

## ESERCIZI SULLE FUNZIONI

- (1) Considerare la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  definita da  $f(a) = 3a - 1$ .  
 Determinare gli insiemi  $f(\{0, 1, 2\})$ ,  $f^{-1}(\{0\})$ ,  $f^{-1}(\{-2, -1, 5\})$ .  
 Determinare l'immagine  $Im(f)$  della funzione  $f$ .  
 Determinare se  $f$  è iniettiva o suriettiva.
- (2) Sia  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  la funzione definita da  $f(z) = z^2 - 1$ .  
 Determinare gli insiemi  $f(\{0, 1, 2\})$ ,  $f^{-1}(\{0, 1\})$ ,  
 $f^{-1}(\{z \in \mathbb{Z} : z < 0\})$ .  
 Determinare se  $f$  è iniettiva o suriettiva.
- (3) Considerare la funzione  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definita da  $f(a, b) = a - b$ .  
 Determinare  $f(0, 1)$  e gli insiemi  $f(\{(1, 1), (2, 3)\})$ ,  $f^{-1}(2)$ ,  $f^{-1}(\{0, 1\})$ ,  $f^{-1}(\mathbb{N})$ .  
 Determinare se  $f$  è iniettiva o suriettiva.
- (4) Considerare la funzione  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  definita da  
 $f(a, b) = (-b, a)$ .  
 Determinare  $f(0, 1)$  e gli insiemi  $f(\{(1, 1), (2, 3)\})$ ,  $f^{-1}(2, -1)$ ,  $f^{-1}(\{(0, 1), (1, 0)\})$ .  
 Determinare se  $f$  è iniettiva o suriettiva.
- (5) Sia  $A$  l'insieme delle successioni  $a_0, a_1, a_2, \dots$  di numeri naturali ed  
 $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  la funzione definita da  $f(a_0, a_1, a_2, \dots) = a_0 + a_1$ .  
 Determinare  $f(1, 2, 3, 4, 4, 4, \dots)$  ed  $f^{-1}(1)$ .  
 Determinare se  $f$  è iniettiva o suriettiva.
- (6) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\mathbb{R}$  è l'insieme dei numeri reali,  
 definite da  $f(x) = 3x^3$  e  $g(x) = x + 4$ .  
 Determinare se le funzioni  $f, g$  sono iniettive o suriettive.  
 Determinare le funzioni  $f \circ g$  e  $g \circ f$ .
- (7) Sia  $\mathbb{N}$  l'insieme dei numeri naturali,  $\mathbb{Q}$  l'insieme dei numeri razionali  
 e  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  la funzione definita da  $f(n) = \frac{1}{n+1}$ .  
 Determinare se  $f$  è iniettiva o suriettiva.
- (8) Sia  $\mathbb{N}$  l'insieme dei numeri naturali,  $\mathbb{Q}$  l'insieme dei numeri razionali  
 e  $f$  la funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$  definita da
 
$$f(n) = \frac{n}{n+1}.$$
 Determinare  $f^{-1}(\mathbb{N})$ .  
 Determinare se è suriettiva.  
 Dimostrare che  $f$  è iniettiva (suggerimento: dimostrare che per ogni  
 $n \in \mathbb{N}$  vale  $f(n) < f(n+1)$  e dedurre che  $f$  è iniettiva).
- (9) Sia  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la funzione definita da
 
$$f(n, m) = nm.$$
 Determina l'insieme  $f^{-1}(k)$  per  $k = 0, k = 1, k = 5, k = 6$ .  
 - Per quali numeri naturali  $k$  la cardinalità dell'insieme  $f^{-1}(k)$  è  
 uguale a 1?

- Per quali numeri naturali  $k$  la cardinalità dell'insieme  $f^{-1}(k)$  è uguale a 2?
- Per quali numeri naturali  $k$  la cardinalità dell'insieme  $f^{-1}(k)$  è infinita?