ESERCIZI SU RANGO E MATRICI INVERTIBILI

(1) Sia A la seguente matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Decomporre A come prodotto "colonne-righe" $A = CR$ come descritto sulle slides.

(b) Esprimere le colonne di A come combinazione lineare delle colonne di C.

(c) Esprimere le righe di A come combinazione lineare delle righe di R.

(d) Calcolare il rango di A.

(e) Utilizzando il metodo di Gauss, trovare tutte le soluzioni del sistema

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(2) Sia A la seguente matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Decomporre A come prodotto "colonne-righe" $A = CR$ come descritto sulle slides.

(b) Esprimere le colonne di A come combinazione lineare delle colonne di C.

(c) Esprimere le righe di A come combinazione lineare delle righe di R.

(d) Calcolare il rango di A.

(e) Utilizzando il metodo di Gauss, trovare tutte le soluzioni del sistema

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) (ESERCIZIO CON SOLUZIONE COMPLETA)

Sia A la seguente matrice:

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Trasformare la matrice a scala utilizzando le trasformazioni elementari di Gauss. Calcolare il rango della matrice di partenza come numero di righe non nulle della matrice a scala raggiunta. La matrice di partenza è invertibile? E quella a scala?

(b) Se la matrice A è inveribile, trovare la matrice inversa con l'algoritmo delle due colonne descritto nelle slides.

(c) Utilizzando i punti precedenti, trovare le soluzioni del sistema

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

SOLUZIONE

(a) Trasformazione a scala della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftarrow (R_2 - R_1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 \leftarrow (R_3 - R_2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Poiché abbiamo raggiunto una matrice a scala senza righe nulle, la matrice di partenza ha rango 3 ed è invertibile come la matrice a scala raggiunta.

(b) Metodo delle due colonne: a sinistra si parte dalla matrice A, si raggiunge la forma a scala senza righe nulle, poi si usano i pivots per annullare gli elementi della colonna sopra e sotto i pivots ed eventualmente si divide per dei coefficienti non nulli fino ad arrivare alla matrice identità. Sulla colonna di destra si applicano le trasformazioni svolte a sinistra partendo dalla matrice identità. Alla fine, sulla destra otteniamo l'inversa di A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftarrow (R_2 - R_1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 \leftarrow (R_3 - R_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftarrow (R_1 - R_2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftarrow (R_1 - R_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftarrow (R_2 + (1/2)R_3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 \leftarrow (1/2)R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

(4) Determinare l'invertibilità della matrice A e trovarne l'inversa seguente utilizzando l'algoritmo delle due colonne come nel precedente esercizio.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) Sia A la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Utilizzando il metodo delle matrici elementari, dimostrare che A è invertibile e trovare l'inversa A^{-1}.

(b) Trovare tutte le soluzioni del sistema

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(6) Generalizzando l'esercizio precedente, trovare l'inversa di una matrice di dimensioni $n \times n$ tale che i coefficienti della matrice sono nulli fuori della diagonale principale e non nulli sulla diagonale principale.

(7) Dimostrare che, se le righe di una matrice quadrata sono dipendenti, questa proprietà rimane vera anche se operiamo una trasformazione elementare sulla matrice. Utilizzare questa proprietà per dimostrare che una matrice quadrata con righe dipendenti non è invertibile (in particolare, matrici con due riche uguali o con una riga nulla non sono invertibili).