

Teorema de Rouché-Frobenius

$\text{Rg } A = \text{Rg } A' = n \rightarrow \text{Sistema es Compatible Determinado}$

$(\text{Rg } A = \text{Rg } A') \neq n \rightarrow \text{Sistema es Compatible Indeterminado}$

$\text{Rg } A \neq \text{Rg } A' \rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

Ejemplos:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x = -2y - 2z + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ -x + 2y + 2z = 9 \end{cases}$$

Expresión Matricial:

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{copio la primera fila como está} \\ \text{inicializo 2º fila con cero y opero} \\ \text{inicializo 3º fila con cero y opero} \end{array} \right.$$

2º fila: $1 \cdot (-1) - 1 \cdot (2) = -3$

$$1 \cdot (3) - 1 \cdot (2) = 1$$

$$1 \cdot (9) - 6 \cdot (2) = -3$$

3ª fila: $1 \cdot (2) - 1 \cdot (-1) = 3$

$1 \cdot (2) - 1 \cdot (-1) = 3$

$1 \cdot (9) - 6 \cdot (-1) = 15$

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & & \end{array}$$

{ En la última parte, copio 1ª y 2ª fila como están
e inicializo los dos primeros elementos de la 3ª fila con cero
luego opero, el elemento de referencia es (-3)

3ª fila: $-3 \cdot (3) - 1 \cdot (3) = -12$

$-3 \cdot (15) - (-3) \cdot (3) = -36$

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \\ -1 & 2 & 2 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 15 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & -36 \end{array}$$

Matriz A

A

Matriz Ampliada

A'

Contamos la cantidad de filas no nulas del último sistema

Equivalente, lo que corresponde a la matriz A, eso nos da

su Rango: **Rg A = 3**

Contamos la cantidad de filas no nulas de la matriz

ampliada A', su rango es **Rg A' = 3**

Rg A = Rg A' = n = 3 ; n = número de incógnitas

Por lo tanto es un Sistema Compatible Determinado

Para hallar el conjunto solución, es decir, el valor de las incógnitas, trabajamos con el sistema equivalente:

$$x + y + z = 6$$

$$-3y + z = -3$$

$$-12z = -36$$

Despejamos z: $z = \frac{-36}{-12} \rightarrow \boxed{z = 3}$

Reemplazamos z en la 2° ecuación para hallar el valor de y:

$$-3y + 3 = -3 \rightarrow -3y = -6 \rightarrow y = \frac{-6}{-3} \rightarrow \boxed{y = 2}$$

Reemplazamos z e y en la 1° ecuación para hallar el valor de x:

$$x + 2 + 3 = 6 \rightarrow x + 5 = 6 \rightarrow x = 6 - 5 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $S = \{(1; 2; 3)\}$

Verificamos la solución en la ecuación original:

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 = 6 \\ 2 \cdot 1 - 2 + 3 \cdot 3 = 9 \\ -1 = -2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 \\ \cancel{2} - \cancel{2} + 9 = 9 \\ -1 = -4 - 6 + 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 = 6 \\ 9 = 9 \\ -1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 6 \\
 \dots & & & \\
 \dots & & & \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 6 \\
 0 & -3 & 1 & -3 \\
 0 & \dots & & \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 6 \\
 0 & -3 & 1 & -3 \\
 0 & 0 & 0 & K
 \end{array}$$

Matriz A

M. Ampliada

$$Rg A = 2 ; Rg A' = 3$$

Sist. INCOMPATIBLE

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 6 \\
 \dots & & & \\
 \dots & & & \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 6 \\
 0 & -3 & 1 & -3 \\
 0 & \dots & & \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 6 \\
 0 & -3 & 1 & -3 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Matriz A

M. Ampliada

$$(Rg A = Rg A' = 2) \neq n$$

Sist. COMPATIBLE INDETERMINADO