I Quattro Sottospazi Fondamentali di una Matrice

Se A è una matrice $n \times m$ definiamo i seguenti sottoinsiemi:

1. $Ker(A) = \{v \in \mathbb{R}^m : Av = \vec{0}\}$, il “Kernel” o “Nucleo” di A;

   $Ker(A)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m$.

2. $Range(A) = \{Av : v \in \mathbb{R}^m\}$, il “Range” o “Immagine” di A;

   $Range(A)$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

ESEMPIO

Consideriamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Il vettore $v = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ appartiene al $Ker(A)$ perché $Av = \vec{0}$.

Il vettore $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ appartiene a $Range(A)$ perché $w = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Partendo dalla matrice A di dimensione $n \times m$ possiamo considerare anche la matrice A^T ed i sottoinsiemi $Ker(A^T)$ e $Range(A^T)$. Otteniamo:

$$Ker(A),\ Range(A^T) \subseteq R^m, \ \text{ mentre } \ Ker(A^T),\ Range(A) \subseteq R^n$$

Come vedremo, questi insiemi sono in realtà dei sottospazi vettoriali legati fra loro dal concetto di ortogonalità.

ESEMPIO

Consideriamo la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e la sua trasposta $A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Il vettore $v = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ appartiene al $Ker(A)$ perché $Av = \vec{0}$.

Il vettore $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ appartiene a $Range(A^T)$ perché $u = A^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Il vettore $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ appartiene a $Range(A)$ perché $w = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$Ker(A^T) = \{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ perché l'unico vettore z tale che $A^T z = \vec{0}$ è $z = \vec{0}$.

TEOREMA

Sia A una matrice $n \times m$.

1. $Ker(A)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$ ed è un sottospazio.
2. $Range(A)$ è il sottospazio generato dalle colonne di A in $\mathbb{R}^n$, di dimensione $rg(A)$ e coincide con l'insieme dei vettori $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ per cui il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ha soluzione.

Dim (2) Per definizione, se $\vec{b} \in Range(A)$ esiste $v \in \mathbb{R}^m$ per cui $Av = \vec{b}$. Ma allora $\vec{b} = Av$ è una combinazione lineare delle colonne di A (tramite i coefficienti forniti da v).
Se invece $\vec{b}$ è combinazione lineare delle colonne di A allora esistono coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che

$$\vec{b} = \lambda_1 A(-,1) + \ldots + \lambda_m A(-,m), \text{ da cui segue } A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} = \vec{b} \in Range(A)$$

Poiché il rango di una matrice è per definizione la dimensione dello spazio generato dalle colonne della matrice, otteniamo che $dim(Range(A)) = rg(A)$. Infine, dalla definizione di $Range(A)$ si ha:

$$\vec{b} \in Range(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists v \in \mathbb{R}^m Av = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \text{il sistema } A\vec{x} = \vec{b} \text{ ha soluzione.}$$

Esempio

Consideriamo ancora la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ed il sistema lineare omogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$ a lei associato: $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$.

Il vettore $v = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ appartiene al $Ker(A)$ ed è infatti soluzione del sistema omogeneo.

Il vettore $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ appartiene a $Range(A)$ perché $\vec{b} = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ed infatti il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, ovvero il sistema $\begin{cases} x + 2z = 2 \\ -x + y + z = 2 \end{cases}$ ha soluzione (il vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è soluzione del sistema).

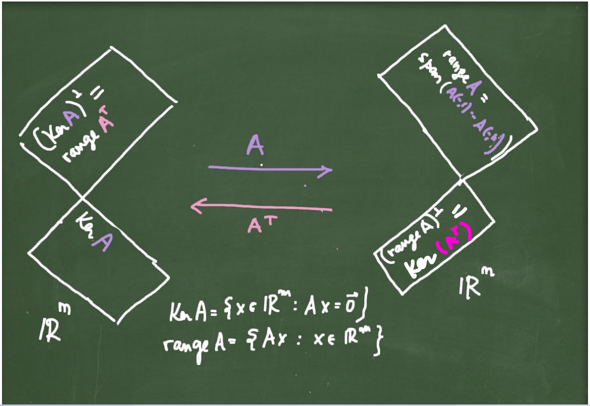
Il sottospazio $Range(A)$ di $\mathbb{R}^2$ ha dimensione $rg(A) = 2$ quindi $Range(A) = \mathbb{R}^2$.

Rapporti fra i quattro sottospazi

Abbiamo già notato che $Ker(A)$ e $Range(A^T)$ vivono nello stesso spazio $\mathbb{R}^m$ e cosí $Ker(A^T)$ e $Range(A)$ sono entrambi sottospazi di $\mathbb{R}^n$. Più precisamente vale:

LEMMA

$$Range(A^T) = Ker(A)^{\perp}, \quad Ker(A^T) = Range(A)^{\perp}$$



LEMMA

$$Range(A^T) = Ker(A)^{\perp}, \quad Ker(A^T) = Range(A)^{\perp}$$

Dim.

$$x \in Ker(A) \quad \Leftrightarrow \quad Ax = \begin{bmatrix} A(1,-)x \\ \vdots \\ A(n,-)x \end{bmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad x \perp A(i,-)^T \ \forall i = 1\ldots,n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \perp A^T(-,i) \ \forall i = 1\ldots,n \quad \Leftrightarrow \quad x \perp range(A^T) \quad \Leftrightarrow \quad x \in range(A^T)^{\perp}$$

COROLLARIO

Se A è una matrice $n \times m$,

$$dim(Ker(A)) = m - rg(A)$$

Dim. Si ha

$$m = dim(Ker(A)) + dim(Ker(A)^{\perp}) = dim(Ker(A)) + dim(Range(A^T)) =$$

$$= dim(Ker(A)) + rg(A^T) = dim(Ker(A)) + rg(A). \quad \text{Quindi } dim(Ker(A)) = m - rg(A).$$

Teorema di Rouché Capelli - sistemi omogenei

TEOREMA

Data una matrice $n \times m$, l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad (m \text{ incognite, } n \text{ equazioni})$$

è un sottospazio vettoriale di dimensione $m - rg(A)$ (m è il numero delle incognite e $rg(A)$ è il rango della matrice A).

Dim Un vettore $v \in \mathbb{R}^m$ è soluzione del sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ se e solo se appartiene a $Ker(A)$ e dal corollario precedente segue che la dimensione di tale sottospazio è $m - rg(A)$.

Sottospazi Affini

Il precedente teorema sulla dimensione dell'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo ci permette di dare una stima della "grandezza" dell'insieme delle soluzioni senza risolvere il sistema. Per ottenere un risultato simile nel caso non omogeneo dobbiamo prima risolvere il problema di definire la dimensione di un tale insieme di soluzioni, perché queste formano un sottospazio vettoriale solo nel caso di un sistema omogeneo. D'altra parte, si ha:

LEMMA

Se v_0 è una soluzione del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$, allora l'insieme $SOL(A\vec{x} = \vec{b})$ di tutte le soluzioni del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ è dato da

$$SOL(A\vec{x} = \vec{b}) = SOL(A\vec{x} = \vec{0}) + v_0 = Ker(A) + v_0$$

Dim. Se $v \in SOL(A\vec{x} = \vec{b})$ è una soluzione qualsiasi di $A\vec{x} = \vec{b}$, allora $(v - v_0) \in Ker(A)$ perché

$$A(v - v_0) = Av - Av_0 = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}.$$

Siccome $v = (v - v_0) + v_0$, abbiamo che $v \in Ker(A) + v_0$.
Viceversa, se $v \in Ker(A) + v_0$ allora $v = w + v_0$ dove $w \in Ker(A)$ e $Av = Aw + Av_0 = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}$. Quindi $v \in SOL(A\vec{x} = \vec{b})$.

Sottospazi Affini

Supponendo che il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ abbia almeno una soluzione, quindi, le soluzioni di un sistema lineare $SOL(A\vec{x} = \vec{b})$ qualsiasi si ottengono come un sottospazio (il $Ker(A)$) "traslato" di un vettore v_0. Questo tipo di insiemi si chiama sottospazio affine

DEFINIZIONE

Se $v_0 \in \mathbb{R}^n$ e W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ allora l'insieme $W + v_0$ si dice un *sottospazio affine*. La dimensione di un sottospazio affine è, per definizione, la dimensione di W. Il sottospazio W si chiama *giacitura* del sottospazio affine.

Per quanto detto precedentemente, l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $SOL(A\vec{x} = \vec{b})$ qualsiasi, se non è vuoto, è quindi un sottospazio affine, di dimensione $m - rg(A)$. Rimane peò ancora da stabilire un criterio per stabilire quando un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ha almeno una soluzione, senza dover necessariamente risolvere il sistema. Una soluzione viene data dal seguente Teorema di Rouche-Capelli (caso generale).

Teorema di Rouché Capelli - sistemi qualsiasi

TEOREMA

Data una matrice $n \times m$,

$$\text{il sistema } A\vec{x} = \vec{b} \text{ ha soluzione} \quad \Leftrightarrow \quad r(A) = rg(A; \vec{b})$$

dove la matrice $A; \vec{b}$ è ottenuta aggiungendo la colonna $\vec{b}$ alla matrice A dei coefficienti del sistema.
Inoltre, l'insieme delle soluzioni del sistema

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (m \text{ incognite, } n \text{ equazioni}),$$

se non è vuoto, è un sottospazio affine di dimensione $m - rg(A)$ (m è il numero delle incognite e $rg(A)$ è il rango della matrice A).

Dim Abbiamo già dimostrato la seconda parte nelle slides precedenti. Per la prima parte:

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ ha soluzione} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} \in Range(A) \quad \Leftrightarrow \quad Range(A) = Range(A; \vec{b}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad rg(A) = rg(A; \vec{b})$$

ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI R.C.

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x - 3y - 5z = 1 \\ x + y - 4z = 5 \\ 2x - 10y - 11z = 0 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & -10 & -11 & 0 \end{pmatrix}$$

che, operando con operzioni elementari sulle righe, si riduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha rango 2 (ha una riga nulla) mentre quella completa ha rango tre. Quindi il sistema non ha soluzione.

ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI R.C.

Consideriamo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y + 7z = 3 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che, operando con operzioni elementari sulle righe, si riduce a $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Sia la matrice dei coefficienti che quella completa hanno tre righe indipendenti, quindi il rango è per entrambe 3 e il sistema originario ha soluzione. L'insieme delle soluzioni ha dimensione pari al numero delle incognite meno il rango ovvero $3 - 3 = 0$; il sistema ammette quindi un'unica soluzione ovvero il punto $(-2/3, -2/3, 1)$, come si vede risolvendo il sistema che corrisponde alla matrice ridotta:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3y - 2z = 0 \\ -2z = -2 \end{cases}$$

ESEMPI DI APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI R.C.

Consideriamo il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+z=1 \end{cases}$$

Usando il Teorema di Rouché Capelli possiamo fare alcune considerazioni sull'insieme delle soluzioni del sistema. La matrice dei coefficienti del sistema ha due colonne uguali e le prime due colonne indipendenti, quindi ha rango due. Anche la matrice completa ha rango 2, quindi il sistema ammette soluzioni.

L'insieme delle soluzioni è uno spazio affine di dimensione

$$(\textit{numero incognite}) \; - \; (\textit{rango matrice coefficienti}) = 3-2=1,$$

quindi è una retta.

Il sistema omogeneo associato è:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

Risolvendo troviamo le soluzioni del sistema omogeneo: $\{(-h,0,h) : h \in \mathbb{R}\}$.

Si trova facilmente una soluzione del sistema non omogeneo, ad esempio $v_0 = (1,0,0)$. Quindi le soluzioni del sistema iniziale sono:

$\{(-h,0,h) : h,k \in \mathbb{R}\} + (1,0,0) = \{(-h+1,0,h) : h,k \in \mathbb{R}\}$.

RETTE E PIANI CON ROUCHÉ-CAPELLI

- Nel piano $\mathbb{R}^2$ un' equazione $ax + by = c$, vista come sistema con un'unica equazione, ha soluzione se e solo se $rg(a, b) = rg(a, b, c)$. Quindi, supponendo che l'equazione abbia soluzioni, si ha:
  - se $a, b = 0$ allora $c = 0$ ed il sistema ha $\infty^{2-0} = \infty^2$ soluzioni, ovvero è tutto il piano.
  - altrimenti, se almeno uno dei coefficienti a, b è non nullo, allora il sistema ha $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni e rappresenta una retta nel piano. La sua giacitura è la retta per l'origine.
- Nello spazio $\mathbb{R}^3$ un'equazione $ax + by + cz = d$, vista come sistema con un'unica equazione, ha soluzione se e solo se $rg(a, b, c) = rg(a, b, c, d)$. Quindi, supponendo che l'equazione abbia soluzioni, si ha:
  - se $a, b, c = 0$ allora $d = 0$ ed il sistema ha $\infty^{3-0} = \infty^3$ soluzioni, ovvero è tutto il piano.
  - altrimenti, se almeno uno dei coefficienti a, b, c è non nullo, allora il sistema ha $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni e rappresenta una piano nello spazio. La sua giacitura è il piano per l'origine di equazione $ax + by + cz = 0$.

RETTE E PIANI CON ROUCHÉ-CAPELLI

- Nel piano $\mathbb{R}^2$ un' equazione $ax + by = c$, vista come sistema con un'unica equazione, ha soluzione se e solo se $rg(a, b) = rg(a, b, c)$. Quindi, supponendo che l'equazione abbia soluzioni, si ha:
  - se $a, b = 0$ allora $c = 0$ ed il sistema ha $\infty^{2-0} = \infty^2$ soluzioni, ovvero è tutto il piano.
  - altrimenti, se almeno uno dei coefficienti a, b è non nullo, allora il sistema ha $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni e rappresenta una retta nel piano. La sua giacitura è la retta per l'origine.
- Nello spazio $\mathbb{R}^3$ un'equazione $ax + by + cz = d$, vista come sistema con un'unica equazione, ha soluzione se e solo se $rg(a, b, c) = rg(a, b, c, d)$. Quindi, supponendo che l'equazione abbia soluzioni, si ha:
  - se $a, b, c = 0$ allora $d = 0$ ed il sistema ha $\infty^{3-0} = \infty^3$ soluzioni, ovvero è tutto il piano.
  - altrimenti, se almeno uno dei coefficienti a, b, c è non nullo, allora il sistema ha $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni e rappresenta una piano nello spazio. La sua giacitura è il piano per l'origine di equazione $ax + by + cz = 0$.

RETTE E PIANI CON ROUCHÉ-CAPELLI

- Nello spazio $\mathbb{R}^3$ un sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

ha soluzione se e solo se

$$rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

Se il sistema ha soluzione, allora

  - Se il rango delle matrici di cui sopra è 1, i vettori (a, b, c, d) e (a', b', c', d') sono uno multiplo dell'altro e il sistema ha $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni ed è quindi un piano (di equazione $ax + by + cz = d$).
  - Se il rango delle matrici di cui sopra è 2, il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni ed è quindi una retta con giacitura

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

RETTE E PIANI CON ROUCHÉ-CAPELLI

Nello spazio, due rette possono appartenere ad uno stesso piano (essere complanari) oppure no.

In quest'ultimo caso si dicono "sghembe" e non hanno punti in comune.

Se appartengono allo stesso piano allora sono parallele oppure si incontrano in un punto.

(animazione: sghembe)

ESEMPIO

Consideriamo le rette r, s dello spazio di equazione parametrica, rispettivamente:

$$r := \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t, \ \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad s := \begin{cases} x = 3 + u \\ y = 2 + u \\ z = 4 + u, \ \ u \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

La retta r ha direzione uguale al vettore $u = (1, -1, 3)$ mentre la retta s ha direzione uguale al vettore $v = (1, 1, 1)$.

I vettori u, v sono indipendenti, quindi r ed s non hanno la stessa direzione. Quindi, se le due rette appartengono allo stesso piano si intersecano, oppure non appartengono allo stesso piano (sono sghembe).
Le equazioni cartesiane di r ed s sono, rispettivamente:

$$r := \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - z = 2 \end{cases} \qquad s := \begin{cases} x - y = 1 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

ESEMPIO, segue

Per capire se le rette r ed s hanno un punto in comune (e quindi sono complanari) o se sono sghembe, applichiamo il Teorema di Rouché-Capelli al sistema

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 3x-z=2 \\ x-y=1 \\ x-z=-1 \end{cases} \quad \text{con matrice dei coefficienti} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{che ha rango 3 :}$$

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

mentre la matrice completa ha rango 4, perché i 4 vettori riga sono indipendenti:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Quindi il sistema non ha soluzione e le due rette r, s sono sghembe.

RICAPITOLANDO...

- Per capire se un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ha soluzione e, se ne ha almeno una, per calcolare la dimensione dello spazio delle soluzioni, basta confrontare il rango della matrice dei coefficienti con quello della matrice completa del sistema.
- Il sistema ha soluzione se e solo se il rango della matrice completa del sistema (chiamata anche *matrice orlata*) coincide con il rango della matrice dei coefficienti A del sistema.
- In questo caso lo spazio affine delle soluzioni ha dimensione $m - rg(A)$ dove m è il numero delle incognite del sistema.

RICAPITOLANDO...

- Per capire se un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ha soluzione e, se ne ha almeno una, per calcolare la dimensione dello spazio delle soluzioni, basta confrontare il rango della matrice dei coefficienti con quello della matrice completa del sistema.
- Il sistema ha soluzione se e solo se il rango della matrice completa del sistema (chiamata anche *matrice orlata*) coincide con il rango della matrice dei coefficienti A del sistema.
- In questo caso lo spazio affine delle soluzioni ha dimensione $m - rg(A)$ dove m è il numero delle incognite del sistema.