Sistemi Lineari e Teorema di Rouché Capelli

(1) Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & -3 \end{cases}$$

Sia A la matrice dei coefficienti del sistema.

(a) Applicando il Teorema di Rouché-Capelli, verificare se il sistema ammette soluzioni e, in caso positivo, calcolare la dimensione dell'insieme delle soluzioni.

(b) Utilizzando il metodo di Gauss determinarne l'insieme delle soluzioni.

(c) Determinare la giacitura dell'insieme delle soluzioni, ovvero il sottospazio $Ker(A)$.

(d) Determinare la dimensione e una base della giacitura.

(e) Determinare la dimensione del sottospazio $Range(A)$.

(f) Il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ha sempre soluzione, per ogni vettore $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$?

(2) Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x & - & 2y & + & z & = & -3 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & y & + & z/2 & = & -3/2 \end{cases}$$

(a) Determinare se il sistema ammette soluzioni utilizzando il Teorema di Rouché Capelli.

(b) Trovare le soluzioni del sistema omogeneo associato.

(c) Se il sistema ammette soluzione, stabilire se si tratta di tutto lo spazio, di un piano, di una retta oppure di un punto.

(d) Detta A la matrice dei coefficienti del sistema, determinare se A è invertibile.

(3) Considerare i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Usando il Teorema di Rouche'-Capelli, dimostrare che entrambi i sistemi hanno come soluzione una retta. Trovare l'equazione parametrica della retta r soluzione del primo sistema e della retta s soluzione del secondo sistema. Determinare se r, s sono parallele, se si intersecano o se sono sghembe (due rette di $\mathbb{R}^3$ si dicono sghembe se non sono parallele e non si intersecano).

(4) Considerare il seguente sistema. $A\vec{x} = \vec{b}$:

$$\begin{cases} -x + 2y + z - w = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se il sistema ammette soluzioni utilizzando il Teorema di Rouché Capelli.

(b) Determinare le soluzioni del sistema omogeneo associato, $A\vec{x} = \vec{0}$, una sua base e la dimensione dello spazio delle soluzioni.

(c) Trovare una soluzione particolare v_0 del sistema iniziale ed esprimere le soluzioni $SOL(A\vec{x} = \vec{b})$ del sistema utilizzando le soluzioni del sistema omogeneo associato e la soluzione particolare, ovvero

$$SOL(A\vec{x} = \vec{b}) = SOL(A\vec{x} = \vec{0}) + v_0$$

(5) Considerare il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

e la sua matrice dei coefficienti A.

(a) Determinare la dimensione del $Ker(A)$ e la dimensione di $Range(A)$.

(b) Dimostrare che $Ker(A)$ è una retta e determinarne l'equazione parametrica.

(c) Dimostrare che $Range(A) = \mathbb{R}^2$.

(d) Dimostrare che tutti i sistemi del tipo

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

al variare della colonna dei termini noti $\vec{b}$, hanno sempre soluzione.