Vettori in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Equazioni di Rette e Piani in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

(1) Esercizi su vettori, norma, direzione, verso e perperndicolarità.

(a) Dato il vettore dello spazio $v = (1, 2, 3)$, determinare un vettore w che abbia la stessa direzione di v, verso opposto e norma 1.

(b) Dato il vettore del piano $v = (1, 2)$, determinare tutti i vettori w che hanno direzione perpendicolare a v e norma 1.

(c) Dato il vettore dello spazio $v = (1, 2, 2)$, determinare tutti i vettori w che hanno direzione perpendicolare a v e norma 1.

(2) Equazioni cartesiane e parametriche di rette.

(a) Trovare l'equazione parametrica della retta del piano che passa per l'origine e ha la stessa direzione del vettore $(2, -1/2)$.

(b) Trovare l'equazione parametrica della retta del piano che passa per il punto $(1, 3)$ e ha la stessa direzione del vettore $(2, -1/2)$.

(c) Trovare l'equazione parametrica della retta nello spazio $\mathbb{R}^3$ che passa per l'origine e ha come direzione il vettore $v = (3, -1/2, 1)$.

(d) Trovare un vettore del piano che abbia la stessa direzione della retta di equazione cartesiana $y = 2x$, ed uno che abbia la stessa direzione della retta $y = -2x + 1$.

(e) Trovare l'equazione parametrica e quella cartesiana della retta del piano che passa per i punti $P = (-1, -1/2)$ e $Q = (1, 0)$.

(f) Trovare l'equazione parametrica della retta dello spazio che passa per il punto $P = (0, 1, 2)$ e ha come direzione il vettore $v = (1, 2, 3)$.

(g) Trovare l'equazione parametrica della retta nello spazio che passa per i punti $P = (-1, -1/2, 5)$ e $Q = (1, 0, 2)$.

(3) Determinare se le rette r, s dello spazio di equazioni parametriche:

$$r = \begin{cases} x = h + 1 \\ y = h \\ z = 1 - h \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad s = \begin{cases} x = -k \\ y = k \\ z = 1 - k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

hanno un punto d'intersezione.

Ripetere l'esercizio con le rette del piano di equazione

$$r = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad s = \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(attenzione al trabocchetto: se lasciamo le equazioni come sono scritte, potremmo non trovare il punto di intersezione perché questo viene raggiunto da valori del parametro che sono diversi per le due rette. Per trovare le intersezioni è necessario cambiare il nome del parametro in una delle due equazioni - provare per credere: senza cambiarlo non si trova alcun punto d'intersezione)

(4) Considerare la retta r dello spazio di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -3/2 + t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(a) Determinare se il punto $A = (0, 3/2, -1/2)$ appartiene alla retta r.
(b) Determinare un punto B che non appartiene ad r.
(c) Determinare l'equazione parametrica della giacitura della retta r.
(d) Determinare un vettore v che abbia la stessa direzione della retta r e norma 1.
(e) Determinare l'equazione cartesiana del piano per l'origine perpendicolare alla retta r.

(5) Data la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3/2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

determinare l'equazione parametrica della retta s parallela ad r e passante per il punto $P = (1, 1, 1)$

(6) Determinare la norma $||v||, ||w||$ dei seguenti vettori v, w di $\mathbb{R}^3$ e l'angolo fra essi compreso:
(a) $v = (1, 1, 1), w = (1, 0, -1)$;
(b) $v = (2, 1, 1), w = (1, 1, 0)$;
(c) $v = (0, -1, 1), w = (1, 1, 0)$.

(7) Considerare i punti $P = (1, 2), Q = (1, 0)$ di $\mathbb{R}^2$
(a) Determinare il vettore $\vec{OP} - \vec{OQ}$ ed il coseno dell'angolo formato dai vettori $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$.
(b) Determinare l'equazione parametrica della retta passante per i punti P e Q.
(c) Determinare l'equazione parametrica della retta di direzione $\vec{OP}$ e passante per il punto Q.

(8) Considerare i punti $P = (1, 2, 1), Q = (1, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^3$
(a) Determinare il vettore $\vec{OP} - \vec{OQ}$ ed il coseno dell'angolo formato dai vettori $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$.
(b) Determinare l'equazione parametrica della retta passante per i punti P e Q.
(c) Determinare l'equazione parametrica della retta di direzione $\vec{OP}$ e passante per il punto Q.

(9) Determinare l'equazione cartesiana del piano per l'origine perpendicolare al vettore $(1, 1, 1)$. Determinare inoltre se tutti i punti della retta di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 + t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

sono contenuti in tale piano.

(10) Determinare un vettore dello spazio che sia perpendicolare ai tre vettori $v = (-1, 2, -1), w = (1, 0, -1), u = (0, 1, -1)$.