MATRICES

1. Aplicaciones
2. Introducción
3. Definición
4. Operaciones

Semana 1

1. APLICACIONES

(ver archivo Aplicaciones de Matrices)

2. INTRODUCCIÓN

(*Matemática para computación* (Seymour Lipschutz) página 209)

Suponemos una lista con el peso de ocho estudiantes:

61	70	58	65	62	57	56	62

Se pueden usar los valores en la lista usando un símbolo, pero, con diferentes subíndices:

w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8

Los subíndices indican la posición del valor en la lista, por ejemplo:

$w_1 = 61$, es el primer valor de la lista, $w_2 = 70$, es el segundo valor de la lista, …, $w_8 = 62$, es el último valor de la lista

Esta lista se denomina vector o arreglo lineal.

Usando una notación de subíndices, es posible escribir la suma y el promedio de los pesos de los alumnos:

$$\sum_{i=1}^{8} w_i = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 + w_6 + w_7 + w_8 \qquad y \qquad \left(\frac{\sum_{i=1}^{8} w_i}{8} \right)$$

La notación con subíndices es necesaria para desarrollar expresiones concisas para manipulaciones aritméticas.

De la misma manera, podemos hacer un listado de ventas semanales (en miles de dólares), aproximadas, de una cadena de 20 almacenes, cada uno de ellos con 4 departamentos, entonces, usamos un símbolo, por ejemplo, s, pero, con dos subíndices, para indicar las entradas de la tabla:

almacén/dpto	1	2	3	4
1	2800	1200	3250	980
2	2170	1954	2300	1540
3	3160	1840	3685	1952
...	...	...	...	...
20	2256	936	2625	1560

$s_{1.1} \quad s_{1.2} \quad s_{1.3} \quad s_{1.4} \quad s_{2.1} \quad s_{2.2} \quad \cdots \quad s_{20.4}$

Donde $s_{i.j}$ indica las ventas del almacén i-ésimo, departamento j-ésimo (escribiremos s_{ij} cuando no haya posibilidad de confusión), es decir:

$$s_{11} = 2800 \quad s_{12} = 1200 \quad s_{13} = 3250 \quad s_{14} = 980 \quad s_{21} = 2170 \quad s_{22} = 1954 \quad \ldots \quad s_{204} = 1560$$

Se denomina matriz o arreglo de dos dimensiones o, arreglo rectangular.

3. DEFINICIÓN DE MATRIZ

Se llama **matriz** de orden **m×n** a todo conjunto rectangular de elementos $\boldsymbol{a}_{ij}$ dispuestos en **m** filas y **n** columnas de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Las m n-tuplas horizontales se denominan filas de A

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \ldots \quad a_{1n}) \quad (a_{21} \quad a_{22} \quad \ldots \quad a_{2n}) \quad \ldots \quad (a_{m1} \quad a_{m2} \quad \ldots \quad a_{mn})$$

Las n m-tuplas verticales se denominan columnas de A

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \quad \ldots. \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

El elemento genérico de la matriz A es a_{ij} llamado la entrada ij, aparece en la fila i, columna j, entonces, denominamos tal matriz por $A = (a_{ij})$ con i =1, 2, ..., m, j =1, 2, ..., n.

Por ejemplo, el elemento a_{25} será el elemento de la fila 2 y columna 5.

Podemos escribir: Sea $A = (a_{ij})_{mxn}$, o bien $A \in K^{mxn}$, es decir, A pertenece a la clase de matrices mxn

Dos matrices son **iguales** cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas son iguales.

Una matriz que tiene solamente una fila se denomina vector fila y una matriz que tiene una columna, vector columna.

Clasificación de matrices

Atendiendo a la forma

Matriz Rectangular: Es aquella en la que el número de filas es distinto al número de columnas, es decir **m ≠ n**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad con\, A \in K^{mxn};\ m \neq n$$

Ejemplo: $B_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathrm{m} = 2 \ \ \mathrm{y}\, \mathrm{n} = 3$

- Si $m < n$ A es una matriz rectangular horizontal
- Si $m > n$ A es una matriz rectangular vertical

Matriz fila (vector fila): Es una matriz que solo tiene una fila, es decir m =1 y por tanto es de orden **1xn**.

$$A = \left(a_{11} a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \right) \ con\, A \in K^{1xn}$$

Ejemplo: $A_{1x3} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathrm{m} = 1 \ \ \mathrm{y} \ \ \mathrm{n} = 3$

Matriz columna (vector columna): Es una matriz que solo tiene una columna, es decir, n =1 y por tanto es de orden **m x1**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} con\, A \in K^{mx1}$$

Ejemplo: $A_{3x1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad$ m = 3 y n = 1

Matriz cuadrada: Es aquella que tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir **m = n**. En estos casos se dice que la matriz cuadrada es de orden n, y no n x n.

En las matrices cuadradas tiene un interés particular la diagonal principal, aquella que va del vértice superior izquierdo al vértice inferior derecho y está formado por los elementos a_{ij} en los que i=j. La diagonal secundaria, en tanto, va del vértice inferior izquierdo al vértice superior derecho

Ejemplo: $A_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

2, 7 son los elementos de la diagonal principal y -4 y 5 los elementos de la diagonal secundaria

Matriz simétrica: Una matriz cuadrada A es simétrica si $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i, j.

$$A \in K^{nxn} \; es \; simétrica \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, \forall j$$

Ejemplo: $A_{2x2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ donde $a_{12} = a_{21} = 5$

Matriz antisimétrica: Una matriz cuadrada es antisimétrica si si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, j. y los elementos de la diagonal principal son nulos

$$A \in K^{nxn} \; es \; antisimétrica \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, \forall j \quad ; \quad a_{ij} = 0 \;\; si \;\; i = j$$

Ejemplo: $A_{3x3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Atendiendo a los elementos

Matriz nula es aquella matriz, independientemente de su dimensión (de cualquier clase), que tiene todos sus elementos iguales a cero

$$Si \; a_{ij} = 0 \; \forall i \text{ y } \forall j \; \Rightarrow \; \mathrm{A}_{\mathrm{mxn}}$$

Ejemplo: $A_{2x2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; $A_{3x2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$

Matriz Opuesta: Dada A_{mxn}, la matriz B_{mxn} será la opuesta de A si los elementos de B ubicados en la misma posición *ij* de A, son los opuestos de los elementos de A. Se la nota: -A.

$$B=-A \Leftrightarrow b_{ij}=-a_{ij}\begin{cases}\forall i=1,2\ldots m\\ \forall j=1,2\ldots n\end{cases}$$

Ejemplo: $A=\begin{pmatrix}2&-3\\10&-14\end{pmatrix}$ $B=(-A)=\begin{pmatrix}-2&3\\-10&14\end{pmatrix}$

Matriz diagonal o casi escalar: Es una matriz cuadrada, en la que todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal son nulos (excepto la matriz nula).

$C\in K^{nxn}$ $es\,diagonal \Leftrightarrow c_{ij}=0\ si\ i\neq j,\forall i\,\forall j$

Ejemplo: $A_{3x3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&-3\end{pmatrix}$

Matriz escalar: Es una matriz donde los elementos de la diagonal principal son iguales y los demás elementos son nulos, generalmente se la denota con la letra E

$A\in K^{nxn}$ $es\,escalar \Leftrightarrow \begin{cases}a_{ij}=0\ si\ i\neq j\\ a_{ij}=\lambda\ si\ \ i=j\ ,\lambda\in\mathbb{R}\end{cases}$

Ejemplo: $A_{3x3}=E=\begin{pmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}$

Matriz unidad o **identidad:** Es una matriz escalar con los elementos de la diagonal principal iguales a 1. *Se la nota con I.*

$A\in K^{nxn}$ $es\,identidad \Leftrightarrow \begin{cases}a_{ij}=0\ si\ i\neq j\\ a_{ij}=1\ si\ \ i=j\end{cases}$

Ejemplo: $A_{3x3} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz Triangular: Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal. Las matrices triangulares pueden ser de dos tipos:

Matriz Triangular Superior: es la matriz cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.

$A \in K^{nxn}, es\ triangular\ superior \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior: es la matriz cuyos elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero.

$B \in K^{nxn}, es\ triangular\ inferior \Leftrightarrow b_{ij} = 0 \quad \forall i < j$

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 12 & -9 & 0 \\ -10 & 5 & 17 \end{pmatrix}$$

Matriz traspuesta: Dada una matriz A, se llama traspuesta de A, y se representa por A^T, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas, la matriz puede ser cuadrada o rectangular.

$$A \in K^{mxn} \,/\, A = \left(a_{ij}\right)_{mxn} \Rightarrow A^T = \left(a_{ji}\right)_{nxm}\ y\ A^T \in K^{nxm}$$

La primera fila de A es la primera columna de A^T, la segunda fila de A es la segunda columna de A^T, etc.

De la definición se deduce que, si A es de orden m x n, entonces A^T es de orden n x m.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Propiedades de la matriz transpuesta:
$(k.A)^T = k.A^T$
$(A+B)^T = A^T + B^T$
$(A.B)^T = B^T . A^T$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & 12 \end{pmatrix}$

4. OPERACIONES CON MATRICES

Suma de Matrices:

La suma de matrices está definida sólo para matrices de la misma clase.

Sean: $A \; y \; B \in K^{mxn}$, $A = \left(a_{ij}\right)_{mxn}$ y $B = \left(b_{ij}\right)_{mxn}$

Se define: $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)_{mxn}$ $y \; por \; lo \; tanto \; A + B \in K^{mxn}$

Es decir, la suma de A+B es otra matriz de la misma clase, cuyos elementos se obtienen sumando los elementos correspondientes de A y de B.

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 2 \\ 7 & -18 & 4 \end{pmatrix} \; B_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 9 \\ -5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A + B\right)_{2x3} = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 \\ 2 & -22 & 6 \end{pmatrix}$$

Lógicamente, se pueden sumar más de dos matrices: 3, 4...k matrices.

$$[S]_{mxn} = [A]_{mxn} + [B]_{mxn} + \ldots \; \ldots + [K]_{mxn}$$

$$\left[s_{ij}\right]_{mxn} = \left[a_{ij}\right]_{mxn} + \left[b_{ij}\right]_{mxn} + \ldots \; \ldots + \left[k_{ij}\right]_{mxn}$$

Solamente se pueden sumar matrices del mismo orden.

Diferencia de Matrices:

Dadas dos matrices $A \; y \; B \in K^{mxn}$ se define A - B como la suma de A más (-B).

$\forall A, B \in K^{mxn} : A - B = A + \left(-B\right)$

La resta de matrices A-B, es la matriz que se obtiene sumando la matriz A y la matriz opuesta de B.

$$[D]_{mxn} = [A]_{mxn} - [B]_{mxn}$$

$$[D]_{mxn} = [A]_{mxn} + [-B]_{mxn}$$

$$\left[d_{ij}\right]_{mxn} = \left[a_{ij}\right]_{mxn} + \left[-b_{ij}\right]_{mxn}$$

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 8 \\ 7 & -18 & 16 \end{pmatrix} \; B_{2x3} = \begin{pmatrix} 22 & 10 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(A + (-B)\right)_{2x3} = \begin{pmatrix} -10 & -13 & 2 \\ 5 & -15 & 11 \end{pmatrix}$$

Producto de una matriz por un escalar

El producto de una matriz A = (a_{ij}) por un número real k es otra matriz B = (b_{ij}) de la misma dimensión que A y tal que cada elemento b_{ij} de B se obtiene multiplicando a_{ij} por k, es decir, $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Ejemplo:

$$Sea\ A \in K^{2x2} \wedge 7 \in \mathbb{R} / A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 7\ .A = \begin{pmatrix} 7.3 & 7.(-10) \\ 7.2 & 7.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -70 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}$$

El producto de la matriz A por el número real k se designa por k·A. Al número real k se le llama también escalar, y a este producto, producto de escalares por matrices.

Propiedades del producto de una matriz por un escalar

1. k (A + B) = k A + k B (propiedad distributiva 1ª)
2. (k + h) A = k A + h A (propiedad distributiva 2ª)
3. k [h A] = (k h) A (propiedad asociativa mixta)
4. 1·A = A (elemento unidad)
5. k A = k B si A = B y k es distinto de 0.
6. k A = h A si h = k y A es distinto de 0.

Producto de matrices:

Sean las matrices $[A]_{m\times n}\ y\,[B]_{p\times q}$, el producto de ellas (AxB) será factible si cumplen el siguiente requisito: el número de columnas de la matriz $[A]_{m\times n}$ (que es el primer factor) debe ser igual al número de filas de $[B]_{p\times q}$ que es el segundo factor. Debe verificarse: n = p

En $[A]_{m\times n}$ cada uno de los m vectores fila tiene "n" componentes y en la matriz $[B]_{p\times q}$, cada uno de los q vectores columna tiene "p" elementos. Como n=p, se puede multiplicar cada vector fila de [A] por cada vector columna de [B] y AxB se puede realizar.

$$[A]_{m\times n} \times [B]_{p\times q} = [R]_{m\times q} \qquad [a_{ik}]_{m\times n} \times [b_{kj}]_{p\times q} = [r_{ij}]_{m\times q}$$

donde R es la matriz producto y el elemento genérico r_{ij} queda definido por la expresión:

$$r_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj} \quad \text{para i=1;2; .... m y j=1;2; .... q}$$

$$r_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + a_{i3}.b_{3j} + \ldots\ldots + a_{in}.b_{nj}$$

Cuando el producto de dos matrices es posible o realizable, se dice que las matrices son "*conformes o conformables*".

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2x3} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & b_{11} & b_{12} \\ A & \times & B & b_{21} & b_{22} \\ & & & b_{31} & b_{32} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & r_{11} & r_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & r_{21} & r_{22} \end{array}$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21}+a_{13}.b_{31} \\ r_{12} &= a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22}+a_{13}.b_{32} \\ r_{21} &= a_{21}.b_{11}+a_{22}.b_{21}+a_{23}.b_{31} \\ r_{22} &= a_{21}.b_{12}+a_{22}.b_{22}+a_{23}.b_{32} \end{aligned}$$

El desarrollo se puede generalizar para $[A]_{m\times n}\times[B]_{p\times q}$ *con* $n = p$.

Ejemplos

$$A_{2x2}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; B_{2x3}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A.B = R_{2x3}$$

$$\begin{array}{cc|ccc} A.B & & 1 & -2 & 0 \\ & & -3 & 5 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 15 & 12 \end{array}$$

Propiedades del producto de matrices

1. A·(B·C) = (A·B)·C
2. El producto de matrices en general no es conmutativo.
3. Si A es una matriz cuadrada de orden **n** se tiene $A\cdot I_n = I_n\cdot A = A$.
4. Dada una matriz cuadrada A de orden n, no siempre existe otra matriz B tal que $\mathbf{A\cdot B = B\cdot A = I_n}$. Si existe dicha matriz B, se dice que es la matriz inversa de A y se representa por $\mathbf{A}^{-1}$.
5. El producto de matrices es distributivo respecto de la suma de matrices, es decir:
6. A . (B + C) = A . B + A·C
7. Si A·B= 0 no implica que A=0 ó B=0.
8. Si A·B=A·C no implica que B = C.
9. Sean A y B dos matrices conformes: $(A.B)^T = B^T.A^T$