SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO SEMANA 2

1.- Hallar el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3.(-5)-(-2).4 = -15+8 = \boxed{-7}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -4 \\ 1 & \frac{-5}{4} \end{vmatrix} = \frac{3}{2}.\left(\frac{-5}{4}\right)-(-4).1 = \frac{-15}{8}+4 = \boxed{\frac{17}{8}}$$

$$\begin{vmatrix} 3x+2y & 2x \\ -1 & 3x-2y \end{vmatrix} = (3x+2y).(3x-2y)-2x.(-1) = (3x)^2-(2y)^2+2x = \boxed{9x^2-4y^2+2x}$$

$$\begin{vmatrix} 4b & 2a \\ -a & \frac{-b}{2} \end{vmatrix} = \cancel{4}b.\left(\frac{-b}{\cancel{2}}\right)-2a.(-a) = \boxed{-2b^2+2a^2}$$

2.- Dadas las matrices A, B y C, se pide

a) Hallar el determinante de la matriz A y B Aplicando la Regla de Sarrus.

b) Aplicando desarrollo por los elementos de una línea, hallar el determinante de C^T.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (3.(-4).7+0.1.1+(-3).2.5)-(1.(-4).(-3)+5.1.3+7.2.0) = -114-27 = \boxed{-141}$$

$$B = \begin{vmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \\ 6 & 3 & -2 \\ 7 & -5 & 8 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = (7.(-1).(-2)+2.3.8+6.(-5).(-4))-(8.(-1).6+(-4).3.7+(-2).(-5).2) = \boxed{294}$$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & -11 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -11 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (1.5.3+9.0.0+2.(-11).0)-(0.5.2+0.0.1+3.(-11).9) = \boxed{312}$$

$$C^T = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ -11 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.A_{31} + 0.A_{32} + 3A_{33} = 3.104 = \boxed{312}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}.M_{33} = 1^6.\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -11 & 5 \end{vmatrix} = 1.\left(1.5 - (-11).9\right) = \boxed{104}$$

3.- Determinar si las matrices A y B son inversas

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|cc} & & -4 & 3 \\ & & -7 & 5 \\ \hline 5 & -3 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & 0 & -1 \end{array}$$

No es matriz I, por lo tanto, no son inversas

$$5.(-4) + (-3).(-7) = 1$$
$$5.3 + (-3).5 = 0$$
$$(-7).(-4) + 4.(-7) = 0$$
$$(-7).3 + 4.5 = -1$$

$$b)\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ & & & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{4} \\ & & & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \hline 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Es la matriz I, por lo tanto, son inversas

$$3.\left(\frac{3}{8}\right) + 1.\left(-\frac{1}{8}\right) + 0 = 1$$
$$3.\left(\frac{1}{8}\right) + 1.\left(-\frac{3}{8}\right) + 0 = 0$$
$$3.\left(-\frac{1}{4}\right) + 1.\left(\frac{3}{4}\right) + 0 = 0$$
$$1.\left(\frac{3}{8}\right) + (-1).\left(-\frac{1}{8}\right) + 2.\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$
$$1.\left(\frac{1}{8}\right) + (-1).\left(-\frac{3}{8}\right) + 2.\frac{1}{4} = 1$$
$$1.\left(-\frac{1}{4}\right) + (-1).\left(\frac{3}{4}\right) + 2.\frac{1}{2} = 0$$
$$1.\left(\frac{3}{8}\right) + 1.\left(-\frac{1}{8}\right) + 1.\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$
$$1.\left(\frac{1}{8}\right) + 1.\left(-\frac{3}{8}\right) + 1.\frac{1}{4} = 0$$
$$1.\left(-\frac{1}{4}\right) + 1.\left(\frac{3}{4}\right) + 1.\frac{1}{2} = 1$$

Recordar: Si una matriz A tiene una matriz **inversa multiplicativa** o simplemente **una inversa**, A^{-1} entonces, A^{-1} es una matriz para la que **$A . A^{-1} = A^{-1} . A = I$**

4.- Hallar, si es posible, la matriz inversa de cada una de las matrices siguientes sino, justificar:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix};\quad |A|=-2 \quad ; A^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$Adj.A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&0&2\\-3&1&1\end{pmatrix}\quad ;\quad A^{-1}=\frac{1}{-2}.\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&0&2\\-3&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\1&0&-1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}3&-4\\2&5\end{pmatrix};\ |B|=23\ ;\ B^T=\begin{pmatrix}3&2\\-4&5\end{pmatrix}$$

$$Adj.B=\begin{pmatrix}5&4\\-2&3\end{pmatrix}\ ;\quad B^T=\frac{1}{23}.\begin{pmatrix}5&4\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{23}&\frac{4}{23}\\\frac{-2}{23}&\frac{3}{23}\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&-2&3\\4&1&2\end{pmatrix};|C|=-15\ ;\ C^T=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&-2&1\\1&3&2\end{pmatrix}$$

$$Adj.C=\begin{pmatrix}-7&3&-1\\10&0&-5\\9&-6&-3\end{pmatrix};\ C^{-1}=\frac{1}{-15}.\begin{pmatrix}-7&3&-1\\10&0&-5\\9&-6&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7/15&-1/5&1/15\\-2/3&0&1/3\\-3/5&2/5&1/5\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-1&3&5\\2&1&0\\-9&-8&-4\end{pmatrix};\ |D|=-7\ ;\ D^T=\begin{pmatrix}-1&2&9\\3&1&-8\\5&0&-4\end{pmatrix}$$

$$Adj.D=\begin{pmatrix}-4&-28&-5\\8&49&10\\-7&-35&-7\end{pmatrix};\quad D^T=\frac{1}{-7}.\begin{pmatrix}-4&-28&-5\\8&49&10\\-7&-35&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/7&4&5/7\\-8/7&-7&-10/7\\1&5&1\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{4} \\ 32 & -4 \end{pmatrix} ; \ |E|=\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{4} \\ 32 & -4 \end{vmatrix}=2.(-4)-\left(-\frac{1}{4}.32\right)=-8+8=0$$

$$|E|=0 \therefore \text{ la matriz E no admite inversa}$$

5.- Calcular la disyunción y la conjunción de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\vee B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A\wedge B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.- ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación booleana?

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.- Hallar los valores de a y b para que se cumpla igualdad

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a=0 \ ; \ b=1$$