Esercizi su Vettori, dipendenza e indipendenza lineare

(1) Considera i seguenti vettori di $\mathbb{R}^2$: $v_1 = (-1, 0), v_2 = (1/2, 1)$.
   (a) Dimostra che v_1, v_2 sono indipendenti.
   (b) Determina i coefficienti t, s per cui il vettore $v = tv_1 + sv_2$ quando v è uno dei seguenti vettori: $v = v_1$, $v = v_2$, $v = v_1 - v_2$, $v = (3/2, 1)$.

(2) Considera i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (-1, 0, 3), v_2 = (1/2, 1, 1)$.
   (a) Dimostra che $L(v_1, v_2)$ non è una retta di $\mathbb{R}^3$ ed è quindi un piano per l'origine.
   (b) Trova l'equazione parametrica del piano $L(v_1, v_2)$ e la sua equazione cartesiana.
   (c) Considera il vettore $v = (-1/2, 1, 4)$ e dimostra che $v \in L(v_1, v_2)$ in tre modi diversi:
      (i) trovando due coefficienti s, t per cui vale $v = tv_1 + sv_2$;
      (ii) dimostrando che le coordinate di v soddisfano l'equazione parametrica del piano $L(v_1, v_2)$;
      (iii) dimostrando che le coordinate di v soddisfano l'equazione cartesiana del piano $L(v_1, v_2)$.

(3) Utilizzare il metodo di Gauss per determinare se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^4$ sono dipendenti o indipendenti.
   (a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

   (b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$

(4) Sia $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.
   (a) Dimostrare che $W \neq \mathbb{R}^3, W \neq \{\vec{0}\}$.
   (b) Dimostrare che W non è una retta di $\mathbb{R}^3$, trovando due vettori di W che non appartengono alla stessa retta (sono indipendenti).
   (c) È possibile trovare tre vettori linearmente indipendenti in W?
   (d) È possibile generare W con un solo vettore?
   (e) Determinare una base del sottospazio W.
   (f) Dati i vettori $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 0, 1)$, trovare se possibile:
   - un vettore v che appartiene a $L(v_1, v_2)$ ma non a W;
   - un vettore w che appartiene a W ma non a $L(v_1, v_2)$;
   - un vettore u che appartiene sia a W che a $L(v_1, v_2)$.

(5) Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1, 0, 3, 0), v_2 = (1/2, -1, 0, 1).$$

   (a) Dimostrare che i vettori v_1, v_2 sono indipendenti.

(b) Determinare se i vettori $w = (1, 2, 6, 0)$ e $w' = (1/2, 1, 3, -1)$ appartengono o meno a $L(v_1, v_2)$, in caso affermativo, trovare le coordinate in base B.

(6) Dati i vettori $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1), v_3 = (1, 0, 2)$ in $\mathbb{R}^3$ considerare il sottospazio $W = L(v_1, v_2)$. Determinare se i tre vettori sono indipendenti e in caso negativo esprimere uno di loro come combinazione lineare degli altri due.

(7) Trovare una base del il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0\}$$

(8) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = h - k + 2t \\ y = h \\ z = t \\ w = t \end{cases}$$

ovvero,

$$W = \{(h - k + 2t, h, t, t) : \; h, k, t \in \mathbb{R}\}$$

(a) Trovare una base di W.
(b) Dato il vettore $w = (3, -1, 2, 2)$, stabilire se appartiene a W. In caso affermativo trovare le sue coordinate rispetto alla base determinata al punto precedente.

(9) Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (2, 1, 0)$$

(a) Determinare se i vettori v_1, v_2, v_3 sono indipendenti.
(b) Determinare se $L(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

(10) Considerare i vettori $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 2, 1)$ in $\mathbb{R}^3$;
(a) descrivere l'insieme delle loro combinazioni linerari $L(v_1, v_2, v_3)$;
(b) determinare se il vettore v_3 appartiene o meno allo spazio $L(v_1, v_2)$;
(c) i vettori v_1, v_2, v_3 sono dipendenti? Se la risposta è positiva, scrivere il vettore $\vec{0}$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 a coefficienti non tutti nulli.

(11) Considerare i vettori $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1), v_3 = (1, 0, 2)$ di $\mathbb{R}^3$.
(a) Determinare se i vettori v_1, v_2, v_3 sono indipendenti.
(b) Determinare se $v_3 \in L(v_1, v_2)$, se $v_2 \in L(v_1, v_3)$, se $v_3 \in L(v_1, v_2)$.
(c) Determinare se $L(v_1, v_2) = L(v_1, v_2, v_3)$.
(d) Dimostrare che il vettore $(\sqrt{2}, 0, 1)$ appartiene a $L(v_1, v_2)$ e scriverlo come combinazione lineare di v_1, v_2.

(12) Scrivere il vettore $(1, 1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ come combinazione lineare dei vettori $e_1, e_1 + e_2$ di $\mathbb{R}^4$.

(13) Sia W il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{(h + k, h - k, h, k) : h, k \in \mathbb{R}\}$$

(a) Stabilire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ appartengono o meno al sottospazio: $e_1,\ e_1 + e_2,\ (8, 0, 2, 6),\ ,(8, 0, 4, 4)$

(b) Trovare due vettori v_1, v_2 di W tali che $W = L(v_1, v_2)$.

(14) Dati i vettori $v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (1, 1, 1, 1), v_3 = (0, 1, 1, 0)$, determinare se sono linearmente indipendenti. È possibile scrivere in in due modi diversi il vettore $\vec{0}$ come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3?