Vettori in $\mathbb{R}^n$

- Analogamente a quanto abbiamo visto in dimensione 2 (il piano $\mathbb{R}^2$) e in dimensione 3 (lo spazio $\mathbb{R}^3$) un vettore di $\mathbb{R}^n$ è una n-pla di numeri reali, che denotiamo normalmente come una colonna

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

  (anche se spesso, per risparmiare spazio, scriveremo $v = (x_1, \ldots, x_n)$, ma torneremo su questo punto nella sezione riguardante il cambiamento di base).

- I vettori n dimensionali si sommano e si moltiplicano per scalari in $\mathbb{R}$ in maniera analoga a quanto abbiamo visto nel piano e nello spazio.

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n);$$

$$t(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (ta_1, ta_2, \ldots, ta_n).$$

L'operazione di somma e il prodotto per scalari godono delle proprietà (già viste in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$), ovvero, se u, v sono vettori di $\mathbb{R}^n$, a, b sono scalari ($a, b \in \mathbb{R}$), $\vec{0}$ è il vettore nullo $(0, \ldots, 0)$, allora:

$$\begin{array}{cc} u + v = v + u & (a+b)v = av + bv \\ u + (v + w) = (u + v) + w & a(u+v) = au + av \\ \vec{0} + v = v & a(bv) = (ab)v \\ v + (-v) = \vec{0} & 1v = v \end{array}$$

Combinazioni Lineari

Dati i vettori $v_1, \ldots, v_k$ di $\mathbb{R}^n$, l'insieme delle loro combinazioni lineari si indica con $L(v_1, \ldots, v_k)$:

$$L(v_1, \ldots, v_k) = \{t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k : t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

- se $v \neq \vec{0}$ allora $L(v)$ è una retta che passa per l'origine, sia in $\mathbb{R}^2$ che in $\mathbb{R}^3$;
- se v_1, v_2 non hanno la stessa direzione allora $L(v_1, v_2)$ è un piano che passa per l'origine;
  nel piano, se v_1, v_2 non hanno la stessa direzione allora $L(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$;
- se $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ non appartengono allo stesso piano, allora $L(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

Combinazioni lineari e Base Canonica

Siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \dots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$L(e_1) =$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \ldots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$L(e_1) = \{(t, 0, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \ldots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$L(e_1) = \{(t, 0, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_2) =$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \ldots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$L(e_1) = \{(t, 0, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_2) = \{(0, t, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \dots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$L(e_1) = \{(t, 0, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_2) = \{(0, t, \dots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_1, e_2) =$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \ldots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$L(e_1) = \{(t, 0, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_2) = \{(0, t, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_1, e_2) = \{(t, s, \ldots, 0) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \ldots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$L(e_1) = \{(t, 0, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_2) = \{(0, t, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_1, e_2) = \{(t, s, \ldots, 0) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_1, \ldots, e_n) =$$

Combinazioni lineari e Base Canonica

Siano

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

I vettori $e_1, \ldots, e_n$ si chiamano i vettori della *base canonica* .
Si ha :

$$L(e_1) = \{(t, 0, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_2) = \{(0, t, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_1, e_2) = \{(t, s, \ldots, 0) : t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$L(e_1, \ldots, e_n) = \mathbb{R}^n$$

Esercizio 1

1. Descrivere i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$
$$L(e_1 + e_2), \qquad L(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$$
confrontandoli con
$$L(e_1, e_2), \qquad L(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$
2. Trovare $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che
$$L(v_1, v_2) = L(e_1, e_2, e_1 + e_2)$$
3. Se $v \in L(e_1, e_2) \subseteq \mathbb{R}^n$ a cosa è uguale l'insieme $L(e_1, e_2, v)$?
4. In $\mathbb{R}^n$, se $L(e_1, e_2, v) = L(e_1, e_2)$, cosa possiamo dire di v?
5. se $v_1 = w_1 + w_2$, cosa possiamo dire di $L(v_1)$ e $L(w_1, w_2)$?
6. se $L(v_1) \subseteq L(w_1, w_2)$ cosa possiamo concludere su v_1 e $L(w_1, w_2)$?
7. Se $v_1, v_2 \in L(w_1, w_2)$ cosa possiamo concludere su tv_1? E su $v_1 + v_2$?

Proprietà delle Combinazioni Lineari

Lemma (1)

1. *I vettori* $v_1, \ldots, v_k$ *appartengono all'insieme* $L(v_1, \ldots, v_k)$*, per ogni* $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$*.*
2. *per ogni* $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_h \in \mathbb{R}^n$*:*

$$L(v_1, \ldots, v_k) \subseteq L(w_1, \ldots, w_h) \quad \Leftrightarrow \quad v_1, \ldots, v_k \in L(w_1, \ldots, w_h),$$

   .

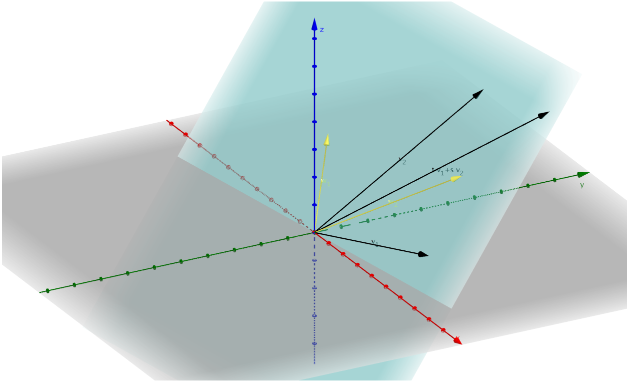
3. *L'insieme* $L(v_1, \ldots, v_k)$ *è chiuso per combinazioni lineari, per ogni* $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$*:*

   se $w_1, \ldots, w_h \in L(v_1, \ldots, v_k)$ *e* $s_1, \ldots, s_h \in \mathbb{R}$ *allora*

$$s_1 w_1 + \ldots + s_h w_h \in L(v_1, \ldots, v_k).$$

Dimostrazione lasciata per esercizio.

Proprietà delle Combinazioni Lineari



anim. CombinazioniLineari

Sottospazi di $\mathbb{R}^n$

I sottoinsiemi $L(v_1, \ldots, v_k)$ si chiamano sottospazi di $\mathbb{R}^n$:

Definizione

Un sottoinsieme non vuoto W di $\mathbb{R}^n$ che è chiuso per combinazioni lineari si dice un sottospazio (vettoriale) di $\mathbb{R}^n$. In altre parole, W è un sottospazio se è non vuoto e
- $v_1, \ldots, v_k \in W \quad t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R} \Rightarrow t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k \in W$.

In particolare

1. un sottospazio è chiuso per somma di vettori e per moltiplicazione di un vettore per uno scalare;
2. se $v \in W$ allora anche $-v = (-1)v \in W$;
3. W è non vuoto e quindi esiste $v \in W$; ne segue $-v \in W$ e $v + (-v) = \vec{0} \in W$. Quindi ogni sottospazio contiene il vettore nullo.

Se W è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ scriveremo $W \leq \mathbb{R}^n$

Esempi di sottospazi

- In $\mathbb{R}^n$ i sottospazi sono tutti della forma $W = L(v_1, \ldots, v_k)$ per $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.

Esempi di sottospazi

- In $\mathbb{R}^n$ i sottospazi sono tutti della forma $W = L(v_1, \dots, v_k)$ per $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$.
- Se $W = L(v_1, \dots, v_k)$ si dice che i vettori $v_1, \dots, v_k$ *generano* W.

Esempi di sottospazi

- In $\mathbb{R}^n$ i sottospazi sono tutti della forma $W = L(v_1, \ldots, v_k)$ per $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$.
- Se $W = L(v_1, \ldots, v_k)$ si dice che i vettori $v_1, \ldots, v_k$ *generano* W.
- In $\mathbb{R}^n$ ci sono sempre due sottospazi banali:
  il sottospazio che contiene solo il vettore nullo
  $$W = \{\vec{0}\} = L(\vec{0})$$
  e quello che contiene tutti i vettori
  $$W = \mathbb{R}^n = L(e_1, \ldots, e_n),$$
  dove $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 1)$.
- Come vedremo, l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo (cioè: la colonna dei termini noti è il vettore nullo) con m incognite è un sottospazio di $\mathbb{R}^m$.

Esempi di sottospazi nel piano $\mathbb{R}^2$ e nello spazio $\mathbb{R}^3$

- Come abbiamo visto, le rette per l'origine degli assi in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ sono del tipo $L(v) = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$ per un vettore non nullo v. Quindi le rette per l'origine sono sottospazi, sia in $\mathbb{R}^2$ che in $\mathbb{R}^3$.
- Poiché, come abbiamo visto, ogni sottospazio deve contenere il vettore nullo, una retta del piano o dello spazio che non contiene l'origine degli assi non può essere un sottospazio.
- In $\mathbb{R}^3$ i sottospazi del tipo $L(v_1, v_2)$ dove v_1, v_2 non appartengono alla stessa retta sono piani per l'origine;

Esempi di sottospazi nel piano $\mathbb{R}^2$ e nello spazio $\mathbb{R}^3$

- Come abbiamo visto, le rette per l'origine degli assi in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ sono del tipo $L(v) = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$ per un vettore non nullo v. Quindi le rette per l'origine sono sottospazi, sia in $\mathbb{R}^2$ che in $\mathbb{R}^3$.
- Poiché, come abbiamo visto, ogni sottospazio deve contenere il vettore nullo, una retta del piano o dello spazio che non contiene l'origine degli assi non può essere un sottospazio.
- In $\mathbb{R}^3$ i sottospazi del tipo $L(v_1, v_2)$ dove v_1, v_2 non appartengono alla stessa retta sono piani per l'origine;
- Viceversa, se p è un piano di $\mathbb{R}^3$ che passa per l'origine, ogni coppia di vettori v_1, v_2 che giacciono sul piano e non hanno la stessa direzione generano p:

$$p = L(v_1, v_2)$$

Esercizio

Considerare il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni W del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. determinare inoltre se W è una retta passante per l'origine, un piano passante per l'origine, o tutto $\mathbb{R}^3$.

Esercizio

Considerare il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni W del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. determinare inoltre se W è una retta passante per l'origine, un piano passante per l'origine, o tutto $\mathbb{R}^3$.

Risolvendo il sistema con il metodo di Gauss troviamo $W = \{(h, k, 0) : h, k \in \mathbb{R}\}$, ovvero, W è un piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = h \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \quad h, k \in \mathbb{R}$$

Possiamo verificare che $W \leq \mathbb{R}^3$ se troviamo dei vettori $v_1, \ldots, v_k$ di W tale che $L(v_1, \ldots, v_k) = W$.
In questo caso è facile convincersi che i vettori cercati sono, ad esempio, $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$, perché

$$L(v_1, v_2) = \{hv_1 + kv_2 : h, k \in \mathbb{R}\} = \{h(1, 0, 0) + k(0, 1, 0) : h, k \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(h, 0, 0) + (0, k, 0) : h, k \in \mathbb{R}\} = \{(h, k, 0) : h, k \in \mathbb{R}\} = W.$$

Esercizio

Considerare il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$. Determinare inoltre se W è una retta passante per l'origine, un piano passante per l'origine, o tutto $\mathbb{R}^3$.

Esercizio

Considerare il sistema omogeneo:

$$\left\{ x + y - z = 0 \right.$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$. Determinare inoltre se W è una retta passante per l'origine, un piano passante per l'origine, o tutto $\mathbb{R}^3$.
Risolvendo il sistema con il metodo di Gauss otteniamo che W è un piano per l'origine di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = h \\ y = k \\ z = h + k \end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Troviamo $v_1, \dots, v_k$ di W tale che $L(v_1, \dots, v_k) = W$.
In questo caso è facile convincersi che i vettori cercati sono, ad esempio, $v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$, perché

$$L(v_1, v_2) = \{hv_1 + kv_2 : h, k \in \mathbb{R}\} = \{h(1, 0, 1) + k(0, 1, 1) : h, k \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(h, 0, h) + (0, k, k) : h, k \in \mathbb{R}\} = \{(h, k, h + k) : h, k \in \mathbb{R}\} = W.$$

Esercizio

Considerare il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$. Determinare inoltre se W è una retta passante per l'origine, un piano passante per l'origine, o tutto $\mathbb{R}^3$.

Esercizio

Considerare il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni è un sottospazio W di $\mathbb{R}^3$. Determinare inoltre se W è una retta passante per l'origine, un piano passante per l'origine, o tutto $\mathbb{R}^3$.
Risolvendo il sistema con il metodo di Gauss otteniamo che W è una retta per l'origine di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -z \\ y = 2t \qquad t, s \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Avremo quindi $W = L(v)$ per $v = (-1, 2, 1)$.

Dipendenza e Indipendenza Lineare

Come abbiamo visto, a volte servono meno di k vettori per generare $L(v_1, \dots, v_k)$:

$$L(e_1, 2e_1) = L(e_1), \quad L(e_1, e_2, e_1 + e_2) = L(e_1, e_2).$$

Inoltre, se

$$L(v_1, \dots, v_k, v) = L(v_1, \dots, v_k) \Leftrightarrow v \in L(v_1, \dots, v_k)$$

DEFINIZIONE

- Se $v \in L(v_1, \dots, v_k)$ diremo che v dipende linearmente da $v_1, \dots, v_k$.
- I vettori $w_1, \dots, w_h$ si dicono linearmente dipendenti (o dipendenti) se uno di loro dipende linearmente dagli altri (nel caso di un singolo vettore w diremo che è dipendente se $w = \vec{0}$).
- I vettori $w_1, \dots, w_h$ si dicono linearmente indipendenti (o indipendenti) se non sono dipendenti, ovvero se nessuno di loro dipende linearmente dagli altri.

Nota bene: $\vec{0} \in L(v_1, \dots, v_k)$ per ogni $v_1, \dots, v_k$. Quindi i vettori $\vec{0}, v_1, \dots, v_k$ sono sempre dipendenti.

Esempio

- Se $v = (1, 0, 1)$ e $w = (2, 0, 2)$, i vettori v, w sono dipendenti perché $v = 2w \in L(v)$

Esempio

- Se $v = (1, 0, 1)$ e $w = (2, 0, 2)$, i vettori v, w sono dipendenti perché $v = 2w \in L(v)$
- Più in generale, due vettori v, w sono dipendenti se $v \in L(w)$ (o, equivalentemente, $w \in L(v)$).
- $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0)$, i vettori v_1, v_2, v_3 sono dipendenti perché $v_3 = v_1 + v_2$, ovvero $v_3 \in L(v_1, v_2)$.
- Piú in generale, tre vettori v_1, v_2, v_3 sono dipendenti se uno di loro appartiene al piano generato dagli altri due (ad esempio, $v_1 \in L(v_2, v_3)$).

Prime proprietà dei vettori dipendenti in $\mathbb{R}^n$

1. $v_1, \ldots, v_k$ sono dipendenti se e solo se esistono $t_1, \ldots, t_k$, non tutti nulli, con $t_1 v_1 + \ldots t_k v_k = \vec{0}$.
2. $v_1, \ldots, v_k$ sono dipendenti se e solo se $L(v_1, \ldots, v_k)$ può essere generato da meno di k vettori;
3. I vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono dipendenti se e solo se la trasformata a scala della matrice che ha per righe i vettori $v_1, \ldots, v_k$ ha delle righe nulle (dove la trasformata a scala usa solo le operazioni di scambio di righe, moltiplicazione per un coefficiente non nullo di una riga e sostituzione di una riga con la riga stessa sommata ad un multiplo di un'altra riga).

Dimostrazione del punto 3. Se $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ e $c \neq 0$ allora

$$\begin{aligned} L(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots v_k) &= L(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots v_k) \\ L(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) &= L(v_1, \ldots, cv_i, \ldots, v_k) \\ L(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots v_k) &= L(v_1, \ldots, v_i + cv_j, \ldots, v_j, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

Quindi, le trasformazioni per portare la matrice a scala non cambiano lo spazio generato dalle righe delle matrici via via generate e lo spazio generato dalle righe della matrice a scala finale è uguale allo spazio generato da $v_1, \ldots, v_k$. Se la matrice ha righe nulle, lo spazio generato dalle righe della matrice a scala può essere generato dalle righe non nulle, che sono meno di k. Per il primo punto segue che $v_1, \ldots, v_k$ sono dipendenti. Se invece la matrice non ha righe nulle, si dimostra che ogni combinazione lineare dei vettori che daà il vettore nullo deve avere tutti i coefficienti nulli. Quindi i vettori sono indipendenti.

Nota bene: se $k > n$ allora k vettori di $\mathbb{R}^n$ sono sempre dipendenti: infatti in questo caso la matrice che ha per righe i vettori ha più righe (k) che colonne (n) e mettendo la matrice a scala otterremo sicuramente righe nulle.

Esempio 1

Utilizzando l'ultima proprietà enunciata nella slide precedente, mostriamo che i vettori $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (0, 2, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1)$ di $\mathbb{R}^n$ non sono dipendenti (sono indipendenti).
Trasformando a scala la matrice che ha come righe i vettori otteniamo una matrice a scala senza righe nulle, quindi i vettori sono indipendenti:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (R_3 \leftarrow R_3 - (1/2)R_2) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esempio 2

Utilizzando l'ultima proprietà enunciata nella slide precedente, mostriamo che i vettori
$v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0)$, $v_3 = (3, 2, 2)$ sono dipendenti.
Trasformando a scala la matrice che ha come righe i vettori otteniamo una matrice a scala con righe nulle, quindi i vettori sono dipendenti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (R_2 \leftarrow R_2 - R_1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (R_3 \leftarrow -R_2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poicé i vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 2, 0)$, $v_3 = (3, 2, 2)$ sono dipendenti, possiamo cercare una loro combinazione lineare che dia il vettore non nullo (con coefficienti non tutti nulli). Ovvero, cerchiamo dei coefficienti x_1, x_2, x_3 tali che
$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = \vec{0}$, ovvero

$$(x_1, 0, x_1) + (x_2, 2x_2, 0) + (3x_3, 2x_3, 2x_3) = (x_1 + x_2 + 3x_3, 2x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_3) = (0, 0, 0)$$

In altre parole, per trovare tutti i coefficienti che danno una combinazione lineare nulla, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Notare che la matrice dei coefficienti di questo sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, ha come colonne i vettori v_1, v_2, v_3. Risolvendo il sistema con il metodo di Gauss otteniamo le soluzioni:

$$SOL = \{(-2h, -h, h) : h \in \mathbb{R}\}$$

Una qualsiasi soluzione fornisce i coefficienti di una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 uguale al vettore nullo. Ad esempio, ponendo $h = 1$ otteniamo i coefficienti $-2, -1, 1$ ed infatti si può facilmente verificare che $-2v_1 - v_2 + v_3 = \vec{0}$.

ESERCIZIO

Determinare se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^n$ sono dipendenti :

1. $v_1 = e_1, \ldots, v_n = e_n$;
2. $v_1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, $v_2 = e_2 + e_3 + \ldots + e_n$, $\ldots$, $v_n = e_n$;
3. per $n = 4$, $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 1, 2)$, $v_3 = (2, 3, 2, 3)$;
4. per $n = 3$, $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 1)$, $v_3 = (2, 0, 2)$.

Dipendenza e Indipendenza Lineare

La dipendenza lineare ha molte caratterizzazioni:

- I vettori $v_1, \dots v_k$ sono dipendenti se e solo se esiste i tale che $v_i \in L(v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots v_k)$;
- I vettori $v_1, \dots v_k$ sono dipendenti se e solo se esiste i tale che

$$L(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) = L(v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots v_k)$$

- I vettori $v_1, \dots v_k$ sono dipendenti se e solo se esiste un vettore $v \in L(v_1, \dots v_k)$ che si scrive in due modi diversi come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$.
- I vettori $v_1, \dots v_k$ sono dipendenti se $\vec{0}$ che si scrive in due modi diversi come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$.

Per l'indipendenza lineare quindi avremo:

- I vettori $v_1, \dots v_k$ sono indipendenti se e solo se per ogni i $v_i \notin L(v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots v_k)$;
- I vettori $v_1, \dots v_k$ sono indipendenti se e solo se per ogni i vale

$$L(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) \neq L(v_1, \dots, \cancel{v_i}, \dots v_k)$$

- I vettori $v_1, \dots v_k$ sono indipendenti se e solo sse ogni vettore $v \in L(v_1, \dots v_k)$ si scrive in un unico modo come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$.
- I vettori $v_1, \dots v_k$ sono indipendenti se $\vec{0}$ che si scrive in un unico modo combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$.

Altre proprietà di insiemi dipendenti e indipendenti

- l'insieme di vettori $\{v\}$ è dipendente se e solo se $v = \vec{0}$.

Altre proprietà di insiemi dipendenti e indipendenti

- l'insieme di vettori $\{v\}$ è dipendente se e solo se $v = \vec{0}$.
- Se i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono indipendenti, allora ogni loro SOTTOINSIEME non vuoto è ancora indipendente, ovvero

L'INDIPENDENZA SI TRASMETTE AI SOTTOINSIEMI

Ad esempio, se v_1, v_2, v_3, v_4 sono indipendenti, allora v_2, v_4 sono indipendenti: se $\lambda_2 v_2 + \lambda_4 v_4 = \vec{0}$ allora anche $0v_1 + \lambda_2 v_2 + 0v_3 + \lambda_4 v_4 = \vec{0}$ e dall'indipendenza di v_1, v_2, v_3, v_4 segue $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$.

Altre proprietà di insiemi dipendenti e indipendenti

- Se i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono dipendenti, allora ogni loro SOPRAINSIEME è ancora dipendente, ovvero

  LA DIPENDENZA SI TRASMETTE AI SOPRAINSIEMI.

- La dipendenza, in generale, non si trasmette ai sottoinsiemi: se $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, allora $\{v_1, v_2\}$ sono dipendenti, ma, ad esempio, $\{v_1\}$ non è un insieme di vettori dipendenti.

- L'indipendenza, in generale, non si trasmette ai sovrainsiemi:

  se $v_1 v_2$ sono i vettori del punto precedente, allora $\{v_1\}$ è un insieme di vettori indipendenti, mentre l'insieme $\{v_1, v_2\}$ è un insieme di vettori dipendenti.

Basi di un Sottospazio

Se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti, ogni vettore non nullo di $L(v_1, \ldots, v_k)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$. Questo permette assegnare delle coordinate ai vettori di $L(v_1, \ldots, v_k)$.

Basi di un Sottospazio

Se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti, ogni vettore non nullo di $L(v_1, \ldots, v_k)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$. Questo permette assegnare delle coordinate ai vettori di $L(v_1, \ldots, v_k)$.

DEFINIZIONE: BASE DI UN SOTTOSPAZIO

Dato un sottospazio $W \leq \mathbb{R}^n$, un insieme ordinato $(v_1, \ldots, v_k)$ di vettori di W si dice una base di W se:

1. $W = L(v_1, \ldots, v_k)$, ovvero, $v_1, \ldots, v_k$ generano W;
2. $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Basi di un Sottospazio

Se $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti, ogni vettore non nullo di $L(v_1, \dots, v_k)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$. Questo permette assegnare delle coordinate ai vettori di $L(v_1, \dots, v_k)$.

DEFINIZIONE: BASE DI UN SOTTOSPAZIO

Dato un sottospazio $W \leq \mathbb{R}^n$, un insieme ordinato $(v_1, \dots, v_k)$ di vettori di W si dice una base di W se:

1. $W = L(v_1, \dots, v_k)$, ovvero, $v_1, \dots, v_k$ generano W;
2. $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Se $B = (v_1, \dots, v_k)$ è una base di W e se $v \in W$, $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in W$, definiamo il vettore delle coordinate di v rispetto alla base W come:

$$||v||^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

Basi di un Sottospazio

Se $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti, ogni vettore non nullo di $L(v_1, \ldots, v_k)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$. Questo permette assegnare delle coordinate ai vettori di $L(v_1, \ldots, v_k)$.

DEFINIZIONE: BASE DI UN SOTTOSPAZIO

Dato un sottospazio $W \leq \mathbb{R}^n$, un insieme ordinato $(v_1, \ldots, v_k)$ di vettori di W si dice una base di W se:

1. $W = L(v_1, \ldots, v_k)$, ovvero, $v_1, \ldots, v_k$ generano W;
2. $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

Se $B = (v_1, \ldots, v_k)$ è una base di W e se $v \in W$, $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \in W$, definiamo il vettore delle coordinate di v rispetto alla base W come:

$$||v||^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix}$$

In particolare, una base di $\mathbb{R}^n$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti che genera $\mathbb{R}^n$.

ESERCIZIO

Sia $W = \{(x, x + y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Dimostrare che W è un sottospazio e trovarne una base.

Basi di un Sottospazio

Teorema

Ogni sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ ha una base.
Se $B = (w_1, \ldots, w_k)$ è una base del sottospazio W formata da k vettori allora $k+1$ vettori di W sono sempre dipendenti.

(dimostrazione omessa)

Basi di un Sottospazio

Teorema

Ogni sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ ha una base.
Se $B = (w_1, \ldots, w_k)$ è una base del sottospazio W formata da k vettori allora $k+1$ vettori di W sono sempre dipendenti.

(dimostrazione omessa)

Teorema

Se $B = (w_1, \ldots, w_k)$ e $B' = (u_1, \ldots, u_h)$ sono due basi di W allora $h = k$. Ovvero, tutte le basi di W hanno lo stesso numero di vettori.

Dim. Se per assurdo fosse $k < h$, dal Teorema seguirebbe che i $k+1$ vettori $u_1, \ldots, u_{k+1}$ sono dipendenti, e cosí anche $u_1, \ldots, u_{k+1}, \ldots, u_h$. Ma questo non è possibile perché per ipotesi $B' = (u_1, \ldots, u_h)$ è una base di W.

Dimensione

DEFINIZIONE

Il numero di vettori in una base del sottospazio W (e quindi di tutte) si chiama dimensione del sottospazio W e si indica con

$$dim(W)$$

(poniamo uguale a zero la dimensione del sottospazio nullo, ovvero $dim(\{\vec{0}\}) = 0$);

Dimensione

DEFINIZIONE

Il numero di vettori in una base del sottospazio W (e quindi di tutte) si chiama dimensione del sottospazio W e si indica con

$$dim(W)$$

(poniamo uguale a zero la dimensione del sottospazio nullo, ovvero $dim(\{\vec{0}\}) = 0$);

- Ad esempio, $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $dim(\mathbb{R}) = 1$.

Dimensione

DEFINIZIONE

Il numero di vettori in una base del sottospazio W (e quindi di tutte) si chiama dimensione del sottospazio W e si indica con

$$dim(W)$$

(poniamo uguale a zero la dimensione del sottospazio nullo, ovvero $dim(\{\vec{0}\}) = 0$);

- Ad esempio, $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $dim(\mathbb{R}) = 1$.
- In $\mathbb{R}^n$, se $v \neq 0$ allora $dim(L(v)) = 1$, se $v \notin L(w)$ allora $dim(L(v, w)) = 2$.

Dimensione

DEFINIZIONE

Il numero di vettori in una base del sottospazio W (e quindi di tutte) si chiama dimensione del sottospazio W e si indica con

$$dim(W)$$

(poniamo uguale a zero la dimensione del sottospazio nullo, ovvero $dim(\{\vec{0}\}) = 0$);

- Ad esempio, $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $dim(\mathbb{R}) = 1$.
- In $\mathbb{R}^n$, se $v \neq 0$ allora $dim(L(v)) = 1$, se $v \notin L(w)$ allora $dim(L(v, w)) = 2$.
- Se $W = \{(h, k, h + k) : h, k \in \mathbb{R}\}$ allora $W \leq \mathbb{R}^3$ e $dim(W) = 2$: se $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ allora v, w sono indipendenti e $W = L(v, w)$.

Dimensione

DEFINIZIONE

Il numero di vettori in una base del sottospazio W (e quindi di tutte) si chiama dimensione del sottospazio W e si indica con

$$dim(W)$$

(poniamo uguale a zero la dimensione del sottospazio nullo, ovvero $dim(\{\vec{0}\}) = 0$);

- Ad esempio, $dim(\mathbb{R}^3) = 3, dim(\mathbb{R}^2) = 2, dim(\mathbb{R}) = 1$.
- In $\mathbb{R}^n$, se $v \neq 0$ allora $dim(L(v)) = 1$, se $v \notin L(w)$ allora $dim(L(v, w)) = 2$.
- Se $W = \{(h, k, h + k) : h, k \in \mathbb{R}\}$ allora $W \leq \mathbb{R}^3$ e $dim(W) = 2$: se $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ allora v, w sono indipendenti e $W = L(v, w)$.
- Il concetto di dimensione corregge l'apparente paradosso delle cardinalità:

$$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^3| = \dots, \text{ ma } dim(\mathbb{R}) < dim(\mathbb{R}^2) < dim(\mathbb{R}^3) \dots$$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL CONCETTO DI DIMENSIONE

$n+1$ VETTORI DI UN SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE n SONO SEMPRE DIPENDENTI

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL CONCETTO DI DIMENSIONE

$n+1$ VETTORI DI UN SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE n SONO SEMPRE DIPENDENTI

CON MENO DI n VETTORI NON SI PUÒ PER GENERARE UNO SPAZIO DI DIMENSIONE n

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL CONCETTO DI DIMENSIONE

$n+1$ VETTORI DI UN SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE n SONO SEMPRE DIPENDENTI

CON MENO DI n VETTORI NON SI PUÒ PER GENERARE UNO SPAZIO DI DIMENSIONE n

n VETTORI INDIPENDENTI IN UNO SPAZIO DI DIMENSIONE n FORMANO SEMPRE UNA BASE

Esempio

Per trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(h, k, h+k) \in \mathbb{R}^3 : h, k \in \mathbb{R}\},$$

Esempio

Per trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(h, k, h+k) \in \mathbb{R}^3 : h, k \in \mathbb{R}\},$$

basta notare che questo sottospazio NON può avere:

- dimensione 3: altrimenti sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$, mentre $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$;

Esempio

Per trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(h, k, h + k) \in \mathbb{R}^3 : h, k \in \mathbb{R}\},$$

basta notare che questo sottospazio NON può avere:

- dimensione 3: altrimenti sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$, mentre $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$;

- dimensione 1: altrimenti due vettori di W sarebbero sempre uno multiplo dell'altro, mentre i vettori $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ di W non lo sono;

Esempio

Per trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(h, k, h+k) \in \mathbb{R}^3 : h, k \in \mathbb{R}\},$$

basta notare che questo sottospazio NON può avere:

- dimensione 3: altrimenti sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$, mentre $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$;

- dimensione 1: altrimenti due vettori di W sarebbero sempre uno multiplo dell'altro, mentre i vettori $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ di W non lo sono;

- dimensione 0: perché W non è il sottospazio nullo $\{\vec{0}\}$.

Esempio

Per trovare la dimensione e una base del sottospazio

$$W = \{(h, k, h+k) \in \mathbb{R}^3 : h, k \in \mathbb{R}\},$$

basta notare che questo sottospazio NON può avere:

- dimensione 3: altrimenti sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$, mentre $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$;

- dimensione 1: altrimenti due vettori di W sarebbero sempre uno multiplo dell'altro, mentre i vettori $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ di W non lo sono;

- dimensione 0: perché W non è il sottospazio nullo $\{\vec{0}\}$.

Quindi W ha dimensione 2, ed è sufficiente considerare due vettori indipendenti in W per formare una base di W. Ad esempio $B = < w_1, w_2 >$.

Basi per $\mathbb{R}^n$

Consideriamo adesso il sottospazio dato da tutto $\mathbb{R}^n$. Si dimostra facilmente che i vettori $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ formano una base.

Basi per $\mathbb{R}^n$

Consideriamo adesso il sottospazio dato da tutto $\mathbb{R}^n$. Si dimostra facilmente che i vettori $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ formano una base.

1. sono indipendenti: infatti

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

   quindi se $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \vec{0}$ allora $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

Basi per $\mathbb{R}^n$

Consideriamo adesso il sottospazio dato da tutto $\mathbb{R}^n$. Si dimostra facilmente che i vettori $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ formano una base.

1. sono indipendenti: infatti

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

   quindi se $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = \vec{0}$ allora $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

2. $e_1, \ldots, e_n$ generano $\mathbb{R}^n$, perché un vettore qualsiasi $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ si scrive come

   $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$.

Base Canonica

$\mathcal{E}_n = (e_1, \ldots, e_n)$ è una base, chiamata *base canonica* di $\mathbb{R}^n$.

LA DIMESIONE DI $\mathbb{R}^n$ È n

TUTTE LE BASI DI $\mathbb{R}^n$ HANNO n VETTORI.

Data una base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ di $\mathbb{R}^n$ e un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, per trovare le coordinate $||v||^B$ del vettore v rispetto alla base B è sufficiente trovare $t_1, \ldots t_k \in \mathbb{R}$ tali che $v = t_1 v_1 + \ldots + t_k v_k$, perché in questo caso

$$||v||^B = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

Esercizi

- Dimostrare che i vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ formano una base $B = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$. Trovare le coordinate del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ rispetto a tale base. **Risposta:** $||v||^B = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$
- Considerare il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:
$$W = \{(h, h+k, h-k, k) : h, k \in \mathbb{R}\}.$$
Dimostrare che W è un sottospazio, determinarne una base e la sua dimensione.
- Considerare il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:
$$W = \{(h+k, h+k, h+k) : h, k \in \mathbb{R}\}.$$
Dimostrare che W è un sottospazio, determinarne una base e la sua dimensione.

Esercizi

- Considerare il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:

$$W = \{(x, y, z) : x + z = 0\}.$$

Dimostrare che W è un sottospazio, determinarne una base e la sua dimensione. Determinare l'equazione parametrica di tale sottospazio.