VARIABILI CASUALI

2022-11-19

FUNZIONE RIPARTIZIONE

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$F_X : R \to [0, 1]$$

Dato un evento B, è possibile determinare una variabile casuale X.

È possibile definire una distribuzione della probabilità degli eventi $X \in B, B \subseteq R$

IDENTICAMENTE DISTRIBUITE

$$P(X \in B) = P(Y \in B)$$

Se è valida la equazione sopra allora le due variabili casuali X e Y si dicono **indenticamente distribuite**

X ~ Y

PROPRIETÀ

Per ogni $a, b \in R, a < b$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$$

$$P(X = b) = F_X(b) - \lim_{x \to b^-} F_X(x)$$

- F_X è **monotona non decrescente**
- F_X è **continua da destra**
  - è continua nei punti in cui $P(X = x) = 0$
  - è discontinua nei punti in cui $P(X = x) > 0$
- F_X è tale che $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- F_X è tale che $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

DISCRETE

- [**BERNOULLIANA**]

  Una variabilie casuale X si dice **discreta** se esiste un insieme di numeri finito $\{x_i\}\ i \in I$

$$P(X = x_i) = pi > 0$$

$$\sum_{i \in I} pi = 1$$

FUNZIONE

PROBABILITÀ

La corrispondenza tra i valori di $X \in S_X = \{x_i\}, i \in I$ e la loro probabilità è dettata dalla funzione di probabilità

$$f_X(x) = P(X = x_i) = pi \leftarrow x = x_i 0 \leftarrow x \neq x_i$$

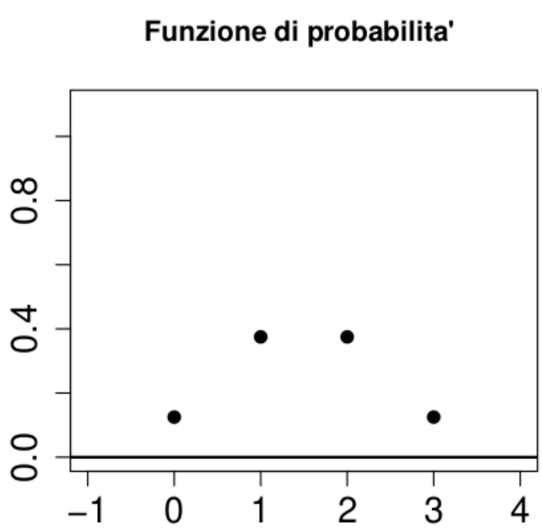
$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x_i) = pi, & \text{if } x \in S_X \\ 0 \end{cases}$$

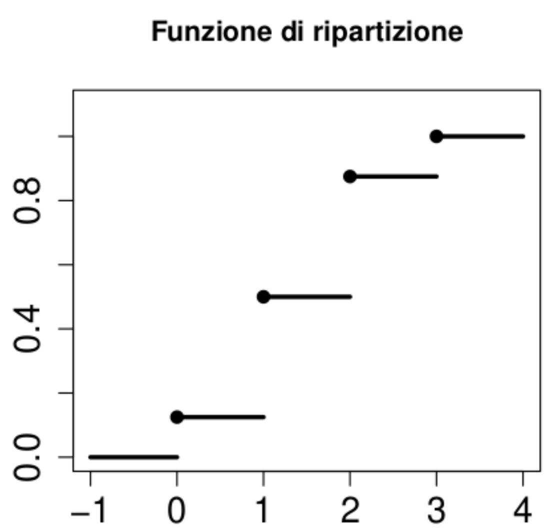
RIPARTIZIONE

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i: x_i \leq x} pi$$

Il grafico di $F_X(x)$ rappresenta dei segmenti orizzontali a scalini con dei salti in corrispondenza dei valori del supporto di X e ampiezza del salto data da p_i

$$p_i = f_X(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$





L'immagine rappresenta la variabile casuale X che conta il numero di esiti testa in 3 lanci di una moneta regolare

- $S_X = \{0, 1, 2, 3\}$: sono i possibili valori che ammette X, la variabile conteggio

PROBABILITÀ ASSOCIATE

- $P(X \geq 1)$: esca almeno 1 volta testa su 3 lanci
  - **evento complementare:** esce 0 volte testa
  - $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
- $P(X < 2)$: escono meno di due valori testa, quindi solo $\{0, 1\}$
  - $\sum_{x_i<2} P(X = x_i) = F_X(1) = 1/2$

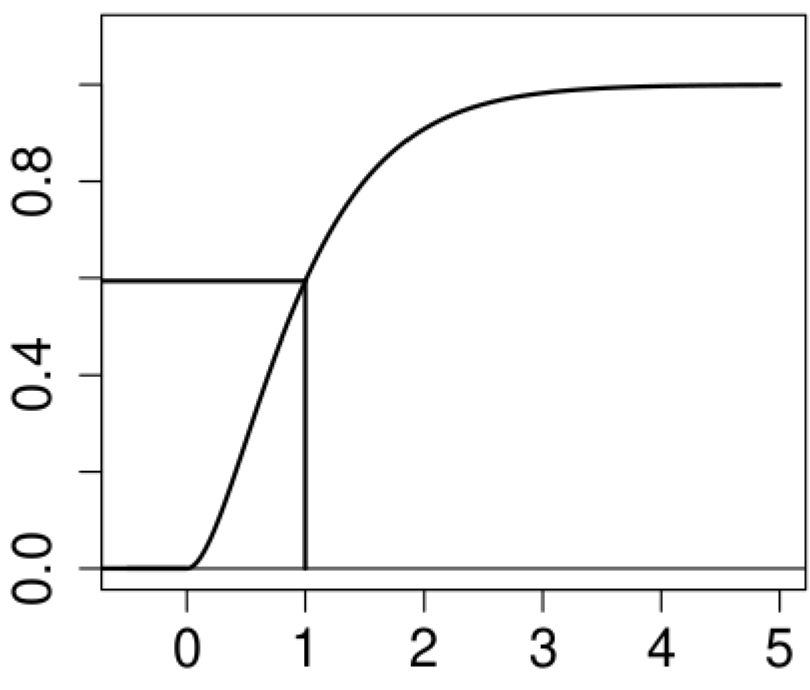
CONTINUE

A differenza di una variabile discreta, quella continua possiede infiniti valori del supporto

FUNZIONI

DENSITÀ

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \forall x \in R$$



Rapprenta la funzione di ripartizione delle variabili continue in quanto

$$F_x(x_i) = P(X \leq x_i)$$

- Il punto individuato dal grafico è circa (1;0.6)
  - $F_X(1) = 0,6 = P(X \leq 1)$

PROBABILITÀ ASSOCIATE

- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a), \forall a \in R$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $\int_a^b f_X(x)dx$

DENSITÀ PROBABILITÀ

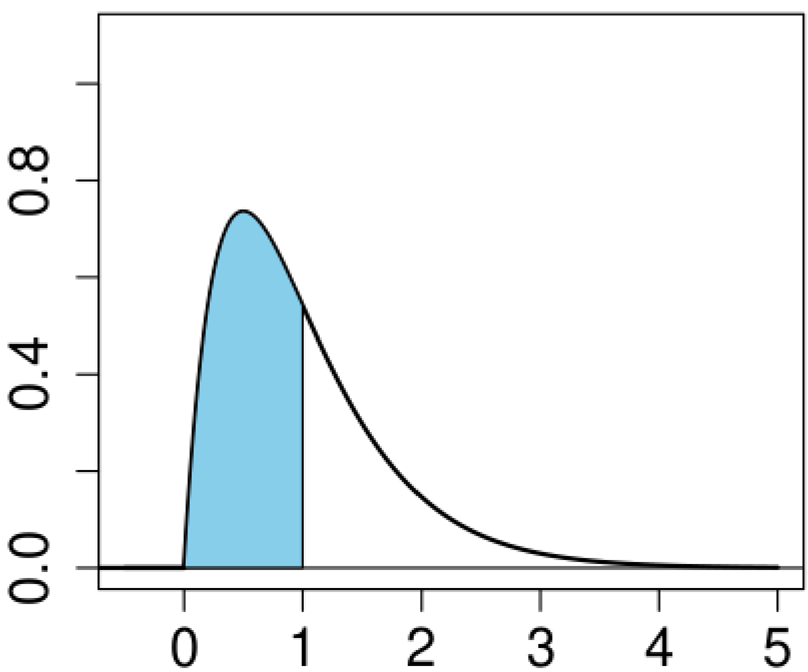
$$f_X(x) \geq 0, \forall x \in R$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

- Questa formula indica che **la somma di tutte le probabilità** associate a ogni valore della variabile casuale X da come somma 1, verificando gli **assiomi di Kolmogorov**

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = F_X'(x)$$

- La funzione di densità probabilità si traduce in termini matematici come la derivata prima della funzione di densitò



A differenza del grafico precedente l'ordinata è rappresentata dalla singola probabilità

PROPRIETÀ

$$P(a < X \leq B) = F_x(b) - F_x(a) = \int_a^b f_X(x)dx$$

INDICI SINTETICI

VALORE ATTESO

Data una variabile casuale X con supporto S_X si chiama valore atteso (medio) la media di tutti i possibili valori assunti da X ponderati con le rispettive probabilità

DISCRETA

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x * f_X(x)dx = \sum_{x \in S_X} x * P(X = x)$$

CONTINUA

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x)dx$$

PROPRIETÀ

- **CAUCHY:**
  - $inf\{Sx\} \leq E(X) \leq sup\{Sx\}$
- **BARICENTRO**
  - $E(X - E(X)) = 0$
- **LINEARITÀ**
  - $E(aX + b) = aE(X) + b, \forall a, b \in R$
  - $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

MEDIANA

Rappresenta il valore di $x_{0.5}$ in cui

$$P(X \leq x_{0.5}) \geq 0.5$$

Avendo a disposizione una variabile X continua la mediana è calcolabile immediatamente usando la funzione di densità

$$F_X(x_{0.5}) = 0.5$$

MODA

x_{MO} è il valore di X per cui la distribuzione di densità di probabilità è maggiore rispetto a tutti gli altri valori

$$P(X = x_{mo}) > P(X \neq x_{mo})$$

- Può non esistere
- Può avere un unico valore
  - **DISTRIBUZIONI UNIMODALI**
- Può avere più di un valore
  - **DISTRIBUZIONI MULTIMODALI**

- Se esiste allora appartiene al supporto della variabile
  - $x_{mo} \in S_X$

  x_{mo} rappresenta il massimo della funzione di densità di probabilità

$$x_{mo} = max\{f_X(x)\}$$

QUANTILI

Sia α il livello del quantile x_α

$\alpha \in \{0, 1\}$

$$P(X \leq x_\alpha) \geq \alpha$$

$$P(X \geq x_\alpha) \geq 1 - \alpha$$

CONTINUA

Se X è una variabile continua

$$F_X(x_\alpha) = \alpha$$

DISCRETA

Se X è discreta il quantile rappresenta il valore a cui la funzione di ripartizione raggiunge o supera α

$$F_X(x_\alpha) \geq \alpha$$

VARIANZA

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

CONTINUA

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 * f_X(x)dx$$

DISCRETA

$$V(X) = \sum_{x \in S_X} (x - E(X))^2 * f_X(x)$$

PROPRIETÀ

NON NEGATIVITÀ

- $V(X) \geq 0$
- $V(X) = 0$ se X è **degenere**
  - $S_X = \{x_1\}$
  - $E(X) = x_1$

- $X - E(X) = 0$

1. **FORMULA PER IL CALCOLO**

   $V(X) = E(X2) - (E(X))^2$

2. **INVARIANZA PER TRASLAZIONI**

   $V(X + b) = V(X), \forall b \in R$

3. **OMOGENEITÀ DI SECONDO GRADO**

   $V(aX) = a^2V(X), \forall a \in R$

4. **TRASFORMAZIONE LINEARE**

   Dalle prorpeità 3 e 4 discende la seguente

   $V(aX + b) = V(aX) = a^2V(X)$

STANDARDIZZAZIONE

Data una variabile X, con media μ e varianza σ^2

È possibile standardizzare la variabile tramite la seguente formula

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

PROPRIETÀ

- **MEDIA NULLA**
  - $E(Z) = 0$
- **VARIANZA UNITARIA**
  - $V(Z) = 1$
- **CONVERSIONE**
  - È possibile passare da standard a normale tramite i seguenti passaggi
    - Formula sopra
    - $X = \sigma Z + \mu$
      - $\mu = E(X)$
      - $\sigma^2 = V(X)$

COEFFICIENTE DI VARIAZIONE

Se X è positiva $P(X > 0) = 1$ si può definire un coefficiente di variazione

$$CV_X = \frac{\sigma}{\mu}$$

SCARTO MEDIO ASSOLUTO MEDIANA

$$E(|X - x_{0.5}|)$$

SCARTO INTERQUARTILICO

$$SI = x_{0.75} - x_{0.25}$$

CAMPO DI VARIAZIONE (RANGE)

$$R = sup\{S_X\} - inf\{S_X\}$$

SIMMETRIA

$$\gamma = \frac{E[(X - E(X))^3]}{\sigma^3}$$

Come per la statistica descrittiva indica se la funzione $f_X(x)$ di densità è simmetrica rispetto alla mediana $x_{0.5}$ o alla media $E(X)$

- $\gamma = 0$: **SIMMETRIA**
- $\gamma > 0$: **ASIMMETRIA POSITIVA**
- $\gamma < 0$: **ASIMMETRIA NEGATIVA**

CURTOSI

$$\beta = \frac{E[(X - E(X))^4]}{\sigma^4}$$

La curtosi indica la presenza delle code pesanti, quindi la funzione di densità $f_X(x)$ agli esteremi del supporto S_X avrà dei valori considerevoli di probabilità

- $\beta = 3$ **NORMOCURTICA**
- $\beta > 3$ **LEPTOCURTICA: code pesanti**
- $\beta < 3$ **PLATICURTICA: code leggere**

MULTIVARIATE

Quando si considerano più variabili contemporaneamente $\{X_1, \ldots, X_n\}$

VETTORE ALEATORIO

Si tratta della variabile casuale multivariata in cui ogni variabile è casuale

BIVARIATA

Quando si considerano 2 variabili X, Y, e la sua

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), (x, y) \in R^2$$

SUPPORTO CONGIUNTO

$$S_{X,Y} = \{(x, y) \in R^2 | F_{X,Y}(x, y) > 0\}$$

RIPARTIZIONE MARGINALE

$$F_X(x) = \lim_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x, y)$$

La formula è analoga anche per Y

DISCRETA

Si dice discreta se il suo supporto S_X è finito o al più numerabile

$$S_{X,Y} = \{(x_i, y_j) \in R^2 | P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij} > 0 \wedge \sum_{i,j} p_{i,j} = 1\}$$

$$S_{X,Y} = \{(x_i, y_j), (i, j) \in I \times J\}$$

FUNZIONE DI MASSA

$$f_{X,Y} = \begin{cases} p_{i,j}, & \text{if } (x, y) \in S_{X,Y} \\ 0 \end{cases}$$

PROBABILITÀ MARGINALE

$$\forall x_i \in S_x, P(X = X_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i, Y = y_i) = \sum_{j \in J} p_{i,j} = p_{i+}$$

TABELLA CONTINGENZA

Come nel caso della statistica descrittiva è possibile rappresentare una coppia di variabili attraverso la seguente tabella

$$p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

	y_1	y_2	$\cdots$	y_k	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1k}	p_{1+}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2k}	p_{2+}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mk}	p_{m+}
	p_{+1}	p_{+2}	$\cdots$	p_{+k}	1

INDIPENDENZA

Le distribuzioni marginali delle singole variabili X, Y si dicono **indipendenti** quando ogni evento associato a X è indipendente da ogni evento associato a Y

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) * F_Y(y), \forall (x, y) \in R^2$$

Se esiste almeno una coppia di valori (x, y) per cui non è valida la relazione sopra allora X e Y si dicono **dipendenti**

SUPPORTO

Nel caso di completa indipendenza, il supporto delle due variabili è definito come il supporto congiunto di S_X con S_Y

$$S_{X,Y} = S_X \times S_Y$$

DISCRETA

Se le due variabili sono discrete la definizione di indipendenza è data dalla seguente formula

$$f_{X,Y}(x_i, y_j) = f_X(x_i) * f_Y(y_j), \forall (i, j) \in S_{X,Y}$$

$$= p_{i,j} = p_{i+} * p_{+j}$$

CONDIZIONATA

Se (X, Y) è **discreta** si ottiene la funzione di probabilità di una variabile condizionata da un valore dell'altra variabile, purchè questo valore abbia una probabilità positiva

$$P(X|Y = y_j) \leftarrow P(Y = y_j) > 0$$

$$f_{X|Y=y_j}(x_i) = \begin{cases} P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)} = \frac{p_{i,j}}{p_{+j}}, & \text{if } x_i \in S_{X|Y=y_j} \\ 0 \end{cases}$$

MEDIA

$$E(X|Y = y_j) = \sum_{x_i} x_i * f_{X|Y=y_j}(x_i)$$

VARIANZA

$$V(X|Y = y_j) = \sum_{x_i} (x_i - E(X|Y = y_j))^2 * f_{X|Y=y_j}(x_i)$$

PROPRIETÀ

- **COMBINAZIONE LINEARE**

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y)$$

- **CASI PARTICOLARI**

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X, Y)$$

- Nel caso in cui X e Y siano incorrelate $\rho_{XY} = 0$ si ha che $Cov(X, Y) = 0$

INDIPENDENZA

Nel caso in cui X e Y siano **indipendenti** allora la media e la varianza condizionata coincidono con quelli reali della singola variabile

$$E(X|Y = y_j) = E(X)$$

$$V(X|Y = y_j) = V(X)$$

COVARIANZA

$$\sigma_{X,Y} = Cov(X,Y) = E[(X - E(X)) * (Y - E(Y))]$$

$$Cov(X,Y) = \sum_{x_i} \sum_{y_j} (x_i - E(X)) * (y_j - E(Y)) * f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

Oppure sfruttando la formula per il calcolo

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(X,Y) = \sum_{x_i} \sum_{y_j} x_i y_j * f_{X,Y}(x_i, y_j)$$

COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE LINEARE

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- disuguaglianza di **Cauchy-Schwarz :** $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
- $\rho_{X,Y} = 0 :$ **ASSENZA DI LEGAME**
- $\rho_{X,Y} > 0 :$ **CRESCENTE**
- $\rho_{X,Y} < 0 :$ **DECRESCENTE**

TOPOLOGIA DI VARIABILE

BERNOULLIANA

Una variabile casuale X si dice bernoulliana, quando gli esiti possibili della variabile sono {0,1}

$$S_X = \{0, 1\}$$

$$X \sim Ber(p), p \in (0, 1)$$

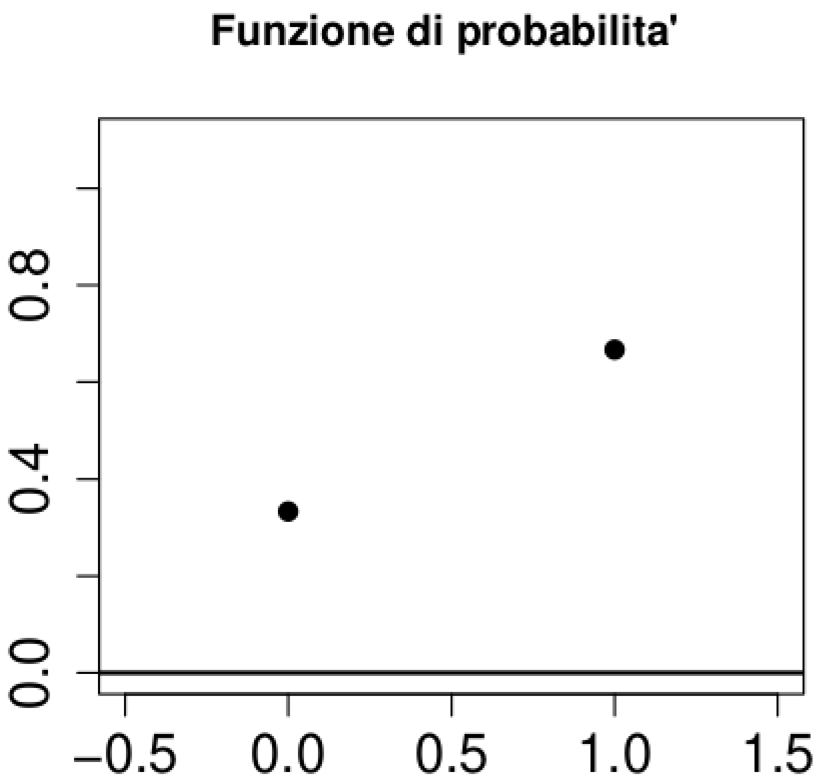
Avendo due possibili esiti la probabilità di uno dei due è dato da

$$P(X = x_1) = p_1$$

$$P(X = x_2) = p_2 = 1 - p_1$$

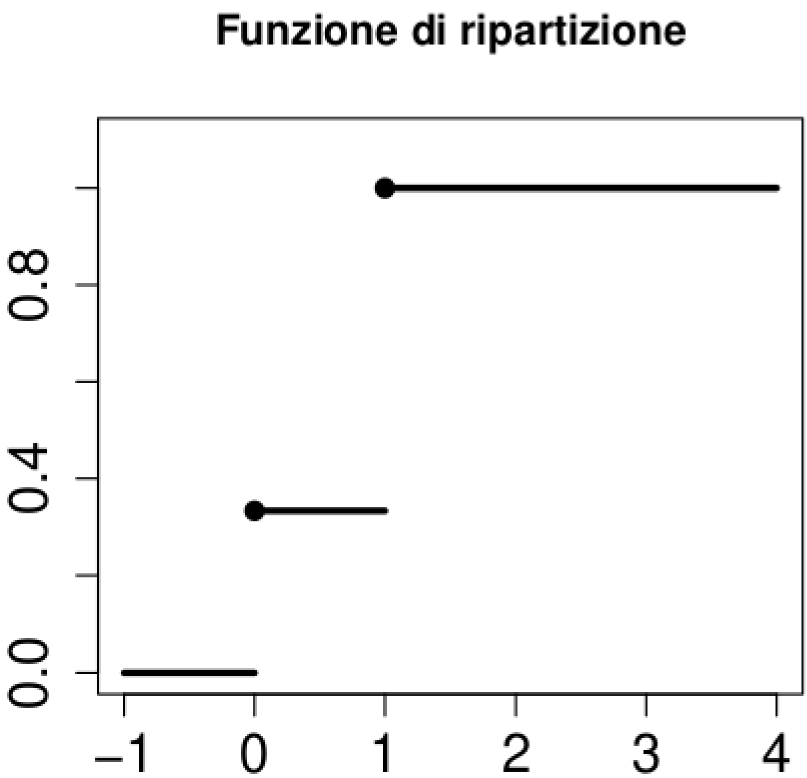
FUNZIONE DI DENSITÀ

$$f_X(x) = \begin{cases} p_1, & \text{if } X = x_1 \\ 1 - p_1, & \text{if } X \neq x_1 \\ 0 \end{cases}$$



FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < min\{S_X\} \\ 1 - p, & \text{if } x \in S_X \\ 1, & \text{if } x > max\{S_X\} \end{cases}$$



MEDIA

Essendo **discreta** si usa la seguente formula

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x * f_X(x)dx = \sum_{x \in S_X} x * P(X = x)$$

$S_X = \{x_1, x_2\}$

$E(X) = x_1 * f_X(x_1) + x_2 * f_X(x_2) = x_1 * p_1 + x_2 * (1 - p_1)$

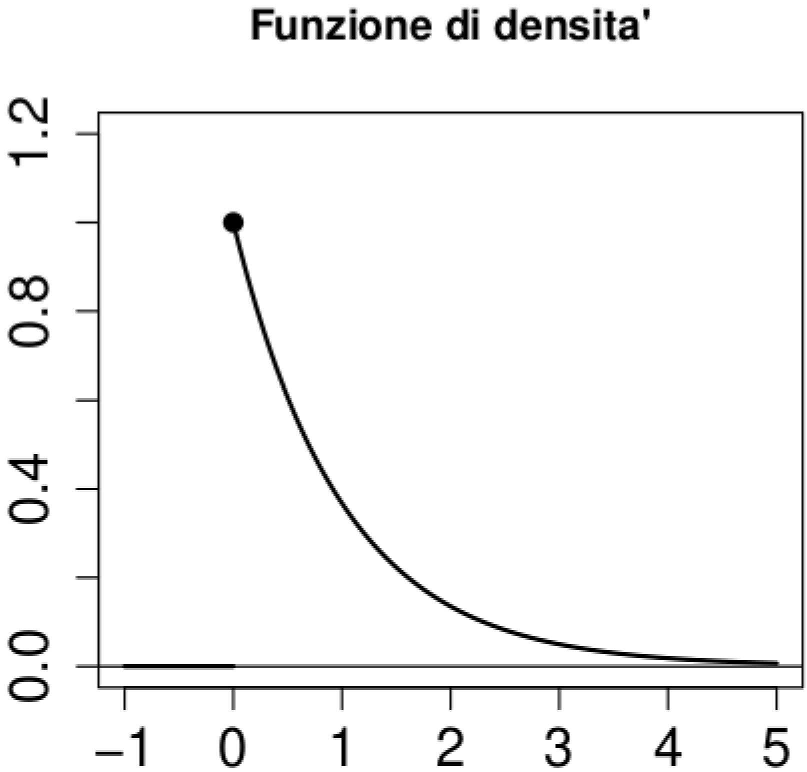
ESPONENZIALE

$$X \sim Esp(\lambda), \lambda > 0$$

$$S_X = [0, +\infty[$$

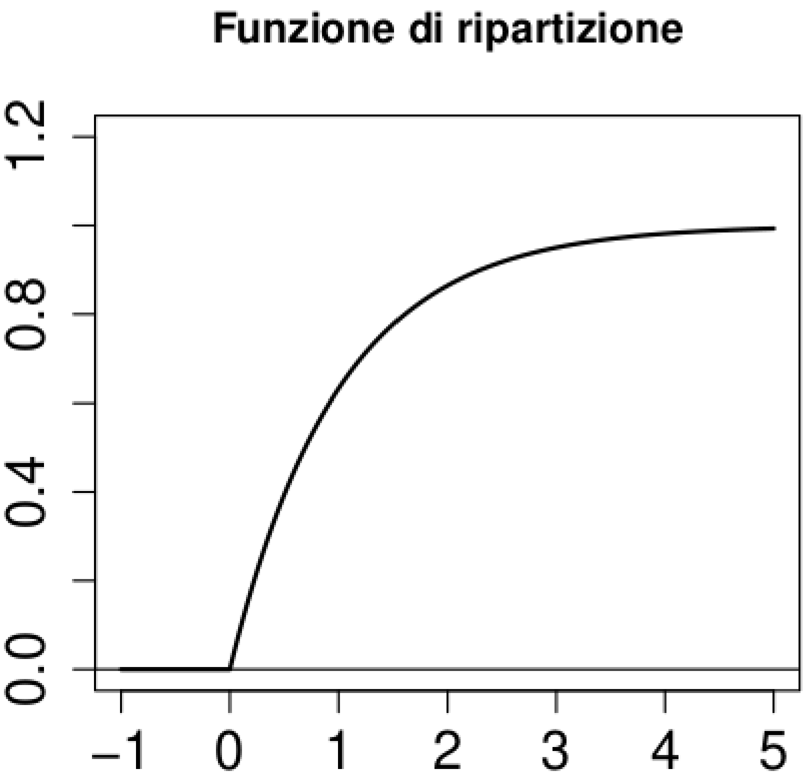
DENSITÀ

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda * e^{-\lambda x}, & \text{if } x \in S_X \\ 0 \end{cases}$$



RIPARTIZIONE

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \int_0^x f_X(x)dx, & \text{if } x \in S_X \\ 0 \end{cases}$$



PROBABILITÀ

- $P(X > x_i) = 1 - F_X(x_i)$
- $P(x_1 \leq X \leq x_j) = F_X(x_j) - F_X(x_1)$

MEDIA

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x)dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * \lambda e^{-\lambda x} dx, t = \lambda x \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{+\infty} x * \lambda t e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

VARIANZA

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) - \frac{1}{\lambda^2} E(X^2) = \int_{0}^{+\infty} \lambda x^2 * e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \int_{0}^{+\infty} \lambda x * e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

MEDIANA

$$F_X(x_{0.5}) = 0.5$$

Per ottenere il valore della mediana è sufficiente risolvere la seguente equazione

$$1 - e^{-\lambda x_{0.5}} = 0.5 x_{0.5} = \lambda^{-1} * ln2$$

QUANTILI

$$F_X(x_\alpha) = \alpha$$

$$1 - e^{-\lambda x_\alpha} = \alpha x_\alpha = \frac{ln(1-\alpha)}{-\lambda}$$

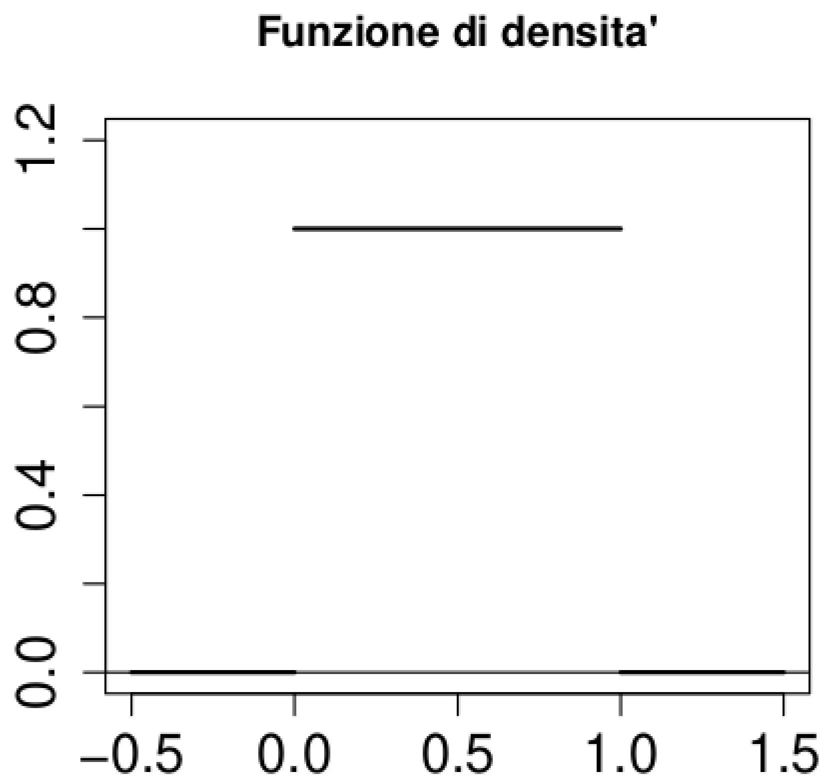
UNIFORME

Una variabile casuale si dice uniforme in $\{0, 1\}$ se il suo supporto è limitato in quell'intervallo

$$X \sim U(0,1) S_X = \{0 \leq x_i \leq 1\}$$

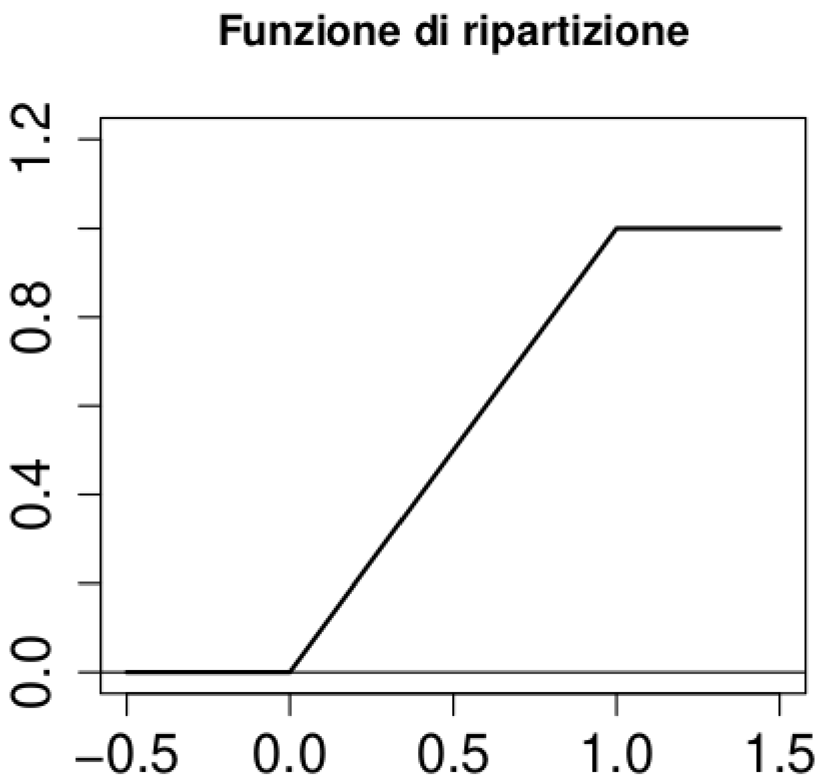
DENSITÀ

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in S_X \\ 0 \end{cases}$$



RIPARTIZIONE

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < 0 \\ x, & \text{if } x \in S_X \\ 1, & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$



PROBABILITÀ

Dati due intervalli disgiunti $[a, b]$ $[c, d]$ con $a < b$ e $c < d$ e di uguale ampiezza $h = b - a = d - c$

$$P(a \leq X \leq b) = P(c \leq X \leq d) = F_X(d) - F_X(c) = d - c = h$$

Perciò la probabilità che il valore sia all'interno di un dato intervallo equivale alla dimensione stessa dell'intervallo

APPLICAZIONI

È utile per rappresentare eventi aleatori di estrazione di numeri all'interno di un certo intervallo.

Ogni numero è equiprobabile agli altri

MEDIA

$$E(X) = \int_0^1 x * f_X(x)dx = \int_0^1 x * 1dxx = F'(x), F(x) = x^2/2E(X) = F(1) - F(0) = 1/2$$

VARIANZA

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$V(X) = E(X^2) - (1/2)^2 = E(X^2) - \frac{1}{4}$$