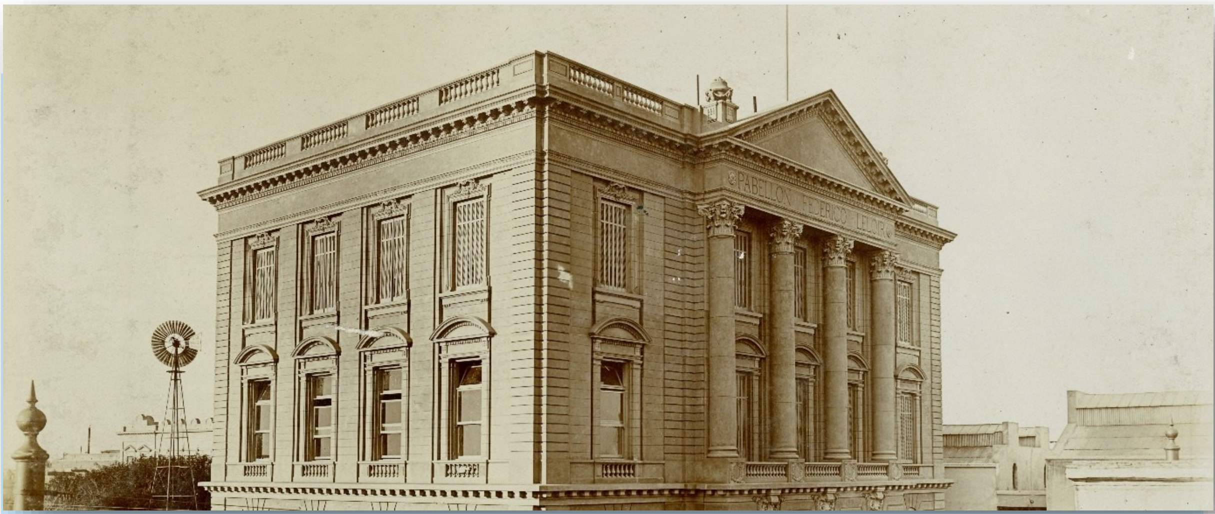
UTN

INGRESO 2025

TECNICATURA UNIVERSITARIA EN PROGRAMACIÓN A DISTANCIA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL



CUADERNILLO 7

Profundizando sobre números

CURSO COMPLETO

UNIDAD I FUNDAMENTOS LOGICOMATEMÁTICOS

UNIDAD II RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

7: NUMEROS, PUNTADA FINAL

INTRODUCCION

En esta lección, vamos a cerrar el estudio de los números enteros (integer) y de los números decimales (float) con conceptos claves: divisibilidad, máximo común divisor (MCD), mínimo común múltiplo (mcm) y sus aplicaciones en problemas reales y de programación.

ENTEROS

REPASO

Decimos que un entero a es divisible por otro entero b ≠ 0 si existe un entero k tal que a = b ∗ k.

15 es divisible por 3 porque 15 = 3 ∗ 5

Nos permite saber cuántas veces "cabe" un número en otro sin dejar residuo.

FACTORIZACION

FACTORES: En este contexto, hablamos de números primos.

FACTORIZACION: Les expresar un número como un producto de factores primos.

12 = 2 ∗ 2 ∗ 3 aquí, 2 y 3 son primos.

TECNICA

1. Empezamos con el número a factorizar.
2. Probamos con los primos más pequeños (2, 3, 5, 7, 11, ...) hasta encontrar uno que divida al número.
3. Dividimos
4. Repetimos el proceso con el cociente hasta llegar a 1.

Nota: En RSA, la clave $n = p * q$ se genera a partir de números primos, p y q con cientos de cifras decimales. Para claves de 4096 bits, p y q tiene aproximadamente 617 cifras. Factorizar n con una supercomputadora clásica llevaría millones de años.

En cuanto a un computador cuántico, para romper RSA sería necesario millones de qubits y aplicar el algoritmo de Shor. actualmente estamos muy lejos de esa capacidad. Salvo que mejoremos la computación cuántica o se encuentre una fórmula para encontrar primos que no sea la fuerza bruta.

DIVISORES

¿Cómo encontrar todos los divisores de un número dado?

1. Factorizá el número en primos.
2. Combiná los factores para construir los divisores.

Ejemplo: 12

Al factorizar obtenemos $12 = 2 * 2 * 3$

O en forma más sintética $12 = 2^2 * 3$

¿Cuáles son sus divisores?

Bueno, el 1 y el 12 lo son, porque todos los números son divisibles por 1 y por sí mismo.

El 2 y 3 porque ya los usamos al factorizar.

El 4 porque es la combinación de $2 * 2$

El 6 porque es la combinación de $2 * 3$

Así los divisores del 12 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12

UNA PREGUNTA

¿Cómo se "construye" un divisor común de varios números?

Con factores primos que estén en cada uno de ellos. O sea, los comunes.

MAXIMO COMUN DIVISOR (MCD)

El MCD de dos o más números es el mayor de todos sus divisores comunes.

18 y 24

Factorización:

$18 = 2 * 3^2$ $24 = 2^8 * 3$

Detengámonos en esto, cuando hablamos de factores comunes no solo hablamos de que coincida los primos, sino también las cantidades de ellos. O sea, su potencia. Por ejemplo. si el primo 2 está elevado al cubo en uno y en el otro no, no podemos usar el máximo exponente porque 8 no es divisor del 18. Nos quedamos con 2, o sea el MENOR EXPONENTE.

Resumido:

El MCD se obtiene tomando los factores comunes EN SU MENOR EXPONENTE

El factor 2: aparece como 2 en 18 y 2^3 en 24, el común es 2 y su menor exponente es 1.

El factor 3: aparece como 3^2 en 18 y 3 en 24, el común es 3 y su menor exponente es 1.

Nos quedamos con 2 y 3. Ósea, podemos dividir a ambos por: 2, 3 y 6.

Y 6 es el MCD.

La técnica es:

1. Factorizamos todos los números
2. Buscamos los primos COMUNES
3. Los seleccionamos con el MENOR EXPONENTE de todos ellos
4. La multiplicación de lo seleccionado el MCD

ALGORITMO DE EUCLIDES

El Algoritmo de Euclides para hallar el MCD de dos números a y b, suponiendo a > b, consiste en aplicar divisiones sucesivas.

Es una forma apta para programar.

1. Sea a > b.
2. Mientras b ≠ 0:
    - Calcular r = a % b (residuo de dividir a por b).
    - Reasignar a ← b.
    - Reasignar b ← r.
3. Cuando b = 0, el MCD es el valor actual de a.

Algoritmo de EUCLIDES para MCD(8, 6):

Inicio:

- a = 8
- b = 6

Primer paso:

- Hallar r = a MOD b = 8 % 6 = 2
- Actualizar:
    - a = b = 6
    - b = r = 2

Segundo paso:

- r = a MOD b = 6 % 2 = 0
- Actualizar:
    - **a = b = 2**
    - **b = r = 0**

En este punto, b = 0, por lo que el MCD es el valor actual de a, que es **2**.

MULTIPLO DE UN NUMERO

Los múltiplos de n son los números que pueden expresarse como $n * k$, donde k es un entero.

Ejemplo: Múltiplos de 5 son 5, 10, 15, 20, 25,...

MULTIPLOS Y FACTORIZACION

Si un múltiplo es multiplicar a un número por otro, y el multiplicado a su vez se puede factorizar, entonces...

¿Cómo construir sus múltiplos? Usando su factorización por otro factor.

Ejemplo: 12

Factorización: 12 = $\boxed{2 * 2 * 3}$

Sus múltiplos:

$\boxed{2 * 2 * 3} = 12$

$\boxed{2 * 2 * 3} * 2 = 24$

$\boxed{2 * 2 * 3} * 3 = 36$

$\boxed{2 * 2 * 3} * 4 = 48$

$\boxed{2 * 2 * 3} * 5 = 60$

...

O sea, participan **SIEMPRE TODOS LOS FACTORES ORIGINALES**.

MINIMO COMUN MULTIPLO (mcm)

El mcm de dos o más números es el menor de todos sus múltiplos comunes distinto de 0.

Ejemplo 6 y 8

MULTIPLOS	
6	**8**
12	
	16
18	
24	**24**

El mcm es el 24, ¿Cómo encontrarlo?

Lo primero que hacés es factorizar cada uno.

$6 = 2 * 3$ $8 = 2^3$

Luego recordá que un múltiplo de un número debe contener TODOS SUS FACTORES. Si es de dos o más números, debe contener TODOS LOS FACTORES DE CADA UNO DE ELLOS.

Y si están todos, deben ser en su máximo exponente.

Resumido:

El mcm se obtiene tomando TODOS los factores EN SU MAYOR EXPONENTE

$6 = 2 * 3$ $8 = 2^3$

$$\text{mcm}(6,8) = 2^3 * 3 = 24$$

RESUMEN

El **MCD** de dos o más números se conforma por los **FACTORES COMUNES** en su **MINIMO** EXPONENTE.

El **mcm** de dos o más números se conforma por los **TODOS LOS FACTORES** en su **MAYOR** EXPONENTE.

Ejemplo 18 y 24

$18 = 2 * 3^2$ $24 = 2^3 * 3$

$\text{MCD}(18, 24) = 2 * 3 = 6$ $\text{mcm}(18, 24) = 2^3 * 3^2 = 72$

O sea, el 6 es el mayor número que divide a ambos números.

O sea, el 72 es el menor múltiplo común a ambos.

RELACION ENTRE MCD Y mcm

Para dos números a y b, se cumple:

$$MCD(a, b) * mcm(a, b) = a * b$$

Ejemplo (18 y 24):

$MCD(18, 24) = 6$ $\qquad$ $mcm(18, 24) = 72$

$$18 * 24 = 6 * 72 = 432$$

Esto quiere decir que si te piden ambos lo podés verificar usando esta relación. Si diseñás un software basta encontrar el MCD con el algoritmo de Euclides y luego calcular el mcm con esta relación.

USO PRACTICO

Sincronización: Si un evento ocurre cada 4 días y otro cada 6 días, ¿cuándo coinciden? Respuesta: al cabo del mcm(4, 6) = 12 días.

Optimización: Ayuda en algoritmos de planificación y memoria en programación.

TIPS PARA BUSCAR DIVISORES PRIMOS

Vamos a analizar los primeros 4 primos y como determinar si un número es divisible por ellos. Esta serán reglas útiles para factorizar números.

TIP DIVISIBILIDAD POR 2

Un número es divisible por 2 si es par.

TIP DIVISIBILIDAD POR 3

Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.

123 → 1 + 2 + 3 = 6 → es múltiplo de 3

Luego 123 es divisible por 3.

TIP DIVISIBILIDAD POR 5

Un número es divisible por 5 si termina en 0 o 5.

TIP DIVISIBILIDAD POR 7

No hay reglas fáciles para encontrar números divisibles por 7, te pasamos una de las tantas.

La regla para determinar si un número es divisible por 7, se basa en un método sencillo que podés realizar paso a paso. Aquí te dejamos una de las formas más comunes:

1. Tomá el último dígito del número y multiplícalo por 2.
2. Restá este resultado del número restante. Es decir, del número sin el último dígito.
3. Repetí este proceso hasta que obtengas un número pequeño.
4. Si el resultado final es 0 o un múltiplo de 7, entonces el número original es divisible por 7.

Ejemplo: ¿Es 203 divisible por 7?

1. Tomá el último dígito: 3.
2. Doblá: 3 * 2 = 6.
3. Restá esto del número restante (sin el último dígito): 20 – 6 = 14.
4. Como 14 es divisible por 7, entonces 203 es divisible por 7.

Ejemplo: ¿Es 161 divisible por 7?

1. Tomá el último dígito: 1.
2. Doblá: 1 * 2 = 2.
3. Restá esto del número restante (sin el último dígito): 16 – 2 = 14.
4. Como 14 es divisible por 7, entonces 161 es divisible por 7.

FACTORIZACION Y RAICES

A veces, para simplificar raíces de números enteros, factorizar es útil:

Ejemplo:

$$\sqrt[2]{72} =$$

Factorizamos el 72:

$$\sqrt[2]{3 * 3 * 2 * 2 * 2} =$$

$$\sqrt[2]{3^2 * 2^3} =$$

Aplicamos propiedad distributiva:

$$\sqrt[2]{3^2} * \sqrt[2]{2^3} =$$

Ahora simplificamos las raíces individuales:

$$3 * 2\sqrt[2]{2} =$$

$$6\sqrt[2]{2} =$$

IMPORTANCIA EN INFORMÁTICA

MCD y mcm: Se aplican en problemas de programación relacionados con algoritmos de planificación de memoria y CPU, sincronización y procesos repetitivos.

Divisores y factores: Usados en criptografía, compresión de datos y análisis de algoritmos.

FRACCIONES

CONCEPTO

Las fracciones representan partes de un entero o de un conjunto.

Se dividen en numerador o cantidad de partes que tomamos y denominador o el total de partes en que se divide la unidad.

Ejemplo: 3/4

Indica 3 partes de un total de 4.

TIPOS DE NUMEROS Y FRACCIONES

NUMEROS RACIONALES: Se pueden expresar como p/q, donde ambos son enteros y q ≠ 0.

NUMEROS IRRACIONALES: No pueden escribirse como una fracción exacta (ejemplo π).

FRACCION PROPIA: Numerador < Denominador (ejemplo 3 / 5).

FRACCION IMPROPIA: Numerador > Denominador (ejemplo 7 / 4).

FRACCION MIXTA: Tiene parte entera y una fracción (ejemplo 1 3/4).

Otras:

UNIDAD COMO FRACCION: Numerador = Denominador (ejemplo 7 / 7).

ENTERO COMO FRACCION SIMPLIFICADA: Numerador = entero, Denominador = 1 (ejemplo 7 / 1 = 7).

ENTERO COMO FRACCION NO SIMPLIFICADA: Numerador = entero*k, Denominador = k (ejemplo 7*3 / 3 = 7).

SIMPLIFICACION DE FRACCIONES

MCD: Para reducir una fracción, se divide numerador y denominador por el MCD de ambos. Ejemplo: 18, 24

MCD (18,24) = 6

18/24 =

$(3 * \cancel{6}) / (4 * \cancel{6}) =$

3 / 4 =

IMPORTANCIA EN INFORMATICA

Cálculos exactos: Librerías de computación simbólica (por ejemplo, Python fractions) manejan fracciones para evitar errores de punto flotante.

Modelado: Se usan fracciones en optimizaciones y simulaciones.

USO EN PROBLEMAS COTIDIANOS

Repartir objetos o recursos en partes proporcionales (por ejemplo, cortar una pizza).

Dividir tiempos como por ejemplo asignar horas de un día.

USO COMO CONDICIÓN DE PARADA

A veces se quiere detener un proceso cuando se llega a cierta fracción exacta.

> Cuidado con los floats en la computadora, 1 / 3 puede representarse como 0.3333... y llegar a inexactitudes.

SUMA/RESTA CON IGUAL DENOMINADOR

(a / c) + (b / c) = (a + b)/c

Ejemplo:

(2 / 5) + (1 / 5) =

(2 + 1) / 5 =

3 / 5 =

0.6

Ejemplo:

(2 / 5) – (1 / 5) =

(2 - 1) / 5 =

1 / 5 =

0.2

SUMA/RESTA CON DIFERENTES DENOMINADORES

1. Encontrar denominador común, usualmente el mcm de los denominadores. En caso de denominadores chicos, multiplicalos entre sí.
2. Convertir cada fracción a ese denominador. Lo que multipliques abajo, lo hacés arriba.
3. Sumar o restar numeradores.

Ejemplo: (2 / 6) + (1 / 8) =

El mcm de (6, 8) es 24.

Buscá que el denominador sea el mcm. ¿Por cuál número debemos multiplicar cada denominador para llegar al mcm?

Y no te olvides que, si multiplicamos abajo, ese mismo número debe multiplicar arriba para no alterar la fracción.

(2 / 6) al 6 lo multiplicamos por 4

(2 ∗ **4**) / (6 ∗ **4**) = 8 / **24**

(1 / 8) al 8 lo multiplicamos por 3

(1 ∗ **3**) / (8 ∗ **3**) = 3 / **24**

Sumamos tranquilos porque ahora tenemos igual denominador:

(8 / 24) + (3 / 24) = 11 / 24

CUIDADO CON ALGUNAS FRACCIONES

0.1, 0.3 y otros en binario son periódicos por eso generan errores de redondeo cuando guardamos en floats.

Si esperás que (1/10 + 1/10 + 1/10 = 3/10) en nuestro programa, sin tomar algunas consideraciones, vas a cometer un error.

Mala práctica: Usar como condición de parada la igualdad directa con floats.

MULTIPLICAR FRACCIONES

Cuando se multiplican dos fracciones se puede expresar en una sola fracción multiplicando numeradores entre sí por arriba, y los denominadores por debajo:

(a / b) ∗ (c / d) = (a ∗ c) / (b ∗ d)

Ejemplo:
(2 / 7) ∗ (3 / 5) =

(2 ∗ 3) / (7 ∗ 5) =

6 / 35

DIVIDIR FRACCIONES

Cuando se dividen dos fracciones se puede expresar como una multiplicación fracción del denominador (de abajo) invirtiéndola. Luego se resuelve como en el caso anterior:

$$(a / b) / (c / d) =$$

$$(a / b) * (d / c) =$$

$$= (a \ast d) / (b \ast c)$$

Multiplicamos la fracción de abajo dándola vuelta

Ejemplo:

$$(2 / 7) / (\mathbf{3 / 5}) =$$

$$(2 / 7) \ast (\mathbf{5 / 3}) =$$

$$(2 \ast 5) / (7 \ast 3) =$$

$$10 / 21$$

APLICACIONES PRACTICAS

1. Repartir objetos en partes iguales (MCD).
2. Sincronización de eventos periódicos (mcm).
3. Comparar proporciones (fracciones) y repartir recursos.

SITUACION A RESOLVER

"Tres luces se encienden cada 4, 6 y 8 segundos. Si se encienden todas juntas ¿Cuánto pasará para se enciendan juntas de nuevo?"

Solución:
Las luces se prenden a intervalos regulares, o sea múltiplos de sus períodos.

Si queremos encontrar el tiempo en que todas coincidan, buscamos el mcm de ellas.

Encontrar mcm(4, 6, 8)

$$4 = 2^2$$

$$6 = 2 \ast 3$$

$$8 = 2^3$$

Tomamos mayor exponente de cada factor: $2^3 \ast 3 = 24$.

Respuesta: Cada 24 segundos vuelven a estar las tres encendidas.

PRECISION

COMODIDAD VS PRECISIÓN

Planteemos tres tipos de números:

3.141569... Pi, un número IRRACIONAL

0.333333333... Un tercio, un DECIMAL PERIODICO

0.12547 Un DECIMAL EXACTO con 5 decimales

Es más cómodo con menos decimales, Pero ¿qué pasa si truncamos el número? Claramente, el número truncado no es igual al original, es “menos preciso”. A eso le llamamos PERDIDA DE PRECISION.

PROBLEMAS DE LA PRECISIÓN, GUERRA DEL GOLFO

En 1991, durante la Guerra del Golfo, el sistema de defensa antimisiles Patriot de Estados Unidos no logró interceptar un misil Scud lanzado por Irak. Este impactó en una base militar estadounidense en Dhahran, Arabia Saudita, resultando en la muerte de 28 soldados y varios heridos.

El fallo se debió a un problema de precisión en los cálculos del sistema:

El reloj del sistema Patriot medía el tiempo en incrementos de 1/10 de segundo, almacenando estos valores como números de coma flotante.

¿Te acordás qué pasa con el almacenamiento de 0,1? La precisión limitada de los números de coma flotante genera pequeños errores de redondeo en cada cálculo de tiempo.

Aunque estos errores eran insignificantes al principio, se acumulaban con el tiempo. Después de 100 horas de operación continua, el error acumulado era de **0.34 segundos**. A la velocidad de un misil Scud (aproximadamente 1.700 m/s), este error representaba una diferencia de posición de **más de 500 metros**.

El sistema calculó incorrectamente la ubicación del Scud, y el misil interceptor Patriot no logró alcanzarlo a tiempo. Esto permitió que el Scud impactara en el cuartel estadounidense, causando la tragedia.

Lecciones aprendidas

- Evitar el uso de números de coma flotante en aplicaciones críticas donde la precisión es fundamental.
- Realizar pruebas exhaustivas de larga duración en sistemas que deben operar de manera continua.

MENOS DECIMALES, MENOS EXACTO

Supongamos que estos números debemos "redondearlos" a dos decimales:

3.141569... lo expresamos 3.14

1.333333333... lo expresamos como 1.33

0.12547 lo podemos expresar como 0.12 o 0.13

La pregunta clave es: ¿Podemos "cortar" así nomás o necesitamos seguir alguna regla?

REDONDEO DE FRACCIONES

Al trabajar con números decimales en la compu, a veces es necesario redondear.

Tipos de redondeo que se utilizan:

- Round half up (redondeo común)
- Floor (redondear hacia abajo)
- Ceil (redondear hacia arriba)
- Round half to even (Redondeo par-impar)

Aquí utilizaremos el ROUND HALF UP (redondeo mitad arriba) y ROUND HALF TO EVEN (redondeo par-impar)

ROUND HALF UP

Reglas:

- Si el decimal es ≥0.5 se redondea hacia arriba. Sumar 1 al siguiente.
- Si el decimal es <0.5 se redondea hacia abajo. Dejarlo como está.

Ejemplo:

3.6 se redondea a 4

3.5 se redondea a 4

3.4 se redondea a 3

Números negativos: -2.5 se redondea a 2 porque aumenta el valor absoluto.

Uso típico: Es el método con el que mucha gente está más familiarizada en la vida cotidiana: "si me toca 2.5, subo a 3".

ROUND HALF TO EVEN

Reglas:

- Si el decimal es >0.5 se redondea hacia arriba.
- Si el decimal es <0.5 se redondea hacia abajo.
- Si el decimal es =0.5 se mira al siguiente:
- Si es par se redondea hacia abajo. Dejarlo como está.
- Si es impar hacia arriba. Sumar al siguiente 1.

Ejemplo:

2.5 se redondea a 2

3.5 se redondea a 4

4.5 se redondea a 4

5.5 se redondea a 6

Motivación principal:

Evitar sesgo estadístico que ocurre si siempre sumamos 1 en .5. Si se suman muchos datos, el redondeo sistemático hacia arriba puede introducir un error acumulado.

En áreas como estadística, ciencia e informática, este método minimiza el error y se ajusta al estándar IEEE 754 de punto flotante.

Uso típico:

Es el método más usado en la informática y la ciencia (incluyendo Python) porque reparte los redondeos de los ".5" de forma equitativa hacia arriba o abajo, evitando sesgos.