Esercizi su Matrici e Sistemi Lineari 1819

(1) Siano A, B, C, D le seguente matrici, a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Se $E = A \cdot C$, calcolare l'elemento $e_{2,2}$ della matrice E.
(b) Quando possibile, calcolare le espressioni sottoindicate. Se non è possibile calcolarle, spiegare il perché.
(i) $(A - 2B)C$;
(ii) $C(A - 2B)$;
(iii) $(A - 2B)D$;
(iv) $D(A - 2B)$;
(v) $(AC)^2$;
(vi) A^2C^2.

(2) Considerare la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) Dato il vettore $v = (1, 0, 0, 0)$ verificare che $v \cdot A$ è uguale alla prima riga di A.
(b) Considerare il vettore $v = (0, 0, -2, 0)$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Rispetto alle righe di A, a cosa corrisponde il prodotto $v \cdot A$?
Considera ora il vettore colonna $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ Rispetto alle colonne di A, a cosa corrisponde il prodotto $A \cdot w$?

(3) Esprimi il prodotto uA fra la matrice A dell'esercizio 1) e il vettore riga $u = (1, -1)$ come combinazione lineare delle righe di A.
Esprimi il prodotto Av fra la matrice A dell'esercizio 1) e il vettore colonna $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare delle colonne di A.

(4) Considera le seguenti matrici, descritte "per blocchi":

$$A := \begin{pmatrix} P & I_3 \\ I_2 & Q \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$$

dove P è la matrice nulla di dimensioni 3×2, I_3 ed I_2 sono le matrici identità di dimesione 3 e 2, rispettivamente, Q è la matrice nulla di dimensioni 2×3, R è la matrice nulla di dimensione 2×3 e S è la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcola il prodotto AB utilizzando la divisione a blocchi delle matrici A, B.

(5) In questo esercizio useremo le matrici 2×2 per rappresentare i numeri complessi. Rappresentiamo il numero reale 1 come la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'unità immaginaria $\mathbf{i}$ come la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificare che in questa rappresentazione $\mathbf{i}^2 = -1$ (il prodotto e l'opposto sono quelli delle matrici) e che se rappresentiamo un numero complesso $a + \mathbf{i}b$ con la matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

allora la somma e il prodotto fra matrici corrisponde alla somma ed al prodotto dei numeri complessi.

(6) Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

determinare la sua matrice dei coefficienti e la colonna dei termini noti.

(7) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 & -1/2 & \pi \\ 2 & 0 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

il vettore colonna

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ed il vettore colonna delle incognite

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix},$$

scrivere per esteso il sistema lineare corrispondente all'equazione matriciale

$$A\vec{x} = \vec{b}$$