COSA SIGNIFICA DIAGONALIZZARE?

In questo capitolo ci occuperemo solo di trasformazioni lineari in cui il dominio coincide con il codominio: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Questi vengono chiamati anche *operatori* lineari.

- Se T è un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e A è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori $T(e_1), \dots, T(e_n)$ (rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_n =< e_1, \dots, e_n >$), allora la matrice A ci permette di calcolare l'operatore T, perché:

$$A||v||^{\mathcal{E}_n} = ||T(v)||^{\mathcal{E}_n}$$

COSA SIGNIFICA DIAGONALIZZARE?

In questo capitolo ci occuperemo solo di trasformazioni lineari in cui il dominio coincide con il codominio: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Questi vengono chiamati anche *operatori* lineari.

- Se T è un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, e A è la matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori $T(e_1), \dots, T(e_n)$ (rispetto alla base canonica $\mathcal{E}_n =< e_1, \dots, e_n >$), allora la matrice A ci permette di calcolare l'operatore T, perché:
$$A||v||^{\mathcal{E}_n} = ||T(v)||^{\mathcal{E}_n}$$
- Se la matrice A è "semplice", riusciremo a moltiplicarla per $||v||^{\mathcal{E}_n}$ in modo efficiente. In particolare, se la matrice A è diagonale, cioè se tutti i coefficienti al di fuori della diagonale principale $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$ sono nulli e se $v = (x_1, \dots, x_n)$ allora
$$A||v||^{\mathcal{E}_n} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 \\ a_{2,2}x_2 \\ \vdots \\ a_{n,n}x_n \end{bmatrix} = ||T(v)||^{\mathcal{E}_n}$$
e il calcolo di $T(v)$ risulta particolarmente semplice.

- Non è detto però che la matrice di T rispetto alla base canonica sia diagonale. Fortunatamente, $\mathbb{R}^n$ ha infinite basi.
- Se $B = [v_1, \dots, v_n]$ è una base di $\mathbb{R}^n$, definendo la matrice $M_B(T)$ come

$$M_B(T) = [||T(v_1)||^B, \dots, ||T(v_n)||^B] \text{ si avrà } M_B(T)||v||^B = ||T(v)||^B.$$

- Non è detto però che la matrice di T rispetto alla base canonica sia diagonale. Fortunatamente, $\mathbb{R}^n$ ha infinite basi.
- Se $B = [v_1, \ldots, v_n]$ è una base di $\mathbb{R}^n$, definendo la matrice $M_B(T)$ come

$$M_B(T) = [||T(v_1)||^B, \ldots, ||T(v_n)||^B] \text{ si avrà } M_B(T)||v||^B = ||T(v)||^B.$$

  Se la matrice $M_B(T)$ è una matrice diagonale, allora il calcolo delle coordinate di $T(v)$ nella base B risulta particolarmente semplice ed è conveniente utilizzare la base B quando si deve calcolare l'operatore T.

- Non è detto però che la matrice di T rispetto alla base canonica sia diagonale. Fortunatamente, $\mathbb{R}^n$ ha infinite basi.
- Se $B = [v_1, \dots, v_n]$ è una base di $\mathbb{R}^n$, definendo la matrice $M_B(T)$ come

$$M_B(T) = [||T(v_1)||^B, \dots, ||T(v_n)||^B] \text{ si avrà } M_B(T)||v||^B = ||T(v)||^B.$$

Se la matrice $M_B(T)$ è una matrice diagonale, allora il calcolo delle coordinate di $T(v)$ nella base B risulta particolarmente semplice ed è conveniente utilizzare la base B quando si deve calcolare l'operatore T.

Definition

Un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice *diagonalizzabile* se esiste una base B di $\mathbb{R}^n$ tale che $M_B(T)$ è diagonale.

- Non è detto però che la matrice di T rispetto alla base canonica sia diagonale. Fortunatamente, $\mathbb{R}^n$ ha infinite basi.
- Se $B = [v_1, \ldots, v_n]$ è una base di $\mathbb{R}^n$, definendo la matrice $M_B(T)$ come

$$M_B(T) = [||T(v_1)||^B, \ldots, ||T(v_n)||^B] \text{ si avrà } M_B(T)||v||^B = ||T(v)||^B.$$

Se la matrice $M_B(T)$ è una matrice diagonale, allora il calcolo delle coordinate di $T(v)$ nella base B risulta particolarmente semplice ed è conveniente utilizzare la base B quando si deve calcolare l'operatore T.

Definition

Un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice *diagonalizzabile* se esiste una base B di $\mathbb{R}^n$ tale che $M_B(T)$ è diagonale.

Quindi: le trasformazioni diagonalizzabili hanno la possibilità di essere descritte da una matrice diagonale, a patto di ammettere un cambiamento di base (a meno che non sia già diagonale la matrice di T rispetto alla base canonica). Diagonalizzare un operatore lineare (o la sua matrice) significa trovare un base in cui la matrice che rappresenta T sia diagonale.

ESEMPIO

Consideriamo un operatore lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x, y) = (x + y, -y)$. La sua matrice rispetto alla base canonica per dominio e codominio non è diagonale:

$$M_{\mathcal{E}_2}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Consideriamo un operatore lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x, y) = (x + y, -y)$. La sua matrice rispetto alla base canonica per dominio e codominio non è diagonale:

$$M_{\mathcal{E}_2}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se invece di considerare la base canonica scegliamo la base $B = [v_1, v_2]$ dove $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ abbiamo:

$$T(v_1) = \begin{bmatrix} 1, \\ 0 \end{bmatrix} = v_1, ||T(v_1)||^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T(v_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -v_2, \; ||T(v_2)||^B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che la matrice di T rispetto alla base B è diagonale e

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \text{ Se } ||v||^B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ allora } ||T(v)||^B = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}$$

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

La situazione ideale è quindi quella in cui esiste una base B per cui $M_B(T)$ è una matrice diagonale.

Notiamo che, se $B = [v_1, \ldots, v_n]$ e la prima colonna di $M_B(T)$ è il vettore $\begin{bmatrix} \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ allora vale $T(v_1) = \lambda v_1$. Infatti, per le proprietà di $M_B(T)$ si ha:

$$||T(v_1)||^B = M_B(T)||v_1||^B = M_B(T)e_1 = \text{prima colonna di } M_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda e_1 = \lambda ||v_1||^B = ||\lambda v_1||^B$$

da cui segue $T(v_1) = \lambda v_1$.

Analogamente, se l'i-esima colonna di $M_B(T)$ è il vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ (dove λ si trova nella i-esima posizione del vettore), allora vale $T(v_i) = \lambda v_i$.

Viceversa, se $T(v_i) = \lambda v_i$ allora l'i-esima colonna di $M_B(T)$ è il vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quindi $M_B(T)$ è diagonale se e solo se esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non necessariamente distinti) tali che $T(v_i) = \lambda_i v_i$.

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

La possibilità di diagonalizzare un operatore T è legata all'esistenza di vettori speciali, su cui T agisce senza cambiare la direzione (dove la direzione di $v \neq 0$ è la retta $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$).

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

La possibilità di diagonalizzare un operatore T è legata all'esistenza di vettori speciali, su cui T agisce senza cambiare la direzione (dove la direzione di $v \neq 0$ è la retta $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$).

DEFINIZIONE

Un vettore non nullo v si dice un autovettore dell'operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se $T(v)$ ha la stessa direzione di v ovvero se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v$. Se questo accade, il numero λ si dice autovalore di v.

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

La possibilità di diagonalizzare un operatore T è legata all'esistenza di vettori speciali, su cui T agisce senza cambiare la direzione (dove la direzione di $v \neq 0$ è la retta $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$).

DEFINIZIONE

Un vettore non nullo v si dice un autovettore dell'operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se $T(v)$ ha la stessa direzione di v ovvero se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v$. Se questo accade, il numero λ si dice autovalore di v.

(Nota bene: un autovettore è, per definizione, un vettore non nullo; un autovalore, invece, può essere uguale a zero).

AUTOVETTORI E AUTOVALORI

La possibilità di diagonalizzare un operatore T è legata all'esistenza di vettori speciali, su cui T agisce senza cambiare la direzione (dove la direzione di $v \neq 0$ è la retta $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$).

DEFINIZIONE

Un vettore non nullo v si dice un autovettore dell'operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se $T(v)$ ha la stessa direzione di v ovvero se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v$. Se questo accade, il numero λ si dice autovalore di v.

(Nota bene: un autovettore è, per definizione, un vettore non nullo; un autovalore, invece, può essere uguale a zero).

L'insieme degli autovalori di un operatore lineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si chiama

lo SPETTRO di T.

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $T(x, y) = (0, 2y)$. Il vettore $(1, 0)$ è un autovettore per T con autovalore 0. Infatti $T(1, 0) = (0, 0) = 0(1, 0)$.
Il vettore $(0, 1)$, invece, è un autovettore per T con autovalore 2. Infatti $T(0, 1) = (0, 2) = 2(0, 1)$.
In questo esempio, quindi, lo spettro di T è l'insieme $\{0, 1\}$

CARATTERIZZAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DIAGONALIZZABILI

TEOREMA

Dato un operatore $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e una base $B = [v_1, \ldots, v_n]$ allora

$$M_B(T) \text{ è diagonale } \Leftrightarrow v_1, \ldots, v_n \text{ sono autovettori di } T.$$

Quindi T è diagonalizzabile se esiste una base B di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori di T.

CARATTERIZZAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DIAGONALIZZABILI

TEOREMA

Dato un operatore $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e una base $B = [v_1, \dots, v_n]$ allora

$$M_B(T) \text{ è diagonale } \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n \text{ sono autovettori di } T.$$

Quindi T è diagonalizzabile se esiste una base B di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori di T.

Dimostrazione Se $B = [v_1, \dots, v_n]$ è una base di autovettori di T, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con $T(v_i) = \lambda_i v_i$ e $M_B(T)$ è diagonale:

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

CARATTERIZZAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI DIAGONALIZZABILI

TEOREMA

Dato un operatore $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e una base $B = [v_1, \dots, v_n]$ allora

$$M_B(T) \text{ è diagonale } \Leftrightarrow v_1, \dots, v_n \text{ sono autovettori di } T.$$

Quindi T è diagonalizzabile se esiste una base B di $\mathbb{R}^n$ composta da autovettori di T.

Dimostrazione Se $B = [v_1, \dots, v_n]$ è una base di autovettori di T, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ con $T(v_i) = \lambda_i v_i$ e $M_B(T)$ è diagonale:

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Viceversa, se $M_B(T)$ è diagonale, allora $M_B^B(T) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, quindi

$T(v_1) = \lambda_1 v_1, \dots, T(v_n) = \lambda_n v_n$ e $v_1, \dots, v_n$ sono autovettori.

ESEMPIO

Negli esempi precedenti abbiamo considerato

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, -y).$$

ESEMPIO

Negli esempi precedenti abbiamo considerato

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, -y).$$

La sua matrice rispetto alla base canonica per dominio e codominio non è diagonale perché la base canonica non è una base di autovettori:

ESEMPIO

Negli esempi precedenti abbiamo considerato

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, -y).$$

La sua matrice rispetto alla base canonica per dominio e codominio non è diagonale perché la base canonica non è una base di autovettori: ad esempio, $T(e_2) = (1, -1)$ non appartiene alla retta generata da $e_2 = \{ke_2 : k \in \mathbb{R}\}$.

ESEMPIO

Negli esempi precedenti abbiamo considerato

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, -y).$$

La sua matrice rispetto alla base canonica per dominio e codominio non è diagonale perché la base canonica non è una base di autovettori: ad esempio, $T(e_2) = (1, -1)$ non appartiene alla retta generata da $e_2 = \{ke_2 : k \in \mathbb{R}\}$.
Se invece di considerare la base canonica scegliamo la base $B = [v_1, v_2]$ dove $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ abbiamo:

$$M_B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Negli esempi precedenti abbiamo considerato

$$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ T(x,y)=(x+y,-y).$$

La sua matrice rispetto alla base canonica per dominio e codominio non è diagonale perché la base canonica non è una base di autovettori: ad esempio, $T(e_2)=(1,-1)$ non appartiene alla retta generata da $e_2=\{ke_2 : k\in\mathbb{R}\}$.
Se invece di considerare la base canonica scegliamo la base $B=[v_1,v_2]$ dove $v_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ e $v_2=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$ abbiamo:

$$M_B(T)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$$

ed infatti la base $B=[v_1,v_2]$ è formata da autovettori, $T(v_1)=v_1$, $T(v_2)=-v_2$.
Per l'operatore lineare $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definita da $T(x,y)=(0,2y)$ la base canonica $\mathcal{E}_2=[e_1,e_2]$ è formata da autovettori: $T(1,0)=(0,0)=0(1,0)$, $T(0,1)=(0,2)=2(0,1)$ ed infatti la matrice di T rispetto alla base canonica è diagonale.

ESEMPIO

Non tutte le trasformazioni sono diagonalizzabili.
Consideriamo la rotazione antioraria di $\pi/2$ radianti attorno all'origine in $\mathbb{R}^2$.

ESEMPIO

Non tutte le trasformazioni sono diagonalizzabili.
Consideriamo la rotazione antioraria di $\pi/2$ radianti attorno all'origine in $\mathbb{R}^2$.
Abbiamo $T(e_1) = (0, 1)$, $T(e_2) = (-1, 0)$ e la matrice A rispetto alla base canonica è:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Non tutte le trasformazioni sono diagonalizzabili.
Consideriamo la rotazione antioraria di $\pi/2$ radianti attorno all'origine in $\mathbb{R}^2$.
Abbiamo $T(e_1) = (0, 1)$, $T(e_2) = (-1, 0)$ e la matrice A rispetto alla base canonica è:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostriamo che T non è diagonalizzabile, ovvero che non esiste una base formata da autovettori, anzi , non esiste alcun autovettore!
Infatti nessun vettore non nullo ha la stessa direzione del vettore stesso ruotato di $\pi/2$, quindi T non è diagonalizzabile.

AUTOSPAZI

Fissato un autovalore λ_0, l'insieme dei suoi autovettori, a cui aggiungiamo il vettore nullo, si chiama autospazio di λ_0 e lo denotiamo con il nome Aut_{λ_0}:

$$Aut_{\lambda_0} = \{v \in \mathbb{R} : v \text{ è un autovettore di } T \text{ con autovalore } \lambda_0\} \cup \{\vec{0}\} = \{v \in \mathbb{R} : T(v) = \lambda_0 v\}$$

AUTOSPAZI

Fissato un autovalore λ_0, l'insieme dei suoi autovettori, a cui aggiungiamo il vettore nullo, si chiama autospazio di λ_0 e lo denotiamo con il nome Aut_{λ_0}:

$$Aut_{\lambda_0} = \{v \in \mathbb{R} : v \text{ è un autovettore di } T \text{ con autovalore } \lambda_0\} \cup \{\vec{0}\} = \{v \in \mathbb{R} : T(v) = \lambda_0 v\}$$

LEMMA

L'insieme degli autovettori Aut_{λ_0} per un dato autovalore è un sottospazio e coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$(A - \lambda_0 I)\vec{x} = \vec{0}$$

dove A è la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica e I è la matrice identità $n \times n$.

AUTOSPAZI

Fissato un autovalore λ_0, l'insieme dei suoi autovettori, a cui aggiungiamo il vettore nullo, si chiama autospazio di λ_0 e lo denotiamo con il nome Aut_{λ_0}:

$$Aut_{\lambda_0} = \{v \in \mathbb{R} : v \text{ è un autovettore di } T \text{ con autovalore } \lambda_0\} \cup \{\vec{0}\} = \{v \in \mathbb{R} : T(v) = \lambda_0 v\}$$

LEMMA

L'insieme degli autovettori Aut_{λ_0} per un dato autovalore è un sottospazio e coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$(A - \lambda_0 I)\vec{x} = \vec{0}$$

dove A è la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica e I è la matrice identità $n \times n$.

Dimostrazione Abbiamo

$$Av = \lambda_0 v, \Leftrightarrow (Av - \lambda_0 v) = \vec{0}, \Leftrightarrow (A - \lambda_0 I)v = \vec{0}$$

Quindi v è un autovettore per λ_0 se e solo se $v \neq \vec{0}$ e v è soluzione del sistema $(A - \lambda_0 I)\vec{x} = \vec{0}$.

ESEMPIO

Facciamo vedere che 2 è un autovalore per l'operatore $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, z)$ trovando l'autospazio V_2 (e mostrando che contiene vettori non nulli).

ESEMPIO

Facciamo vedere che 2 è un autovalore per l'operatore $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, z)$ trovando l'autospazio V_2 (e mostrando che contiene vettori non nulli).
La matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Facciamo vedere che 2 è un autovalore per l'operatore $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, z)$ trovando l'autospazio V_2 (e mostrando che contiene vettori non nulli).
La matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $(A - 2I)$ è

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Facciamo vedere che 2 è un autovalore per l'operatore $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, z)$ trovando l'autospazio V_2 (e mostrando che contiene vettori non nulli).
La matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $(A - 2I)$ è

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ed il sistema per trovare l'autospazio è

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ovvero } \begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

Risolvendolo, si ottiene l'autospazio $Aut_{\lambda_0} = \{(h, k, 0) : h, k \in \mathbb{R}\}$

CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER LA DIAGONALIZZABILITA'

TEOREMA

Un operatore ineare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se, detti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di T, $Aut_{\lambda_1}, Aut_{\lambda_2} \ldots, Aut_{\lambda_k}$ i relativi autospazi e $d_1, \ldots, d_k$ le loro dimensioni, vale:

$$d_1 + \ldots + d_k = n$$

(dove n è la dimensione del dominio e del codominio di T). Se questa condizione è soddisfatta, si può costruire una base di autovettori per T scegliendo d_1 vettori indipendenti in Aut_{λ_1}, d_2 vettori indipendenti in Aut_{λ_2} , ..., d_k vettori indipendenti in Aut_{λ_k}.

RICERCA DEGLI AUTOVALORI

Non è difficile vedere che gli autovalori per un operatore lineare coincidono con le radici del cosidetto polinomio caratteristico:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I)$$

Infatti, ricordando le caratteristiche dei sistemi che hanno lo stesso numero di equazioni e incongnite si ottiene:

λ è un autovalore di $A \Leftrightarrow$ esiste un autovettore di A con autovalore $\lambda \Leftrightarrow$ il sistema $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ ha una soluzione $\vec{v} \neq \vec{0} \Leftrightarrow det(A - \lambda I) = 0$.

ESEMPIO

Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, 2z)$ la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, 2z)$ la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = det(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = det(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^3$$

ESEMPIO

Ad esempio, se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, 2z)$ la matrice che corrisponde a T rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ed il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = det(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}) = det(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)^3$$

L'unico autovalore di T è quindi $\lambda = 2$.
Per calcolare l'autospazio V_2, dobbiamo risolvere il sistema $(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$, ovvero

$$\begin{cases} z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di tale sistema sono l'autospazio $Aut_2 = \{(h, k, 0) : h, k \in \mathbb{R}\}$ che è uno spazio di dimensione 2. Quindi non è possibile trovare una base di autovettori e T non è diagonalizzabile.

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore $T(x, y, z) = (2y, 3y - x, 2z)$ che ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore $T(x,y,z) = (2y, 3y-x, 2z)$ che ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il poilinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+2) =$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore $T(x, y, z) = (2y, 3y - x, 2z)$ che ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il poilinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(-\lambda(3 - \lambda) + 2) =$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

Le radici di questo polinomio, ovvero $\lambda = 1, 2$ sono gli autovalori di T.

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore $T(x, y, z) = (2y, 3y - x, 2z)$ che ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il poilinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(-\lambda(3 - \lambda) + 2) =$$

$$(2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$$

Le radici di questo polinomio, ovvero $\lambda = 1, 2$ sono gli autovalori di T. L'autospazio Aut_1 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A - I = \vec{0}$ ovvero

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore $T(x, y, z) = (2y, 3y - x, 2z)$ che ha matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Il poilinomio caratteristico è:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(\begin{bmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda(3-\lambda)+2) =$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Le radici di questo polinomio, ovvero $\lambda = 1, 2$ sono gli autovalori di T. L'autospazio Aut_1 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A - I = \vec{0}$ ovvero

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

quindi $Aut_1 = \{2k, k, 0) : k \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1, mentre l'autospazio Aut_2 è l'insieme delle soluzioni del sistema $A - 2I = \vec{0}$ ovvero

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

quindi $Aut_2 = \{k, k, h) : k, h \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 2. (SEGUE)

ESEMPIO

Siccome $dim(Aut_1) + dim(Aut_2) = 3$, l'operatore lineare T è diagonalizzabile e una sua base di autovettori è $B = [v_1, v_2, v_3 >$ dove

$$v_1 = (2, 1, 0) \in Aut_1, \; v_2 = (1, 1, 0) \in Aut_2, \; v_3 = (0, 0, 1) \in Aut_2.$$

ESEMPIO

Siccome $dim(Aut_1) + dim(Aut_2) = 3$, l'operatore lineare T è diagonalizzabile e una sua base di autovettori è $B = [v_1, v_2, v_3 >$ dove

$$v_1 = (2, 1, 0) \in Aut_1, \; v_2 = (1, 1, 0) \in Aut_2, \; v_3 = (0, 0, 1) \in Aut_2.$$

La matrice diagonale che corrisponde a T in questa base è:

$$M_B^B(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$