EGZAMIN Z PROBABILISTYKI

Imię i nazwisko .... **grupa** .... **suma punktów** ....

Test składa się z 12 zadań. W każdym zadaniu jest 5 pytań, na które należy odpowiedzieć TAK (wpisując w kratce obok T) lub NIE (wpisując N).
Za każdą poprawną odpowiedź otrzymuje się **2** punkty, za złą odejmowany jest **1** punkt (za zadanie nie można otrzymać jednak mniej niż 0 punktów). Za brak odpowiedzi otrzymuje się **0** punktów.

1. Dystrybuanta zmiennej losowej (X,Y) ma postać: $F(x,y) = \begin{cases} 0 & , \ x \leqslant 0 \quad \vee \quad y \leqslant 0 \\ xy^3 & , \ 0 < x \leqslant 1 \quad \wedge \quad 0 < y \leqslant 1 \\ x & , \ 0 < x \leqslant 1 \quad \wedge \quad y > 1 \\ y^3 & , \ x > 1 \quad \wedge \quad 0 < y \leqslant 1 \\ 1 & , \ x > 1 \quad \wedge \quad y > 1 \end{cases}$.

   Wtedy:
   - [ ] (X,Y) ma rozkład ciągły
   - [ ] X i Y nie są nieskorelowane
   - [ ] X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0;1]$
   - [ ] $P\left(X > \frac{1}{2}, Y < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$
   - [ ] $X+Y$ ma rozkład ciągły

2. Funkcja $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest dystrybuantą jednowymiarowej zmiennej losowej X. Jeśli a, $b \in \mathbb{R}$ oraz $a < b$, to
   - [ ] $P(X = a) = \lim\limits_{x\to a^+} F(x) - F(a)$
   - [ ] $P(X \leqslant b) = \lim\limits_{x\to b^+} F(x)$
   - [ ] $P(a < X \leqslant b) = \lim\limits_{x\to b^+} F(x) - F(a)$
   - [ ] $P(a \leqslant X \leqslant b) = \lim\limits_{x\to b^+} F(x) - \lim\limits_{x\to a^+} F(x)$
   - [ ] $P(X \geqslant a) = 1 - F(a)$

3. A i B są zdarzeniami z tej samej przestrzeni probabilistycznej takimi, że $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,8$, $P(A\cup B) = 0,9$. Wtedy:
   - [ ] $P(B \cup A') = 0,9$
   - [ ] $P(B \cap A) = 0,3$
   - [ ] $P(B - A) = 0,4$
   - [ ] $P(B \,|\, A) = 0,75$
   - [ ] $P(B' \,|\, A) = 0,25$

4. Niech X będzie jednowymiarową zmienną losową. Wtedy:
   - [ ] Jeśli istnieje EX, to istnieje EX^2
   - [ ] Jeśli istnieje EX^2, to istnieje EX
   - [ ] Jeśli X jest rzędu drugiego, to $E(X-1)^2 = VX + (EX-1)^2$
   - [ ] Jeśli X ma rozkład geometryczny z parametrem p, to $EX = \frac{1}{p}$
   - [ ] Jeśli X ma rozkład Bernoulliego z parametrami n i p, to $VX = np$

5. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi. Każda z nich ma rozkład normalny $N(1,4)$. Niech $Z = 2X + Y$, $W = X + 2Y$. Wtedy:

- [ ] $(Z,W) \sim N\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}\right)$
- [ ] Z i W są niezależne
- [ ] $E(Z \cdot W) = 17$
- [ ] $(X, 2X+1) \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}\right)$
- [ ] $P(Z > 1) = \dfrac{1}{2} + \Phi(0,1)$

6. Zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości $f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & , \quad x \in (-2;0) \\ 0 & , \quad w.p.p. \end{cases}$. Wtedy:

- [ ] Jeśli $Y = (X+1)^2$, to $f_Y(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ dla $y \in (0;1)$
- [ ] $P(X \leqslant 0) = 1$
- [ ] Jeśli $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zmienna losowa X_k ma rozkład o gęstości f_X, to zmienna losowa $\dfrac{\sum_{k=1}^{72} X_k + 96}{4}$ ma rozkład normalny $N(0,1)$
- [ ] $EX = -\dfrac{4}{3}$
- [ ] $VX = 2$

7. X jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym takim, że $S_X = \{0,1,2\}$ oraz $EX = 0,9$, $EX^2 = 1,5$. Wtedy:

- [ ] $P(X = 1) > P(X = 0)$
- [ ] $P(X = 2) = 0,3$
- [ ] $F_X(2) = 0,7$
- [ ] $F_X(x) = 0,4$ dla każdego $x \leqslant 1$
- [ ] Jeśli $x \in (1;2]$, to $F_X(x) = 0,4$

8. Kwoka wysiaduje 3 jaja. Prawdopodobieństwo, że z jajka wykluje się kura jest takie samo, jak prawdopodobieństwo, że wykluje sie kogut. Oznaczmy zdarzenia: A - z jaj wykluje się co najwyżej jedna kura; B - z jaj wykluje się co najmniej jeden kogut i co najmniej jedna kura; C - wszystkie wyklute z jaj pisklęta będą tej samej płci. Wtedy:

- [ ] $P(A) = \dfrac{1}{2}$
- [ ] $P(B) = \dfrac{3}{8}$
- [ ] Zdarzenia A i B są niezależne
- [ ] Zdarzenia A i C są niezależne
- [ ] Zdarzenia A, B, C są parami niezależne

9. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny w obszarze $D = \{(x, y) : -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - |x|\}$. Wtedy:

   - [ ] $EX = 0$
   - [ ] Jeśli $y \in (0; 1)$, to $f_Y(y) = 2 - 2y$
   - [ ] $EY = \frac{1}{2}$
   - [ ] X i Y są niezależne
   - [ ] $F_X(0 \,|\, Y > X) = \frac{2}{3}$

10. Są 4 urny typu A i 8 urn typu B. W każdej urnie typu A jest 6 kul zielonych i 4 czerwone. W każdej urnie typu B są 3 kule zielone i 7 czerwonych. Losujemy jedną urnę, a następnie z niej jedną kulę. Wtedy:

   - [ ] $P(\{\text{wylosujemy czerwoną kulę}\}) = \frac{3}{5}$
   - [ ] $P(\{\text{losowano z urny typu A}\} \,|\, \{\text{wylosowana kula jest czerwona}\}) = \frac{2}{9}$
   - [ ] $P(\{\text{losowano z urny typu B}\} \,|\, \{\text{wylosowana kula jest czerwona}\}) = \frac{7}{9}$
   - [ ] $P(\{\text{będziemy losowali z urny typu A i wylosujemy czerwoną kulę}\}) = \frac{1}{5}$
   - [ ] $P(\{\text{będziemy losowali z urny typu B i wylosujemy czerwoną kulę}\}) = \frac{4}{5}$

11. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \begin{cases} ax & , \ 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ b & , \ 2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & , \ w.p.p. \end{cases}$ jest gęstością jednowymiarowej zmiennej losowej X. Wiadomo, że $P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$. Wtedy:

   - [ ] $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{7}{8}$
   - [ ] Jeśli $x \in (0; 1]$, to $F_X(x) = \frac{1}{2}x^2$
   - [ ] $F_X\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$
   - [ ] Jeśli $x \in (2; 3]$, to $F_X(x) = \frac{1}{2}(x - 2)$
   - [ ] $P\left(0 < X \leqslant 2 \,|\, X > \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{7}$

12. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi. X ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1; 1]$, Y ma rozkład jednostajny na przedziale $[-2; 2]$. Niech $Z = sgnX$, $W = sgnY$. Wtedy:

   - [ ] Z i W mają ten sam rozkład
   - [ ] Z ma rozkład 2 - punktowy
   - [ ] Rozkład warunkowy Z pod warunkiem $\{W = -1\}$ jest 2 - punktowy
   - [ ] $E(Z|W = -1) > 0$
   - [ ] $V(Z|W = -1) = 1$