

ESERCIZI DI COMBINATORIA

1. Il menu di un ristorante consiste di 5 antipasti (olive farcite, bruschette, ...) 6 primi (risotto alla milanese, ...), 6 secondi (bistecca di manzo, ...) e 4 dolci (torta di pere, ...).
 - (a) Quanti pasti completi (1 antipasto, 1 primo, 1 secondo e 1 dolce) possiamo ordinare?
 - (b) Quanti pasti completi, se l'antipasto non deve essere di olive farcite?
 - (c) Quanti pasti completi, se l'antipasto deve essere di olive farcite oppure bruschetta?
 - (d) Quanti pasti completi, se invece del primo piatto optiamo per due secondi piatti? (nota bene, non distinguiamo due menu per l'ordine in cui arrivano i due secondi...)
2. Uno studente di IoT deve sostenere in tutto 24 esami; inoltre, lo studente deve dare esattamente: 8 esami il primo anno, 10 il secondo anno e 6 il terzo anno. Potendo scegliere liberamente gli esami da una lista di 50 possibili esami, quanti sono i possibili piani di studio che questo studente può compilare? (senza distinguere due piani di studio che hanno gli stessi esami in un dato anno, ma elencati in ordine differente).
3. Quanti sono gli anagrammi della parola ABAZIA, anche senza significato?
4. Sia T una tabella quadrata con 8 righe e 8 colonne.
 - (a) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1?
 - (b) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1, in modo che ci siano esattamente 6 caselle con cifra uguale ad 1?
 - (c) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1 in modo che ogni colonna sia tale che le sue caselle contengano tutte la stessa cifra?
 - (d) Fissata una diagonale di T , in quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1 in modo che la tabella di cifre risultante sia simmetrica rispetto alla diagonale ?
5. Dato un gruppo formato da 10 bambini di cui 4 sono maschi e 6 femmine, calcolare il numero dei modi differenti in cui possiamo:
 - (a) mettere in fila i bambini;
 - (b) mettere in fila i bambini in modo che i maschi precedano le femmine;
 - (c) se i bambini maschi si chiamano Giacomo, Filippo, Andrea e Giulio, in quanti modi possiamo mettere in fila i dieci bambini in modo che Giacomo sia vicino a Filippo?
 - (d) in quanti modi possiamo mettere in fila i dieci bambini in modo che Giacomo non sia vicino a Filippo?
6. Nove persone giocano al gioco della sedia, con sette sedie (quando smette la musica bisogna sedersi su una sedia che può ospitare solo una persona).
 - (a) Se le sedie sono numerate quanti sono i possibili scenari?
 - (b) E se le sedie sono indistinguibili?
7. Quante sono le stringhe che contengono 8 bit di cui esattamente 4 sono uguali ad 1?
8. Se $A = \{1, \dots, n\}$, calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi:
 - (a) l'insieme delle coppie (a, a') di elementi di A con $a \neq a'$;
 - (b) l'insieme delle coppie (a, a') di elementi di A con $a < a'$;

- (c) l'insieme delle coppie (a, a') di elementi di A con $a \leq a'$.
9. Un comitato formato da 6 persone $a; b; c; d; e; f$ deve eleggere un presidente, un segretario e un tesoriere, in modo che nessun membro del comitato detenga più di una carica
- In quante maniere diverse può essere fatta questa scelta?;
 - Quante sono le possibili scelte, se c non deve avere nessuna carica?
 - Quante sono le possibili scelte, se a deve avere almeno una carica?
 - Quante sono le possibili scelte, se sia a che b devono avere almeno una carica?
10. In quanti modi posso distribuire 4 palline numerate 1, 2, 3, 4 in 3 scatole contrassegnate con A, B, C , rispettivamente (con la possibilità che qualche scatola rimanga vuota)?
Suggerimento: invece di mettere le palline nelle scatole, possiamo assegnare le scatole alle palline: abbiamo 3 possibilità per la prima pallina (la metto in A , in B o in C), 3 per la seconda pallina, ecc.
Un altro modo di vedere lo stesso problema è: ogni possibile distribuzione delle palline nelle scatole corrisponde ad una funzione di dominio $\{1, 2, 3, 4\}$ (le 4 palline) e codominio l'insieme delle scatole $\{A, B, C\}$.
11. Quante solo le stringhe di lunghezza 7 composte con i caratteri \bullet e $|$, in cui ci sono esattamente due caratteri uguali a $|$? Una stringa di questo tipo è, ad esempio,

$\bullet \bullet | \bullet | \bullet \bullet$

Suggerimento: basta decidere la posizione dei due caratteri $|$.

12. In quanti modi posso distribuire 4 palline indistinguibili in 3 scatole contrassegnate con A, B, C (con la possibilità che qualche scatola rimanga vuota)? Suggerimento: ogni possibile distribuzione delle palline nelle scatole corrisponde ad una stringa del tipo descritto nell'esercizio precedente; ad esempio la stringa

$\bullet \bullet | \bullet | \bullet \bullet$

corrisponde a mettere 2 palline nella scatola A , 1 pallina nella scatola B e 2 palline nella scatola C .

13. In quanti modi diversi 3 bambini possono spartirsi 7 caramelle (fra loro indistinguibili)?
14. 14 amici si mettono in viaggio. Hanno a disposizione 1 macchina a 7 posti, una a 5 e una moto, che può trasportare due persone. Considerando che i proprietari dei 3 mezzi vogliono guidarli, in quanti modi diversi si possono comporre gli equipaggi?

Answer Key for Exam A

1. Il menu di un ristorante consiste di 5 antipasti (olive farcite, bruschette, ...) 6 primi (risotto alla milanese, ...), 6 secondi (bistecca di manzo, ...) e 4 dolci (torta di pere, ...).

- (a) Quanti pasti completi (1 antipasto, 1 primo, 1 secondo e 1 dolce) possiamo ordinare?
- (b) Quanti pasti completi, se l'antipasto non deve essere di olive farcite?
- (c) Quanti pasti completi, se l'antipasto deve essere di olive farcite oppure bruschetta?
- (d) Quanti pasti completi, se invece del primo piatto optiamo per due secondi piatti? (nota bene, non distinguiamo due menu per l'ordine in cui arrivano i due secondi...)

SOL.

- (a) $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4$.
- (b) $4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4$.
- (c) $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4$.
- (d) $5 \cdot \binom{6}{2} \cdot 4$.

2. Uno studente di IoT deve sostenere in tutto 24 esami; inoltre, lo studente deve dare esattamente: 8 esami il primo anno, 10 il secondo anno e 6 il terzo anno. Potendo scegliere liberamente gli esami da una lista di 50 possibili esami, quanti sono i possibili piani di studio che questo studente può compilare? (senza distinguere due piani di studio che hanno gli stessi esami in un dato anno, ma elencati in ordine differente).

SOL. $\binom{50}{8} \cdot \binom{42}{10} \cdot \binom{32}{6}$.

3. Quanti sono gli anagrammi della parola ABAZIA, anche senza significato?

SOL. $\binom{6}{3} \cdot 3!$

4. Sia T una tabella quadrata con 8 righe e 8 colonne.

- (a) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1?
- (b) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1, in modo che ci siano esattamente 6 caselle con cifra uguale ad 1?
- (c) In quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1 in modo che ogni colonna sia tale che le sue caselle contengano tutte la stessa cifra?
- (d) Fissata una diagonale di T , in quanti modi diversi posso riempire le caselle di T con le cifre 0, 1 in modo che la tabella di cifre risultante sia simmetrica rispetto alla diagonale ?

SOL.

- (a) 2^{64} .
- (b) $\binom{64}{6}$.
- (c) 2^8 .
- (d) 2^{36} .

5. Dato un gruppo formato da 10 bambini di cui 4 sono maschi e 6 femmine, calcolare il numero dei modi differenti in cui possiamo:

- (a) mettere in fila i bambini;
- (b) mettere in fila i bambini in modo che i maschi precedano le femmine;

- (c) se i bambini maschi si chiamano Giacomo, Filippo, Andrea e Giulio, in quanti modi possiamo mettere in fila i dieci bambini in modo che Giacomo sia vicino a Filippo?
- (d) in quanti modi possiamo mettere in fila i dieci bambini in modo che Giacomo non sia vicino a Filippo?

SOL.

- (a) $10!$;
- (b) $4! \cdot 6!$;
- (c) $2 \cdot 9!$
- (d) $10! - 2 \cdot 9! = 8 \cdot 9!$.

6. Nove persone giocano al gioco della sedia, con sette sedie (quando smette la musica bisogna sedersi su una sedia che può ospitare solo una persona).

- (a) Se le sedie sono numerate quanti sono i possibili scenari?
- (b) E se le sedie sono indistinguibili?

SOL.

- (a) $\binom{9}{7} \cdot 7!$
- (b) $\binom{9}{7}$

7. Quante sono le stringhe che contengono 8 bit di cui esattamente 4 sono uguali ad 1? **SOL.** $\binom{8}{4}$

8. Se $A = \{1, \dots, n\}$, calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi:

- (a) l'insieme delle coppie (a, a') di elementi di A con $a \neq a'$;
- (b) l'insieme delle coppie (a, a') di elementi di A con $a < a'$;
- (c) l'insieme delle coppie (a, a') di elementi di A con $a \leq a'$.

SOL.

- (a) $n(n-1)$,
- (b) $\binom{n}{2}$
- (c) $\binom{n}{2} + n$

9. Un comitato formato da 6 persone $a; b; c; d; e; f$ deve eleggere un presidente, un segretario e un tesoriere, in modo che nessun membro del comitato detenga più di una carica

- (a) In quante maniere diverse può essere fatta questa scelta?;
- (b) Quante sono le possibili scelte, se c non deve avere nessuna carica?
- (c) Quante sono le possibili scelte, se a deve avere almeno una carica?
- (d) Quante sono le possibili scelte, se sia a che b devono avere almeno una carica?

SOL.

- (a) $6 \cdot 5 \cdot 4$
- (b) $5 \cdot 4 \cdot 3$
- (c) $3 \cdot 5 \cdot 4$
- (d) $3 \cdot 2 \cdot 4$.

10. In quanti modi posso distribuire 4 palline numerate 1, 2, 3, 4 in 3 scatole contrassegnate con A, B, C , rispettivamente (con la possibilità che qualche scatola rimanga vuota)?

Suggerimento: invece di mettere le palline nelle scatole, possiamo assegnare le scatole alle palline: abbiamo 3 possibilità per la prima pallina (la metto in A , in B o in C), 3 per la seconda pallina, ecc. Un altro modo di vedere lo stesso problema è: ogni possibile distribuzione delle palline nelle scatole corrisponde ad una funzione di dominio $\{1, 2, 3, 4\}$ (le 4 palline) e codominio l'insieme delle scatole $\{A, B, C\}$. **SOL.** 3^4

11. Quante solo le stringhe di lunghezza 7 composte con i caratteri \bullet e $|$, in cui ci sono esattamente due caratteri uguali a $|$? Una stringa di questo tipo è, ad esempio,

$\bullet \bullet | \bullet | \bullet \bullet$

Suggerimento: basta decidere la posizione dei due caratteri $|$. **SOL.** $\binom{7}{2}$

12. In quanti modi posso distribuire 4 palline indistinguibili in 3 scatole contrassegnate con A, B, C (con la possibilità che qualche scatola rimanga vuota)? Suggerimento: ogni possibile distribuzione delle palline nelle scatole corrisponde ad una stringa del tipo descritto nell'esercizio precedente; ad esempio la stringa

$\bullet \bullet | \bullet | \bullet \bullet$

corrisponde a mettere 2 palline nella scatola A , 1 pallina nella scatola B e 2 palline nella scatola C . **SOL.** $\binom{7}{2}$

13. In quanti modi diversi 3 bambini possono spartirsi 7 caramelle (fra loro indistinguibili)? **SOL.** $\binom{9}{2}$

14. 14 amici si mettono in viaggio. Hanno a disposizione 1 macchina a 7 posti, una a 5 e una moto, che può trasportare due persone. Considerando che i proprietari dei 3 mezzi vogliono guidarli, in quanti modi diversi si possono comporre gli equipaggi? **SOL.** $\binom{11}{6} \cdot \binom{5}{4}$