Zdarzenia losowe

Zdarzenia losowe oznacza się dużymi literami: $A, B, \ldots, \Phi,\ \Omega$, przy czym Ω oznacza zdarzenie pewne (przestrzeń zdarzeń elementarnych), a Φ zdarzenie niemożliwe. Równość $A = B$ oznacza, że pojawienie się jednego z tych zdarzeń pociąga za sobą pojawienie się drugiego. Iloczynem zdarzeń A i B jest zdarzenie $C = A \cap B$, które w skrócie będziemy zapisywać $C = AB$. Sumą zdarzeń jest zdarzenie $C = A \cup B$ polegające na wystąpieniu przynjmniej jednego zze zdarzeń A i B. Różnicą zdarzeń jest zdarzenie $C = A \setminus B$ polegające na tym, że zdarzenie A zachodzi, a B nie. Zdarzenie przeciwne do zdarzenia A oznaczać będizemy przez A^c lub przez A', tzn. $A' = \Omega \setminus A$. Zdrazenia A, B wykluczają się, jeżeli $AB = \Phi$. Zdarzenia A_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ stanowią pełną grupę zdarzeń, jeżeli w wyniku doświadczenia zajdzie przynajmniej jedno z nich: $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega$

---

1. Przy jakich zdarzeniach A, B, C możliwa jest równość $A \cup B \cup C = A$?

2. Wybieramy losowo dwie liczby. Zdarzenie A polega na tym, że jedna z tych liczb jest liczbą pierwszą, zdarzenie B, że jedna z tych liczb jest lest liczbą parzystą. Co oznaczają zdarzenia: AB oraz $A \cup B$?

3. Wykazać, że $(A'B')'$ oraz $(C' \cup D')' = CD$.

4. Określić zdarzenie C opierając się na równości $CX = AB$.

5. Co oznaczają zdarzenia $A \cup A$ oraz AA?

6. Kiedy możliwa jest równość $ABC = A$?

7. Tarcza strzelnicza składa isię z dziesięciu kół o promieniach $r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$. Co oznaczają zdarzenia $B = \bigcup\limits_{k=1}^{6}$ oraz $C = \bigcap\limits_{k=5}^{10} A_k$?

8. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że przynjmniej jeden spośród trzech sprawdzonych przyrządów jest wadliwie zrobiony, $B-$ zdarzenie, że wszystkie przrządy są dobrej jakości. Co oznaczają zdarzenia $A \cup B$ oraz AB?

9. Wybrano losowo jedną liczbę. Zdarzenie A oznacza, że wybrana liczba dzieli się przez 5, a zdarzenie B, że dan liczba ma na końcu zero. Co oznacza zdarzenie $A \setminus B$?

10. Uprościć wyrażenie $A = (B \cup C)(B \cup C')(B' \cup C)$.

11. Znaleźć zdarzenie losowe C, gdy $(C \cup A)' \cup (C \cup A')' = B$

12. Wykazać równoważność i słuszność następujących dwóch równości: $(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k)' = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A'_k$ oraz $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A'_k = (\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k)'$

13. Wykazać, że zdarzenia $A,\ A'B$ oraz $(A \cup B)'$ tworzą pełną grupę zdarzeń.

14. Określić zdarzenie losowe C, jeśli a) $A \cup C = A \cup B$, b) $AB \cup C = (A \cup D)(B \cup D)$.

Proste obliczanie prawdopodobieństw
Rozważamy przypadek, gdy wynik doświadczenia można przedstawić w postaci pełnej grupy zdarzeń, które parami wyłączają się i są jednakowo możliwe. Prawdopodobieństwo jest wtedy równe stosunkowi ilości m sprzyjających temu zdarzeniu przypadków do ogólnej ilości n wszystkich możliwych przypadków, tj. $p = m/n$. Przy wyznaczaniu wartości m oraz n korzystamy często z kombinatoryki.

Wariacja bez powtórzeń z n elementów po k.
Ciąg składający się z k różnych elementów, wybranych spośród n różnych elementów. Liczba wariacji bez powtórzeń wynosi

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

Wariacja z powtórzeniami z n elementów po k.
Ciąg składający się z k elementów różnych lub nie różniących się między sobą, wybranych spośród n różnych elementów. Liczba wariacji z powtórzeniami wynosi

$$n^k$$

Permutacja bez powtórzeń z n elementów.
Ciąg składający się z n różnych elementów. Liczba permutacji wyraża się wzorem

$$n!$$

Permutacja z powtórzeniami.
Ciąg składający się z n różnych elementów, wśród których pewne elementy powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, \ldots, n_k$ razy. Liczba permutacji z powtórzeniami wynosi

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Kombinacja bez powtórzeń z n elementów po k
Jest to k– elementowy podzbiór zbioru n– elementowego. Zauważmy, że w zbiorze obojętne jest, w jakim porządku rozmieszczone są jego elementy. Liczba kombinacji bez powtórzeń wynosi

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Podział zbioru n–elementowego na r podzbiorów.
Liczba sposobów, za pomocą których zbiór n–elementowy można podzielić na r podzbiorów, przy założeniu, że pierwszy podzbiór ma k_1 elementów, drugi ma k_2 elementów, ..., r–ty ma k_r elementów, oraz $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, jest równa

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_r!}$$

Zauważmy, że kombinacja bez powtórzeń może być postrzegana, jako podział zbioru na dwa podzbiory.

---

15. Sześcian , którego wszystkie ściany są pomalowane na, rozpiłowano tworząc tysiąc sześcianików jednakowej wielkości. Sześcianiki te wymieszano. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany sześcianik będzie miał dwie ściany pomaloane.

16. W patii n wyprodukowanych przedmiotów k jest wykonanych wadliwie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród losowo wybranych m przedmiotów dokładnie l okaże się wadliwymi.

17. Urządzono loterię na ogólną sumę n euro. Cena jednego losu wynsi r euro. Wygrane padają na m losów. Obliczyć prawdopodobieństwo wygranej przypadające na jeden los.

18. Talia składa się z 36 kart czterech kolorów. Po wyciągnięciu jednej karty i zwróceniu jej do talii tasujemy karty i znów wyciągamy jedną kartę. Obliczyć prawdopodobieństwo, że obie wyciągnięte karty są tego samego koloru.

19. Czarny i biały król znajdują się odpowiednio na pierwszym i trzecim poziomym pasie szachownicy. Na szachownicy stawiamy białą damę, w taki sposób, aby dać czarnemu królowi mata, o ile jest to możliwe przy danym ustawieniu króli. Obliczyć prawdopodobieństwo takiej sytuacji, jeśli króle mogą stać na dowolnych polach wymienionych pasów szachownicy.

20. W portmonetce są 3 monety po 20 groszy i 7 monet po 10 groszy. Wyjmujemy losowo monetę, a następnie drugą, która okazała się monetą dwudziestogroszową. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że pierwsza wyjęta moneta jest również dwudziestogroszowa.

21. Z czterech jednakowych kartek, na których napisano odpowiednio litery A, B, C, D wybrano losowo dwie. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że znajdujące się na tych kartkach litery będą sąsiednimi literami alfabetu.

Prawdopodobieństwo geometryczne.
Zakładamy, ze wynik doświadczenia określony jest przez losowe położenie punktów w pewnym obszarze, przy czym wszelkie położenia punktów w tym obszarze są jednakowo możliwe. Jeżeli wielkość całego obszaru wynosi S, a wielkość tej części obszaru, która sprzyja danemu zdarzeniu, wynosi S_z, to prawdopodobieństwo zdarzenia wynosi

$$\frac{S_z}{S}$$

Obszar S może mieć dowolną liczbę wymiarów, a zatem S_z oraz S mogą to być długości odcinków, pola powierzchni, objętości itd.

---

22. Prostopadle do danej płaszczyzny ustawione są dwa jednakowe walce o promieniu podstawy r. Odcinek AB łączący środki podstaw walców na danej płaszczyźnie ma długość l. Pod kątem q do prostej AB rzucamy kulę o promieniu R. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zderzenia się kuli z walcem, jeżeli przecięcie prostej, wzdłuż której porusza się kula , z prostą AB jest jednakowo możliwe w każdym punkcie.

23. W dowolnych chwilach przedziału czasu o długości T możliwe jest odebranie dwóch sygnałów. Odbiornik ulegnie zepsuciu, jeżeli różnica czasu między tymi sygnałami będzi mniejsza niż τ. Obliczyć prawdopodobieństwo zepsucia się odbiornika.

24. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma dwóch na chybił trafił wybranych dodatnich ułamków właściwych jest nie większa od jedności, a ich iloczyn jest nie większy od $\frac{2}{9}$?

25. W pewnym punkcie C nastąpiło zerwanie linii telefonicznej AB o długości L. Obliczyć prawdopodobieństwo, że punkt C oddalony jest od punktu A nie mniej niż o l

26. Na płaszczyźnie poprowadzone są proste równoległe, odległości między nimi wynoszą na zmianę 1.5 cm i 8 cm. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo rzucony na tę płaszczyznę okrąg promienu 2.5cm nie przetnie ani jednej prostej.

27. Łódka przewozi ładunek z jednego brzegu cieśniny na drugi, przepływając cieśninę w ciągu godziny. Ile wynosi prawdopodobieństwo tego, że z łódki zauważy się statek płynący wzdłuż cieśniny, jeżeli ma to miejsce w przypadku, gdy łódka przecina trasę statku nie wcześniej niż w 20 minut przed przecięciem przez statek trasy łódki lub nie później niż w 20 minut po przecięciu przez statek trasy łódki? Każdy moment i każde miejsce przecięcia przez statek trasy łódki są jednakowo możliwe.

28. Na okegu o promieniu R wybrano losowo trzy punkty A, B, C. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że trójkąt ABC jest prostokątny.

Prawdopodobieństwo warunkowe.

Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zdarzenia A nazywamy prawdopodobieństwo tego zdarzenia obliczone przy założeniu, że zaszło zdarzenie B. Zdarzenia A i B są niezależne, jeżeli $P(A|B) = P(A)$. Prawdopodobieństwo iloczynu dwóch zdarzeń można określić wzorem

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Dla prawdopodobieństwa iloczynu n zdarzeń prawdziwy jest następujący wzór:

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k).$$

Jeżeli zdarzenia są niezależne, to prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń równe jest iloczynowi prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń, tzn.

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

---

29. Przy zwiększeniu napięcia prądu może nastąpić przerwanie obwodu elektrycznego na skutek przepalenia jednego z trzech szeregowo połączonych elementów, odpowiednio z prawdopodobieństwami 0.3, 0.4, oraz 0.6. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że przerwanie obwodu w ogóle nie nastąpi. Jak zmieni się szukane prawdopodobieństwo, jeżeli nie będzie pierwszego elementu?

30. Dwóch strzelców, dla których prawdopodobieństwo trafienia do celu wynoszą odpowiednio 0.7 i 0.8, oddaje po jednym strzale. Obliczyć prawdopodobieństwo, że cel został trafiony.

31. Partię stu wyprodukowanych przedmiotów poddaje się wyrywkowej kontroli. Warunkiem odrzucenia całej partii jest znalezienie choćby jednego wadliwego przedmiotu wśród pięciu sprawdzonych. Jakie jest prawdopodobieństwo odrzucenia danej partii, jeśli zawiera ona 5% przedmiotów wadliwych?

32. Na przystanek autobusowy w ciągu każdych czterech minut zajeżdża autobus linii A, a w ciągu każdych sześciu minut zajeżdża autobus linii B. Zakładając, że momenty przyjazdu na przystanek autobusów obu linii są od siebie niezależne, obliczyć prawdopodobieństwo, że a) pierwszy autobus, jeżeli nadjedzie, bedzie autobusem linii A, b) w ciągu dwóch minut nadjedzie autobus którejkolwiek linii.

33. Zdarzenia A, B wykluczają się. Czy są te zdarzenia są zależne?

34. Mamy cztery przedmioty z defektami: jeden z nich jest niewłaściwie pomalowany, na drugim jest wgniecenie , na trzecim szczerba, a czwarty ma jednocześnie wszystkie wspomniane defekty. Niech zdarzenia A, B, C polegają na tym, że pierwszy losowo wzięty przedmiot będzie źle pomalowany (A), będzie miał wgnieceni (B), bedzie miał szczerbę (C). Czy te zdarzenia są parami niezależne i wzajemnie niezależne?

35. Motocyklista-goniec ma na odcinku AB 12 przeszkód. Prawdopodobieństwo zatrzymania się na każdej z nich jest takie samo i wynosi 0.1. Prawdopodobieństwo, że motocyklista przejedzie bez zatrzymania się odcinek od punku B do punktu końcowego C, wynosi 0.7. Obliczyć prawdopodobieństwo, że motocyklista nie zatrzyma się ani razu na trasie ABC.

36. Trzech graczy gra na następującyuch warunkach. Najpierw kolejno drugi i trzeci gracz dokonują posunięcia przeciw pierwszemu graczowi. Przy tym pierwszy gracz nie wygrywa, a prawdopodobieństwo wygrania dla drugiego i trzeciego gracza są jednakowe i wynoszą 0.3. Jeżeli pierwszy gracz nie przegrał, to dokonuje on po jednym posunięciu przeciw drugiemu i trzeciemu graczowi i wygrywa z każdym z nich, z prawdopodobieństwem 0.4. Na tym gra kończy się. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w wyniku takiej gry wygra pierwszy gracz.

37. W prostokącie o wymiarach 10 m oraz 20 m znajduje się pięć kół, każde o średnicy 12 cm. Trzy z nich położone są w obszarze S o polu 8 m^2, a dwa z nich na zewnątrz tego obszaru. Niech zdarzenie A oznacza trafienie losowo wybranego w prostokącie punktu do obszaru S, a zdarzenie B trafienie tego punktu w dowolne z pięciu kół. Czy te zdarzenia są zależne?

38. Tarcza strzelnicza składa się z dwóch koncentrycznych kół o promieniach k i n, gdzie $k < n$. Przyjmując, że trafienie w każdą część koła o promieniu n jest jednakowo możliwe, obliczyć prawdopodobieństwo, że przy dwóch strzałach nastąpi jedno trafienie w koło o promienu k.

39. W loterii czterdziestu tysiącach losów wygrane padają na trzy losy. Obliczyć: a) prawdopodobieństwo zdobycia przynajmniej jednej wygranej na tysiąc losów, b) ile losów należy nabyć, aby prawdopodobieństwo zdobycia wygranej było nie mniejsze niż 0.5.

Dodawanie prawdopodobieństw
Prawdopodobieństwo sumy dwóch zdarzeń oblicza się według wzoru

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

który uogólnia się na sumę dowolnej liczby składników. Na przykład dla trzech zdarzeń mamy

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

---

40. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że partia złożona ze stu przedmiotów, wśród których jest pięć wykonanych wadliwie, zostanie przyjęta, jeśli sprawdzimy losowo wybraną połowę przedmiotów i jeśli warunki przyjęcia dopuszczają nie więcej niż jeden przedmiot wadliwy na pięćdziesiąt sprawdzonych.