ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI

Prima di svolgere gli esercizi, leggere attentamente le slides pubblicate su elearning.

(1) Trovare la parte reale e la parte immaginaria dei seguenti numeri complessi, determinandone anche la posizione come punto sul piano di Argand-Gauss.

$$z = 3, \quad z = -3, \quad z = i - \sqrt{3}, \quad z = -i\pi/2.$$

(2) Svolgere le operazioni sottoindicate trovando la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

$$(1-2i) + (\sqrt{2} - i); \quad (1-2i) + (\sqrt{2} - i); \quad (1+2i)\cdot(1-2i); \qquad (1-2i)^3$$

$$(1+i)^3; \qquad \frac{3-2i}{-1+i}; \qquad 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

(3) Determinare le seguenti potenze dell'unità immaginaria (trovandone la parte reale e la parte immaginaria):

$$i^{12}, \quad i^{17}, \quad i^{-15}$$

(4) Se $z = a + ib$, il numero complesso $\overline{z} = a - ib$ si dice il *coniugato* di z. Dati due numeri complessi z, z' dimostrare che $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}'$, $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z}'$ (in particolare, vale $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$).
Quali sono i numeri complessi tali che $z = \overline{z}$?

(5) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del coniugato del numero $(1-i)^3$.

(6) Verificare che il numero complesso $z = -1 + 2i$ e il suo coniugato $\bar{z}$ soddisfano l'equazione $z^3 + z^2 + 3z - 5 = 0$. Più in generale, usando l'esercizio (4) mostrare che se un numero z è soluzione di un'equazione

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0,$$

dove i coefficienti a_i sono reali, allora anche $\overline{z}$ è soluzione del polinomio.

(7) Se z è un numero complesso, indichiamo con $|z|$ il suo modulo (ovvero, la lunghezza del vettore che rappresenta z sul piano di Argand-Gauss). Sia E la relazione d'equivalenza definita sui numeri complessi da

$$z \; E \; z' \quad \Leftrightarrow \quad |z| = |z'|.$$

Determinare la classe del numero i ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su $\mathbb{C}$.