

## ESERCIZI EM 17/18

### 1. NOTAZIONE PER INSIEMI E PRIME OPERAZIONI

(1) Siano  $A, B, C, D, E$  i seguenti insiemi:

$$A = \{0, -1, 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : x(x^2 - 1) = 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è un numero pari}\} \quad D = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} : x(x^2 - 1) = 0\}.$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.

$$\emptyset \in A \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad \{0\} \in A \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad \{1\} \notin A \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$$

$$2 \in C \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad \{1, 2\} \subseteq C \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad \{1, 2\} \in C \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$$

$$-1 \in D \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad A=B \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad B=E \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$$

$$\{1\} \subseteq C \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad 3 \in B \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad A \subseteq B \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$$

$$B \subseteq A \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad A \neq B \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad \emptyset \in D \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$$

$$\emptyset \subseteq D \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad \emptyset = D \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad D \in \emptyset \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$$

(2) Quali fra le seguenti notazioni sono corrette per denotare l'insieme dei numeri naturali che sono potenze del numero 10? In caso negativo, spiegare perché la notazione non è corretta.

a.  $1, 10, 100, \dots, 10^n, \dots$

b.  $\{10^n : n \in \mathbb{N}\}$

c.  $10^n$

d.  $\{1, 10, 100, \dots, 10^n\}$

e.  $\{10^n\} : n \in \mathbb{N}$

f.  $\{x : x \text{ è una potenza di } 10\}$

g.  $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ è una potenza di } 10\}$  h.  $\{1, 10, 100, \dots, 10^n, \dots\}$

(3) Trovare il maggior numero di notazioni corrette per ognuno dei seguenti insiemi, descritti nel linguaggio naturale. Se viene indicato il termine “ con operazione ” almeno una notazione deve usare l'unione o l'intersezione fra insiemi (come nella soluzione del primo punto seguente).

(a) l'insieme dei numeri naturali compresi fra 4 e 7, con operazione

possibili soluzioni:

$$\{n \in \mathbb{N} : 4 < n < 7\}, \text{ oppure } \{n \in \mathbb{N} : 4 < n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : n < 7\}$$

- (b) l'insieme di numeri naturali maggiori di 7;
  - (c) l'insieme vuoto;
  - (d) l'insieme che contiene sia i numeri naturali dispari che i multipli di 6, con operazione;
  - (e) l'insieme che contiene i numeri naturali dispari maggiori di 11, con operazione;
  - (f) l'insieme dei numeri naturali che hanno resto 2 nella divisione per 3;
  - (g) l'insieme dei numeri naturali che hanno 1 come ultima cifra decimale;
  - (h) l'insieme delle stringhe di 4 caratteri binari 0, 1;
  - (i) l'insieme delle stringhe di 4 caratteri binari 0, 1 che iniziano e finiscono con lo stesso carattere, con operazione;
  - (j) l'insieme dei numeri interi che non sono divisibili né per 3, né per 4, con operazione.
- (4) Siano  $A$  l'insieme dei numeri primi,  $C$  l'insieme dei numeri pari,  $D$  l'insieme dei multipli di 4. Si ha:

$4 \in A \cup C$  è 

V	F
---	---

 perché .....

$2 \in A \cup C$  è 

V	F
---	---

 perché .....

$A \subseteq C$  è 

V	F
---	---

 perché .....

$C \subseteq D$  è 

V	F
---	---

 perché .....

$D \subseteq C$  è 

V	F
---	---

 perché .....

(5) Siano  $A, B, C, D$  i seguenti insiemi:

$$A = \{3n : n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} : x(x-1) = 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} : x(x-1) = 2\}, \quad D = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ è divisibile per } 3\}$$

Stabilire la verità o meno delle seguenti affermazioni:

$$A \cup C = A \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad A \cap C = C \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad B = C \cup B \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$$

$$A \cap B \subseteq C \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad D \cup A = D \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} \quad D \cap A = D \quad \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$$

(6) Siano  $A$  l'insieme dei numeri primi,  $C$  l'insieme dei numeri pari,  $D$  l'insieme dei multipli di 4. Si ha:

$$\begin{array}{ll} \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} & 3 \in (A \cup C) \cap D; \\ \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} & 4 \notin (A \cup C) \cap D; \\ \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} & 3 \notin A \cup (C \cap D); \\ \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} & 4 \in A \cup (C \cap D). \end{array}$$

(7) Considerare i seguenti insiemi:

$$A = \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}, \quad B = \{2n-1 : n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1\},$$

$$C = \{2(n+1) : n \in \mathbb{N}\}, \quad D = \{2(n+1)-1 : n \in \mathbb{N}\}$$

Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

$$\begin{array}{ll} \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} & A = B; \\ \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} & A \subseteq B; \\ \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} & A \subseteq C; \\ \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} & A \subseteq D; \\ \boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}} & D \subseteq A. \end{array}$$

(8) (a) Se  $B = \emptyset$ , a cosa è uguale l'insieme  $A \setminus (B \setminus C)$ ? E l'insieme  $(A \setminus B) \setminus C$ ?

(b) L'operazione di differenza fra insiemi è associativa?

(9) Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere, qualsiasi siano gli insiemi  $A, C, D$ . Nel caso in cui l'affermazione non sia sempre vera, indicare concretamente tre insiemi  $A, C, D$  per cui la proprietà non vale.

$$(A \cup C) \cap D \subseteq D;$$

$$(A \cup C) \cap D \subseteq A;$$

$$(A \cup C) \cap D \subseteq A \cup D;$$

$$C \cap D \subseteq (A \cup C) \cap D.$$

- (10) Siano  $A, B$  insiemi qualsiasi. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono sempre vere e quali sono false per opportune scelte di  $A, B$ .

$a \in A \cup B \Rightarrow a \in A$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$	$a \in A \cap B \Rightarrow a \in A$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$
$a \in (A \cup B) \setminus B \Rightarrow a \in A$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$	$a \in (A \cup B) \setminus A \Rightarrow a \in A$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$
$a \in (A \cap B) \cup C \Rightarrow a \in A$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$	$a \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow a \in A$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$
$a \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow a \in A \cap B$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$	$a \in (A \cup B) \setminus C \Rightarrow a \notin C$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$
$a \in A \cap B \Rightarrow a \in A \cap (B \cup C)$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$	$a \in (A \cap B) \setminus C \Rightarrow a \in A \setminus C$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$
$a \notin A \cup B \Rightarrow a \notin A$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$	$a \notin A \cap B \Rightarrow a \notin A$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$
$a \notin (A \cup B) \setminus B \Rightarrow a \notin A$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$	$a \notin (A \cup B) \setminus A \Rightarrow a \notin A$	$\boxed{\mathbf{V}} \boxed{\mathbf{F}}$

- (11) Considera i seguenti insiemi  $A_i$ , con  $i \in \mathbb{N}$ :

$$A_i = \{-i, -(i-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, i-1, i\}$$

Determinare gli insiemi

$$\bigcup_{i=0}^3 A_i, \quad \bigcup_{i=0}^n A_i, \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=0}^3 A_i, \quad \bigcap_{i=0}^n A_i, \quad \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i.$$

- (12) Dimostrare che, dati due insiemi  $A, B$  vale:

$$A \setminus B = B \setminus A \text{ se e solo se } A = B$$

(notare il se e solo se...)