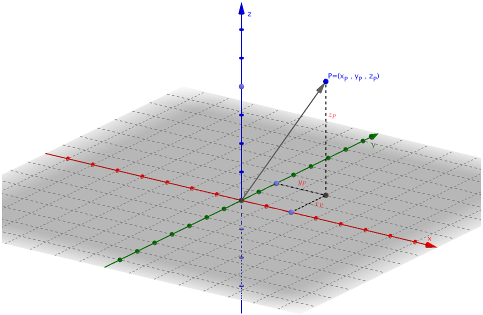
Vettori nello Spazio

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio, un vettore è caratterizzato dalle coordinate (x_P, y_P, z_P) del suo punto "finale" P (vedi figura).



Somma di Vettori nello Spazio

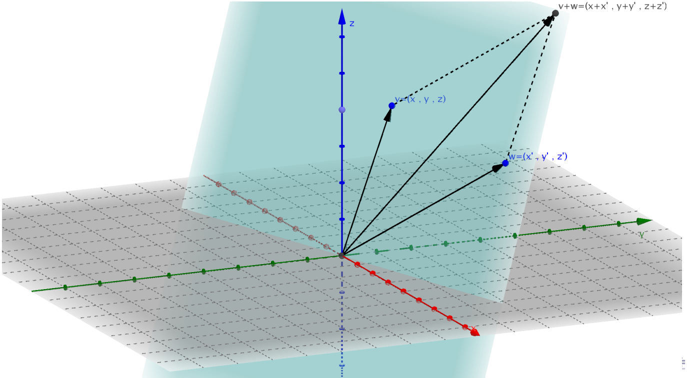
Tramite le coordinate, i vettori possono essere sommati e moltiplicati per numeri reali.

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

Tramite le coordinate, i vettori possono essere sommati e moltiplicati per numeri reali.

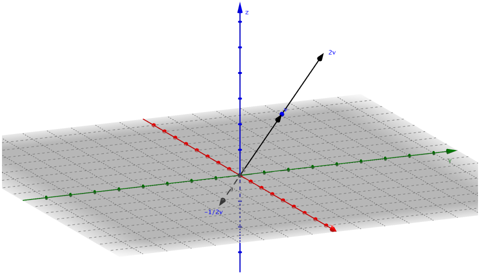
$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

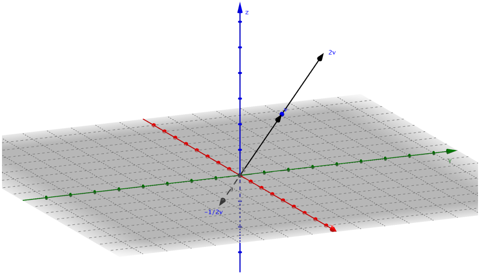
Da un punto di vista geometrico, il vettore somma $v + w$ fra il vettore $v = (x, y, z)$ e il vettore $w = (x', y', z')$ è quello che si ottiene con la regola del parallelogramma nel piano determinato dai due vettori, come spiegato in figura:



Anche il prodotto un numeo reale$t$ (anche detto "scalare") e un vettore dello spazio $v = (x, y, z)$ si esprime tramite le sue coordinate:

$$tv = (tx, ty, tz)$$



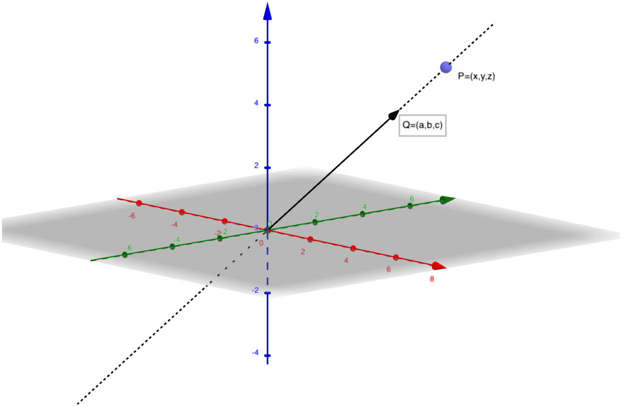


- Da un punto di vista geometrico, se $t > 0$ il vettore $tv =$ si ottiene dal vettore v moltiplicandone la lunghezza per t, lasciando inalterata la direzione e il verso.
- Se invece $t < 0$ il vettore tv si ottiene dal vettore v moltiplicandone la lunghezza per $|t|$ e cambiandone il verso (lasciando inalterata la direzione).
- In particolare, Se $v = (x, y, z)$, allora

$$-v = (-1)v = (-x, -y, -z).$$

Equazione Parametrica di una Retta per l'Origine, nello Spazio

Equazione parametrica della retta dello spazio per l'origine e con direzione $v = (a, b, c)$ (ovvero, la retta passante per l'origine e per il punto $Q = (a, b, c)$):



$$\begin{cases} x = ta \\ y = tb \\ z = tc \end{cases} \quad \text{al variare del parametro } t \in \mathbb{R}$$

ESERCIZI 1 (soluzioni si trovano alla fine del file)

1. Trovare l'equazione parametrica della retta dello spazio che passa per l'origine e ha direzione il vettore $(-1/2, 2/3, 1)$.
2. Determinare se i punti $A = (1, 1, 1)$ e $B = (1/2, -1/2, 1)$ appartengono alla retta dello spazio di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$$

ESERCIZI 1 (soluzioni si trovano alla fine del file)

1. Trovare l'equazione parametrica della retta dello spazio che passa per l'origine e ha direzione il vettore $(-1/2, 2/3, 1)$.
2. Determinare se i punti $A = (1, 1, 1)$ e $B = (1/2, -1/2, 1)$ appartengono alla retta dello spazio di equazioni parametriche:

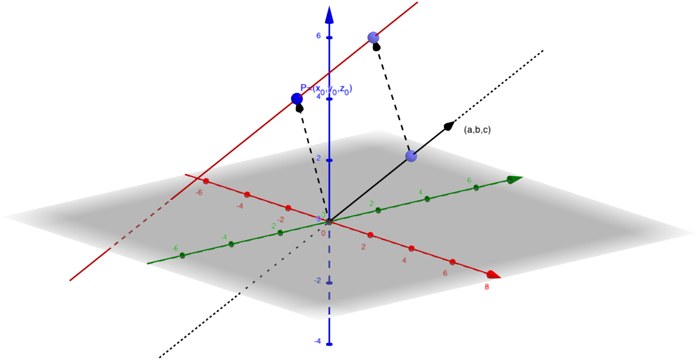
$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$$

3. trovare un vettore della stessa direzione della retta r di equazioni parametriche

$$r := \begin{cases} x = t/2 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$$

Equazione Parametrica di una Retta nello Spazio

L'equazione parametrica della retta r dello spazio per il punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ e con direzione il vettore $v = (a, b, c)$ si ottiene sommando le coordinate di P all'equazione della retta per l'origine di direzione $v = (a, b, c)$ le coordinate di P:



retta per l'origine, detta giacitura di r := $\begin{cases} x = ta \\ y = tb \\ z = tc \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$; retta r per P := $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Esercizi 2 (soluzioni alla fine del file)

1. Trovare l'equazione parametrica della retta dello spazio che passa per $P = (1, 2, 3)$ e ha direzione il vettore $(-1/2, 2/3, 1)$.
2. Determinare se i punti $A = (1, 0, -1/2)$ e $B = (1/2, -1/2, 1)$ appartengono alla retta dello spazio di equazioni parametriche:

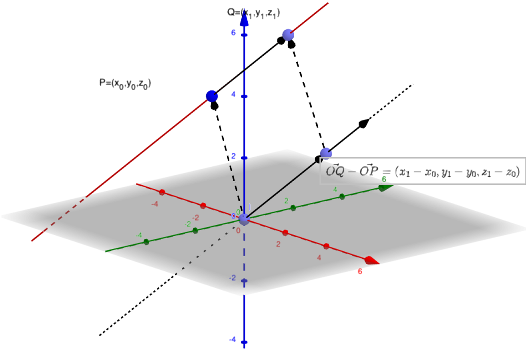
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1/2 - 2t \end{cases}$$

3. Data la retta r di equazioni parametriche

$$r := \begin{cases} x = 1 + t/2 \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

trovare un punto che vi appartiene, l'equazione parametrica della giacitura della retta e un vettore che abbia la stessa direzione della retta.

Se una retta dello spazio passa per i punti $P = (x_0, y_0, z_0)$, $Q = (x_1, y_1, z_1$, il vettore $\vec{OQ} - \vec{OP} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ è parallelo alla retta, quindi appartiene alla giacitura della retta.



L'equazione parametrica della retta r per P e Q sarà quindi:

$$r := \begin{cases} x = x_0 + {\color{red}t}(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + {\color{red}t}(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + {\color{red}t}(z_1 - z_0) \end{cases} \quad \text{al variare del parametro } {\color{red}t} \in \mathbb{R}$$

Esercizi 3 (solzioni alla fine del file)

1. trovare l'equazione parametrica della retta r dello spazio che passa per $P = (0, 1, 2)$ e $Q = (-1, -1/2, 0)$.

Equazioni parametriche di rette nel piano

Per ottenere le equazioni parametriche di rette del piano, basta eliminare la terza coordinata. In particolare, una retta che passa per il punto $P = (x_0, y_0)$ ed ha direzione il vettore $v = (a, b)$ ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{con giacitura:} \begin{cases} x = ta \\ y = tb \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

L'equazione parametrica della retta r per $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ è:

$$r := \begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \quad \text{al variare del parametro } t \in \mathbb{R}$$

Prodotto Scalare fra Vettori

Due vettori v, w (del piano o dello spazio) si possono moltiplicare dando come risultato uno scalare $< v, w >$ (un numero reale). Questo prodotto prende il nome di *prodotto scalare* ed è definito (considerando i vettori come matrici colonna) da:

$$< v, w >= w^T v.$$

In particolare:

$$< v, w >= xx' + yy' \quad \text{per } v = (x, y), w = (x', y') \text{ del piano}$$

$$< v, w >= xx' + yy' + zz' \quad \text{per } v = (x, y, z), w = (x', y', z') \text{ dello spazio.}$$

Prodotto Scalare fra Vettori

Due vettori v, w (del piano o dello spazio) si possono moltiplicare dando come risultato uno scalare $< v, w >$ (un numero reale). Questo prodotto prende il nome di *prodotto scalare* ed è definito (considerando i vettori come matrici colonna) da:

$$< v, w >= w^T v.$$

In particolare:

$$< v, w >= xx' + yy' \quad \text{per } v = (x, y), w = (x', y') \text{ del piano}$$

$$< v, w >= xx' + yy' + zz' \quad \text{per } v = (x, y, z), w = (x', y', z') \text{ dello spazio.}$$

Ad esempio, nel piano, se $v = (-2, 2)$ e $w = (2, 3)$ allora

$$< v, w >= (-2, 2) \cdot (2, 3) = (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = -4 + 6 = 2;$$

Prodotto Scalare fra Vettori

Due vettori v, w (del piano o dello spazio) si possono moltiplicare dando come risultato uno scalare $< v, w >$ (un numero reale). Questo prodotto prende il nome di *prodotto scalare* ed è definito (considerando i vettori come matrici colonna) da:

$$< v, w >= w^T v.$$

In particolare:

$$< v, w >= xx' + yy' \quad \text{per } v = (x, y), w = (x', y') \text{ del piano}$$

$$< v, w >= xx'+yy'+zz' \quad \text{per } v = (x, y, z), w = (x', y', z') \text{ dello spazio.}$$

Ad esempio, nel piano, se $v = (-2, 2)$ e $w = (2, 3)$ allora

$$< v, w >= (-2, 2) \cdot (2, 3) = (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = -4 + 6 = 2;$$

Nello spazio: se $v = (-1, 0, 2)$ e $w = (1, -2, 3)$ allora

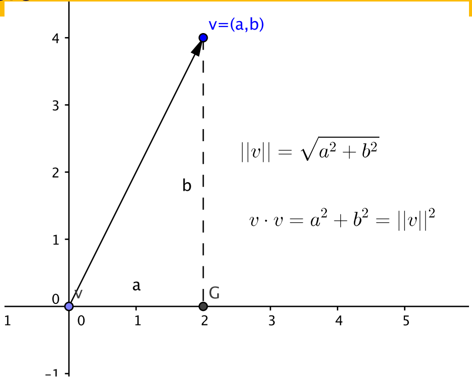
$$< v, w >= (-1, 0, 2)\cdot(1, -2, 3) = (-1)\cdot 1+0\cdot(-2)+2\cdot 3 = -1+0+6 = 5.$$

Prodotto Scalare fra Vettori

Non è difficile dimostrare che il prodotto scalare ha le seguenti proprietà:

$$
\begin{aligned}
< u, v > &= < v, u > \\
< v, \vec{0} > &= < \vec{0}, v >= 0 \\
< u, (v + w) > &= < u, v > + < u, w > \\
< au, v > &= < u, av > = a < v, w >
\end{aligned}
$$

Norma di un Vettore



Se $v = (a, b)$, il prodotto scalare $< v, v >= a^2 + b^2$ è pari alla lunghezza del vettore al quadrato, ovvero

$$< v, v >= ||v||^2,$$

indicando con $||v|| = \sqrt{v \cdot v}$ la lunghezza del vettore v (detta anche "norma" del vettore v).

Analogamente, se $v = (a, b, c)$ è un vettore dello spazio la sua norma $||v||$ è definita da:

$$||v|| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Esercizi 4 (soluzioni alla fine del file)

1. Determinare la norma dei seguenti vettori dello spazio:

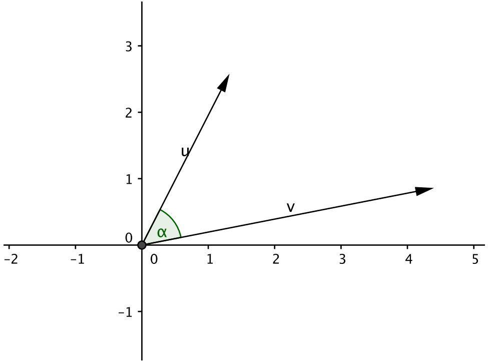
$$u = (0,0,1), v = (0,1,0), w = (1,1,1), z = (1,2,3)$$

2. Determinare tutti i valori del parametro k per cui il vettore del piano $v = (k, 2k)$ ha norma 2.

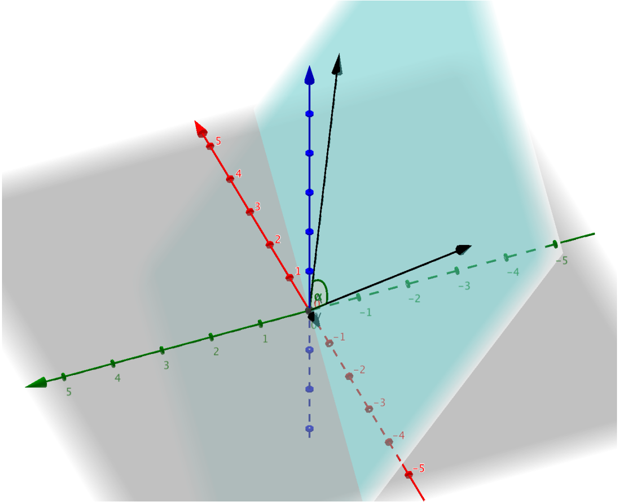
Angoli fra vettori del piano....

Due vettori non nulli nel piano formano un angolo non orientato $0 \leq \gamma \leq \pi$.

Due vettori non nulli nel piano formano un angolo non orientato $0 \leq \gamma \leq \pi$.



Due vettori non nulli nello spazio formano un angolo non orientato $0 \leq \gamma \leq \pi$.

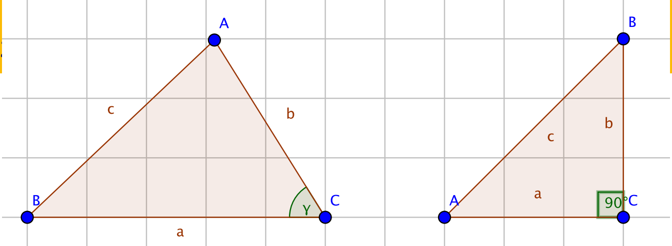


Interpretazone Geometrica del Prodotto Scalare

Se u, w sono vettori del piano o dello spazio che formano un angolo non orientato γ allora

$$< u, w >= ||u|| \cdot ||w|| \cdot \cos(\gamma)$$

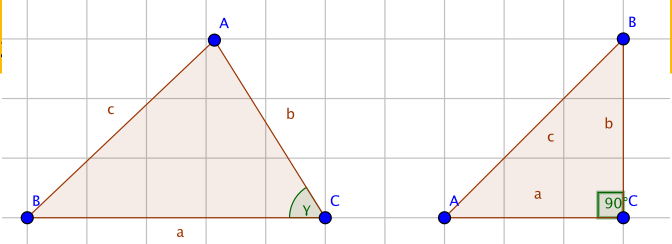
Interpreta



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma), \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

se $v = \vec{AB}$, $u = \vec{AC}$, $w = \vec{BC}$ allora $v = u - w$

Interpreta



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma), \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

se $v = \vec{AB}$, $u = \vec{AC}$, $w = \vec{BC}$ allora $v = u - w$

$$||u|| = b, ||w|| = a, ||v|| = c$$

$$c^2 \;=\; a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \;=\; ||v||^2 = < (u-w), (u-w) > =$$

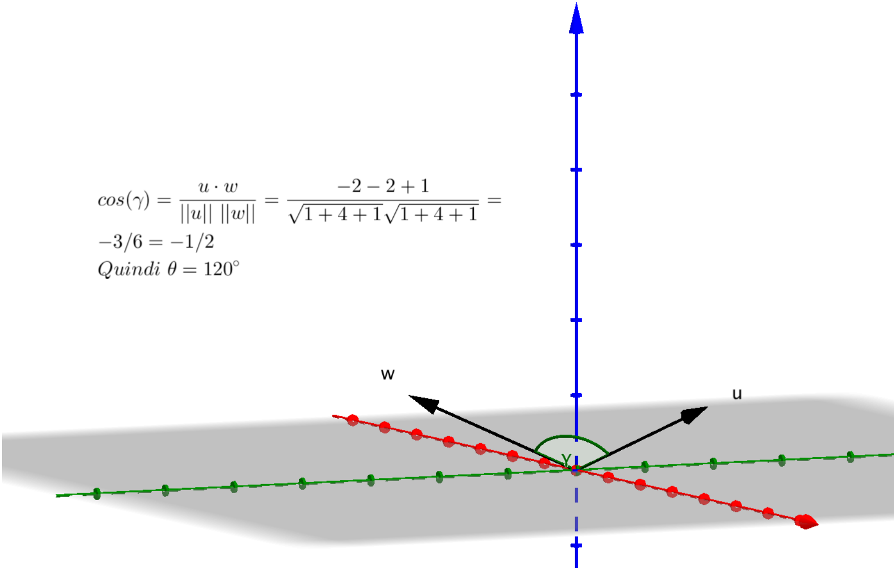
$$= < u, u > -2 < u, w > + < w, w > = b^2 + a^2 - 2 < u, w >$$

quindi

$$< u, w > = ab\cos(\gamma) = ||u|| \cdot ||w|| \cdot \cos(\gamma)$$

Esempio

Determinare l'angolo fra i vettori $u = (2, 1, 1)$ e $w = (-1, -2, 1)$.



$$cos(\gamma) = \frac{u \cdot w}{||u||\ ||w||} = \frac{-2-2+1}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+4+1}} =$$
$$-3/6 = -1/2$$
$$Quindi\ \theta = 120^\circ$$

$$
\begin{aligned}
< v, w > \; > \; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \text{ è acuto } \; (0 \leq \theta < \pi/2) && (1)\\
< v, w > \; = \; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \text{ è retto } \; (\theta = \pi/2) && (2)\\
< v, w > \; < \; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \text{ è ottuso } \; (\pi/2 < \theta \leq \pi) && (3)
\end{aligned}
$$

Due vettori u, v del piano o dello spazio hanno la stessa direzione se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $u = tv$.

$$
\begin{aligned}
< v, w > \; > \; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \text{ è acuto } \; (0 \leq \theta < \pi/2) && (1)\\
< v, w > \; = \; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \text{ è retto } \; (\theta = \pi/2) && (2)\\
< v, w > \; < \; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \theta \text{ è ottuso } \; (\pi/2 < \theta \leq \pi) && (3)
\end{aligned}
$$

Due vettori u, v del piano o dello spazio hanno la stessa direzione se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $u = tv$.

Due vettori u, v del piano o dello spazio sono perpendicolari se $< u, v >= 0$.

Esercizio 5 (soluzioni alla fine del file)

1. Determinare se i seguenti vettori sono perpendicolari o hanno la stessa direzione:

   -$u_1 = (1, 2), v_1 = (-1/2, -1)$;
   -$u_2 = (0, 1), v_2 = (1, 0)$;
   -$u_3 = (1, 1, 2), v_3 = (2, -1, -1/2)$.

2. Determinare un valore del parametro k tale che il vettore $v = (k, 1)$ abbia la stessa direzione del vettore $u = (5, 2)$.
   Determinare un valore del parametro k tale che il vettore $v' = (k, 2)$ sia perpendicolare al vettore $u = (5, 2)$.

Da

$$< v, w >= 0 \Leftrightarrow \; v \text{ e } w \text{ sono perpendicolari}$$

segue:

Caratterizzazione della perpendicolarità fra vettori e rette

- Due vettori del piano $v = (a, b), w = (c, d)$ sono perpendicolari se e solo se $ac + bd = 0$.

Da

$$< v, w >= 0 \Leftrightarrow \ v \text{ e } w \text{ sono perpendicolari}$$

segue:

Caratterizzazione della perpendicolarità fra vettori e rette

- Due vettori del piano $v = (a, b), w = (c, d)$ sono perpendicolari se e solo se $ac + bd = 0$.
- Due vettori dello spazio $v = (a, b, c), w = (d, e, f)$ sono perpendicolari se e solo se $ad + be + cf = 0$.

Da

$$< v, w >= 0 \Leftrightarrow \; v \text{ e } w \text{ sono perpendicolari}$$

segue:

Caratterizzazione della perpendicolarità fra vettori e rette

- Due vettori del piano $v = (a, b), w = (c, d)$ sono perpendicolari se e solo se $ac + bd = 0$.
- Due vettori dello spazio $v = (a, b, c), w = (d, e, f)$ sono perpendicolari se e solo se $ad + be + cf = 0$.
- Una retta r del piano di equazione $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ è perpendicolare al vettore $v = (c, d)$ se e solo se $< (a, b), (c, d) >= ac + bd = 0$.

Caratterizzazione della perpendicolarità fra vettori e rette

- Una retta r dello spazio di equazione $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$

  è perpendicolare al vettore $v = (d, e, f)$ se e solo se $< (a, b, c), (d, e, f) >= ad + be + cf = 0$.

Caratterizzazione della perpendicolarità fra vettori e rette

- Due rette del piano r, s di equazione

$$r := \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, s := \begin{cases} x = x_0' + ct \\ y = y_0' + dt \end{cases}$$

sono perpendicolari se e solo se
$< (a, b), (c, d) >= ac + bd = 0$.

Caratterizzazione della perpendicolarità fra vettori e rette

- Due rette del piano r, s di equazione

$$r := \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, \quad s := \begin{cases} x = x_0' + ct \\ y = y_0' + dt \end{cases}$$

  sono perpendicolari se e solo se
  $< (a, b), (c, d) >= ac + bd = 0$.

- Due rette dello spazio r, s di equazione

$$r := \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \quad s := \begin{cases} x = x_0' + dt \\ y = y_0' + et \\ z = z_0' + ft \end{cases}$$

  sono perpendicolari se e solo se
  $< (a, b, c), (d, e, f) >= ad + be + cf = 0$.

1. Determinare se le due rette r, r' di equazione parametrica

$$r := \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases} \quad s := \begin{cases} x = 2t \\ y = -1t \end{cases}$$

sono perpendicolari.

2. Data la retta r dello spazio di equazione parametrica

$$r := \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$$

determinare una retta ad essa perpendicolare e passante per il punto $(1, 1, 0)$.

Equazione cartesiana di una retta per due punti del piano

Come abbiamo visto precedentemente, la retta r che passa per i punti del piano $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ ha equazione parametrica

$$r := \begin{cases} x = t(x_1 - x_0) + x_0; \\ y = t(y_1 - y_0) + y_0. \end{cases}$$

- Se $x_1 = x_0$, dalla prima equazione ricaviamo l'equazione cartesiana della retta per due punti con la stessa ascissa x_0:

$$x = x_0$$

Equazione cartesiana di una retta per due punti del piano

Come abbiamo visto precedentemente, la retta r che passa per i punti del piano $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ ha equazione parametrica

$$r := \begin{cases} x = t(x_1 - x_0) + x_0; \\ y = t(y_1 - y_0) + y_0. \end{cases}$$

- Se $x_1 = x_0$, dalla prima equazione ricaviamo l'equazione cartesiana della retta per due punti con la stessa ascissa x_0:

$$x = x_0$$

- Se $y_1 = y_0$, dalla seconda equazione ricaviamo l'equazione cartesiana della retta per due punti con la stessa ordinata y_0:

$$y = y_0$$

$$r := \begin{cases} x = t(x_1 - x_0) + x_0; \\ y = t(y_1 - y_0) + y_0. \end{cases}$$

- Se $x_0 \neq x_1$ e $y_0 \neq y_1$, evidenziando il parametro t abbiamo:

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ t = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \end{cases}$$

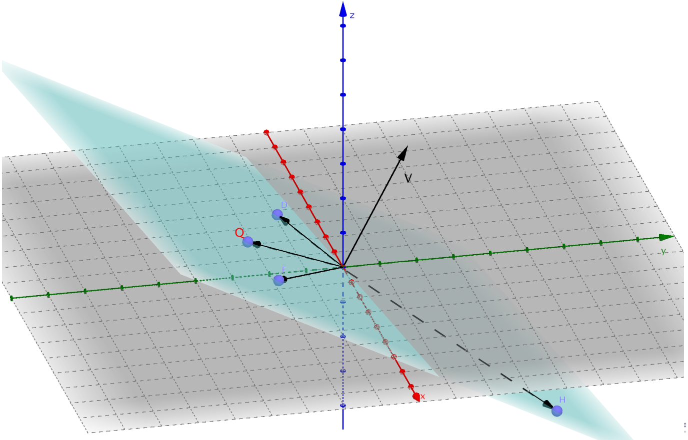
da cui ricaviamo l'equazione cartesiana della retta per i punti $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Piani nello spazio passanti per l'origine

Un piano nello spazio passante per l'origine può essere descritto da un vettore perpendicolare ("normale") al piano:
i punti Q che appartengono al piano sono tutti e soli quelli per cui il vettore $\vec{OQ}$ è ortogonale v

$$Q \in p \;\Leftrightarrow\; \vec{OQ} \perp v$$



Equazione Cartesiana di un Piano per l'Origine

Se $v = (a, b, c)$ è un vettore normale al piano p allora

$$Q \in p \;\Leftrightarrow\; \vec{OQ} \perp v$$

Se $Q = (x, y, z)$, il vettore $\vec{OQ}$ ha coordinate (x, y, z) e quindi:

$$(x, y, z) \in p \;\Leftrightarrow\; (x, y, z) \perp (a, b, c) \;\Leftrightarrow < (x, y, z), (a, b, c) >= 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; ax + by + cz = 0$$

L'equazione

$$ax + by + cz = 0$$

si chiama equazione cartesiana del piano p per l'origine, perpendicolare a $v = (a, b, c)$.

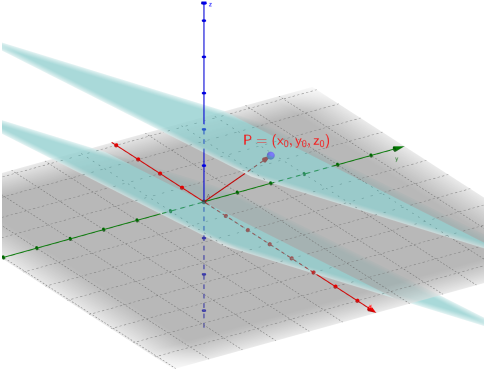
Esercizi 7 (soluzioni alla fine del file)

1. Determinare l'equazione del piano che passa per l'origine ed è perpendicolare al vettore $(1, 1, 1)$.
2. Determinare un vettore perpendicolare al piano per l'origine di equazione cartesiana $x + 2y + 3z = 0$.

Equazione Cartesiana Piano passante per un Punto e Perpendicolare ad un Vettore

L'equazione di un piano perpendicolare al vettore (a, b, c) e che che passa per un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ è:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 \tag{4}$$



Infatti, il piano per l'origine perpendicolare al vettore (a, b, c) ha equazione $ax + by + cz = 0$ mentre l'equazione (4) rappresenta un piano che ha la stessa direzione ma passa per P (le coordinate di P soddisfano l'equazione).

Ricapitolando

- Nel piano, l'equazione $ax + by = d$ rappresenta sempre i punti di una retta perpendicolare al vettore $v = (a, b)$.

Ricapitolando

- Nel piano, l'equazione $ax + by = d$ rappresenta sempre i punti di una retta perpendicolare al vettore $v = (a, b)$.
- Nello spazio, un'equazione del tipo $ax + by + cz = d$ rappresenta i punti di un piano perpendicolare al vettore $v = (a, b, c)$.

Esercizio 8 (soluzioni alla fine del file)

1. Scrivere l'equazione del piano dello spazio che ha come vettore normale $v = (1, 1, 1)$ e passa per il punto $(2, -1, 3/2)$.
2. Scrivere l'equazione della retta r che passa per il punto $P = (\pi, -2, 3)$ ed è perpendicolare al piano p di equazione cartesiana $3x + 2y - z = 2$.

Equazione Parametrica di un Piano nello Spazio

Siano $v = (a, b, c)$, $w = (d, e, f)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$ che non hanno la stessa direzione. Il piano per l'origine che contiene i due vettori è

$$L(v, w) = \{tv + sw : t, s \in \mathbb{R}\} = \{(ta + sd, tb + se, tc + sf) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

Ne segue

- l'equazione paramametrica del piano per l'origine che contiene i due vettori v, w è:

$$\begin{cases} x = ta + sd \\ y = tb + se \\ z = tc + sf \end{cases}$$

Equazione Parametrica di un Piano nello Spazio

Siano $v = (a, b, c)$, $w = (d, e, f)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$ che non hanno la stessa direzione. Il piano per l'origine che contiene i due vettori è

$$L(v, w) = \{tv + sw : t, s \in \mathbb{R}\} = \{(ta + sd, tb + se, tc + sf) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

Ne segue

- l'equazione paramametrica del piano per l'origine che contiene i due vettori v, w è:
$$\begin{cases} x = ta + sd \\ y = tb + se \\ z = tc + sf \end{cases}$$
- l'equazione paramametrica del piano che contiene i due vettori v, w e che passa per il punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ è:
$$\begin{cases} x = ta + sd + x_0 \\ y = tb + se + y_0 \\ z = tc + sf + z_0 \end{cases}$$

Equazione cartesiana di una retta nello spazio

Una retta nello spazio può essere descritta dall'intersezione di due piani non paralleli:

$$r := \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

dove il vettore $v = (a, b, c)$ non ha la stessa direzione del vettore $v' = (a', b', c')$.

Esercizio 9 (soluzioni alla fine del file)

Nello spazio $\mathbb{R}^3$:

1. scrivere l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana dell'asse delle x (delle y e delle z).
2. Scrivere l'equazione cartesiana della retta r di equazione parametrica
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = t \end{cases}$$
3. Scrivere l'equazione parametrica della retta di equazione cartesiana
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

Posizioni reciproche di due rette nello spazio

- Due rette r, s dello spazio si dicono complanari se esiste un piano che le contiene entrambe:
- due rette r, s dello spazio si dicono sghembe se non sono complanari;
- se due rette sono complanari, possono essere parallele oppure incidenti.
- Se due rette sono incidenti, allora sono complanari.

Due rette distinte e non incidenti possono essere parallele (se complanari) o sghembe.
Per capire se due rette dello spazio sono incidenti, basta considerare le loro equazioni cartesiane e risolvere il sistema. Se il sistema ha un'unica soluzione, le rette sono incidenti.
Più avanti nel corso vedremo come distinguere rette sghembe da rette parallele.

Tabelle riassuntive: equazioni parametriche e cartesiane di rette e piani

	retta r nel piano $\mathbb{R}^2$ $P = (x_0, y_0) \in r$ e r parallela a $v = (a, b)$	retta r nello spazio $\mathbb{R}^3$ $P = (x_0, y_0, z_0) \in r$ e r parallela a $v = (a, b, c)$
Eq.Parametrica	$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$	$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
Eq. Cartesiana*	$bx - ay = bx_0 - ay_0$	$\begin{cases} bx - ay = bx_0 - ay_0 \\ cx - az = cx_0 - az_0 \end{cases}$

* per convincersi che l' equazione cartesiana della retta nel piano è corretta, notare che il punto P soddisfa l'equazione; inoltre, la retta $bx - ay = bx_0 - ay_0$ ha direzione perpendicolare al vettore $(b, -a)$ che a sua volta è perpendicolare ad (a, b);
* per convincersi che l' equazione cartesiana della retta nello spazio è corretta, notare che notare che il punto P soddisfa entrambe le equazioni; inoltre, la retta è descritta dall'intersezione di due piani: il piano di equazione $bx - ay = bx_0 - ay_0$ ha direzione perpendicolare al vettore $(b, -a, 0)$ che a sua volta è perpendicolare ad (a, b, c) ed il piano di equazione $cx - az = cx_0 - az_0$ ha direzione perpendicolare al vettore $(c, 0, -a,)$ che a sua volta è perpendicolare ad (a, b, c)

- Eq. Cartesiana del piano p nello spazio passante per $P = (x_0, y_0, z_0)$ e perpendicolare al vettore $v = (a, b, c)$:
$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$
- Eq. Parametrica del piano p nello spazio passante per $P = (x_0, y_0, z_0)$ con giacitura generata dai vettori $v = (a, b, c)$, $w = (d, e, f)$:
$$\begin{cases} x = x_0 + at + ds \\ y = y_0 + bt + es \\ z = z_0 + ct + fs, \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

ESERCIZI 1 (soluzioni)

1. Trovare l'equazione parametrica della retta dello spazio che passa per l'origine e ha direzione il vettore $(-1/2, 2/3, 1)$.

$$\begin{cases} x = -t/2 \\ y = 2t/3 \\ z = t \end{cases}$$

2. Determinare se i punti $A = (1, 1, 1)$ e $B = (1/2, -1/2, 1)$ appartengono alla retta dello spazio di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$$

Il punto $A = (1, 1, 1)$ non appartiene alla retta. Tutti i punti di questa retta, infatti, hanno la forma $(t, -t, 2t)$ per un certo valore del parametro t. Se cerchiamo t per cui $A = (1, 1, 1) = (t, -t, 2t)$, guardando la prima componente otteniamo $t = 1$, ma per questo valore la seconda componente $-t = -1 \neq 1$. Quindi A non appartiene alla retta.

Per quanto riguarda il punto B, ragionando come sopra, cerchiamo t per cui valga $B = (1/2, -1/2, 1) = (t, -t, 2t)$. Dalla prima componente ricaviamo $1/2 = t$, valore che dà il risultato richiesto anche nelle altre componenti: $-t = -1/2$, $2t = 1$. Ne segue che il punto B appartiene alla retta, e tale appartenenza si riconosce per il valore del parametro $t = 1/2$.

3. Trovare un vettore della stessa direzione della retta r di equazioni parametriche

$$r := \begin{cases} x = t/2 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$$

Poiché la retta r è una retta per l'origine (l'origine $(0,0,0)$ si ottiene infatti per il valore del parametro $t = 0$ nell'equazione parametrica della retta), se $P = (x, y, z)$ è un punto sulla retta, diverso dall'origine, il vettore $\vec{OP}$ ha la stessa direzione della retta.

Possiamo ad esempio considerare il punto P sulla retta che corrisponde al valore $t = 1$ del parametro, ovvero $P = (1/2, -1, 2)$ ed il corrispondente vettore $v = \vec{OP} = (1/2, -1, 2)$ è un vettore che ha la stessa direzione della retta data.

1. Trovare l'equazione parametrica della retta dello spazio che passa per $P = (1, 2, 3)$ e ha direzione il vettore $(-1/2, 2/3, 1)$.

$$\begin{cases} x = 1 - t/2 \\ y = 2 + 2t/3 z = 3 + t \end{cases}$$

2. Determinare se i punti $A = (1, 0, -1/2)$ e $B = (1/2, -1/2, 1)$ appartengono alla retta dello spazio di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1/2 - 2t \end{cases}$$

Il punto $A = (1, 0, -1/2)$ appartiene alla retta. Tutti i punti di questa retta, infatti, hanno la forma $(1 + t, -t, -1/2 - 2t)$ per un certo valore del parametro t. Se cerchiamo t per cui $A = (1, 0, -1/2) = (1 + t, -t, -1/2 - 2t)$, guardando la prima componente otteniamo $1 + t = 1$, ovvero $t = 0$, per questo valore la seconda componente diventa $-t = 0$ e la terza $t = -1/2$. Poiché questi valori corrispondono alle coordinate di A, tale punto appartiene alla retta e si ottiene per il valore del parametro $t = 0$.
Per quanto riguarda il punto B, ragionando come sopra, cerchiamo t per cui valga $B = (1/2, -1/2, 1) = (1 + t, -t, -1/2 - 2t)$. Dalla prima componente ricaviamo $1/2 = 1 + t$, da cui si ottiene $t = -1/2$; questo valore, però, non dà il valore atteso nelle altre componenti; ad esempio nella seconda componente otteniamo $-t = 1/2 \neq -1/2$. Ne segue che il punto B non appartiene alla retta.

3. Data la retta r di equazioni parametriche

$$r := \begin{cases} x = 1 + t/2 \\ y = -t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

trovare un punto che vi appartiene, l'equazione parametrica della giacitura della retta e un vettore che abbia la stessa direzione della retta.

Ponendo $t = 0$ nell'equazione parametrica della retta r otteniamo il punto $Q = (1, 0, 3)$ appartenente alla retta. La giacitura della retta ha equazione parametrica $\begin{cases} x = t/2 \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases}$ ed un vettore con la stessa direzione si ottiene considerando un punto P sulla giacitura, diverso dall'origine: ad esempio $P = (1/2, -1, -2)$ (ottenuto per il valore $t = 1$ del parametro). Il corrispondente vettore $\vec{OP} = (1/2, -1, -2)$ ha la stessa direzione della giacitura e quindi della retta di partenza. Notiamo inoltre che, a differenza del vettore $\vec{OP}$, il vettore $\vec{OQ}$ dove Q è il punto sulla retta r trovato precedentemente, NON ha la stessa direzione della retta r.

3. Trovare l'equazione parametrica della retta r dello spazio che passa per $P = (0, 1, 2)$ e $Q = (-1, -1/2, 0)$.

Poiché P e Q sono punti sulla retta, il vettore $\vec{OP} - \vec{OQ} = (1, 3/2, 2)$ ha la stessa direzione della retta. Quindi la giacitura della retta ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t/2 \\ z = 2t \end{cases}$$

Imponendo il passaggio per P otteniamo l'equazione parametrica della retta r:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 3t/2 + 1 \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

1. Determinare la norma dei seguenti vettori dello spazio:

$$u = (0,0,1), v = (0,1,0), w = (1,1,1), z = (1,2,3)$$

$$||u|| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1,$$
$$||v|| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1,$$
$$||w|| = \sqrt{w \cdot w} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$
$$||z|| = \sqrt{z \cdot z} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

2. Determinare tutti i valori del parametro k per cui il vettore del piano $v = (k, 2k)$ ha norma 2.
Per ogni valore del parametro k, il vettore del piano $v = (k, 2k)$ ha norma

$$||v|| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{k^2 + 4k^2} = \sqrt{5k^2}$$

Quindi $||v|| = 2$ se e solo se $\sqrt{5k^2} = 2$ ovvero $5k^2 = 4$; si ottengono quindi due valori $k_1 = 2/\sqrt{5}$ e $k_2 = -2/\sqrt{5}$. I vettori corrispondenti $v_1 = (2/\sqrt{5}, 4/\sqrt{5})$ e $v_2 = (-2/\sqrt{5}, -4/\sqrt{5})$ hanno norma 2.

1. Determinare se i seguenti vettori sono perpendicolari o hanno la stessa direzione:
-$u_1 = (1, 2), v_1 = (-1/2, -1)$;
-$u_2 = (0, 1), v_2 = (1, 0)$;
-$u_3 = (1, 1, 2), v_3 = (2, -1, -1/2)$.

- Poiché $v_1 = (-1/2)u_1$ i vettori u_1, v_1 hanno la stesa direzione.
- Poiché $u_2 \cdot v_2 = 0$ i vettori u_2, v_2 sono perpendicolari.
- Poiché $u_3 \cdot v_3 = 0$ i vettori u_3, v_3 sono perpendicolari.

2. Determinare un valore del parametro k tale che il vettore $v = (k, 1)$ abbia la stessa direzione del vettore $u = (5, 2)$.
Determinare un valore del parametro k tale che il vettore $v' = (k, 2)$ sia perpendicolare al vettore $u = (5, 2)$.
Il vettore $v = (k, 1)$ ha la stessa direzione del vettore $u = (5, 2)$ se e solo se esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $v = tu$, ovvero $(k, 1) = t(5, 2) = (t5, t2)$. Dalla seconda coordinata segue $1 = t2$ ovvero $t = 1/2$ e da $k = t5$ segue $k = 5/2$. Quindi il vettore $v = (k, 1)$ ha la stessa direzione di u quando $k = 5/2$ ovvero $v = (5/2, 1)$.

Il vettore $v = (k, 2)$ è perpendicolare al vettore $u = (5, 2)$ se e solo se $u \cdot v = 0$ ovvero se e solo se $(5, 2) \cdot (k, 2) = 0$, ovvero $5k + 4 = 0$, ovvero $k = -4/5$. Quindi il vettore cercato è $v = (-4/5, 2)$.

1. Determinare se le due rette r, r' di equazione parametrica

$$r := \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases} \quad s := \begin{cases} x = 2t \\ y = -1t \end{cases}$$

sono perpendicolari.

Il vettore $v = (1, 2)$ ha la stessa direzione della retta r mentre il vettore $v' = (2, -1)$ ha la stessa direzione della retta r'. Poiché $v \cdot v' = 2 - 2 = 0$ i due vettori sono perpendicolari e lo stesso è vero per le rette r, r'.

Esercizi 6 (soluzioni)

2. Data la retta r dello spazio di equazione parametrica

$$r := \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$$

determinare una retta ad essa perpendicolare e passante per il punto $(1, 1, 0)$.

Il vettore $v = (1, 2, -1)$ ha la stessa direzione della retta r. Un vettore perpendicolare a v è, ad esempio, $w = (1, 0, 1)$ (infatti, $v \cdot w = 0$). Quindi la retta s per l'origine perpendicolare ad r ha equazione paramentrica

$$s := \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Questa retta s è la giacitura della retta richiesta nell'esercizio. Imponendo il passaggio per il punto $P = (1, 1, 0)$ otteniamo l'equazione parametrica della retta per P e perpendicolare ad r:

$$s := \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

1. Determinare l'equazione del piano che passa per l'origine ed è perpendicolare al vettore $(1, 1, 1)$.

$$x + y + z = 0$$

2. Determinare un vettore perpendicolare al piano per l'origine di equazione cartesiana $x + 2y + 3z = 0$.

$$v = (1, 2, 3)$$

Esercizio 8 (soluzioni alla fine del file)

1. Scrivere l'equazione del piano dello spazio che ha come vettore normale $v = (1, 1, 1)$ e passa per il punto $(2, -1, 3/2)$.

$$x + y + z = 2 - 1 + 3/2 = 5/2$$

2. Scrivere l'equazione della retta r che passa per il punto $P = (\pi, -2, 3)$ ed è perpendicolare al piano p di equazione cartesiana $3x + 2y - z = 2$.

   Il vettore $v = (3, 2, -1)$ è perpendicolare al piano. Quindi la giacitura della retta r è

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$$

   ed imponendo il passaggio per $P = (\pi, -2, 3)$ si ottiene l'equazione parametrica della retta r:

$$\begin{cases} x = 3t + \pi \\ y = 2t - 2 \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

Esercizio 9 (soluzioni)

Nello spazio $\mathbb{R}^3$:
1. scrivere l'equazione parametrica e l'equazione cartesiana dell'asse delle ascisse.

eq. parametica: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ eq. cartesiana: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

2. Scrivere l'equazione cartesiana della retta r di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = t \end{cases}$$

Se due piani contengono la retta e non sono paralleli, la loro intersezione sarà la retta r. Per trovare l'equazione cartesiana dei due piani, possiamo risolvere per t la prima equazione e sostiuture nella seconda: $t = 1 - x$, $y = 2(1 - x) - 1 = 2 - 2x - 2 = 1 - 2x$, da cui si ottiene $2x + y = 1$. L'equazione $2x + y = 1$ rappresenta un piano per la retta.
Analogamente, sostituendo $t = 1 - x$ in $z = t$ otteniamo $z = 1 - x$ e quindi l'equazione $x + z = 1$ rappresenta un piano per la retta r, non parallelo al piano precedentemente trovato. Quindi l'equazione cartesiana di r è

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 9 (soluzioni)

3. Scrivere l'equazione parametrica della retta di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema con il metodo di Gauss, otteniamo

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = t \end{cases}$$