Grafos

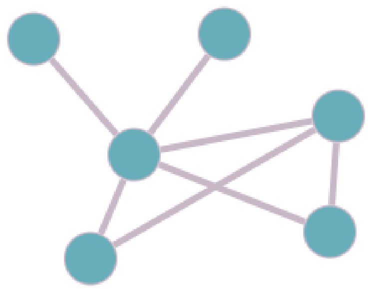
Definición de grafo

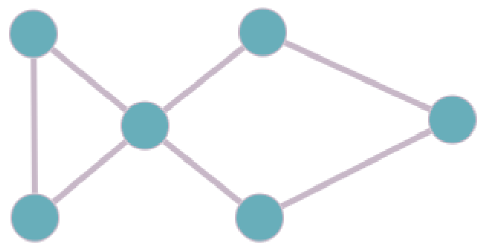
Los grafos son estructuras discretas que constan de vértices y aristas que conectan entre si esos vértices. Un grafo G =(V,E) consta de un conjunto no vacío de Vértices V = { v_1,v_2,v_3,…, v_n} y un conjunto E de aristas, E = { e_1,e_2,e_3,…, e_n} donde cada arista e_k relaciona (conecta) dos vértives v_i,v_j , (iguales o distintos)

Tipos de grafos

Hay distintos tipos de grafos:

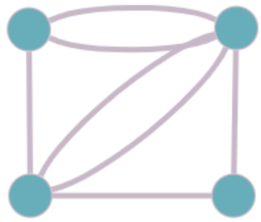
• **Grafo simple**. Consta de aristas no dirigidas que conectan dos vértices distintos y no hay dos aristas que conecten un mismo par de vértices. Un grafo simple $G = (V, E)$ consta de V, un conjunto no vacío de vértices, y de E, un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V.

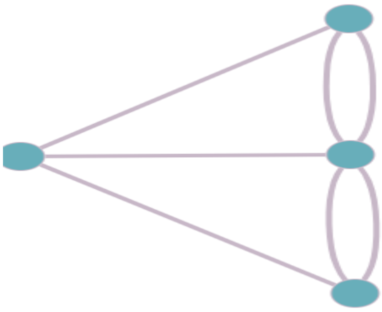




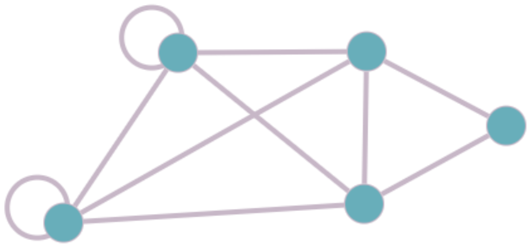
• **Multigrafo.** Constan de vértices y de aristas no dirigidas entre esos vértices, pero admitiendo la existencia de aristas múltiples entre pares de vértices. Todo grafo simple es un multigrafo. Sin embargo, no todos los multigrafos son grafos simples.

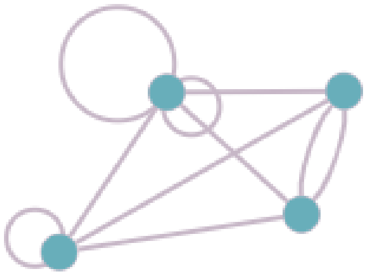
Un multigrafo $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\} \mid u, v \; pertenecen \; a \; V, u \neq v\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$.



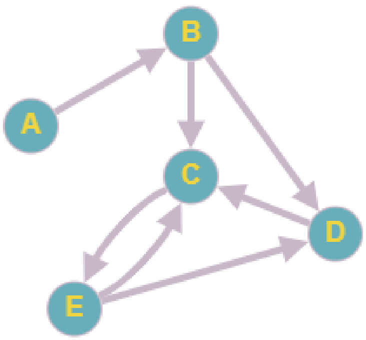


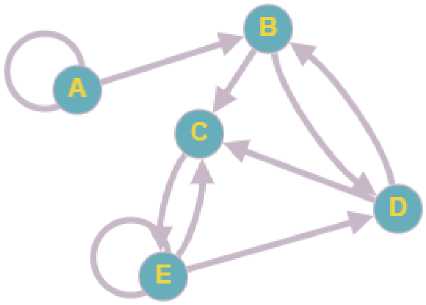
- **Pseudografo:** Son más generales que los multigrafos ya que una arista de un pseudografo puede conectar un vértice consigo mismo. Un pseudografo $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{\{u, v\} \mid u, v\ pertenecen\ a\ V\}$. Una arista e es un bucle, o lazo si $f(e) = \{u, u\} = \{u\}$ para algún u que pertenezca a V.



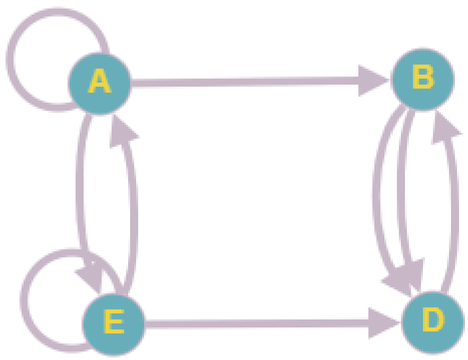


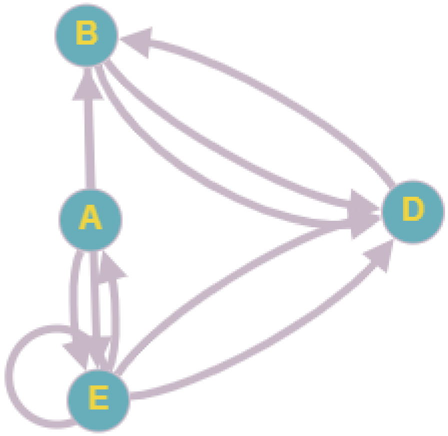
- **Grafo dirigido:** Las aristas de un grafo dirigido son pares ordenados. Se admiten lo bucles, pares ordenados con sus dos elementos iguales, pero no se admiten aristas múltiples en la misma dirección entre dos vértices. Un grafo dirigido $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices y de un conjunto E de aristas que son pares ordenados de elementos de V



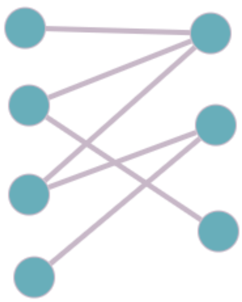


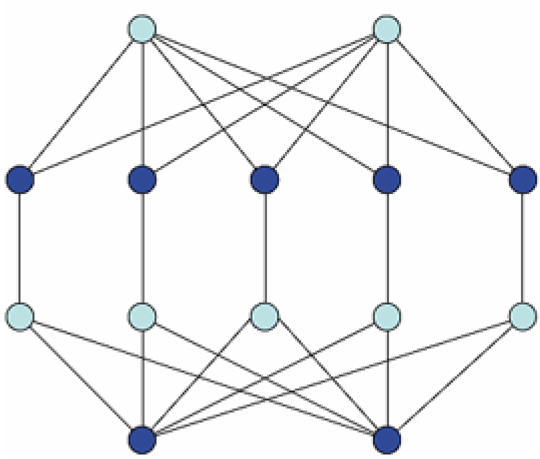
- **Multigrafo dirigido:** Los multigrafos dirigidos pueden tener aristas dirigidas múltiples desde un vértice a un segundo vértice. Un multigrafo $G = (V, E)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto E de aristas y una función f de E en $\{(u, v) \mid u, v\ pertenecen\ a\ V\}$. Se dice que las aristas e_1 y e_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(e_1) = f(e_2)$.





• **Grafos bipartitos** Se dice que un grafo simple G, es bipartito si un conjunto de vértices V se puede dividir en dos conjuntos disjuntos $V1$ y $V2$, tales que cada arista del grafo conecta un vértice $V1$ con un vértice $V2$ (de manera que no haya ninguna arista que conecte entre sí dos vértices de $V1$ ni tampoco de $V2$)

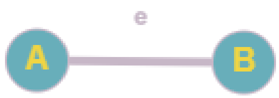




Terminología de grafos

• **Adyacencia:** En un grafo G = (V, E) dirigido o no dirigido, los vértices u y v son adyacentes o vecinos si hay una arista e = {u, v}. En este caso, u y v se denominan extremos de e, y se dice que e conecta o une u y v, o también que la arista e es incidente (o que incide) en cada uno de sus extremos u y v.

Por ejemplo, para el grafo no dirigido que se muestra en la figura, la arista e = (A, B), es incidente en los extremos (vértices A y B) y el vértice A es adyacente a B, así como B es adyacente a A.



• **Aristas paralelas o multiaristas**. Dos aristas asociadas al mismo par de vértices son aristas paralelas o multiaristas; una arista incidente en un solo vértice es un bucle: un vértice que no es incidente en ninguna arista es un vértice aislado. En la figura se ilustran estas definiciones.

Aristas paralelas

bucle

vértice aislado

• **Grado**. El grado de un vértice de un grafo no dirigido es el número de aristas incidentes con él, exceptuando los bucles, (que contribuyen con dos unidades al grado del vértice). El grado del vértice se denota con $\delta(v)$. A los vértices de grado cero se los llama aislados. En el grafo siguiente, por ejemplo, E es un vértice aislado.

$\delta(A)= 3$,

$\delta(B)= 2$,

$\delta(C)= 4$,

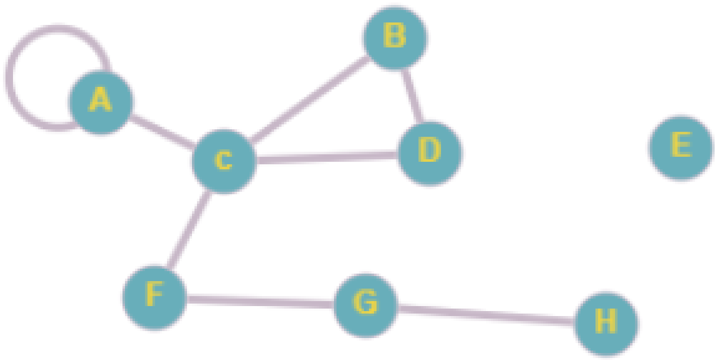
$\delta(D)= 2$,

$\delta(E)=0$,

$\delta(F)= 2$,

$\delta(G)=2$,

$\delta(H)=1$



Grafos definidos a partir de otros grafos

• **Subgrafos.** Considere un grafo G = G(V, E). Un grafo H = H(V ′, E′), se denomina subgrafo de G si los vértices y las aristas de H están contenidas en los vértices y en las aristas de G; es decir, si V ′ ⊆ V y E′ ⊆ E. En particular:

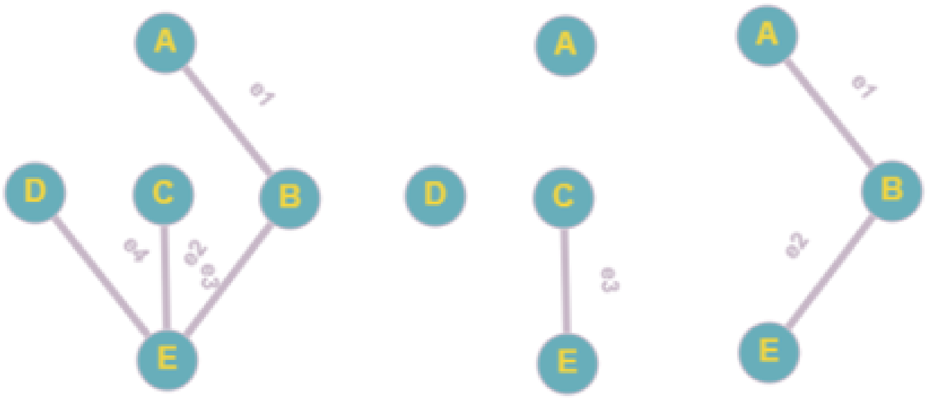
i. Un subgrafo H(V ′, E′) de G(V, E) se denomina subgrafo inducido por sus vértices V ′ si su conjunto de aristas E′ contiene todas las aristas en G cuyos puntos extremos pertenecen a los vértices en H.

ii. Si v es un vértice en V, entonces G − v es el subgrafo de G obtenida al eliminar v de G y al eliminar todas las aristas en G que contienen a v.

iii. Si e es una arista en G, entonces G − e es el subgrafo de G obtenido al eliminar la arista e de G.

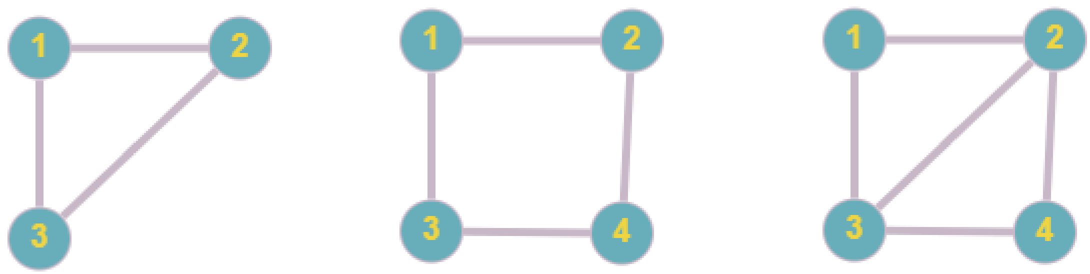
En la figura se muestra en (a) un grafo, del cual tanto (b) como (c) son subgrafos de (a). Dado que el conjunto de vértices del grafo (b) es subconjunto de los vértices del grafo (a) {A, B, C, D} ⊂ {A, B, C, D, E} y lo mismo sucede para las aristas {e' } ⊂ {e1, e2, e3, e4}, por lo tanto decimos que:

- el grafo (b) es un subgrafo de (a)
- el grafo (c) es un subgrafo de (a)



(a) (b) (c)

• **Unión de grafos.** La unión de dos grafos simples $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ es el grafo simple cuyo conjunto de vértices es $V_1 \cup V_2$ y cuyo conjunto de aristas $E_1 \cup E_2$. La unión G_1 y G_2 se denota $G_1 \cup G_2$



G_1 G_2 $G_1 \cup G_2$

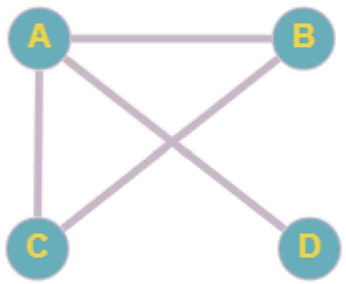
Representación de grafos

• **Matriz de adyacencia.** Es una matriz que representa las conexiones entre pares de vértices. La matriz de adyacencia de un grafo es simétrica. Si un vértice es aislado entonces la correspondiente fila (columna) está compuesta solo por ceros. Si el grafo es simple entonces la matriz de adyacencia contiene solo ceros y unos (matriz binaria) y la diagonal está compuesta solo por ceros.

La matriz de adyacencia en un grafo dirigido no es simétrica. Es una matriz binaria. El número de unos que aparecen en una fila es igual al grado de salida del correspondiente vértice y el número de unos que aparecen en una determinada columna es igual al grado de entrada del correspondiente vértice.

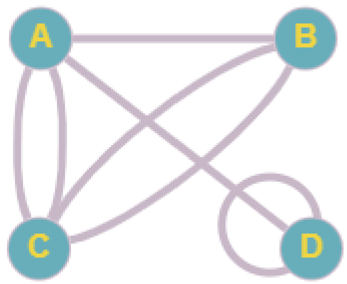
Para construir la matriz de adyacencia de un grafo simple, es necesario considerar

- Paso 1: Se le asignan un orden arbitrario a los vértices.
- Paso 2: Se construye una matriz de dimensión $n*n$, cardinalidad (número de vértices) por cardinalidad (número de vértices).
- Paso 3: En la posición (i j) se coloca 1 si el vértice i es adyacente al vértice j y 0 en caso contrario



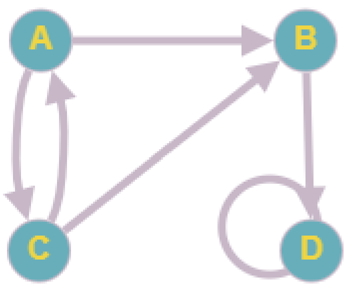
	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	1	0
C	1	1	0	0
D	1	0	0	0

Las matrices de adyacencia también se pueden usar para representar grafos no dirigidos con bucles y aristas múltiples. A un bucle en el vértice Vi le corresponde un 1 en la posición (i,i) de la matriz de adyacencia. Si hay una arista doble entre Vi y Vj, le corresponde un 2 en la posición (i,j). Si hay una arista triple entre Vi y Vj, le corresponde un 3 en la posición (i,j),…



	A	B	C	D
A	0	1	2	1
B	1	0	2	0
C	2	2	0	0
D	1	0	0	1

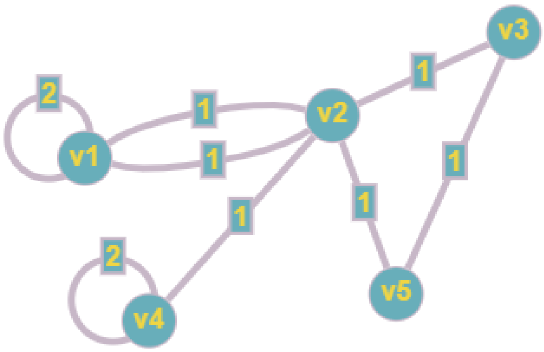
Si G es un grafo dirigido, se puede asociar a G una matriz de adyacencia. Si tenemos una arista que parte del vértice Vi y llega al vértice Vj , ponemos un 1 en la posición (i,j) de la matriz de adyacencia. En caso de no tener esa arista ponemos un 0.



	A	B	C	D
A	0	1	1	0
B	0	0	0	1
C	1	1	0	0
D	0	0	0	1

- **Matriz de incidencia:** Otra representación de grafos usada frecuentemente es la que emplea matrices de incidencia. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Supóngase que $v1, v2, \ldots vn$ son los vértices y que $e1, e2, \ldots em$ son las aristas de G. Entonces la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de V y de E es la matriz M de orden n x m. Para los grafos no dirigidos, la matriz de incidencia se define

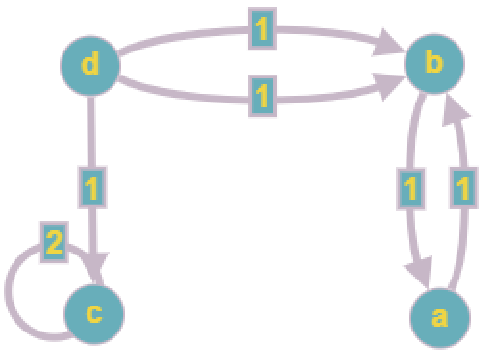
$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la arista } e_j \text{ es incidente de } v_j \\ 0 & \text{en otro caso} \\ 2 & \text{si } v_i \text{ tiene como bucle a } e_k \end{cases}$$



$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para los grafos dirigidos, la matriz de incidencia se define:

$$m_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } v_i \text{ es el vértice final de la arista } e_k \\ 1 & \text{si } v_i \text{ es el vértice inicial de la arista } e_k \\ 2 & \text{si } v_i \text{ tiene como bucle a } e_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e1 & e2 & e3 & e4 & e5 & e6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$