SIMULAZIONE SCRITTO
10-01-13

PRIMA PARTE

Per ciascuna delle seguenti affermazioni, indicare se è vera o falsa:

1. Se A, B sono insiemi e $(A \times B) \setminus (B \times A) \neq \emptyset$ allora $A \cap B \neq \emptyset$ **V** **F** F
2. Se A, B sono insiemi allora vale sempre $(A \setminus B) \cup B = A$. **V** **F** F
3. $\{(-1, 1)\} \subseteq P(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$. **V** **F** F
4. La funzione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(n, m) = n^m$ è suriettiva. **V** **F** V
5. La funzione $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(n, m) = n^m$ è iniettiva. **V** **F** F
6. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(n) = 2n + 3$ è suriettiva. **V** **F** F
7. La funzione $f : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ definita da

$$f(n) = \{0, 1, \ldots, n\}$$

   è suriettiva. **V** **F** F
8. Se una funzione ha un'inversa, allora è iniettiva. **V** **F** V
9. Se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ è definita da $f(n) = -n^2 + 2$ e $Y = \{0, -1, -2\}$ allora $1 \in f^{-1}(Y)$. **V** **F** F
10. Siano $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to P(\mathbb{Z})$ definite da: $f(x) = x^3$, $\qquad g(x) = \{x^2, -x^2\}$.
    Se $h = g \circ f$ allora $h(0) = \{0\}$. **V** **F** V
11. La funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(z) = z^2$ è invertibile. **V** **F** F
12. La relazione binaria R definita sui sottoinsiemi dei numeri naturali da

$$(X, Y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad X \setminus Y = \emptyset$$

    è simmetrica. **V** **F** F
13. La relazione binaria R definita sugli interi da

$$xRy \quad \Leftrightarrow x + y \neq 0$$

    è transitiva. **V** **F** F
14. Poiché $7 = (-1) \cdot (-12) - 5$ resto della divisione di 7 per -12 è -5 **V** **F** F
15. $-11 \equiv_8 -3$ **V** **F** V
16. $(-14)^{75} + 39 \times 30^{1724} - 37^2 \equiv_{13} 8$ **V** **F** V

17. Considera la proprietà:

ogni numero naturale pari diverso da zero è somma di due numeri naturali dispari

Quali fra le seguenti argomentazioni sono convincenti? (mettre una crocetta su quelle considerate convincenti: possono essere una, più di una o nessuna)

(a) la proprietà è vera perché, ad esempio, $8 = 3 + 5$ e anche $4 = 1 + 3$;

(b) la proprietà è vera perché la somma di due numeri dispari è sempre un numero pari;

(c) ($\times$) la proprietà è vera perché ogni numero n è somma del numero $(n - 1)$ e di 1; 1 è dispari e, se n è pari, anche $(n - 1)$ è dispari;

(d) la proprietà è vera perché ogni numero n pari si scrive come $n = 2m = m + m$ per m dispari;

(e) la proprietà è falsa perché $8 = 2 + 6$ e $2, 6$ sono pari e non dispari.

SECONDA PARTE

1. Sia X un insieme con n elementi ed Y un insieme con m elementi.

(a) Quante sono le funzioni con dominio X e codominio Y?

(b) Una funzione $f : X \to Y$ si dice costante se tutti gli elementi hanno la stessa immagine, cioè se vale $\exists y \in B\ \forall x \in A\ f(x) = y$. Quante sono le funzioni costanti da X a Y?

(c) Quante sono le funzioni NON costanti da X a Y?

(d) Quante nono le funzioni f da X a Y per cui vale $\forall x \in A\ \exists y \in B\ f(x) = y$?

(e) Fissati due elementi $a \in X$ e $b \in Y$ quante sono le funzioni f da X a Y tali che $f(a) = b$?

(f) Fissati due elementi $a \in X$ e $b \in Y$ quante sono le funzioni iniettive f da X a Y tali che $f(a) = b$?

(g) Se $|X| \geq 2$ e fissato $b \in Y$, quante sono le funzioni f da X a Y tali che $|f^{-1}(\{b\})| = 2$?

SOL

(a) m^n;

(b) una funzione costante è determinata univocamente dal valore $b \in B$ per cui vale $f(a) = b$ per ogni $a \in A$; sono quindi m (una per ogni elemento di B);

(c) $m^n - m$: il numero delle funzioni non costanti si ottiene sottraendo il numero delle funzoni costanti dal numero di funzioni da X a Y;

(d) La proprietà $\forall x \in A\ \exists y \in B\ f(x) = y$ è soddisfatta da tutte le funzioni da X a Y; la risposta è quindi la stessa del primo punto, cioè m^n.

(e) Per descrivere una funzione $f : X \to Y$ con $f(a) = b$ è sufficiente assegnare un valore in B alle immagini degli $n - 1$ elementi in $X \setminus \{a\}$. Si hanno quindi m^{n-1} funzioni con $f(a) = b$.

(f) Per descrivere una funzione iniettiva $f : X \to Y$ con $f(a) = b$ è sufficiente assegnare valori distinti in $B \setminus \{b\}$ per le immagini degli $n - 1$ elementi in $X \setminus \{a\}$.
Si hanno quindi $(m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \ldots \cdot (m - (n - 1))$ funzioni iniettive da X a Y con $f(a) = b$.

(g) Per descrivere una funzione f con $|f^{-1}(\{b\})| = 2$ possiamo per prima cosa scegliere i due elementi di X che hanno immagine b. Questa scelta può essere fatta in $\binom{n}{2}$ modi (l'ordine non ha importanza, visto che entrambi gli elementi hanno la stessa immagine). Per ognuna di queste scelte $\{a_1, a_2\}$, rimane ancora da scegliere in $B \setminus \{b\}$ l'immagine degli elementi in $A \setminus \{a_1, a_2\}$. Per ognuno degli $n - 2$ elementi di $A \setminus \{a_1, a_2\}$ si hanno $m - 1$ scelte in $B \setminus \{b\}$, quindi il numero delle funzioni f da X a Y tali che $|f^{-1}(\{b\})| = 2$ è

$$\binom{n}{2} \cdot (m-1)^{n-2}$$

2. (a) Calcolare il massimo comun divisore fra 1126 e 37, sia fattorizzando i numeri che utilizzando l'algoritmo di Euclide.
   (b) Individuare due interi x, y tali che $MCD(1126, 37) = x1126 + y37$.
   (c) Il numero 37 è invertibile modulo 1126? Se si, qual è il suo inverso?

   SOL

   Dalla fattorizzazione in primi si vede che $MCD(1126, 37) = 1$ (infatti $1126 = 2 \cdot 563$ e 563 è primo, mentre 37 è primo). Quindi 37 è invertibile modulo 1126. Utilizzando l'algoritmo di Euclide si trova

   $1126 = 30 \cdot 37 + 16;$
   $37 = 2 \cdot 16 + 5;$
   $16 = 3 \cdot 5 + 1;$

   Lavorando sui resti si ha:

$$16 = 1126 - 30 \cdot 37, \quad 5 = 37 - 2 \cdot 16 = 37 - 2 \cdot (1126 - 30 \cot 37) = -2 \cdot 1126 + 61 \cdot 37,$$

$$1 = 16 - 3 \cdot 5 = (1126 - 30 \cot 37) - 3 \cdot (-2 \cdot 1126 + 61 \cdot 37) = 7 \cdot 1126 - 213 \cdot 37$$

   Quindi $1 = 7 \cdot 1126 - 213 \cdot 37$ e l'inverso modulo 1126 di 37 è $-213 \equiv_{1126} 1126 - 213 = 913$.

3. Considerare la seguente relazione binaria E sull'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $\quad (x, y)\ E\ (x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$
   (a) Determinare almeno tre elementi che sono in relazione con $(0, 0)$;
   (b) Determinare la classe dell'elemento $(1, 2)$ completando opportunamente:

$$[(1,2)] = \{(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ldots\ldots\}$$

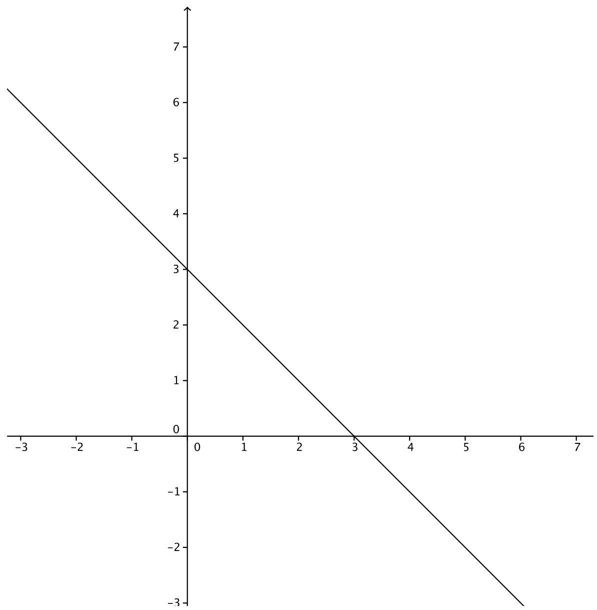
   Rappresentare graficamente gli elementi della classe;
   (c) Quale dei seguenti insiemi è un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? (giustificare le risposte date)
      i. $\mathbb{R}$;
      ii. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
      iii. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 0\}$;
      iv. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = 0\}$;
      v. $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$;
      vi. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists r \in \mathbb{R} x + y = r\}$.

   SOL

   (a) $(1, -1), (2, -2), (-1, 1)$
   (b)

$$[(1,2)] = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (1,2)E(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 3\}$$

   (vedi la pagina seguente per la rappresentazione grafica).



(c) i. $\mathbb{R}$: non è un sottoinsieme del dominio di E, quindi non può essere un insieme di rappresentanti;

ii. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $(0,0)$ e $(1,-1)$ appartengono entrambi ad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e sono in relazione, quindi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ non può essere un insieme di rappresentanti;

iii. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 0\}$; questa è la classe di $(0,0)$ e analogamente a quanto visto sopra non può essere un insieme di rappresentanti;

iv. $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = 0\}$; data una classe qualsiasi classe $[(a,b)]$ l'elemento $(a+b,0)$ appartiene all'insieme ed è nella classe $[(a,b)]$; inoltre da $(x,0)E(x',0)$ segue $x = x'$, quindi ogni classe contiene al più un elemento dell'insieme dato. Questo dimostra che 'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = 0\}$ è un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E.

v. $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$; come sopra, invertendo x con y.

vi. l'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \exists r \in \mathbb{R} x + y = r\}$ è uguale ad $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e non è un insieme di rappresentanti.