Caminos

Definición de camino

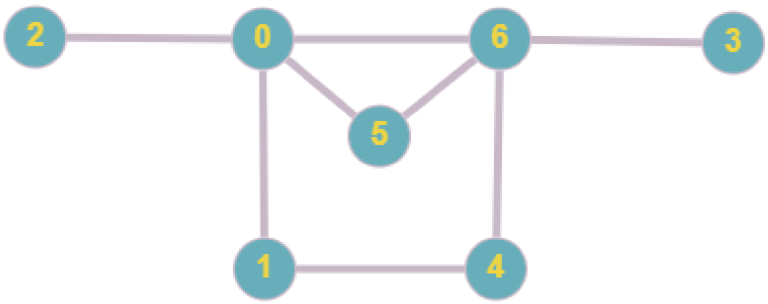
Un camino es una secuencia de aristas que comienza en un vértice del grafo y recorre ciertas aristas del grafo siempre conectando pares de vértices adyacentes.

Sea n un entero no negativo y sea G un grafo (dirigido o no). Un camino de longitud n de u a v en G es una secuencia de n aristas e_1 , e_2 , ... , e_n de G tal que $f(e_1) = \{v_0, v_1\}$, $f(e_2) = \{v_1, v_2\}$, ..., $f(e_n) = \{v_{n-1}, v_n\}$, donde $v_0 = u$ y $v_n = v$. Si el grafo es simple, denotamos este camino por su secuencia de vértices v_0, v_1, ..., v_n (ya que el enumerar estos vértices determina el *camino de forma única).*

Tipos de caminos

- Un **camino cerrado** es aquel que empieza y termina en el mismo vértice.
- Un **camino simple** es un camino que no repite vértices.
- Un **ciclo** es un camino simple cerrado.
- Un **recorrido** es un camino que no repite aristas.
- Un **circuito** es un recorrido cerrado.

Para el siguiente grafo, se pueden mencionar:



Camino: $2 - 0 - 6 - 5 - 0$

Camino cerrado: $4 - 6 - 5 - 6 - 4$

Camino simple: $1 - 4 - 6 - 5$

Ciclo: $1 - 4 - 6 - 5 - 0 - 1$

Recorrido: $3 - 6 - 5 - 0$

Circuito: $5 - 6 - 0 - 5$

Distancia de un camino

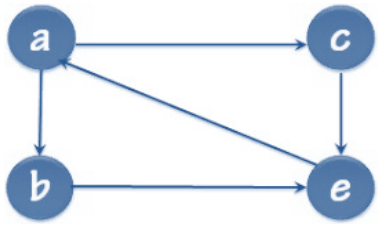
La distancia entre dos vértices (u, v) es la longitud del camino más corto entre ambos.

Grafo conexo

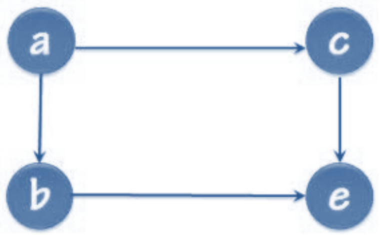
Se dice que un grafo no dirigido es **conexo** si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.

> **Teorema**: Hay un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo no dirigido conexo.
> *Nótese que un grafo que no es conexo es la unión de dos o más subgrafos conexos que no tienen vértices común entre sí. A estos subgrafos conexos disjuntos se les llama componentes conexas del grafo.*

Se dice que un grafo dirigido es **fuertemente conexo** si hay un camino de a a b y un camino de b a a para cualesquiera dos vértices a y b del grafo.



Se dice que un grafo dirigido es **débilmente conexo** si hay un camino entre cada par de vértices distintos

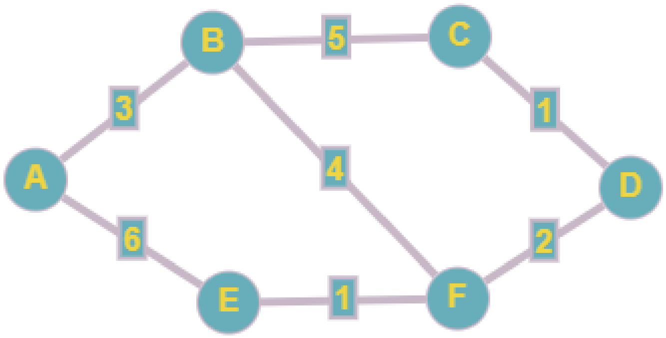


Grafos ponderados

Se define **grafos ponderados** a aquello grafos en los que se asigna un peso a cada una de las aristas.

La **longitud de un camino** en un grafo ponderado es la suma de los pesos de las aristas de ese camino.

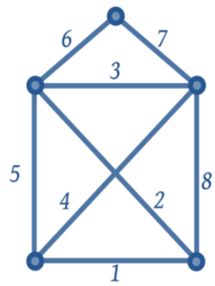
En el grafo que se adjunta la longitud de los caminos A – B – F es 7, en cambio la longitud del camino A – E – F – D es 9



Recorrido y circuito Eulerianos

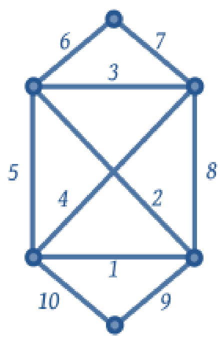
• Un **recorrido euleriano** de un grafo G es un recorrido que contiene a todas las aristas de G (sin repetir ninguna), es decir, pasa por cada arista exactamente una vez.

Por ejemplo: Siguiendo el orden en el que están enumeradas las aristas obtenemos un recorrido euleriano.



• Un **circuito euleriano** es un recorrido euleriano cerrado, es decir, empieza y termina en el mismo vértice.

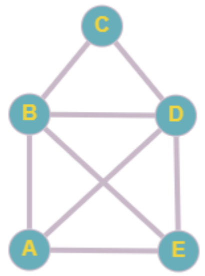
Por ejemplo: Siguiendo el orden en el que están enumeradas las aristas obtenemos un circuito euleriano.



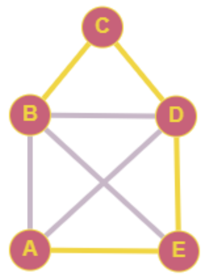
- **Teorema**: Un grafo o multigrafo conexo sin vértices aislados, admite un circuito euleriano si, y sólo si, cada uno de sus vértices tienen grado par.
- **Teorema**: Un grafo o multigrafo conexo sin vértices aislados, admite un recorrido euleriano pero no un circuito euleriano si, y sólo si, tiene exactamente dos vértices de grado impar.
- **Teorema**: Un grafo o multigrafo dirigido conexo sin vértices aislados, admite un circuito euleriano si, y sólo si, el $\delta^{-}(v_i) = \delta^{+}(v_i)$ para cada vértice v_i.

Caminos y ciclos Hamiltonianos

- Se dice que un camino $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ del grafo $G = (V, E)$ es **camino hamiltoniano** si $V = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v\}$ y $v_i \neq v_j$ para $0 \leq i \leq j \leq n$.
- Se dice que un ciclo $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, v_0$ (con $n > 1$) del grafo $G = (V, E)$ es un **ciclo hamiltoniano** si $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ es un camino hamiltoniano, es decir, un camino Hamiltoniano cerrado.

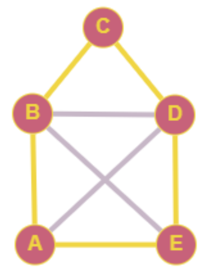


Grafo G



Camino Hamiltoniano

(A,E,D,C,B)



Ciclo Hamiltoniano

(A,E,D,C,B,A)

- El **Teorema de Dirac** establece que para un grafo simple con n vértices si el grado de cada vértice es mayor o igual que $n/2$ (la mitad del número de vértices), entonces el grafo contiene un ciclo Hamiltoniano.
- **El Teorema de Ore** establece que para un grafo simple con n vértices para $n \geq 3$, tal que $\delta(u) + \delta(v) \geq n$ para cada par de vértices no adyacentes en u y v de G. Entonces, G contiene un ciclo hamiltoniano.

  Estos dos últimos teoremas son condición <u>suficiente</u> pero <u>no necesaria</u> para determinar que un grafo tiene un ciclo hamiltoniano.

Importante recordar

- Recorrido Euleriano pasa por todas las aristas.
- Camino Hamiltoniano pasa por todos los vértices.