ESERCIZI ESAME 2

Damiano Fumagalli

2022-11-25

ES 1

Date 10 urne A_i = evento scegliere a caso una delle 10 urne

- $S_{A_1,...,A_9} = \{B, B, N, N\}$
- $S_{A_{10}} = \{B, B, B, B, B, N\}$

Trovare La probabilità che l'urna estratta sia la 10 data una pallina bianca

- $P(B)$ = probabilità che la pallina sia bianca tra tutte quelle disponibili nelle 10 urne
  - $P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i) = 0.53333$
- $P(A_i) = 1/10$
- $P(B|A_i)$ probabilità che la pallina sia bianca all'interno dell'urna i-esima

$$P(A_{10}|B) = \frac{P(A_{10})P(B|A_{10})}{P(B)} = \frac{1/10 * 5/6}{(9/20 + 5/60)} = 0.156$$

ES 2

B = evento il test è positivo
A = evento la persona è malata
A^c = evento la persona è sana

- $P(A) = 1/1000$
- $P(B|A) = 0.999$
- $P(B|A^c) = 0.002$

Determinare la probabilità che la persona sia malata dato il test positivo

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) = 1/1000 * 0.999 + (1 - 1/1000)0.002 = 0.003$$

$$P(A|B) = \frac{1/1000 * 0.999}{0.003} = 0.33$$

ES 3

$$P(B) = \sum P(B|A_i)P(A_i)$$

- A_i = evento esce la faccia i dal dado
- $P(B|A_i) = \binom{n}{i}$

$$U = \{N, N, N, N, N, x, x, x, x, x\}$$

ES 5

A = evento persona propensa all'incidente
B = evento fa l'incidente entro il 1° anno

- $P(A) = 0.3$= probabilità che una persona sia propensa a un incidente
- $P(B|A) = 0.2$ = probabilità che una persona faccia un incidente essendo propensa a fare un incidente
- $P(B|A^c) = 0.05$

La probabilità che una persona effettui un incidente si calcola con la formula della probabilità totale

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i)$$

$$P(B) = 0.3 * 0.2 + (1 - 0.3) * 0.05 = 0.635$$

Se una persona ha fatto un incidente, qual è la probabilità che essa fosse propensa a farlo?

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.3 * 0.2}{0.635} = 0.095$$

ES 6

A = elemento non conforme
B = scarta elemento

- $P(A) = 0.001$: probabilità che un elemento non sia conforme
- $P(B|A) = 0.9$: probabilità che l'elemento venga scartato se non è conforme
- $P(B|A^c) = 0.01$: probabilità che venga scartato essendo conforme

Si vuole determinare la probabilità che l'oggetto sia non conforme nel caso in cui venga scartato

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

$P(B)$ rappresenta la probabilitò totale che l'oggetto venga scartato, e si calcola con la regola delle probabilità totale

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i) = 0.001 * 0.9 + (1 - 0.001) * 0.01 = 0.011$$

Ottenuto $P(B)$ è possibile calcolare $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.001 * 0.9}{0.011} = 0.082$$

ES 7

A = evento conosce la risposta

B = evento risponde esattamente

- $P(A) = 0.7$: probabilità che conosca la risposta
- $P(B|A) = 1$: se conosce la risposta si presuppone che risponda correttamente
- $P(B|A^c) = 1/6$: se non conosce la risposta, la probabilità di rispondere correttamente corrisponde a 1/6 in quanto le possibili risposte per ogni domanda sono 6

Si vuole determinare la probabilità che risponda esattamente, con la regola delle probabilità totale

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i) = 0.7 * 1 + (1 - 0.7) * 1/6 = 0.75$$

Si vuole determinare la probabilità che fosse a conoscenza della risposta avendo risposto correttamente

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.7 * 1}{0.75} = 0.933$$

SI vuole determinare la probailità che su 2 domande risponda esattamente ad almeno una

B_i: risponde esattamente alla i-esima domanda

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2)$$

- $P(B_1) = P(B_2) = P(B) = 0.75$
- $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2)$: in quanto B_1, B_2 sono indipendenti
  - $P(B_1 \cap B_2) = 0.75 * 0.75 = 0.5625$

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) = 0.75 + 0.75 - 0.5625 = 0.9375$$

ES 8

A_1 = evento esce la pallina bianca dalla 1 urna

A_2 dalla seconda bianca

Determinare la probabilità che dalla seconda urna si estrae una pallina bianca

- $P(A_2) = \sum P(A_1)P(A_2|A_1) = 7/10 * 4/7 + 3/10 * 3/7 = 0.528$

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_2)} = \frac{7/10 * 4/7}{0.528} = 0.757$$

ES 9

Un telegrafo trasmette linee e punti

A simbolo = punto, A^C simbolo è una linea

B segnale ricevuto = PUNTO B^c = segnale ricevuto = LINEA

- $P(A) = 5/8$: probabilità che venga trasmesso un punto
- $P(A^c) = 1 - P(A) = 3/8$: viene trasmesso linea
- $P(B^c|A) = 2/5$: che il segnale ricevuto sia diverso da un PUNTO
- $P(B|A^c) = 1/3$: il segnale ricevuto è diverso da LINEA

Si vuole determinare la correttezza del simbolo ricevuto

PUNTO

Determinare se il simbolo inviato è uguale a quello ricevuto

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

$P(B)$ rappresenta la probabiltà che il segnale ricevuto sia un PUNTO

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i) = 5/8 * (1 - 2/5) + 3/8 * 1/3 = 0.5$$

$$P(B^c) = 0.5$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{5/8 * (1 - 2/5)}{0.5} = 3/4 = 0.75$$

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 0.25$$

LINEA

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c)P(B^c|A^c)}{P(B^c)} = \frac{3/8 * (1 - 1/3)}{0.5} = 1/2 = 0.5$$

ES 10

Un'urna contiene 10 palline, 3 nere e 7 bianche.

A ogni estrazione di una pallina viene reinserita un'altra pallina dello stesso colore di quella appena estratta

A_i = esce una pallina nera alla i-esima estrazione

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1) = 3/10 * 4/11 * 5/12 = 1/22 = 0.045$$

- $P(A_2|A_1)$ indica la probabilità che esca una pallina nera della 2 estrazione dopo aver estratto una pallina nera nella prima urna.
  - Dopo la estrazione si reinseriscono le palline aggiungendone una del colore appena estratto
  - Se alla prima estrazione si trova una nera l'urna conterrà 11 palline di cui 4 nere
- $P(A_2|A_1) = 4/11$
- $P(A_3|A_2 \cap A - 1)$ è analogo, quindi l'urna conterrà 12 palline di cui 5 nere
- $P(A_3|A_2 \cap A_1) = 5/12$

Determinare la probabilità che se la seconda estrazione ha prodotto una pallina nera allora anche la prima ha prodotto una pallina nera

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1)P(A_2|A_1)}{P(A_2)} = \frac{3/10 * 4/11}{3/10 * 4/11 + (1 - 3/10) * 3/11} = 12/33 = 0.364$$

ES 11

A fumatore, A^c non fumatore

B affetto da patologia, B^c non affetto da patologia

- $P(A) = 0.32$: percentuale di fumatori nella popolazione
- $P(B|A) = 0.25$: il 25% dei fumatori è affetto da patologia
- $P(B|A^c) = 0.05$: il 5% dei fumatori non è affetto da patologia

Si vuole determinare la probabilità che un individuo scelto a caso nella popolazione sia affetto da malattia

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) = 0.32 * 0.25 + (1 - 0.32) * 0.05 = 0.114$$

Ora si vuole determinare la probabilità che data una persona malata essa sia un fumatore

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.32 * 0.25}{0.114} = 0.70$$

ES 12

A_i = l'oggetto si trova nella classe i-esima
B = pezzo difettoso, B^c non difettoso

- $P(A_A) = 0.15$, $P(B|A^A) = 0.03$
- $P(A_B) = 0.35$, $P(B|A^B) = 0.09$
- $P(A_C) = 0.5$, $P(B|A^C) = 0.13$

$$P(A_C|B) = \frac{P(A_c)P(B|A_c)}{P(B)} = \frac{0.5 * 0.13}{0.101} = 0.64$$

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i) = P(A_A)P(B|A_A) + P(A_B)P(B|A_B) + P(A_C)P(B|A_C)$$

$$0.15 * 0.03 + 0.35 * 0.09 + 0.5 * 0.13 = 0.101$$

ES 13

$i \in [1, 5]$
A_i = estrazione dall'i-esima urna
$P(A_i) = 1/5$
i-esima urna contiene 4 palline nere e i+2 bianche
B la pallina è bianca

Si vuole determinare la probabilità che la pallina sia bianca indipendentemente dall'urna

$$P(B) = \sum P(A_1)P(B|A_i) = 0.2 * 3/7 + 0.2 * 0.5 + 0.2 * 5/9 + 0.2 * 0.6 + 0.2 * 7/11 = 0.544$$

- $P(B|A_1) = 3/7$,
  - $P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{0.2*3/7}{0.544} = 0.157$
- $P(B|A_2) = 0.5$
- $P(B|A_3) = 5/9$
- $P(B|A_4) = 0.6$
- $P(B|A_5) = 7/11$

ES 14

	Anemia		
Test	Si	No	Totale
positivo	187	5	192
negativo	7	340	347
Totale	194	345	539

$A =$ test positivo

$P(A) = 192/539 = 0.356$

$B =$ malato

$P(B) = 0.005$

- $P(A|B) = 187/194 = 0.964$
- $P(A^c|B^c) = 340/345 = 0.986$

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = 0.013$$

$$P(B^c|A) = \frac{(1 - 0.005) * (1 - 0.986)}{0.37}$$

ES 15

$A =$test positivo

B malato

$P(B) = 0.2$

- $P(A|B) = 0.34$
- $P(A^c|B^c) = 0.86$

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} = \frac{0.2 * 0.34}{0.18} = 0.378$$

$$P(A) = \sum P(B_i)P(A|B_i) = 0.2 * 0.34 + 0.8 * (1 - 0.86) = 0.18$$

ES 16

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < -0.5 \\ 0.5 + 2x + 2x^2, & \text{if } -0.5 \leq x < 0 \\ 0.5 + 2x - 2x^2, & \text{if } 0 \leq x < 0.5 \\ 1, & \text{if } x \geq 0.5 \end{cases}$$

$$P(|X| \leq 0.25)$$

$$|X| \leq 0.25 \implies -0.25 \leq X \leq 0.25$$

$$P(|X| \leq 0.25) = P(-0.25 \leq X \leq 0.25) = F(0.25) - F(-0.25) = (0.5 + 2(0.25) - 2(0.25)^2) - (0.5 + 2(-0.25) + 2(-0.25)^2) = 0.875$$

$$P(X = 0) = 0$$

Essendo una variabile casuale con supporto continuo ogni punto possiede probabilità nulla

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(|X| \leq 0.25 | X \geq 0) = \frac{P(X \geq 0 \cap |X| \leq 0.25)}{P(X \geq 0)} = \frac{P(|X| \leq 0.25)}{P(|X| \geq 0)} = \frac{0.75}{1} = 0.75$$

VALORE ATTESO

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx =$$

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < -0.5 \\ 2 + 4x, & \text{if } -0.5 \leq x < 0 \\ 2 - 4x, & \text{if } 0 \leq x < 0.5 \\ x, & \text{if } 0 \geq 0.5 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-0.5}^{0} x f_X(x) dx + \int_{0}^{0.5} x f_X(x) dx + \int_{0.5}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-0.5}^{0} 2x + 4x^2 + \int_{0}^{0.5} 2x - 4x^2 + \int_{0.5}^{+\infty} x$$

$$\int 2x + 4x^2 = x^2 + 4x^3/3$$

- $\int_{-0.5}^{0} 2x + 4x^2 = (0)^2 - 4(0)^3/3 - (-0.5)^2 + 4(-0.5)^3/3 = -0.41666$

$$\int 2x - 4x^2 = x^2 - 4x^3/3$$

- $\int_0^{0.5} 2x - 4x^2 = [(0.5)^2 - 4(0.5)^3/3] - [(0)^2 - 4(0)^3/3] = 0.083333$

$$\int x = x^2/2$$

- $\int_{0.5}^{+\infty} = 1 - (0.5)^2/2 = 1 - 0.125 = 0.875$

$$\int 0 = c$$

VARIANZA

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_{-0.5}^{0} x^2 f_X(x)dx + \int_{0}^{0.5} x^2 f_X(x)dx = \int_{-0.5}^{0} x^2(2+4x)dx + \int_{0}^{0.5} x^2(2-4x)dx$$

$$\int x^2(2+4x)dx = 2/3x^3 + x^4$$

- $\int_{-0.5}^{0} x^2(2+4x)dx = [2/3(0)^3 + (0)^4] - [2/3(-0.5)^3 + (-0.5)^4] = 0.0208$

$$\int x^2(2-4x)dx = 2/3x^3 - x^4$$

- $\int_0^{0.5} x^2(2-4x)dx = 2/3(0.5)^3 - (0.5)^4 = 0.0208$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = 0.0208 + 0.0208 = 0.0416$$

ES 17

$X =$ n° utenti connessi $X \sim Bi(n,p)$
Dati $n = 15$ PC e ognuno ha una probabilità di collegarsi alla rete di $p = 0.5$
Si può definire un modello Binomiale

$$Bi(n,p) = Bi(15, 0.5)$$

$$E(X) = np = 15 * 0.5 = 7.5$$

La probabilità che la rete sia satura

$$P(X \geq 10) = \sum_{i=10}^{15} f_X(x_i) = \sum_{i=10}^{15} \binom{15}{i} * p^i * p^{15-i}$$

$$P(X = 10) + P(X = 11) + .. + P(X = 15)$$

```
PXmag10=0
for (i in 10:15){
  PXmag10 = PXmag10+(choose(15,i)*(0.5**i)*(0.5**(15-i)))
}
PXmag10
```

```
## [1] 0.1508789
```

ES 18

$$a \in [0,1], b > 0$$

$$F_X(x) = \begin{cases} aexp(bx), & \text{if } x < 0 \\ 1, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} ab * exp(bx), & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f_X(x) \geq 0, \forall x \in R$$

$$ab * exp(bx) \geq 0$$

$$exp(bx) \geq 0 : \forall b, x \in R$$

$$ab \geq 0$$

$$a \in [0,1], b > 0$$

ES 19

Sia X una variabile continua con supporto $S_X = [2, +\infty)$

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^{-2}, & \text{if } x \in S_X \\ 0, & \text{if } x \notin 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{2}^{+\infty} f_X(x)dx$$

$$f_X(x) \geq 0$$

$$kx^{-2} \geq 0$$

$$k \geq 0$$

$$1/x^2 \geq 0, \forall x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_2^{+\infty} kx^{-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-k}{x} - \frac{-k}{2} = 0 + \frac{k}{2}$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

$$\frac{k}{2} = 1, k = 2$$