ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLO SCRITTO
SOLUZIONI

PRIMA PARTE

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Se A, B sono insiemi e $(A \times B) \subseteq (B \times A)$ allora $A = B$ **V** | **F**

   Falso: se $A = \emptyset$ e $B = \{0\}$ allora $A \times B = \emptyset \subseteq B \times A = \emptyset$, ma $A \neq B$;
   (nota bene, se $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ allora l'affermazione diventa vera).

2. Se A, B sono insiemi allora vale sempre $(A \setminus B) \cup B = A$. **V** | **F**

   Falso. Ad esempio se $A = \emptyset$ e $B = \{0\}$ allora $(A \setminus B) \cup B = B = \{0\} \neq A$.

3. Se $A = \{(-1, 1)\}$ allora $A \subseteq P(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$. **V** | **F**

   Falso. La coppia $(-1, 1)$ appartiene al prodotto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, e dunque il singoletto $\{(-1, 1)\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Per definizione di insieme delle parti, questo significa che $\{(-1, 1)\}$ è un elemento di $P(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$, non un suo sottoinsieme.

4. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (-n, n)$ è suriettiva. **V** | **F**

   Falso. Infatti ad esempio $(1, 1)$ non appartiene all'immagine di f.

5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (-n, n)$ è iniettiva. **V** | **F**

   Vero. Se $n_1 \neq n_2$ allora $(-n_1, n_1) \neq (-n_2, n_2)$, in quanto la seconda componente è diversa nelle due coppie (ovviamente anche la prima componente lo è).

6. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = n - 5$ è suriettiva. **V** | **F**

   Falso. Non esiste alcun n per cui $f(n) = -6$. Infatti risolvendo l'equazione $n - 5 = -6$ si ottiene $n = -1$, che non appartiene al dominio della funzione.

7. La funzione $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ definita da
   $$f(n) = \{n\}$$
   è iniettiva. **V** | **F**

   Vero. Se $n_1 \neq n_2$ allora anche $\{n_1\} \neq \{n_2\}$.

8. Se una funzione ha un'inversa, allora è iniettiva. **V** | **F**

   Vero. Una funzione invertibile è sempre iniettiva e suriettiva.

9. Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ è definita da $f(n) = -n^2$ e $Y = \{0, -1, -2\}$ allora $1 \in f^{-1}(Y)$. **V** | **F**

   Vero. Infatti $f(1) = -1 \in Y$.

10. Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite da: $f(x) = -x^2, \qquad g(x) = -x + 1.$
    Se $h = g \circ f$ allora $h(2) = -1$. **V** | **F**

    Falso. $h(2) = g(f(2)) = g(-2^2) = g(-4) = 5.$

11. La funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = z^2$ è invertibile. **V** | **F**

    Falso. La funzione non è invertibile. perché non è iniettiva:
    ad esempio $f(1) = f(-1) = 1$. Tra l'altro non è nemmeno suriettiva: ad esempio non esiste alcuno $z \in \mathbb{Z}$ tale che $z^2 = 2$.

12. La relazione binaria R definita sugli interi da

    $$xRy \quad \Leftrightarrow x + y = 1$$

    è transitiva. **V** | **F**

    Falso. Come controesempio, $1 + 0 = 1$ e $0 + 1 = 1$, dunque $1R0$ e $0R1$, ma
    $1 + 1 = 2$ e dunque $\neg 1R1$.

13. La relazione binaria R definita sui sottoinsiemi dei numeri naturali da

    $$(X, Y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$

    è simmetrica. **V** | **F**

    Falso. Ad esempio $\emptyset \subseteq \{0\}$ ma $\{0\} \not\subseteq \emptyset$, quindi $\emptyset\ R\{0\}$ ma $\neg\{0\}R\emptyset$

14. Il resto della divisione di -7 per -12 è -5. **V** | **F**

    Falso. Il resto di una divisione è sempre maggiore o uguale a 0.

15. $-11 \equiv_8 -3$ **V** | **F**

    Vero. Infatti $-11 - (-3) = -11 + 3 = -8$ è divisibile per 8.

16. 4 è l'opposto di 5 modulo 9. **V** | **F**

    Vero. Infatti $5 + 4 = 9 \equiv_9 0$.

17. 4 è l'inverso moltiplicativo di 6 modulo 25. **V** | **F**

    Falso. Infatti $4 \times 6 = 24 \equiv_{25} -1$.

18. $(14)^{75} + 39 \times 30^{1724} - 37^2 \equiv_{13} 8$ **V** | **F**

    Falso. $14 \equiv_{13} 1$, $39 \equiv_{13} 0$ e $37 \equiv_{13} -2$, dunque sostituendo si ha

    $$(14)^{75} + 39 \times 30^{1724} - 37^2 \equiv_{13} 1^{75} + 0 \times 30^{1724} - (-2)^2 \equiv_{13} 1 + 0 - 4 = -3 \equiv_{13} 10.$$

19. Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su un insieme non vuoto A, a, b, c elementi di A e $[a]$ la classe di equivalenza dell'elemento a. Quali delle seguenti affermazioni sono vere, qualsiasi sia A e $\sim$?

    (a) se $a \sim b$ e $c \sim a$ allora $b \sim c$; **V** | **F**
    Vero. Da $c \sim a$ e $a \sim b$ segue $c \sim b$ per la transitività, e quindi $b \sim c$ per la simmetria.

    (b) se $b \notin [a]$ allora $b \not\sim a$; **V** | **F**
    Vero. Infatti per definizione $b \in [a] \Leftrightarrow b \sim a$, dunque $b \notin [a] \Leftrightarrow b \not\sim a$

    (c) se $b \in [a]$ allora $a = b$; **V** | **F**
    Falso. Basta considerare ad esempio la classe di equivalenza modulo 2: $4 \in [2]$ ma $4 \neq 2$.

    (d) se $a = b$ allora $b \in [a]$. **V** | **F**
    Vero. Infatti per la riflessività $a \sim a$ e dunque $a \in [a]$ per definizione di classe di equivalenza.

ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLO SCRITTO

SECONDA PARTE

1 Funzioni

1. Sia $\mathbb{N}^*$ l'insieme di numeri naturali non nulli e $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ definita da $f(n, m) = n^m$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

   f non è iniettiva: $f(2, 4) = f(4, 2) = 16$. Invece è suriettiva: dato $a \in \mathbb{N}^*$, $a = f(a, 1)$. Non essendo iniettiva, non è biunivoca.

2. Sia $\mathbb{N}^*$ l'insieme dei numeri naturali non nulli e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (0, n)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

   f è iniettiva: infatti se $n_1 \neq n_2$ allora le coppie $(0, n_1)$ e $(0, n_2)$ sono diverse, in quanto la seconda componente è diversa. f non è suriettiva: la coppia $(1, 1)$ non appartiene all'immagine di f, dato che la prima componente è diversa da 0. Non essendo f suriettiva, non è biunivoca.

3. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(x) = x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5\})$.
   $f(5) = 5^2 + 1 = 26$. $f^{-1}(5) = \{x \in \mathbb{Z}\colon x^2 + 1 = 5\} = \{x \in \mathbb{Z}\colon x^2 = 4\} = \{-2, 2\}$. $f^{-1}(\{1, 5\}) = \{x \in \mathbb{Z}\colon x^2 + 1 = 1 \vee x^2 + 1 = 5\} = \{x \in \mathbb{Z}\colon x^2 = 0 \vee x^2 = 4\} = \{0, -2, 2\}$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.
   Non è iniettiva: $f(2) = f(-2)$. Non è suriettiva: $3 \notin Im(f)$.

2 Relazioni

4. Sia $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$ ed R la relazione definita su $A \times A$ da

$$aRb \qquad \Leftrightarrow \qquad a + b \leq 9$$

   (a) Stabilire se R è riflessiva.
   No: $5 + 5 = 10 > 9$, dunque $\neg 5R5$.
   (b) Stabilire se R è simmetrica.
   Sì: se $a + b \leq 9$ allora anche $b + a \leq 9$.
   (c) Stabilire se R è transitiva.
   No: ad esempio $6 + 1 \leq 9$ e $1 + 7 \leq 9$, quindi $6R1$ e $1R6$ ma $6 + 7 > 9$, quindi non è vero che $6R7$.

5. Sia $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$ ed E la relazione d'equivalenza definita su $A \times A$ da

$$(a, b)E(a', b') \qquad \Leftrightarrow \qquad a + b = a' + b'$$

(a) I due elementi $(1,0)$ e $(0,1)$ sono in relazione?
Sì: 1+0=0+1=1.

(b) La coppia $(1,1)$ appartiene alla classe d'equivalenza della coppia $(2,2)$?
No: 1+1=2, mentre $2+2=4\neq 2$, dunque $(1,1)$ non è in relazione con $(2,2)$.

(c) Descrivi gli elementi che appartengono alla classe d'equivalenza di $(0,0)$ e quelli che appartengono alla classe d'equivalenza di $(1,2)$.
$[(0,0)] = \{(a,b)\in A\times A\colon a+b=0\} = \{(0,0)\}$. $[(1,2)] = \{(a,b)\in A\times A\colon a+b=3\} = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$.

(d) Quante sono le classi d'equivalenza di E su $A\times A$?
Sono 19, una per ogni possibile risultato della somma $a+b$ al variare delle coppie $(a,b)\in A\times A$: questa può andare da $0=0+0$ a $18=9+9$.

3 Induzione

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Passo base: per $n=1$, il membro di sinistra è $1\cdot 2=2$, mentre quello di destra è $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3}=2$. Passo induttivo: supponiamo che l'asserto sia vero per n e dimostriamo che vale per $n+1$. Sfruttando l'ipotesi induttiva si ha

$$\begin{aligned}1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)+(n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)= \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}=\frac{(n+3)(n+1)(n+2)}{3},\end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ vale

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

Passo base: per $n=1$ il membro di sinistra è $1\cdot 1!=1$ e quello di destra è $2!-1=2-1=1$. Passo induttivo: supponiamo valga per n. Per $n+1$ si ha

$$\begin{aligned}1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!+(n+1)\cdot(n+1)! &= (n+1)!-1+(n+1)\cdot(n+1)!= \\ &= (n+1+1)\cdot(n+1)!-1=(n+2)\cdot(n+1)!-1=(n+2)!-1.\end{aligned}$$

8. Dimostrare per induzione che per ogni $n\geq 1$ il numero 7^n-1 è divisibile per 6.

Per $n=1$, $7^n-1=7-1=6$ è divisibile per 6. Supponendo che valga per n,

$$7^{n+1}-1=7\cdot 7^n-1=6\cdot 7^n+7^n-1$$

è divisibile per 6. Infatti $6\cdot 7^n$ è chiaramente un multiplo di 6, e 7^n-1 lo è per ipotesi induttiva: la loro somma è ancora un multiplo di 6.

9. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ è divisibile per 13.

   Se $n = 1$, $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 4^3 + 3^3 = 91 = 7 \cdot 13$. Supponendo che l'asserto sia vero per n, per $n+1$ abbiamo

$$4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2} = 4^{2+2n+1} + 3^{1+n+2} =$$
$$= 16 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} = 13 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot (4^{2n+1} + 3^{n+2}),$$

   che è divisibile per 13 in quanto somma di multipli di 13.

4 Combinatoria

10. Sia A un insieme finito con 10 elementi.

    (a) Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A \times A$?
    $10 \times 10 = 100$.

    (b) Quanti sono i sottoinsiemi di A?
    2^{10}.

    (c) Quanti sono gli elementi (a, b, c) di $A \times A \times A$ con $a \neq b, b \neq c, c \neq a$?
    Dobbiamo selezionare 3 elementi distinti tra 10, tenendo conto dell'ordine, quindi le possibilità sono $D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8$.

11. Sia A un insieme finito con 15 elementi e $a, b \in A$, con $a \neq b$.

    (a) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3?
    $\binom{15}{3}$

    (b) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a?
    Dobbiamo scegliere tre elementi, ma per uno di questi la scelta è obbligata, a. Rimangono quindi da scegliere 2 elementi tra i restanti 14: le possibilità sono dunque $\binom{14}{2}$.

    (c) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a ma non contengono b?
    Per il punto precedente i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a sono $\binom{14}{2}$. A questi dobbiamo togliere quelli che contengono b: dobbiamo cioè contare i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono sia a che b. Questi sono 13, dato che una volta scelti i primi due elementi a e b rimangono 13 elementi in A tra i quali scegliere il terzo. Avremo quindi $\binom{14}{2} - 13$ sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a ma non contengono b.
    Un altro modo per ottenere la soluzione è il seguente: i sottoinsiemi cercati devono contenere a e altri due elementi diversi da a e da b. Questi altri due elementi si possono scegliere in $\binom{13}{2}$ modi (vanno scelti in A, che ha 15 elementi, ma non devono essere uguali né ad a né a b, quindi rimangono 13 elementi).
    Notare che le due soluzioni danno lo stesso risultato: infatti è facile verificare che $\binom{14}{2} - 13 = \binom{13}{2}$.

    (d) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono sia a che b?
    13 (basta scegliere il terzo elemento, che deve essere diverso da a e da b).

(e) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a oppure b?

I sottoinsiemi di cardinalità 3 che contengono a sono $\binom{14}{2}$, così come quelli che contengono b. Quelli che contengono sia a che b sono 13, quindi in totale avremo

$$\binom{14}{2} + \binom{14}{2} - 13$$

Un altro modo per ottenere la soluzione è usare il rpincipio del complementare: per ottenere gli insiemi di tre elementi che contengono a oppure b è suffciente contare tutti i sottoinsiemi di tre elementi, che sono $\binom{15}{3}$ e sottrarre i sottoinsimi di tre elementi che non contengono né a né b; poiché questi ultimi sono $\binom{13}{3}$ otteniamo come risultato $\binom{15}{3} - \binom{13}{3}$. Notare che le due soluzioni danno lo stesso risultato: infatti è facile verificare che $\binom{15}{3} - \binom{13}{3} = \binom{14}{2} + \binom{14}{2} - 13$.

12. Le targhe automobilistiche di uno stato sono composte da 11 caratteri, dove un carattere è una delle 26 lettere dell'alfabeto inglese.

(a) Quante macchine possono essere immatricolate?

Abbiamo 26 scelte per ognuno degli 11 caratteri, e questi possono essere anche ripetuti: le targhe possibili sono 26^{11}.

(b) Quante sono le targhe che contengono esattamente quattro a?

Abbiamo $\binom{11}{4}$ scelte per posizionare le quattro a. Fatto questo, rimangono a disposizione 25 lettere per i restanti 7 caratteri della targa, quindi abbiamo 25^7 scelte. In tutto ci sono $\binom{11}{4} \cdot 25^7$ targhe che contengono esattamente quattro a.

(c) Quante sono le targhe che contengono esattamente quattro a consecutive?

Ci sono 8 possibili scelte sul posizionamento della prima delle quattro a consecutive (non può essere piazzata dopo l'ottavo carattere della targa). Come prima rimangono 25^7 scelte per gli altri caratteri, quindi in tutto abbiamo $8 \cdot 25^7$ possibilità.

5 Congruenze

13. Considerare la relazione d'equivalenza modulo 25.

(a) Determinare l'opposto additivo di 3 modulo 25.

$3 + 22 = 25 \equiv_{25} 0$, dunque 22 è l'opposto di 3 modulo 25.

(b) Determinare se 3 e 5 hanno un inverso moltiplicativo modulo 25 e in caso affermativo determinare l'inverso.

3 e 25 sono primi tra loro, dunque l'inverso esiste. Osserviamo che $3 \cdot (-8) = -24 \equiv_{25} 1$. Siccome $-8 \equiv_{25} 17$, 17 è l'inverso cercato. Invece il massimo comun divisore tra 5 e 25 è 5, dunque non esiste l'inverso di 5 modulo 25.

(c) Trovare l'inverso moltiplicativo di 4 modulo 25.

$4 \cdot (-6) = -24 \equiv_{25} 1$ e $-6 \equiv_{25} 19$, dunque 19 è l'inverso di 4 modulo 25.

14. Determinare un numero n tale che $0 \leq n < 11$ e tale che $n \equiv_{11} 13^2 - 10^4 + 22^{100}$.

Si ha $13 \equiv_{11} 2$, $10 \equiv_{11} -1$ e $22 \equiv_{11} 0$, dunque sostituendo si ottiene

$$13^2 - 10^4 + 22^{100} \equiv_{11} 2^2 - (-1)^4 + 0^{100} = 4 + 1 = 5.$$

Quindi $n = 5$.

15. Stabilire l'ultima cifra decimale del numero 27^{13}.

    L'ultima cifra decimale di un numero coincide con il suo resto nella divisione per 10, quindi basta calcolare 27^{13} modulo 10. Si ha $27 \equiv_{10} 7$, dunque

    $$27^{13} \equiv_{10} 7^{13} = (7^2)^6 \cdot 7 = (49)^6 \cdot 7 \equiv_{10} (-1)^6 \cdot 7 \equiv_{10} 1 \cdot 7 = 7.$$

    L'ultima cifra decimale è quindi 7.