ESERCIZI SULLA COMPOSIZIONE DI FUNZIONI E SULLE FUNZIONI INVERTIBILI

(1) Se $A = \{0,2,4,6\}, B = \{1,3,5,7\}, C = \{c_1, c_2, c_3\}$, considera le funzioni così definite:

$$f : A \to B, \qquad f(0) = f(2) = 3,\ f(4) = f(6) = 5$$
$$g : B \to C, \qquad g(1) = c_1,\ g(3) = c_2,\ g(5) = g(7) = c_3$$
$$h : A \to B,\ \ h(0) = 1,\ h(2) = 5,\ h(4) = 3,\ h(6) = 7$$

(a) Calcolare il valore della funzione composta $g \circ f : A \to C$ su ogni elemento del suo dominio;
(b) determinare se le funzioni $f, g, g \circ f$ sono iniettive, suriettive, biunivoche;
(c) verificare la biunivocità della funzione h e trovarne l'inversa h^{-1}.

(2) Se $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}, C = \mathbb{N}$, considera le funzioni così definite:

$$f : A \to B,\ \ f(n) = -2n + 5, \qquad g : B \to C,\ \ g(z) = z^2 + 2.$$

Calcolare il valore della funzione composta $g \circ f : A \to C$ su $0, 1$ e su un generico elemento n del suo dominio. Determinare se le funzioni $f, g, g \circ f$ sono iniettive, suriettive, biunivoche.

(3) Considerare le funzioni $f : \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definite da

$$f(n, m) = m, \qquad g(z) = z^3.$$

Calcolare il valore della funzione composta $g \circ f : A \to C$ prima sulla coppia $(0, 1)$ e poi su un generico elemento (n, m) del suo dominio. Determinare se le funzioni $f, g, g \circ f$ sono iniettive, suriettive, biunivoche.

(4) Se $A = P(\mathbb{N}), B = \mathbb{Z}, C = \{0, 1\}$, considera le funzioni così definite:

$$f : A \to B,\ \ f(X) = \begin{cases} -1, & \text{se } X \neq \emptyset \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$g : B \to C,\ \ g(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n > 0 \\ 1, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare il valore della funzione composta $g \circ f : A \to C$ prima sull'insieme $\{0, 1, 3\}$ e poi su un generico elemento X del suo dominio. Determinare se le funzioni $f, g, g \circ f$ sono iniettive, suriettive, biunivoche.

(5) Per ognuna delle seguenti funzioni f determinare se f è biunivoca e in tale caso trovare la funzione inversa.
(a) $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ la funzione definita da $f(q) = 3/(2q)$, dove $\mathbb{Q}^*$ sono i numeri razionali non nulli.
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 2x + 1$.
(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(n) = 2n + 1$.

(d) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(a, b) = (b, a)$.
(e) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $f(a, b) = ab$.
(f) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = (x + y, x)$.
(g) $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = (x+y, x-y)$.

(6) Sia $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ la funzione definita da $f(n, m) = (-m, n+1)$. Quale delle seguenti funzioni (tutte con dominio e codominio uguali a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$) è l'inversa f^{-1} di f?

$$g(n, m) = (m, n + 1), \quad h(n, m) = (-n + 1, -m), \quad k(n, m) = (n - 1, -m).$$

(7) Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1\}$ e $f : A \to B$ definita da
$$f(x) = \frac{1}{2x + 1}.$$
Controllare che f abbia effettivamente il dominio e codominio indicato, determinare se f è invertibile e in caso positivo descrivere la funzione inversa.

(8) Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali e $f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ le funzioni definite da:
$$f(x) = \frac{x - 3}{x + 2}, \quad g(x) = \frac{3 + 2x}{1 - x}.$$
Controllare che le funzioni abbiano effettivamente il dominio e il codominio indicato. Trovare le funzioni composte

$g \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e $f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Dalla risposta alle domande precedenti, possiamo stabilire che f e g sono invertibili e trovare le funzioni inverse senza fare ulteriori calcoli?

(9) Sia $A = \{0, 1\}$ e $f : P(A) \to P(A)$ definita da $f(X) = A \setminus X$. Calcolare la funzione composta $f \circ f$.
Determinare se f è invertibile e in caso affermativo descrivere la funzione inversa. Rispondere alle stesse domande nel caso di un insieme A qualsiasi e $f : P(A) \to P(A)$ definita da $f(X) = A \setminus X$.