Rango per righe e per colonne

DEFINIZIONE *A* matrice $m \times n$

1. Lo spazio delle colonne **Col**(A) di A, è il sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A.
2. Lo spazio delle righe **Row**(A) di A, è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe di A.
3. Il rango per colonne di A è la dimensione dello spazio generato dalle colonne (ovvero, il massimo numero di colonne indipendenti di A).
4. Il rango per righe di A è la dimensione dello spazio generato dalle righe (ovvero, il massimo numero di righe indipendenti di A).

Dimostreremo che, in ogni matrice A, il rango per righe è uguale al rango per colonne.

ESEMPIO

Se A è una matrice, indichiamo con $A(-, i)$ e $A(i, -)$ l'i-esima colonna e l'i-esima riga di A, rispettivamente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Col}(A) = \begin{bmatrix} A(-,1) & A(-,2) & A(-,3) \end{bmatrix}, \mathbf{Row}(A) = \begin{bmatrix} R(1,-) & R(2,-) \end{bmatrix}$$

Poiché le tre colonne di A sono vettori dipendenti, ma le prime due colonne sono indipendenti, il rango per colonne è 2, pari al rango per righe (le due righe di A sono indipendenti). Se invece

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

allora il rango per colonne è pari a 3 perché le tre colonne sono indipendenti; anche il rango per righe è 3 perché le 4 righe sono dipendenti (quattro vettori di $\mathbb{R}^3$ sono sempre dipendenti), ma mentre le prime tre righe sono indipendenti.

Interpretazione del prodotto fra due matrici

La moltiplicazione di una matrice C di dimensione $m \times r$ per una matrice R di dimensione $r \times n$ ha come risultato una matrice $A = CR$ di dimensione $m \times n$ tale che:

1. Le colonne di A sono combinazioni lineari delle colonne di C;
2. Le righe di A sono combinazioni lineari delle righe di R.

Dimostrazione Fattorizzando a blocchi C ed R.
Ad esempio:

$$A(-,3) = CR(-,3) = \sum_{j=1}^{r} C(-,j)R(j,3),$$

$$A(2,-) = C(2,-)R = \sum_{j=1}^{r} C(2,j)R(j,-)$$

ed, in generale:

$$A(-,i) = CR(-,i) = \sum_{j=1}^{r} C(-,j)R(j,i),$$

$$A(i,-) = C(i,-)R = \sum_{j=1}^{r} C(i,j)R(j,-)$$

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = CR$$

$$A(-,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = CR(-,2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = -2C(-,1) + 2C(-,2) =$$

$$-2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A(1,-) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = C(1,-)R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1R(1,-) + 1R(2,-) =$$

$$1 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Fattorizzazione $A = CR$ di una matrice

Definizione di C: se il rango per colonne di A è r, scegliamo r colonne indipendenti di A e formiamo una matrice C. Ogni colonna di A si scrive come combinazione lineare delle colonne di C.

Definizione di R: la i-esima colonna della matrice R è data dai coefficienti che esprimono $A(-, i)$ come combinazione lineare delle colonne di C.
Ad esempio:
Ad esempio, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, il rango per colonne di A è 2. Scegliendo la prima e la terza colonna di A (che sono indipendenti) otteniamo la matrice $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Poiché

$$\begin{array}{lcll} A(-,1) & = & 1 & C(-,1) \\ A(-,2) & = & -2 & C(-,1) + 2C(-,2) \\ A(-,3) & = & 0 & C(-,1) + 1C(-,2) \end{array}$$

avremo

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(controllare che $A = CR$, vedi slide precedente).

Un altro esempio di fattorizzazione CR

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

il rango per colonne è 2 (la terza colonna è la somma delle prime due). Scegliendo le prime due colonne per costruire C, avremo

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

mentre, poiché $C(-,3) = C(-,1) + C(-,2)$ la matrice R è:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificare che $A = CR$.

Rango per Righe = Rango per Colonne

TEOREMA

Il rango per colonne di una matrice A è uguale al suo rango per righe.

Dimostrazione: Data una matrice A, consideriamo la sua fattorizzazione $A = CR$ (vedi slide precedente).
Per definizione, C ha rango per colonne uguale al rango per colonne di A.
Le righe di R sono indipendenti: infatti, supponiamo che le r colonne indipendenti di A usate per costruire C abbiano indici $i_1, \ldots, i_r$: allora $R(-, i_1) = e_1, \ldots, R(-, i_r) = e_r$. Ogni riga di R quindi contiene una posizione in cui la colonna corrispondente ha un solo coefficiente non nullo. Nessuna i riga di R quindi può essere combinazione lineare delle altre righe e R ha r righe indipendenti. Ne segue che il rango per righe di R è r. Le righe di A sono combinazioni lineari delle righe di R, quindi anche il rango per righe di A è r.

Calcolo del Rango

DEFINIZIONE

Il rango **rk**(A) di una matrice A è il suo rango per righe (o, equivalentemente, il suo rango per colonne)

Per il calcolo del rango di una matrice A, trasformiamo la matrice a scala usando le operazioni elementari sulle righe, che non cambiano il rango della matrice. Il numero delle righe non nulle della matrice a scala è il rango della matrice di partenza (e anche di quella a scala).

ESEMPIO

- La matrice identità I_n ha rango n perché i suoi vettori riga sono i vettori della base canonica quindi in particolare sono indipendenti.
- La matrice
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
ha rango 2 perché è a scala e ci sono due righe non nulle.

ESEMPIO

La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 2: infatti possamo ridurla a scala nel modo seguente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 \leftarrow R_2 - R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'ultima matrice è a scala e ha rango 2, che è anche il rango della prima matrice.

Matrici Invertibili

DEFINIZIONE

Una matrice $n \times n$ (quadrata) A si dice invertibile se esiste una matrice quadrata B della stessa dimensione tale che $BA = I_n$.

NOTA BENE: Come vedremo fra poco, è possibile dimostrare che se esiste B con $BA = I_n$ allora una tale matrice è unica e vale anche $AB = I_n$. Questa matrice B è chiamata l'inversa di A (in simboli $B = A^{-1}$)).

ESEMPIO

La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile, con inversa $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (verificare che $BA = AB = \mathbf{I}$).

La matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

non è invertibile, perché per qualsiasi matrice B, la seconda colonna di BA sarà la colonna nulla e quindi $BA \neq \mathbf{I_2}$.

Per la stessa ragione, anche la matrice quadrata nulla (0) non è invertibile.

Inversa e Rango

Come verificare se una matrice quadrata è invertibile o meno?

Inversa e Rango

Come verificare se una matrice quadrata è invertibile o meno?

TEOREMA

Una matrice quadrata A di dimensione $n \times n$ è invertibile $\Leftrightarrow$ $\mathbf{rk}(A) = n$.

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Se A è invertibile, esiste una matrice B tale che $BA = \mathbf{I_n}$. Si ha allora che le righe di $\mathbf{I_n}$, ovvero i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$, sono combinazioni lineari delle righe di A. Questo implica che le righe di A generano tutto $\mathbb{R}^n$, quindi sono necessariamente indipendenti e $\mathbf{rk}(A) = n$.

($\Leftarrow$) (Primi cenni, da espandere nelle successive slides) Se $\mathbf{rk}(A) = n$, portando la matrice a scala otteniamo una matrice con tutte le righe non nulle, in cui ogni colonna è pivot di qualche riga. Usando questi pivot, come vedremo negli esempi che seguono, sempre con operazioni elementari delle righe è possibile raggiungere la matrice identità. Nel seguito vedremo che ogni operazione elementare delle righe corrisponde ad una matrice. Il prodotto di tutte le matrici utilizzate fornisce la matrice inversa di A.

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE DI UNA MATRICE

Le operazioni elementari sulle righe di una matrice quadrata di righe

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

sono quelle già utilizzate per ridurre una matrice fino ad ottenere una matrice a scala:

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE DI UNA MATRICE

Le operazioni elementari sulle righe di una matrice quadrata di righe

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

sono quelle già utilizzate per ridurre una matrice fino ad ottenere una matrice a scala:

1. scambiare la riga A_i con la riga A_j;

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE DI UNA MATRICE

Le operazioni elementari sulle righe di una matrice quadrata di righe

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

sono quelle già utilizzate per ridurre una matrice fino ad ottenere una matrice a scala:

1. scambiare la riga A_i con la riga A_j;
2. moltiplicare la riga A_i per un numero $c \neq 0$;

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE DI UNA MATRICE

Le operazioni elementari sulle righe di una matrice quadrata di righe

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

sono quelle già utilizzate per ridurre una matrice fino ad ottenere una matrice a scala:

1. scambiare la riga A_i con la riga A_j;
2. moltiplicare la riga A_i per un numero $c \neq 0$;
3. sostituire la riga A_i con la riga $A_i + cA_j$ dove $c \neq 0$, $i \neq j$.

MATRICI ELEMENTARI

Ad ogni operazione elementare corrisponde una matrice che si ottiene dalla matrice identità $n \times n$ operando la relativa operazione elementare:

MATRICI ELEMENTARI

Ad ogni operazione elementare corrisponde una matrice che si ottiene dalla matrice identità $n \times n$ operando la relativa operazione elementare:

1. La matrice $E[R_i \leftrightarrow R_j]$ si ottiene da $I_{n\times n}$ scambiando le righe i, j. Ad esempio, se $n = 3$ allora

$$E[R_2 \leftrightarrow R_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRICI ELEMENTARI

Ad ogni operazione elementare corrisponde una matrice che si ottiene dalla matrice identità $n \times n$ operando la relativa operazione elementare:

1. La matrice $E[R_i \leftrightarrow R_j]$ si ottiene da $I_{n\times n}$ scambiando le righe i, j. Ad esempio, se $n = 3$ allora

$$E[R_2 \leftrightarrow R_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. La matrice $E[R_i \leftarrow cR_i]$ si ottiene da $I_{n\times n}$ moltiplicando l'i-esima riga di $I_{n\times n}$ per c. Ad esempio, se $n = 3$, $i = 2$ e $c = 1/2$, allora

$$E[R_2 \leftarrow 1/2R_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICI ELEMENTARI

Ad ogni operazione elementare corrisponde una matrice che si ottiene dalla matrice identità $n \times n$ operando la relativa operazione elementare:

1. La matrice $E[R_i \leftrightarrow R_j]$ si ottiene da $I_{n\times n}$ scambiando le righe i, j. Ad esempio, se $n = 3$ allora
$$E[R_2 \leftrightarrow R_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
2. La matrice $E[R_i \leftarrow cR_i]$ si ottiene da $I_{n\times n}$ moltiplicando l'i-esima riga di $I_{n\times n}$ per c. Ad esempio, se $n = 3$, $i = 2$ e $c = 1/2$, allora
$$E[R_2 \leftarrow 1/2R_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
3. La matrice $E[R_i \leftarrow R_i + cR_j]$ si ottiene da $I_{n\times n}$ sostituendo l'i-esima riga di $I_{n\times n}$ con l'i-esima riga più la j-esima riga moltiplicata per c. Ad esempio, se $n = 3$, $i = 2, j = 3$ e $c = 2$, allora
$$E[R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si vede facilmente che per ottenere una data trasformazione elementare su una matrice quadrata A basta moltiplicarla a sinistra per la relativa matrice elementare.

Si vede facilmente che per ottenere una data trasformazione elementare su una matrice quadrata A basta moltiplicarla a sinistra per la relativa matrice elementare.

Ad esempio, per scambiare la riga i con la riga j nella matrice A basta moltiplicare $E[R_i \leftrightarrow R_j]$ per A.

Si vede facilmente che per ottenere una data trasformazione elementare su una matrice quadrata A basta moltiplicarla a sinistra per la relativa matrice elementare.

Ad esempio, per scambiare la riga i con la riga j nella matrice A basta moltiplicare $E[R_i \leftrightarrow R_j]$ per A. Se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

allora

$$E[R_2 \leftrightarrow R_3] \cdot A = E[R_2 \leftrightarrow R_3] \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice risultante è esattamente la matrice A in cui abbiamo scambiato la seconda e la terza riga.

Verificare con degli esempi che le altre matrici elementari corrispondono alle relative trasformazioni, ovvero:

Verificare con degli esempi che le altre matrici elementari corrispondono alle relative trasformazioni, ovvero:

- per ottenere la matrice A in cui la riga i è moltiplicata per $c \neq 0$ basta conisderare la matrice
$$E[R_i \leftarrow cR_i]A;$$

Verificare con degli esempi che le altre matrici elementari corrispondono alle relative trasformazioni, ovvero:

- per ottenere la matrice A in cui la riga i è moltiplicata per $c \neq 0$ basta conisderare la matrice
$$E[R_i \leftarrow cR_i]A;$$
- per ottenere la matrice A in cui la riga A_i è sostituita con la riga $A_i + cA_j$ dove $c \neq 0$, $i \neq j$ basta considerare la matrice
$$E[R_i \leftarrow R_i + cR_j]A.$$

ESEMPIO 1

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

trovare una matrice E (prodotto di matrici elementari) tale che $E \cdot A$ abbia la prima riga uguale ad $(0, 0, 3)$.

ESEMPIO 1, continua

Possiamo ottenere come prima riga $(0,0,3)$ usando l'operazione elementare $(R_1 \leftarrow R_1 + R_3)$

ESEMPIO 1, continua

Possiamo ottenere come prima riga $(0, 0, 3)$ usando l'operazione elementare $(R_1 \leftarrow R_1 + R_3)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (R_1 \leftarrow R_1 + R_3) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 1, continua

Possiamo ottenere come prima riga $(0, 0, 3)$ usando l'operazione elementare $(R_1 \leftarrow R_1 + R_3)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (R_1 \leftarrow R_1 + R_3) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo ottenere lo stesso effetto su A moltiplicando a sinistra per la matrice elementare $E(R_1 \leftarrow R_1 + R_3)$:

$$E(R_1 \leftarrow R_1 + R_3)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 2

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

trovare una matrice E (prodotto di matrici elementari) tale che $E \cdot A$ abbia la prima riga uguale ad $(1, 2, 1)$.

ESEMPIO 2, continua

Possiamo ottenere come prima riga $(1, 2, 1)$ usando le seguenti operazioni elementari sulle righe della matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (R_2 \leftrightarrow R_1) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(R_1 \leftarrow 1/2R_1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 2, continua

Per trasformare A nella matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ abbiamo usato le due operazioni elementari

$$(R_2 \leftrightarrow R_1), \quad (R_1 \leftarrow 1/2 R_1)$$

Se E_1, E_2 sono le matrici elementari corrispondenti, lo stesso effetto sulla matrice A si ottiene moltiplicandola a sinistra per la matrice $E_2 E_1$, prodotto delle matrici elementari $E_2 E_1$ (notare l'ordine inverso nella moltiplicazione rispetto all'ordine in cui vengono eseguite le operazioni elementari). Infatti:

$$E_2 E_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 3

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

trovare una matrice E (prodotto di matrici elementari) tale che $E \cdot A$ abbia la prima riga uguale ad $(1, 0, 0)$.

ESEMPIO 3, continua

Possiamo ottenere come prima riga $(1, 0, 0)$ usando le seguenti operazioni elementari sulle righe della matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (R_2 \leftrightarrow R_1) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(R_1 \leftarrow 1/2R_1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} (R_3 \leftarrow R_3 + R_2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} (R_1 \leftarrow R_1 - 5/3R_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 2, continua

Per trasformare A nella matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ abbiamo usato le seguenti operazioni elementari:

$$(R_2 \leftrightarrow R_1), (R_1 \leftarrow 1/2R_1), (R_3 \leftarrow R_3 + R_2), (R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2), (R_1 \leftarrow R_1 - 5/3R_3)$$

Chiamando E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 le corrispondenti nmatrici elementari, lo stesso effetto sulla matrice A si ottiene moltiplicandola a sinistra per $E_5E_4E_3E_2E_1$ (nell'ordine da destra a sinistra). Infatti:

$$E_5E_4E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 3, continua

Possiamo calcolare facilmente il prodotto $E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$ dell'esempio precedente utilizzando le operazioni elementari corrispondenti partendo dalla matrice identità :

ESEMPIO 3, continua

Possiamo calcolare facilmente il prodotto $E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$ dell'esempio precedente utilizzando le operazioni elementari corrispondenti partendo dalla matrice identità :

$$E_1 := E(R_2 \leftrightarrow R_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ESEMPIO 3, continua

Possiamo calcolare facilmente il prodotto $E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$ dell'esempio precedente utilizzando le operazioni elementari corrispondenti partendo dalla matrice identità :

$$E_1 := E(R_2 \leftrightarrow R_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 E_1 = E(R_1 \leftarrow 1/2 R_1) E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 3, continua

Possiamo calcolare facilmente il prodotto $E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$ dell'esempio precedente utilizzando le operazioni elementari corrispondenti partendo dalla matrice identità :

$$E_1 := E(R_2 \leftrightarrow R_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2 E_1 = E(R_1 \leftarrow 1/2 R_1) E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 = E(R_3 \leftarrow R_3 + R_2) E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 3, continua

Possiamo calcolare facilmente il prodotto $E_5 E_4 E_3 E_2 E_1$ dell'esempio precedente utilizzando le operazioni elementari corrispondenti partendo dalla matrice identità :

$$E_1 := E(R_2 \leftrightarrow R_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 E_1 = E(R_1 \leftarrow 1/2 R_1) E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 E_2 E_1 = E(R_3 \leftarrow R_3 + R_2) E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4 E_3 E_2 E_1 = E(R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2) E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO 3, continua

Possiamo calcolare facilmente il prodotto $E_5E_4E_3E_2E_1$ dell'esempio precedente utilizzando le operazioni elementari corrispondenti partendo dalla matrice identità :

$$E_1 := E(R_2 \leftrightarrow R_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_2E_1 = E(R_1 \leftarrow 1/2R_1)E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3E_2E_1 = E(R_3 \leftarrow R_3 + R_2)E_2E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4E_3E_2E_1 = E(R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2)E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = E_5E_4E_3E_2E_1 = E(R_1 \leftarrow R_1 - 5/3R_3)E_4E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & -5/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verificare che $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

COME TROVARE LA MATRICE INVERSA, SE ESISTE

TEOREMA

Una matrice quadrata A di dimensione n è invertibile SE E SOLO SE è possibile trasformarla tramite delle operazioni elementari nella matrice identità. Inoltre, se $E_k, \ldots, E_1$ matrici elementari corrispondenti alle operazioni suddette, della stessa dimensione di A, allora $A^{-1} = E_k \ldots E_1$.

COME TROVARE LA MATRICE INVERSA, SE ESISTE

TEOREMA

Una matrice quadrata A di dimensione n è invertibile SE E SOLO SE è possibile trasformarla tramite delle operazioni elementari nella matrice identità. Inoltre, se $E_k, \ldots, E_1$ matrici elementari corrispondenti alle operazioni suddette, della stessa dimensione di A, allora $A^{-1} = E_k \ldots E_1$.

PROCEDURA PER IL CALCOLO DELL'INVERSA:

COME TROVARE LA MATRICE INVERSA, SE ESISTE

TEOREMA

Una matrice quadrata A di dimensione n è invertibile SE E SOLO SE è possibile trasformarla tramite delle operazioni elementari nella matrice identità. Inoltre, se $E_k, \ldots, E_1$ matrici elementari corrispondenti alle operazioni suddette, della stessa dimensione di A, allora $A^{-1} = E_k \ldots E_1$.

PROCEDURA PER IL CALCOLO DELL'INVERSA:

- operiamo in parallelo su due colonne;

COME TROVARE LA MATRICE INVERSA, SE ESISTE

TEOREMA

Una matrice quadrata A di dimensione n è invertibile SE E SOLO SE è possibile trasformarla tramite delle operazioni elementari nella matrice identità. Inoltre, se $E_k, \ldots, E_1$ matrici elementari corrispondenti alle operazioni suddette, della stessa dimensione di A, allora $A^{-1} = E_k \ldots E_1$.

PROCEDURA PER IL CALCOLO DELL'INVERSA:

- operiamo in parallelo su due colonne;
- sulla prima colonna, partendo da A, cerchiamo tramite operazioni elementari di trasformare A nella matrice identica;

COME TROVARE LA MATRICE INVERSA, SE ESISTE

TEOREMA

Una matrice quadrata A di dimensione n è invertibile SE E SOLO SE è possibile trasformarla tramite delle operazioni elementari nella matrice identità. Inoltre, se $E_k, \ldots, E_1$ matrici elementari corrispondenti alle operazioni suddette, della stessa dimensione di A, allora $A^{-1} = E_k \ldots E_1$.

PROCEDURA PER IL CALCOLO DELL'INVERSA:

- operiamo in parallelo su due colonne;
- sulla prima colonna, partendo da A, cerchiamo tramite operazioni elementari di trasformare A nella matrice identica; sia $A_0 := A, \ldots, A_i$ il risultato che si ottiene da A dopo i operazioni elementari.

COME TROVARE LA MATRICE INVERSA, SE ESISTE

TEOREMA

Una matrice quadrata A di dimensione n è invertibile SE E SOLO SE è possibile trasformarla tramite delle operazioni elementari nella matrice identità. Inoltre, se $E_k, \ldots, E_1$ matrici elementari corrispondenti alle operazioni suddette, della stessa dimensione di A, allora $A^{-1} = E_k \ldots E_1$.

PROCEDURA PER IL CALCOLO DELL'INVERSA:

- operiamo in parallelo su due colonne;
- sulla prima colonna, partendo da A, cerchiamo tramite operazioni elementari di trasformare A nella matrice identica; sia $A_0 := A, \ldots, A_i$ il risultato che si ottiene da A dopo i operazioni elementari.
- Sulla seconda colonna, partendo da $B_0 = I_n$, calcoliamo le matrici $B_0, B_1, \ldots,$ operando le stesse operazioni elementari che facciamo a sinistra.

COME TROVARE LA MATRICE INVERSA, SE ESISTE

TEOREMA

Una matrice quadrata A di dimensione n è invertibile SE E SOLO SE è possibile trasformarla tramite delle operazioni elementari nella matrice identità. Inoltre, se $E_k, \dots, E_1$ matrici elementari corrispondenti alle operazioni suddette, della stessa dimensione di A, allora $A^{-1} = E_k \dots E_1$.

PROCEDURA PER IL CALCOLO DELL'INVERSA:

- operiamo in parallelo su due colonne;
- sulla prima colonna, partendo da A, cerchiamo tramite operazioni elementari di trasformare A nella matrice identica; sia $A_0 := A, \dots, A_i$ il risultato che si ottiene da A dopo i operazioni elementari.
- Sulla seconda colonna, partendo da $B_0 = I_n$, calcoliamo le matrici $B_0, B_1, \dots,$ operando le stesse operazioni elementari che facciamo a sinistra.
- Per le proprietà delle matrice elementari ad ogni passo avremo

$$A_i = B_i A$$

- Quindi se sulla sinistra raggiungiamo $A_k = I_n$, varrà $I_n = B_k A$.

COME TROVARE LA MATRICE INVERSA, SE ESISTE

$$
\begin{array}{ccc}
A_0 := A & B_0 := I_n & \\
A_1 & B_1 & \\
\vdots & \vdots & \text{ad ogni livello, vale } A_i = B_i A \\
A_i & B_i & \\
\vdots & \vdots & \\
I_n & B_k & \text{quindi } I_n = B_k A \text{ e } B_k = A^{-1}
\end{array}
$$

ESEMPIO

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Partendo dalla prima riga di A, e proseguendo poi sulle altre righe, cerchiamo di ottenere il ”pivot” 1 sulla diagonale, per poi annullare tutti gli elementi al di sotto e al di sopra di esso.

ESEMPIO

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Partendo dalla prima riga di A, e proseguendo poi sulle altre righe, cerchiamo di ottenere il ”pivot” 1 sulla diagonale, per poi annullare tutti gli elementi al di sotto e al di sopra di esso. Nella colonna di destra, facciamo le stesse operazioni elementari partendo da I_n.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Sia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Partendo dalla prima riga di A, e proseguendo poi sulle altre righe, cerchiamo di ottenere il ”pivot” 1 sulla diagonale, per poi annullare tutti gli elementi al di sotto e al di sopra di esso. Nella colonna di destra, facciamo le stesse operazioni elementari partendo da I_n.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO, continua

$R_3 \leftarrow R_3 - 1/2R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_3 \leftarrow 2R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_1 \leftarrow R_1 - R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$R_2 \leftarrow 1/2R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO, continua

Poiché sulla prima colonna abbiamo ottenuto l'identità, la matrice scritta sulla seconda colonna sarà A^{-1},

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Verificare che effettivamente vale:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{3\times 3}$$

ESERCIZI

Trovare, se possibile, l'inversa delle seguenti matrici.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una matrice con due righe uguali può essere invertibile?

SOLUZIONI

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Una martice con due righe uguali può essere trasformata in una matrice con una riga nulla, sottraendo le due righe. Se la matrice di partenza fosse invertibile, lo sarebbe anche la matrice con una riga nulla, ma questo è impossibile.