# MA0748 - FISICA PER I DISPOSITIVI IOT

Lorenzo Santi

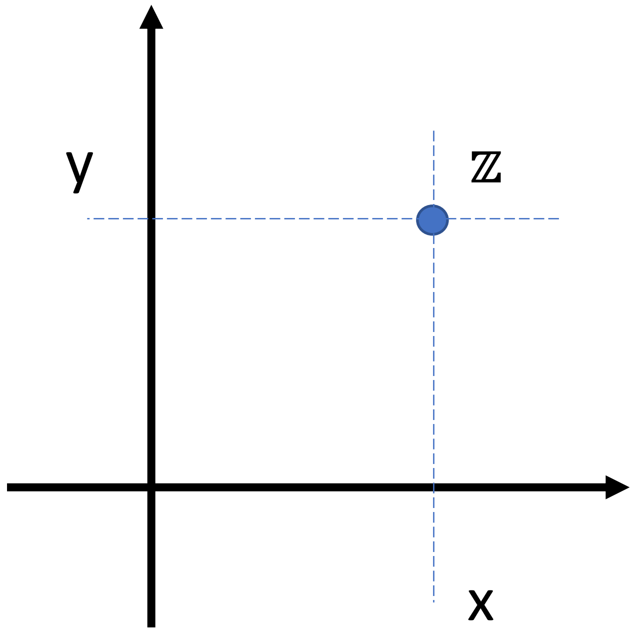
*AA 2021/22 – Lezione 10 5/04/2022*

# Argomenti della lezione di oggi

- I numeri complessi
  - Definizione
  - La formula di Eulero
  - La funzione esponenziale complessa
- I circuiti in corrente alternata
  - Il circuito RC in corrente alternata

# I numeri complessi
## Definizione

Per trattare in maniera semplice una particolare categoria di circuiti con tensioni e correnti variabili nel tempo (i circuiti in corrente alternata) abbiamo bisogno di introdurre un nuovo concetto matematico: i numeri complessi.




Un numero complesso $\mathbb{z}$ può essere definito come una coppia di valori reali (x,y). (useremo i simboli contornati, come $\mathbb{z}$, per indicare le quantità complesse)

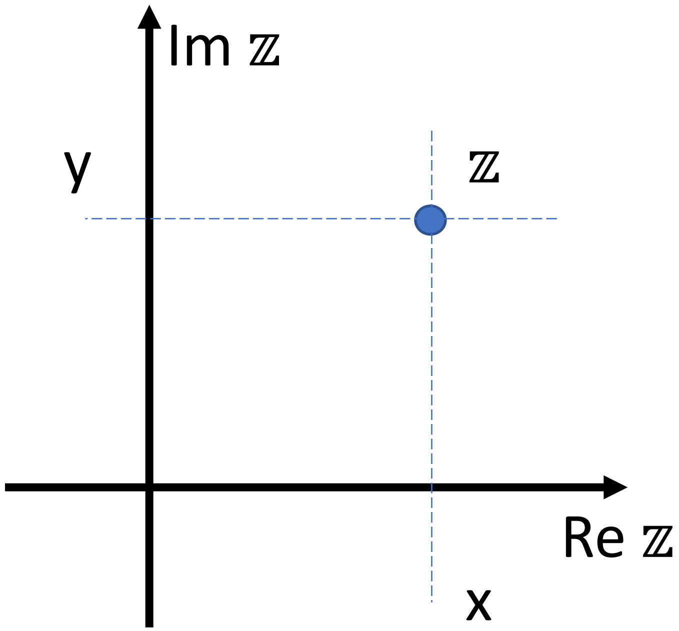
Una sua rappresentazione grafica è data da un punto su un piano (**piano complesso**), le cui coordinate rispetto ad un certo sistema di riferimento siano proprio x e y.

I due assi vengono chiamati asse reale (Re $\mathbb{z}$) e asse immaginario (Im $\mathbb{z}$).

Un modo compatto per scrivere il numero complesso $\mathbb{z}$, utile per effettuare calcoli con esso, è il seguente

$$\mathbb{z} \equiv (x, y) \equiv x + \mathbb{i}\, y$$

ove $\mathbb{i}$ è un particolare simbolo, chiamato unità complessa.




Dalle definizioni avremo immediatamente che una ulteriore rappresentazione di $\mathbb{z}$ è data da

$$\mathbb{z} \equiv Re\, \mathbb{z} \; + \mathbb{i}\, Im\, \mathbb{z}$$

ove abbiamo sostituito (x,y) con le parti reali ed immaginarie di $\mathbb{z}$ :
$(Re\, \mathbb{z}\, , Im\, \mathbb{z}\, )$

La definizione di un nuovo tipo di «numero» può essere completata con l'introduzione di operazioni numeriche, attraverso la definizione delle parti reali e immaginarie dei risultati

- Somma di due numeri complessi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$

$$Re(\mathbb{A}+\mathbb{B}) \equiv Re\ \mathbb{A} + Re\ \mathbb{B}$$
$$Im(\mathbb{A}+\mathbb{B}) \equiv Im\ \mathbb{A} + Im\ \mathbb{B}$$

- Prodotto di due numeri complessi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$

$$Re(\mathbb{A}\ \mathbb{B}) \equiv Re\ \mathbb{A}\ \ Re\ \mathbb{B}\ \ - Im\ \mathbb{A}\ \ Im\ \mathbb{B}$$
$$Im(\mathbb{A}\ \mathbb{B}) \equiv Re\ \mathbb{A}\ \ Im\ \mathbb{B}\ \ + Im\ \mathbb{A}\ \ Re\ \mathbb{B}$$

Da queste definizioni deriva una importante relazione per l'unità immaginaria: considerando il numero $(0,1) \equiv \mathbb{i}$ abbiamo, per la definizione di prodotto

$$\mathbb{i}^2 = \mathbb{i}\ \mathbb{i}\ \equiv (0\ 0\ - 1\ 1) + (0\ 1 + 1\ 0)\ \mathbb{i} = -1$$

Sono inoltre definibili due ulteriori operazioni su $\mathbb{z}$:

- La coniugazione (complessa), indicata con l'apice *

$$\mathbb{z}^* = (Re\,\mathbb{z} + \mathbb{i}\,Im\,\mathbb{z})^* = Re\,\mathbb{z}\; - \mathbb{i}\,Im\,\mathbb{z}$$

(notare l'inversione della parte immaginaria, nell'operazione di coniugio)

- Il modulo quadro

$$|\mathbb{z}|^2 = \mathbb{z}\,\mathbb{z}^* = (Re\,\mathbb{z})^2 + (Im\,\mathbb{z})^2$$

# La formula di Eulero

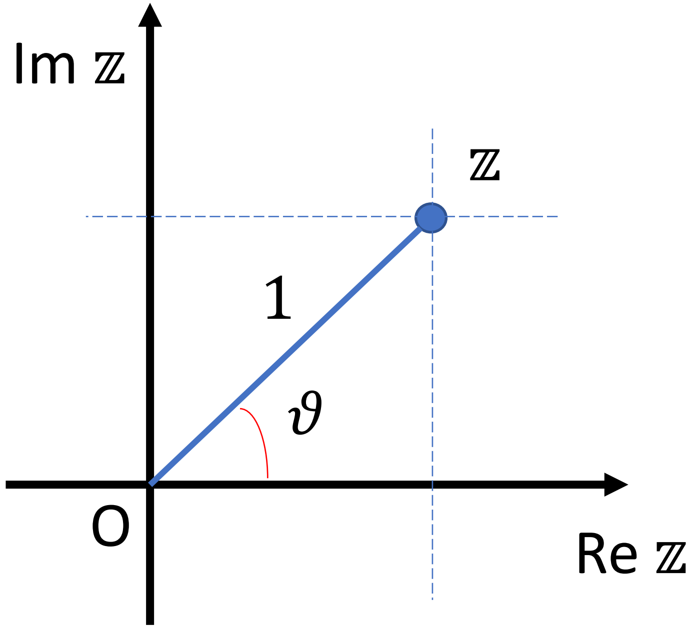
Un modo proficuo per rappresentare un numero complesso $\mathbb{z}$ è rappresentato dalla relazione di Eulero, con cui la funzione esponenziale viene estesa ai numeri complessi.

Se scegliamo un numero complesso $\mathbb{z}$ unitario, cioè tale che

$$|\mathbb{z}|^2 = 1$$

e indichiamo con $\vartheta$ l'angolo formato con l'asse reale dal segmento che unisce l'origine O con il punto $\mathbb{z}$ nel piano complesso, la formula di Eulero afferma che

$$\mathbb{z} \equiv \exp(\mathbb{i}\,\vartheta) \equiv \cos\vartheta + \mathbb{i}\sin\vartheta$$



# La funzione esponenziale complessa

Usando la formula di Eulero è possibile generalizzare per i numeri complessi la funzione esponenziale (non confondete la variabile $\mathbb{z}$ con quella della precedente diapositiva)

$$\exp \mathbb{z} \equiv \exp(Re\ \mathbb{z})\left(\cos(Im\ \mathbb{z}) + \mathbb{i} \sin(Im\ \mathbb{z})\right)$$

Questa funzione (con argomento complesso che produce valori complessi) gode delle orinarie proprietà della funzione esponenziale

- $\exp(\mathbb{z}_1 + \mathbb{z}_2) = \exp(\mathbb{z}_1) \exp(\mathbb{z}_2)$
- $\exp(\mathbb{z}_1 \mathbb{z}_2) = (\exp \mathbb{z}_1)^{\mathbb{z}_2} = (\exp \mathbb{z}_2)^{\mathbb{z}_1}$

Una importante proprietà della funzione esponenziale complessa riguarda la variazione nel tempo di un andamento esponenziale

$$\mathbb{X}(t) = \mathbb{X}_0 \exp(\alpha t)$$

ove $\alpha$ può essere a sua volta complesso.

Si ha

$$\frac{d\mathbb{X}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbb{X}}{\Delta t} = \alpha \mathbb{X}$$

Cioè la variazione di $\mathbb{X}$ nel tempo è ancora proporzionale a $\mathbb{X}$

# I circuiti in corrente alternata

Quando l'alimentazione di un circuito è variabile e periodica nel tempo (come con un generatore di funzioni), con un andamento nel tempo della tensione erogata di tipo sinusoidale: ad esempio

$$V(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t)$$

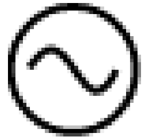
il circuito si dice **in corrente alternata**.

La sorgente di energia (l'equivalente del generatore di funzioni) viene chiamata **generatore di tensione AC** e le sue caratteristiche sono riassunte da due parametri

- $\epsilon_0$ l'**ampiezza** della tensione erogata
- $\omega$ la **pulsazion**e del segnale, legata al suo **periodo** T dalla relazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Il simbolo circuitale di un generatore di tensione AC è rappresentato nella figura accanto

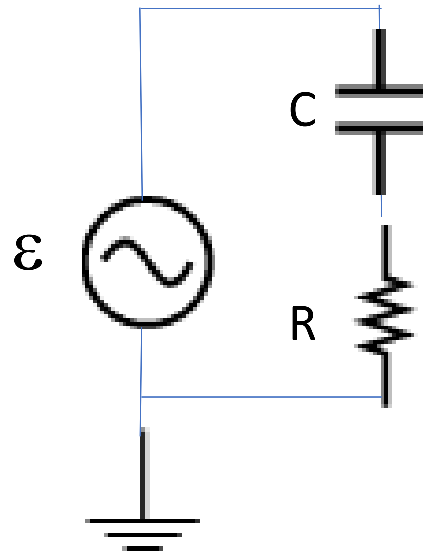


# Il circuito RC in corrente alternata

La teoria di un circuito RC in corrente alternata è perfettamente simile a quella con un alimentatore a tensione costante.

L'unica differenza è che il generatore fornisce in uscita una tensione variabile nel tempo, del tipo

$$\varepsilon(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t)$$



Dalla legge delle maglie otteniamo

$$\Delta V_C + \Delta V_R + \varepsilon = 0$$

da mettere a sistema con

$$R\, I = -\, \Delta V_R$$

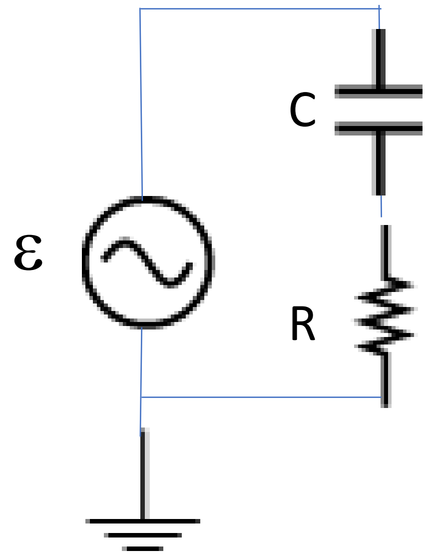
$$I\, \Delta t \cong \Delta Q$$

$$C\, \Delta V_C = -\, Q$$

ottenendo

$$R\, \frac{\Delta Q}{\Delta t} + \frac{Q}{C} \cong \epsilon_0 \cos(\omega t)$$

Ricordiamo che questa relazione diventa esatta quando consideriamo il limite per $\Delta t \rightarrow 0$: per esplicitare ciò sostituiremo $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ con la scrittura $\frac{dQ}{dt}$.



$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=\epsilon_0\cos(\omega t)$$

Il nostro scopo è quello di trovare una soluzione per Q(t) stazionaria, cioè che si ripete periodicamente nel tempo.

Proveremo a cercare una soluzione di prova del tipo

$$Q(t)=\ Q_0\cos(\omega t+\varphi_0)$$

ove $Q_0$ e $\varphi_0$ sono dei parametri da determinare opportunamente.

Però l'equazione scritta in questo modo è un po' complicata da manipolare: si può introdurre una semplificazione nei calcoli esaminando una equazione leggermente diversa

$$R\frac{d\mathbb{Q}}{dt}+\frac{\mathbb{Q}}{C}=\epsilon_0\exp(\mathbb{i}\,\omega t)$$

essendo $\mathbb{Q}$ una funzione a valori complessi. Prendendo la parte reale dell'equazione abbiamo

$$Re\left(R\frac{d\mathbb{Q}}{dt}+\frac{\mathbb{Q}}{C}\right)=Re\big(\epsilon_0\exp(\mathbb{i}\,\omega t)\big)$$

$$R\frac{d\,Re\,\mathbb{Q}}{dt}+\frac{Re\,\mathbb{Q}}{C}=\epsilon_0\cos(\omega t)$$

$$R\frac{d\ Re\ \mathbb{Q}}{dt}+\frac{Re\ \mathbb{Q}}{C}=\epsilon_0\cos(\omega t)$$

cioè $\mathrm{Q}=Re\ \mathbb{Q}$ è soluzione dell'equazione originaria del circuito.

La ragione per la quale passiamo al campo complesso è che la variazione nel tempo della carica complessa $\mathbb{Q}$ è semplice da scrivere, per la soluzione di prova

$$\mathbb{Q}\ (t)=\ Q_0\exp(\ \mathbb{i}(\omega t+\varphi_0))$$

Abbiamo infatti, per le proprietà della funzione esponenziale complessa

$$\frac{d\mathbb{Q}}{dt}=\frac{dQ_0\exp(\ \mathbb{i}(\omega t+\varphi_0))}{dt}=\mathbb{i}\omega Q_0\exp\left(\ \mathbb{i}(\omega t+\varphi_0\right)=\mathbb{i}\omega\mathbb{Q}$$

Ma la variazione nel tempo della carica è la corrente: introduciamo un'altra funzione a valori complessi $\mathbb{I}(t)$ tale che

$$\mathbb{I}=\frac{d\mathbb{Q}}{dt}=\mathbb{i}\omega\mathbb{Q}$$

La funzione $\mathbb{I}$ è tale che $\mathrm{I(t)}=\mathrm{Re}\ \mathbb{I}$

L’equazione a valori complessi diventa così

$$R\,\frac{d\mathbb{Q}}{dt}+\frac{\mathbb{Q}}{C}=R\;\mathbb{I}+\frac{\mathbb{I}}{\mathbb{i}\;\omega C}=\epsilon_0\;\exp(\mathbb{i}\;\omega t)$$

che ha come soluzione

$$(R+\frac{1}{\mathbb{i}\omega C})\mathbb{I}\;=\epsilon_0\;\exp(\mathbb{i}\;\omega t)$$

Notate il primo fattore a primo membro: l’espressione viene chiamata **impedenza** complessa del circuito $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}=R+\frac{1}{\mathbb{i}\omega C}$$

La relazione

$$\mathbb{Z} = R + \frac{1}{\mathbb{i}\omega C} = \mathbb{Z}_R + \mathbb{Z}_C$$

in maniera formale è l'analogo per i circuiti AC della legge di composizione delle resistenze di due resistori in serie, avendo indicato con

$$\mathbb{Z}_R = R$$

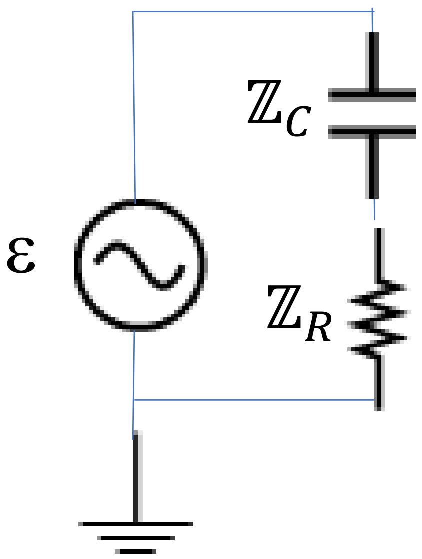
$$\mathbb{Z}_C = \frac{1}{\mathbb{i}\omega C}$$

le impedenze del resistore e del condensatore.

L'equazione del circuito, scritta come

$$\mathbb{Z}_C \mathbb{I} + \mathbb{Z}_R \mathbb{I} - \epsilon(\mathrm{t}) = 0$$

è il perfetto analogo per i circuiti in corrente alternata della legge delle maglie.




Più in generale, avendo delle impedenze (non distinguiamo tra resistori e condensatori) in serie e/o in parallelo l'impedenza equivalente del circuito si ricava come

per impedenze in serie

$$\mathbb{Z}_{eq} = \mathbb{Z}_1 + \mathbb{Z}_2$$

per impedenze in parallelo

$$\frac{1}{\mathbb{Z}_{eq}} = \frac{1}{\mathbb{Z}_1} + \frac{1}{\mathbb{Z}_2}$$

Qui purtroppo finisce la parte «facile».

Per completezza, inserisco i calcoli per ottenere l’andamento della corrente nel tempo. Se vi fidate dei risultati ottenuti, potete in fase di ripasso saltare tutte le diapositive contrassegnate con

Per ricavare la soluzione per la corrente nel circuito «reale» bisogna prendere la parte reale di $\mathbb{I}$

$$\mathbb{Z}\,\mathbb{I} = \epsilon(\mathrm{t})$$

$$I(t) = Re\,\mathbb{I} = Re\,[\frac{1}{\mathbb{Z}}\epsilon_0 \exp(\mathbb{i}\,\omega t)]$$

$$I(t) = \epsilon_0[Re\,\frac{1}{\mathbb{Z}}\;Re\exp(\mathbb{i}\,\omega t) - Im\,\frac{1}{\mathbb{Z}}\,Im\exp(\mathbb{i}\,\omega t)]$$

Ora

$$Re\,\frac{1}{\mathbb{Z}} = Re\,\frac{\mathbb{Z}^*}{\mathbb{Z}\,\mathbb{Z}^*} = \frac{Re\,\mathbb{Z}}{|\mathbb{Z}|^2} \qquad Im\,\frac{1}{\mathbb{Z}} = Im\,\frac{\mathbb{Z}^*}{\mathbb{Z}\,\mathbb{Z}^*} = -\frac{Im\,\mathbb{Z}}{|\mathbb{Z}|^2}$$

$$Re\exp(\mathbb{i}\,\omega t) = \cos(\omega t) \qquad Im\exp(\mathbb{i}\,\omega t) = \sin(\omega t)$$

Indichiamo con $\varphi_0$ un angolo tale che

$$Re\,\mathbb{Z} = |\mathbb{Z}|\cos(\varphi_0)$$
$$Im\,\mathbb{Z} = |\mathbb{Z}|\sin(\varphi_0)$$

cioè $$\tan(\varphi_0) = \frac{Im\,\mathbb{Z}}{Re\,\mathbb{Z}}$$

Riassumendo

$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|}[\cos(\varphi_0)\ \cos(\omega t)\ - sin(\varphi_0)\sin(\omega t)] = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

(l'ultimo passaggio deriva da una proprietà delle funzioni trigonometriche).

$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Nel caso specifico del circuito RC in serie

$$\mathbb{Z} = R + \frac{1}{\mathbb{i}\omega C} = R - \frac{\mathbb{i}}{\omega C}$$

e quindi

$$|\mathbb{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

$$\varphi_0 \ = \operatorname{atan}\left(\frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}\right) = -\operatorname{atan}(\frac{1}{\omega\, RC})$$

Alla fine abbiamo ottenuto l'espressione

$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

con

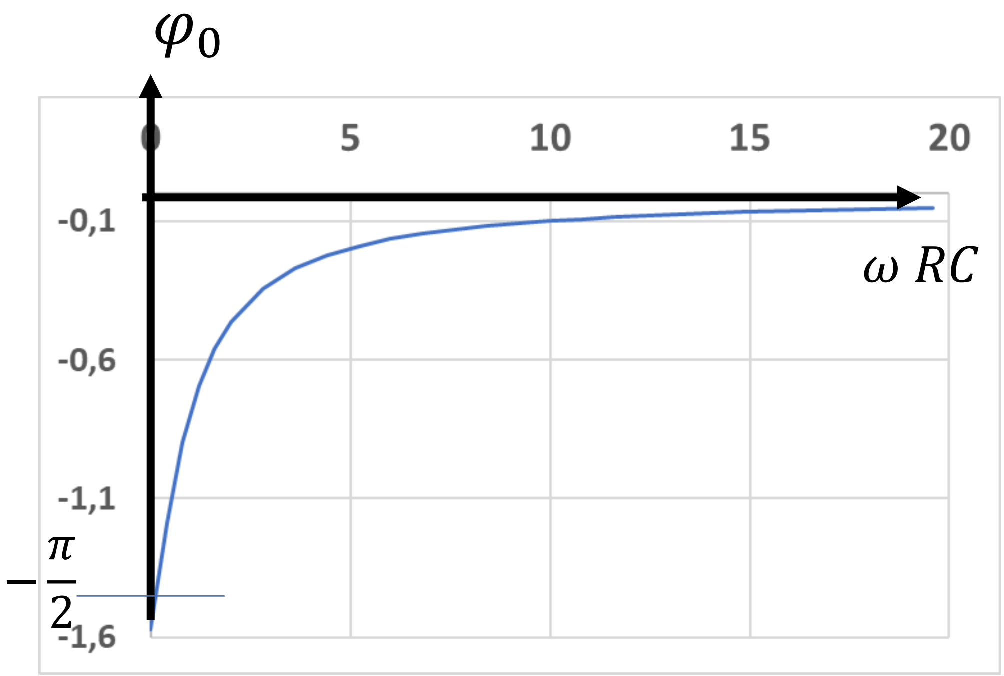
$$\varphi_0 = -\,\mathrm{atan}\left(\frac{1}{\omega\, RC}\right)$$

Esaminiamo come varia la fase $\varphi_0$ della corrente, rispetto a quella della tensione $\epsilon$ prodotta dal generatore, variando la frequenza angolare della tensione erogata da quest'ultimo

$$\omega = 2\pi\,\nu$$

ove $\nu$ è la frequenza impostata sul generatore. (Notate come $\omega\, RC$ sia adimensionale)

$\varphi_0$ parte da un valore pari a $-\frac{\pi}{2}$ quando $\omega\, RC$ tende a 0, mentre $\varphi_0$ tende a 0 quando $\omega\, RC$ tende all'infinito

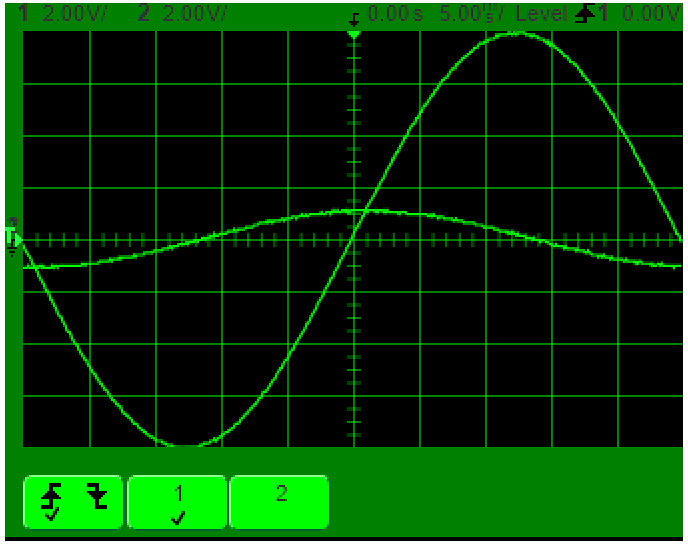


È quello che si vede realizzando il circuito.

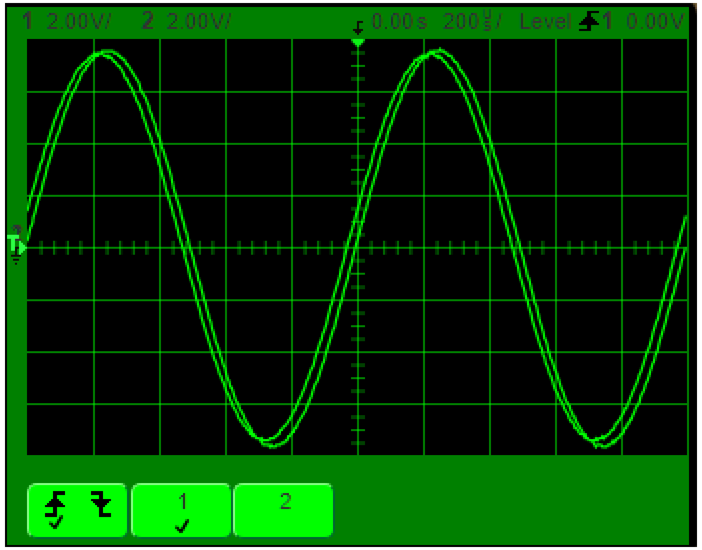
Nelle due schermate dell'oscilloscopio sono rappresentati gli andamenti della tensione erogata dal generatore (la curva che passa esattamente per il punto centrale dello schermo) e quello della tensione ai capi del resistore (che è proporzionale alla corrente circolante).

In alto si ha il caso di un valore di $\omega\, RC$ molto piccolo ed il segnale sul resistore anticipa quello del generatore di circa un quarto di periodo ($\varphi_0 \cong -\frac{\pi}{2}$).

In basso si ha $\omega\, RC$ molto grande ed i due segnali sono pressoché in fase ($\varphi_0 \cong 0$).




$\omega\, RC \cong 0.126$

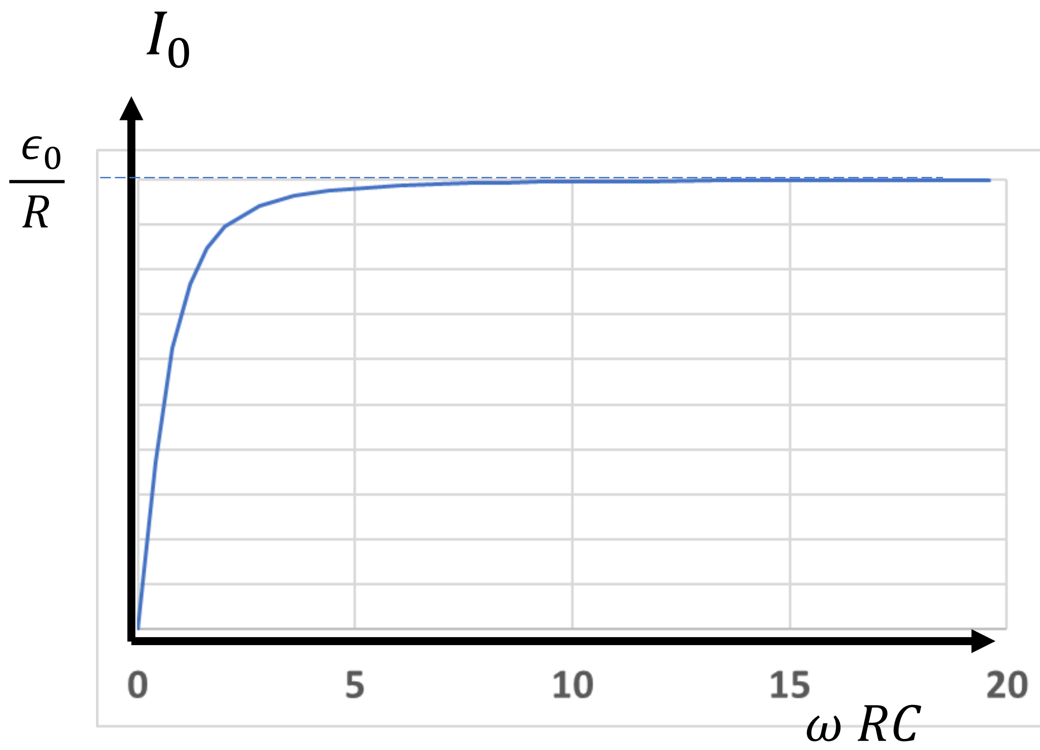



$\omega\, RC \cong 6.28$

$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Esaminiamo ora come varia l'ampiezza dell'oscillazione della corrente, sempre in funzione di $\omega RC$

$$I_0 = \frac{\epsilon_0}{|\mathbb{Z}|} = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} = \frac{\omega RC \frac{\epsilon_0}{R}}{\sqrt{(\omega\, RC)^2 + 1}}$$




$I_0$ parte da un valore nullo quando $\omega\, RC$ tende a 0, mentre $I_0$ tende a $\frac{\epsilon_0}{R}$ quando $\omega\, RC$ tende all'infinito ($\frac{\epsilon_0}{R}$ sarebbe il valore della corrente in un circuito con la sola resistenza R).

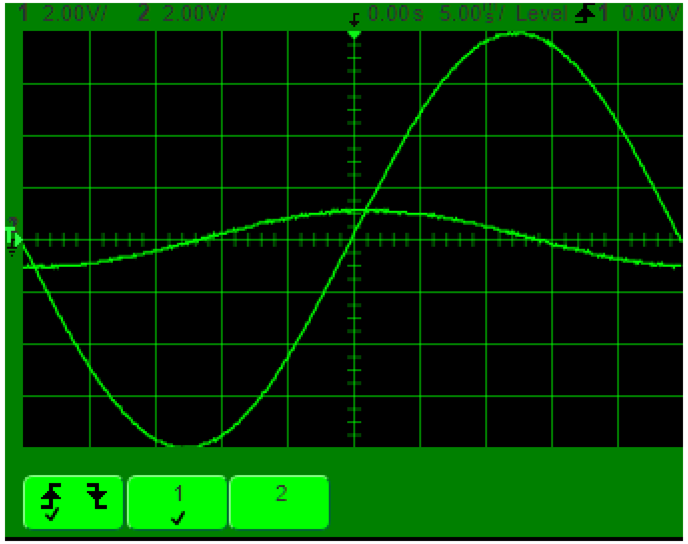
Analizziamo di nuovo le due situazioni su un circuito reale per piccoli e per grandi valori di $\omega$.

Poiché viene misurata la tensione ai capi del resistore, il suo segnale ha una ampiezza

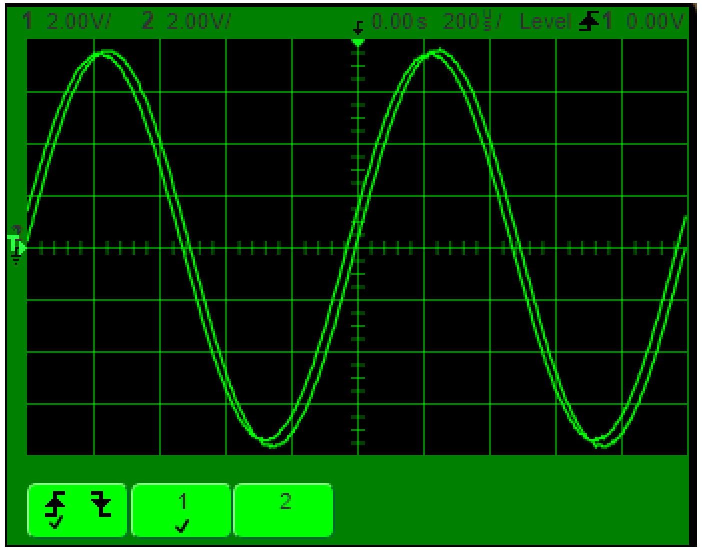
$$\Delta V_R = R I_0$$

In alto si ha il caso di un valore di $\omega\, RC$ molto piccolo ed il segnale sul resistore risulta depresso.

In basso si ha $\omega\, RC$ molto grande ed il segnale ha pressoché la stessa ampiezza di quello della tensione erogata dal generatore ($\Delta V_R = R I_0 \cong R \frac{\epsilon_0}{R} = \epsilon_0$).




$\omega\, RC \;\cong 0.126$




$\omega\, RC \;\cong 6.28$