\ k \in \mathbb{Z})$$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

Ne segue:

$$z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)),$$

e quindi

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^3 = \sqrt{2}) \Rightarrow (\rho = \sqrt[6]{2}) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (3\theta = \pi/4 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/12 + 2k\pi/3),\ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12) + \mathrm{i}\sin(\pi/12))$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

Ne segue:

$$z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)),$$

e quindi

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^3 = \sqrt{2}) \Rightarrow (\rho = \sqrt[6]{2}) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (3\theta = \pi/4 + 2k\pi), \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/12 + 2k\pi/3), \; k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12) + \mathrm{i}\sin(\pi/12))$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

Ne segue:

$$z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)),$$

e quindi

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^3 = \sqrt{2}) \Rightarrow (\rho = \sqrt[6]{2}) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (3\theta = \pi/4 + 2k\pi), \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/12 + 2k\pi/3), \; k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12) + \mathrm{i}\sin(\pi/12))$

per $k = 1$ otteniamo:
$z_2 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12 + 2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/12 + 2\pi/3)) = \sqrt[6]{2}(\cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)) = \sqrt[6]{2}(-1/\sqrt{2} + \mathrm{i}/\sqrt{2}))$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

Ne segue:

$$z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)),$$

e quindi

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^3 = \sqrt{2}) \Rightarrow (\rho = \sqrt[6]{2}) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (3\theta = \pi/4 + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/12 + 2k\pi/3), \ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12) + \mathrm{i}\sin(\pi/12))$

per $k = 1$ otteniamo:
$z_2 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12 + 2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/12 + 2\pi/3)) = \sqrt[6]{2}(\cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)) = \sqrt[6]{2}(-1/\sqrt{2} + \mathrm{i}/\sqrt{2}))$

SOLUZIONI di $z^3 = 1 + \mathrm{i}$

Usando la notazione trigonometrica, sia per la variabile z che per $1 + i$ otteniamo:

$$z = \rho(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)), \quad 1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)).$$

Ne segue:

$$z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + \mathrm{i}\sin(3\theta)),$$

e quindi

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4)). \qquad (\star)$$

$$(\star) \Rightarrow (\rho^3 = \sqrt{2}) \Rightarrow (\rho = \sqrt[6]{2}) \text{ (sappiamo che } \rho \in \mathbb{R}, \rho > 0);$$

$$(\star) \Rightarrow (3\theta = \pi/4 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\theta = \pi/12 + 2k\pi/3),\ k \in \mathbb{Z})$$

per $k = 0$ otteniamo: $z_1 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12) + \mathrm{i}\sin(\pi/12))$

per $k = 1$ otteniamo:
$z_2 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12 + 2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/12 + 2\pi/3)) = \sqrt[6]{2}(\cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4)) = \sqrt[6]{2}(-1/\sqrt{2} + \mathrm{i}/\sqrt{2}))$

per $k = 2$ otteniamo: $z_3 = \sqrt[6]{2}(\cos(\pi/12 + 4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/12 + 4\pi/3)) = \sqrt[6]{2}(\cos(17\pi/12) + \mathrm{i}\sin(17\pi/12))$

Trovare tutte le soluzioni complesse delle seguenti equazioni:

ESERCITAZIONE 1

$$z^3 = 1$$ RISPOSTA

$$z^3 = -1$$ RISPOSTA

$$z^2 = \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z^2 = -\mathrm{i}$$ RISPOSTA

AVANTI

Trovare tutte le soluzioni complesse delle seguenti equazioni:

ESERCITAZIONE 1

$$z^3 = 1$$ RISPOSTA

$$z^3 = -1$$ RISPOSTA

$$z^2 = \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z^2 = -\mathrm{i}$$ RISPOSTA

$z_1 = 1$, $z_2 = \cos(2\pi/3) + \mathrm{i}\sin(2\pi/3) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$,
$z_3 = \cos(4\pi/3) + \mathrm{i}\sin(4\pi/3) = -1/2 - i\sqrt{3}/2$

AVANTI

Trovare tutte le soluzioni complesse delle seguenti equazioni:

ESERCITAZIONE 1

$$z^3 = 1 \quad \text{RISPOSTA}$$
$$z^3 = -1 \quad \text{RISPOSTA}$$
$$z^2 = \mathrm{i} \quad \text{RISPOSTA}$$
$$z^2 = -\mathrm{i} \quad \text{RISPOSTA}$$

$z_1 = \cos(\pi/3) + \mathrm{i}\sin(\pi/3) = 1/2 + i\sqrt{3}/2$, $z_2 = -1$,
$z_3 = \cos(5\pi/3) + \mathrm{i}\sin(5\pi/3) = 1/2 - i\sqrt{3}/2$

AVANTI

Trovare tutte le soluzioni complesse delle seguenti equazioni:

ESERCITAZIONE 1

$z^3 = 1$ RISPOSTA

$z^3 = -1$ RISPOSTA

$z^2 = \mathrm{i}$ RISPOSTA

$z^2 = -\mathrm{i}$ RISPOSTA

$z_1 = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2} + \mathrm{i}/\sqrt{2},$
$z_2 = \cos(5\pi/4) + \mathrm{i}\sin(5\pi/4) = -1/\sqrt{2} - \mathrm{i}/\sqrt{2}$

AVANTI

Trovare tutte le soluzioni complesse delle seguenti equazioni:

ESERCITAZIONE 1

$$z^3 = 1$$ RISPOSTA

$$z^3 = -1$$ RISPOSTA

$$z^2 = \mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z^2 = -\mathrm{i}$$ RISPOSTA

$$z_1 = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i}\sin(3\pi/4) = -1/\sqrt{2} + \mathrm{i}/\sqrt{2},$$
$$z_2 = \cos(7\pi/4) + \mathrm{i}\sin(7\pi/4) = 1/\sqrt{2} - \mathrm{i}/\sqrt{2}$$

AVANTI