Sistemi risolti, sistemi a scala, metodo di Gauss

(1) Quale dei seguenti sistemi è risolto? Nel caso lo sia, descrivi l'insieme delle soluzioni, utilizzando se necessario dei parametri.

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ y = 2 + z \\ z = 3 + w \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + z \\ x = 3 + w \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + w \\ z = 3 + w \end{cases}$$

(2) Considerare il sistema

$$\begin{cases} x = y + z \\ w = y - z \end{cases} \qquad \text{e l'insieme} \quad S = \{(2h, h, h, 0) : h \in \mathbb{R}\}$$

(a) Dimostrare che tutte le quadruple di S sono soluzioni del sistema.

(b) È vero che S coincide con l'insieme di tutte le soluzioni del sistema? Se no, trova una soluzione che non sta in S.

(3) Risolvere i seguenti sistemi a scala.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x - \frac{1}{2}y + 2z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + z + 2w = 1 \\ y + z + w = 2 \\ z - w = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 2 \\ z + w = 3 \end{cases}$$

(4) Considerare il seguente sistema a scala:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

(a) Trovare l'insieme delle soluzioni.

(b) Esiste una soluzione del primo sistema con $x_3 = 2$ e $x_5 = 0$?

(c) Esiste una soluzione del primo sistema con $x_4 = 2$ e $x_5 = 0$?

(d) Esiste una soluzione del primo sistema con $x_2 = 1$ e $x_4 = 1$?

(e) Esiste una soluzione del primo sistema con $x_2 = 2$ e $x_4 = 0$?

(5) Questo esercizio serve per convincersi che il metodo di assegnazione di parametri alle variabili a destra di un sistema risolto per trovarne le soluzioni può non funzionare se il sistema non è risolto. Considerare il sistema

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} .$$

(a) Mostrare che questo sistema non è risolto.

(b) Mostrare che, assegnando parametri alle variabili a destra, $x = h, y = k$, e risolvendo per le variabili a sinistra non riusciamo ad ottenere l'insieme delle soluzioni del sistema.

(c) Risolvere il sistema con il metodo di Gauss.

(6) Considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

(a) Trovare l'insieme delle soluzioni del sistema utilizzando il metodo di Gauss.

(b) Esiste una soluzione in cui $x_1 = x_5 = 1$?

(c) Esiste una soluzione con $x_5 = 0, x_2 = 2$?

(7) Considerare il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + z = -3 \\ x + y + 2z = 0 \\ 2x - y + 3z = -3 \end{cases}$$

(a) Trovare l'insieme delle soluzioni del sistema utilizzando il metodo di Gauss.

(b) Determinare se il sistema ha un numero infinito di soluzioni.

(8) Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -3 \\ x + y + 2z = 0 \\ x - y + z/2 = -3/2 \end{cases}$$

(a) Se il sistema ammette soluzioni, descrivere l'insieme delle soluzioni.

(9) Determinare un sistema lineare in tre incognite x, y, z per cui l'insieme delle soluzioni sia

$$SOL = \{(h, 2h, h) : h \in \mathbb{R}\}$$

Ripetere l'esercizio con l'insieme

$$SOL = \{(h + k, 2h, k) : h, k \in \mathbb{R}\}$$

(10) Qual è il minimo numero di parametri che occorrono per descrivere l'insieme

$$SOL = \{(h + k, h + k, h + k) : h, k \in \mathbb{R}\}?$$

(11) Spiegare perché il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

non può avere soluzioni (senza usare il metodo di Gauss).

(a) Sostituire la seconda equazione con altre equazioni in modo che il sistema abbia un'unica soluzione;

(b) sostituire la seconda equazione con un'unica equazione in modo che il sistema abbia infinite soluzioni.