Analiza matematyczna

Stanisław Jaworski

Katedra Ekonometrii i Statystyki
Zakład Statystyki

Definicja (ciąg)

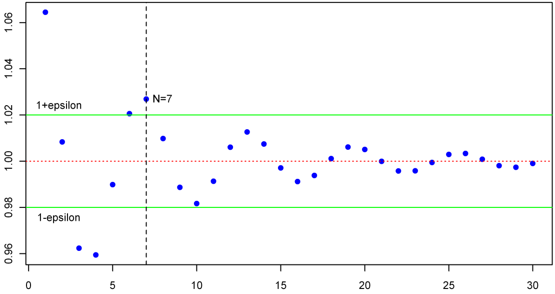
Ciąg (a_n) jest odwzorowaniem $\mathbb{N} \ni n \longrightarrow a_n$, gdzie $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb naturalnych. Liczby $a_1,\ a_2, \ldots$ nazywamy wyrazami tego ciągu.

Przykłady

- $(n)\,,\ (3n+1)\,,\ \left(3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right),\ ((-1)^n+1)$ /nawiasy mogą być mylące/
- $a_n = n,\ a_n = 3n+1,\ a_n = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ a_n = (-1)^n + 1$
- postęp arytmetyczny: $a_n = a + nq$, dla $a, q \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$
- postęp geometryczny: $a_n = aq^{n-1}$, dla $a \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}^+,\ n \in \mathbb{N}$

Definicja (ciąg (a_n) ma granicę $g \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{N} \bigwedge_{n>N} |a_n - g| < \varepsilon$$



oznaczenia: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g, \;\; a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g, \;\; \lim a_n = g, \;\; a_n \to g$

Przykłady: ciągi zbieżne do zera

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim \frac{-1}{n} = 0$
- $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0, \quad \lim \frac{1}{n} \sin n = 0$

Pokażemy z definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Niech ε bedzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Zachodzi $|1/n - 0| < \varepsilon \iff n > 1/\varepsilon$. Zatem możemy przyjąć $N = [1/\varepsilon]$–część całkowita liczby $1/\varepsilon$. **Uwaga:** Możemy przyjąć $N = 1/\varepsilon$, jeżeli nie zależy nam, aby N było liczbą całkowitą. $\square$

Pokażemy z definicji, że $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin n = 0$.

Niech ε bedzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Zauważmy, że $|\frac{1}{n} \sin n| = \frac{1}{n} |\sin n| \leq \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem $|\frac{1}{n} \sin n - 0| < \varepsilon \Leftarrow n > 1/\varepsilon$ Stąd możemy przyjąć $N = [1/\varepsilon]$ jak w poprzednim dowodzie. $\square$

Przykład ciągu zbieżnego do $\frac{1}{3}$

$a_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n-4}$

Pokażemy, że $\lim a_n = \frac{1}{3}$.

Niech ε będzie dowolną liczbą rzeczywistą dodatnią. Zauważamy, że zachodzą następujące nierówności

$$|a_n - \frac{1}{3}| = \frac{5n-10}{3(3n^2+2n-5)} < \frac{5n}{3(3n^2-4)} < \frac{5n}{3\cdot 2n^2} < \frac{1}{n}$$

Zatem $|a_n - \frac{1}{3}|$ jest mniejsze od ε, jeżeli $n > [1/\varepsilon]$ $\square$

Twierdzenie

Jeżeli $\gamma > 1$, *to* $\gamma^n > 1 + n(\gamma - 1)$

Dowód.

Przyjmując $\gamma = 1 + \lambda$, gdzie $\lambda > 0$, na podstawie wzoru na dwumian Newtona mamy

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \dots,$$

gdzie niezapisane wyrazy są dodatnie. Zatem $(1+\lambda)^n > 1 + n\lambda$. Podstawiając $\lambda = \gamma - 1$ otrzymujemy dowód twierdzenia. □

Wniosek: Przyjmując $\gamma = \alpha^{1/n}$, przy $\alpha > 1$ otrzymujemy nierówność

$$\alpha^{1/n} - 1 < \frac{\alpha - 1}{n}.$$

Nierówność tę wykorzystamy do udowodnienia następującego faktu:

Fakt

$\lim a^{1/n} = 1$ *dla* $a > 1$

Dowód.

$|a^{1/n} - 1| = a^{1/n} - 1 < \frac{a-1}{n} < \varepsilon$, o ile $n > N = [\frac{a-1}{\varepsilon}]$ □

Twierdzenie

- *Ciąg zbieżny jest ograniczony.*
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0.$

Twierdzenie

Zakładamy, że (a_n) oraz (b_n) są ciągami zbieżnymi

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, *dla* $c \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, *o ile* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^p$ *dla* $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Przykład

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n^3}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(\frac{1}{n}-3)}{n^3(1+\frac{1}{n^3})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}-3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^3})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}3}{\lim\limits_{n\to\infty}1+(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})^3}=\frac{-3}{1}=-3$$

Przykład: dlaczego ciągi muszą być zbieżne

Ciągi z tabeli spełniają: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

Definicja. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \bigwedge\limits_{M}\bigvee\limits_{N}\bigwedge\limits_{n>N} a_n > M$

a_n	n	$n+5$	$2n$	$n+(-1)^n$
b_n	$2n$	n	n	n
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$	$-\infty$	5	∞	nie istnieje

Przykład: dlaczego ciągi muszą być zbieżne

Ciągi z tabeli spełniają: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1, \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

a_n	$\sqrt[n]{1/n}$	$\sqrt[n]{5}$	$\sqrt[n]{n}$	$\sqrt[n]{3+(-1)^n}$
b_n	n	n	n	n
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n}$	0	5	∞	nie istnieje

Przykład: o nieokreśloności 0^0

Ciągi z tabeli spełniają: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

a_n	$\frac{1}{n^n}$	0.5^n	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{5^n}$	$\frac{1}{n^n}$	$\frac{1}{[3+(-1)^n]^n}$
b_n	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$
$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n}$	0	0.5	1	5	∞	nie istnieje

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Niech ciągi (a_n), (b_n) oraz (c_n) spełniają:

- $\bigvee_{N} \bigwedge_{n>N} a_n \leq b_n \leq c_n$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = b$, *gdzie* $b \in \mathbb{R}$

Wtedy $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

Przykład

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 7^n} = 7\sqrt[n]{3}$$

Stąd $\lim_{n\to\infty} 7 = 7 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} \leq 7 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 7 \cdot 1$

Zatem $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n} = 7$

Twierdzenie

Jeżeli ciąg (a_n) jest rosnący i ograniczony z góry dla $n \geq N$, to jest zbieżny do granicy $g = \sup\{a_n : \ n \geq N\}$

Przykład

Liczbę e definiujemy następująco: $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Ta definicja ma sens tylko wtedy, gdy granica ta istnieje. W tym celu pokażemy, że ciąg $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony.

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k \frac{1}{n^k} = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} +$$

$$+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

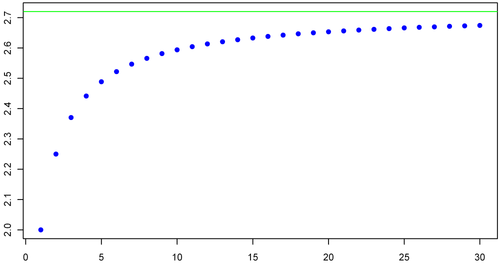
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Popatrzmy! Jeżeli od a_n przejdziemy teraz do a_{n+1}, tj. zwiększymy n o jedność, to pojawi się nowy $(n+2)-$gi wyraz, a każdy z już napisanych wyrazów się zwiększy, bo dowolny czynnik w nawiasach postaci $1-\frac{s}{n}$ zastępujemy większym czynnikiem $1-\frac{s}{n+1}$. Wynika stąd, że $a_{n+1} > a_n$.

Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry ponieważ, opuszczając wszystkie czynniki w nawiasach, powiększamy powyższe wyrażenie. Zatem

$$a_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

Wykres ciągu $a_n = (1 + 1/n)^n$



Fakt: Jeżeli dla pewnego N zachodzi: $a_n > 0$ dla $n > N$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

Fakt: Jeżeli dla pewnego N zachodzi: $a_n < 0$ dla $n > N$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, to $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

Twierdzenie

Jeżeli

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *gdzie* $0 < a \leq \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, *gdzie* $b_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$

to $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$

Twierdzenie

Jeżeli dla pewnego N *ciągi* (a_n) *oraz* (b_n) *spełniają*

- $a_n \leq b_n$, *dla każdego* $n \geq N$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$

Twierdzenie

$$a + \infty = \infty \textit{ dla } -\infty < a \leq \infty; \quad a \cdot \infty = \infty \textit{ dla } 0 < a \leq \infty$$

$$\frac{a}{\infty} = 0 \textit{ dla } -\infty < a < \infty; \quad \frac{a}{0^+} = \infty \textit{ dla } 0 < a \leq \infty$$

$$a^\infty = 0 \textit{ dla } 0^+ \leq a < 1; \quad a^\infty = \infty \textit{ dla } 1 < a \leq \infty$$

$$\infty^b = 0 \textit{ dla } -\infty \leq b < 0; \quad \infty^b = \infty \textit{ dla } 0 < b \leq \infty$$

Definicja (wyrażenia nieoznaczone)

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	1^∞	∞^0	0^0

Definicja

Punkt x_0 nazwywamy punktem skupiena zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$, jeżeli dowolnie blisko x_0 istnieją liczby $x \in X$, różne od x_0.

Równoważnie możemy powiedzieć, że x_0 jest punktem skupienia X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (x_n) taki, że $X \ni x_n \neq x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Definicja

Punkt x_0 jest prawostronnym (lewostronnym) punktem skupienia X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (x_n) taki, że $X \ni x_n > x_0$ $(x_n < x_0)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Definicja

Mówimy, że ∞ $(-\infty)$ jest punktem skupienia zbioru $X \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg (x_n) taki, że $X \ni x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ $(-\infty)$.

Definicja (Granica funkcji)

Niech $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, x_0*−punkt skupienia zbioru* X*. Będziemy pisali*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

jeżeli istnieje punkt $g \in R$ *o następujących własnościach:*

$$\bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in X} [0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon]$$

Twierdzenie (Równoważność definicji granicy funkcji)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \iff \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \text{ dla dowolnego ciągu}$$

$$(x_n) \text{ takiego, że: } X \ni x_n \neq x_0 \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{oraz } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$$

Prawa strona równoważności, to tzw. definicja Heinego granicy funkcji.

Definicja (Definicje granic funkcji)

Niech $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$ *oraz* $x_n \in X$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g \iff \bigwedge_{x_n \to \infty} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = g \iff \bigwedge_{x_n \to -\infty} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g \iff \bigwedge_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n > x_0}} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g \iff \bigwedge_{\substack{x_n \to x_0 \\ x_n < x_0}} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Uwaga: $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Twierdzenie (o arytmetyce granic funkcji)

Jeżeli funkcje f, g mają granice (skończone) w punkcie x_0, to

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}(cf(x)) = c(\lim_{x\to x_0} f(x)), \ \textit{gdzie } c\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))\cdot(\lim_{x\to x_0} g(x))$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \ \textit{o ile} \ \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

Uwaga: Wzory są prawdziwe, jeżeli x_0 zastąpimy przez x_0^+, x_0^-, $-\infty$ lub ∞. Trzeba założyć, że wyrażenia w ostatnim wzorze mają sens.

Twierdzenie (o granicy funkcji złożonej)

Jeżeli funkcje f, g spełniają warunki:

- $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y_0$
- $f(x) \neq y_0$ *dla każdego* $x \in S(x_0)$
- $\lim\limits_{y \longrightarrow y_0} g(y) = g$

to $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(f(x)) = g$

Uwaga: Twierdzenie jest prawdziwe dla pozostałych typów granic. Zbiór $S(x_0)$ *jest postaci* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ *dla pewnego* $\delta > 0$.

Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \text{gdzie } a>0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,\ \text{gdzie } 0<a\neq 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a,\ \text{gdzie } a\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a,\ \text{gdzie } a\in\mathbb{R}$$

Definicja (Asymptota pionowa lewostronna)

Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f jeżeli

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \textit{ albo } \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

Definicja (Asymptota pionowa prawostronna)

Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f jeżeli

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \textit{ albo } \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

Definicja (Asymptota pionowa)

Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową funkcji jeżeli jest jednocześnie asymptotą lewostronną i prawostronną

Definicja (Asymptota ukośna)

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $+\infty$ $(-\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Fakt

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ $(-\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a = \lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} \text{ oraz } b = \lim_{\substack{x\to\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x) - ax]$$

Definicja

Niech $X, Y \subset \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$. O funkcji f powiemy, że jest ciągła w punkcie x_0, jeżeli

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{\delta>0} \bigwedge_{x\in X} [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Twierdzenie

W sytucji opisanej w powyższej definicji niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru X. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Definicja

Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie $p \in X$.

Twierdzenie

Niech f, g będą funkcjami ciągłymi na X. Wówczas $f + g$, $f \cdot g$ oraz f/g są funkcjami ciągłymi. W ostatnim przypadku zakładamy, ze $g \neq 0$

Definicja

Pochodną funkcji $f : X \to Y$ w punkcie $x_0 \in X$ nazywamy liczbę

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Fakt

Jeżeli funkcja f ma pochodną w x_0, to jest ciągła w x_0.

Dowód.
Niech $x_n \longrightarrow x_0$ oraz $h_n = x_n - x_0$

$$\lim_{x_n \longrightarrow x_0} (f(x_n) - f(x_0)) = \lim_{h_n \longrightarrow 0} h_n \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = 0 \cdot f'(x_0) = 0$$

$\square$

Przykład
$f(x) = x^n$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k h^{n-k} - x_0^n}{h} =$$

Przykład, cd.

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x_0^k h^{n-k}}{h} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x_0^k h^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-2}{k} x_0^k h^{n-k-1} + n x_0^{n-1} =$$

$$= h \sum_{k=0}^{n} \binom{n-2}{k} x_0^k h^{n-k-2} + n x_0^{n-1} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} n_0^{x\, n-1}$$

Przykład

$f(x) = 1/x$

$$\frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{x - x - h}{h(x+h)x} = -\frac{1}{(x+h)x} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{x^2}$$

Przykład

$f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{x+h-x}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})h} = -\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Przykład

$f(x) = \log_a x$

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\log_a(1+h/x)^{1/(h/x)} =$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\log_a(1+1/(x/h))^{(x/h)} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{x}\log_a e$$

Przykład

$f(x) = \sin x$. Skorzystam z: $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})}{h}\sin\frac{h}{2} = \cos(x+h/2)\frac{\sin(h/2)}{h/2} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x$$

Przykład

$g(y) = f^{-1}(y)$–funkcja odwrotna do $f(x)$.
$y_0 + h^\star = f(x_0+h) \Rightarrow h^\star = f(x_0+h) - f(x_0)$
$y_0 = f(x_0)$
$0 \neq f'(x_0)$–istnieje
$h^\star \to 0 \iff h \to 0$

$$\frac{f^{-1}(y_0+h^\star) - f^{-1}y_0}{h^\star} = \frac{x_0+h-x_0}{f(x_0+h)-f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Stąd $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Przykład

$f(x) = \arcsin x$. Przyjmujemy, że $(y = \arcsin x \iff x = siny)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Przykład

$f(x)g(x)$

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$= \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Przykład

$f(x) = e^x$. Stąd $\ln(f(x)) = x$

$$\begin{aligned}(\ln(f(x)))' &= x' \\ \frac{1}{f(x)} f'(x) &= 1 \\ f(x)' &= f(x)\end{aligned}$$

Definicja

Niech $f(x)$ będzie funkcją określoną w pewnym przedziale I. Każdą funkcję $F(x)$ różniczkowalną w przedziale I i spełniającą w całym przedziale związek

$$F'(x) = f(x)$$

nazywamy funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale I.

Przykłady

- funkcją pierwotną funkcji $\cos x$ w przedziale $(-\infty, \infty)$ jest $\sin x$, bo $(\sin x)' = \cos x$
- funkcją pierwotną funkcji $1 - 2x$ jest $x - x^2$, bo $(x - x^2)' = 1 - 2x$

Funkcję pierwotną nazywamy również **całką nieoznaczoną** i oznaczamy przez

$$\int f(x)\, dx$$

W myśl określenia całki mamy:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x) \quad \text{oraz} \quad \int F'(x)\,dx = F(x).$$

Obliczanie, czyli wyznaczanie całki nazywamy całkowaniem funkcji.

Przykłady

- $\int \cos x\,dx = \sin x, \quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}, \quad \int 1\,dx = \int dx = x$

Zauważmy, że gdy $F(x)$ jest całką funkcji $f(x)$, to suma $F(x) + c$, gdzie c jest stałą dowolną, jest również całką, bo $[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$. I odwrotnie: Dwie różne całki $F(x)$ oraz $G(x)$ tej samej funkcji $f(x)$ różnią się w całym przedziale o stałą. Istotnie, jeżeli $F'(x) = f(x)$ oraz $G'(x) = f(x)$, to pochodna różnicy $G(x) - F(x)$ równa się w całym przedziale 0, zatem

$$F(x) - G(x) = c$$

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{1+a}}{1+a} + c,\ \text{dla } a \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c,$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c = -\text{arcctg}x + c'$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c'$$

$$\int \sin x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\text{ctg}x + c$$

Niech $f(x)$ oraz $g(x)$ będą funkcjami mającymi całki w pewnym przedziale. Wówczas

- suma $f+g$ ma w tym przedziale całkę oraz

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

- jeżeli a jest stałą, to

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$$

- jeżeli dodatkowowo f, g mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)'g(x)\,dx$$

Uwaga: można spotkać się z oznaczeniem: $dg(x) = g'(x)\,dx$ lub krótko $dg = g'dx$. Wtedy wzór ten zapisujemy w postaci $\int f\,dg = fg - \int g\,df$

Całkowanie przez podstawienie. Nich $f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale (a, b) i niech $\int f(x)\,dx = F(x)$. Niech dalej $x = \phi(t)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale (α, β), spełniającą w nim nierówność $a < \phi(t) < b$ i mającą ciągłą pochodną $\phi'(t)$. Funkcja złożona $F[\phi(t)]$ ma wówczas w przedziale (α, β) pochodną

$$F'[\phi(t)]\phi'(t) = f[\phi(t)]\phi'(t), \text{ bo } F'(x) = f(x),$$

zatem

$$\int f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt = F[\phi(t)].$$

Stąd otrzymujemy

$$\int f(x)\,dx = \int f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt \text{ dla } x = \phi(t)$$

Przykłady (stała będzie pomijana)

- $a \neq 0$, $\int \frac{dx}{ax+b}$. Przyjmujemy $ax + b = t$, zatem $x = \frac{t-b}{a}$, skąd $dx = \frac{dt}{a}$. Zatem
$$\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{a}\, dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t}\, dt = \frac{1}{a} \ln|t| = \frac{1}{a} \ln|ax+b|$$
- $\int x\sqrt{1+x^2}\, dx$. Przyjmijmy $1 + x^2 = t$, skąd $2x\, dx = dt$, zatem
$$\int x\sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x\, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (\sqrt{1+x^2})^2$$
- Całka ułamka $\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\, dx$, w którym licznik jest pochodną mianownika, przekształca się po podstawieniu $\phi(x) = t$ na całkę $\int \frac{dt}{t} = \ln|t|$.
- Całka iloczynu $\int [\phi(x)]^a \phi'(x)\, dx$, gdzie $a \neq -1$, przekształca się po podstawieniu $\phi(x) = t$ na całkę $\int t^a\, dt$.

Wynikają stąd następujące wzory:

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)}\,dx = \ln|\phi(x)|,$$

$$\int [\phi(x)]^a \phi'(x)\,dx = \frac{[\phi(x)]^{a+1}}{a+1} \text{ dla } a \neq -1$$

Wzory rekurenyjne. Całki

$$I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad J_n = \int \sin^n x\,dx, \quad \int \cos^n x\,dx$$

umiemy obliczyć dla $n = 1$. Dla $n > 1$ można je obliczyć stosując wzory rekurencyjne:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}},$$

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx,$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

Pierwszy wzór rekurencyjny

$$I_n = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x}{2}\,\frac{2x\,dx}{(1+x^2)^n} =$$

$$= I_{n-1} - \int \frac{x}{2} d\left(-\frac{1}{(n-1)(1+x^2)^{n-1}}\right)$$

Całkując ostatnią całkę przez części otrzymujemy

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{dx}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}}$$

$$I_n = I_{n-1} + \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{2n-2} I_{n-1}$$

$$= \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}$$

Drugi wzór rekurencyjny

Zaczynamy od postaci: $\sin^n x\,dx = \sin^{n-1} x\,d(-\cos x)$

Trzeci wzór rekurencyjny otrzymuje się podobnie do drugiego

Przykłady

- Przy podstawieniu $\sin x = t$ mamy

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| = -\ln|\cos x|$$

- Najpierw przez części, potem podstawienie $1 - x^2 = t$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{t} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

Przykłady

- Podstawienie $x = \sqrt{a}t$ (wtedy $dx = \sqrt{a}dt$)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t = \arcsin \frac{x}{\sqrt{a}}$$

- Podstawienie $x + \sqrt{a + x^2} = t$. Dla tego podstawienia zachodzi

$$\left(1 + \frac{x}{\sqrt{a + x^2}}\right) dx = \frac{x + \sqrt{a + x^2}}{\sqrt{a + x^2}} dx = \frac{dx}{\sqrt{a + x^2}} t = dt$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + x^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |x + \sqrt{a + x^2}|$$

-

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \int \frac{a-x^2}{\sqrt{a-x^2}}\,dx$$
$$= \int \frac{a}{\sqrt{a-x^2}}\,dx + \int x\frac{-x}{a-x^2}\,dx =$$
$$= a\int \frac{dx}{\sqrt{a-x^2}} + \int xd\sqrt{a-x^2} =$$
$$= a\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + x\sqrt{a-x^2} - \int \sqrt{a-x^2}\,dx$$

Zatem

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a\arcsin\frac{x}{\sqrt{a}} + x\sqrt{a-x^2}\right)$$

- Wyznaczamy całkę $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$. Na początek zauważamy, że

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{A}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \frac{C}{(x^2+px+q)^n}, \text{ gdzie } C = B - \frac{Ap}{2}$$

Zatem

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + C\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,dx$$

Pierwsza całka po prawej stronie równości jest postaci

$$\int [\phi(x)]^{-n}\phi'(x)\,dx \quad \text{dla } \phi(x) = x^2+px+q$$

zatem wiadomo już, jak ją policzyć

Trzeba pokazać, jak wyznaczyć $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,dx$. W tym celu podstawiamy

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = at^2 + a,$$

gdzie $q - \frac{p^2}{4} = a$ oraz $x + \frac{p}{2} = \sqrt{a}t$. Wówczas $dx = \sqrt{a}\,dt$. Zatem

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \int \frac{\sqrt{a}\,dt}{a^n(1+t^2)^n} = \frac{1}{a^{n-1/2}} \int \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Ostatnia całka jest równa $\arctan t$ dla $n = 1$, a dla $n > 1$, stosujemy wzór rekurencyjny.

Do domu. Stosując opisany powyżej sposób pokazać, że

$$\int \frac{-5+2\,x}{5-3\,x+x^2}\,dx = \frac{-4\,\arctan\left(\frac{-3+2\,x}{\sqrt{11}}\right)}{\sqrt{11}} + \ln(5-3\,x+x^2)$$

$$\int \frac{3+2\,x}{(5+3\,x+x^2)^2}\,dx = -\left(\frac{1}{5+3\,x+x^2}\right)$$

Całki, których nie można wyrazić za pomocą funkcji elementarnych

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \int \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad \int e^{-x^2}\, dx$$

- Niech $f(x)$ oznacza funkcję ograniczoną na przedziale domkniętym $< a, b >$.
- Niech $P_1, \ P_2, \ldots, \ P_m, \ldots$ będą różnym podziałami przedziału $< a, b >$. Podział P_m jest osiągnięty przy pomocy $n_m - 1$ liczb $x_1, \ x_2, \ \ldots, x_{n_m - 1}$, przy czym
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_m - 1} < x_{n_m} = b.$$
- Przedziały $< x_{i-1}, x_i >$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n_m$, nazywamy przedziałami cząstkowymi podziału P_m. Długości ich $x_i - x_{i-1}$ będziemy oznaczali przez Δx_i
- Niech $\delta_m = \max\limits_i \Delta x_i$ oraz
$$S_m = \sum_{i=1}^{n_m} f(c_i) \Delta x_i,$$
przy podziale P_m oraz dowolnie wybranych punktów $c_i \in < x_{i-1}, x_i >$, $i = 1, 2, \ldots, \ n_m$.
- Ciąg podziałów nazywamy *normalnym ciągiem podziałów*, jeżeli $\lim\limits_{m \to \infty} \delta_m = 0$

Definicja

Jeżeli ciąg $\{S_m\}$ dla $m \to \infty$ jest zbieżny i do tej samej granicy przy każdym normalnym ciągu podziałów, niezależnie od wyboru punktów c_i, to funkcję $f(x)$ nazywamy *funkcją całkowalną* w przedziale $< a, b >$. Granicę ciągu $\{S_m\}$ nazywamy *całką oznaczoną* funkcji $f(x)$ w granicach od a do b i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Jeżeli przy jakimś ciągu normalnym podziałów ciąg $\{S_m\}$ ma granicę niezależną od wyboru punktów c_i, to funkcja $f(x)$ jest całkowalna.
- Funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest całkowalna
- Funkcja ogranicznona w przedziale domkniętym oraz ciągła w nim z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby liczby punktów jest całkowalna.

1. Jeżeli $a \leq b \leq c$, to

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

2. Stały czynnik można wyłączyć przed znak całki

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Całka sumy równa się sumie całek

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

1. Jeżeli $a \leq b \leq c$, to

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

2. Stały czynnik można wyłączyć przed znak całki

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Całka sumy równa się sumie całek

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

1. Jeżeli $a \leq b \leq c$, to

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

2. Stały czynnik można wyłączyć przed znak całki

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Całka sumy równa się sumie całek

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

1. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $< a, b >$, to zachodzi

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a),$$

dla pewnego c z przedziału $< a, b >$

2. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest ciągła w przedziale $< a, b >$, to funkcja

$$h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

jest ciągła i różniczkowalna względem zmiennej x w przedziale $< a, b >$ i w każdym punkcie tego przedziału zachodzi związek $h'(x) = f(x)$.

3. ZWIĄZEK MIĘDZY CAŁKĄ OZNACZONĄ A NIEOZNACZONĄ. Jeżeli przez $F(x)$ oznaczymy funkcję pierwotną funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale $< a, b >$, tzn. jeżeli $F(x)' = f(x)$, to ma miejsce wzór

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

1. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $< a, b >$, to zachodzi

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a),$$

dla pewnego c z przedziału $< a, b >$

2. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest ciągła w przedziale $< a, b >$, to funkcja

$$h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

jest ciągła i różniczkowalna względem zmiennej x w przedziale $< a, b >$ i w każdym punkcie tego przedziału zachodzi związek $h'(x) = f(x)$.

3. ZWIĄZEK MIĘDZY CAŁKĄ OZNACZONĄ A NIEOZNACZONĄ. Jeżeli przez $F(x)$ oznaczymy funkcję pierwotną funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale $< a, b >$, tzn. jeżeli $F(x)' = f(x)$, to ma miejsce wzór

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

1. Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale $< a, b >$, to zachodzi

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a),$$

dla pewnego c z przedziału $< a, b >$

2. Jeżeli funkcja $f(t)$ jest ciągła w przedziale $< a, b >$, to funkcja

$$h(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

jest ciągła i różniczkowalna względem zmiennej x w przedziale $< a, b >$ i w każdym punkcie tego przedziału zachodzi związek $h'(x) = f(x)$.

3. ZWIĄZEK MIĘDZY CAŁKĄ OZNACZONĄ A NIEOZNACZONĄ. Jeżeli przez $F(x)$ oznaczymy funkcję pierwotną funkcji $f(x)$, ciągłej w przedziale $< a, b >$, tzn. jeżeli $F(x)' = f(x)$, to ma miejsce wzór

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

1. Jeżeli u i v są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną, to

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Jest to wzór na całkowanie przez części dla całek oznczonych.

2. Jeżeli $g'(x)$ jest funkcją ciągłą, $g(x)$ funkcją rosnącą w przedziale $< a, b >$, a $f(u)$ funkcją ciągłą w przedziale $< g(a), g(b) >$, to zachodzi następujący wzór:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

1. Jeżeli u i v są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną, to

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

   Jest to wzór na całkowanie przez części dla całek ozncczonych.

2. Jeżeli $g'(x)$ jest funkcją ciągłą, $g(x)$ funkcją rosnącą w przedziale $< a, b >$, a $f(u)$ funkcją ciągłą w przedziale $< g(a), g(b) >$, to zachodzi następujący wzór:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Przykłady

- $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x d(\cos x) = [-x \cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} cosx \, dx = [\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1$
- Ponieważ $\int x \sin(x^2) \, dx = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$, mamy
$$\int_0^{\pi/2} x \sin(x^2) \, dx = \left[\frac{-\cos(x^2)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{-\cos((\pi/2)^2)}{2}\right) - \frac{-\cos(0^2)}{2}$$
- Ponieważ $\int e^x x \, dx = e^x(-1+x) + C$, mamy
$$\int_2^3 e^x x \, dx = [e^x(-1+x)]_2^3 = e^3(-1+3) - e^2(-1+2)$$
- $\int_2^5 \ln(x) \, dx = \int_2^5 x' \ln(x) \, dx = [x\ln(x)]_2^5 - \int_2^5 x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$
$= 5\ln(5) - 2\ln(2) - (5-2)$

Przykłady

- $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x d(\cos x) = [-x \cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} cosx \, dx =$
  $[\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1$
- Ponieważ $\int x \sin(x^2) \, dx = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$, mamy
  $$\int_0^{\pi/2} x \sin(x^2) \, dx = \left[\frac{-\cos(x^2)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{-\cos((\pi/2)^2)}{2}\right) - \frac{-\cos(0^2)}{2}$$
- Ponieważ $\int e^x x \, dx = e^x(-1+x) + C$, mamy
  $$\int_2^3 e^x x \, dx = [e^x(-1+x)]_2^3 = e^3(-1+3) - e^2(-1+2)$$
- $\int_2^5 \ln(x) \, dx = \int_2^5 x' \ln(x) \, dx = [x\ln(x)]_2^5 - \int_2^5 x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$
  $= 5\ln(5) - 2\ln(2) - (5-2)$

Przykłady

- $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x d(\cos x) = [-x \cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} cosx \, dx = [\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1$
- Ponieważ $\int x \sin(x^2) \, dx = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$, mamy

$$\int_0^{\pi/2} x \sin(x^2) \, dx = \left[\frac{-\cos(x^2)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{-\cos((\pi/2)^2)}{2}\right) - \frac{-\cos(0^2)}{2}$$

- Ponieważ $\int e^x x \, dx = e^x(-1+x) + C$, mamy

$$\int_2^3 e^x x \, dx = [e^x(-1+x)]_2^3 = e^3(-1+3) - e^2(-1+2)$$

- $\int_2^5 \ln(x) \, dx = \int_2^5 x' \ln(x) \, dx = [x\ln(x)]_2^5 - \int_2^5 x \cdot \frac{1}{x} \, dx = 5\ln(5) - 2\ln(2) - (5-2)$

Przykłady

- $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \sin x \, dx = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x d(\cos x) = [-x\cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} cosx \, dx = [\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 1$
- Ponieważ $\int x \sin(x^2)\, dx = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$, mamy
$$\int_0^{\pi/2} x\sin(x^2)\,dx = \left[\frac{-\cos(x^2)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{-\cos((\pi/2)^2)}{2}\right) - \frac{-\cos(0^2)}{2}$$
- Ponieważ $\int e^x x\, dx = e^x(-1+x) + C$, mamy
$$\int_2^3 e^x x\,dx = [e^x(-1+x)]_2^3 = e^3(-1+3) - e^2(-1+2)$$
- $\int_2^5 \ln(x)\,dx = \int_2^5 x' \ln(x)\,dx = [x\ln(x)]_2^5 - \int_2^5 x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$
$= 5\ln(5) - 2\ln(2) - (5-2)$

Definicja

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale $a \leq x \leq c-h,\ \ h>0$, oraz w każdym przedziale $c+k \leq x \leq b,\ \ k>0$, i jeżeli istnieją granice

$$\lim_{h\to 0^+}\int_a^{c-h} f(x)\,dx \quad \text{oraz} \quad \lim_{k\to 0^+}\int_{c+k}^{b} f(x)\,dx,$$

to sumę tych granic nazywamy całką niewłaściwą funkcji $f(x)$ w przedziale $<a,b>$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- W podanej definicji chodzi o funkcje, które w każdym otoczeniu $(c-\delta, c+\delta),\ \ \delta>0$, są nieogranczone. W punkcie c funkcja może nawet nie być określona. Jeżeli przynajmniej jedna z granic nie istnieje, to mówimy, że całka jest rozbieżna.

- Jeżeli punktem nieograniczoności jest jeden z końców przedziału $< a, b >$, to przez całkę niewłaściwą rozumiemy odpowiednio

$$\lim_{h \to 0^+} \int_{a+h}^{b} f(x)\, dx \quad \text{albo} \quad \lim_{k \to 0^+} \int_{a}^{b-k} f(x)\, dx,$$

Przykład:

$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{\varepsilon}\right)$

Definicja

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ograniczona i całkowalna w każdym przedziale skończonym $a \leq x \leq v$ (a – ustalone, v – dowolne) oraz istnieje granica

$$\lim_{v \to \infty} \int_a^v f(x)\,dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji $f(x)$ w przedziale $a \leq x < \infty$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx.$$

Analogicznie określa się znaczenie symbolu $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ jako granicę $\lim_{u \to -\infty} \int_u^b f(x)\,dx$.

Przykład.

Chcemy obliczyć całkę $\int_1^{\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$.

Ponieważ $\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = -\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$,

mamy $\int_1^{\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx = \lim_{v\to\infty}\left(-\frac{4}{v}-\frac{2}{v^2}-\frac{1}{3v^3}-(-4-2-1/3)\right)$

Twierdzenie Taylora

Założenie: $f \in C^{n+1}(< a, b >), a < x < b$.

Teza:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f^{(1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f^{(2)}(a) + \ldots + \\ + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

- Ostatni wyraz często nazywa się $n-$tą resztą i oznacza przez $R_n(x, a)$.
- Lagrange pokazał, że $\bigvee_{0 \le \theta \le 1} R_n(x, a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))$
- Szereg potęgowy $f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ nazywamy szeregiem Taylora.
- Dla $a = 0$ szerec Taylora nazywa się szeregiem Maclaurina.

Twierdzenie

Funkcja jest rozwijalna w szereg Taylora w przedziale $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$, jeżeli w tym przedziale:

1. funkcja ma pochodne każdego rzędu
2. $\lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0$ dla x z przedziału $(a-\delta, a+\delta)$

Warunek 2. jest w szczególności spełniony, jeżeli istnieje $M > 0$ takie, że

$$\bigwedge_{x\in(a-\delta,a+\delta)} |f^{(n)}(x)| < M$$

Przykłady.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{5^3}{5!} - \ldots + \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} + \ldots$

MACIERZE

Macierz wymiaru $m \times n$

Macierz A wymiaru $m \times n$ jest prostokątną tablicą elementów $a_{ij}, \; i = 1, \dots m, \; j = 1, \dots, n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elementami macierzy mogą być liczby rzeczywiste, zespolone i „inne jeszcze obiekty". Będziemy oznaczać w skrócie $A = (a_{ij})$

Macierz zerowa to macierz, której wszystkie elementy są równe zero

Transpozycją macierzy $A = (a_{ij})$ o wymiarach $m \times n$ jest macierz $A^T = (a_{ji})$ o wymiarach $n \times m$

O macierzy A wymiaru $m \times n$ powiemy, że jest **kawdratowa**, jeżeli $m = n$

Macierz A **jest symetryczna,** gdy jest kwadratowa oraz zachodzi warunek $A^T = A$

Macierz $A = (a_{ij})$ **jest diagonalna,** jeżeli jest kwadratowa oraz $a_{ij} = 0$ dla $i \neq j$

Macierz identycznościowa I: macierz diagonalna, która ma same jedynki na przekątnej

Sumą macierzy $A = (a_{ij})$ **oraz** $B = (b_{ij})$ o jednakowych wymiarach jest macierz $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

Różnicą macierzy $A = (a_{ij})$ **oraz** $B = (b_{ij})$ o jednakowych wymiarach jest macierz $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$

Mnożenie macierzy $A = (a_{ij})$ **przez liczbę** α**:**

$$\alpha A = (\alpha \cdot a_{ij})$$

Przemienność, łączność oraz rozdzielność mnożenia macierzy przez liczbę $(\alpha,\ \beta \in R)$:

$$\alpha A = A\alpha,\ \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A,\ (\alpha \pm \beta)A = \alpha A \pm \beta B,\ \alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$$

Mnożenie macierzy $A = (a_{ij})$ wymiaru $m \times n$ **przez wektor** $v = [v_1, \ldots, v_n]^T$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \ldots + a_{mn}v_n \end{pmatrix}$$

Mnożenie macierzy $A = (a_{ij})$ wymiaru $m \times n$ przez macierz $B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ wymiaru $n \times k$:

$$AB = (Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_k)$$

Transpozycja a mnożenie macierzy: $(AB)^T = B^T A^T$

Rząd macierzy

Dla każdej macierzy A maksymalna liczba r liniowo niezależnych kolumn jest równa maksymalnej liczbie liniowo niezależnych wierszy. Liczbę r nazywamy **rzędem macierzy**, symbolicznie ozncczanym przez $R(A)$

Macierz nieosobliwa: Macierz kwadratowa A wymiaru $n \times n$, dla której R(A)=n.

Macierz odwrotna A^{-1} do macierzy kwadratowej A:

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

Wyznacznik macierzy A wymiaru $n \times n$ (kwadratowej)

Wyznacznik to funkcja (oznaczona przez det)

$$det : \{\text{ zbiór macierzy kwadratowych}\} \rightarrow R$$

o własnościach:

- $det(I) = 1$
- $det(A) = 0$ jeżeli A ma dwa sąsiednie wiersze równe
- det jest funkcją liniową względem dowolnego wiersza

Uwaga: istnieje tylko jedna taka funkcja

Uwaga: Na nstępnych slajdach $A(ij)$ oznacza macierz powstałą z macierzy A poprzez usunięcie z niej i-tego wiersza oraz $j-$tej kolumny.

Własności wyznaczników:

- Twierdzenie Laplace'a dla kolumn:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A(i,j))$$

  dla $i = 1, \ldots, n$
- $det(A) = 0 \Leftrightarrow R(A) < n$
- $det(A) = -det(B)$, jeżeli B powstaje z A przez zamianę miejscami dwóch wierszy macierzy A
- $det(A) = det(B)$, jeżeli B powstaje z A przez dodanie/odjęcie od danego wiersza innego wiersza przemnożonego przez dowolną liczbę
- **Twierdzenie Cauchy'ego**: $det(AB) = det(A)det(B)$
- Jeżeli $R(A) = n$ (macierz A jest pełnego rzędu), to $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$

Własności wyznaczników:

- Twierdzenie Laplace'a dla wierszy:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(A(i,j))$$

dla $i = 1, \ldots, n$

- $det(A) = -det(B)$, jeżeli B powstaje z A przez zamianę miejscami dwóch kolumn macierzy A
- $det(A) = det(B)$, jeżeli B powstaje z A przez dodanie/odjęcie od danej kolumny innej kolumny przemnożonej przez dowolną liczbę
- $det(A)$ jest funkcją liniową dowolnej kolumny
- $det(A^T) = det(A)$

Niech $A = (a_{ij})$ macierz wymiaru $n \times n$, $c = [c_1, \ldots, c_n]^T$ oraz $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$. Macierz A oraz wektor c traktujemy jako znane, a wektor x jako nieznany (wektor niewiadomych). Interesuje nas rozwiązanie układu równań $Ax = c$, tzn.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

Twierdzenie. Jeżeli $det(A) \neq 0$, to powyższy układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to można uzyskać za pomocą wzorów Cramera:

$$x_i = \frac{det(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots a_n)}{det(A)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie a_i oznacza $i-$tą kolumnę macierzy A

Niech $A = (a_{ij})$ macierz wymiaru $m \times n$, $c = [c_1, \ldots, c_m]^T$ oraz $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$. Interesuje nas rozwiązanie układu równań $Ax = c$, tzn.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m \end{cases}$$

Niech

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Powyższy układ równań liniowych ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $R(A) = R(B) = r$, przy tym
1) jeżeli $r = n$, to układ ma jedno rozwiązanie,
2) jeżeli $r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań i są one zależne od $n - r$ parametrów.

Niech $A = (a_1, \ldots, a_n)$ będzie macierzą wymiaru $n \times n$. Wektory $a_1, \ldots, a_n$ są jej kolumnami. Oznaczmy przez dA_{ij} wyznacznik z macierzy $(a_1, \ldots, a_{i-1}, e_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, która powstała z A poprzez zamianę kolumny a_j na wektor $e_i = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0]^T$ (który na $i-$tym miejscu ma jedynkę, a poza tym same zera).

Macierz stowarzyszona $AdjA$ **do macierzy** A:

$$AdjA = \begin{pmatrix} dA_{11} & dA_{12} & \ldots & dA_{1n} \\ dA_{21} & dA_{22} & \ldots & dA_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ dA_{n1} & dA_{n2} & \ldots & dA_{nn} \end{pmatrix}$$

Twierdzenie: Macierz odwrotną do macierzy A można wyznaczyć według wzoru:

$$A^{-1} = AdjA \cdot (\frac{1}{det(A)})$$

Forma kwadratowa

Niech $x = [x_1, \ldots, x_n]^T$ będzie wektorem n wymiarowym oraz niech $A = (a_{ij})$ będzie macierzą symetryczną stopnia n (wymiaru $n \times n$). Odwzorowanie $x \to x^T A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ nazywamy formą kwadratową

Macierz symetryczna A jest

dodatnio określona: $x^T A x > 0$ dla każdego $x \neq 0$ (piszemy $A > 0$)
ujemnie określona: $x^T A x < 0$ dla każdego $x \neq 0$ (piszemy $A < 0$)
niedodatnio określona: $x^T A x \leq 0$ dla każdego $x \neq 0$ (piszemy $A \leq 0$)
nieujemnie określona: $x^T A x \geq 0$ dla każdego $x \neq 0$ (piszemy $A \geq 0$)

Kryterium Sylvestera

Macierz symetryczna $A = (a_{ij})$ stopnia n jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej wiodące minory główne są dodatnie:

$$a_{11} > 0$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0, \text{ dla } k = 2, \dots, n$$

Uwaga: Jeżeli chcemy sprawdzić, czy macierz jest ujemnie określona, należy sprawdzić, czy macierz „$-A$” jest określona dodatnio