STATISTICA CAMPIONATORIA

2022-11-24

STATISTICA CAMPIONATORIA

Data una popolazione reale, possibilmente infinita, essa è analizzabile solo parzialmente, tramite estrazioni casuali di campioni

INDAGINI CAMPIONARIE

- Vincoli di tempo/costo
- Popolazione di interessa virtuale o reale infinita
- La rilevazione potrebbe distruggere le unità statistiche
- La precisione dei risultati ottenuti potrebbe non essere ottimale

CAMPIONE CASUALE

Sono i dati che vengono presi di riferimento in seguito a una estrazione casuale

CASUALE SEMPLICE

Può venire interpretato come una serie di n realizzazioni indipendenti di un dato esperimento

DATI OSSERVATI

$x = (x_1, ..., x_n), n \geq 1$

Si riferiscono tutti alla stessa caratteristica di interesse

x_i rappresenta il valore osservato sulla i-esima unità statistica

IPOTESI FONDAMENTALE

I dati campionari x si possono interpretare come un vettore di variabili all'interno di un **vettore di variabili casuali**

$X = (X_1, ..., X_n)$

X_i rappresenterebbe la variabile casuale associata a x_i , quindi x_i , un generico valore ottentuo dal campione, apparterrebbe al supporto della variabile X_i

In sintesi ogni valore misurato fa parte di una variabile casuale che avrebbe potuto fornire valori diversi da quello rilevato, sempre però all'interno del suo supporto

La distribuzione di provababilità di X è ingnota, o almeno in parte, ed è necessario stimarla

$$X = (X_1, ..., X_n)$$

X rappresenta un vettore di variabili casuali, in cui ogni variabile è **indipendente e identicamente distribuita** rispetto alle altre, quindi possiedono lo stesso **modello probabilistico**

MODELLI STATISTICI PARAMETRICI

> Dato un campione casuale semplice $X_1, \ldots, X_n$, la distribuzione di probabilità delle singole variabili dipende dalla loro natura e dal fenomeno di interesse

TIPOLOGIA DI FENOMENO

BINARI

$$X_i \sim Ber(p) p \in (0, 1)$$

MISURAZIONI

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

CONTEGGI

$$X_i \sim P(\lambda)$$

TEMPI DI FUNZIONAMENTO

$$X_i \sim Esp(\lambda)$$

PARAMETRI

> Ogni modello è caratterizzato da uno o più parametri, i quali dipendono ovviamente dalla variabile di interesse

Nella statistica inferenziale parametrica si presuppone di conoscere il modello di appartenenza,ma non si conoscono i parametri, i quali andranno opportunamente stimati

MODELLO PARAMETRICO

- $X_1, \ldots, X_n$ sono indipendenti
- Le variabili possono anche non appartenere allo stesso modello
- i parametri da stimare sono detti $\theta = (\theta_1, ..., \theta_d), d \geq 1$

OBIETTIVO

Usare i dati rilevati $x = (x_1, ..., x_n)$ per stimare opportunamente i valori di θ

$$\theta \in \Theta \subseteq R^d$$

Θ è chiamato spazio parametrico

SUPPORTO CONGIUNTO

Viene definito anche come **spazio campionario**

$$X_1, ..., X_n$$

Come spiegato in precedenza esso corrisponde allo spazio occupato da tutti i possibili campioni $x_1, \ldots, x_n$

SCELTA DEL MODELLO

- Capire la natura dei dati
- Aspetti/caratteristiche notevoli
- Informazioni sul meccanismo generatore dei dati della popolazione di interesse

ESEMPIO

Controllo di qualità: si analizzano n oggetti

Campione osservato $x = (x_1, ..., x_n)$

Ogni valore $x_i \in X_i$ con $X_i \sim Ber(p)$ in quanto l'evento singolo è di tipo binario: valido(1) o non valido (0)

PARAMETRI

Una volta individuato il modello di appartenenza è necessario trovare θ, cioè il vettore dei parametri da stimare.

Nel caso in esame $\theta = p$, quindi la probabilità di successo dell'evento bernoulliano

SPAZIO PARAMETRICO

$$\theta \in \Theta = \{0, 1\}$$

SPAZIO CAMPIONARIO

$$S_X = \{0, 1\} \times ... \times \{0, 1\} = \{0, 1\}^n$$

L'insieme di tutti i vettori di n dimensioni costituiti dai valori 0 e 1, esiti dell'esperimento bernoulliano

ESEMPIO 2

Misurazioni

Campione osservato $x = (x_1, \ldots, x_n)$ è costituito da una serie di valori numerici associati alla variabile X di riferimento

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

PARAMETRI

Dopo aver determinato il modello è necessario stimare i parametri $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (\mu, \sigma^2)$

SPAZIO PARAMETRICO

$$\theta \in \Theta = R \times R^+$$

R^+ perchè $V(X) = \sigma^2 \geq 0$

SPAZIO CAMPIONARIO

$$S_X = R \times ... \times R = R^n$$

Ogni variabile $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ ha come supporto R

VERIFICA DEL MODELLO

Per verificare la correttezza del modello usato è utile

- Sovrapporre istogramma con funzione di densità associata al modello scelto
- Confrontare i grafici dei quantili

PROCEDURE INFERENZIALI

STIMA PUNTUALE

Si vuole ottenere un valore numerico del parametro in base ai dati disponibili

STIMA INTERVALLARE

Si vuole determinare un intervallo di valori all'interno del quale trovare il valore vero del parametro da stimare

VERIFICA IPOTESI

Si parte da un valore associato al parametro e si dimostra la sua validità e correttezza

SATISTICHE CAMPIONARIE

Dato un campione casuale $X_1, ..., X_n$,

Si chiama **statistica campionaria** una opportuna trasformata lineare di X

$$T = t(X_1, ..., X_n)$$

La scelta di T deve essere fatta tenendo conto del modello di riferimento delle singole variabili X_i

Siccome T sintetizza il vettore di variabil casuali $X = (X_1, ..., X_n)$ allora T avrà anch'esso un valore osservato $t = t(x_1, ..., x_n)$, quindi la trasformata lineare sui dati osservati $x_i \in X_i$

OBIETTIVO

Il valore ottenuto t è utile per l'inferenza su θ

RIPETIZIONE

Se si rieffettua l'esperimento delle medesime condizioni si otterrà $x' = (x'_1, ..., x'_n)$ che sarà diverso dal campione casuale precedentemente misurato

$$t' = t(x') \neq t = t(x)$$

DISTRIBUZIONE CAMPIONARIA

La variabile $T = t(X_1, ..., X_n)$ avrà una distribuzione di probabilità denominata **distribuzione campionaria**

A ogni X_i viene associato un parametro θ_i , perciò la il vero valore di T verrà stimato supponendo la verità del valore del parametro θ associato

SOMMA CAMPIONARIA

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

PROPRIETÀ

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mu$$

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\sigma^2$$

MODELLI

GAUSSIANA

Dato campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ gaussiano $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

BINOMIALE

Dato campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ gaussiano $X_i \sim Bi(k_i, p)$

$$S_n \sim Bi(\sum_{i=1}^{n} k_i, p)$$

POISSON

Dato campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ gaussiano $X_i \sim P(\lambda_i)$

$$S_n \sim P(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

CHI-QUADRO

Dato campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ gaussiano $X_i \sim \chi^2(r_i)$

$$S_n \sim \chi^2(\sum_{i=1}^{n} r_i)$$

BERNOULLIANA

Dato campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ gaussiano $X_i \sim Ber(p)$

$$S_n \sim Bi(n, p)$$

MEDIA CAMPIONARIA

$$\bar{X_n} = \frac{1}{n} S_n$$

PROPRIETÀ

$$E(\bar{X_n}) = \frac{E(S_n)}{n}$$

$$V(\bar{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$$

GAUSSIANO

Dato campione casuale $X_1, \ldots, X_n$ gaussiano $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\bar{X_n} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

STIMA

La media campionaria $\bar{X_n}$ costituisce uno **stimatore** per μ e il suo valore osservato $\bar{x_n}$ corrisponde alla media calcolata sul campione attuale $x = (x_1, ..., x_n) \in X = (X_1, ..., X_n)$

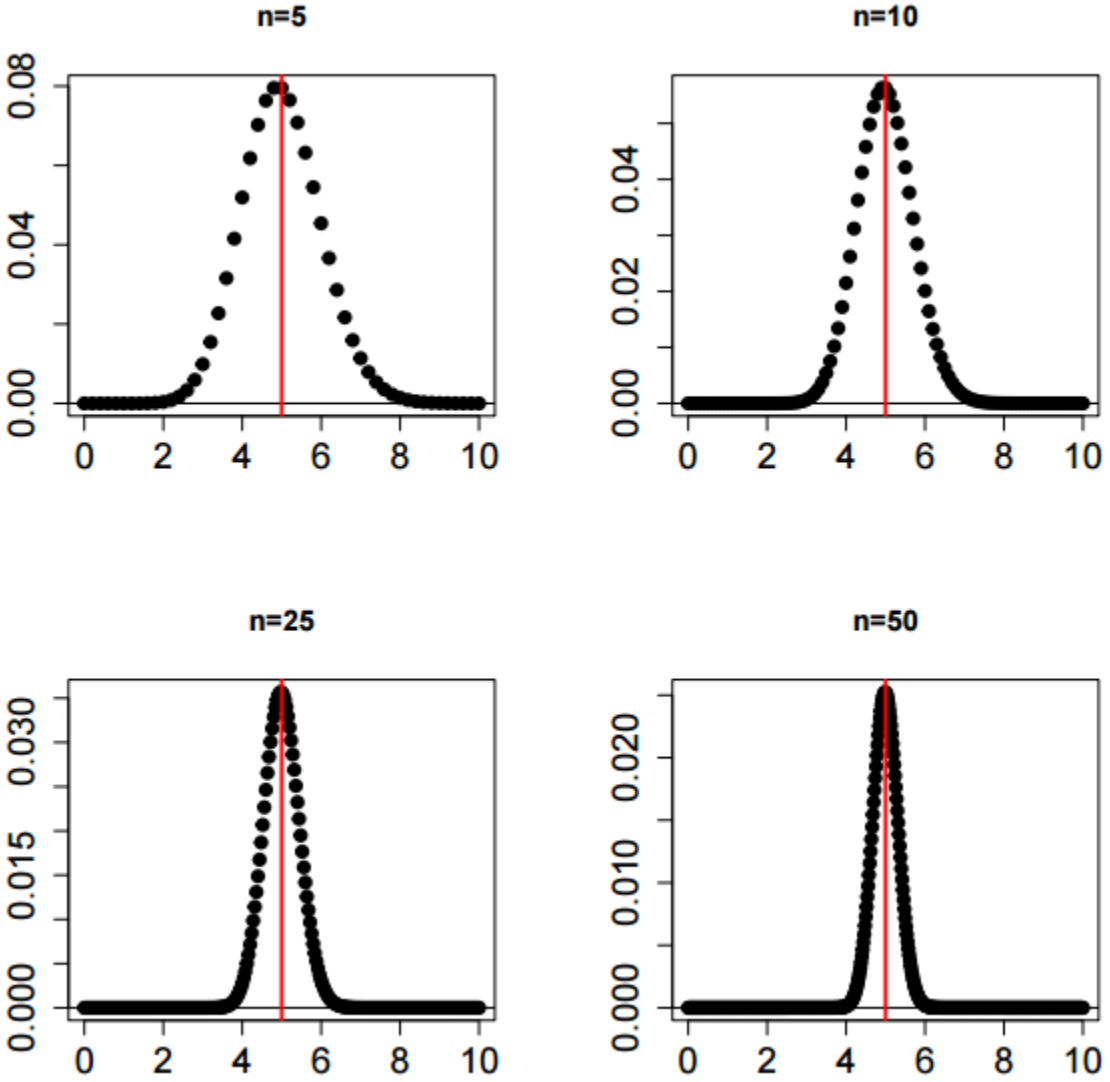
All'aumentare della dimensione n del campione la varianza della media campionaria $V(\bar{X_n}) = \sigma^2/n$ diminuisce.

LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI

La variabile casuale $\bar{X_n}$ media campionaria avrà una distribuzione di probabilità sempre più simile al vero valore di μ

$$n \to \infty \implies \bar{X_n} \to^p \mu$$

$\to^p$ significa **convergenza in probabilità**



Al crescere di n la distribuzione di probabilità di $\bar{X_n}$ converge sempre di più a μ

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

Valido per **MEDIA e SOMMA campionaria**

Data una successione di variabili casuali $X_i, i \geq 1$ Indipendenti e Identicamente Distribuite con media μ e varianza $\sigma^2 \neq 0$ **finite**

STANDARDIZZAZIONE

Dopo aver standardizzato **SOMMA e MEDIA** la loro distribuzione di probabilità coincide

$$\frac{\bar{X_n} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} = \frac{\bar{S_n} - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \rightarrow^d Z \sim N(0,1)$$

$\rightarrow^d$ **convergenza in distribuzione**

Al crescere di n la la distribuzione di probabilità converge a Z normale standardizzata

$$\bar{X_n} \sim N(\mu, \sigma^2) S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

PROPRIETÀ

$$P(a < \bar{X_n} \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) P(a < S_n \leq b) =$$

VARIANZA CAMPIONARIA

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X_n})^2$$

La sua versione corretta definita S_c^2

STATISTICHE ORDINATE

$$X_{(1)} \leq ... \leq X_{(n)}$$

MINIMO

$$X_{(1)} = min\{X_1, ..., X_n\}$$

MASSIMO

$$X_{(n)} = max\{X_1, ..., X_n\}$$

MEDIANA CAMPIONARIA

$$X_{0.5} = \begin{cases} X_{(n+1)/2}, & \text{if } x\%2 \neq 0 \\ \frac{X_{n/2} + X_{(n/2)+1}}{2}, & \text{if } x\%2 = 0 \end{cases}$$

MOMENTI CAMPIONARI

CENTRATI

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X_n})^r r \in N^+$$

DECENTRATI

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^r r \in N^+$$