ESERCIZI SU ORDINI

1. Trovare esplicitamente esempi di sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$ tali che, rispetto all'ordinamento usuale $\leq$:
   (a) non ammettono né minimo né massimo;
   (b) non ammettono minimo, ma hanno massimo;
   (c) ammettono minimo e massimo;
   (d) ammettono minimo m e massimo M tali che $m = M$.

2. Sia $(A, \preceq)$ l'ordine parziale dove $A = \{2^k : k \in \mathbb{N}\}$ e $\preceq$ è la divisibilità:
   $$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ divide } b.$$
   (a) $(A, \preceq)$ è un ordine totale?
   (b) Fissato $k \in \mathbb{N}$, quali sono gli elementi a di A tali che $2^k \preceq a$?

3. Sia $(A, \preceq)$ l'ordine parziale dove $A = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ e $\preceq$ è la divisibilità:
   $$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ divide } b.$$
   (a) $(A, \preceq)$ è un ordine totale?
   (b) Considera l'insieme $X = \{4, 6, 8, 24\}$. Questo insieme ha un minimo nell'ordine $\preceq$? Un massimo?
   (c) Trova l'insieme dei minoranti di X in $(A, \preceq)$.

4. Sia $\preceq$ la relazione d'ordine parziale su $\{0,1\} \times \{0,1\}$ definita da
   $$(n, m) \preceq (n', m') \Leftrightarrow [n < n'] \vee [(n = n') \wedge (m \leq m')]$$
   (a) Questo ordine è totale?
   (b) Disegna il diagramma di Hasse di tale ordine.
   (c) Trova gli elementi massimali e minimali di questo ordine.
   (d) Considera l'insieme $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e trova l'insieme dei minoranti di X in questo ordine. L'insieme X ha un minimo?

5. Sia $\preceq$ la relazione d'ordine parziale su su $\{0,1\} \times \{0,1\}$ definita da
   $$(n, m) \preceq (n', m') \Leftrightarrow (n \leq n') \wedge (m \leq m')]$$
   (a) $\preceq$ è un ordine totale?
   (b) Disegna il diagramma di Hasse di tale ordine.
   (c) Trova gli elementi massimali e minimali di questo ordine.
   (d) Considera l'insieme $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e trova l'insieme dei minoranti di X in questo ordine. L'insieme X ha un minimo?

6. Sia $\preceq$ la relazione d'ordine parziale su su $\{0,1\} \times \{0,1\}$ definita da
   $$(n, m) \preceq (n', m') \Leftrightarrow (n \leq n') \wedge (m \geq m')]$$
   (a) $\preceq$ è un ordine totale?
   (b) Disegna il diagramma di Hasse di tale ordine.
   (c) Trova gli elementi massimali e minimali di questo ordine.
   (d) Considera l'insieme $X = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e trova l'insieme dei minoranti di X in questo ordine. L'insieme X ha un minimo?

7. Sia S la relazione su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da

$$(n, m)S(n', m') \Leftrightarrow n \leq n' \wedge m \leq m')]$$

(a) Dimostra che S è un ordine ma che non è un ordine totale

(b) Considera l'insieme $X = \{(1, 0)\}$ e trova l'insieme dei minoranti di X rispetto all'ordine S.

(c) Considera l'insieme $Y = \{(1, 2), (2, 1)\}$ e stabilisci se tale insieme ha un minimo nell'ordine S.

(d) Trova l'insieme dei minoranti di $Y = \{(1, 2), (2, 1)\}$ e, se esiste, l'estremo inferiore $Inf(Y)$ di Y in S.

8. Sia R la relazione su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da

$$(n, m)R(n', m') \Leftrightarrow [n < n'] \vee [n = n' \wedge m \leq m')]$$

(a) Dimostra che R è un ordine ed è totale totale.

(b) Considera l'insieme $X = \{(1, 0)\}$ e trova l'insieme dei minoranti di X rispetto all'ordine R.

(c) Considera l'insieme $Y = \{(1, 2), (2, 1)\}$ e stabilisci se tale insieme ha un minimo nell'ordine R.

(d) Trova l'insieme dei minoranti di $Y = \{(1, 2), (2, 1)\}$ nell'ordine R.

9. Sia $(\mathbb{N}, \preceq)$ l'ordine parziale sui naturali definito da:

$$a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad a = b \text{ oppure } \ 2a \text{ divide } \ b.$$

(a) Provare che si tratta di una relazione d'ordine. È un ordine totale?

(b) L 'insieme $X = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme totalmente ordinato rispetto a R, ovvero se $x, x' \in X$ allora xRx' oppure $x'Rx$?

(c) Provare che ogni numero dispari è un elemento minimale nell'ordine R. Un numero dispari è anche un elemento massimale nell'ordine R?