SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

QUIZ

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**

2. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**

3. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**

4. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

5. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

6. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**

7. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a

notP(x)orR(x,y) = V per P(x)=F oppure per R(x,y)=V

   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;

   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;

   ~~(c)~~ $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;

   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.

8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è

   ~~(a)~~ 18^3

   $(3 \times 6)^3 = 18^3$

   (b) 6^3

   (c) 18^3

   (d) 18

9. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è

conta l'ordine? NO! {1,2} = {2,1}
ammesse ripetizioni? NO!!!
C12,2 = 12!/2!*10! = 12*11/2 = 6*11=66

   (a) 122

   (b) 24

   (c) 12

   ~~(d)~~ 66

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** ~~**F**~~

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, SI suriettiva o biunivoca.
   NO NO

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale: GIÀ FATTO

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$ [illegible]

4. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   ripetizioni NO! ordine no! 10!/(10-7)!=10*9*8
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana? 9!

5. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$? =1
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28. 27%28=-1(-1)^15=-1
   (c) Completare:

   $a \in \mathbb{Z}$ è l'inverso moltiplicativo di $b \in \mathbb{Z}$ modulo 3 se e solo se $ab \equiv_3 \ldots$ 1

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso. MCD(11,27)=1 SI 5

   SOL

6. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre 30 $\not R$ 7 perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

7. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   f(5) = -24 f^-1(5)=+-6^1/2
   f^-1(1)=0 f^-1(5)=+-6^1/2
   f^-1(-3)=+-2
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.
   NO SI

Answer Key for Exam $\boxed{\text{A}}$

QUIZ

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ F

2. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ V

3. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ F

4. Il numero 7 è invertibile modulo 16. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ V

5. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ V

6. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ F

7. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   $\boxed{\text{(a)}}$ $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.

8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   $\boxed{\text{(c)}}$ 18^3
   (d) 18

9. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   $\boxed{\text{(d)}}$ 66

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ F

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.
   f è iniettiva: se $f(n) = f(m)$ allora $(n, 1) = (m, 1)$ e quindi $n = m$; f non è suriettiva perché, ad esempio, $(0, 0)$ non appartiene all'immagne di f.

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
   $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$
   Per $n = 1$ il membro sinistro dell'uguaglianza è $1 \cdot 1! = 1$ mentre il membro destro è $(1 + 1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$. La base è quindi verificata.
   Per il passo induttivo, dobbiamo dimostrare che
   $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots n \cdot n! + (n + 1) \cdot (n + 1)! = (1 + n + 1)! - 1 = (n + 2)! - 1$$
   Sfruttando l'ipotesi induttiva, si ha:
   $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots n \cdot n! + (n + 1) \cdot (n + 1)! = (1 + n)! - 1 + (n + 1) \cdot (n + 1)!$$
   dove le parti in rosso a destra e a sinistra dell'uguaglianza sono uguali per ipotesi induttiva. Quindi basta verificare che $(1 + n)! - 1 + (n + 1) \cdot (n + 1)! = (n + 2)! - 1$. Partendo dal membro di sinistra e raggruppando $(n + 1)!$, otteniamo:
   $$(1 + n)! - 1 + (n + 1) \cdot (n + 1)! = (1 + n)!(1 + (n + 1)) - 1 = (n + 2)! - 1,$$
   che è quanto si voleva dimostrare.

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$
   Per $n = 1$ il membro sinistro della disuguaglianzaè 1 mentre il membro destro è $2 - \frac{1}{1} = 1$. La base è quindi verificata.
   Per il passo induttivo, dobbiamo dimostrare che
   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n + 1)^2} \leq 2 - \frac{1}{(n + 1)}$$
   Sfruttando l'ipotesi induttiva, si ha:
   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n + 1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n + 1)^2}.$$
   Ci basta quindi verificare che
   $$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n + 1)^2} \leq 2 - \frac{1}{(n + 1)}.$$
   Cancellando 2 a destra e a sinistra della disuguaglianza, otteniamo una disuguaglianza equivalente, ovvero:
   $$-\frac{1}{n} + \frac{1}{(n + 1)^2} \leq -\frac{1}{(n + 1)},$$
   che a sua volta, spostando i termini negativi, è equivalente a
   $$\frac{1}{(n + 1)} + \frac{1}{(n + 1)^2} \leq \frac{1}{n};$$

moltiplicando per n (che è positivo) otteniamo

$$\frac{n(n+1)+n}{(n+1)^2} \leq 1.$$

Il numeratore dell'espressione a sinistra è n^2+2n che è minore del denominatore, uguale a n^2+2n+1. Quindi la disuguaglianza è verificata.

4. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc...). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

   (a) $\binom{10}{3}$. 10*9*8/6

   (b) $\binom{10}{2} \cdot 8!$ 10*9/2*8!=45*8!

5. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

   (a) NO: infatti $-1-8=-9$ non è divisibile per 7.

   (b) Siccome $27 \equiv_{28} -1$ si ha $27^{15} \equiv_{28} -1$ ed il resto cercato è uguale al resto di -1 nella divisione per 28 che è 27 (infatti $-1=-28+27$ è la divisone con resto).

   (c)
   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 = 1$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27 perché $MCD(11, 27) = 1$. Si ha:

   $$27 = 2 \cdot 11 + 5, \quad 11 = 2 \cdot 5 + 1$$

   Quindi
   $$1 = 11 - 2 \cdot 5 = 11 - 2(27 - 2 \cdot 11) = 5 \cdot 11 - 2 \cdot 27$$

   e l'inverso di 11 modulo 27 è 5. Come controprova calcoliamo $11 \cdot 5$ modulo 27:

   $$11 \cdot 5 = 55 = 27 \cdot 2 + 1 \equiv_{27} 1.$$

6. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

   $$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre 30 $\not R$ 7 perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

   (a) 15 non appartiene alla classe d'equivalenza di 32 perche' 15 non è in relazione con 32, visto che $5 \not\equiv_3 2$.

(b) Ci sono tre classi che corrispondono ai possibili resti modulo 3: la classe di 0, la classe di 1 e la classe di 2. Queste classi sono tutte differenti e ogni intero appartiene ad una di queste classi, a seconda che la sua coifra delle unità sia congruente a 0, 1 o 2.

7. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

   (a) $f(5) = -5^2 + 1 = -24$,

   $$f^{-1}(5) = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = 5\} = \{x \in \mathbb{Z} : -x^2 + 1 = 5\} = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = -4\} = \emptyset;$$

   $$f^{-1}(\{1, 5, -3\}) = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = 1 \vee f(x) = 5 \vee f(x) = -3\}.$$

   Poiché $-x^2 + 1 = 1$ ha soluzione $x = 0$, $-x^2 + 1 = 5$ è equivalente a $-x^2 = 4$ e non ha soluzione, mentre $-x^2 + 1 = -3$ è equivalente a $x^2 = 4$ ha soluzione $x = -2 \vee x = 2$, si ha

   $$[f^{-1}(\{1, 5, -3\}) = \{0, -2, 2\}.$$

   (b) f non è iniettiva: ad esempio, $f(1) = f(-1)$; f non è suriettiva: come abbiamo visto sopra 5 non appartiene all'immagine di f.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
2. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
3. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
4. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
5. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
6. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

3. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

4. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not{R}\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

5. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

6. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

7. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** | **F**

2. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** | **F**

3. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** | **F**

4. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** | **F**

5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** | **F**

6. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** | **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

8. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.

9. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** | **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

2. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

3. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

6. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

7. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____________________

COGNOME ____________________

MATRICOLA ____________________

QUIZ

1. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**

2. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

3. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**

4. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**

5. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

6. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   - (a) 122
   - (b) 24
   - (c) 12
   - (d) 66

8. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   - (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   - (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   - (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   - (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.

9. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   - (a) 18^3
   - (b) 6^3
   - (c) 18^3
   - (d) 18

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

2. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

5. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

6. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:
$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$
   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

7. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da
$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$
   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

2. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**

3. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**

4. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**

5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**

6. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:
   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$
   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

2. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

3. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da
   $$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$
   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre 30 $\not R$ 7 perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
   $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1+n)! - 1$$

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

6. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

7. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016
NOME ________________________________
COGNOME ________________________________
MATRICOLA________________________________

QUIZ

1. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
2. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
3. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
4. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
5. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
6. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
8. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.
9. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

2. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

3. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

4. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

5. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
2. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
3. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
4. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
6. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
8. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.
9. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

(ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

2. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

5. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

6. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

7. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
2. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
3. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
4. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
5. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
6. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n + 1)$ è suriettiva. **V** **F**

7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
8. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.
9. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

2. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

3. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

   $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

6. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

   $$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

7. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

QUIZ

1. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** | **F**

2. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** | **F**

3. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** | **F**

4. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** | **F**

5. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** | **F**

6. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** | **F**

7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** | **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

(ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

2. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc...). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

3. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

4. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

7. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

SOL

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________

COGNOME ______________________

MATRICOLA______________________

QUIZ

1. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
2. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
3. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n + 1)$ è suriettiva. **V** **F**
4. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
5. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
6. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
8. $\neg\forall x(P(x) \to \exists yR(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y\neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists yR(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists yR(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists yR(x, y)$.
9. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1+n)! - 1$$

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

3. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

(ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

4. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

5. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

6. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

7. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016
NOME ______
COGNOME ______
MATRICOLA ______

QUIZ

1. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k-2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** | **F**

2. La funzione $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definita da $f(n)=(n,n+1)$ è suriettiva. **V** | **F**

3. La formula proposizionale $P\to Q$ è equivalente alla formula $Q\to P$. **V** | **F**

4. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** | **F**

5. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** | **F**

6. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** | **F**

7. $\neg\forall x(P(x)\to\exists yR(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x)\wedge\forall y\neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x)\wedge\exists yR(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x)\vee\neg\exists yR(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x)\to\neg\exists yR(x,y)$.

8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A\times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

9. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

10. Se una funzione $f:A\to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** | **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc...). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1+n)! - 1$$

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

4. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

5. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

6. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

7. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**

2. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**

3. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

4. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

5. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**

6. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**

7. $\neg \forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg \exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg \exists y R(x,y)$.

8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

9. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

4. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

5. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:
   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$
   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

6. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da
$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$
   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

7. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

2. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**

3. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**

4. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k-2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**

6. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**

7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

2. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

5. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

6. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

7. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** | **F**

2. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** | **F**

3. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** | **F**

4. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** | **F**

5. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** | **F**

6. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** | **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   - (a) 122
   - (b) 24
   - (c) 12
   - (d) 66

8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   - (a) 18^3
   - (b) 6^3
   - (c) 18^3
   - (d) 18

9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   - (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   - (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   - (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   - (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** | **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:
   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$
   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

2. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc...). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

3. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

4. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

5. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da
   $$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$
   (ad esempio $52\ R\ 78$ perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
   $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____________________

COGNOME ____________________

MATRICOLA____________________

QUIZ

1. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**

2. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**

3. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**

4. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

5. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

6. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

8. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \land \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \land \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \lor \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.

9. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

4. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da
$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$
   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

5. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

6. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

7. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:
$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$
   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____________________

COGNOME ____________________

MATRICOLA ____________________

QUIZ

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
2. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
3. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
4. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
5. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
6. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

7. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.
8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
9. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc...). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

2. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:
   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$
   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
   $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1+n)! - 1$$

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

5. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

6. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

7. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da
   $$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$
   (ad esempio $52\ R\ 78$ perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

2. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**

3. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**

4. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**

5. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**

6. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:
   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$
   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

2. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
   $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

5. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

6. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

7. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da
   $$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$
   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____________________

COGNOME ____________________

MATRICOLA____________________

QUIZ

1. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k-2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** | **F**
2. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** | **F**
3. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** | **F**
4. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** | **F**
5. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** | **F**
6. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** | **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** | **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

4. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

5. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da
$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$
   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

6. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

7. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:
$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$
   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
2. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
3. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k-2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
4. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
6. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**

7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   - (a) 18^3
   - (b) 6^3
   - (c) 18^3
   - (d) 18
8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   - (a) 122
   - (b) 24
   - (c) 12
   - (d) 66
9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   - (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   - (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   - (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   - (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

2. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

3. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

4. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

7. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____________________

COGNOME ____________________

MATRICOLA____________________

QUIZ

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
2. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
3. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
4. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
5. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
6. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

2. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

3. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

5. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da
$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$
(ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

6. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:
$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$
   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

7. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
2. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
3. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
4. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
5. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
6. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n + 1)$ è suriettiva. **V** **F**

7. $\neg\forall x(P(x) \to \exists yR(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y\neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists yR(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists yR(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists yR(x, y)$.
8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
9. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

2. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

   $$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio $52\ R\ 78$ perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

3. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

   $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

6. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

7. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____________________

COGNOME ____________________

MATRICOLA____________________

QUIZ

1. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** | **F**

2. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** | **F**

3. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** | **F**

4. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** | **F**

5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n + 1)$ è suriettiva. **V** | **F**

6. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** | **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** | **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

2. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

3. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

6. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre 30 $\not R$ 7 perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

7. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____

COGNOME ____

MATRICOLA____

QUIZ

1. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
2. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
3. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
4. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
6. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.
10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

2. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

3. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

6. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

7. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016
NOME ____________________
COGNOME ____________________
MATRICOLA____________________

QUIZ

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
2. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
3. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
4. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
5. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
6. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
7. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.
8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
9. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

(ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

2. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

3. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

6. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

7. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** | **F**
2. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k-2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** | **F**
3. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** | **F**
4. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** | **F**
5. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** | **F**
6. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** | **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** | **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1+n)! - 1$$

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

3. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

4. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

5. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

   $$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre 30 $\not R$ 7 perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

6. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

7. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**

2. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

3. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**

4. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**

5. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k-2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

6. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1+n)! - 1$$

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

3. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

4. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

5. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

6. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio $52\ R\ 78$ perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\ 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

7. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____________________

COGNOME ____________________

MATRICOLA ____________________

QUIZ

1. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

2. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**

3. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**

4. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**

5. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**

6. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**

7. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.

8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

9. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1+n)! - 1$$

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

3. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

4. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc...). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

5. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

   $$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre 30 $\not R$ 7 perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

6. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

7. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA______________________________

QUIZ

1. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
2. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
3. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
4. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
6. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
8. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.
9. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

2. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

3. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da
$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$
(ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

4. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

5. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:
$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \dots$$
   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:
$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ______________________________

COGNOME ______________________________

MATRICOLA ______________________________

QUIZ

1. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
2. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
3. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
4. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
5. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
6. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**

7. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   - (a) $\exists x(P(x) \land \forall y \neg R(x, y))$;
   - (b) $\exists x(P(x) \land \exists y R(x, y))$;
   - (c) $\exists x(P(x) \lor \neg\exists y R(x, y)$;
   - (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.
8. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   - (a) 18^3
   - (b) 6^3
   - (c) 18^3
   - (d) 18
9. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   - (a) 122
   - (b) 24
   - (c) 12
   - (d) 66

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

2. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

3. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

4. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:

   $$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

   $$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

7. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

   $$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre 30 $\not R$ 7 perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ________________________________

COGNOME ________________________________

MATRICOLA________________________________

QUIZ

1. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
2. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
3. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
4. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
5. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
6. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
8. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.
9. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

2. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

3. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

4. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

5. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

6. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

7. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre 30 $\not R$ 7 perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____________________

COGNOME ____________________

MATRICOLA____________________

QUIZ

1. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** | **F**

2. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** | **F**

3. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** | **F**

4. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n + 1)$ è suriettiva. **V** | **F**

5. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** | **F**

6. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** | **F**

7. $\neg\forall x(P(x) \to \exists yR(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y\neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists yR(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists yR(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists yR(x, y)$.

8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66

9. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** | **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

2. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

3. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio $52 \; R \; 78$ perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R \; 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

4. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.
   SOL

5. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc. . .). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____________________

COGNOME ____________________

MATRICOLA____________________

QUIZ

1. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**
2. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
3. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
4. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
5. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
6. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**

7. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18
8. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
9. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x, y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x, y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x, y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x, y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x, y)$.

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1+n)! - 1$$

2. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

3. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc...). In quante maniere diverse possiamo:
   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?
   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

4. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?
   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.
   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

5. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre 30 $\not R$ 7 perché $0 \not\equiv_3 7$).
   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.
   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

6. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.
   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.
   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

7. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

SCRITTO MATEMATICA DI BASE E LOGICA 25/01/2016

NOME ____

COGNOME ____

MATRICOLA____

QUIZ

1. La formula proposizionale $P \to Q$ è equivalente alla formula $Q \to P$. **V** **F**
2. Se l'insieme A ha 5 elementi, allora l'insieme delle funzioni iniettive con dominio e codominio uguali ad A ha 5^5 elementi. **V** **F**
3. Il numero 7 è invertibile modulo 16. **V** **F**
4. Se due numeri sono congruenti modulo 9 allora sono congruenti anche modulo 3. **V** **F**
5. Nella congruenza modulo 5, tutti i numeri della forma $5k - 2$ appartengono alla classe d'equivalenza del numero 3. **V** **F**
6. La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da $f(n) = (n, n+1)$ è suriettiva. **V** **F**

7. Sia A un insieme con 12 elementi. Il numero di sottoinsiemi di A di cardinalità 2 è
   (a) 122
   (b) 24
   (c) 12
   (d) 66
8. $\neg\forall x(P(x) \to \exists y R(x,y))$ è equivalente a
   (a) $\exists x(P(x) \wedge \forall y \neg R(x,y))$;
   (b) $\exists x(P(x) \wedge \exists y R(x,y))$;
   (c) $\exists x(P(x) \vee \neg\exists y R(x,y)$;
   (d) $\exists x(\neg P(x) \to \neg\exists y R(x,y)$.
9. Se A è un insieme con 3 elementi e B è un insieme con 6 elementi, il numero di funzioni con dominio A e codominio $A \times B$ è
   (a) 18^3
   (b) 6^3
   (c) 18^3
   (d) 18

10. Se una funzione $f : A \to B$ è iniettiva, allora è anche invertibile. **V** **F**

ESERCIZI

NOTA BENE: TUTTE LE RISPOSTE VANNO GIUSTIFICATE

1. Considerare la relazione d'equivalenza R sui numeri naturali definita da

$$aRb \Leftrightarrow \text{ la cifra delle unità di } a \text{ è congrua modulo 3 alla cifra delle unità di } b$$

   (ad esempio 52 R 78 perché $2 \equiv_3 8$, mentre $30 \not R\, 7$ perché $0 \not\equiv_3 7$).

   (a) Determinare se 15 appartiene alla classe d'equivalenza di 32.

   (b) Determinare quante sono le classi d'equivalenza di R ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza.

2. (a) È vero che $-1 \equiv_7 8$?

   (b) Calcolare il resto di 27^{15} nella divisione per 28.

   (c) Completare:

$$a \in \mathbb{Z} \text{ è l'inverso moltiplicativo di } b \in \mathbb{Z} \text{ modulo 3 se e solo se } ab \equiv_3 \ldots$$

   (d) Il numero 11 è invertibile modulo 27? Se si, trova l'inverso.

   SOL

3. Su un tavolo ci sono dieci pezzi di frutta, tutti diversi fra loro (una mela, una banana, un kiwi etc...). In quante maniere diverse possiamo:

   (a) confezionare un cestino regalo contenente tre pezzi di frutta, scelti dai pezzi sulla tavola?

   (b) mettere in fila i dieci pezzi di frutta sul tavolo in modo che la mela preceda la banana?

4. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = (n, 1)$. Determinare se la funzione f è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

5. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(x) = -x^2 + 1$.

   (a) Determinare $f(5)$, $f^{-1}(5)$ e $f^{-1}(\{1, 5, -3\})$.

   (b) Determinare se f è iniettiva o suriettiva.

6. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (1 + n)! - 1$$

7. Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$