TEOREMA DI DE L'HOPITAL

# 5. Il teorema di de l'Hôpital

In questo paragrafo vogliamo esplorare il seguente:

**»» PROBLEMA**

Esiste qualche legame tra il limite per $x \to x_0$ del rapporto $\frac{f(x)}{g(x)}$ tra due funzioni $f$ e $g$ e il limite per $x \to x_0$ del rapporto delle loro derivate $\frac{f'(x)}{g'(x)}$?

Consideriamo il caso particolare di due funzioni $f$ e $g$, tali che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, derivabili e con derivata continua in $x_0 \in \mathbb{R}$. In questa situazione (vedi **fig. 6.23**), i grafici delle due funzioni $f$ e $g$, in prossimità di $x_0$, sono ben approssimati dalle rette tangenti a $f$ e $g$ in $x_0$ che hanno rispettivamente equazioni:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) \qquad \text{e} \qquad y = g'(x_0)(x - x_0)$$

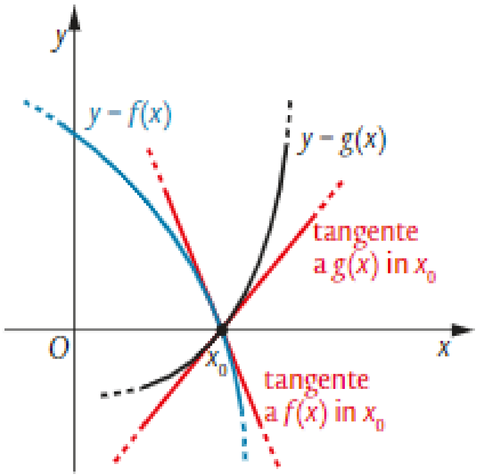


**Figura 6.23**

Pertanto è ragionevole ritenere che:

$$\underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}}_{\substack{\text{si presenta}\\ \text{nella forma}\\ \text{indeterminata } 0/0}} = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0)}}_{\substack{\text{approssimando le due}\\ \text{funzioni con le rispettive}\\ \text{rette tangenti}}} = \underbrace{\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}_{\substack{\text{per la supposta continuità}\\ \text{delle derivate in } x_0}}$$

Queste osservazioni intuitive portano a congetturare che sotto opportune condizioni il limite del rapporto di due funzioni e il limite del rapporto delle loro derivate siano uguali e a chiedersi se tale legame possa essere utile per risolvere forme indeterminate. La risposta è affermativa ed è espressa nel teorema seguente.

**Teorema di de l'Hôpital** — **TEOREMA 6.11**

Siano $f$ e $g$ due funzioni derivabili in un intorno $I$ di $x_0 \in \mathbf{R}$, eccetto al più $x_0$, e siano verificate le seguenti ipotesi:

**a.** $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ oppure $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

**b.** $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$, con $x \neq x_0$

**c.** esiste $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora esiste anche $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e si ha:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Dalla storia**

Il teorema di de l'Hôpital deve il suo nome al matematico francese Guillaime de l'Hôpital (1661-1704), che lo pubblicò nel 1696 nel trattato *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Il risultato fu in realtà scoperto nel 1694 dal suo maestro, il matematico svizzero **Johann Bernoulli** (1667-1748).

È importante fare alcune osservazioni.

- L'ipotesi **b.** del teorema di de l'Hôpital è normalmente soddisfatta in tutti i casi di cui ci occuperemo. Le ipotesi cui bisogna prestare particolare attenzione sono la **a.** e la **c.**:
  - l'ipotesi **a.** richiede che il limite si presenti nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$;
  - l'ipotesi **c.** impone che nulla si possa dire del $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ nel caso in cui non esista il limite del rapporto delle derivate.
- Il teorema continua a valere anche per i limiti destri e sinistri ($x \to x_0^-$ o $x \to x_0^+$) e per $x \to \pm\infty$.

## Alcune applicazioni del teorema di de l'Hôpital

Grazie al teorema di de l'Hôpital siamo in grado di giustificare alcuni risultati che avevamo anticipato in precedenza.
Per esempio, in base alle «gerarchie sugli infiniti» che abbiamo presentato nell'Unità 2, sappiamo che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=+\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$$

Possiamo ora giustificare questi risultati. Abbiamo infatti:

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}}_{\text{teorema di de l'Hôpital}}\overbrace{=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}}^{\text{teorema di de l'Hôpital}}=+\infty$$

Il teorema di de l'Hôpital è stato applicato 2 volte

$$\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}}_{\text{teorema di de l'Hôpital}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

Il teorema di de l'Hôpital è stato applicato 1 volta

Ragionando in modo del tutto analogo a questi esempi, mediante un'applicazione ripetuta del teorema di de l'Hôpital si può dimostrare che:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}=+\infty \quad \forall a>0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0 \quad \forall a>0$$