¿Por qué sumamos matrices elemento por elemento? Un enfoque desde los datos organizados

<u>Ejemplo: Sistema de datos organizados en una tabla</u>

Supongamos que una empresa tiene dos sucursales y registra la cantidad de productos vendidos en tres categorías durante dos días. Representamos los datos en matrices:

Sucursal A (ventas en días 1 y 2):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Sucursal B (ventas en días 1 y 2):

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cada fila representa un día, y cada columna una categoría de producto.

¿Qué significa sumar estas matrices?

Cuando hacemos:

$$A + B = \begin{pmatrix} 5+2 & 3+1 & 2+3 \\ 4+5 & 6+2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Estamos sumando las ventas de ambas sucursales por categoría y por día. Es decir:

Día 1, categoría 1: 5 (Sucursal A) + 2 (Sucursal B) = 7

Día 2, categoría 3: 1 (A) + 4 (B) = 5

... y así para cada posición.

¿Por qué se suman así?

Porque cada posición en la matriz representa una misma unidad de información (mismo día, misma categoría, misma ubicación, etc.). Por tanto, tiene sentido que la suma se haga posición por posición, ya que estamos combinando cantidades equivalentes.

CONCLUSIÓN: La suma elemento a elemento no es una convención arbitraria, sino que refleja una forma lógica de combinar datos que están estructurados del mismo modo. Si no se sumaran así, la información dejaría de tener sentido en la mayoría de contextos reales.

Escalar una matriz: lógica y utilidad del producto por un número

<u>Ejemplo concreto: Escalar una tabla de precios</u>

Supongamos que tenemos una matriz que representa precios (en dólares) de distintos productos en distintas tiendas:

$$P = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$$

Ahora imagina que todos los precios aumentan un 20%. Eso equivale a multiplicar todos los valores por 1.2 (escalar). Entonces:

$$1{,}2\,.\,P = 1{,}2\,.\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 20 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2.10 & 1{,}2.15 \\ 1{,}2.20 & 1{,}2.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 18 \\ 24 & 30 \end{pmatrix}$$

Cada componente se multiplica por el mismo número porque representa la misma magnitud física, y el escalar afecta a todos por igual.

¿Por qué se hace así?

1. Consistencia matemática: En el álgebra lineal, multiplicar por un escalar se define como una operación que preserva la estructura de la matriz, escalando sus valores.

2. Interpretación geométrica: Si pensamos en vectores (matrices de una sola columna o fila), multiplicar por un escalar los alarga o acorta manteniendo la dirección. Esa lógica se extiende a matrices completas.

3. Aplicación práctica: En contextos reales como imágenes, temperaturas, precios o cualquier tabla de datos, escalar todo por un número implica modificar proporcionalmente todos los valores, sin cambiar su disposición.

CONCLUSIÓN: Multiplicar una matriz por un escalar componente a componente refleja la idea de aplicar una transformación uniforme a todos los datos. Esto es útil, lógico y mantiene la estructura original de la información.

¿Por qué se multiplican así las matrices y no elemento a elemento? Un ejemplo con precios y cantidades

Ejemplo: Compra en dos tiendas

Supongamos que una persona compra varios productos en dos tiendas diferentes. Cada tienda vende los mismos productos, pero puede que en distintas cantidades y precios.

Matriz de cantidades que compró en cada tienda:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Cada fila es una tienda:

Fila 1: tienda A → 2 unidades del producto 1, 1 del 2, 3 del 3

Fila 2: tienda B → 0 del 1, 4 del 2, 2 del 3

Matriz de precios unitarios (por producto):

$$P = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Cada fila de es el precio por unidad de un producto:

Producto 1: \$10

Producto 2: \$5

Producto 3: $2

¿Qué queremos calcular?

Queremos saber cuánto gastó en total en cada tienda.

Multiplicación de matrices:

$$T = Q \times P$$

Multiplicamos una matriz por una matriz. El resultado será una matriz, donde cada elemento es el total gastado en una tienda.

Hagamos la cuenta:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.10 + 1.5 + 3.2 \\ 0.10 + 4.5 + 2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 + 5 + 6 \\ 0 + 20 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 24 \end{pmatrix}$$

¿Qué significa esto?

En la Tienda A, se gastaron $31.

En la Tienda B, se gastaron $24.

¿Y si lo hiciéramos elemento a elemento?

Eso daría:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

Esto no se puede hacer directamente porque no tienen la misma forma, ni tiene sentido lógico: no estamos combinando cantidad * precio correctamente, sino mezclando posiciones sin contexto.

CONCLUSIÓN: Multiplicar matrices “fila por columna” refleja sumar los productos de cantidad por precio. Cada fila representa una compra completa (por tienda), cada columna representa un producto o criterio, y al multiplicar, obtenemos un resumen total útil y coherente.