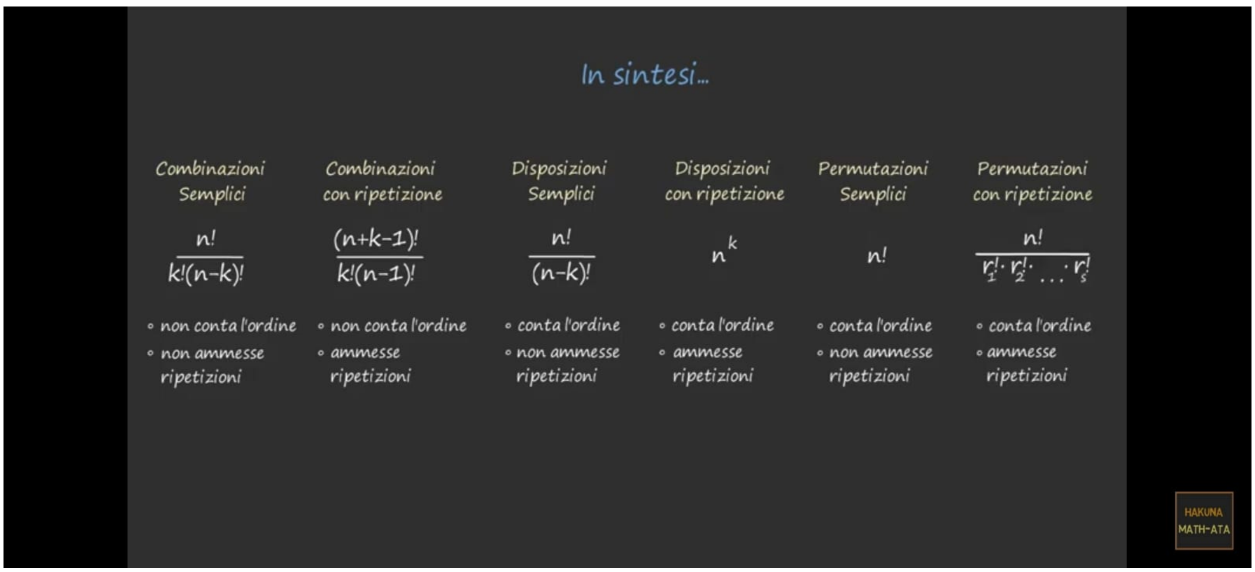
FORMULARIO 2

Damiano Fumagalli

2022-11-24

COMBINATORIA



DISPOSIZIONI

```
Omega = 1:10
```

NON CONTA L'ORDINE

SENZA RIPETIZIONI

Dato un insieme $A, |A| = n$ si vogliono disporre gli elementi senza ripetizioni in un insieme $B, |B| = k \leq n$

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

RIPETIZIONI

$$D^r_{n,k} = n * ... * n = n^k$$

PERMUTAZIONI

SENZA RIPETIZIONE

$$k = nP_n = Dn, n = n(n-1)...(n-n+1) = n(n-1)...1 = n!$$

```
sample(Omega,length(Omega))
```

```
##  [1] 10  5  7  6  4  3  1  8  2  9
```

RIPETIZIONE DI ELEMENTI

$$P^*_{n,k,h,...,p} = \frac{n!}{k!h!...p!}$$

COMBINAZIONI

NON CONTA L'ORDINE

SENZA RIPETIZIONI

Coincide con il numero di sottoinsiemi aventi k elementi partendo da n

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

```
choose(5,2) # = 5!/2!3! = 5*4/2 = 10
```

```
## [1] 10
```

RIPETIZIONE

$$\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

CAP4) FORMULARIO PROBABILITÀ

INSIEMISTICA

SPAZIO FONDAMENTALE

$$\Omega$$

EVENTO

$$A \subseteq \Omega$$

COMPLEMENTARE

$$A^C = \Omega \setminus A$$

UNIONE

$$A \cup B$$

INTERSEZIONE

$$A \cap B$$

DIFFERENZA

$$A \setminus B$$

PROPRIETÀ

DISGIUNZIONE

$$A \cap B = \emptyset$$

IMPLICAZIONE

$$A \subseteq B = A \implies B$$

EQUIVALENZA

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$$

ASSIOMI KOLMOGOROV

NON NEGATIVITÀ

$$P(A) \geq 0$$

NORMALIZZAZIONE

$$P(\Omega) = 1 =$$

ADDITTIVITÀ

$$A = \{A_1, ..., A_n\} : i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset P(\bigcup A_i) = \sum P(A_i)$$

ADDITTIVITÀ SEMPLICE

$$A \cap B = \emptyset \implies P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

COMPLEMENTARE

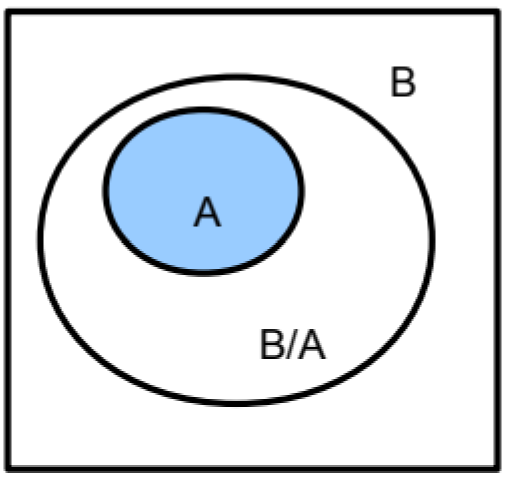
$$A, A^c \subseteq \Omega : A \cap A^c = \emptyset P(A) = 1 - P(A^c) 1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

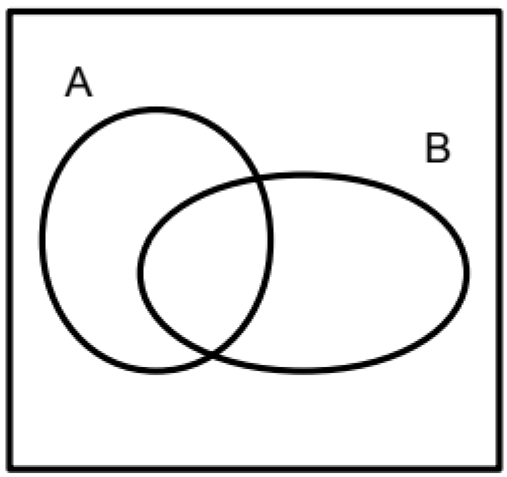
IMPLICAZIONE

$$A \subseteq B P(A) \leq P(B) P(B \setminus A) = P(B) - P(A) P(B) = P((B \setminus A) \cup A) = P(B \setminus A) + P(A) (B \setminus A) \cap A = \emptyset$$

UNIONE

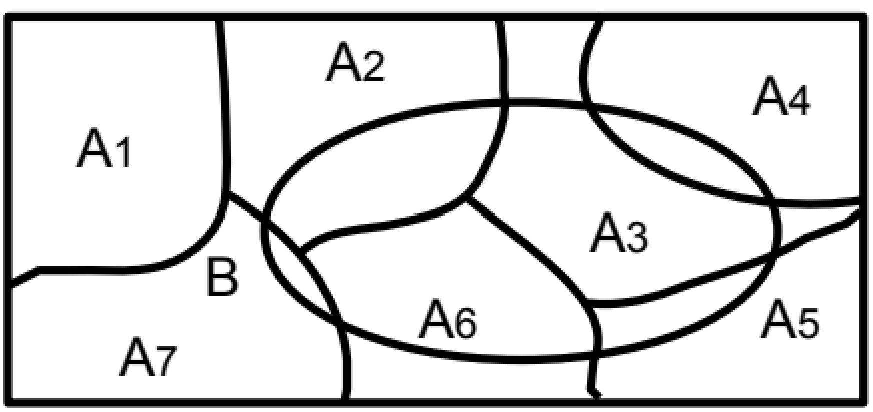
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) A \cup B = (A \cap B) \cup [B \setminus (A \cap B)] \cup [A \setminus (A \cap B)] P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A) - P($$





PARTIZIONI

$$B, A = \{A_1, ..., A_n\} P(B) = \sum P(B \cap A_i) P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap \bigcup A_i) = P(\bigcup (B \cap A_i)) = \sum P(B \cap A_i)$$



PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

MOLTIPLICAZIONE

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A) : P(A) > 0$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1)$$

TOTALE

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i)$$

EVENTI INDIPENDENTI

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

CONDIZIONAMENTO

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

COMPLEMENTARE

Se A, B sono **indipendenti** allora lo sono anche

$$A, B^c A^c, B A^c, B^c$$

MULTIVARIABILI

Se A_1, A_2, A_3 sono indipendenti

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1) = P(A_2), P(A_3|A_2 \cap A_1) = P(A_3)P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P($$

UNIONE

$$P(B) = P(A_1 \cap ... \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

TEOREMA BAYES

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

$$P(B) = \sum P(A_i)P(B|A_i)$$

VARIABILI CASUALI

DISCRETE

DENSITÀ

$$f_X(x) = \begin{cases} P(X = x_i) = pi, & \text{if } x \in S_X \\ 0 \end{cases}$$

RIPARTIZIONE

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i:x_i \leq x} pi$$

$$pi = f_X(x_i) = F_x(x_i) - F_x(x_{i-1})$$

CONTINUE

RIPARTIZIONE

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

CAP 5) VARIABILI CASUALI

FUNZIONE RIPARTIZIONE

$$F_X(x) = P(X \leq x), x \in R$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a)$$

$$P(X = b) = F_X(b) - \lim_{x \to b^-} F_X(x)$$

- **MONOTONA NON DECRESCENTE**
- **CONTINUA DA DESTRA**

- **NON è CONTINUA IN OGNI PUNTO**

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

SUPPORTO

è definito come l'insieme di valori i cui intorni sono eventi di probabilità strettamente positiva

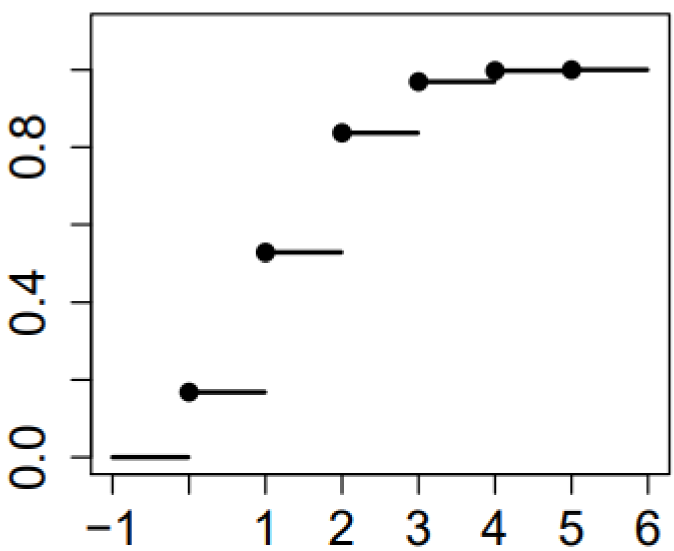
$$S_X = \{x \in R : \forall \epsilon > 0, P(x - \epsilon < X < x + \epsilon) > 0\}$$

$$P(x - \epsilon < X < x + \epsilon) = F_X(x + \epsilon) - F_X(x - \epsilon)$$

$$F_X(x + \epsilon) - F_X(x - \epsilon) > 0$$

$$F_X(x + \epsilon) > F_X(x - \epsilon)$$

Quest'ultima formula significa che il valore di probabilità di $P(X+\epsilon)$ si troverà più in alto rispetto al valore $P(x - \epsilon)$



Nel disegno i puntini rappresentano i valori del supporto, infatti $F_X(x + \epsilon) > F_X(x - \epsilon), \forall \epsilon > 0$

VARIABILI DISCRETE

Il S_X è finito o al più numerabile

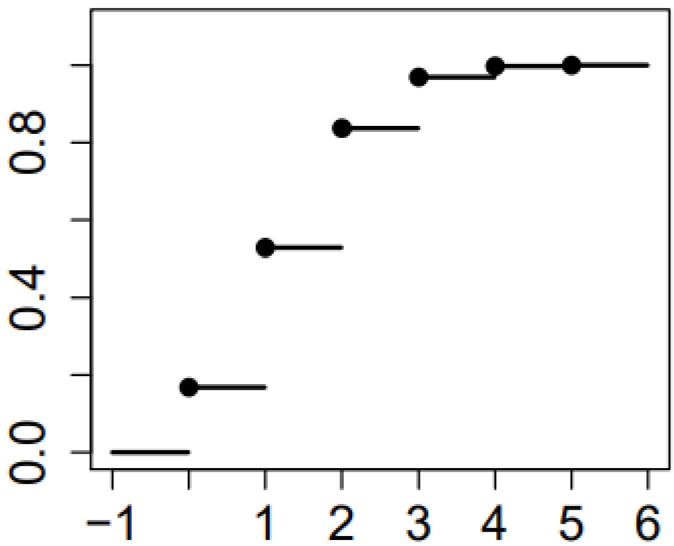
$$S_X = \{x_i : P(X = x_i) = pi > 0\}$$

FUNZIONE DI PROBABILITÀ

$$f_X(x) = P(X = x_i) = pi$$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{i:x_i \le x} pi$$



Il grafico è una funzione a gradini con salti in corrispondenza dei valori $x_i \in S_X$
L'ampiezza del salto è data dal valore della **funzione di densità** nel valore x_i
$p_i = f_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1})$

VALORE ATTESO

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x f_X(x) = \sum_{x \in S_X} P(X = x)$$

Data una variabile $Y = g(X)$, quindi anch'essa discreta

$$E(Y) = E(g(X)) = \sum_{x \in S_X} g(X) f_X(x)$$

VARIABILI CONTINUE

Quando il S_X è costituito da un insieme continuo di elementi

$$S_X = \{x \in R : \forall \epsilon > 0, P(x - \epsilon < X < x + \epsilon) > 0\}$$

FUNZIONE DI DENSITÀ

$$f_X(X)$$

- $f_X(x) \geq 0, \forall x \in R$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
  - Ciò corrisponde alla somma di tutte le probabilità associate a ogni elemento del supporto
- $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = F'_X(x)$

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

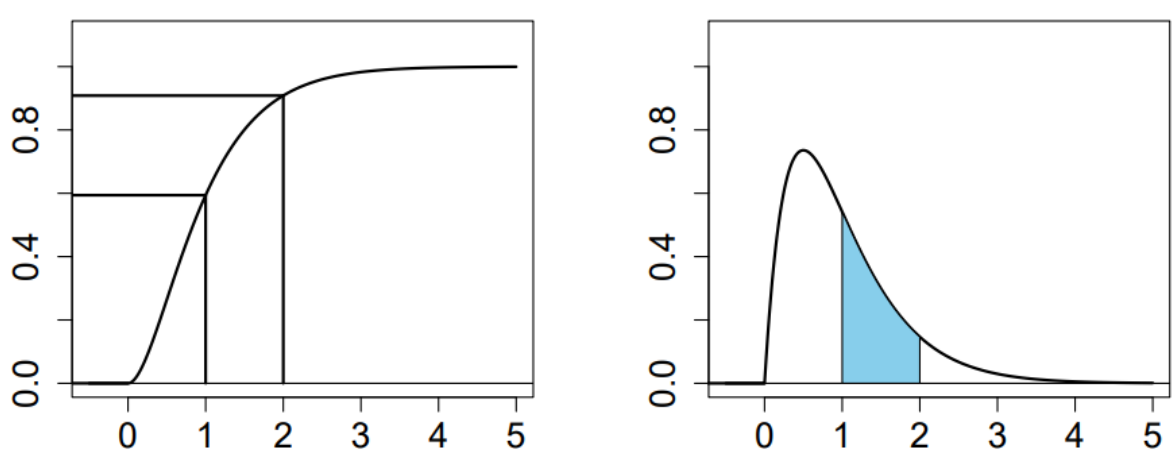
- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
  - Non ci sono valori di x prima di $-\infty$ perciò la probabilità è nulla
  - $P(X \leq -\infty) = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
  - Arrivati all'ultimo valore del supporto, la probabilità di eventi $\leq +\infty$ è 1
  - $P(X \leq -\infty) = 1$

Si tratta di una funzione continua, e perciò

$$P(X = x) = 0, \forall x \in R$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a), \forall a \in R$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$$



Il grafico a SX è $F_X(x)$ mentre a DX è $f_X(x)$

L'area azzurra sotto il grafico $f_X(x)$ corrisponde alla definizione di intergrale tra $[a,b]$, e quindi proprio ai valori di $F_X(b) - F_X(a)$

INDICI SINTETICI

VALORE ATTESO

DISCRETA

$$E(X) = \sum_{x \in S_X} x f_X(x) = \sum_{x \in S_X} P(X = x)$$

CONTINUA

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

PROPRIETÀ

- **CAUCHY:**
  - $inf\{S_X\} \leq E(X) \leq sup\{S_X\}$
- **BARICENTRO**
  - $E(X - E(X)) = 0$
- **LINEARITÀ**
  - $E(aX + b) = aE(X) + b, \forall a, b \in R$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

MEDIANA

$$x_{0.5} : (P(X \leq x_{0.5}) \geq 0.5) \land (P(X \geq x_{0.5}) \geq 0.5)$$

CONTINUA

$$x_{0.5} = F_X(x_{0.5}) = 0.5$$

DISCRETA

$$x_{0.5} = F_X(x_{0.5}) \geq 0.5$$

MODA

$$x_{mo} : f_X(x_{mo}) = max\{f_X(x)\}$$

QUANTILI

$$\alpha \in (0,1)$$

$$P(X \leq x_\alpha) \geq \alpha$$

$$P(X \geq x_\alpha) = 1 - \alpha$$

CONTINUA

$$F_X(x_\alpha) = \alpha$$

DISCRETA

$$F_X(x_\alpha) \geq \alpha$$

VARIANZA

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

DISCRETA

$$V(X) = \sum_{x \in S_X} (x - E(X))^2 f_X(x)$$

CONTINUA

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx$$

PROPRIETÀ

- **NON NEGATIVITÀ**
  - $V(X) \geq 0$
- **CALCOLO**
  - $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- **INVARIANZA TRASLAZIONI**
  - $V(X + b) = V(X), \forall b \in R$
- **OMOGENEITÀ DI SECONDO GRADO**
  - $V(aX) = a^2 V(X), \forall a \in R$