ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLO SCRITTO

PRIMA PARTE

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Se A, B sono insiemi e $(A \times B) \subseteq (B \times A)$ allora $A = B$ **V** **F**
2. Se A, B sono insiemi allora vale sempre $(A \setminus B) \cup B = A$. **V** **F**
3. Se $A = \{(-1, 1)\}$ allora $A \subseteq P(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$. **V** **F**
4. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (-n, n)$ è suriettiva. **V** **F**
5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = (-n, n)$ è iniettiva. **V** **F**
6. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(n) = n - 5$ è suriettiva. **V** **F**
7. La funzione $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ definita da
   $$f(n) = \{n\}$$
   è iniettiva. **V** **F**
8. Se una funzione ha un'inversa, allora è iniettiva. **V** **F**
9. Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ è definita da $f(n) = -n^2$ e $Y = \{0, -1, -2\}$ allora $1 \in f^{-1}(Y)$. **V** **F**
10. Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite da: $f(x) = -x^2, \qquad g(x) = -x + 1$.
    Se $h = g \circ f$ allora $h(2) = -1$. **V** **F**
11. La funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = z^2$ è invertibile. **V** **F**
12. La relazione binaria R definita sugli interi da
    $$xRy \quad \Leftrightarrow x + y = 1$$
    è transitiva. **V** **F**
13. La relazione binaria R definita sui sottoinsiemi dei numeri naturali da
    $$(X, Y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$
    è simmetrica. **V** **F**
14. Il resto della divisione di -7 per -12 è -5. **V** **F**
15. $-11 \equiv_8 -3$ **V** **F**
16. 4 è l'opposto di 5 modulo 9. **V** **F**
17. 4 è l'inverso moltiplcativo di 6 modulo 25. **V** **F**
18. $\overset{1}{(14)}^{75} + \overset{0}{39} \times 30^{1724} - \overset{-2}{37}^2 \equiv_{13} 8$ $\quad 1 + 0 - (4) = -3$ **V** **F**
19. Sia $\sim$ una relazione d'equivalenza su un insieme non vuoto A, a, b, c elementi di A e $[a]$ la classe di equivalenza dell'elemento a. Quali delle seguenti affermazioni sono vere, qualsiasi sia A e $\sim$?
    (a) se $a \sim b$ e $c \sim a$ allora $b \sim c$; **V** **F**
    (b) se $b \notin [a]$ allora $b \not\sim a$; **V** **F**
    (c) se $b \in [a]$ allora $a = b$; **V** **F**
    (d) se $a = b$ allora $b \in [a]$ **V** **F**

ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLO SCRITTO

SECONDA PARTE

1 Funzioni

1. Sia $\mathbb{N}^*$ l'insieme di numeri naturali non nulli e $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ definita da $f(n,m) = n^m$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.
   NO SI NO

2. Sia $\mathbb{N}^*$ l'insieme dei numeri naturali non nulli e $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (0, n)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.
   SI NO NO

3. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(x) = x^2 + 1$.
   26 ±2 0 → ±2 {0,-2}∨{0.2} = {0,-2,2}
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.
   NO NO

2 Relazioni

4. Sia $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$ ed R la relazione definita su $A \times A$ da

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad a + b \leq 9$$

   (a) Stalilire se R è riflessiva. NO!
   (b) Stalilire se R è simmetrica. SI
   (c) Stalilire se R è transitiva. NO!

5. Sia $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$ ed E la relazione d'equivalenza definita su $A \times A$ da

$$(a, b)E(a', b') \quad \Leftrightarrow \quad a + b = a' + b'$$

   (a) I due elementi $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono in relazione? SI
   (b) La coppia $(1, 1)$ appartiene alla classe d'equivalenza della coppia $(2, 2)$? F
   tutti i numeri che hanno somma = 0 {0,0}
   (c) Descrivi gli elementi che appartengono alla classe d'equivalenza di $(0, 0)$ e quelli che appartengono alla classe d'equivalenza di $(1, 2)$.
   tutti i numeri che hanno come somma 3, {0,3}{1,2},{2,1},{3,0}
   (d) Quante sono le classi d'equivalenza di E su $A \times A$?

3 Induzione

Ipotesi induttiva: P(n+1)=(n+1)(n+1+1)(n+2+1)/3=(n+1)(n+2)(n+3)/3 ???

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}.$$

P(n+1): 1*2 + 2*3 +...+n(n+1)+ (n+1)(n+2) = P(n) + (n+1)(n+2) = n(n+1)(n+2)/3 + (n+1)(n+2) =
[n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)] /3 = [(n+1)(n+2) * (n+3)] / 3 = (n+1)(n+2)(n+3) /3 = P(n+1) verificata

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale

Ipotesi induttiva: P(n+1) ==? (n+1+1)! -1 = (n+2)!-1

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$$

P(n+1): 1*1! + 2*2!+...+n+n!+(n+1)(n+1)! = P(n)+(n+1)(n+1)! = (n+1)! + (n+1)(n+1)! -1 =
(n+1)! *(n+1+1) - 1 = (n+2) * (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1 --> P(n+1) verificata

8. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $7^n - 1$ è divisibile per 6.

7^n - 1 =mod(6) 0
7^n =mod(6) 1
7%6=1 1^n=1 mod(6)

9. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ il numero $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ è divisibile per 13.

8)

7^(n+1) - 1 = 7*7^n - 1 =mod(6) 0
7*7^n =mod(6) 1 7%6=1 1*1^n=1

7*7^n - 1 = k*6
7*7^n = k*6 - 1
(7*7^) = k*6 - 1

4*4^2(n) + 9*3^n =mod(13)0
4*(4^2)^n + 9*3^n =mod(13)0
4*16^n + 9*3^n =mod(13)0
16%13=3 9%13=-4
4*3^n - 4*3^n = 0
P(n+1) 4*4^2(n+1) + 27*3^n =mod(13)0
4*16^(n+1) + 27*3^n =mod(13)0
4*3^(n+1) + 27*3^n =mod(13)0
4*3*3^n+ 27*3^n =mod(13)0
12*3^n + 27*3^n =mod(13)0
3^n*(12+27) =mod(13)0
3^n*39=mod(13)0
39%13=0 0*3^n=0

4 Combinatoria

10. Sia A un insieme finito con 10 elementi.
    (a) Quanti sono gli elementi del prodotto cartesiano $A \times A$? 10·10=
    (b) Quanti sono i sottoinsiemi di A? 2^n: 2^10
    (c) Quanti sono gli elementi (a, b, c) di $A \times A \times A$ con $a \neq b, b \neq c, c \neq a$?
    siccome conta l'ordine (1,2,3) != (1,3,2) e non sono ammesse ripetizioni n!/(n-k)! = 10*9*8=720
11. Sia A un insieme finito con 15 elementi e $a, b \in A$, con $a \neq b$.
    (a) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3?
    siccome non conta l'ordine, {a,b,c} = {a,c,b} e non sono ammesse ripetizioni
    15! / 3! * 12! = 15*14*13/6
    (b) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a?
    come il caso di prima, ma bisogna trovare i sottoinsimi da 2, perchè il 3 è gia fissato --> 14*13/2
    (c) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a ma non contengono b? 13*12/2
    (d) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono sia a che b? 13
    (e) Quanti sono i sottoinsiemi di A di cardinalità 3 che contengono a oppure b? 19*19*18
12. Le targhe automobilistiche di uno stato sono composte da 11 caratteri, dove un carattere è una delle 26 lettere dell'alfabeto inglese.
    conta l'ordine e sono ammesse ripetizioni
    (a) Quante macchine possono essere immatricolate? 26^11
    (b) Quante sono le targhe che contengono esattamente quattro a? 32! / 7!*10!
    (c) Quante sono le targhe che contengono esattamente quattro a consecutive? 26^7

5 Congruenze

13. Considerare la relazione d'equivalenza modulo 25.
    (a) Determinare l'opposto additivo di 3 modulo 25. 3+x=0 x=22
    MCD(25,3) = 25 = 8*3 + 1 1 =25 -8*3
    1=25 -8*3 mod(25)
    1=-8*3 mod(25) = 3*(-8) inverso di 3
    (b) Determinare se 3 e 5 hanno un inverso moltiplicativo modulo 25 e in caso affermativo determinare l'inverso.
    MCD(25,5)=1? NO
    (c) Trovare l'inverso moltiplicativo di 4 modulo 25.
    25 = 4*6 + 1 1=25 -4*6
    -6
14. Determinare un numero n tale che $0 \leq n < 11$ e tale che $n \equiv_{11} 13^2 - 10^4 + 22^{100}$.
    13%11=2 10%11=10=-1
    22%11=0
    2^2 - (-1)^4 +0 = 4-1=3
15. Stabilire l'ultima cifra decimale del numero 27^{13}.

7^1 = 7 7^5=7 = 7^4x+1
7^2= 9 7^6=9 = 7^4x+2
7^3=3 7^7=3 = 7^4x+3
7^4=1 7^8=1 = 7^4x

13 = 4*3 +1 == 7

53

46/53