Corso di Programmazione

I Prova di accertamento del 22 Gennaio 2018 / A

cognome e nome

Selezione degli esercizi proposti.

3. Programmazione in Scheme

Dato un intero $n \geq 0$, la procedura `powers-of-two` restituisce la lista delle potenze di due distinte che lo compongono, la cui somma è n, ordinate in ordine decrescente. In altri termini, ciascuna delle potenze di due rappresentate nella lista corrisponde a uno dei bit '`1`' della notazione binaria di n, a partire da quello più significativo. Esempi:

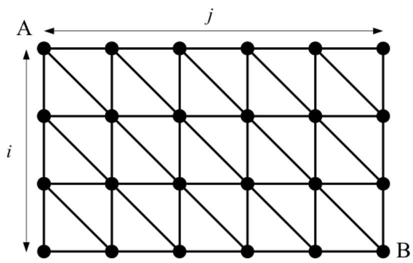
```
(powers-of-two  0)  →  ()              (powers-of-two  8)  →  (8)
(powers-of-two  1)  →  (1)             (powers-of-two 26)  →  (16 8 2)
(powers-of-two  5)  →  (4 1)           (powers-of-two 45)  →  (32 8 4 1)
```

Definisci un programma in Scheme per realizzare la procedura `powers-of-two`.

```
(define powers-of-two    ;restituisce la stringa binaria
 (lambda (n)     ;n: INTERO >= 0
   (cond ( (= n 0)   ;CASO BASE
           null
         )
         ( (= n 1)
           (list 1)
         )
         (else
           (let ( (lg (inexact->exact
                        (floor (/ (log n) (log 2)) )
                       )
                  )  ;Log2(n) : approssimato difetto INTERO
                )
                (cons (expt 2 lg) ;(potenza di 2) < n più vicina a n stesso
                      (powers-of-two (- n (expt 2 lg))) ; n - (potenza di 2)
                )
           )
         )
   )
  )
)
```

4. Ricorsione ad albero

Completa la definizione della procedura `manhattan-var`, progettata per risolvere una variante del "problema di Manhattan" in cui i nodi sono connessi, oltre che dai consueti tratti orizzontali e verticali, anche da tratti diagonali che scendono verso destra come illustrato nella figura a fianco. Interessa conoscere in quanti modi diversi ci si può spostare dal nodo A al nodo B lungo un percorso di lunghezza minima che attraversi *esattamente* k tratti diagonali (e non di più: osserva che gli spostamenti in diagonale abbreviano i percorsi rispetto al caso di spostamenti orizzontali a destra e verticali in basso, ma non è consentito utilizzarne più di k; se $k = 0$, in particolare, ci si riconduce alla soluzione del problema originale). Esempi:




```
(manhattan-var 3 2 0) → 10    (manhattan-var 3 2 2) → 3    (manhattan-var 2 2 2) → 1
```

```
(define manhattan-var          ; val: intero
  (lambda (i j k)              ; i, j, k: interi non negativi tali che k ≤ i e k ≤ j
    (let (
          (x (if (= i k) 0 (manhattan-var (- i 1) j k)))

          (y (if ________________________ 0 (manhattan-var i (- j 1) k)))

          (z (if (= k 0) 0 (manhattan-var ___________________________ )))
          )
      (if (and (> i 0) (> j 0))

          (+ __________________________________________________ )

          ______________________________________________________
          ))
    ))
```

5. Verifica formale della correttezza

In relazione alla procedura `ufo`, riportata qui a fianco, si può dimostrare che per ogni intero $k \geq 0$:

`(ufo` $7 \cdot 2^k$`)` $\longrightarrow$ $3 \cdot 2^{k+1} + 1$

Dimostra questa proprietà per induzione sui valori di k attenendoti allo schema delineato qui sotto.

```
(define ufo
  (lambda (n)
    (cond ((= n 1)
           1)
          ((even? n)
           (- (* 2 (ufo (quotient n 2))) 1))
          (else
           (+ (* 2 (ufo (quotient n 2))) 1))
          )))
```

- Formalizza la proprietà generale da dimostrare:

P(k): (ufo 7*2^k) = 3* 2^(k+1) +1 per qualsiasi k >=0

- Formalizza la proprietà che esprime il caso / i casi base:

P(0): (ufo 7*2^0) = (ufo 7*1)
Si potrebbe anche dimostrare P(1) in modo da essere ancora più sicuri
che la proprietà valga per ogni n>= 0

- Formalizza l'ipotesi induttiva:

P(n): (ufo 7*2^n) = 3*2^(n+1) + 1

- Formalizza la proprietà da dimostrare come passo induttivo:

P(n+1): (ufo 7*2^(n+1)) ==? 3*2^(n+2) + 1
Il passo induttivo incrementa di 1 la variabile di riferimento(N) al risultato
dell'ipotesi induttiva

- Dimostra il caso / i casi base:

(ufo 7) --> (even? 7) = false --> (ufo 3) --> (even? 3) = false --> 2*(ufo 1)-1 = 1
2*1 + 1 = 3 == (ufo 3) --> (ufo 7) = 2*(ufo 3) + 1 = 2*3 + 1 = 7
P(0) : CASO BASE = (ufo 7) = 7

- Dimostra il passo induttivo:

(ufo 7*2^(n+1)) = (even? 7*2^(n+1)) = true per ogni n>=0 --> (- (* 2 (ufo (quotient n 2))) 1))
(quotient 7*2^(n+1) 2) = 7*2^(n+1) *2^(-1) = 7* 2^(n+1)*2^(-1) = 7*2^n
(ufo 7*2^n) = secondo la proprietà P(n) = 3*2(n+1) + 1

(- (* 2 (ufo 7*2^n)) 1)) = [2* (3*2(n+1) + 1)] - 1 = 3*2(n+2) + 2 - 1=
= 3*2(n+2) + 1 = PRINCIPIO DI INDUZIONE CONFERMATO

Riporta in modo chiaro negli appositi spazi le soluzioni degli esercizi, oppure precise indicazioni se alcune soluzioni si trovano in un foglio separato. Scrivi inoltre il tuo nome nelle intestazioni e su ciascun ulteriore foglio che intendi consegnare.

Corso di Programmazione

I Prova di accertamento del 22 Gennaio 2018 / B

cognome e nome

Selezione degli esercizi proposti.

3. Programmazione in Scheme

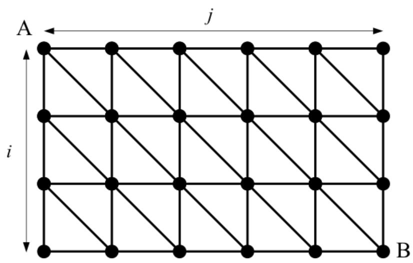
Dato un intero $n \geq 0$, la procedura `powers-of-two` restituisce la lista delle potenze di due distinte che lo compongono, la cui somma è n, ordinate in ordine crescente. In altri termini, ciascuna delle potenze di due rappresentate nella lista corrisponde a uno dei bit '`1`' della notazione binaria di n, a partire dal quello meno significativo. Esempi:

```
(powers-of-two  0)  →  ()            (powers-of-two 16)  →  (16)
(powers-of-two  1)  →  (1)           (powers-of-two 22)  →  (2 4 16)
(powers-of-two  9)  →  (1 8)         (powers-of-two 53)  →  (1 4 16 32)
```

Definisci un programma in Scheme per realizzare la procedura `powers-of-two`.

4. Ricorsione ad albero

Completa la definizione della procedura `manhattan-var`, progettata per risolvere una variante del "problema di Manhattan" in cui i nodi sono connessi, oltre che dai consueti tratti orizzontali e verticali, anche da tratti diagonali che scendono verso destra come illustrato nella figura a fianco. Interessa conoscere in quanti modi diversi ci si può spostare dal nodo A al nodo B lungo un percorso di lunghezza minima che attraversi *esattamente k* tratti diagonali (e non di più: osserva che gli spostamenti in diagonale abbreviano i percorsi rispetto al caso di spostamenti orizzontali a destra e verticali in basso, ma non è consentito utilizzarne più di k; se $k = 0$, in particolare, ci si riconduce alla soluzione del problema originale). Esempi:




```
(manhattan-var 3 2 0) → 10   (manhattan-var 3 2 2) → 3   (manhattan-var 2 2 2) → 1
```

```
(define manhattan-var         ; val: intero
  (lambda (i j k)             ; i, j, k: interi non negativi tali che k ≤ i e k ≤ j
    (if (or (= i 0) (= j 0))

        ..................................................
        (let (
              (x (if (> i k) (manhattan-var (- i 1) j k) 0))

              (y (if ............................ (manhattan-var i (- j 1) k) 0))

              (z (if (> k 0) (manhattan-var .......................... ) 0))
              )

          (+ .................................................... )
          ))
    ))
```

5. Verifica formale della correttezza

In relazione alla procedura `ufo`, riportata qui a fianco, si può dimostrare che per ogni intero $k \geq 0$:

$$(\texttt{ufo}\ 5 \cdot 2^k) \quad \rightarrow \quad 2^{k+1} + 1$$

Dimostra questa proprietà per induzione sui valori di k attenendoti allo schema delineato qui sotto.

```
(define ufo
  (lambda (n)
    (cond ((= n 1)
           1)
          ((even? n)
           (- (* 2 (ufo (quotient n 2))) 1))
          (else
           (+ (* 2 (ufo (quotient n 2))) 1))
          )))
```

- Formalizza la proprietà generale da dimostrare:

  P(n): (ufo 5*2^n) ==? 2^(n+1) + 1 per ogni n >=0

- Formalizza la proprietà che esprime il caso / i casi base:

  P(0): (ufo 5) ==? 2^1 + 1
  P(1): (ufo 5*2) ==? 2^2 + 1

- Formalizza l'ipotesi induttiva:

  P(n) : VERA

- Formalizza la proprietà da dimostrare come passo induttivo:

  P(n+1): (ufo 5*2^(n+1)) ==? 2^(n+2) +1

- Dimostra il caso / i casi base:

  P(0): (ufo 5) = 2*(ufo 2) + 1 = 2*1 + 1 = 3
  (ufo 2) = 2* (ufo 1) - 1 = 2*1 - 1 = 1
  (ufo 1) = 1
  P(0): 3 --> ==? 2^(n+1) + 1

  P(1): (ufo 10) = 2*(ufo 5) - 1 = 2*3 - 1 = 5

- Dimostra il passo induttivo:

  P(n+1): (ufo 5*2(n+1))
  5*2^(n+1) === PARI per n>=0
  2*(ufo 5*2^(n+1)/2) - 1 =
  (ufo 5*2^(n+1)/2) = (ufo 5*2^(n))
  (ufo 5*2^(n)) = 2^(n+1) + 1
  2* [2^(n+1) + 1] - 1 = 2^(n+2) + 2 - 1 =
  2^(n+2) + 1

Riporta in modo chiaro negli appositi spazi le soluzioni degli esercizi, oppure precise indicazioni se alcune soluzioni si trovano in un foglio separato. Scrivi inoltre il tuo nome nelle intestazioni e su ciascun ulteriore foglio che intendi consegnare.