Zmienna losowa dwuwymiarowa:

1) Łączny rozkład ciągłych zmiennych $\overset{X \text{ i } Y}{\downarrow}$ ma gęstość } Wektor losowy (X, Y) ma rozkład z gęstością

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} C \cdot e^{-y+x} & \text{dla } \underbrace{0<x<1 \text{ i } y>x}_{D} \\ 0 & \text{poza} \end{cases}$$

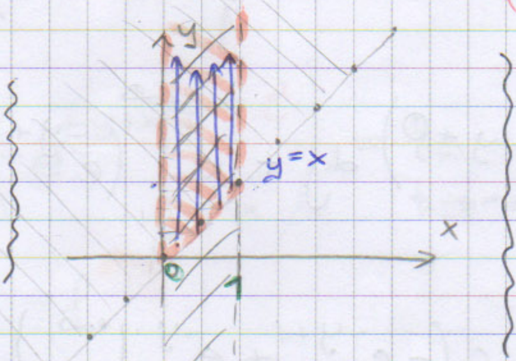
Policzyć / uwzględnić:

1) Wyznaczyć stałą C tak aby f(x,y) była funkcją gęstości

Aby f(x,y) była f. gęstości musi być:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \quad \underline{\text{i}} \quad 0) \; f(x,y) \geqslant 0 \text{ prawie wszędzie (p.w)}$$

$$\iint_D C \cdot e^{-y+x}\,dx\,dy = \left\{ \quad \right\} =$$



I sp

tu: łatwiej liczyć w kolejności dy dx

$$= \int_0^1 \left(\int_{y=x}^{y=+\infty} C \cdot e^{-y+x}\,dy \right) dx = C \cdot \int_0^1 \left(\frac{e^{-y+x}}{-1} \right) \Bigg|_{y=x}^{y=+\infty} dx =$$

podstawiając roboczo za $y=+\infty$ mamy

$$= \left\{ -C \int_0^1 \underbrace{e^{-\infty+x}}_{0} - e^{-x+x}\,dx \right\} = -C \int_0^1 -1\,dx = C\int_0^1 1\,dx = Cx \Big|_0^1 =$$

$$= C \cdot 1 - C \cdot 0 = C \cdot 1$$

I ma być $\quad C \cdot 1 = 1$

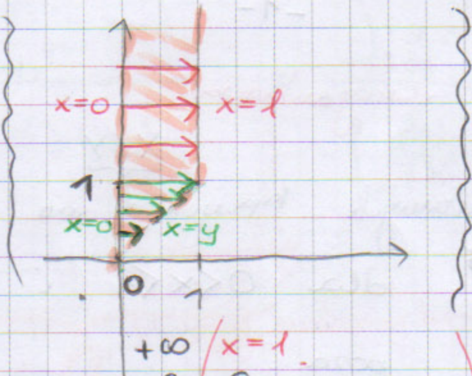
$$\underline{C = 1.}$$

0) spr. $f(x,y) = 1 \cdot e^{-y+x} > 0$ ✓

Odp. Dla $c=1$ f(x,y) jest funkcją gęstości.

II sp $dx\,dy$.

$$\iint_D\left(\int c\cdot e^{-y+x}\,dx\right)dy =$$



$$=$$

$$= c\int_0^1\left(\int_{x=0}^{x=y} e^{-y+x}\,dx\right)dy + c\cdot\int_1^{+\infty}\left(\int_{x=0}^{x=1} e^{-y+x}\,dx\right)dy =$$

$$= c\cdot\int_0^1 \frac{e^{-y+x}}{1}\Big|_{x=0}^{x=y}\,dy + c\int_1^{+\infty}\frac{e^{-y+x}}{1}\Big|_{x=0}^{x=1}\,dy =$$

$$= c\cdot\int_0^1\left(e^{-y+y} - e^{-y+0}\right)dy + c\int_1^{+\infty}\left(e^{-y+1} - e^{-y+0}\right)dy$$

$$= c\cdot\left(y + e^{-y}\Big|_0^1\right) + c\left(-e^{-y+1} + e^{-y}\Big|_1^{+\infty}\right)$$

$$= c\cdot\left(1 + e^{-1} - (0+1)\right) + c\left(0 + 0 - (-1 + e^{-1})\right)$$

$$= ce^{-1} + c\cdot 1 - ce^{-1} = c1$$

$$c = 1$$

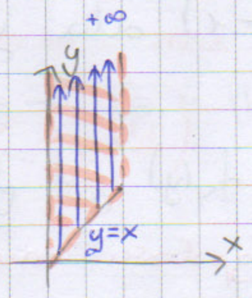
spr $f(x,y) = 1\cdot e^{-y+x} > 0$

Odp: Dla $c=1$ $f(x,y)$ jest funkcją gęstości

2) Wyznaczyć rozkłady brzegowe czyli $f_X(x)$ $\quad f_Y(y)$

• $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$f_X(x) = \int\limits_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y+x}\,dy \overset{(\circ)}{=} \left\{ \right. $$



$$\left. \right\} =$$

↑↑↑

$$\overset{(\circ)}{=} -e^{-y+x}\Big|_{y=x}^{y=+\infty} = -e^{-\infty+x} - \left(-e^{-x+x}\right) = 1$$

$e^{-\infty+x} \to 0$

Uwaga odnośnie zapisów dla całki niewłaściwej.

Formalnie

$$\overset{(\circ)}{=} -e^{-y+x}\Big|_{y=x}^{y=+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-y+x}\Big|_{y=x}^{y=t}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-y+t} + e^{-x+x}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1 - e^{-y+t}\right) = 1$$

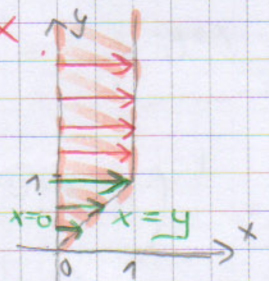
$e^{-y+t} \to 0$

Zatem

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x\in(0;1) \\ 0 & \text{poza} \end{cases}$$

• $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$f_Y(y) = \int e^{-y+x}\,dx = \left\{ \right.$$



$$\left. \right\} \overset{!}{=} \begin{cases} \int\limits_{x=0}^{x=y} e^{-y+x}\,dx & \text{dla } y\in(0;1) \\ \int\limits_{x=0}^{x=1} e^{-y+x}\,dx & \text{dla } y\in\langle 1;+\infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-y+x}\Big|_{x=0}^{x=y} = e^{-y+y} - e^{-y+0} = \underline{1-e^{-y}} \\ e^{-y+x}\Big|_{x=0}^{x=1} = e^{-y+1} - e^{-y+0} = e^{-y+1} - e^{-y} = \underline{e^{-y}(e-1)} \end{cases}$$

Zatem:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y} & \text{dla } y \in (0;1\rangle \\ e^{-y}(e-1) & \text{dla } y \in (1;+\infty) \end{cases}$$

dla $y=1$ mamy $e^{-1}(e^{1}-1) = e^{-1+1} - e^{-1} = 1 - e^{-1}$

spr. czy aby na pewno $f_Y(y)$ jest funkcją gęstości

Aby $f_Y(y)$ była f. gęstości musi być:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,dy = 1$ $\;\underline{\underline{i}}\;$ o) $f_Y(y) \geqslant 0$ p.w.

1) $\int_0^1 (1 - e^{-y})\,dy + \int_1^{\infty} e^{-y}(e-1)\,dy = (y + e^{-y})\Big|_0^1 + (e-1)(-e^{-y})\Big|_1^{+\infty}$

$= (1+e^{-1}) - (0 + e^0) + (1-e)\cdot(e^{-\infty} - e^{-1}) =$

$= \cancel{1}+e^{-1} - \cancel{1} + (1-e)\cdot(-e^{-1}) = \cancel{+e^{-1}} \cancel{-e^{-1}} + 1 = 1$ ✓

o) $1 - e^{-y} = 1 - \frac{1}{e^y}_{\in(0;1)} \geqslant 0$; $(e-1)\cdot e^{-y} \geqslant 0$ ✓

spr. czy aby na pewno $f_X(x)$ jest funkcją gęstości

1) $\int_0^1 1\,dx = x\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$ ✓

o) $f_X(x) \geqslant 0$ p.w. ✓

3) Sprawdzić czy zmienne losowe są niezależne:

Dla zm. los. ciągłych (czyli takich co mają gęstość):

Aby X i Y były niezależne musi być:

$$(\bullet)\quad f(x,y) = \underbrace{f_X(x)}_{f(x)} \cdot f_Y(y)$$

$\sim$ z def. niezależności zdarzeń.

I w. $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

II $P(A|B) = P(A)$

$P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

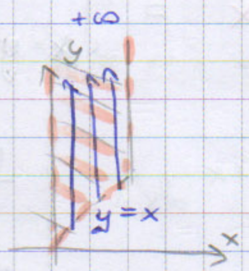
Z postaci rozkładów brzegowych f_X i f_Y od razu widać, że: zmienne losowe X i Y są zależne (tzn. **nie** jest spełniony warunek $(\bullet)$)

4) Obliczyć moment mieszany $E(X\cdot Y)$

a)

$$E(X\cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y \cdot f(x,y)\, dx\, dy$$

$$EXY = \int_0^1 \left(\int_{y=x}^{y=+\infty} x\cdot y \cdot e^{-y+x}\, dy \right) dx = \left\{ \right.$$



$$\left. \right\} \overset{(\bullet)}{=} \longrightarrow$$

Osobno obliczam całkę nieoznaczoną.

$$J_1 = \int y\cdot e^{-y+x}\, dy = \left\{ \begin{array}{ll} f = y & g' = e^{-y+x} \\ f' = 1 & g = -e^{-y+x} \end{array} \right\} =$$

$$= -y\cdot e^{-y+x} - \int -e^{-y+x}\, dy = -ye^{-y+x} - e^{-y+x} + C$$

spr. J_1 $\left(-y\cdot e^{-y+x} - e^{-y+x} + C\right)' = -e^{-y+x} + (-1)(-ye^{-y+x}) + e^{-y+x}$

$$= ye^{-y+x}$$

$$EXY \overset{(\circ)}{=} \int_0^1 x\cdot\left(-ye^{-y+x} - e^{-y+x}\right)\Big|_{y=x}^{y=+\infty} dx =$$

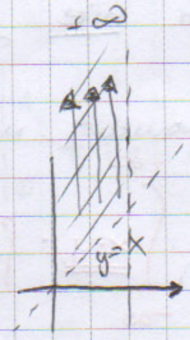
$$= \int_0^1 -x\left[\left(\underbrace{+\infty\cdot e^{-\infty+x}}_{\to 0} + \underbrace{e^{-\infty+x}}_{\to 0}\right) - \left(\underbrace{xe^{-x+x}}_{x} + \underbrace{e^{-x+x}}_{1}\right)\right]dx$$

$$= \int_0^1 -x\cdot(-x-1)\,dx = \int_0^1 x^2+x\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Odp $EXY = \frac{5}{6}$.

b) Obliczyć EX ; EY

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)\,dx = \int_{\cancel{x}=y}^{\cancel{x}=+\infty} x\cdot e^{-y+x} \overset{(*)}{=} \Big\{$$



b) Obliczyć EX ; EY

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_{(X)}(x)\,dx = \int_0^1 x\cdot 1\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{1}{2}$$

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y(1-e^{-y})\,dy + \int_1^{+\infty} ye^{-y}(e-1)\,dy \overset{(*)}{=}$$

$$* \int_0^1 y(1-e^{-y})\,dy = \left\{\begin{matrix} f=y & g'=1-e^{-y}\,dy \\ f'=1\,dy & g=y+e^{-y}\end{matrix}\right\} = y^2+ye^{-y} - \int y+e^{-y}\,dy =$$

$$= y^2+ye^{-y} - \frac{1}{2}y^2 + e^{-y}\Big|_0^1 = 1+e^{-1} - \frac{1}{2} + e^{-1} - 1 = 2e^{-1} - \frac{1}{2}$$

$$* \int_1^{+\infty} ye^{-y}(e-1)\,dy = \left\{\begin{matrix} f=y & g'=e^{-y+1}-e^{-y} \\ f'=1 & g=-e^{-y+1}+e^{-y}\end{matrix}\right\} = -ye^{-y+1}+ye^{-y} - \int -e^{-y+1}+e^{-y} =$$

$$= -ye^{-y+1}+ye^{-y} - e^{-y+1}+e^{-y}\Big|_1^{+\infty} = 0+0-0+0-(-1+e^{-1}-1+e^{-1})$$

$$= 2 - 2e^{-1}$$

$$\overset{(*)}{=} 2e^{-1} - \frac{1}{2} + 2 - 2e^{-1} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

6) Obliczyć warunkową wartość oczekiwaną.

$$E(\underline{\underline{X}}|Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{\underline{x}} \cdot f_{X|Y}\, dx$$

rachunki robocze:

• $$E(\underline{\underline{X}}|Y) = \int_{x=0}^{x=y} \underline{\underline{x}} \cdot \frac{e^x}{e^y-1}\, dx = \frac{1}{e^y-1} \cdot \int_{x=0}^{x=y} x e^x dx \overset{(\circ)}{=}$$

osobno obliczam:

$$J_2 = \int x \cdot e^x dx = \begin{cases} f = x & g' = e^x dx \\ f' = 1\,dx & g = e^x \end{cases} = xe^x - \int e^x dx$$

$$= xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

spr. J_2.

$$\left(e^x(x-1)+C\right)' = e^x(x-1) + e^x \cdot 1 = e^x \cdot x \checkmark$$

$$\overset{(\circ)}{=} \frac{1}{e^y-1} \cdot e^x(x-1)\Big|_{x=0}^{x=y} = \frac{1}{e^y-1} \cdot \left(e^y(y-1) - e^0(-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{e^y-1} \cdot \left(y \cdot e^y - e^y + 1\right) = \frac{y \cdot e^y - e^y + 1}{e^y-1} \quad \text{dla } y \in (0;1\rangle.$$

• $$E(\underline{\underline{X}}|Y) = \int_{x=0}^{x=1} x \cdot \frac{e^x}{e-1}\, dx = \frac{1}{e-1} \cdot \int_{x=0}^{x=1} x \cdot e^x dx = \frac{1}{e-1}\left(xe^x - e^x\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{e-1}\left(\left(\cancel{e^1} - \cancel{e^1}\right) - (0-1)\right) = \frac{1}{e-1} \quad \text{dla } y \in (1;+\infty)$$

5) Wyznaczyć gęstości warunkowe:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \sim P(Y|X) = \frac{P(Y \cap X)}{P(X)}$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{e^{-y+x}}{1} = e^{x-y} & \text{dla } y \in (x, +\infty) \\ 0 & \text{poza} \end{cases}$$

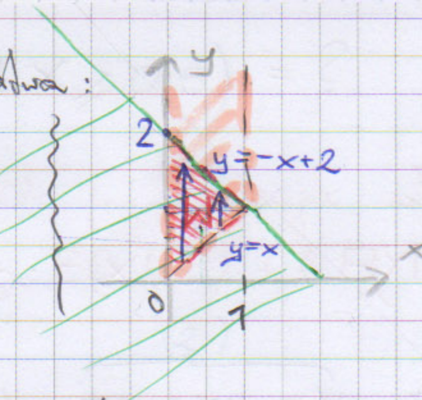
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{e^{-y+x}}{1-e^{-y}} & \text{dla } x \in (0; y) \quad \text{gdy } y \in (0; 1\rangle \\ \frac{e^{-y+x}}{e^{-y}(e-1)} = \frac{e^x}{e-1} & \text{dla } x \in (0; 1) \quad \text{gdy } y \in (1; +\infty) \\ 0 & \text{poza.} \end{cases}$$

$$\frac{e^x}{\frac{1-e^{-y}}{e^{-y}}}$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{e^x}{e^y - 1} & \text{dla } x(0; y) \quad \text{gdy } y \in (0; 1\rangle \\ \frac{e^x}{e-1} & \text{dla } x \in (0; 1) \quad \text{gdy } y \in (1; +\infty) \\ 0 & \text{poza.} \end{cases}$$

7) Obliczyć prawdopodobieństwa :

$\boxed{P(Y+X<2)} = ? =$ 

$= \iint\limits_{W} f(x,y)\,dx\,dy.$

W

$\Downarrow$

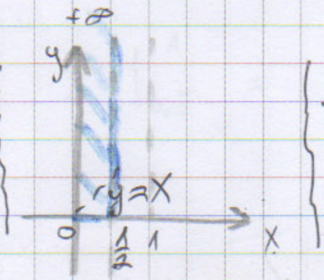
$y < -x+2.$

$$= \int_0^1 \left(\int_{y=x}^{y=-x+2} e^{-y+x}\,dy \right) dx = \int_0^1 -e^{-y+x} \Big|_{y=x}^{y=-x+2} dx =$$

$$= \int_0^1 -e^{x-2+x} + e^{-x+x}\,dx = \int_0^1 1 - e^{2x-2}\,dx =$$

$$= \left(x - \frac{e^{2x-2}}{2} \right) \Big|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{2}\cdot e^0\right) - \left(0 - \frac{1}{2} e^{-2}\right) =$$

$$= 1 - \underbrace{\tfrac{1}{2} e^0} + \frac{1}{2} e^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{e^2}\right) \in \langle 0 ; 1 \rangle$$

$\boxed{P(X < \tfrac{1}{2})} =$ 

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{y=x}^{+\infty} e^{-y+x}\,dy\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} -e^{-y+x} \Big|_x^{+\infty} dx$

$$\cancel{= \int_0^{\frac{1}{2}} 0 + e^{+x}\,dx = e^x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{e} - 1}$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 0 + 1\,dx = x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

8) Oblicz: $E(X+Y \mid X \geqslant 0{,}5) = ?$

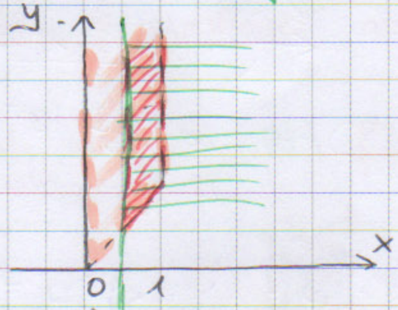
- Z twierdzenia 9 ... 62 przy stosownych założeniach mamy

$$E(aX + bY \mid Z) = a \cdot E(X \mid Z) + b\,E(Y \mid Z)$$

Zaten

$$E(X+Y \mid X \geqslant 0{,}5) = \overbrace{E(X \mid X \geqslant 0{,}5)}^{(2)} + \overbrace{E(Y \mid X \geqslant 0{,}5)}^{(1)}$$

$$(1)\ E(Y \mid X \geqslant 0{,}5) = \frac{\dots}{P(X \geqslant 0{,}5)} = \frac{\int_{0,5}^{1}\int_{y=x}^{y=+\infty} y \cdot e^{-y+x}\,dy\,dx}{\int_{0,5}^{1}\int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y+x}\,dy\,dx} = \frac{L}{M}$$



osobno obliczam mianownik.

$$M = \int_{0,5}^{1}\int_{y=x}^{y=+\infty} e^{-y+x}\,dy\,dx = \int_{0,5}^{1} -e^{-y+x}\Big|_{y=x}^{y=+\infty} dx = \int_{0,5}^{1} -e^{-\infty+x} + e^{-x+x}\,dx$$

$$= \int_{0,5}^{1} 1\,dx = x\Big|_{0,5}^{1} = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

$$L = \int_{0,5}^{1}\left(\int_{y=x}^{y=+\infty} y \cdot e^{-y+x}\,dy\right)dx = \left\{ \begin{matrix} \text{wykorzystuję wynik} \\ \text{całki } D_1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_{0,5}^{1} -ye^{-y+x} - e^{-y+x}\Big|_{y=x}^{y=+\infty} dx = \int_{0,5}^{1}\Big(\underbrace{-\infty e^{-\infty+x}}_{0} - \underbrace{e^{-\infty+x}}_{0}\Big) + \left(xe^{-x+x} + e^{-x+x}\right)$$

$$= \int_{0,5}^{1} x \cdot 1 + 1\,dx = \frac{x^2}{2} + x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} + 1 - \frac{1}{8} - \cancel{\frac{1}{2}} = \frac{7}{8}$$

Zaten

$$E(Y \mid X \geqslant 0{,}5) = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{2}{1} = \frac{7}{4}.$$

$$E(Y \mid X \geqslant 0{,}5) = \frac{7}{4}$$

(2) $$E(\underline{\underline{X}} \mid \underbrace{X \geq 0{,}5}) = \frac{\dots}{P(X \geq 0{,}5)} = \frac{\int_{0{,}5}^{+\infty} \underline{\underline{x}} \cdot f_X \, dx}{\int_{0{,}5}^{+\infty} f_X \, dx} =$$

wykorzystuję rozkład brzegowy zmiennej losowej X.

$$= \frac{\int_{0{,}5}^{1} x \cdot 1 \, dx}{\int_{0{,}5}^{1} 1 \cdot dx} = \frac{\frac{x^2}{2} \Big|_{\frac{1}{2}}^{1}}{x \Big|_{\frac{1}{2}}^{1}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\cancel{8}_4} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} = \frac{3}{4}$$

Zatem:

$$E(X \mid X \geq 0{,}5) = \frac{3}{4}.$$

Czyli:

$$E(X + Y \mid X \geq 0{,}5) = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$