Esercizi su Matrici e Sistemi Lineari 2122

(1) Siano A, B, C, D le seguente matrici, a coefficienti reali:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a) Se $E = A \cdot C$, calcolare l'elemento $e_{2,2}$ della matrice E.
(b) Quando possibile, calcolare le espressioni sottoindicate. Se non è possibile calcolarle, spiegare il perché.
 (i) $(A - 2B)C$;
 (ii) $C(A - 2B)$;
 (iii) $(A - 2B)D$;
 (iv) $D(A - 2B)$;
 (v) $(AC)^2$;
 (vi) A^2C^2.

(2) Considerare la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

(a) Dato il vettore riga $v = [1, 0, 0, 0]$ verificare che $v \cdot A$ è uguale alla prima riga di A.
(b) Considerare il vettore riga $v = [0, 0, -2, 0]$ e la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Rispetto alle righe di A, a cosa corrisponde il prodotto $v \cdot A$?

Considera ora il vettore colonna $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Rispetto alle colonne di A, a cosa corrisponde il prodotto $A \cdot w$?

(3) Esprimi il prodotto uA fra la matrice A dell'esercizio 1) e il vettore riga $u = [1, -1]$ come combinazione lineare delle righe di A.
Esprimi il prodotto Av fra la matrice A dell'esercizio 1) e il vettore colonna $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ come combinazione lineare delle colonne di A.

(4) Considera le seguenti matrici, descritte "per blocchi":

$$A := \begin{bmatrix} P & I_3 \\ I_2 & Q \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix}$$

dove P è la matrice nulla di dimensioni 3×2, I_3 ed I_2 sono le matrici identità di dimesione 3 e 2, rispettivamente, Q è la matrice nulla di dimensioni 2×3, R è la matrice nulla di dimensione 2×3 e S è la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcola il prodotto AB utilizzando la divisione a blocchi delle matrici A, B.

(5) Dati i vettori

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1/2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

calcolare il prodotto scalare $< v, w >= w^T v$ e l'outer product vw^T. Esprimere le colonne di quest'ultima matrice come multipli del vettore v.

(6) In questo esercizio useremo le matrici 2×2 per rappresentare i numeri complessi. Rappresentiamo il numero reale 1 come la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e l'unità immaginaria $\mathbf{i}$ come la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificare che in questa rappresentazione $\mathbf{i}^2 = -1$ (il prodotto e l'opposto sono quelli delle matrici) e che se rappresentiamo un numero complesso $a + \mathbf{i}b$ con la matrice

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

allora la somma e il prodotto fra matrici corrisponde alla somma ed al prodotto dei numeri complessi.

(7) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

determinare la sua matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti.

(8) Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & -1/2 & \pi \\ 2 & 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

il vettore colonna

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ed il vettore colonna delle incognite

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix},$$

scrivere per esteso il sistema lineare corrispondente all'equazione matriciale

$$Ax = b$$