

ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLO SCRITTO SOLUZIONI

PRIMA PARTE

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Se A, B sono insiemi e $(A \times B) \subseteq (B \times A)$ allora $A = B$

V	F
---	---

Falso: se $A = \emptyset$ e $B = \{0\}$ allora $A \times B = \emptyset \subseteq B \times A = \emptyset$, ma $A \neq B$;
(nota bene, se $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ allora l'affermazione diventa vera).

2. Se A, B sono insiemi allora vale sempre $(A \setminus B) \cup B = A$.

V	F
---	---

Falso. Ad esempio se $A = \emptyset$ e $B = \{0\}$ allora $(A \setminus B) \cup B = B = \{0\} \neq A$.

3. Se $A = \{(-1, 1)\}$ allora $A \subseteq P(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$.

V	F
---	---

Falso. La coppia $(-1, 1)$ appartiene al prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, e dunque il singoletto $\{(-1, 1)\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Per definizione di insieme delle parti, questo significa che $\{(-1, 1)\}$ è un elemento di $P(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$, non un suo sottoinsieme.

4. La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (-n, n)$ è suriettiva.

V	F
---	---

Falso. Infatti ad esempio $(1, 1)$ non appartiene all'immagine di f .

5. La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (-n, n)$ è iniettiva.

V	F
---	---

Vero. Se $n_1 \neq n_2$ allora $(-n_1, n_1) \neq (-n_2, n_2)$, in quanto la seconda componente è diversa nelle due coppie (ovviamente anche la prima componente lo è).

6. La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = n - 5$ è suriettiva.

V	F
---	---

Falso. Non esiste alcun n per cui $f(n) = -6$. Infatti risolvendo l'equazione $n - 5 = -6$ si ottiene $n = -1$, che non appartiene al dominio della funzione.

7. La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow P(\mathbb{N})$ definita da

$$f(n) = \{n\}$$

è iniettiva.

V	F
---	---

Vero. Se $n_1 \neq n_2$ allora anche $\{n_1\} \neq \{n_2\}$.

8. Se una funzione ha un'inversa, allora è iniettiva.

V	F
---	---

Vero. Una funzione invertibile è sempre iniettiva e suriettiva.

9. Se $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ è definita da $f(n) = -n^2$ e $Y = \{0, -1, -2\}$ allora $1 \in f^{-1}(Y)$.

V	F
---	---

Vero. Infatti $f(1) = -1 \in Y$.

10. Siano $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definite da: $f(x) = -x^2$, $g(x) = -x + 1$.

Se $h = g \circ f$ allora $h(2) = -1$.

V	F
---	---

Falso. $h(2) = g(f(2)) = g(-2^2) = g(-4) = 5$.

11. La funzione $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = z^2$ è invertibile.

V **F**

Falso. La funzione non è invertibile. perché non è iniettiva:

ad esempio $f(1) = f(-1) = 1$. Tra l'altro non è nemmeno suriettiva: ad esempio non esiste alcuno $z \in \mathbb{Z}$ tale che $z^2 = 2$.

12. La relazione binaria R definita sugli interi da

$$xRy \Leftrightarrow x + y = 1$$

è transitiva.

V **F**

Falso. Come controesempio, $1 + 0 = 1$ e $0 + 1 = 1$, dunque $1R0$ e $0R1$, ma $1 + 1 = 2$ e dunque $\neg 1R1$.

13. La relazione binaria R definita sui sottoinsiemi dei numeri naturali da

$$(X, Y) \in R \Leftrightarrow X \subseteq Y$$

è simmetrica.

V **F**

Falso. Ad esempio $\emptyset \subseteq \{0\}$ ma $\{0\} \not\subseteq \emptyset$, quindi $\emptyset R\{0\}$ ma $\neg\{0\}R\emptyset$

14. Il resto della divisione di -7 per -12 è -5 .

V **F**

Falso. Il resto di una divisione è sempre maggiore o uguale a 0.

15. $-11 \equiv_8 -3$

V **F**

Vero. Infatti $-11 - (-3) = -11 + 3 = -8$ è divisibile per 8.

16. 4 è l'opposto di 5 modulo 9.

V **F**

Vero. Infatti $5 + 4 = 9 \equiv_9 0$.

17. 4 è l'inverso moltiplicativo di 6 modulo 25.

V **F**

Falso. Infatti $4 \times 6 = 24 \equiv_{25} -1$.

18. $(14)^{75} + 39 \times 30^{1724} - 37^2 \equiv_{13} 8$

V **F**

Falso. $14 \equiv_{13} 1$, $39 \equiv_{13} 0$ e $37 \equiv_{13} -2$, dunque sostituendo si ha

$$(14)^{75} + 39 \times 30^{1724} - 37^2 \equiv_{13} 1^{75} + 0 \times 30^{1724} - (-2)^2 \equiv_{13} 1 + 0 - 4 = -3 \equiv_{13} 10.$$

19. Sia \sim una relazione d'equivalenza su un insieme non vuoto A , a, b, c elementi di A e $[a]$ la classe di equivalenza dell'elemento a . Quali delle seguenti affermazioni sono vere, qualsiasi sia A e \sim ?

- (a) se $a \sim b$ e $c \sim a$ allora $b \sim c$;

V **F**

Vero. Da $c \sim a$ e $a \sim b$ segue $c \sim b$ per la transitività, e quindi $b \sim c$ per la simmetria.

- (b) se $b \notin [a]$ allora $b \not\sim a$;

V **F**

Vero. Infatti per definizione $b \in [a] \Leftrightarrow b \sim a$, dunque $b \notin [a] \Leftrightarrow b \not\sim a$

- (c) se $b \in [a]$ allora $a = b$;

V **F**

Falso. Basta considerare ad esempio la classe di equivalenza modulo 2: $4 \in [2]$ ma $4 \neq 2$.

- (d) se $a = b$ allora $b \in [a]$.

V **F**

Vero. Infatti per la riflessività $a \sim a$ e dunque $a \in [a]$ per definizione di classe di equivalenza.

ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLO SCRITTO

SECONDA PARTE

1 Funzioni

1. Sia \mathbb{N}^* l'insieme dei numeri naturali non nulli e $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ definita da $f(n, m) = n^m$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

f non è iniettiva: $f(2, 4) = f(4, 2) = 16$. Invece è suriettiva: dato $a \in \mathbb{N}^*$, $a = f(a, 1)$. Non essendo iniettiva, non è biunivoca.

2. Sia \mathbb{N}^* l'insieme dei numeri naturali non nulli e $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (0, n)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

f è iniettiva: infatti se $n_1 \neq n_2$ allora le coppie $(0, n_1)$ e $(0, n_2)$ sono diverse, in quanto la seconda componente è diversa. f non è suriettiva: la coppia $(1, 1)$ non appartiene all'immagine di f , dato che la prima componente è diversa da 0. Non essendo f suriettiva, non è biunivoca.

3. Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(x) = x^2 + 1$.

- (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5\})$.

$$f(5) = 5^2 + 1 = 26. \quad f^{-1}(5) = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 = 5\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4\} = \{-2, 2\}.$$
$$f^{-1}(\{1, 5\}) = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 + 1 = 1 \vee x^2 + 1 = 5\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 0 \vee x^2 = 4\} = \{0, -2, 2\}.$$

- (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

Non è iniettiva: $f(2) = f(-2)$. Non è suriettiva: $3 \notin \text{Im}(f)$.

2 Relazioni

4. Sia $A = \{0, 1, \dots, 9\}$ ed R la relazione definita su $A \times A$ da

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad a + b \leq 9$$

- (a) Stabilire se R è riflessiva.

No: $5 + 5 = 10 > 9$, dunque $\neg 5R5$.

- (b) Stabilire se R è simmetrica.

Sì: se $a + b \leq 9$ allora anche $b + a \leq 9$.

- (c) Stabilire se R è transitiva.

No: ad esempio $6 + 1 \leq 9$ e $1 + 7 \leq 9$, quindi $6R1$ e $1R6$ ma $6 + 7 > 9$, quindi non è vero che $6R7$.

5. Sia $A = \{0, 1, \dots, 9\}$ ed E la relazione d'equivalenza definita su $A \times A$ da

$$(a, b)E(a', b') \quad \Leftrightarrow \quad a + b = a' + b'$$

- (a) I due elementi $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono in relazione?
Sì: $1+0=0+1=1$.
- (b) La coppia $(1, 1)$ appartiene alla classe d'equivalenza della coppia $(2, 2)$?
No: $1+1=2$, mentre $2+2=4 \neq 2$, dunque $(1, 1)$ non è in relazione con $(2, 2)$.
- (c) Descrivi gli elementi che appartengono alla classe d'equivalenza di $(0, 0)$ e quelli che appartengono alla classe d'equivalenza di $(1, 2)$.
 $[(0, 0)] = \{(a, b) \in A \times A : a + b = 0\} = \{(0, 0)\}$. $[(1, 2)] = \{(a, b) \in A \times A : a + b = 3\} = \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$.
- (d) Quante sono le classi d'equivalenza di E su $A \times A$?
Sono 19, una per ogni possibile risultato della somma $a+b$ al variare delle coppie $(a, b) \in A \times A$: questa può andare da $0 = 0 + 0$ a $18 = 9 + 9$.

3 Induzione

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Passo base: per $n = 1$, il membro di sinistra è $1 \cdot 2 = 2$, mentre quello di destra è $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$. Passo induttivo: supponiamo che l'asserto sia vero per n e dimostriamo che vale per $n+1$. Sfruttando l'ipotesi induttiva si ha

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) + (n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)}{3} = \frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3}, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Passo base: per $n = 1$ il membro di sinistra è $1 \cdot 1! = 1$ e quello di destra è $2! - 1 = 2 - 1 = 1$. Passo induttivo: supponiamo valga per n . Per $n+1$ si ha

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! + (n+1) \cdot (n+1)! &= (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = \\ &= (n+1+1) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1. \end{aligned}$$

8. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $7^n - 1$ è divisibile per 6.

Per $n = 1$, $7^1 - 1 = 7 - 1 = 6$ è divisibile per 6. Supponendo che valga per n ,

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 6 \cdot 7^n + 7^n - 1$$

è divisibile per 6. Infatti $6 \cdot 7^n$ è chiaramente un multiplo di 6, e $7^n - 1$ lo è per ipotesi induttiva: la loro somma è ancora un multiplo di 6.

9. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ è divisibile per 13.

Se $n = 1$, $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 4^3 + 3^3 = 91 = 7 \cdot 13$. Supponendo che l'asserto sia vero per n , per $n + 1$ abbiamo

$$\begin{aligned} 4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2} &= 4^{2+2n+1} + 3^{1+n+2} = \\ &= 16 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} = 13 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot (4^{2n+1} + 3^{n+2}), \end{aligned}$$

che è divisibile per 13 in quanto somma di multipli di 13.

4 Combinatoria

10. Sia A un insieme finito con 10 elementi.

- (a) Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A \times A$?

$$10 \times 10 = 100.$$

- (b) Quanti sono i sottoinsiemi di A ?

$$2^{10}.$$

- (c) Quanti sono gli elementi (a, b, c) di $A \times A \times A$ con $a \neq b, b \neq c, c \neq a$?

Dobbiamo selezionare 3 elementi distinti tra 10, tenendo conto dell'ordine, quindi le possibilità sono $D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8$.

11. Sia A un insieme finito con 15 elementi e $a, b \in A$, con $a \neq b$.

- (a) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3?

$$\binom{15}{3}$$

- (b) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a ?

Dobbiamo scegliere tre elementi, ma per uno di questi la scelta è obbligata, a . Rimangono quindi da scegliere 2 elementi tra i restanti 14: le possibilità sono dunque $\binom{14}{2}$.

- (c) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a ma non contengono b ?

Per il punto precedente i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a sono $\binom{14}{2}$. A questi dobbiamo togliere quelli che contengono b : dobbiamo cioè contare i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono sia a che b . Questi sono 13, dato che una volta scelti i primi due elementi a e b rimangono 13 elementi in A tra i quali scegliere il terzo. Avremo quindi $\binom{14}{2} - 13$ sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a ma non contengono b .

Un altro modo per ottenere la soluzione è il seguente: i sottoinsiemi cercati devono contenere a e altri due elementi diversi da a e da b . Questi altri due elementi si possono scegliere in $\binom{13}{2}$ modi (vanno scelti in A , che ha 15 elementi, ma non devono essere uguali né ad a né a b , quindi rimangono 13 elementi).

Notare che le due soluzioni danno lo stesso risultato: infatti è facile verificare che $\binom{14}{2} - 13 = \binom{13}{2}$.

- (d) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono sia a che b ?

13 (basta scegliere il terzo elemento, che deve essere diverso da a e da b).

- (e) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a oppure b ?
 I sottoinsiemi di cardinalità 3 che contengono a sono $\binom{14}{2}$, così come quelli che contengono b .
 Quelli che contengono sia a che b sono 13, quindi in totale avremo

$$\binom{14}{2} + \binom{14}{2} - 13$$

Un altro modo per ottenere la soluzione è usare il principio del complementare: per ottenere gli insiemi di tre elementi che contengono a oppure b è sufficiente contare tutti i sottoinsiemi di tre elementi, che sono $\binom{15}{3}$ e sottrarre i sottoinsiemi di tre elementi che non contengono né a né b ; poiché questi ultimi sono $\binom{13}{3}$ otteniamo come risultato $\binom{15}{3} - \binom{13}{3}$. Notare che le due soluzioni danno lo stesso risultato: infatti è facile verificare che $\binom{15}{3} - \binom{13}{3} = \binom{14}{2} + \binom{14}{2} - 13$.

12. Le targhe automobilistiche di uno stato sono composte da 11 caratteri, dove un carattere è una delle 26 lettere dell'alfabeto inglese.
- (a) Quante macchine possono essere immatricolate?
 Abbiamo 26 scelte per ognuno degli 11 caratteri, e questi possono essere anche ripetuti: le targhe possibili sono 26^{11} .
- (b) Quante sono le targhe che contengono esattamente quattro a ?
 Abbiamo $\binom{11}{4}$ scelte per posizionare le quattro a . Fatto questo, rimangono a disposizione 25 lettere per i restanti 7 caratteri della targa, quindi abbiamo 25^7 scelte. In tutto ci sono $\binom{11}{4} \cdot 25^7$ targhe che contengono esattamente quattro a .
- (c) Quante sono le targhe che contengono esattamente quattro a consecutive?
 Ci sono 8 possibili scelte sul posizionamento della prima delle quattro a consecutive (non può essere piazzata dopo l'ottavo carattere della targa). Come prima rimangono 25^7 scelte per gli altri caratteri, quindi in tutto abbiamo $8 \cdot 25^7$ possibilità.

5 Congruenze

13. Considerare la relazione d'equivalenza modulo 25.
- (a) Determinare l'opposto additivo di 3 modulo 25.
 $3 + 22 = 25 \equiv_{25} 0$, dunque 22 è l'opposto di 3 modulo 25.
- (b) Determinare se 3 e 5 hanno un inverso moltiplicativo modulo 25 e in caso affermativo determinare l'inverso.
 3 e 25 sono primi tra loro, dunque l'inverso esiste. Osserviamo che $3 \cdot (-8) = -24 \equiv_{25} 1$. Siccome $-8 \equiv_{25} 17$, 17 è l'inverso cercato. Invece il massimo comun divisore tra 5 e 25 è 5, dunque non esiste l'inverso di 5 modulo 25.
- (c) Trovare l'inverso moltiplicativo di 4 modulo 25.
 $4 \cdot (-6) = -24 \equiv_{25} 1$ e $-6 \equiv_{25} 19$, dunque 19 è l'inverso di 4 modulo 25.
14. Determinare un numero n tale che $0 \leq n < 11$ e tale che $n \equiv_{11} 13^2 - 10^4 + 22^{100}$.
 Si ha $13 \equiv_{11} 2$, $10 \equiv_{11} -1$ e $22 \equiv_{11} 0$, dunque sostituendo si ottiene

$$13^2 - 10^4 + 22^{100} \equiv_{11} 2^2 - (-1)^4 + 0^{100} = 4 + 1 = 5.$$

Quindi $n = 5$.

15. Stabilire l'ultima cifra decimale del numero 27^{13} .

L'ultima cifra decimale di un numero coincide con il suo resto nella divisione per 10, quindi basta calcolare 27^{13} modulo 10. Si ha $27 \equiv_{10} 7$, dunque

$$27^{13} \equiv_{10} 7^{13} = (7^2)^6 \cdot 7 = (49)^6 \cdot 7 \equiv_{10} (-1)^6 \cdot 7 \equiv_{10} 1 \cdot 7 = 7.$$

L'ultima cifra decimale è quindi 7.