1. Cambiamenti di base, matrici di trasformazioni in altre basi e diagonalizzabilità

(1) Considerare i vettori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(a) Dimostrare che a base $B = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$ utilizzando il determinante della matrice (che chiamiamo sempre B) che ha per colonne i vettori della base.

(b) Trovare la matrice di cambiamento di base, dalla base canonica alla base B (è l'inversa di B!) e le coordinate dl vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ nella base B.

(c) Trovare le coordinate del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rispetto alla base B.

(2) Se $\mathcal{E}_3 = [e_1, e_2, e_3]$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e u_1, u_2, u_3 sono tali che:

$$e_1 = u_1 + u_2, \quad e_2 = -u_2, \quad e_3 = u_3,$$

dimostrare che $B = [u_1, u_2, u_3]$ è ancora una base per $\mathbb{R}^3$ utilizzando il determinante della matrice (che corrisponde a) B.

(a) Determina la matrice di cambiamento di base, dalla base canonica alla base B.

(b) Considera il vettore $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e trova le sue coordinate nella base B.

(c) Determina un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$||v||^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) Si considerino i vettori $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostrare che $B = [v_1, v_2, v_3]$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B.

(c) Trovare le coordinate del vettore $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ in base B

Risposta punto b- controllare che sia giusta!):

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ -1/2 & 1/2 & 1/5 \end{bmatrix}$$

(4) Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ (ovvero, T è tale che $M_{\mathcal{E}_2}(T) = A$, per cui il valore di $T(v)$ è uguale al vettore Av). Descrivere esplicitamente il valore $T(x, y)$ e scrivere la matrice associata a T rispetto alla base $B = [v_1, v_2]$ dove $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(5) Sia A la seguente matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice A rispetto alla base canonica, determinare se il vettore $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è un autovettore di T, e, in caso positivo, qual è l'autovalore corrispondente.

(b) Il numero 0 è un autovalore per T?

(6) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (y, x, 0).$$

(a) Stabilire se i seguenti vettori sono autovettori di T. In caso affermativo, stabilire quali sono gli autovalori corrispondenti.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) T è diagonalizzabile? In caso affermativo, determinare una base B di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per T e la matrice $M_B(T)$ che corrisponde ad T rispetto a tale base.

(7) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (-x, -x, -z)$.

(a) Calcolare la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica per dominio e codominio.

(b) Verificare che il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ è un autovettore per T, con autovalore -1.

(c) Determinare l'autospazio V_{-1}, la sua dimensione e una sua base.

(d) Determinare se T ha altri autovalori e in caso positivo i relativi autospazi.

(e) Determinare se T è diagonalizzabile; in caso affermativo, trovare una base B di $\mathbb{R}^3$ composta da autovettori di T e determinare $M_B(T)$.

(8) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, z)$.

(a) Trovare la matrice che corrisponde ad T rispetto alla base canonica.

(b) Determinare $Ker(T), Im(T)$ e le loro dimensioni, stabilendo se T è iniettiva, suriettiva o biunivoca.

(c) Stabilire se il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è un autovettore di T e se si, per quale autovalore.

(d) Trovare gli autovalori di T ed i relativi autospazi.

(e) T è diagonalizzabile? Se la risposta è positiva, trovare una base di autovettori e la matrice che corrisponde a T in questa base.

(9) Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x, x + z, y).$$

(a) Trovare la matrice che corrisponde ad T rispetto alla base canonica.

(b) Stabilire se il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ è un autovettore di T e se si, per quale autovalore.

(c) Trovare gli autovalori di T ed i relativi autospazi e stabilire se T è diagonalizzabile.