

Teorema del Campionamento

1

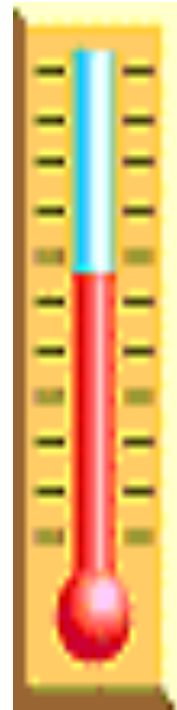
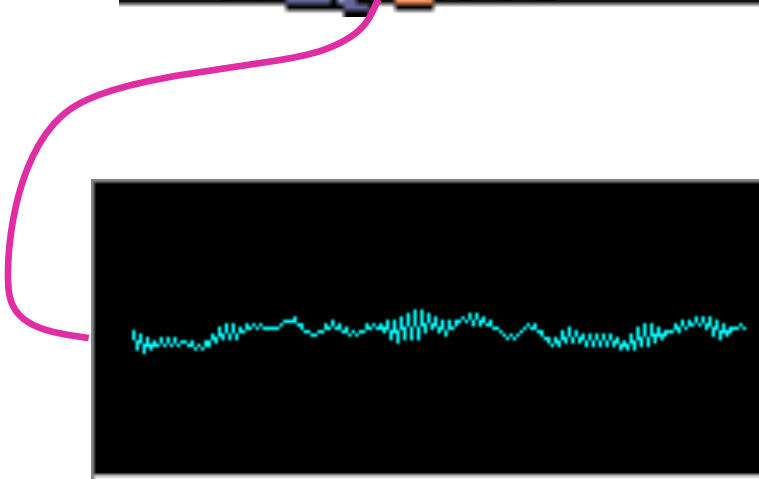
G. MARSELLA
UNIVERSITÀ DEL SALENTO



L'era digitale



...ma il mondo fisico è analogico!!



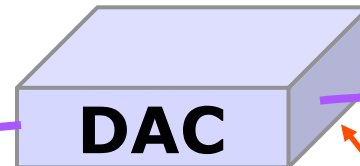
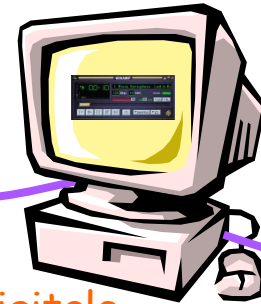
Come si passa dall'analogico al digitale (e viceversa)?



Il microfono è un **trasduttore**: trasforma il segnale sonoro (onde di pressione in aria) in un segnale elettrico analogico (tensione variabile nel tempo)



Convertitore Analogico/Digitale (Analog to Digital Converter): trasforma il segnale elettrico analogico in digitale



Convertitore Digitale/Analogico (Digital to Analog Converter): trasforma il segnale elettrico digitale in analogico



Gli altoparlanti delle cuffie trasformano il segnale elettrico analogico in segnale sonoro

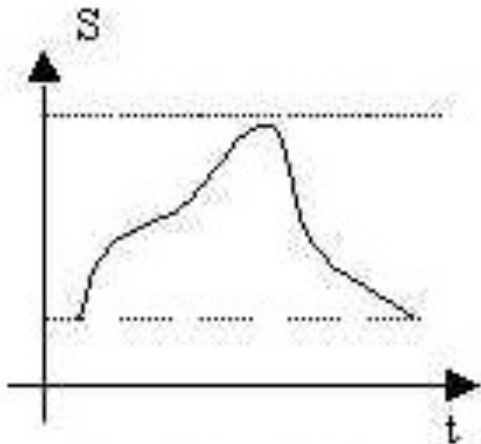
Un po' di ripasso sui segnali

In riferimento agli stati che il segnale può assumere in un determinato intervallo di tempo, distinguiamo due tipi di segnale:

segnale analogico: può assumere tutti i possibili valori in un intervallo

segnale digitale binario: può assumere solo due valori: '0' e '1'

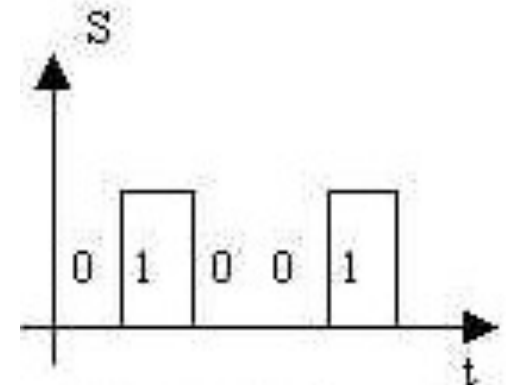
Segnale analogico



Conversione A/D

Conversione D/A

Segnale digitale binario



Perché complicarsi la vita?

Non sarebbe più conveniente usare dispositivi analogici?

Tre buoni motivi per passare dall'analogico al digitale...

- Elevata insensibilità ai disturbi e al rumore
- Possibilità di poter sfruttare la potenza di calcolo dei microprocessori per l'elaborazione e la gestione dei segnali (Digital Signal Processing - DSP)
- Estrema facilità e praticità di memorizzazione e trasporto dei dati digitali (supporti CD, DVD, chiavette USB, hard disk, ecc...)

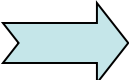
...e qualche (piccolo) svantaggio:

- Perdita di informazione dovuta al processo di conversione A/D
- Consumo di spazio, energia e € a causa all'hardware aggiuntivo

Il processo di conversione A/D

Il processo di conversione A/D comporta la trasformazione di un segnale continuo (analogico) in un insieme finito di valori (discretizzazione)

Poiché un segnale analogico è continuo sia nel TEMPO che in AMPIEZZA sono necessarie due fasi:

- CAMPIONAMENTO  discretizzazione nel TEMPO

- QUANTIZZAZIONE  discretizzazione in AMPIEZZA

Un esempio familiare: l'MP3



BITRATE

FREQUENZA DI
CAMPIONAMENTO

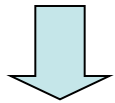
Il teorema di Shannon

Quanti campioni/s sono necessari per campionare adeguatamente un segnale?

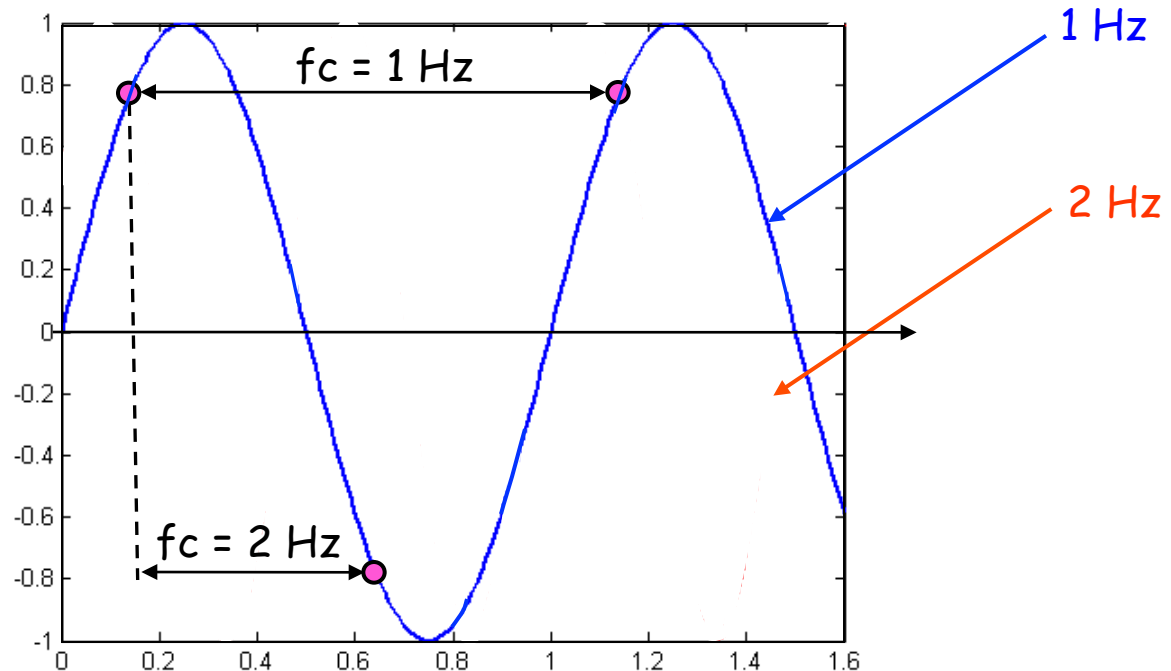
ovvero:

Qual è la frequenza di campionamento minima che mi permette di ricostruire il segnale in modo univoco dai suoi campioni?

Devo prendere
almeno 2 campioni
per ogni periodo



Per campionare un
segnale sinusoidale di
1 Hz devo prendere al
minimo $f_c = 2$ Hz



Dati analogici, segnali numerici

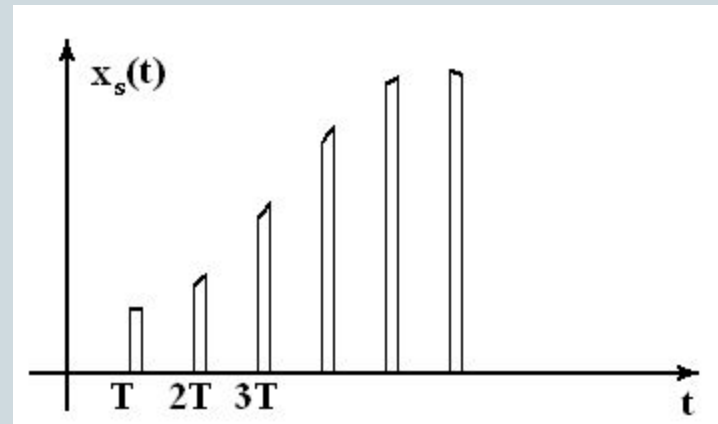
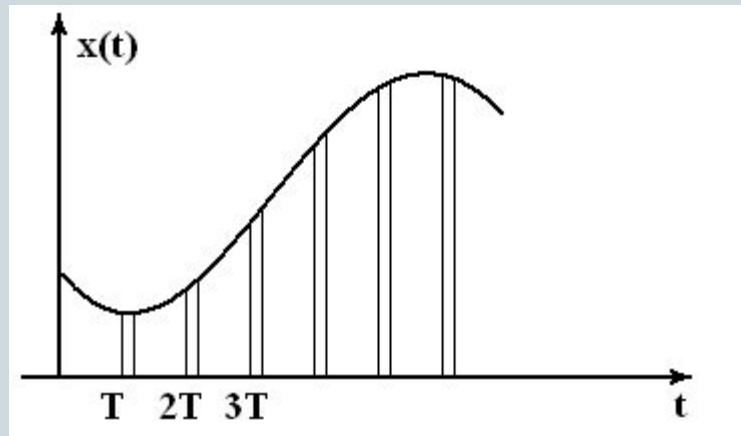
10

- Per poter trasmettere un **dato analogico** con una trasmissione **digitale** e' necessario trasformare il dato analogico in un segnale **numerico**
 - piu' precisamente si rappresenta il segnale analogico, corrispondente al dato analogico in banda base, con un dato numerico
- Il processo di trasformazione si realizza attraverso due fasi:
 - il **campionamento** del segnale analogico
 - la **digitalizzazione** del campione

Il campionamento

11

- Il campionamento consiste nel guardare con una certa **frequenza** il **valore istantaneo** del segnale analogico
 - di fatto si utilizza il segnale analogico per **modulare in ampiezza** una **sequenza di impulsi** a frequenza fissata: il segnale risultante sara' una sequenza di impulsi ad ampiezza uguale al **valore** del segnale analogico in corrispondenza degli impulsi
- Il problema da affrontare e' : con **quale frequenza** si deve campionare il segnale per poterlo **ricostruire** a partire dal segnale campionato?



Teorema del campionamento

12

- IL teorema del campionamento (o teorema di Nyquist-Shannon) afferma che:

dato un segnale $x(t)$ il cui spettro ha banda limitata B , si può ricostruire completamente il segnale a partire da un campionamento dello stesso se la frequenza di campionamento è

$$F \geq 2B$$

Dimostrazione

13

sia $x(t)$ il segnale di banda f_h

sia $p(t)$ il segnale di campionamento a frequenza f_s

il segnale campionato sara' :

$$x_s(t) = x(t) \cdot p(t)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{i 2 \pi n f_s t} \Rightarrow x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n x(t) e^{i 2 \pi n f_s t}$$

La trasformata del segnale campionato e' :

$$X_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) e^{-i 2 \pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n x(t) e^{i 2 \pi n f_s t} e^{-i 2 \pi f t} dt$$

quindi

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i 2 \pi (f - n f_s) t} dt$$

Dimostrazione (cont.)

14

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi(f - nf_s)t} dt$$

La trasformata del segnale e' :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

da cui :

$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n X(f - nf_s)$$

Questo significa che lo **spettro** del **segnale campionato** è costituito da **repliche** dello spettro del segnale originale **traslate** ai **multipli** della frequenza del segnale di impulsi utilizzato per campionarlo, e moltiplicate ciascuna per un fattore proporzionale (P_n)

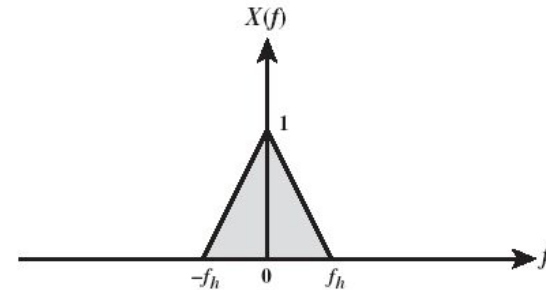
Dimostrazione (cont.)

15

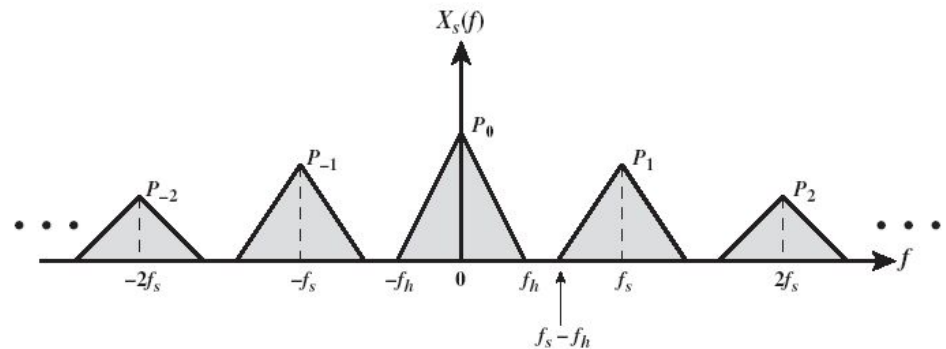
- Se gli spettri di due repliche adiacenti del segnale originario non si sovrappongono, possiamo utilizzare in ricezione un filtro passa basso per isolare una sola replica del segnale, ottenendo così un segnale il cui spettro è proporzionale (cioè ha forma identica) allo spettro del segnale originale
- La condizione di non sovrapposizione implica:

$$f_h \leq f_s - f_h \Rightarrow f_s \geq 2f_h$$

cioè quello che si voleva dimostrare



(a) Spectrum of $x(t)$



(b) Spectrum of $x_s(t)$

Osservazioni sul teorema del campionamento

16

- In pratica la frequenza di campionamento dovrà essere almeno **leggermente superiore** a $2B$, per disporre di un intervallo utile (**banda di guardia**) al fine di prevenire che effetti di **non idealità** dei filtri taglino parti utili del segnale
- Il teorema del campionamento è **sostanzialmente** collegato alla legge sulla **massima capacità** di un canale privo di rumore (legge di Nyquist):
 - il teorema del campionamento afferma che possiamo **ricostruire** il segnale campionando **almeno a $2B$** , e campionando **più frequentemente** non otteniamo **maggiori informazioni** sul segnale modulante
 - se il segnale rappresenta una **sequenza di simboli**, la **massima capacità** di trasferimento la otteniamo quando **ogni campione identifica un simbolo**
 - ne segue che **al massimo** siamo in grado di **identificare $2B$ simboli**

- Il risultato del campionamento è un segnale con valori discreti.
- Tale segnale sarà in seguito quantizzato e codificato per renderlo accessibile a qualsiasi elaboratore digitale.
- Il teorema del campionamento pone un vincolo per la progettazione di apparati di conversione analogico-digitale: se si ha a disposizione un campionatore che lavora a frequenza F_c , è necessario mandargli in ingresso un segnale a banda limitata da $F_c / 2$ (**Teorema di Shannon**).

In generale un segnale analogico non è limitato in frequenza, ma dovrà essere filtrato per eliminare le componenti di frequenza maggiore di $F_c / 2$, a tale scopo si usa un **filtro anti-aliasing (filtro passa-basso)**.

Teorema del campionamento

Un segnale $f(t)$ a banda limitata da f_M (frequenza massima) può essere univocamente ricostruito dai suoi campioni $f(n \Delta t)$ con $n \in \mathbb{N}$ presi ad una frequenza $F_c = 1 / \Delta t$ **solo se** $F_c \geq 2 f_M$

- Es. l'orecchio umano è in grado di percepire frequenze tra i 20Hz e i 22 KHz la frequenza di campionamento per l'audio (limite di Nyquist) si pone quindi attorno ai 44 KHz.

Effetto Aliasing

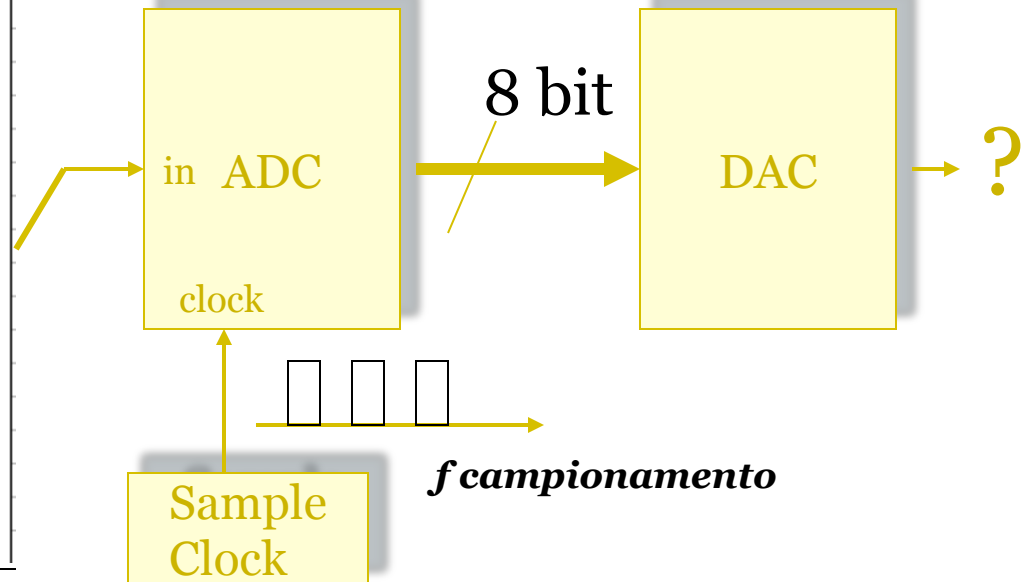
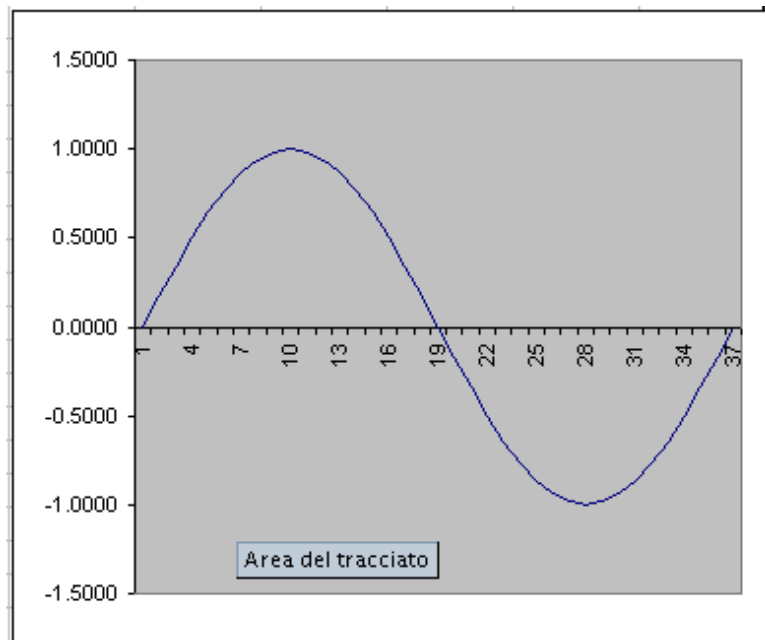
Consiste in una sovrapposizione del segnale campionato che rende impossibile l'esatta ricostruzione del segnale originale e tale ricostruzione risulterà distorta.

Per questo motivo ogni apparato di conversione analogico-digitale ha un filtro anti-alias (filtro passa basso) a monte del campionatore, che limita lo spettro del segnale di ingresso a $F_c \geq 2 f_M$

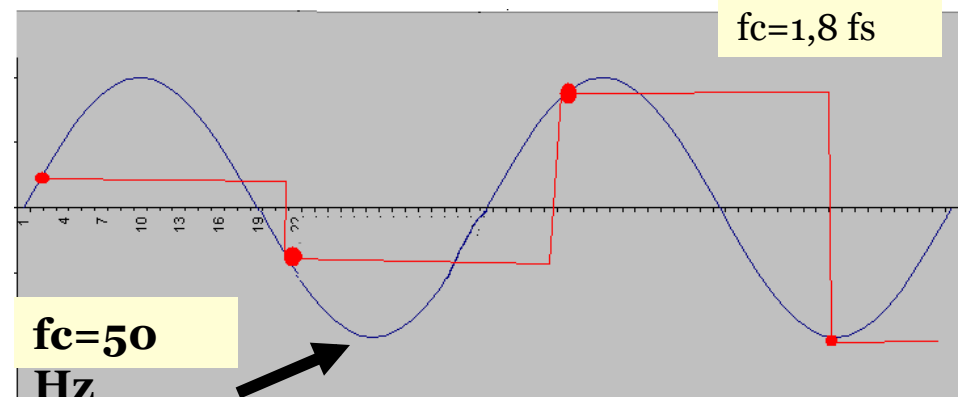
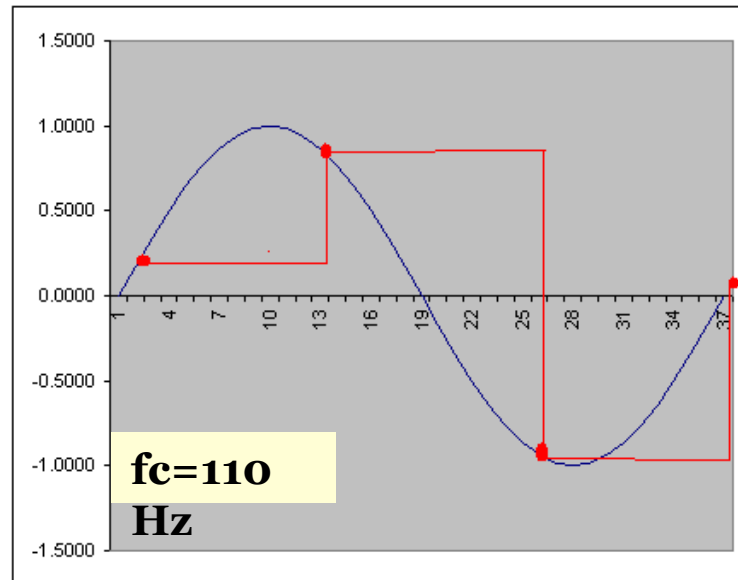
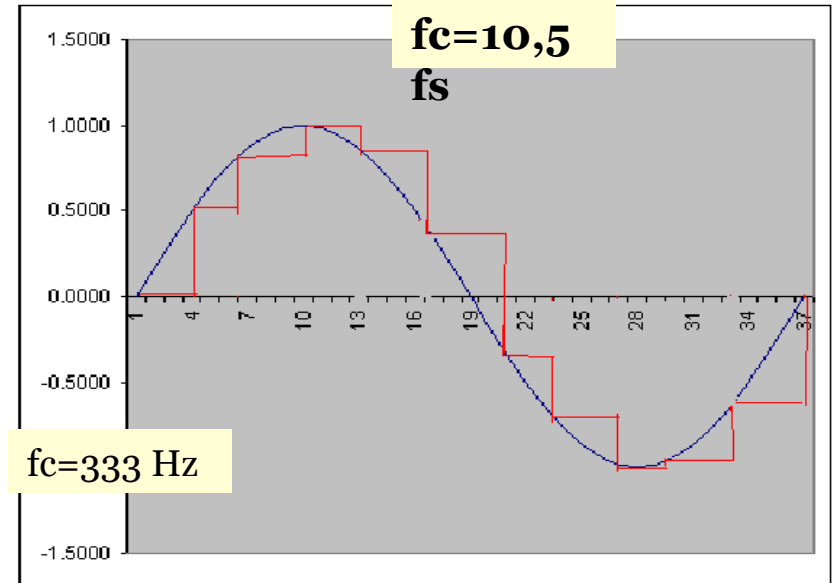
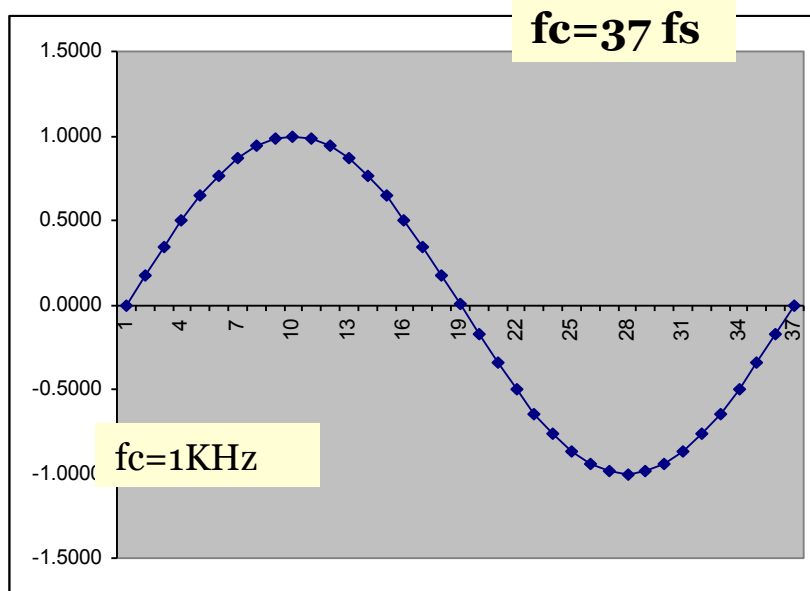
- Il teorema di Shannon-Nyquist e la frequenza di campionamento

Dato un segnale continuo e a banda limitata esso è descritto completamente dai suoi campioni, se essi sono presi ad una frequenza almeno doppia rispetto alla frequenza massima del segnale

Es: Periodo $T=37\text{ms}$ $f_{\text{segnale}}=1/(37\text{ ms})= 27\text{ Hz}$



Simulazione di un Segnale sinusoidale a frequenza 27 Hz campionato con differenti frequenze di Campionamento (Sample)



..Un errato campionamento ha generato una frequenza differente da quella del segnale (freq. di aliasing)

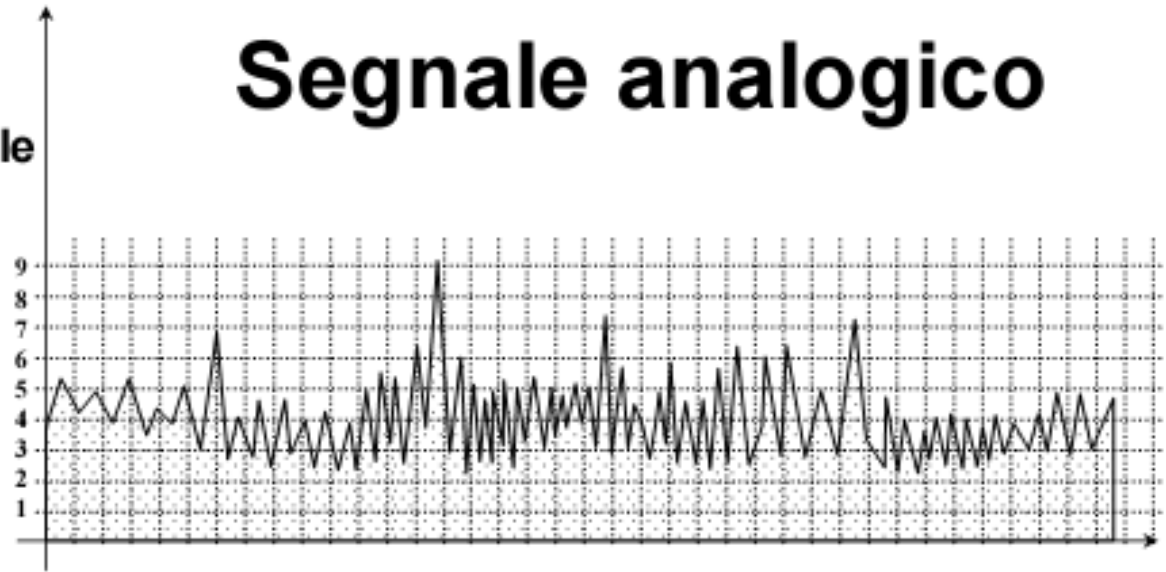


Disco di vinile



Telefono tradizionale

Segnale analogico

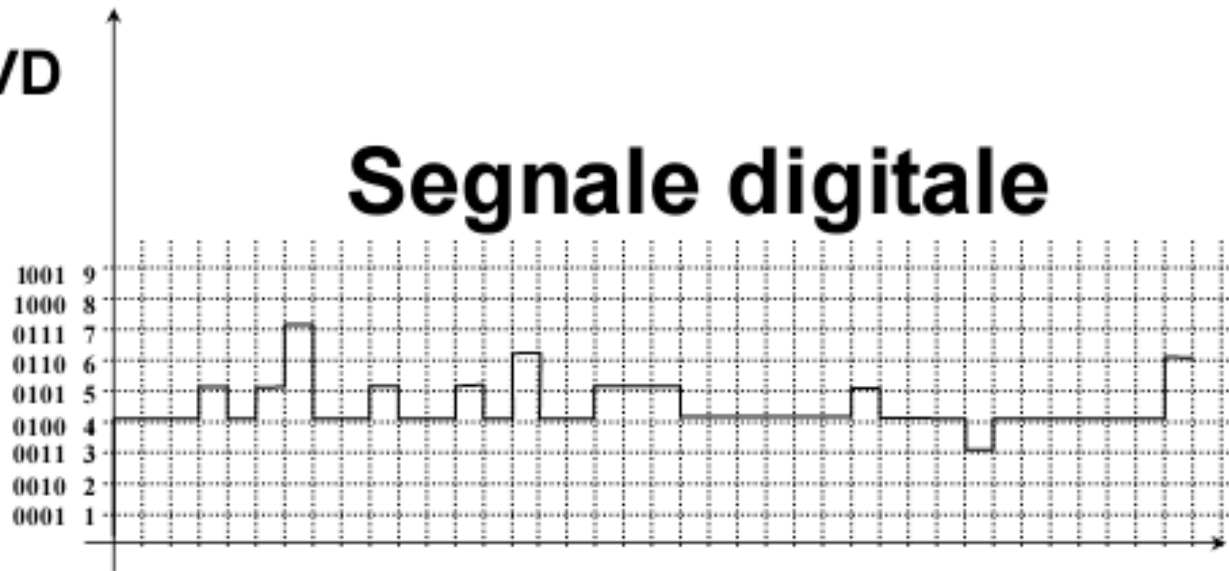


CD-ROM, DVD

GSM



Segnale digitale

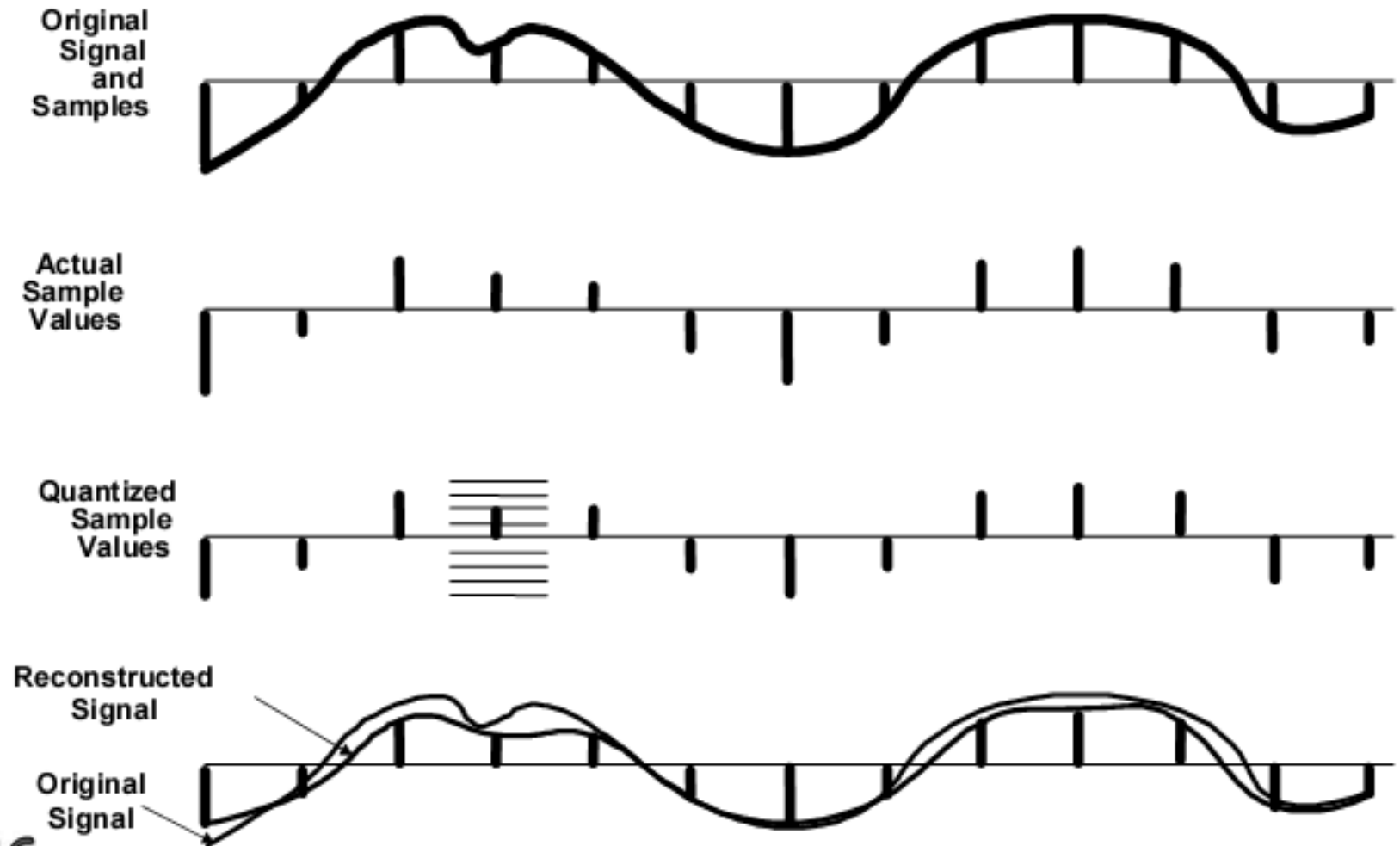


Il segnale vocale ancora oggi arriva alla centrale in forma analogica (occupando una banda maggiore di 4 KHz).
Qui un filtro lo limita a soli 4 KHz.

Per essere trasformato in un segnale digitale viene:

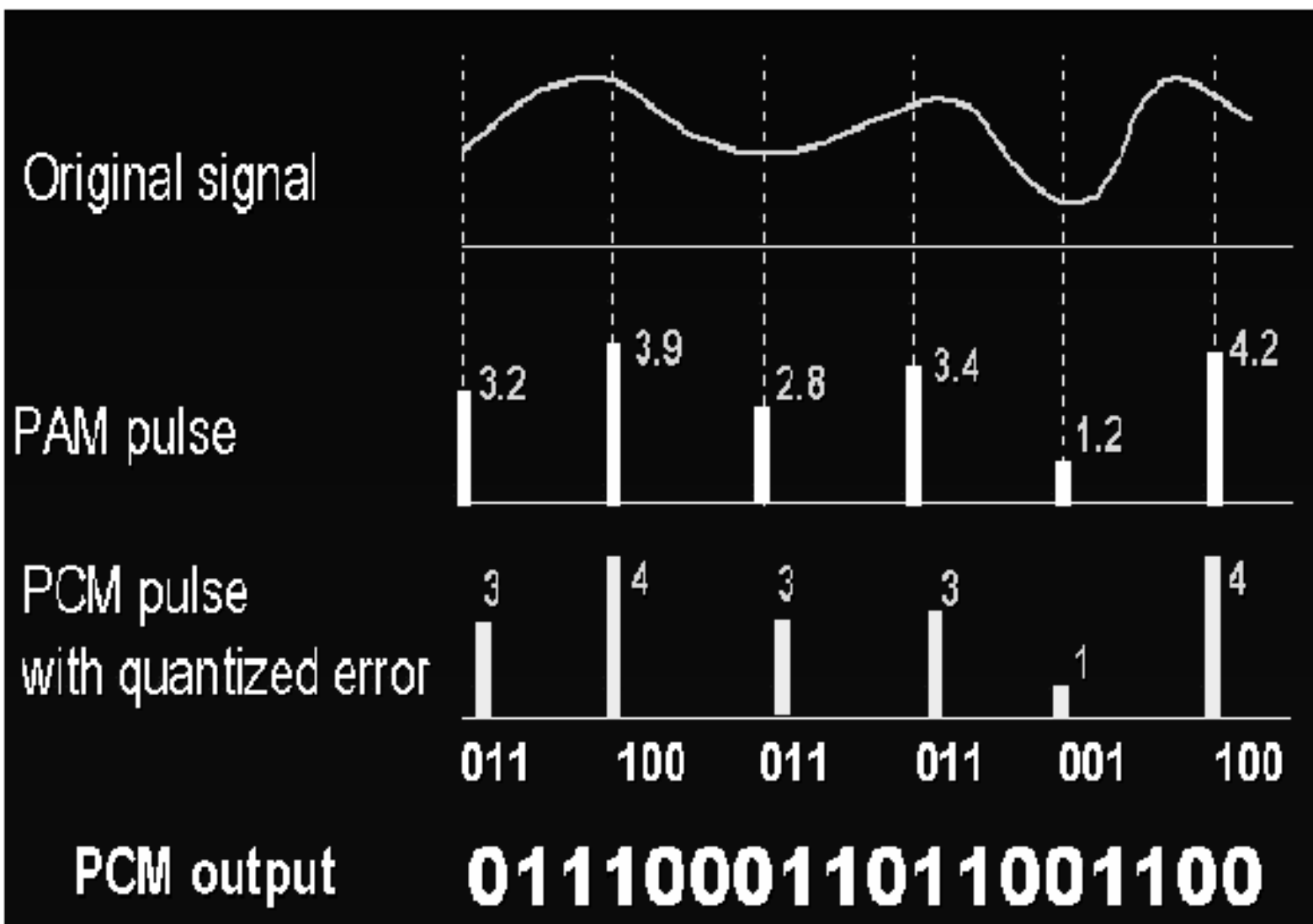
- **Campionato** (4 KHz di banda richiedono almeno 8000 campioni al secondo \Rightarrow **un campione ogni 125 μ sec**))
- **Quantizzato** (i livelli sono discretizzati su 256 valori scelti in modo non uniforme)
- **Codificato** (a ciascun campione viene associata un'ampiezza rappresentata da un ottetto=8bit)

Digitalizzazione di un segnale analogico



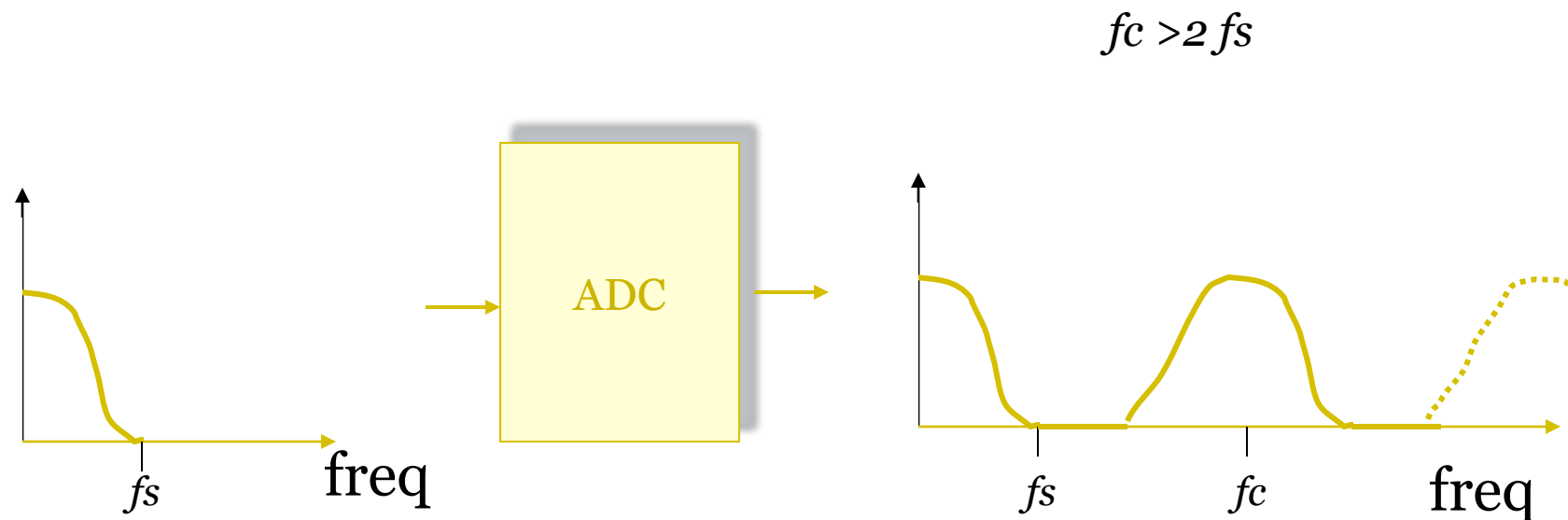


Pulse Code Modulation—Analog to Digital Conversion



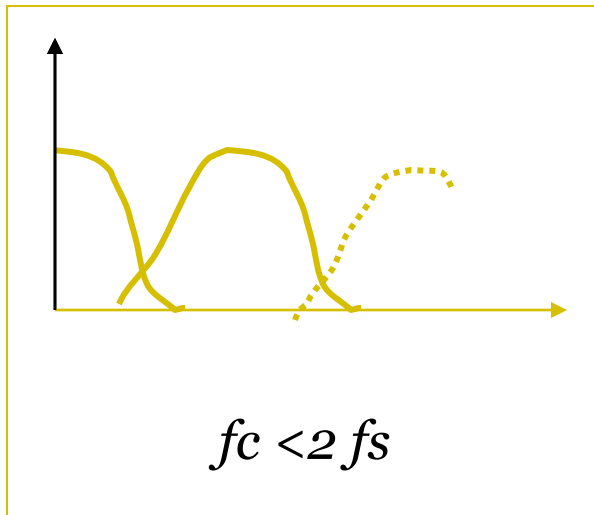
Spettro di un segnale

- Il campionamento introduce un **aliasing**: in pratica il campionamento provoca “duplicazioni” dello spettro del segnale. Se non si rispetta il teorema di Shannon l’aliasing introdotto dal campionamento impedisce la ricostruzione del segnale originale, in quanto due spettri adiacenti si sovrappongono!

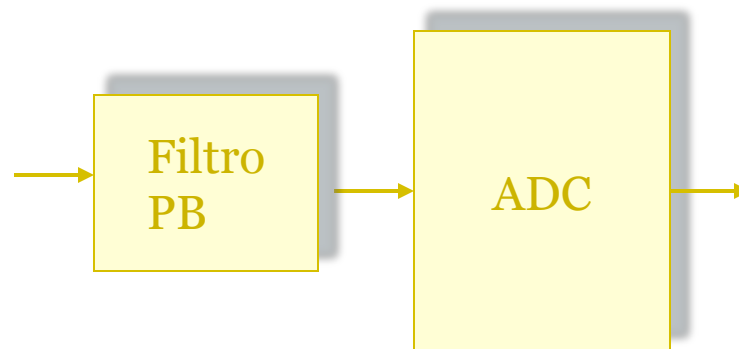


Spettro di un segnale

L'effetto di un errato campionamento, nell'ambito del dominio delle frequenze



Per un buon funzionamento del campionatore e per evitare aliasing, si introduce un filtro passa basso che limita lo spettro del segnale di ingresso a $f_c > 2 f_s$

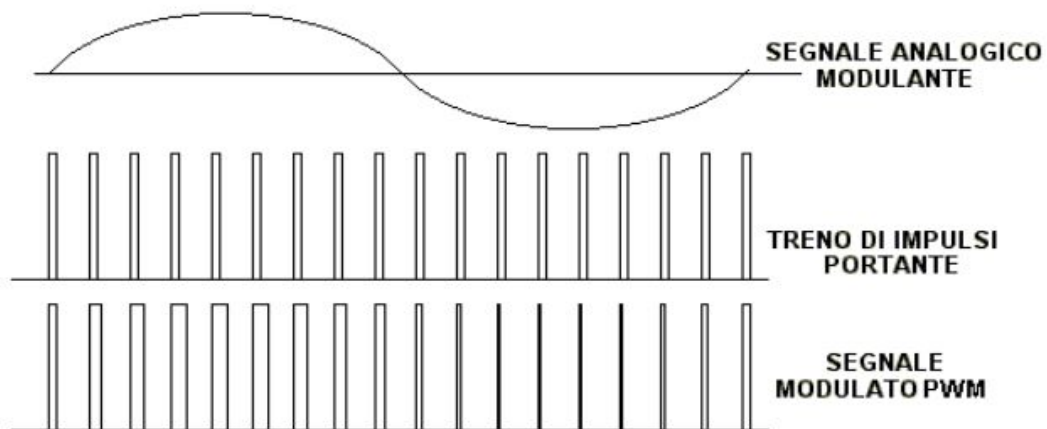
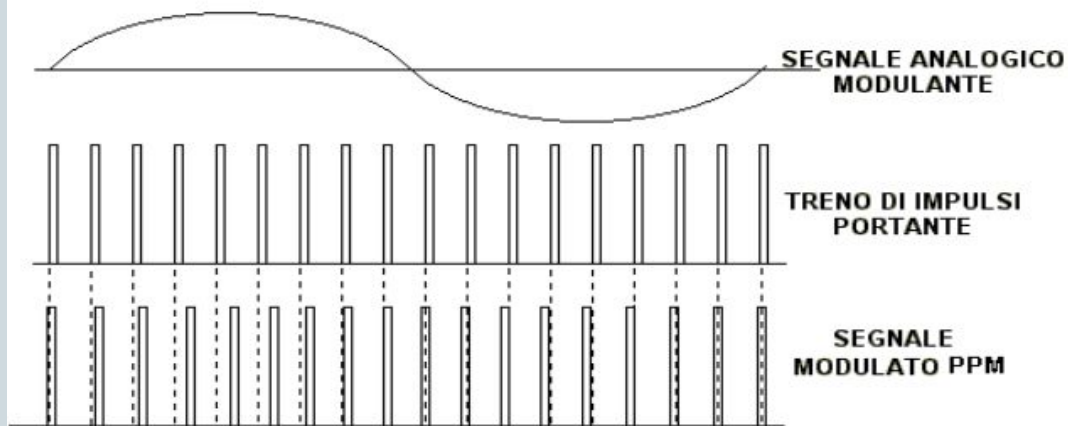


Tecniche di modulazione di treno di impulsi

27

- Esistono diverse tecniche di modulazione:
 - PAM (**Pulse Amplitude Modulation**): gli impulsi sono generati ad **ampiezza proporzionale** alla ampiezza del segnale modulante
 - PWM (**Pulse Width Modulation**): gli impulsi sono generati tutti alla **stessa ampiezza**, ma con **durata proporzionale** alla ampiezza del segnale modulante
 - PPM (**Pulse Position Modulation**): gli impulsi sono tutti della **stessa ampiezza** e di **uguale durata**, ma iniziano (all'interno del periodo T) in un istante **dipendente dalla ampiezza** del segnale modulante
 - ✦ in questo caso il ricevente deve essere **sincronizzato** con il trasmittente in quanto la valutazione dell'ampiezza del segnale modulante dipende dalla differenza temporale tra l'istante in cui si presenta l'impulso e l'istante in cui inizia il periodo relativo a quell'impulso, quindi in ricezione si **deve sapere quando** inizia il periodo relativo all'impulso.

PWM e PPM



Considerazioni sullo spettro

29

- La trasmissione di un **treno di impulsi** di durata τ richiede una larghezza di banda almeno pari a

$$B_{\tau} \geq \frac{1}{2\tau}$$

ed essendo

$$\tau \ll T \quad \text{e} \quad T \leq \frac{1}{2B} \quad \text{si ha}$$

$$B_{\tau} \geq \frac{1}{2\tau} \gg B$$

significa che la trasmissione di **impulsi modulati** richiede una **banda superiore** alla banda del segnale modulante

Trasmissione radio/TV

30

- L' esempio piu' comune di FDM e' la trasmissione **radiotelevisiva**. Questa utilizza diverse **bande di frequenza**, ciascuna delle quali viene **suddivisa in canali** di una certa capacita', idonea a trasmettere i segnali delle diverse stazioni trasmittenti
 - trasmissioni a **modulazione di ampiezza** (AM) nella banda MF (**Medium Frequency**): 300-3000 KHz , con **canali da 4 KHz** per radio commerciali
 - trasmissioni AM nella banda HF (**High Frequency**): 3-30 MHz, con **canali fino a 4 KHz** (radio onde corte)
 - trasmissioni AM o FM nella banda VHF (**Very High Frequency**): 30-300 MHz, con **canali fino a 5 MHz** (radio FM e TV VHF)
 - trasmissioni FM nella banda **UHF**: 300-3000 MHz con canali fino a **20 MHz** (TV UHF, ponti radio)
 - trasmissioni FM nella banda **SHF**: 3-30 GHz con canali fino a **500 MHz** (microonde terrestri e satellitari)
 - ...

ADSL

31

- ADSL (**Asymmetric Digital Subscriber Line**) e' lo standard per fornire all'abbonato un **accesso digitale** a banda piu' elevata di quanto non sia possibile con il modem
- La linea telefonica terminale e' costituita da un **doppino** su cui viene normalmente trasmessa la voce. Questa trasmissione si realizza applicando un **filtro passa basso a 4 KHz**
- Tuttavia il doppino ha una capacita' di banda che **raggiunge il MHz** (dipende dalla **lunghezza** del tratto terminale che puo' variare tra poche centinaia di metri a diversi Km)
- Lo spettro disponibile viene suddiviso in **256 canali da 4 KHz** (fino a 60 Kbps ciascuno):
 - Il canale 0 viene **riservato per la telefonia**
 - I successivi 4 canali **non vengono utilizzati** per evitare problemi di interferenza tra la trasmissione dati e quella telefonica
 - I restanti canali vengono destinati al **traffico dati**. Alcuni per il traffico uscente (**upstream**), altri per il traffico entrante (**downstream**)
- Il modem ADSL riceve i dati da trasmettere e li **separa in flussi paralleli** da trasmettere sui **diversi canali**, genera un segnale **analogico** in banda base per ciascun flusso (con una modulazione **QAM** fino a **15 bit/ baud** a **4000 baud/s**) e li trasmette sui diversi canali utilizzando la modulazione di frequenza