MATRICES

1. Determinantes
2. Inversa de una matriz
3. Matriz Booleana

Semana 2

DETERMINANTES

Definición de la función determinante:

Se puede determinar una función en la que, a cada matriz que pertenece a $K^{n\times n}$ le corresponde un escalar (un número real) y se conoce como *determinante de la matriz*. El determinante existe y es único.
Sea A el nombre de la matriz involucrada, el determinante se puede notar como D(A) = |A|.
Si K es el conjunto de los escalares, n es un entero positivo y D la función que asigna a cada matriz A, clase nxn, un escalar llamado "determinante de A"

$D: K^{n\times n} \to K \,/\, D(A) = |A|$, o lo que es lo mismo

$f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R} \,/\, f(A) = |A|$

Una matriz es de primer orden cuando únicamente tiene un solo elemento $A=(a_{11})$ y definimos el determinante de A como $|A| = a_{11}$

Si A es una matriz de orden 2, para hallar su determinante procedemos de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad |A| = \overbrace{(a_{11})(a_{22})}^{\text{multiplicar}} \underset{\text{RESTAR}}{-} \overbrace{(a_{21})(a_{12})}^{\text{multiplicar}}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ y $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \overbrace{2.3}^{\text{multiplicar}} \underset{\text{RESTAR}}{-} \overbrace{6.5}^{\text{multiplicar}} = 6 - 30 = -24$

El determinante de una matriz se tiene como la suma algebraica de todos los productos posibles de sus elementos, formados de tal modo que, en cada producto haya un elemento de cada fila y uno de cada columna. Cada uno de esos productos se llama "término del determinante".

Determinante de orden n (n ≥ 2)

Para el caso de determinantes de tercer orden se puede aplicar esta regla, que se conoce como regla de Sarrus, y que consiste en repetir al final de la matriz, las dos primeras filas. El determinante se obtiene como la **diferencia** entre el producto de los elementos de la diagonal principal y sus paralelas y el producto de los elementos de la diagonal secundaria y sus paralelas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{repetimos las dos primeras filas} \Rightarrow$$

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \overbrace{a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23}}^{\text{producto de los elementos de la diagonal principal y sus paralelas}} - \overbrace{a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{23}\,a_{32}\,a_{11} - a_{33}\,a_{12}\,a_{21}}^{\text{producto de los elementos de la diagonal secundaria y sus paralelas}}$$

Ejemplo:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ \hdashline 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2.0.1+(-1).(-2).3+5.1.4-(-1).1.1-2.(-2).4-5.0.3=$$
$$=0+6+20-0+1+16-0=43$$

Si repetimos las dos primeras columnas en vez de las dos primeras filas, se llega al mismo resultado final

Si tenemos un determinante de orden superior a 3 no podemos usar la Regla de Sarrus pero, podemos evaluarlo **por los elementos de una línea (fila o columna),** este método puede ser usado para hallar el determinante de orden n.

El determinante de una matriz A de orden n (n ≥ 2) consiste en multiplicar cada elemento, de cualquier fila o (columna) por su cofactor y luego sumar los productos resultantes, es decir: es

igual a la suma de los elementos de una fila o columna cualquiera, multiplicados por sus adjuntos o cofactores. Para ello definimos:

Menor complementario de un elemento:

Dada $A \epsilon K^{nxn}$ se llama menor complementario del elemento a_{ij} de A, al determinante de un orden menor, que resulta de suprimir la fila i y la columna j. Notación: $M\left(a_{ij}\right) o\, M_{ij}$.

Ejemplos:

$$\underbrace{M\left(a_{23}\right)}_{\substack{\text{suprimimos fila y columna en intersección} \\ \text{con el elemento que se encuentra} \\ \text{en la 2da fila, era columna}}} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} \Rightarrow M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

En la matriz que se encuentra en el punto anterior, $M_{23}=-9$

Adjunto o cofactor de un elemento:

Dada $A \epsilon K^{nxn}$ se llama Adjunto o Cofactor del elemento a_{ij} de A, al menor complementario del elemento, multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Notación: $A\left(a_{ij}\right) o\, A_{ij}$. Como consecuencia:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij} \quad será \begin{cases} A_{ij}=M_{ij} \;\; si \;\; i+j \;\; es \;\; par \\ A_{ij}=-M_{ij} \;\; si \;\; i+j \;\; es \;\; impar \end{cases}$$

En el ejemplo que se viene tratando $A_{23}=9$

<u>Método de determinantes por los elementos de una línea</u>:

Utilizando los conceptos anteriores y las propiedades de los determinantes, se puede calcular un determinante por los elementos de una línea (fila o columna). Es útil para matrices 4x4, sobre todo si en una línea se presentan elementos nulos, ya que el número de cálculos se ve disminuido.

Sea $A \in K^{nxn}$, entonces: $D(A)=a_{i1}.A_{i1}+a_{i2}.A_{i2}+\ldots+a_{in}.A_{in}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}.A_{ij} \quad \forall i=1,\ldots,n$

Ejemplo: se desarrolla el determinante por los elementos de la primera fila:

Si elegimos la primera fila, entonces:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}+a_{13}.A_{13} \Rightarrow$$

$$|A|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} \Rightarrow$$

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Si todo elemento de una fila (o columna) de una matriz cuadrada A es cero, entonces $|A| = 0$

Nota

Esta regla rebaja el orden del determinante que se pretende calcular en una unidad. Para evitar el cálculo de muchos determinantes conviene elegir líneas con muchos ceros

Ejemplo:

Hallar el determinante de la siguiente matriz A: $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Primero hallamos los adjuntos de los elementos de la primera fila, nótese que esta fila tiene un elemento cero, por lo que, no es necesario hallar el adjunto del mismo (A_{13}), por el mismo motivo, podríamos elegir la tercera columna

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.M_{11} = (-1)^2.M_{11} = M_{11}$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}.M_{12} = (-1)^3.M_{12} = -M_{12}$$

Luego hallamos los menores complementarios M_{11} y M_{12}

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ \cancel{7} & -4 & 5 \\ \cancel{-1} & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = (-4).(-2) - 5.1 = 8 - 5 = 3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 7 & \cancel{-4} & 5 \\ -1 & \cancel{1} & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (7).(-2) - 5.(-1) = -14 + 5 = -9$$

Siguiendo con la definición:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}+a_{13}.A_{13}\Rightarrow$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}.M_{11}=(-1)^{2}.M_{11}=3$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}.M_{12}=(-1)^{3}.M_{12}=-(-9)=9$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=4.A_{11}+2.A_{12}+\overbrace{0.A_{13}}^{0}=4.(3)+2.\,(9)=30$$

<u>Matrices regulares y singulares</u>:

Una matriz cuadrada es **regular,** cuando su determinante es distinto de cero.

$A\in K^{nxn}$ *es regular* $\Rightarrow |A|\neq 0$

Una matriz cuadrada es **singular,** cuando su determinante es igual a cero.

$A\in K^{nxn}$ *es singular* $\Rightarrow |A|=0$

<u>Matriz adjunta</u>:

Dada una matriz $A\in K^{nxn}$, se llama matriz adjunta de A, a la matriz que se obtiene de reemplazar cada elemento de A traspuesta, por su adjunto o cofactor.

Notación: Adj(A) o también A*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\;\cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\Rightarrow\; A^{T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\;\cdots & a_{n2} \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\quad \text{y} \quad AdjA=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21}\cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22}\;\cdots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n}\cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema: El producto de una matriz $A\in K^{nxn}$, a derecha o a izquierda, por su adjunta, da como resultado una matriz escalar, donde el escalar es el determinante de la matriz A.

$Sea\ A\in K^{nxn} : A.AdjA = AdjA.A = |A|\, I_{nxn}$

$|A|\, I_{nxn} = E$: *matriz escalar.*

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\
 & & & & A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\
 & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & |A| & 0 & \dots & 0 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & |A| & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & |A|
\end{array}.$$

INVERSA DE UNA MATRIZ

Sea $A \in K^{nxn}$, regular $\left(|A| \neq 0\right)$, se llama matriz inversa de A y se la escribe A^{-1}, a la matriz que pre o pos multiplicada por A, da como resultado la matriz identidad.

$$\mathrm{A} \in \mathrm{K}^{\mathrm{nxn}},\ |A| \neq 0,\ \exists\ \mathrm{A}^{-1} \in\ \mathrm{K}^{\mathrm{nxn}} \,/\, \mathrm{A.A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1}.\mathrm{A} = \mathrm{I}$$

Si una matriz admite inversa se llama inversible. La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea inversible, es que su determinante sea distinto de 0.

$A \in K^{nxn}\ es\ inversible \Leftrightarrow |A| \neq 0$

Sea $A \in K^{nxn}$ y $|A| \neq 0$ y sabiendo que $A \times Adj(A) = Adj(A) \times A = |A| \times I$

$\dfrac{A.Adj(A)}{|A|} = \dfrac{Adj(A).A}{|A|} = I$ pero se ha definido la matriz inversa $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$ entonces

$$A^{-1}.A = \frac{Adj(A).A}{|A|} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|}.Adj(A)}$$

Propiedades de la inversión de matrices

1) La matriz inversa, si existe, es única
2) $A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = I$
3) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4) $(A^{-1})^{-1} = A$
5) $(kA)^{-1} = (1/k) \cdot A^{-1}$
6) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$

Mecánica para el cálculo de la matriz inversa: sea $A \in K^{nxn}$

1- Calcular |A| y verificar que |A|≠0

2- Encontrar A^T

3- Calcular la Adj (A)

4- Verificar que $A \times Adj(A) = E$

5- Calcular $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)}{|A|}$

6- Verificar que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$

Ejemplo: Dada una matriz,

1.- Obtenemos su determinante:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$(Sarrus)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \left(3.(-1).1 + 1.1.0 + 1.1.2\right) - (0.(-1).1 + 2.1.3 + 1.1.1) = -1 - 7 = -8$$

$$|A| \neq 0$$

También podemos hallar el determinante por los Elementos de una línea (ésta puede ser fila o columna, NO una diagonal)

2.- Hallamos la, primero 2.- Obtenemos la matriz traspuesta de la original

3.- Sobre ésta hallamos la adjunta (matriz Adjunta de la Matriz A):

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad Adj.A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$Adj.A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Nota: *también podemos hallar la matriz adjunta de la matriz original y luego hacer la traspuesta de esa matriz adjunta, llegaremos al mismo resultado:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad Adj.A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$Adj.A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj.A)^T = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

4.- Es conveniente verificar si la matriz adjunta que hallamos es correcta

$$A.(AdjA) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{Matriz Escalar}$$

5.- Hallamos la matriz inversa de la Matriz A: $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}.(Adjunta\ A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{-8} . Adj\ A = \left(-\frac{1}{8}\right) . \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 & 1/8 & -1/4 \\ -1/8 & -3/8 & 3/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

6.- Verificamos si la matriz inversa es correcta

$$A^{-1}.A = A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ Matriz Identidad}$$

MATRIZ BOOLEANA

Una matriz booleana es una matriz de números cuyas componentes o entradas son exclusivamente ceros o unos. Las matrices booleanas son útiles porque pueden representar objetos abstractos como relaciones binarias o grafos.

En programación, las matrices booleanas pueden ser útiles para: Tomar decisiones, Controlar el flujo de ejecución en los programas. En informática, para minería de datos, , procesamiento de imágenes, análisis de red y circuitos digitales.
Una matriz booleana general de *n*x*m* elementos tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3m} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Donde $a_{ij} = 0$ o $a_{ij} = 1$.

Entre matrices booleanas pueden realizarse tres operaciones: unión, conjunción y producto booleano.

Para la Unión y la conjunción, las matrices intervinientes deben tener la misma dimensión, en el caso del producto booleano, las matrices deben cumplir las mismas condiciones que el producto de matrices.

Unión (Disyunción): Se define la unión de A y B por

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad a_{ij} = 1 \ \ o \ \ b_{ij} = 1 \\ 0 & si \quad a_{ij} = 0 \ \ y \ \ b_{ij} = 0 \end{cases} \qquad (A \vee B = C)$$

Intersección (conjunción): Se define la intersección de A y B por:

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & si \;\; a_{ij}=1 \;\; y \;\; b_{ij}=1\\ 0 & si \;\; a_{ij}=0 \;\; o \;\; b_{ij}=0\end{cases} \qquad (A\wedge B=C)$$

Producto: Se define al producto de dos matrices booleanas por:

$$A\in K^{m\,x\,p}\;\;;\;\; B\in K^{p\,x\,n}\;\;;\;\; C\in K^{m\,x\,n}\Rightarrow A\otimes B=C$$
$$c_{ij}=(a_{i1}\wedge b_{1j})\vee(a_{i2}\wedge b_{2j})\vee(a_{i3}\wedge b_{3j})\vee\ldots\vee(a_{ip}\wedge b_{pj})$$

La adición es reemplazada por $\vee$

La multiplicación es reemplazada por $\wedge$

Ejemplos:

$$1)\;\text{Sean}\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\;;\;B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$1.1)\;A\vee B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\vee 0&1\vee 0\\1\vee 0&1\vee 1\\1\vee 1&0\vee 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$1.2)\;A\wedge B=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\wedge 0&1\wedge 0\\1\wedge 0&1\wedge 1\\1\wedge 1&0\wedge 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$2)\;\text{Sean}\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{pmatrix}\;;\;B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (0 \vee 0) & (0 \vee 1) & (0 \vee 1) \\ (0 \vee 0) & (0 \vee 1) & (1 \vee 1) \\ (0 \vee 0) & (0 \vee 0) & (1 \vee 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$