ESERCIZI SU TRASFORMAZIONI ELEMENTARI E MATRICI INVERTIBILI

(1) Considerare le matrici quadrate di dimensione 2×2.
   (a) Determinare la matrice elementare E_1 che corrisponde alla trasformazione elementare $R_2 \Leftarrow R_2/2$.
   (b) Determinare la matrice elementare E_2 che corrisponde alla trasformazione elementare $R_1 \Leftarrow R_1 - R_2$.
   (c) Sia A la seguente matrice:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   Senza svolgere i prodotti delle matrici, determinare il prodotto $E_2 E_1 A$.
   (d) Trovare l'inversa A^{-1} della matrice A definita al punto precedente.

(2) Considerare le matrici quadrate di dimensione 3×3.
   (a) Determinare la matrice elementare E_1 che corrisponde alla trasformazione elementare $R_1 \Leftarrow R_1 - R_3$.
   (b) Considerare la la matrice elementare E_2 che corrisponde alla trasformazione elementare $R_2 \Leftarrow R_2 - R_3$.
   (c) Sia A la seguente matrice:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   Senza svolgere i prodotti delle matrici, determinare a quanto è uguale il prodotto $E_2 E_1 A$.

(3) Sia A la seguente matrice:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Utiizzando il metodo delle matrici elementari, trovare una matrice B tale che la matrice BA sia una matrice a scala.

(4) Sia A la seguente matrice:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Utilizzando il metodo delle trasformazioni elementari dimostrare che A è invertibile e determinarne l'inversa A^{-1}.
   (b) Considerare il sistema
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esprimere le soluzioni del sistema tramite A^{-1}.

SOL

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(5) Sia A la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Utilizzando il metodo di Gauss, trovare tutte le soluzioni del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Considerando solo l'insieme delle soluzioni, dimostrare che la matrice A non è invertibile (se A fosse invertibile, quante soluzioni avrebbe il sistema?)

(6) Sia A la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) Utilizzando il metodo delle matrici elementari, dimostrare che A è invertibile e trovare l'inversa A^{-1}.

(b) Trovare tutte le soluzioni del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(7) Generalizzando l'esercizio precedente, trovare l'inversa di una matrice di dimensioni $n \times n$ tale che i coefficienti della matrice sono nulli fuori della diagonale principale e non nulli sulla diagonale principale.

(8) Trovare l'inversa della matrice A seguente utilizzando il metodo delle matrici elementari.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(9) Dimostrare che, se le righe di una matrice quadrata sono dipendenti, questa proprietà rimane vera anche se operiamo una trasformazione elementare sulla matrice. Utilizzare questa proprietà per dimostrare che una matrice quadrata con righe dipendenti non è invertibile (in particolare, matrici con due riche uguali o con una riga nulla non sono invertibili).