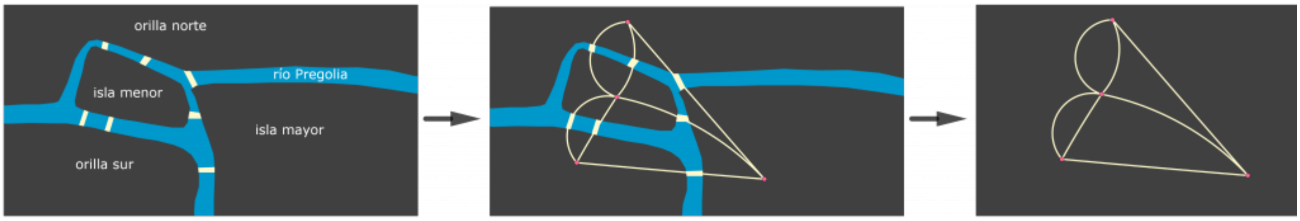
Aplicaciones y curiosidades

¿Cuándo y cómo aparecen los grafos?

Comparativamente con otras áreas matemáticas, los grafos son bastante recientes. Surgen a partir de una curiosa pregunta planteada a principios del siglo XVIII en la ciudad rusa de Kaliningrado (entonces llamada Königsberg). El problema de los puentes de Königsberg se preguntaba si sería posible realizar un paseo andando sin salir de la ciudad, dividida en cuatro regiones por el río Pregolia, de modo que se recorriese una sola vez cada uno de los siete puentes que las conectaban.

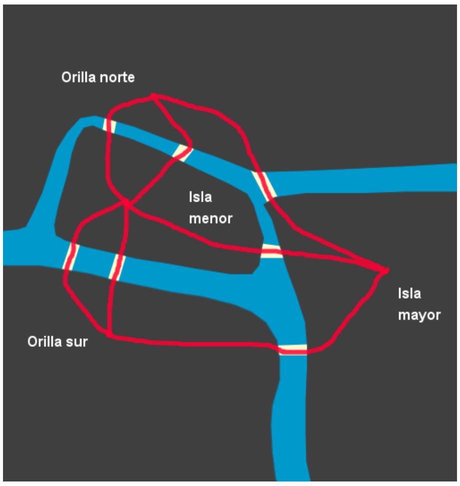
Este problema llama la atención del genial matemático Leonhard Euler, que estaba de visita en la ciudad, quien demuestra en 1736 que tal paseo es imposible de realizar. Esta demostración está considerada la cuna de la Teoría de Grafos. En ella, Euler conjuga tres grandes técnicas demostrativas.



Primero, sintetiza al máximo la situación, reduciendo cada una de las cuatro regiones del mapa de la ciudad a un punto y cada uno de los siete puentes a una línea, obteniendo lo que hoy se conoce como grafo dual del mapa, consistente en cuatro puntos unidos por siete líneas, como muestra la figura. De este modo, el problema original equivale a dibujar este grafo con un solo trazo, sin levantar el lápiz y recorriendo cada línea una sola vez.

Segundo, Euler emplea un antiguo pero potentísimo método de demostración llamado reducción al absurdo. Euler sabe que habrá demostrado la imposibilidad del paseo si, razonando a partir de la suposición de que tal paseo existiera, alcanza una contradicción flagrante, un absurdo.

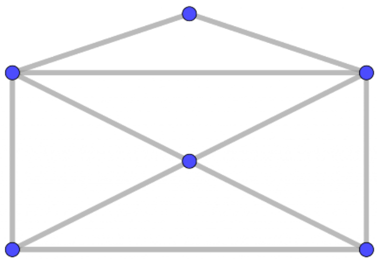
Finalmente, para alcanzar esa contradicción, Euler aplica un criterio de paridad. El grafo tiene cuatro vértices. Como solo puede haber un vértice de salida y uno de llegada, los otros vértices tienen que ser vértices de tránsito, es decir, ni se empieza ni se acaba en ellos. Pero eso es imposible, ya que todo vértice de tránsito tendría que tener un número PAR de aristas (la mitad de ellas para llegar al vértice y la otra mitad para salir de él), y todos los vértices del grafo tienen grado impar (3 o 5). Así que… ¡el paseo buscado no puede existir! Los ciudadanos de Königsberg que lo intentaran estaban condenados de antemano al fracaso.



Pulsa aquí para intentar cruzar todos los puentes

Figuras de un solo trazo

Este criterio de paridad es clave para reconocer fácilmente cuándo un grafo se puede dibujar de un solo trazo: o bien todos los vértices tienen grado par (en cuyo caso cualquier vértice servirá de salida y llegada) o bien solo hay dos vértices de grado impar (uno de salida y otro de llegada). En honor a Euler, este recorrido de un solo trazo, de existir, se conoce como camino euleriano.



Pulsa aquí para intentar dibujar de un solo trazo esta figura de un sobre

Grafos simples

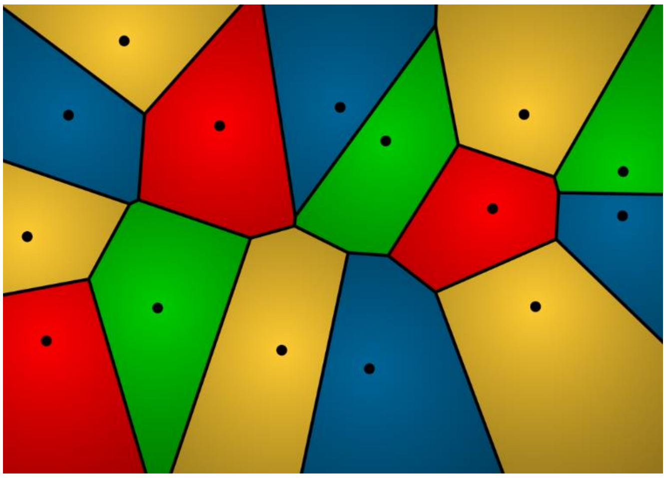
Aunque el grafo más famoso corresponde a los puentes de Königsberg, no es lo que hoy conocemos como un grafo simple. Llamamos grafo simple (o sencillamente «grafo», según el contexto) a aquel en donde cada par de vértices no está unido por más de una arista (comprueba que esto no ocurre en el grafo en los puentes de Königsberg, pero sí ocurre en el caso del sobre). A los grafos que no son simples, como el de los puentes, a veces se les denomina multigrafos.

Lema del apretón de manos

Emulando a Euler, ¿serías capaz de deducir el resultado conocido como Lema del apretón de manos?: “En cualquier reunión, el número de personas que estrecha la mano a un número impar de personas es siempre un número par.” (Es decir, el número de vértices de grado impar es siempre par.)

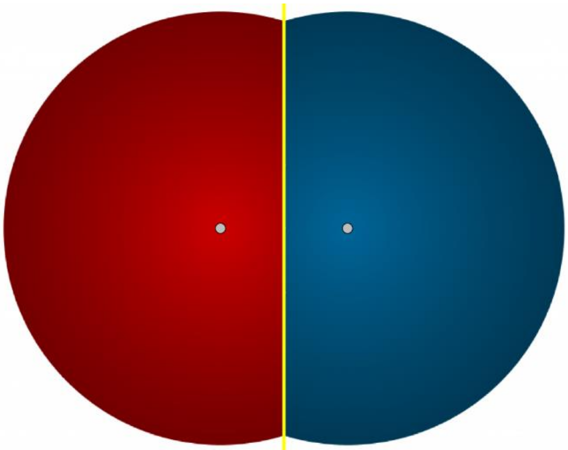
Regiones de proximidad

La solución de Euler al problema de los puentes de Königsberg asocia un grafo a un mapa de regiones. En el siglo XIX surgen también problemas recíprocos, que parten de un conjunto de nodos y preguntan acerca de las regiones que deben corresponder a cierto criterio.

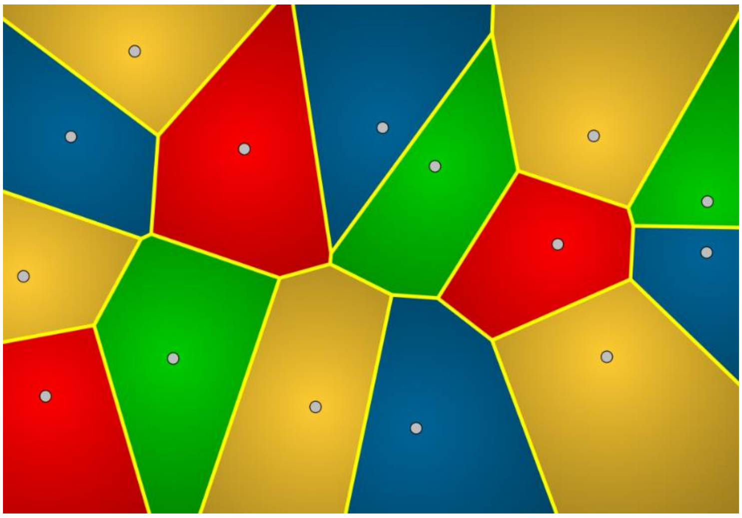


Por ejemplo, dado un conjunto de nodos, ¿cuáles son las regiones formadas por todos los puntos más próximos a cada uno de ellos? La respuesta la da el diagrama de Voronoi correspondiente a esos nodos. Se trata de una división en regiones poligonales (polígonos de Thiessen) cuyos lados descansan sobre algunas mediatrices de los segmentos que unen los nodos.

Podemos generar dinámicamente un diagrama de Voronoi contrayendo simultáneamente circun-ferencias de diferentes colores pero del mismo radio con centro en cada nodo. El rastro de color de cada circunferencia solo sobrevivirá en la región más próxima a cada nodo.



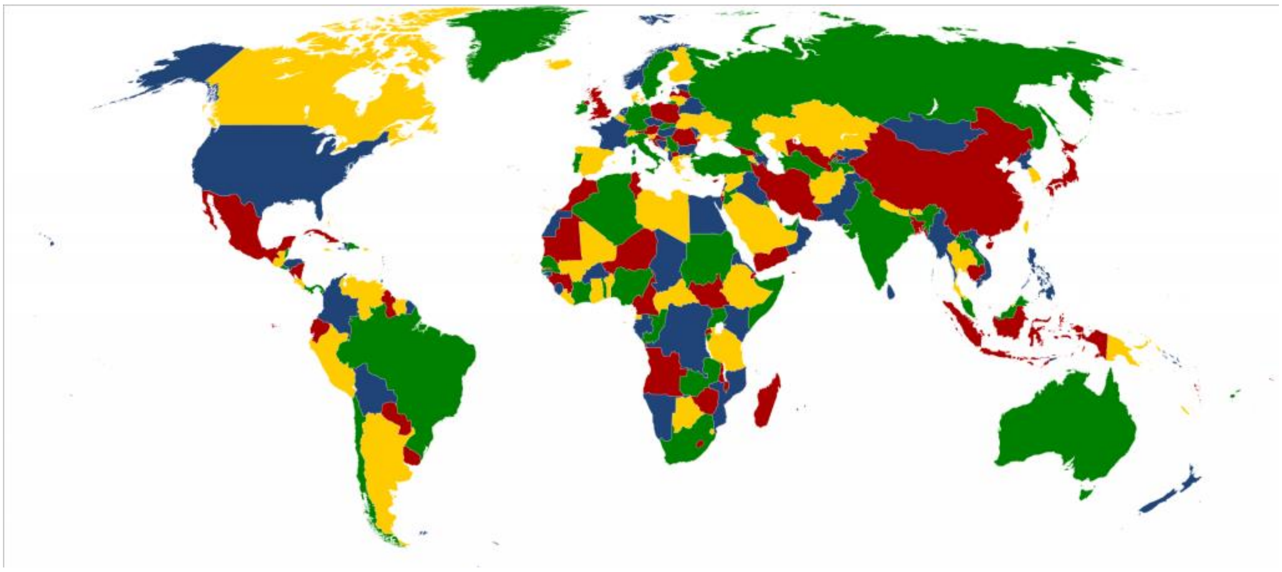
[Pulsa aquí para ver cómo se genera dinámicamente una mediatriz]



[Pulsa aquí para ver cómo se genera dinámicamente un diagrama de Voronoi]

Coloración de grafos

Pero es sobre todo una pregunta de coloreado de mapas la que impulsa definitivamente el desarrollo del estudio de los grafos. Esta pregunta, formulada en 1852 por un matemático inglés cuando aún era estudiante es: ¿será posible colorear cualquier mapa plano de regiones utilizando solo cuatro colores, de modo que no haya dos regiones vecinas del mismo color?



La respuesta, afirmativa, se conoce como teorema de los cuatro colores, pero se tardó más de un siglo en poder demostrarlo. Por fin, en 1970 se obtiene la demostración. Aun así, si bien el resultado es aceptado por la comunidad matemática, la demostración invita a la polémica pues hace uso de un complejo programa de ordenador cuyos resultados no son verificables manualmente. ¿Surgirá algún día otro genio que consiga realizar una "elegante demostración más humana" de este teorema, al estilo de Euler?

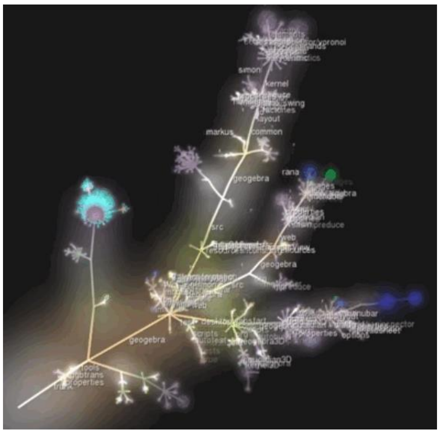
Redes y grafos

Piensa en la red de carreteras de España. Son miles de caminos que conectan poblaciones y lugares. La red eléctrica también, solo que los enlaces son ahora cables en vez de carreteras.

Análogamente, podemos pensar en la redes de autobuses o trenes, la red de metro de una ciudad (el de la figura corresponde a Madrid, año 1982), los circuitos eléctricos y electrónicos, las redes de fibra óptica e inalámbricas, las redes de suministro, las redes sociales, Internet (*net* significa red), la red de enlaces de los átomos en una molécula, etc.

Nuestro propio cerebro alberga una red neuronal gracias a la cual podemos recordar, imaginar, pensar y sentir. En la actualidad existe ya toda una Ciencia de Redes y muchas herramientas que facilitan la creación y visualización de grafos.

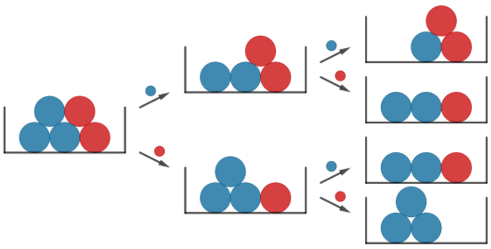
Los grafos tienden a expandirse de modo exponencial. A modo de ejemplo, en el siguiente enlace puedes visualizar el crecimiento del grafo correspondiente a contenidos de **GeoGebra** en unos siete años.



Pulsa aquí para ver siete años de evolución de GeoGebra

Árboles

Los grafos son esquemas de redes, que ayudan a analizarlas, independientemente de la naturaleza de los objetos conectados y sus conexiones. Algunos tienen estructura de árbol (solo hay un camino entre cada par de vértices), como los árboles genealógicos y los árboles de probabilidad.



Aplicaciones de los grafos

Los grafos se usan en prácticamente todo el mundo tecnológico actual. Gracias a ellos podemos, entre otras aplicaciones:

- Averiguar rápidamente cuál es el recorrido más corto (en distancia, tiempo o coste) por carretera entre dos lugares (*problema del camino más corto*, *planificador de rutas*, *algoritmo de Dijkstra*)
- Encontrar las mejores escalas para realizar un vuelo (*multigrafos*)
- Optimizar la distribución de suministros o mensajería (*logística*)
- Analizar cadenas de amistades en las redes sociales (*sociogramas*, *grados de separación*)
- Distinguir o separar claramente zonas o sustancias (*coloración de grafos*)
- Estudiar la planificación de proyectos (*PERT*)
- Analizar transiciones de estado (*autómatas finitos*)
- Ayudar al reconocimiento de imágenes en la visión artificial (*segmentación*)
- Mejorar la velocidad de búsqueda de información (*grafos de conocimiento*)
- Ayudar al rastreo de contagios (*modelos epidemiológicos*)