

Answer Key for Exam A

QUIZ: ogni risposta corretta vale 1 punto, sbagliata -1 , non data 0.

1. Se $X = \{0, 1, 2\}$ e $Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, allora le funzioni da X a Y sono 3^6 . VF F
2. La formula proposizionale $\neg(P \wedge \neg Q)$ è equivalente alla formula $\neg P \vee Q$. VF V
3. Se $n > 1$, tutti gli interi hanno un inverso moltiplicativo modulo n . VF F
4. La funzione $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da $g(z) = z^2$ è invertibile con inversa $g^{-1}(z) = \sqrt{z}$. VF F
5. Se una funzione $f : A \rightarrow B$ ha un'inversa, allora è anche iniettiva. VF V
6. Un insieme A con n elementi, ha $n(n-1)$ sottoinsiemi di cardinalità 2. VF F
7. Le classi di una relazione d'equivalenza su un insieme A formano una partizione di A . VF V
8. Se $f : A \rightarrow B$ è una funzione iniettiva, allora vale $\forall b \in B \exists! a \in A f(a) = b$. VF F

9. Quale fra le seguenti formule è equivalente alla traduzione formale della frase

Qualche gatto non odia tutti i cani

dove $g(x)$ sta per " x è un gatto", $c(x)$ sta per " x è un cane" e $o(x, y)$ sta per " x odia y "?

- (a) $\forall x \forall y (g(x) \wedge c(y) \wedge o(x, y));$
- (b) $\exists x \exists y (g(x) \wedge c(y) \wedge \neg o(x, y));$
- (c) $\forall x (g(x) \rightarrow \exists y (c(y) \wedge o(x, y)));$
- (d) $\forall x (g(x) \wedge \exists y (c(y) \rightarrow o(x, y))).$

10. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione e $C \subseteq B$. L'insieme $f^{-1}(C)$ è uguale a:

- (a) $\{a \in A : f(a) = C\}$
- (b) $\{a \in A : f(a) \in C\}$
- (c) $\{b \in B : f^{-1}(b) \in C\}$
- (d) $\{b \in B : f^{-1}(b) = C\}$

ESERCIZI

1. **ARITMETICA E CONGRUENZE** Considerare la relazione di congruenza modulo 15 sugli interi.
- (a) Qual è l'opposto di 13 modulo 15? **SOL** l'opposto di 13 modulo 15 e' 2 infatti $13+2$ e' equivalente a 0 modulo 15
- (b) Determinare se il numero 13 ha un inverso moltiplicativo modulo 15 e in caso affermativo trovare tale inverso. **SOL**: usanso l'algorithmo di euclide si trova $1=7 \times 13 - 6 \times 15$. Quindi l'inverso e' 7
- (c) Quale fra le classi $[0], [1], \dots, [14]$ contiene il numero -11 ? **SOL**: -11 appartiene alla classe di 2, modulo 13

2. **RSA** Stabilire se le coppie $(77, 7)$, $(77, 43)$ possono essere utilizzate, rispettivamente, come chiave pubblica e chiave privata per un codice *RSA* di modulo 77. Se si, utilizzando la chiave pubblica, criptare il numero 2.

3. **RELAZIONI D'EQUIVALENZA** Sia $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'insieme delle coppie di numeri naturali non nulli,

$$A = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N}, a, b \neq 0\},$$

e sia **E** la relazione d'equivalenza su A definita da:

$$(a, b) \mathbf{E} (c, d) \iff MCD(a, b) = MCD(c, d).$$

SOL: si perche'

- (a) Determinare se le coppie $(2, 3)$ e $(1, 1)$ appartengono alla stessa classe d'equivalenza. **MCD(2,3)=MCD(1,1)=1**

- (b) Determinare la classe d'equivalenza della coppia $(1, 1)$. **SOL**: $[(1, 1)] = \{(a, b) \text{ in } A : MCD(a, b) = 1\}$

- (c) Determinare quale fra i seguenti insiemi è un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di **E**:

i. \mathbb{N} ;

ii. $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$;

iii. $\{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$;

~~iv. $\{(n, n) : n \in \mathbb{N}^*\}$;~~

4. **CALCOLO COMBINATORIO** In un ufficio lavorano 9 donne e 7 uomini. È necessario scegliere un capoufficio, un segretario e un capo del personale fra le donne e gli uomini che lavorano nell'ufficio.

- (a) In quanti modi può essere fatta questa scelta?

- (b) Quante sono le possibili scelte per cui il capoufficio e il segretario sono una donne?

- (c) Quante sono le possibili scelte per cui il genere del capoufficio e del segretario sono differenti?

- (d) Quante sono le possibili scelte per cui la rappresentanza contiene almeno un uomo?

5. **INDUZIONE** Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale:

$$\left(5 - \frac{5}{2}\right)\left(5 - \frac{5}{3}\right) \dots \left(5 - \frac{5}{n}\right) = \frac{5^{n-1}}{n}.$$

6. **INDUZIONE** Dimostrare per induzione che vale, per ogni $n \geq 2$:

$$3^n + 5^n \leq 6^n$$

SOL $3^n + 5^n \geq 3 + 5$

1

~~$3^{n+1} + 5^{n+1} = (3^n + 3) + (5^n + 5) = 3^n + 5^n + 3 + 5 = 3^n + 5^n + 8$~~

7. **FUNZIONI E RELAZIONI**

- (a) Considerare la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(a) = (a, 0)$. Determinare gli insiemi $f(\{0, 1, 2\})$, $f^{-1}(\{(1, 0)\})$.

- (b) Determinare se la funzione f descritta al punto precedente è iniettiva o suriettiva.

SOL