ESERCIZI DI LOGIC PROPOSIZIONALE

(1) Trovare la tavola di verità delle seguenti formule:

$$\neg P \to \neg Q, \qquad \neg Q \to \neg P, \qquad P \to \neg Q.$$

(2) Trovare tutte le valutazioni che rendono falsa la formula

$$P \to \neg Q) \vee (\neg Q \to \neg P)$$

(3) Per ognuna delle affermazioni seguenti, indicare se è vera o falsa.

(a) Se v è una valutazione tale che $v(P) = V$ e $v(Q) = V$, allora

$$v((P \to \neg Q) \vee (\neg Q \to \neg P)) = V.$$

V | **F**

(b) La formula $P \to Q \wedge R$ è un' abbreviazione per la formula $(P \to Q) \wedge R$. **V** | **F**

(c) La formula $P \to Q \vee R$ è logicamente equivalente alla formula $(P \to Q) \vee R$. **V** | **F**

(d) La formula $P \wedge Q \to P$ è logicamente equivalente alla formula $P \wedge (Q \to P)$. **V** | **F**

(4) Se P sta per ”piove”, Q sta per ”prendo l'ombrello”, tradurre le frasi:

- “se prendo l'ombrello, allora non piove”;
- “se non prendo l'ombrello, allora piove”;
- “prendo l'ombrello solo se piove”.

(5) Dimostrare che le due formule $\neg(P \to Q \vee R)$ e $P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ sono logicamente equivalenti costruendo le tavole di verità e verificando che le due formule hanno lo stesso valore di verità sotto ogni valutazione.

(6) Scegliere quali fra le seguenti formule sono logicamente equivalenti alla formula
$\neg(P \to Q) \vee (\neg P \to Q)$.

1. $P \vee Q$ 2. $(P \wedge \neg Q) \vee (P \vee Q)$ 3. $(P \vee \neg Q) \vee (P \vee Q)$.

(7) Stabilire per quali coppie F, G si ha che F ha come conseguenza logica G (in simboli $F \models G$), dove F, G sono le formule:
(a) $F = (P \vee Q) \wedge \neg P, \quad G = Q$;

(b) $F = (P \vee Q) \wedge \neg P, \quad G = \neg Q;$
(c) $F = (P \to Q) \wedge \neg Q, \quad G = \neg P;$
(d) $F = (P \to Q) \wedge (Q \to R), \quad G = R;$
(e) $F = (P \wedge Q) \wedge (P \to R) \wedge (R \to S), \quad G = S;$
(f) $F = (P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R), \quad G = R;$
(g) $F = \neg(P \wedge Q) \wedge (\neg P \to R), \quad G = R \vee \neg Q;$
(h) $F = (P \to Q) \wedge (P \to R) \wedge P, \quad G = Q \wedge R.$

(8) Quali fra le seguenti formule è una tautologia, ovvero è sempre vera, qualsiasi sia il valore di verità di P e di Q?

$$\begin{array}{ccc} P \to \neg P & \neg P \to \neg P & (P \to Q) \vee (Q \to P) \\ (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P) & (P \to P) \to P & P \to (P \to P). \end{array}$$

(9) Equivalenze di De Morgan, regole di distributività e negazione di un'implicazione: mostrare che le seguenti formule sono logicamente equivalenti:
- $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q;$
- $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q;$
- $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R);$
- $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R);$
- $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q.$

(10) Usando le equivalenze studiate nel precedente esercizio, trasformare la formula

$$\neg(P \vee Q \to (P \to R))$$

in una formula equivalente in cui le negazioni si trovano solo di fronte alle lettere P, Q, R.

(11) Trova una formula A che utilizza le due variabili P e Q e ha la seguente tavola di verità:

P	Q	A
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ripeti l'esercizio per la formula B che ha la tavola seguente:

P	Q	B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Più in generale, data una tabella

P	Q	?
V	V	i
V	F	j
F	V	k
F	F	l

dove i, j, k, l sono V o F, come posso definire una formula che abbia proprio questa come tavola di verità?

(12) Raggruppare le formule seguenti in gruppi in modo che ogni gruppo contenga formule che sono logicamente equivalenti e che formule appartenenti a gruppi diversi non siano logicamente equivalenti (ad esempio, $\neg P \vee Q$ e $Q \wedge P$ non possono stare nello stesso gruppo perché le due formule non sono logicamente equivalenti: la prima formula è vera se Q è vero e P è falso, la seconda formula nelle stesse circostanze è falsa).

$$\begin{array}{ccc} \neg P \vee Q & Q \to P & \neg Q \wedge P \\ \neg(\neg P \vee Q) & Q \wedge P & \neg Q \vee P \\ \neg(P \vee Q) & \neg(Q \to P) & Q \wedge \neg P \end{array}$$

(13) Avendo a disposizione solo la lettera P, quante formule non logicamente equivalenti possiamo scrivere? Ed avendo a disposizione le lettere P e Q? Ed avendo a disposizione le lettere $P_1, \ldots, P_n$?