Esercizi su Induzione, Sommatorie e Produttorie

1. Considera la seguente proprietà $P(n)$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

   (a) Scrivi $P(n)$ come

$$\sum_{i=1}^{n} ... = ...$$

   (b) Dimostra per induzione che vale $\forall n \geq 1 \; P(n)$.

2. Considera la proprietà $P(n)$ seguente:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

   (a) Scrivi $P(n)$ come $\sum_{i=1}^{n} ... = ...$

   (b) Dimostra per induzione che vale $\forall n \geq 1 \; P(n)$.

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \ldots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n},$$

   o, in termini di produttoria,

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}.$$

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

6. Dimostrare per induzione che la somma dei quadrati dei primi n numeri dispari è uguale a $\frac{n(4n^2-1)}{3}$, cioè:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)}.$$

8. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

9. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 9$ si ha

$$10^{n-4} < n!$$

10. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 4$ si ha

$$2 \cdot 3^n > 9n^2.$$

11. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $5^{2n-1} + 1$ è divisibile per 6.

12. Dimostrare per induzione che, per $n \geq 2$, per n punti del piano, a tre a tre non allineati, passano esattamente $\frac{n(n-1)}{2}$ rette.

13. Considera la sommatoria

$$s(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Considerando i valori $s(1), s(2), s(3), s(4)$, formula una congettura sul valore della sommatoria e verificane la validità dimostrandola per induzione.

14. (a) Sia $s(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita

$$s(n) := \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

(b) Scrivere il valore $s(n)$ come una sommatoria:

$$\sum_{k=\ldots}^{\ldots} a_k$$

(c) Determinare
$$s(n+1) - s(n)$$

(d) Sia $P(n)$ la seguente proprietà:
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

i. Considera $P(2)$: quanti termini ci sono nella sommatoria a sinistra della disuguaglianza?
ii. Dimostra per induzione che vale $\forall n \geq 0\ P(n)$.

15. Dimostra per induzione che per ogni $\forall n \geq 2$ vale:
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{7}{12},$$
prestando attenzione al termine iniziale della sommatoria.