ESERCIZI SU DIVISIBILITÀ

(1) Trova il massimo comun divisore fra 30 e 24 sia usando la loro fattorizzazione in numeri primi che usando l'algoritmo di Euclide. Esprimi $MCD(30, 24)$ come combinazione lineare di 30 e 24.

(2) Trova il massimo comun divisore fra 66 e 54 sia usando la loro fattorizzazione in numeri primi che usando l'algoritmo di Euclide. Esprimi $MCD(66, 54)$ come combinazione lineare dei due numeri.

(3) Possiamo esprimere il numero 5 come combinazione lineare di 20 e 21? (suggerimento: calcola il massimo comun divisore fra 20 e 21 e usa i risultati visti a lezione).

(4) Se possibile, esprimi i seguenti numeri come combinazione lineare di 66 e 54, se non è possibile spiega perché:

$$12,\ 7,\ 4, -15, -18$$

(5) Sapendo che $MCD(a, b) = 2$, determinare:
   (a) l'insieme delle combinazioni lineari di a e b;
   (b) l'insieme dei divisori comuni di a e b.

(6) Dimostra che l'insieme delle combinazioni lineari di 30 e 24 coincide con l'insieme delle combinazioni lineari di 12 e 18.

(7) È possibile ottenere 1 come combinazione lineare di 2 e 6? Utilizza la risposta per dimostrare che la retta $2x + 6y - 1 = 0$ non passa per alcun punto del piano in cui entrambe le coordinate sono numeri interi.

(8) Se a, b sono due numeri interi tali che $a|b$ e $b|a$, Possiamo concludere che $a = b$? Se no, cosa possiamo concludere?

(9) Se a è un numero intero qualsiasi dimostra che i numeri $a-1$ e $2a-1$ sono relativamente primi (suggerimento: scrivi 1 come combinazione lineare di $a - 1$ e $2a - 1$).

(10) Siano a e b numeri interi.
   (a) Scrivi b combinazione lineare di a e $a-b$ (ovvero determina due interi h, k tali che $b = ha + k(a - b)$);
   (b) utilizzando il risultato precedente, dimostra che se $a|(a - b)$ allora $a|b$.

(11) Dato un numero intero a qualsiasi, dimostra che ogni altro intero può essere scritto come combinazione lineare di a e $a + 1$ (suggerimento: $MCD(a, a + 1) = \ldots$).

(12) Dimostra che, se b, c sono numeri interi relativamente primi e $d = MCD(b - c, b + c)$, allora $d = 1$ oppure $d = 2$. (suggerimento: dimostra che se p è un divisore primo comune a $b - c$ e $b + c$ allora p deve dividere $2b$, quindi $\ldots$).