LABORATORIO 5 - Variabili casuali

STATISTICA E LABORATORIO (CDL in INTERNET OF THINGS, BIG DATA, MACHINE LEARNING)

Anno Accademico 2022-2023

Section 1

Variabili casuali discrete

Moneta

Si consideri l'esperimento che consiste nel lanciare tre volte una moneta regolare e si supponga di essere interessati al numero totale degli esiti testa. La sua funzione di probabilità è

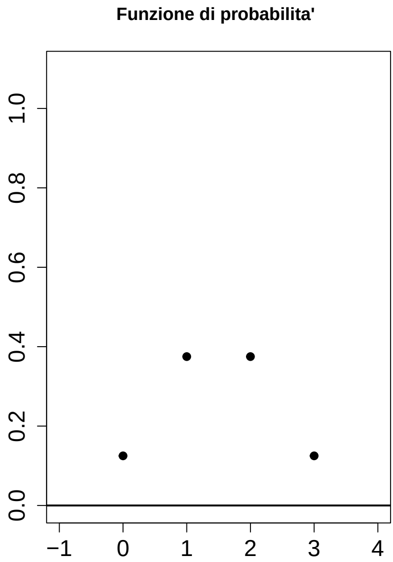
$$f_X(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{se} \quad x = 0 \\ 3/8 & \text{se} \quad x = 1 \\ 3/8 & \text{se} \quad x = 2 \\ 1/8 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

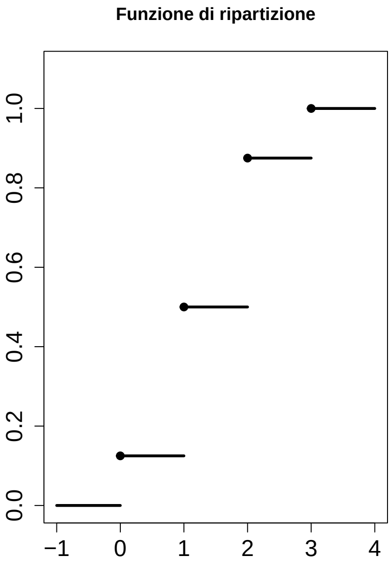
La sua funzione di ripartizione è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1/8 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

```
par(mfrow=c(1,2))
# funzione di probabilita'
plot(c(0,1,2,3),c(1/8,3/8,3/8,1/8),pch=19,lwd=2,xlim=c(-1,4),
     ylim=c(0,1.1),cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ",
     main = "Funzione di probabilita' ")
abline(0,0,lwd=2)
# funzione di ripartizione
plot(c(0,1,2,3),c(1/8,4/8,7/8,8/8),pch=19,lwd=2,xlim=c(-1,4),
     ylim=c(0,1.1),cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ",
     main = "Funzione di ripartizione")
segments(-1,0,0,0,lwd=3)
segments(0,1/8,1,1/8,lwd=3)
segments(1,4/8,2,4/8,lwd=3)
segments(2,7/8,3,7/8,lwd=3)
segments(3,8/8,4,8/8,lwd=3)
```

```
par(mfrow=c(1,1))
```


Funzione di probabilita'
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−1
0
1
2
3
4


Funzione di ripartizione
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−1
0
1
2
3
4

Variabile casuale degenere

La sua funzione di probabilità è

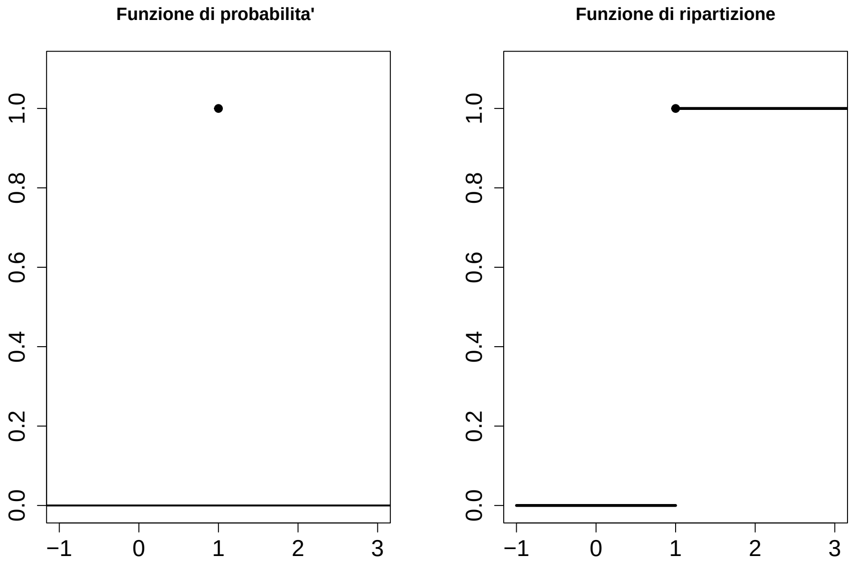
$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x = c \\ 0 & \text{se} \quad x \neq c \end{cases}$$

La sua funzione di ripartizione è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < c \\ 1 & \text{se} \quad x \geq c \end{cases}$$

```
par(mfrow=c(1,2))
plot(1,1,pch=19,lwd=2,xlim=c(-1,3),ylim=c(0,1.1),cex.axis=1.5,
     xlab=" ",ylab=" ",main = "Funzione di probabilita' ")
abline(0,0,lwd=2)
plot(c(1),c(1),pch=19,lwd=2,xlim=c(-1,3),ylim=c(0,1.1),cex.axis=1.5,
     xlab=" ",ylab=" ",main = "Funzione di ripartizione")
segments(-1,0,1,0,lwd=3)
segments(1,1,4,1,lwd=3)
```

```
par(mfrow=c(1,1))
```


Funzione di probabilita'
Funzione di ripartizione
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−1
0
1
2
3

Variabile casuale bernoulliana

La sua funzione di probabilità è

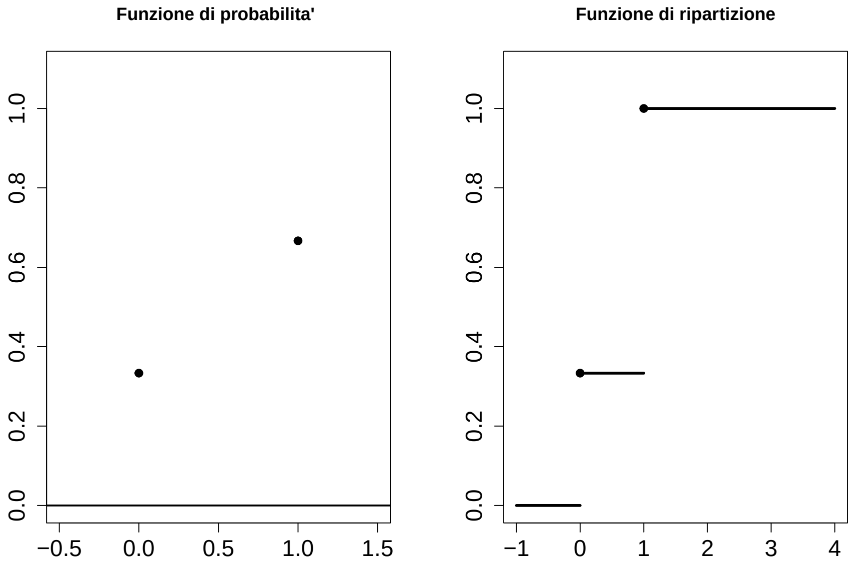
$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{se} \quad x = 0 \\ 2/3 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

La sua funzione di ripartizione è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1/3 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

```
par(mfrow=c(1,2))
plot(c(0,1),c(1/3,2/3),pch=19,lwd=2,xlim=c(-0.5,1.5),ylim=c(0,1.1),
     cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ",main = "Funzione di
     probabilita' ")
abline(0,0,lwd=2)
plot(c(0,1),c(1/3,1),pch=19,lwd=2,xlim=c(-1,4),ylim=c(0,1.1),
     cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ",main = "Funzione di
     ripartizione")
segments(-1,0,0,0,lwd=3)
segments(0,1/3,1,1/3,lwd=3)
segments(1,1,4,1,lwd=3)
```

```
par(mfrow=c(1,1))
```

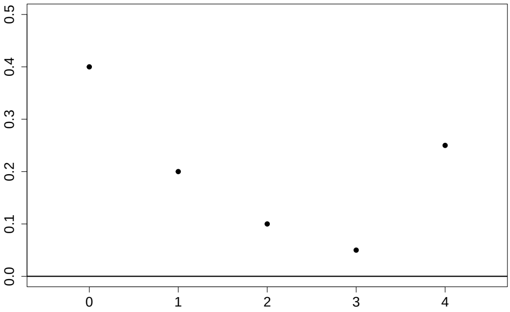

Funzione di probabilita'
Funzione di ripartizione
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
−1
0
1
2
3
4

Interruzioni

Sia X una variabile casuale discreta che descrive il numero di interruzioni registrate in una linea di produzione di una certa azienda in una settimana. La sua funzione di probabilità è

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.4 \quad \text{se} \quad x = 0 \\ 0.2 \quad \text{se} \quad x = 1 \\ 0.1 \quad \text{se} \quad x = 2 \\ 0.05 \quad \text{se} \quad x = 3 \\ 0.25 \quad \text{se} \quad x = 4 \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

```
plot(c(0,1,2,3,4),c(0.4,0.2,0.1,0.05,0.25),pch=19,lwd=2,
     xlim=c(-0.5,4.5),ylim=c(0,0.5),cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ")
abline(0,0,lwd=2)
```



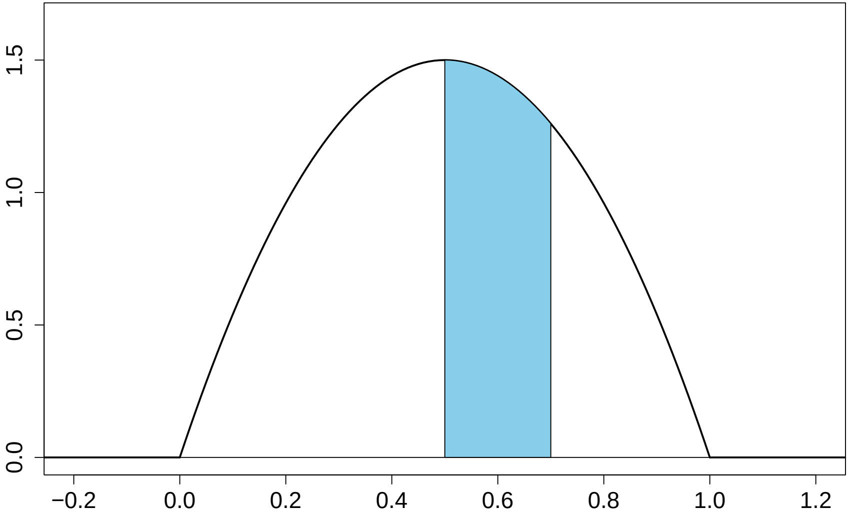
Section 2

Variabili casuali continue

Internet

Una compagnia telefonica ha riscontrato che la durata, in un'ora, dei collegamenti internet dei propri utenti è descritta da una variabile casuale continua X con funzione di densità $6x(1-x)$ per $x \in [0,1]$

```
xx<-seq(0,1,0.01)
plot(xx,6*xx-6*xx^2,xlim=c(-0.2,1.2),ylim=c(0,1.65),type='l',lwd=2,
     cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ")
abline(0,0,lwd=1)
segments(-0.5,0,0,0,lwd=2)
segments(1,0,1.5,0,lwd=2)
x1<-seq(0.5,0.7,0.01)
polygon(c(0.5,x1,0.7),c(0,6*x1-6*x1^2,0),col="skyblue")
```


1.5
1.0
0.5
0.0
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2

Variabile casuale esponenziale

Una variabile casuale X è esponenziale, in simboli $X \sim Esp(\lambda)$, con $\lambda > 0$, se $S_X = [0, \infty)$ e

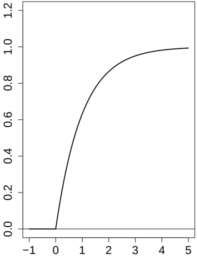
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

se $x \in S_X$ La funzione di ripartizione è

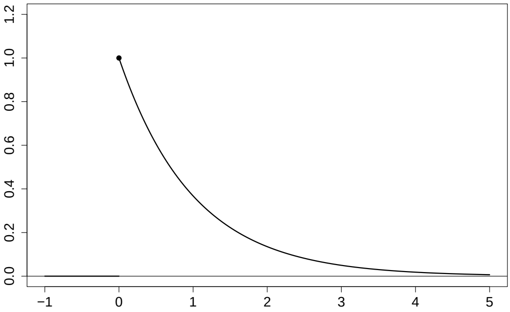
$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

se $x \in S_X$, mentre $F_X(x) = 0$, se $x \notin S_X$.

```
par(mfrow=c(1,2))
xx<-seq(-1,5,0.01)
# pexp() e' il comando che fornisce la funzione di ripartizione
#di una variabile casuale esponenziale
plot(xx,pexp(xx,1),xlim=c(-1,5),ylim=c(0,1.2),type='l',lwd=2,
     cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ")
abline(0,0,lwd=1)
```



```
xx1<-seq(0,5,0.01)
# dexp() e' il comando che fornisce la funzione di densita'
# di una variabile casuale esponenziale
plot(xx1,dexp(xx1,1),xlim=c(-1,5),ylim=c(0,1.2),type='l',lwd=2,
     cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ")
abline(0,0,lwd=1)
points(0,dexp(0,1),pch=19,lwd=2)
segments(-1,0,0,0,lwd=2)
```



Variabile casuale uniforme continua

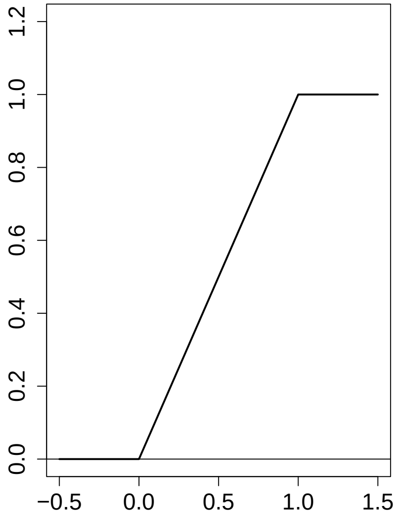
Variabile casuale uniforme. Una variabile casuale continua X è uniforme in $[0,1]$, in simboli $X \sim U(0,1)$, con $S_X = [0,1]$. La sua funzione di densità è

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in S_X \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione di ripartizione è

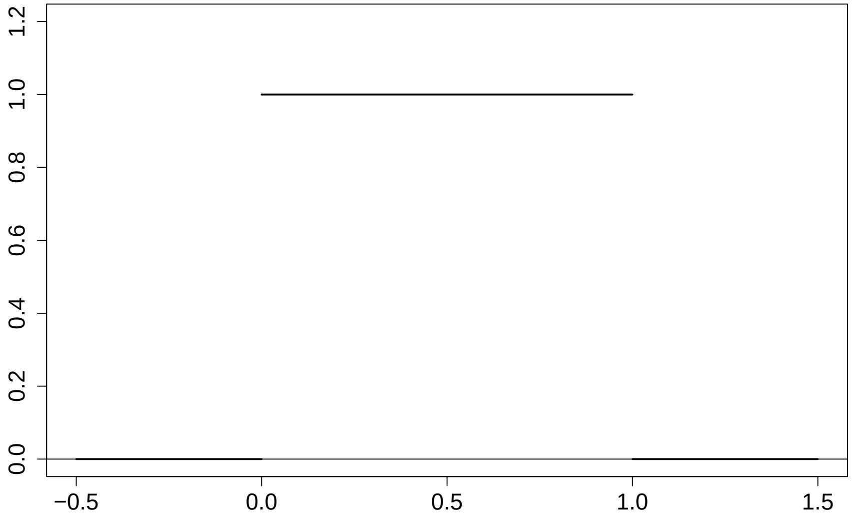
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

```r
par(mfrow=c(1,2))
xx<-seq(-0.5,1.5,0.01)
# punif() e' il comando che fornisce la funzione di
# ripatizione di una variabile casuale uniforme continua
plot(xx,punif(xx,0,1),xlim=c(-0.5,1.5),ylim=c(0,1.2),type='l',
     lwd=2,cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ")
abline(0,0,lwd=1)
```


1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

```r
xx1<-seq(0,1,0.01)
# dunif() e' il comando che fornisce la funzione di densita'
#di una variabile casuale uniforme continua
plot(xx1,dunif(xx1,0,1),xlim=c(-0.5,1.5),ylim=c(0,1.2),type='l',
     lwd=2,cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ")
abline(0,0,lwd=1)
segments(-0.5,0,0,0,lwd=2)
segments(1,0,1.5,0,lwd=2)
```

```r
par(mfrow=c(1,1))
```


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5

Costante di normalizzazione

Si consideri la variabile casuale continua X con funzione di densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2 \quad \text{se} \quad x \in [0,2] \\ 0 \text{altrimenti}, \end{cases}$$

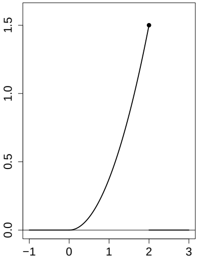
```
fun=function(x){x^2}
integrate(fun,0,2)
```

```
## 2.666667 with absolute error < 3e-14
```

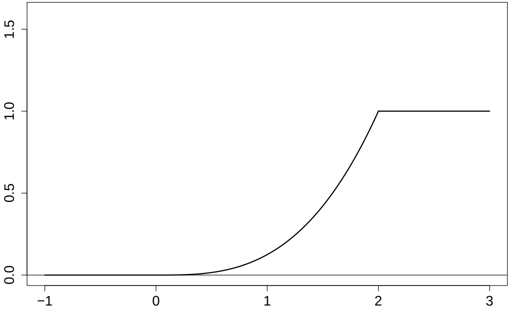
```
1/integrate(fun,0,2)$value
```

```
## [1] 0.375
```

```
par(mfrow=c(1,2))
xx<-seq(0,2,0.01)
plot(xx,(3/8)*xx^2,xlim=c(-1,3),ylim=c(0,1.6),type='l',lwd=2,
     cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ")
points(2,(3/8)*2^2,lwd=2,pch=19)
segments(-1,0,0,0,lwd=2)
segments(2,0,3,0,lwd=2)
abline(0,0,lwd=1)
```



```
plot(xx,(1/8)*xx^3,xlim=c(-1,3),ylim=c(0,1.6),type='l',lwd=2,
     cex.axis=1.5,xlab=" ",ylab=" ")
segments(-1,0,0,0,lwd=2)
segments(2,1,3,1,lwd=2)
abline(0,0,lwd=1)
```




```
par(mfrow=c(1,1))
```

```r
# la funzione integrate calcola l'integrale di una
# funzione unidimensionale con una procedura numerica

# funzione di densita' sul supporto [0,2]
fun <- function(x){(3/8)*x^2}

# integrale della funzione di densita' sul supporto [0,2]
integrate(fun,0,2)
```

```
## 1 with absolute error < 1.1e-14
```

```r
fun1 <- function(x){x*(3/8)*x^2}
media <- integrate(fun1,0,2) # calcolo del valore atteso
media
```

```
## 1.5 with absolute error < 1.7e-14
```

```r
fun2 <- function(x){x^2*(3/8)*x^2}
media2 <- integrate(fun2,0,2) # calcolo del valore atteso di X^2
```

```
media2$value-media$value^2 # varianza
```

```
## [1] 0.15
```

```
# calcolo della varianza usando la definizione
fun3 <- function(x){(x-media$value)^2*(3/8)*x^2}
integrate(fun3,0,2)
```

```
## 0.15 with absolute error < 1.7e-15
```

```
# la funzione uniroot trova lo zero di una funzione su
# un intervallo definito

# funzione di ripartizione meno 1/2 sul supporto [0,2]
frip_me <- function(x){(1/8)*x^3-(1/2)}

# mediana come soluzione dell'equazione F_X(x)-1/2=0
uniroot(frip_me,c(0,2))$root
```

```
## [1] 1.587401
```