Proiezioni Ortogonali e Complemento Ortogonale

(1) Considerare la retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine di equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

(a) Dato il vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, trovare la proiezione ortogonale p di v sulla retta r. Verificare che il vettore errore $e = v - p$ sia perpendicolare ad r.

(b) Determinare la matrice di proiezione ortogonale P sulla retta r. Usando tale matrice, trovare la proiezione ortogonale p' del vettore $v' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ sulla retta r.

(2) Considerare la retta r di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + y + z = 0; \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

Trovare la matrice di proiezione P sulla retta r e, usando tale matrice, determinare la proiezione ortogonale del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sulla retta r.

(3) Considerare il piano W di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine di equazione cartesiana

$$\begin{cases} x + y - z = 0; \end{cases}$$

(a) Verificare che i vettori $w_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ formino una base ortonormale di W.

(b) Usando la base ortonormale (w_1, w_2) di W trovare la matrice di proiezione P su W.

(c) Usando la matrice di proiezione P trovata al punto precedente, determinare la proiezione ortogonale p del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sul W. Verificare che il vettore di errore $e = v - p$ sia ortogonale a W.

(4) Dati i vettori $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1), v_3 = (1, 0, 2)$ in $\mathbb{R}^3$ considerare il sottospazio $W = L(v_1, v_2)$.

(a) Dimostrare che $B =< v_1, v_2 >$ è una base di W.

(b) Trovare le coordinate del vettore v_3 rispetto alla base B.

(c) Scrivere l'equazione parametrica di W.

(d) Trovare un vettore w ortogonale al piano W.
(e) Scrivere l'equazione cartesiana di W.
(f) Trovare una base ortonormale per W.
(g) Determinare il complemento ortogonale $W^{\perp}$ di W.

(5) Sia W il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{(h+k, h-k, h) : h, k \in \mathbb{R}\}$$

(a) Trovare una base ortonormale B di W.
(b) Trovare il complemento ortogonale $W^{\perp}$ di W.
(c) Scrivere il vettore $v = (1, 0, 1)$ come somma di un vettore in W e di un vettore in $W^{\perp}$.

(6) In $\mathbb{R}^3$, considerare il vettore $v = (1, 0, 1)$ e la retta r di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

(a) Trovare un vettore w che abbia la stessa direzione della retta.
(b) Trovare la proiezione ortogonale p del vettore v sulla retta r e un vettore e perpendicolare ad r tale che $v = p + e$.

(7) Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (2, 1, 0).$$

(a) I vettori v_1, v_2, v_3 sono indipendenti?
(b) Trovare una base per il sottospazio $W = L(v_1, v_2, v_3)$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3, del punto precedente.
(c) Descrivere il complemento ortogonale $W^{\perp}$ di W e trovare una base di $W^{\perp}$

(8) Considerare i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \},$$

$$T = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \}$$

(a) Dimostrare che S è una retta di $\mathbb{R}^3$, trovandone l'equazione parametrica.
(b) Dimostrare che T è un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$, trovando una base di T.
(c) Trovare $S^{\perp}$ e $T^{\perp}$, in $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, rispettivamente.

(9) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si consideri il seguente sottospazio vettoriale:

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0\}$$

(a) Dimostrare che se $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$ allora $B =< v_1, v_2 >$ è una base di W.
(b) Trovare una base ortonormale di W a partire dalla base B.
(c) Determinare se il vettore $(-1, 1, 1)$ appartiene o meno al complemento ortogonale $W^{\perp}$ di W.

(d) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ del sottospazio W e la sua dimensione.
(e) Determinare una base B' di $W^\perp$.

(10) Nello spazio $\mathbb{R}^4$ si consideri il seguente sottospazio vettoriale:

$$W := \{(h, k, -h, -k) : \ h, k \in \mathbb{R}\}$$

(a) Determinare una base di W e la sua dimensione.
(b) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$.
(c) Trovare una base ortonormale $B =< v_1, v_2 >$ di W e una base ortonormale $B' =< w_1, w_2 >$ di $W^\perp$.
(d) Considerare la base ortonormale $< v_1, v_2, w_1, w_2 >$ di $\mathbb{R}^4$ ottenuta dalle basi precedenti e trovare le coordinate del vettore $(1, 0, 1, 1)$ rispetto a questa base.

(11) Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si consideri il seguente sottospazio vettoriale:

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + z = 0 \text{ e } -x - y + z = 0\}$$

(a) Utilizzando il metodo di Gauss, risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

che descrive lo spazio W e trovare un'equazione parametrica per W.
(b) Determinare la dimensione di W e una sua base.
(c) Determinare il complemento ortogonale $W^\perp$ di W e la sua equazione cartesiana.