Sistemi Lineari e Teorema di Rouché Capelli

(1) Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = -3 \end{cases}$$

(a) Applicando il Teorema di Rouché-Capelli, verificare se il sistema ammette soluzioni e, in caso positivo, calcolare la dimensione dell'insieme delle soluzioni.
(b) Utilizzando il metodo di Gauss determinarne l'insieme delle soluzioni.
(c) Determinare la giacitura dell'insieme delle soluzioni.
(d) Determinare la dimensione e una base della giacitura.

(2) Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -3 \\ x + y + 2z = 0 \\ x - y + z/2 = -3/2 \end{cases}$$

(a) Determinare se il sistema ammette soluzioni utilizzando il Teorema di Rouché Capelli.
(b) Trovare le soluzioni del sistema omogeneo associato.
(c) Se il sistema ammette soluzione, e stabilire se si tratta di tutto lo spazio, di un piano, di una retta oppure di un punto.
(d) Detta A la matrice dei coefficienti del sistema, determinare se A è invertibile.

(3) Considerare i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Dimostrare che entrambi i sistemi hanno come soluzione due rette r, s, trovandone l'equazione parametrica. Determinare se r, s sono parallele, incidenti o sghembe.

(4) Considerare il seguente sistema.

$$\begin{cases} -x + 2y + z - w = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

(a) Determinare se il sistema ammette soluzioni utilizzando il Teorema di Rouché Capelli.
(b) Se il sistema ammette soluzione, determinare la giacitura G, una sula base e la dimensione dello spazio delle soluzioni.
(c) Trovata una soluzione particolare del sistema v_0, esprimere le soluzioni S utilizzando la giacitura e la soluzione particolare, ovvero

$$S = G + v_0$$

(5) Considerare il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases}$$

e la sua matrice dei coefficienti A.

(a) Considerare la trasformazione T_A associata alla matrice A e determinare la dimensione del $Ker(T_A)$ e la dimensione dell'immagine di T_A.
(b) Dimostrare che la trasformazione T_A è suriettiva.
(c) Dimostrare che tutti i sistemi del tipo

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

al variare della colonna dei termini noti $\vec{b}$, hanno sempre soluzione.