ESERCIZI EM 17/18
1. NOTAZIONE PER INSIEMI E PRIME OPERAZIONI

(1) Siano A, B, C, D, E i seguenti insiemi:

$A = \{0, -1, 1\}$, $\quad B = \{x \in \mathbb{Z} : x(x^2 - 1) = 0\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è un numero pari}\}$ $\quad D = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$

$E = \{x \in \mathbb{N} : x(x^2 - 1) = 0\}$.

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.

$\emptyset \in A$	**V** | **F**	$\{0\} \in A$	**V** | **F**	$\{1\} \not\subseteq A$	**V** | **F**
$2 \in C$	**V** | **F**	$\{1, 2\} \subseteq C$	**V** | **F**	$\{1, 2\} \in C$	**V** | **F**
$-1 \in D$	**V** | **F**	A=B	**V** | **F**	B=E	**V** | **F**
$\{1\} \subseteq C$	**V** | **F**	$3 \in B$	**V** | **F**	$A \subseteq B$	**V** | **F**
$B \subseteq A$	**V** | **F**	$A \neq B$	**V** | **F**	$\emptyset \in D$	**V** | **F**
$\emptyset \subseteq D$	**V** | **F**	$\emptyset = D$	**V** | **F**	$D \in \emptyset$	**V** | **F**

(2) Quali fra le seguenti notazioni sono corrette per denotare l'insieme dei numeri naturali che sono potenze del numero 10? In caso negativo, spiegare perché la notazione non è corretta.

a. $1, 10, 100, \dots, 10^n, \dots$ $\quad$ b. $\{10^n : n \in \mathbb{N}\}$

c. 10^n $\quad$ d. $\{1, 10, 100, \dots 10^n\}$

e. $\{10^n\} : n \in \mathbb{N}$ $\quad$ f. $\{x \ : \ x \text{ è una potenza di } 10\}$

g. $\{x \in \mathbb{N} \ : \ x \text{ è una potenza di } 10\}$ $\quad$ h. $\{1, 10, 100, \dots, 10^n, \dots\}$

(3) Trovare (possibilmente più di una) notazione corretta per ognuno dei seguenti insiemi, descritti nel linguaggio naturale. Se viene indicato il termine " con operazione" almeno una notazione deve usare l'unione o l'intersezione fra insiemi (come nella soluzione del primo punto seguente).

(a) l'insieme dei numeri naturali compresi fra 4 e 7, con operazione

possibili soluzioni:

$$\{n \in \mathbb{N} : 4 < n < 7\}, \text{ oppure } \{n \in \mathbb{N} : 4 < n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n < 7\}$$

(b) l'insieme di numeri naturali maggiori di 7;
(c) l'insieme vuoto;
(d) l'insieme che contiene sia i numeri naturali dispari che i multipli di 6, con operazione;
(e) l'insieme che contiene i numeri naturali dispari maggiori di 11, con operazione;
(f) l'insieme dei numeri naturali che hanno resto 2 nella divisione per 3;
(g) l'insieme dei numeri naturali che hanno 1 come ultima cifra decimale;
(h) l'insieme delle stringhe di 4 caratteri binari 0, 1;
(i) l'insieme delle stringhe di 4 caratteri binari 0, 1 che iniziano e finiscono con lo stesso carattere, con operazione;
(j) l'insieme dei numeri interi che non sono divisibili né per 3, né per 4, con operazione.

(4) Siano A l'insieme dei numeri primi, C l'insieme dei numeri pari, D l'insieme dei multipli di 4. Si ha:

$4 \in A \cup C$ è $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ perché ....

$2 \in A \cup C$ è $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ perché ....

$A \subseteq C$ è $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ perché ....

$C \subseteq D$ è $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ perché ....

$D \subseteq C$ è $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ perché ....

(5) Siano A, B, C, D i seguenti insiemi:

$$A = \{3n : n \in \mathbb{N} \text{ e } \ n > 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} : x(x-1) = 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} : x(x-1) = 2\}, \quad D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è divisibile per } 3\}$$

Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

$A \cup C = A$ **V** | **F** $A \cap C = C$ **V** | **F** $B = C \cup B$ **V** | **F**

$A \cap B \subseteq C$ **V** | **F** $D \cup A = D$ **V** | **F** $D \cap A = D$ **V** | **F**

(6) Siano A l'insieme dei numeri primi, C l'insieme dei numeri pari, D l'insieme dei multipli di 4. Si ha:

V | **F** $3 \in (A \cup C) \cap D$;
V | **F** $4 \notin (A \cup C) \cap D$;
V | **F** $3 \notin A \cup (C \cap D)$;
V | **F** $4 \in A \cup (C \cap D)$.

(7) Considerare i seguenti insiemi:

$$A = \{2n + 1 \ : \ n \in \mathbb{N}\}, \ B = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1\},$$

$$C = \{2(n + 1) \ : \ n \in \mathbb{N}\}, \ D = \{2(n + 1) - 1 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Stabiire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
V | **F** $A = B$;
V | **F** $A \subseteq B$;
V | **F** $A \subseteq C$;
V | **F** $A \subseteq D$;
V | **F** $D \subseteq A$.

(8) (a) Se $B = \emptyset$, a cosa è uguale l'insieme $A \setminus (B \setminus C)$? E l'insieme $(A \setminus B) \setminus C$?
(b) L'operzione di differenza fra insiemi è associativa?

(9) Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere, qualsiasi siano gli insiemi A, C, D. Nel caso in cui l'affermazione non sia sempre vera, indicare concretamente tre insiemi A, C, D per cui la proprietà non vale.

$(A \cup C) \cap D \subseteq D$;

$(A \cup C) \cap D \subseteq A$;

$(A \cup C) \cap D \subseteq A \cup D$;

$C \cap D \subseteq (A \cup C) \cap D$.

(10) Siano A, B insiemi qualsiasi. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere e quali sono false per opportune scelte di A, B.

$a \in A \cup B \quad \Rightarrow \quad a \in A$	**V** **F**	$a \in A \cap B \quad \Rightarrow \quad a \in A$	**V** **F**
$a \in (A \cup B) \setminus B \quad \Rightarrow \quad a \in A$	**V** **F**	$a \in (A \cup B) \setminus A \quad \Rightarrow \quad a \in A$	**V** **F**
$a \in (A \cap B) \cup C \quad \Rightarrow \quad a \in A$	**V** **F**	$a \in A \cap (B \cup C) \quad \Rightarrow \quad a \in A$	**V** **F**
$a \in A \cap (B \cup C) \quad \Rightarrow \quad a \in A \cap B$	**V** **F**	$a \in (A \cup B) \setminus C \quad \Rightarrow \quad a \notin C$	**V** **F**
$a \in A \cap B \quad \Rightarrow \quad a \in A \cap (B \cup C)$	**V** **F**	$a \in (A \cap B) \setminus C \quad \Rightarrow \quad a \in A \setminus C$	**V** **F**
$a \notin A \cup B \quad \Rightarrow \quad a \notin A$	**V** **F**	$a \notin A \cap B \quad \Rightarrow \quad a \notin A$	**V** **F**
$a \notin (A \cup B) \setminus B \quad \Rightarrow \quad a \notin A$	**V** **F**	$a \notin (A \cup B) \setminus A \quad \Rightarrow \quad a \notin A$	**V** **F**

(11) Considera i seguenti insiemi A_i, con $i \in \mathbb{N}$:

$$A_i = \{-i, -(i-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots i-1, i\}$$

Determinare gli insiemi

$$\bigcup_{i=0}^{3} A_i, \quad \bigcup_{i=0}^{n} A_i, \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=0}^{3} A_i, \quad \bigcap_{i=0}^{n} A_i, \quad \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i.$$

(12) Dimostrare che, dati due insiemi A, B vale:

$$A \setminus B = B \setminus A \quad \text{se e solo se} \quad A = B$$

(notare il se e solo se. . .)