Matrici come trasformazioni

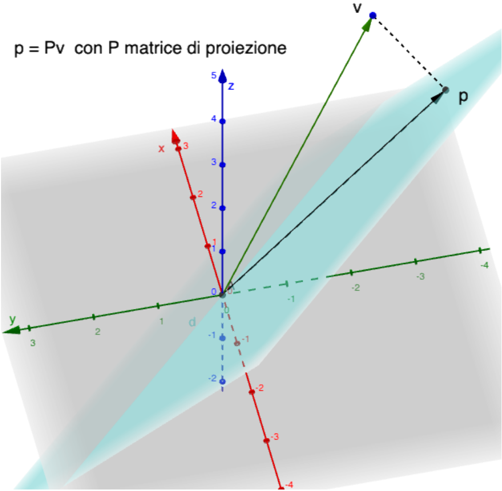
Una matrice A di dimensione $n \times m$ *trasforma* vettori di $\mathbb{R}^m$ in vettori di $\mathbb{R}^n$ tramite moltiplicazione:

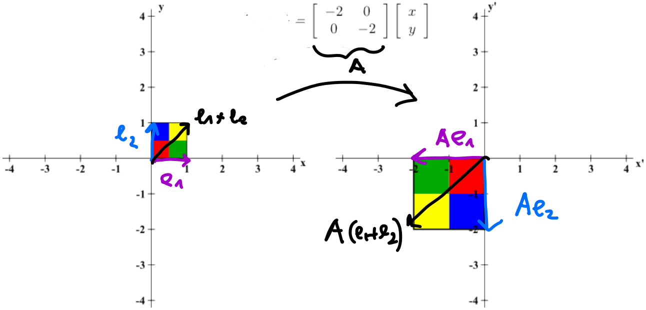
$$v \in \mathbb{R}^m \Rightarrow Av \in \mathbb{R}^n$$

Quindi, possiamo associare alla matrice A una funzione

$$\begin{array}{cccccc} T_A & : & \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \\ & & v & \mapsto & Av \end{array}$$

Esempio: Proiezioni Ortogonali



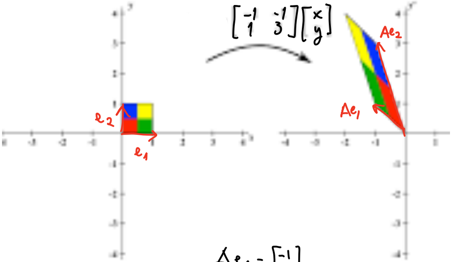


$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$Ae_1 = A(:,1) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Ae_2 = A(:,2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A(e_1+e_2) = Ae_1 + Ae_2$$

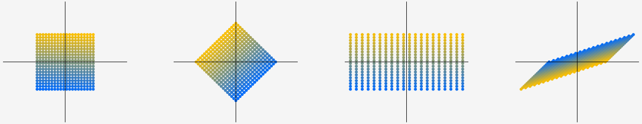


$$A e_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A e_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Example 2.22 (Linear Transformations of Vectors)

Figure 2.10 Three examples of linear transformations of the vectors shown as dots in (a); (b) Rotation by 45°; (c) Stretching of the horizontal coordinates by 2; (d) Combination of reflection, rotation and stretching.



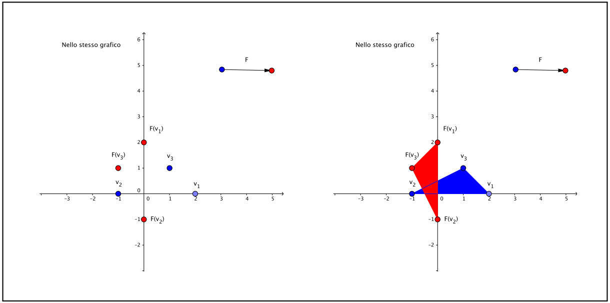
(a) Original data. (b) Rotation by 45°. (c) Stretch along the horizontal axis. (d) General linear mapping.

We consider three linear transformations of a set of vectors in $\mathbb{R}^2$ with the transformation matrices

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.97}$$

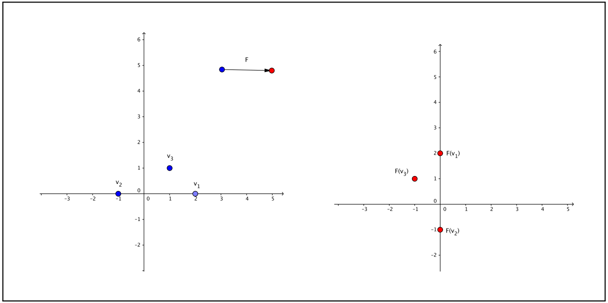
esempio

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di $\pi/2$ intorno all'origine:

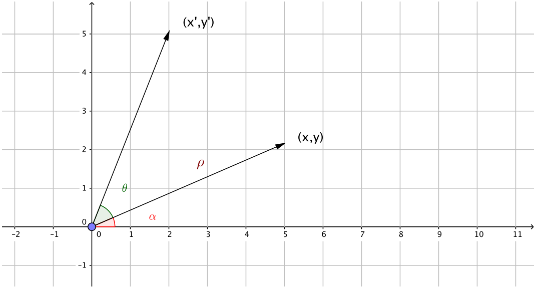


esempio

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di $\pi/2$ intorno all'origine (su grafici distinti):



Rotazioni nel piano



$$\begin{cases} x = \rho\cos(\alpha) \\ y = \rho\sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \rho\cos(\alpha+\theta) = \rho(\cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)\sin(\theta)) = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' = \rho\sin(\alpha+\theta) = \rho(\sin(\alpha)\cos(\theta) + \sin(\theta)\cos(\alpha)) = x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases}$$

Rotazioni nel piano

Se

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

allora moltiplicare per la matrice A ha l'effetto di ruotare il vettore $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ di un angolo θ.

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

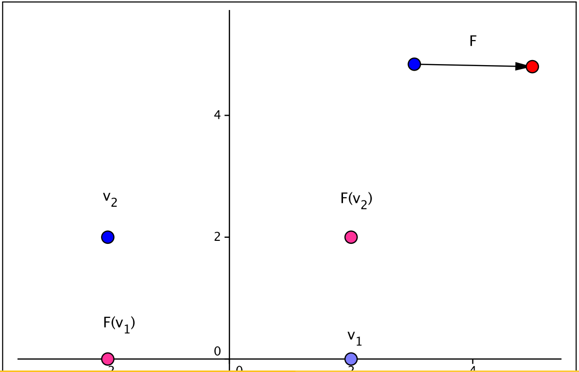
Ad esempio, se $\theta = \pi/4$ allora la matrice di rotazione di $\pi/4$ in senso antiorario è

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

SIMMETRIE

La simmetria rispetto all'asse y è descritta dalla matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Infatti

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$



Esempio

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

allora

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ -y + 2z \end{bmatrix}$$

quindi

$$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \; T_A(x, y, z) = (x + 2y + 3z, -y + 2z).$$

Esercizio

Considera le seguenti matrici di $\mathbb{R}^2$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Per ognuna delle matrici A_i, calcola la funzione $T_{A_i} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
2. Considera il quadrato unitario di vertici $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$, $D = (0,1)$ di $\mathbb{R}^2$ e descrivi l'immagine di tale quadrato tramite T_{A_i}.

Esercizio

Considera le seguenti matrici di $\mathbb{R}^2$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Per ognuna delle matrici A_i, calcola la funzione $T_{A_i} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
2. Considera il quadrato unitario di vertici $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (1,1)$, $D = (0,1)$ di $\mathbb{R}^2$ e descrivi l'immagine di tale quadrato tramite T_{A_i}.

Sol. per la matrice A_1 $T_{A_1}(x,y) = (x,-y)$,
$T_{A_1}(A) = (0,0)$, $T_{A_1}(B) = (1,0)$, $T_{A_1}(C) = (1,-1)$, $T_{A_1}(D) = (0,-1)$. Il quadrato unitario viene quindi ribaltato rispetto all'asse x dalla funzione T_{A_1}.

Le TRASFORMAZIONI DEFINITE DA MATRICI SONO LINEARI

È facile verificare che la funzione $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definita dalla matrice A come nella scheda precedente, soddisfa, per ogni $v, v' \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $T_A(v + v') = T_A(v) + T_A(v')$,

infatti,

$$A(v + v') = AAv + Av',$$

perché la moltiplicazione fra matrici è distributiva rispetto alla somma.

- $T_A(\lambda v) = \lambda T_A(v)$,

infatti

$$A(\lambda v) = \lambda Av$$

perché gli scalari commutano nella moltiplicazone fra matrici.

TRASFORMAZIONI LINEARI

DEFINIZIONE

Una funzione $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice una *trasformazione lineare* se vale, per ogni $v, v' \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(v + v') = T(v) + T(v'), \qquad T(\lambda v) = \lambda T(v),$$

o, equivalentemente se T *rispetta* le combinazioni lineari:

$$T(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \ldots + \lambda_n T(v_n),$$

per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

TRASFORMAZIONI LINEARI

DEFINIZIONE

Una funzione $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si dice una *trasformazione lineare* se vale, per ogni $v, v' \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(v + v') = T(v) + T(v'), \qquad T(\lambda v) = \lambda T(v),$$

o, equivalentemente se T *rispetta* le combinazioni lineari:

$$T(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 T(v_1) + \ldots + \lambda_n T(v_n),$$

per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

Sono esempi di trasformazioni lineari, sia nel piano che nello spazio, le rotazioni intorno all'origine, le simmetrie rispetto ad una retta per l'origine, le proiezioni ortogonali su un piano o su una retta, e più in generale, le trasformazioni T_A, per A matrice.

TRASFORMAZIONI LINEARI E MATRICI

Tutte le trasformazioni lineari sono del tipo T_A, dove A è una matrice:

TEOREMA

Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare e A è la matrice di dimensione $n \times m$ che ha come colonne le coordinate i vettori $T(e_1), \ldots T(e_m)$ allora $T = T_A$.

Dim. Dato $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ abbiamo $v = x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m$. Quindi:

$$Av = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = [T(e_1), \ldots, T(e_m)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1 T(e_1) + \ldots x_m T(e_m) =$$

$$= T(x_1 e_1 + \ldots + x_m e_m) = T(v).$$

Quindi $T(v) = T_A(v)$ per ogni vettore v e $T = T_A$.

Esercizio

Stabilire quali fra le seguenti applicazioni sono trasformazioni lineari; in caso positivo determinare la matrice corrispondente alla trasformazione.

1. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con $F(x, y) = (x + y, x, x - y)$;
2. $F : \mathbb{R}^3 \to R^2$ con $F(x, y, z) = (x + y + z, \sqrt{2}x + 1)$;
3. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $F(x, y) = x + y$;
4. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $F(x, y) = (x + y)^2$.

Proprietà delle Trasformazioni Lineari

TEOREMA

1. Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare allora $T(\vec{0}) = \vec{0}$.
2. Se $w_1, \ldots, w_m$ sono vettori qualsiasi di $\mathbb{R}^n$, esiste un'unica trasformazione lineare
$$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
tale che $T(e_1) = w_1 \ldots T(e_m) = w_m$, dove $e_1, \ldots, e_m$ sono i vettori della base canonica.

Dim. Se A è la matrice che ha per colonne i vettori $w_1, \ldots, w_m$, la traformazione lineare T_A ha le proprietà richieste.

Composizione e Prodotto di Matrici

Se. compongo le applicazioni lineari relative alle matrici A e B ottengo una trasformazione lineare relativa alla matrice BA

$$
\begin{array}{ccccc}
 & A & & B & \\
\mathbb{R}^m & \rightarrow & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^k \\
 & n \times m & & k \times n & \\
x & \mapsto & Ax & \mapsto & B(Ax)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
 & BA & \\
\mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\
 & k \times m & \\
x & \longmapsto & (BA)x
\end{array}
$$

$$T_B \circ T_A = T_{BA}$$

Esercizio

Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare le trasformazioni lineari associate T_A, T_B, calcolare la composizione e verificare che coincide con la trasformazione lineare T_{BA}.

Esercizio

Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

determinare le trasformazioni lineari associate T_A, T_B, calcolare la composizione e verificare che coincide con la trasformazione lineare T_{BA}.

Sol.

$$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \ T_A(x, y, z) = (x + 2y, y - z), \ T_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ T_B(x, y) = (-x, x + 3y),$$

$$T_B \circ T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad T_B \circ T_A(x, y, z) = T_B(x + 2y, y - z) = (-x - 2y, x + 5y - 3z)$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}, BA \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x - 2y \\ x + 5y - 3z \end{bmatrix}$$

Nucleo e Immagine di una trasformazione Lineare

Data una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ possiamo definire due importanti sottospazi: il nucleo di T (detto kernel in inglese) che è un sottospazio del dominio, e l'immagine $Range(T)$ di T, che è un sottospazio del codominio. Se $T = T_A$, per una matrice A di dimensione $n \times m$, questi sottospazi coincidono con quelli già definiti relativamente alla matrice A nelle slides sul Teorema di Rouché-Capelli.

- Il nucleo di T è l'insieme di tutti i vettori del dominio che hanno come immagine il vettore nullo. In simboli

$$Ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^m : T(v) = \vec{0}\}.$$

Nucleo e Immagine di una trasformazione Lineare

Data una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ possiamo definire due importanti sottospazi: il nucleo di T (detto kernel in inglese) che è un sottospazio del dominio, e l'immagine $Range(T)$ di T, che è un sottospazio del codominio. Se $T = T_A$, per una matrice A di dimensione $n \times m$, questi sottospazi coincidono con quelli già definiti relativamente alla matrice A nelle slides sul Teorema di Rouché-Capelli.

- Il nucleo di T è l'insieme di tutti i vettori del dominio che hanno come immagine il vettore nullo. In simboli
$$Ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^m : T(v) = \vec{0}\}.$$
Se A è tale che $T = T_A$, allora $Ker(T) = Ker(A)$.
- L'immagine o "Range" di T, $Range(T)$ è l'insieme di tutti i vettori del codominio che sono immagine di almeno un elemento del dominio:
$$Range(T) = \{T(v) : v \in \mathbb{R}^m\}$$

Nucleo e Immagine di una trasformazione Lineare

Data una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ possiamo definire due importanti sottospazi: il nucleo di T (detto kernel in inglese) che è un sottospazio del dominio, e l'immagine *Range*(T) di T, che è un sottospazio del codominio. Se $T = T_A$, per una matrice A di dimensione $n \times m$, questi sottospazi coincidono con quelli già definiti relativamente alla matrice A nelle slides sul Teorema di Rouché-Capelli.

- Il nucleo di T è l'insieme di tutti i vettori del dominio che hanno come immagine il vettore nullo. In simboli
$$Ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^m : T(v) = \vec{0}\}.$$
Se A è tale che $T = T_A$, allora $Ker(T) = Ker(A)$.
- L'immagine o "Range" di T, *Range*(T) è l'insieme di tutti i vettori del codominio che sono immagine di almeno un elemento del dominio:
$$Range(T) = \{T(v) : v \in \mathbb{R}^m\}$$
Se A è tale che $T = T_A$, allora $Range(T) = Range(A)$.

Esempio 1

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (x - y + 3z, -x)$. Abbiamo

$$(x, y, z) \in Ker(T) \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x - y + 3z, -x) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$$

Esempio 1

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (x - y + 3z, -x)$. Abbiamo

$$(x, y, z) \in Ker(T) \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x - y + 3z, -x) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} y = 3z \\ x = 0 \end{cases}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $Ker(T)$ della trasformazione, è dato da

$$Ker(T) = \{0, 3t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $Ker(T)$ è un sottospazio di dimensione 1, generato ad esempio dal vettore $(0, 3, 1)$.

Esempio 1

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (x - y + 3z, -x)$. Abbiamo

$$(x, y, z) \in Ker(T) \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x - y + 3z, -x) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} y = 3z \\ x = 0 \end{cases}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $Ker(T)$ della trasformazione, è dato da

$$Ker(T) = \{0, 3t, t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $Ker(T)$ è un sottospazio di dimensione 1, generato ad esempio dal vettore $(0, 3, 1)$.
Per quanto riguarda $Range(T)$ si ha:

$$Range(T) = \{(x - y + 3z, -x) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

I vettori $(1, 0) = T(0, 0, 1/3)$ e $(0, 1) = T(-1, 1, 0)$ appartengono a $Range(T)$, quindi $Range(T)$ ha dimensione due e coincide con $\mathbb{R}^2$. La funzione T è quindi suriettiva.

Esempio 2

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (y, x + z, x + z, y)$. Abbiamo

$$(x, y, z) \in Ker(T) \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y, x + z, x + z, y) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Esempio 2

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z) = (y, x+z, x+z, y)$. Abbiamo

$$(x, y, z) \in Ker(T) \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y, x+z, x+z, y) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -k \qquad \text{per } k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $Ker(T)$ della trasformazione, è dato da

$$Ker(T) = \{(-k, 0, k) \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $Ker(T)$ è un sottospazio di dimensione 1, una retta, generata ad esempio dal vettore $(-1, 0, 1)$.

Esempio 2

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da $T(x,y,z) = (y, x+z, x+z, y)$. Abbiamo

$$(x,y,z) \in Ker(T) \Leftrightarrow T(x,y,z) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow (y, x+z, x+z, y) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = -k \qquad \text{per } k \in \mathbb{R} \\ z = k \end{cases}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $Ker(T)$ della trasformazione, è dato da

$$Ker(T) = \{(-k, 0, k) \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $Ker(T)$ è un sottospazio di dimensione 1, una retta, generata ad esempio dal vettore $(-1, 0, 1)$.
Per quanto riguarda $Range(T)$ si ha:

$$Range(T) = \{T(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{(y, x+z, x+z, y) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

I vettori $(1,0,0,1)$ e $(0,1,1,0)$ appartengono a $Range(T)$, sono indipendenti e generano l'immagine; quindi $Range(T)$ ha dimensione due.

Esempio 3

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z, w) = (y + w, x + z)$. Abbiamo

$$(x, y, z, w) \in Ker(T) \Leftrightarrow T(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y + w, x + z) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + w = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Esempio 3

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z, w) = (y + w, x + z)$. Abbiamo

$$(x, y, z, w) \in Ker(T) \Leftrightarrow T(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y + w, x + z) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + w = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} x = -h \\ y = -k \\ z = h \\ w = k \end{cases} \quad \text{per } h, k \in \mathbb{R}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $Ker(T)$ della trasformazione, è dato da

$$Ker(T) = \{(-h, -k, h, k) \in \mathbb{R}^4 : h, k \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $Ker(T)$ è un sottospazio di dimensione 2 generato ad esempio dal vettori $(-1, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 1)$.

Esempio 3

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da $T(x, y, z, w) = (y + w, x + z)$. Abbiamo

$$(x, y, z, w) \in Ker(T) \Leftrightarrow T(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (y + w, x + z) = (0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + w = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} x = -h \\ y = -k \\ z = h \\ w = k \end{cases} \quad \text{per } h, k \in \mathbb{R}$$

quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, che è anche il nucleo $Ker(T)$ della trasformazione, è dato da

$$Ker(T) = \{(-h, -k, h, k) \in \mathbb{R}^4 : h, k \in \mathbb{R}\}.$$

Quindi $Ker(T)$ è un sottospazio di dimensione 2 generato ad esempio dal vettori $(-1, 0, 1, 0)$, $(0, -1, 0, 1)$.
Per quanto riguarda $Range(T)$ si ha:

$$Range(T) = \{T(x, y, z, w) : x, y, z, w \in \mathbb{R}\} = \{(y + w, x + z) : x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$$

I vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$ appartengono a $Range(T)$, sono indipendenti e generano l'immagine; quindi $Range(T)$ ha dimensione due e coincide con tutto $\mathbb{R}^2$.

Iniettività di una Trasformazione Lineare

TEOREMA

Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ $Ker(T) = \{\vec{0}\}$.

Iniettività di una Trasformazione Lineare

TEOREMA

Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ $Ker(T) = \{\vec{0}\}$.

Dim

- Se T è iniettiva, un solo vettore può avere come immagine $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$; poiché vale $T(\vec{0}) = \vec{0}$, questo vettore è $\vec{0}$ e, visto che tutti i vettori di $Ker(T)$ hanno immagine $\vec{0}$, otteniamo $Ker(T) = \{\vec{0}\}$.

Iniettività di una Trasformazione Lineare

TEOREMA

Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva $\Leftrightarrow Ker(T) = \{\vec{0}\}$.

Dim

- Se T è iniettiva, un solo vettore può avere come immagine $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$; poiché vale $T(\vec{0}) = \vec{0}$, questo vettore è $\vec{0}$ e, visto che tutti i vettori di $Ker(T)$ hanno immagine $\vec{0}$, otteniamo $Ker(T) = \{\vec{0}\}$.

Viceversa, se $Ker(T) = \{\vec{0}\}$, supponiamo che $T(v) = T(v')$: allora $T(v) - T(v') = T(v - v') = \vec{0}$ e $v - v' \in Ker(T) = \{\vec{0}\}$. Quindi $v - v' = \vec{0}$ e $v = v'$.
Quindi T è iniettiva.

Suriettività di una Trasformazione Lineare

Dalla definizione di suriettività e da quanto visto sulle matrici segue che

LEMMA

Se $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è lineare allora:

- T è suriettiva $\Leftrightarrow dim(Range(T)) = n$.
- Se A è la matrice che rappresenta T, ovvero se $T = T_A$, i vettori colonna di A generano $Range(T)$ e vale:
$$T \text{ è suriettiva} \Leftrightarrow rg(A) = n.$$

Il prossimo teorema lega la dimensione del $Ker(T)$ a quella del $Range(T)$ e del dominio.

TEOREMA

Data una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vale:

$$dim(Ker(T)) + dim(Range(T)) = m$$

Dim Segue dal corrispondente risultato sulle matrici dimostrato nelle slides sul Teorema di Rouché-Capelli. Sia A una matrice tale che $T = T_A$ (sappiamo che tale matrice esiste perché T è lineare). Si ha che $Ker(T) = Ker(A)$ e $Range(T) = Range(A)$ ed il teorema segue dal teorema analogo dimostrato per le matrici.

Inoltre:

COROLLARIO

Sia T una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e A la matrice che la rappresenta (ovvero $T = T_A$). Si ha:

$$T \text{ è iniettiva se e solo se } rg(A) = m.$$

Dim. Dal precedente teorema vediamo che $rg(A) = m$ se e solo se $dim(Ker(T)) = 0$ se e solo se (vedi teorema su iniettività e $Ker(T)$) T è iniettiva.

Il teorema precedente lega la dimensione del *Ker*(T) a quella del *Range*(T) e del dominio ed è molto utile per velocizzare la risoluzione di un esercizio. Se abbiamo già calcolato la dimensione del nucleo *Ker*(T) di una trasformazione, abbiamo automaticamente la dimensione dell'immagine e viceversa. Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ è definita da $T(x, y, z) = (x + y, x + y, x + y, x + y)$ allora l'immagine ha dimensione 1 (è generata dal vettore $(1, 1, 1, 1)$) e quindi la dimensione del *Ker*(T) è $3 - 1 = 2$.

Il teorema precedente lega la dimensione del $Ker(T)$ a quella del $Range(T)$ e del dominio ed è molto utile per velocizzare la risoluzione di un esercizio. Se abbiamo già calcolato la dimensione del nucleo $Ker(T)$ di una trasformazione, abbiamo automaticamente la dimensione dell'immagine e viceversa. Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ è definita da $T(x, y, z) = (x + y, x + y, x + y, x + y)$ allora l'immagine ha dimensione 1 (è generata dal vettore $(1, 1, 1, 1)$) e quindi la dimensione del $Ker(T)$ è $3 - 1 = 2$.
Un ulteriore corollario del teorema precedente ci dice che gli spazi vettoriali hanno un comportamento simile a quello degli insiemi finiti: se X è un insieme finito, una funzione da X a X è iniettiva se e solo se è suriettiva, proprietà che non vale in generale per gli insiemi infiniti. Nel caso di spazi vettoriali si ha:

TEOREMA

Una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (quindi con dominio e codominio della stessa dimensione) è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Dimostrazione $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ è iniettiva $\Leftrightarrow$ $dim(Ker(T)) = 0$ $\Leftrightarrow$ $dim(Range(T)) = m$ $\Leftrightarrow$ $Range(T) = \mathbb{R}^m$ $\Leftrightarrow$ T è suriettiva.