Rachunek prawdopodobieństwa MAP3040, WPPT/FT,
wykład dr hab. A. Jurlewicz
Przykłady - Lista nr 1: Przestrzeń probabilistyczna. Prawdopodobieństwo klasyczne. Prawdopodobieństwo geometryczne.

1. Hasło potrzebne do uzyskania połączenia w sieci komputerowej składa się z jednej cyfry i następnie pięciu dużych liter alfabetu angielskiego. Znaleźć prawdopodobieństwo, że osoba postronna odgadnie hasło, jeśli wiadomo, że cyfra jest nieparzysta, a wśród liter są dokładnie trzy litery E.
Rozwiązanie:
   - $\Omega = \{(c, l_1, \ldots, l_5)$, gdzie $c \in \{1,3,5,7,9\}$, l_i to duże litery, dokładnie 3 wśród nich to E$\}$,
   $\mathcal{F} = 2^\Omega$, P- prawdopodobieństwo klasyczne.
   - $\#\Omega = 5 \cdot \binom{5}{3} \cdot (25)^2 = 31250$,
   bo jest 5 możliwości wyboru cyfry, $\binom{5}{3}$ możliwości wyboru miejsc na E,
   $(26-1)^2$ możliwości wyboru liter innych niż E na każde z dwóch pozostałych miejsc
   - zdarzenie, że osoba postronna odgadnie hasło, $A = \{$właściwe hasło$\}$, $\#A = 1$
   - $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{1}{31250} \approx 0,000032.$

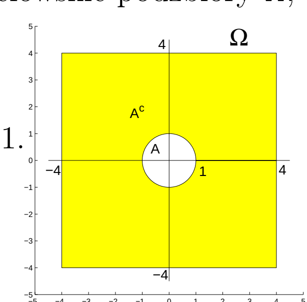
2. Użytkownik karty kredytowej używa czterocyfrowego hasła dostępu. Bankomat blokuje kartę, gdy po raz trzeci hasło zostanie nieprawidłowo podane. Jakie jest prawdopodobieństwo, że złodziej karty dostanie się na nasze konto nie znając hasła?
Rozwiązanie:
   - $\Omega = \{\{h_1, h_2, h_3\}$, gdzie h_i to trzy różne hasła spośród 10^4 możliwych haseł$\}$.
   $\mathcal{F} = 2^\Omega$, P- prawdopodobieństwo klasyczne.
   - $A = \{$dostęp do konta$\} = \{\{$właściwe hasło$, h_2, h_3\}\}$
   - $\#\Omega = \binom{10^4}{3}$, $\#A = \binom{10^4-1}{2}$.
   - $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{(10^4-1)!}{2!(10^4-3)!} \cdot \dfrac{3!(10^4-3)!}{(10^4)!} = 0,0003.$

3. Drewniany sześcian, którego wszystkie boki są pomalowane na niebiesko, rozpiłowano na $64 = 4^3$ jednakowej wielkości mniejsze sześcianiki. Sześcianiki te dokładnie wymieszano, następnie wylosowano 10 z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dokładnie jeden z wylosowanych sześcianików będzie miał 3 niebieskie ściany? Odpowiedź uzasadnić.
Rozwiązanie:
   - $\Omega = \{\{s_1, \ldots, s_{10}\}$, gdzie s_i to różne sześcianiki spośród 64 możliwych$\}$
   $\mathcal{F} = 2^\Omega$, P- prawdopodobieństwo klasyczne.
   - $A = \{$dokładnie jeden narożny$\} = \{\{$narożny$, s_2, \ldots, s_{10}\}$, gdzie s_i nie są narożne$\}$
   - $\#\Omega = \binom{64}{10}$, $\#A = \binom{8}{1}\binom{56}{9}$
   - $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{24597300}{61474519} \approx 0,4.$

4. Niech $\Omega = \{\omega_n, n = 1, 2, \ldots\}$. Weźmy ciąg $p_n = cz^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, gdzie $z > 1$ jest ustalone. Dobrać stałą c tak, aby ciąg (p_n) określał prawdopodobieństwo P na zbiorze Ω tak, że $p_n = P(\{\omega_n\})$. Obliczyć $P(\{\omega_1, \ldots, \omega_{10}\})$.
   Rozwiązanie:
   - $p_n \geqslant 0$ dla każdego n wtedy i tylko wtedy, gdy $c \geqslant 0$
   - $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = c \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = c \cdot \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = \dfrac{c}{z-1} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = z - 1 \geqslant 0$
   - Oba warunki na ciąg określający prawdopodobieństwo na Ω są spełnione dla $c = z - 1$
   - $P(\{\omega_1, \ldots, \omega_{10}\}) = \sum\limits_{n=1}^{10} p_n = \sum\limits_{n=1}^{10} (z-1) \left(\frac{1}{z}\right)^n = (z-1) \cdot \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1-\left(\frac{1}{z}\right)^{10}}{1-\frac{1}{z}} = 1 - \left(\dfrac{1}{z}\right)^{10}$
   - Uwaga: Korzystamy tu ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego:
     $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} q^n = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q} = \dfrac{1}{1-q}$ dla $-1 < q < 1$
     (Tutaj $0 < q = \frac{1}{z} < 1$)

5. Rzucamy monetą tak długo, aż upadnie dwa razy pod rząd na tę samą stronę. Określić Ω i P odpowiadające temu eksperymentowi dla monety symetrycznej. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wykonamy mniej niż 7 i więcej niż 2 rzuty.
   Rozwiązanie:
   - $\Omega = \{OO, ROO, OROO, \ldots\} \cup \{RR, ORR, RORR, \ldots\}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$,
     $p_{n,O} = P(n \text{ rzutów} + OO) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$, $p_{n,R} = P(n \text{ rzutów} + RR) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$
     dla monety symetrycznej.
   - Przestrzeń probabilistyczna jest dobrze określona, bo $p_{n,O}, p_{n,R} \geqslant 0$ dla dowolnego n oraz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (p_{n,O} + p_{n,R}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1.$
   - $P(\text{mniej niż 7 i więcej niż 2 rzuty}) = P(\text{ 3, 4, 5 lub 6 rzutów}) = \sum\limits_{n=1}^{4} (p_{n,O} + p_{n,R}) = \dfrac{15}{32}$
     (ilość rzutów$= n + 2$).

6. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że wybrany losowo punkt kwadratu $|x| < 4$, $|y| < 4$ leży na zewnątrz koła $x^2 + y^2 < 1$.
   Rozwiązanie:
   - $\Omega = \{(x, y) : |x| < 4, |y| < 4\}$ - kwadrat, $\mathcal{F}$ to borelowskie podzbiory Ω, P - prawdopod. geometryczne.
   - $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ - koło.
   - $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{\text{pole } A}{\text{pole } \Omega} = 1 - \dfrac{\pi}{64} \approx 0,951.$



Rachunek prawdopodobieństwa MAP3040, WPPT/FT
Przykłady - Lista nr 2: Prawdopodobieństwo warunkowe. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym. Wzór Bayesa. Schemat Bernoulliego.

1. Pewna choroba jest obecna w 0,01% populacji. Opracowano test, który daje wynik dodatni u 90% chorych i u 5% zdrowych. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pacjent z wynikiem dodatnim jest zdrowy? Czy ma on powody do obaw?
   Rozwiązanie:
   - Wprowadzamy oznaczenia:
     A - zdarzenie, że test daje wynik dodatni; B - zdarzenie, że pacjent jest chory.
     Szukamy $P(B^c|A)$.
   - Ze wzoru Bayesa $P(B^c|A) = \dfrac{P(A|B^c)P(B^c)}{P(A)}$
   - Mamy $P(B) = 0,0001 = 1 - P(B^c)$; $P(A|B) = 0,9$; $P(A|B^c) = 0,05$.
   - Zatem $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0,050085$ z tw. o prawdop. całkowitym.
   - oraz $P(B^c|A) = \dfrac{0,05(1 - 0,0001)}{0,050085} \approx 0,9982$
   - Wniosek: Test w istocie nie wykrywa choroby, bo pacjent z wynikiem dodatnim jest zdrowy na ponad 99% i raczej nie ma powodów do obaw.

2. Wykonujemy pomiary trzema przyrządami, z których jeden jest nieco rozregulowany. Przy wykonywaniu pomiaru sprawnym przyrządem prawdopodobieństwo otrzymania błędu pomiaru przewyższającego tolerancję, wynosi 0,03; prawdopodobieństwo to dla przyrządu niesprawnego wynosi 0,3. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że wynik pomiaru losowo wziętym przyrządem:
   (a) przewyższa tolerancję;
   (b) jest wykonany nie w pełni sprawnym przyrządem, jeżeli wynik ten przewyższa tolerancję.

   Rozwiązanie:
   - Wprowadzamy oznaczenia:
     A - zdarzenie, że błąd pomiaru przewyższa tolerancję;
     B - zdarzenie, że przyrząd jest sprawny.
   - Mamy $P(B) = \frac{2}{3} = 1 - P(B^c)$, $P(A|B) = 0,03$; $P(A|B^c) = 0,3$.
   - Ad. (a)
     Z tw. o prawd. całkowitym $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = 0,12$.
   - Ad. (b) Ze wzoru Bayesa $P(B^c|A) = \dfrac{P(A|B^c)P(B^c)}{P(A)} = \dfrac{5}{6} \approx 0,83$.

3. W pewnym teleturnieju za jednymi z trzech zamkniętych drzwi znajduje się samochód, a za pozostałymi dwoma kozy. Prowadzący grę wie, które drzwi kryją samochód. Gracz wskazuje na jedne z drzwi, prowadzący otwiera jedne z pozostałych odkrywając kozę i następnie pyta gracza, które z zamkniętych drzwi otworzyć (tzn. czy gracz zmienia wybór, czy nie). Jeżeli gracz wskaże na odpowiednie drzwi, wygrywa samochód.

   Powiedzmy, że gracz wskazał na początku na drzwi nr 1, a prowadzący grę otworzył drzwi nr 3 z kozą. Czy graczowi opłaca się zmienić decyzję i wskazać na drzwi nr 2? Odpowiedź uzasadnić.
   Rozwiązanie:

   - Wprowadzamy oznaczenia: A_i - zdarzenie, że samochód jest za drzwiami nr i, B_i - zdarzenie, że prowadzący otworzył drzwi nr i, $i = 1, 2, 3$
   - Mamy $P(A_i) = \frac{1}{3}$, $P(B_3|A_1) = \frac{1}{2}$, $P(B_3|A_2) = 1$, $P(B_3|A_3) = 0$.
   - Stąd $P(B_3) = \sum\limits_{i=1}^{3} P(B_3|A_i)P(A_i) = \frac{1}{2}$ z tw. o prawdop. całkowitym,
   - i ze wzoru Bayesa $P(A_1|B_3) = \dfrac{P(B_3|A_1)P(A_1)}{P(B_3)} = \dfrac{1}{3}$
     oraz $P(A_2|B_3) = \dfrac{P(B_3|A_2)P(A_2)}{P(B_3)} = \dfrac{2}{3}$
   - Wniosek: Graczowi opłaca się zmienić decyzję, bo zwiększa swoją szansę na wygraną.

4. Wiadomo, że 1% skrzynek pomarańczy psuje się w czasie transportu. Z transportu w sposób losowy pobiera się 10 skrzynek i transport ten jest odrzucany, gdy więcej niż 10% badanych skrzynek zawiera popsute owoce. Jakie jest prawdopodobieństwo odrzucenia transportu?
   Rozwiązanie:

   - Model: schemat Bernoulliego, sukces-wybranie skrzynki z popsutymi owocami, $p = 0,01$ (1%), $n = 10$.
   - Niech X oznacza ilość skrzynek z popsutymi owocami wśród 10 badanych.
     X przyjmuje wartości $k = 0, 1, \ldots, 10$ z prawdopodob.
     $p_k = P(X = k) = \binom{10}{k}(0,01)^k(1 - 0,01)^{10-k}$.
   - Transport jest odrzucany, gdy $X > 10\% \cdot 10 = 1$.
     Prawdop. odrzucenia transportu wynosi zatem
     $P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) =$
     $= 1 - \binom{10}{0}(0,01)^0(1 - 0,01)^{10} - \binom{10}{1}(0,01)^1(1 - 0,01)^9 \approx 0,0043$.

5. Rzucamy symetryczną kostką tak długo aż wypadnie „6”. Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Jakie są możliwe wartości X i z jakim prawdopodobieństwem przyjmuje każdą z nich? Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że będzie potrzebna parzysta liczba rzutów.
Rozwiązanie:

   - Model: schemat Bernoulliego, sukces-wypadła „szóstka”, $p = \frac{1}{6}$.
   - X to czas oczekiwania na pierwszy sukces, który przyjmuje wartości $k = 1, 2, \ldots$ z prawdopodobieństwami $p_k = P(X = k) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^k$.
   - Prawdopodobieństwo, że będzie potrzebna parzysta liczba rzutów, wynosi $P(X \ \text{parzyste}) = \sum_{k \text{ parzyste}} p_k = \frac{1}{5} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2l} = \frac{5}{11} \approx 0,45.$
   (Uwaga: jest ono różne od 0,5).

6. Gra polega na zarzucaniu krążków na kołek. Gracz otrzymuje ich sześć i rzuca je aż do pierwszego celnego rzutu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że po zarzuceniu krążka zostanie graczowi jeszcze co najmniej jeden krążek, jeżeli prawdopodobieństwo trafienia na kołek przy każdym rzucie wynosi 0,1.
Rozwiązanie:

   - Model: schemat Bernoulliego, sukces-trafienie na kołek, $p = 0,1$.
   - Wyobraźmy sobie, że mamy nieograniczoną liczbę krążków, i oznaczmy przez Y czas oczekiwania na pierwsze trafienie.
   - Y przyjmuje wartości $k = 1, 2, \ldots$ z prawdop. $p_k = P(Y = k) = 0,1 \cdot (1 - 0,1)^{k-1}$.
   - Graczowi zostanie co najmniej jeden krążek, gdy $Y \leqslant 5$.
   - Szukane prawdopod. wynosi zatem $P(Y \leqslant 5) = \sum_{k=1}^{5} p_k = 0,1 \sum_{k=1}^{5} (0,9)^{k-1} = 1 - (0,9)^5 \approx 0,41.$

Rachunek prawdopodobieństwa MAP3040, WPPT/FT
Przykłady - Lista nr 3: Zmienna losowa. Rozkład zmiennej losowej.

1. Niech X oznacza ocenę z egzaminu (w czterostopniowej skali ocen: 2, 3, 4, 5) losowo wybranego studenta z dużej grupie studenckiej. Rozkład tej zmiennej losowej podany jest w tabeli:

n	1	2	3	4
x_n	2	3	4	5
p_n	0,1	0,3	0,4	C

Wyznacz stałą C i oblicz prawdopodobieństwo, że ocena jest wyższa niż 3.

Rozwiązanie:

- $p_n \geqslant 0 \Leftrightarrow C \geqslant 0$
- $\sum\limits_{n=1}^{4} p_n = 0,1+0,3+0,4+C = 0,8+C = 1 \Leftrightarrow C = 0,2$
- Oba warunki spełnione są dla $C = 0,2$.
- $P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = p_3 + p_4 = 0,4 + 0,2 = 0,6$

2. Dla jakiej wartości stałej c ciąg $p_n = c \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$, $n = 2, 3, \ldots$, określa rozkład pewnej zmiennej losowej? Podać dwa różne przykłady takiej zmiennej losowej i wyliczyć dla obu prawdopodobieństwo, że zmienna ta jest większa od 5,2 i mniejsza od 7,9999.

Rozwiązanie:

- $p_n \geqslant 0$ dla każdego n wtedy i tylko wtedy, gdy $c \leqslant 0$ (bo $1 - \frac{1}{n^2} < 1$).
- $\sum\limits_{n=2}^{\infty} p_n = c \sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = c \sum\limits_{n=2}^{\infty} (\ln(n-1) + \ln(n+1) - 2\ln n) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} c\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 2\right) = c(-\ln 2) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = -\frac{1}{\ln 2} < 0$.
- Oba warunki na ciąg określający rozkład są spełnione dla $c = -\dfrac{1}{\ln 2}$.
- Aby podać rozkład zmiennej losowej z wykorzystaniem p_n trzeba jeszcze określić zbiór jej wartości, czyli różnowartościowy ciąg (x_n).
Przykład 1. Zmienna losowa X, dla której $x_n = n$ dla $n = 2, 3, \ldots$.
(Zbiór wartości to $\{2, 3, \ldots\}$.)
Wtedy $P(5,2 < X < 7,9999) = P(X = 6) + P(X = 7) = p_6 + p_7 =$
$= -\dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{36}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{49}\right)}{\ln 2} \approx 0,07.$
Przykład 2. Zmienna losowa Y, dla której $x_n = \frac{12}{n}$ dla $n = 2, 3, \ldots$. (Zbiór wartości to $\{6, 4, 3, \frac{12}{5}, \ldots\}$.)
Wtedy $P(5,2 < Y < 7,9999) = P(Y = 6) = p_2 = -\dfrac{\ln\left(1 - \frac{1}{4}\right)}{\ln 2} \approx 0,415.$
Przykład 3. Zmienna losowa Z, dla której $x_n = 8 + n^2$ dla $n = 2, 3, \ldots$. (Zbiór wartości to $\{12, 17, \ldots\}$.)
Wtedy $P(5,2 < Z < 7,9999) = 0.$

3. Na podstawie pewnych badań stwierdzono, że zmienna losowa X opisująca procent zanieczyszczeń w próbce rudy miedzi ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x) & \text{dla } \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{poza } \ \text{tym.} \end{cases}$$

Wybrano niezależnie cztery próbki. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że

(a) dokładnie jedna próbka zawiera ponad 50% zanieczyszczeń;

(b) co najmniej jedna próbka zawiera ponad 50% zanieczyszczeń.

Rozwiązanie:

- Model: schemat Bernoulliego,
  sukces-procent zanieczyszczeń w próbce jest większy niż 50%, czyli $X > \frac{1}{2}$;
  $p = P(X > \frac{1}{2}) = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} 12x^2(1-x)dx = \frac{11}{16}$, $n = 4$.
- Niech Y oznacza ilość próbek z więcej niż 50% zanieczyszczeń wśród 4 badanych (czyli ilość sukcesów w $n = 4$ próbach). Y ma rozkład Bernoulliego $\mathcal{B}\left(n = 4, p = \frac{11}{16}\right)$, czyli przyjmuje wartość $x_k = k$ z prawdopodobieństwem $p_k = \binom{4}{k} \left(\frac{11}{16}\right)^k \left(1 - \frac{11}{16}\right)^{4-k}$ dla $k = 0, 1, \ldots, 4$.
- Mamy zatem

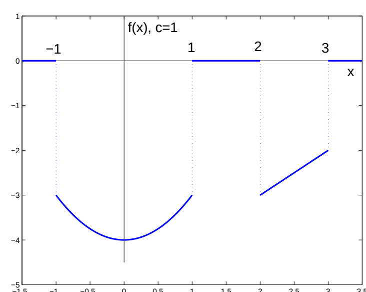
  (1) $P(Y = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{11}{16}\right)^1 \left(1 - \frac{11}{16}\right)^3 \approx 0,084$;

  (2) $P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0} \left(\frac{11}{16}\right)^0 \left(1 - \frac{11}{16}\right)^4 \approx 0,99$.

4. Dobrać stałą c tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \ x < -1, \\ c(x^2-4) & \text{dla } \ -1 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{dla } \ 1 \leqslant x < 2, \\ c(x-5) & \text{dla } \ 2 \leqslant x < 3, \\ 0 & \text{dla } \ 3 \leqslant x \end{cases}$ była gęstością pewnej zmiennej losowej X. Znaleźć dystrybuantę tej zmiennej losowej. Wyliczyć $P(0,5 \leqslant X < 1,5)$ i $P(X \geqslant 2,5)$.

Rozwiązanie:

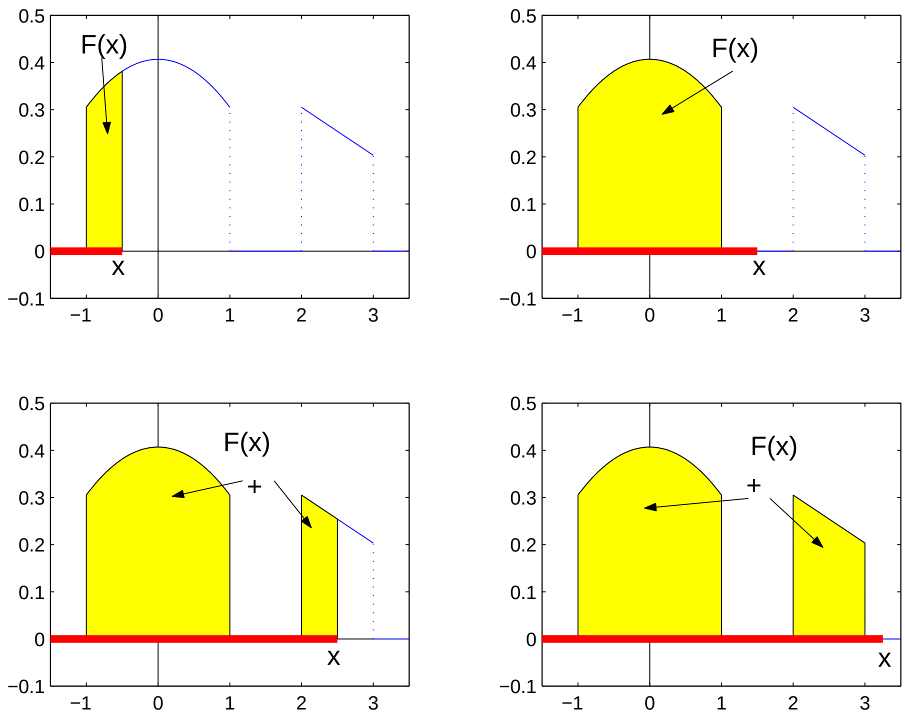
- $f(x) \geqslant 0$ dla każdego x wtedy i tylko wtedy, gdy $c \leqslant 0$ (wzory bez c dają funkcje ujemne na podanych przedziałach).

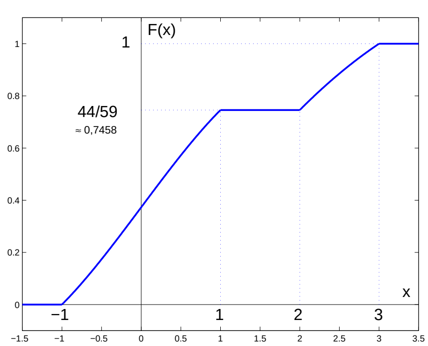


- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int\limits_{-1}^{1}(x^2-4)dx + c\int\limits_{2}^{3}(x-5)dx = -\frac{59}{6}c = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c = -\frac{6}{59}$.

- Oba warunki na gęstość są spełnione, gdy $c = -\frac{6}{59}$.
- Dystrybuanta ma postać $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt =$

$$
= \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1, \\ -\frac{6}{59} \int\limits_{-1}^{x} (t^2 - 4)dt & \text{dla} \quad -1 \leqslant x < 1, \\ -\frac{6}{59} \int\limits_{-1}^{1} (t^2 - 4)dt & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{44}{59} + \left(-\frac{6}{59}\right) \int\limits_{2}^{x} (t-5)dt & \text{dla} \quad 2 \leqslant x < 3, \\ 1 & \text{dla} \quad 3 \leqslant x \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < -1, \\ \frac{2(x(12-x^2)+11)}{59} & \text{dla} \quad -1 \leqslant x < 1, \\ \frac{44}{59} & \text{dla} \quad 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{3x(10-x)-4}{59} & \text{dla} \quad 2 \leqslant x < 3, \\ 1 & \text{dla} \quad 3 \leqslant x \end{cases}
$$





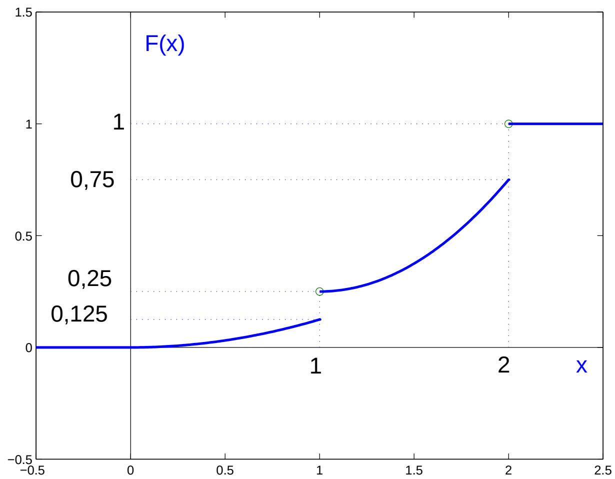
- $P(0,5 \leqslant X < 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = \frac{44}{59} - \frac{2(0,5\cdot(12-(0,5)^2)+11)}{59} = \frac{41}{236} \approx 0,174$
- $P(X \geqslant 2,5) = 1 - F(2,5) = 1 - \frac{3\cdot 2,5\cdot(10-2,5)-4}{59} = \frac{27}{236} \approx 0,114.$

5. Dystrybuanta zmiennej losowej X jest dana wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ 0,125x^2 & \text{dla} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0,5x^2 - x + 0,75 & \text{dla} \quad 1 < x \leqslant 2, \\ 1 & \text{dla} \quad 2 < x. \end{cases}$$

Obliczyć $P(1 \leqslant X < 1,5)$, $P(1 < X \leqslant 1,5)$, $P(0 < X < 2)$, $P(0 < X \leqslant 2)$, $P(X > 1)$, $P(|X| > 1/2)$.

Rozwiązanie:

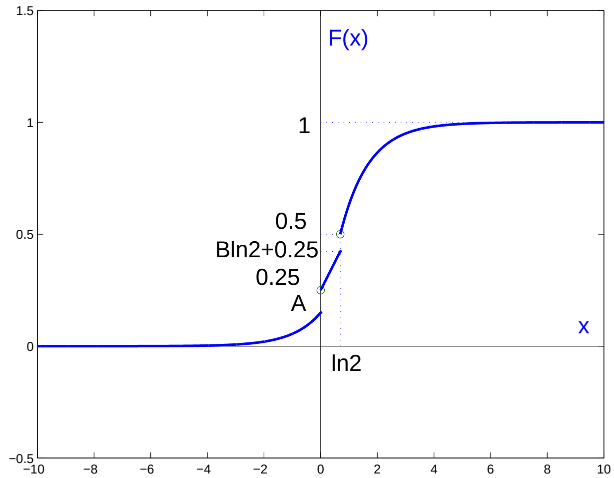


- $P(1 \leqslant X < 1,5) = F(1,5) - F(1) = (0,5 \cdot (1,5)^2 - 1,5 + 0,75) - 0,125 \cdot 1^2 = 0,25$
- $P(1 < X \leqslant 1,5) = \lim\limits_{x \to 1,5+} F(x) - \lim\limits_{x \to 1+} F(x) =$
$= (0,5 \cdot (1,5)^2 - 1,5 + 0,75) - (0,5 \cdot 1^2 - 1 + 0,75) = 0,125$
- $P(0 < X < 2) = F(2) - \lim\limits_{x \to 0+} F(x) = (0,5 \cdot 2^2 - 2 + 0,75) - 0 = 0,75$
- $P(0 < X \leqslant 2) = \lim\limits_{x \to 2+} F(x) - \lim\limits_{x \to 0+} F(x) = 1 - 0 = 1$
- $P(X > 1) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - \lim\limits_{x \to 1+} F(x) = 1 - (0,5 \cdot 1^2 - 1 + 0,75) = 0,75$
- $P(|X| > 1/2) = P(X > 1/2) - P(X < -1/2) = (1 - \lim\limits_{x \to 0,5+} F(x)) - F(-0,5) =$
$= (1 - 0,125 \cdot (0,5)^2) - 0 = 0,96875$

6. Dobrać stałe A, B i C tak, aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} Ae^x & \text{dla } x \leqslant 0, \\ Bx + 0,25 & \text{dla } 0 < x \leqslant \ln 2, \\ C - e^{-x} & \text{dla } x > \ln 2 \end{cases}$$

była dystrybuantą rozkładu pewnej zmiennej losowej X.
Obliczyć prawdopodobieństwa $P(X \leqslant \ln 2)$, $P(X > -\ln 3)$ i $P(0 < X < 1)$.
Rozwiązanie:



Rysunek 1: $F(x)$ dla $A = 0,15$, $B = 0,25$, $C = 1$.

- Dla wszystkich A, B i C funkcja $F(x)$ jest lewostronnie ciągła.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = A \cdot 0 = 0$ dla wszystkich A, B i C
- $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = C = 1$, o ile $C = 1$, A i B - dowolne.
- Aby F była niemalejąca na całej prostej musimy mieć

$$\begin{aligned} &A \geqslant 0, B \geqslant 0 \\ &A = F(0) \leqslant \lim_{x\to 0+} F(x) = 0,25 \\ &B\ln 2 + 0,25 = F(\ln 2) \leqslant \lim_{x\to \ln 2+} F(x) = C - 0,5 \end{aligned}$$

- Zatem funkcja F jest dystrybuantą dla $C = 1$ oraz A i B spełniających warunki:
$0 \leqslant A \leqslant 0,25$, $0 \leqslant B \leqslant 0,25/\ln 2$.
- Wtedy $P(X \leqslant \ln 2) = \lim\limits_{x\to\ln 2+} F(x) = 1 - 0,5 = 0,5$
- $P(X > -\ln 3) = 1 - \lim\limits_{x\to-\ln 3+} F(x) = 1 - Ae^{-\ln 3} = 1 - A/3$
- $P(0 < X < 1) = F(1) - \lim\limits_{x\to 0+} F(x) = 1 - e^{-1} - 0,25 \approx 0,3821$

Rachunek prawdopodobieństwa MAP3040, WPPT/FT
Przykłady - Lista nr 4: Rozkład normalny. Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej. Transformacja zmiennej losowej.

1. Błąd pomiaru długości śruby ma standardowy rozkład normalny. Znaleźć prawdopodobieństwo, że błąd zawarty będzie w przedziale [0; 0,5], [-1; 1], [-2,3; 2].
Rozwiązanie:
   - Oznaczmy błąd pomiaru długości śruby przez B.
   Wiemy, że B to zmienna losowa o standardowym rozkładzie normalnym.
   $P(B < x) = P(B \leqslant x) = \Phi(x)$. Wartości funkcji Φ odczytujemy z tablic.
   - $P(B \in [0; 0,5]) = P(0 \leqslant B \leqslant 0,5) = \Phi(0,5) - \Phi(0) = 0,6915 - 0,5 = 0,1915$
   - $P(B \in [-1; 1]) = P(-1 \leqslant B \leqslant 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) =$
   $= 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6828$
   - $P(B \in [-2,3; 2]) = P(-2,3 \leqslant B \leqslant 2) = \Phi(2) - \Phi(-2,3) =$
   $= \Phi(2) - (1 - \Phi(2,3)) = 0,9772 - (1 - 0,9893) = 0,9665$

2. Długość produkowanych detali ma rozkład $N(0,9; 0,003)$. Norma przewiduje wyroby o wymiarach $0,9 \pm 0,005$. Jaki procent produkowanych detali nie spełnia wymogów normy?
Rozwiązanie:
   - Oznaczmy długość produkowanych detali przez L. Jest to zmienna losowa o rozkładzie $\mathcal{N}(m = 0,9; \sigma = 0,003)$. Wiemy, że $\frac{L-m}{\sigma}$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.
   - Detal spełnia wymogi normy, gdy $0,9 - 0,005 \leqslant L \leqslant 0,9 + 0,005$.
   - $P(\text{detal nie spełnia wymogów normy}) = 1 - P(0,9 - 0,005 \leqslant L \leqslant 0,9 + 0,005) =$
   $= 1 - P\left(\frac{0,9-0,005-0,9}{0,003} \leqslant \frac{L-m}{\sigma} \leqslant \frac{0,9+0,005-0,9}{0,003}\right) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right)\right) =$
   $= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{5}{3}\right)\right) \approx 2(1 - \Phi(1,67)) = 2(1 - 0,9525) = 0,095.$
   - Odp. 9,5% produkowanych detali nie spełnia wymogów normy.

3. Asystent prowadzący zajęcia ze statystyki przychodzi do sali na ogół 2 minuty przed wyznaczoną godziną rozpoczęcia zajęć. Zakładając, że czas przyjścia jest zmienną losową o rozkładzie normalnym z $\sigma = 2$ minuty, określić, jakie jest prawdopodobieństwo spóźnienia się tego asystenta na zajęcia. Czy asystent powinien zmienić zwyczaje? Odpowiedź uzasadnić.
Rozwiązanie:
   - Przyjmiemy, że moment rozpoczęcia zajęć $t_0 = 0$.
   Oznaczmy przez T moment przyjścia asystenta.
   Jest to zmienna losowa o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m = -2, \sigma = 2)$
   ($m = -2$, bo asystent przychodzi na ogół 2 minuty przed chwilą $t_0 = 0$).
   - $P(\text{asystent się spóźni}) = P(T > 0) = P\left(\frac{T-m}{\sigma} > \frac{0-(-2)}{2}\right) = 1 - \Phi(1) =$
   $= 1 - 0,8413 = 0,1587.$

4. Gracz wyciąga z talii (52 kart) dwie karty (bez zwracania). Jeśli są to 2 asy, wygrywa 20 zł, jeśli dwie figury, wygrywa 10 zł, a w pozostałych przypadkach gracz płaci 2 zł. Niech X oznacza wygraną gracza. Znaleźć rozkład i wartość oczekiwaną zmiennej losowej X. Czy zagrałbyś w tę grę? Odpowiedź uzasadnić.
Rozwiązanie:

- X przyjmuje wartości 20, 10 i -2 zł z prawdopodobieństwami
$P(X=20) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{221} \approx 0,0045;$
$P(X=10) = \frac{\binom{12}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{11}{221} \approx 0,0498;$
$P(X=-2) = 1 - P(X=20) - P(X=10) = \frac{209}{221} \approx 0,9457.$
(Wartość -2 oznacza przegranie 2 zł.)
- $\mathrm{E}X = 20 \cdot \frac{1}{221} + 10 \cdot \frac{11}{221} - 2 \cdot \frac{209}{221} = -\frac{288}{221} \approx -1,30$ zł.
- Wniosek: Jak widać, prawdopodobieństwo przegranej w jednej grze jest dość wysokie ($\approx 0,95$), a stawki tak dobrane, że średnio przegrywamy około 1,30 zł. Gra nie jest więc sprawiedliwa. Raczej nie opłaca się grać.

5. Promień kuli R ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}(4,9;5,1)$ cm. Kulę wykonano z żelaza o gęstości 7,88 g/cm^3. Obliczyć $\mathrm{E}M$ i D^2M.
Rozwiązanie:

- Masa kuli równa jest $M = a^{-3}R^3$, gdzie $a = (4 \cdot 7,88\pi/3)^{-1/3} \approx 0,3117$.
- Gęstość R ma postać: $f_R(r) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } r \notin [4,9;5,1], \\ \frac{1}{5,1-4,9} = 5, & \text{gdy } r \in [4,9;5,1]. \end{cases}$
- $\mathrm{E}M = a^{-3}\mathrm{E}R^3 = a^{-3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r^3 f_R(r)dr = 5a^{-3}\int\limits_{4,9}^{5,1} r^3 dr = 5a^{-3}\frac{(5,1)^4-(4,9)^4}{4} \approx 4127,6.$
- $\mathrm{D}^2M = \mathrm{E}M^2 - (\mathrm{E}M)^2 = a^{-6}\mathrm{E}R^6 - (\mathrm{E}M)^2 = a^{-6}\int\limits_{-\infty}^{\infty} r^6 f_R(r)dr - (\mathrm{E}M)^2 =$
$= 5a^{-6}\int\limits_{4,9}^{5,1} r^6 dr - (\mathrm{E}M)^2 = 5a^{-6}\frac{(5,1)^7-(4,9)^7}{7} - \left(5a^{-3}\frac{(5,1)^4-(4,9)^4}{4}\right)^2 \approx 20433,686 \text{ g}^2.$

6. Zmienna losowa X ma rozkład Cauchy'ego $\mathcal{C}(0,1)$.
Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Y = \mathrm{arctg}X$.
Rozwiązanie:

- Gęstość rozkładu Cauchy'ego $\mathcal{C}(0,1)$ ma postać $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.
Stąd dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać
$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x + \frac{1}{2}.$
- Dystrybuanta zmiennej losowej $Y = \mathrm{arctg}X$ to $F_Y(y) = P(Y < y) =$
$= \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ P(X < \mathrm{tg}y) = F_X(\mathrm{tg}y) = \frac{1}{\pi}y + \frac{1}{2}, & \text{gdy } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{gdy } y \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

  Odpowiada ona gęstości $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } y \notin \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{1}{\pi}, & \text{gdy } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$

  Jest to gęstość rozkładu jednostajnego $\mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Wniosek: Y ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

7. Niech X będzie zmienną o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0,\sigma)$.
Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Z = X^2$.
Rozwiązanie:

- X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0,\sigma)$, czyli gęstość postaci $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.
- Dystrybuanta zmiennej losowej $Z = X^2$ to $F_Z(z) = P(Z < z) =$
$$= \begin{cases} 0, & \text{gdy } z \leqslant 0, \\ P(X^2 < z) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}+0) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}), & \text{gdy } z > 0. \end{cases}$$
- Odpowiada ona gęstości
$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } z \leqslant 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{z}}(f_X(\sqrt{z}) + f_X(-\sqrt{z})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} z^{1/2-1} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}, & \text{gdy } z > 0. \end{cases}$$
Jest to gęstość rozkładu gamma $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{1}{2}\right)$.
Wniosek: Z ma rozkład gamma $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2\sigma^2}, \frac{1}{2}\right)$.

Rachunek prawdopodobieństwa MAP3040, WPPT/FT
Przykłady - Lista nr 5: Rozkład łączny. Rozkłady brzegowe. Niezależność zmiennych losowych.

1. Rzucamy symetryczną kostką tak długo aż wypadnie „6". Interesuje nas ilość wyrzuconych po drodze „5". Opisać to doświadczenie przy pomocy dwóch zmiennych losowych i znaleźć ich rozkład łączny.
   Rozwiązanie:

   - Niech X oznacza czas oczekiwania na pierwszą „szóstkę",
     a Y - ilość „piątek" wyrzuconych do chwili X.
   - Wektor losowy (X, Y) przyjmuje wartości $(x_n, y_k) = (n, k)$, gdzie
     $n = 1, 2, \ldots$ oraz $k = 0, 1, \ldots, n-1$; z prawdop. $p_{nk} = P((X,Y) = (x_n, y_k)) =$
     $= P(X = n, Y = k) = \binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1-k}\left(\frac{1}{6}\right) = \binom{n-1}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}$
     (uwzględniamy możliwości wyboru miejsc na "piątkę", szansę na „piątkę" na każdym z tych miejsc, szansę na wynik inny niż „piątka" i „szóstka" na pozostałych miejscach do przedostatniego włącznie, szansę na „szóstkę" w ostatnim rzucie).
     Sprawdzenie: $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} p_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}+\frac{4}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right) = 1.$

2. Wektor losowy (X, Y) ma następujący rozkład łączny:
   $P(X = 0, Y = -2) = C$; $P(X = 0, Y = 0) = 0$; $P(X = 0, Y = 1) = 0,2$;
   $P(X = 2, Y = -2) = P(X = 2, Y = 0) = 0,2$; $P(X = 2, Y = 1) = 0,3$.
   Wyznaczyć stałą C oraz rozkłady brzegowe tego wektora losowego. Czy X i Y są niezależne?
   Rozwiązanie:

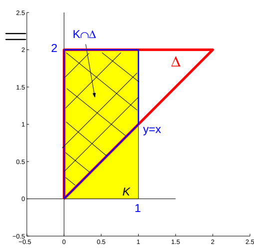
   - Stała C musi być nieujemna oraz spełniać warunek $C+0+0,2+0,2+0,2+0,3 = 1$, co daje $C = 0,1$
   - Rozkład łączny wektora losowego (X, Y) razem z rozkładami brzegowymi zmiennych losowych X i Y możemy podać w postaci tabeli:

y_k \ x_n	0	2	r.brzeg. Y
-2	$0,1$	$0,2$	$0,3$
0	0	$0,2$	$0,2$
1	$0,2$	$0,3$	$0,5$
r.brzeg.X	$0,3$	$0,7$	$\sum = 1$

   - X i Y nie są niezależne, bo np. $P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq 0,3 \cdot 0,2 = P(X = 0)P(Y = 0)$.

3. Dobrać stałą C tak, aby funkcja $f(x,y) = \begin{cases} C(x^2y+y) & \text{dla } 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$
była gęstością pewnego wektora losowego (X,Y). Obliczyć następnie $P((X,Y)\in\Delta)$, gdzie Δ to obszar $0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant y$. Wyznaczyć rozkłady brzegowe wektora losowego (X,Y).
Czy X i Y są niezależne?
Rozwiązanie:

- $f(x,y) \geqslant 0$ dla każdego (x,y) wtedy i tylko wtedy, gdy $C \geqslant 0$
(bo dla $0<x<1, 0<y<2$ mamy $x^2y+y>0$).
$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = C\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 (x^2y+y)dy = \frac{8}{3}C = 1$ wtedy
i tylko wtedy, gdy $C=\frac{3}{8}$.
Oba warunki na gęstość są spełnione, gdy $C=\frac{3}{8}$.
- Oznaczmy przez K prostokąt $0<x<1, 0<y<2$.
$P((X,Y)\in\Delta) = \iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \frac{3}{8}\iint\limits_{\Delta\cap K}(x^2y+y)dxdy =$
$= \frac{3}{8}\int_0^1 dx\int_x^2 (x^2+1)ydy = \frac{3}{8}\int_0^1 (x^2+1)\left(2-\frac{x^2}{2}\right)dx =$
$= \frac{3}{8}(\frac{2}{3}-\frac{1}{10}+2-\frac{1}{6}) = 0,9$



- Wyznaczamy rozkłady brzegowe:
$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2+1)\int\limits_0^2 ydy = \frac{3}{4}(x^2+1) & \text{dla } 0<x<1, \\ 0 & \text{dla pozostalych } x. \end{cases}$$
$$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{3}{8}y\int\limits_0^1 (x^2+1)dx = \frac{1}{2}y & \text{dla } 0<y<2, \\ 0 & \text{dla pozostalych } y. \end{cases}$$
- Ponieważ dla każdego (x,y) mamy $f_X(x)f_Y(y) = f(x,y)$,
zmienne losowe X i Y są niezależne.

4. Dobrać stałą c tak, aby funkcja
$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{dla } 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x, \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases}$$
była gęstością pewnego wektora losowego (X,Y). Obliczyć następnie współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y. Czy X i Y są niezależne?
Rozwiązanie:

- Oznaczmy przez T trójkąt $0<x<1, 0<y<x$.
- $f(x,y)\geqslant 0$ dla każdego (x,y) wtedy i tylko wtedy, gdy $C\geqslant 0$
(bo dla $(x,y)\in T$ mamy $x+y>0$).
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = C\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x (x+y)dy = \frac{C}{2} = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C=2$.
- Oba warunki na gęstość są spełnione, gdy $C=2$.

- Współczynnik korelacji to $\rho_{XY} = \frac{\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}^2X}\sqrt{\mathrm{D}^2Y}}$
- $\mathrm{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} 2x(x+y)dy = \frac{3}{4}$
- $\mathrm{D}^2X = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x,y)dxdy - (\mathrm{E}X)^2 = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} 2x^2(x+y)dy - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2$
- $\mathrm{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} 2y(x+y)dy = \frac{5}{12}$
- $\mathrm{D}^2Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2f(x,y)dxdy - (\mathrm{E}Y)^2 = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} 2y^2(x+y)dy - (\mathrm{E}Y)^2 = \frac{7}{30} - \left(\frac{5}{12}\right)^2$
- $\mathrm{E}XY = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} 2xy(x+y)dy = \frac{1}{3}$
- $\rho_{XY} = \frac{5}{\sqrt{129}} \approx 0,44.$
- Ponieważ $\rho_{XY} \neq 0$, zmienne X i Y nie są niezależne.

5. Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{5}\right)$, a Y rozkład normalny $\mathcal{N}(-1,2)$. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Z = 2X - 3Y - 2$.
   Rozwiązanie:
   - X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp\left(\lambda = \frac{1}{5}\right)$, zatem $\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda} = 5$ i $\mathrm{D}^2X = \frac{1}{\lambda^2} = 25$.
   - Y rozkład normalny $\mathcal{N}(-1,2)$, zatem $\mathrm{E}Y = -1$ i $\mathrm{D}^2Y = 2^2 = 4$.
   - $\mathrm{E}Z = 2\mathrm{E}X - 3\mathrm{E}Y - 2 = 2\cdot 5 - 3\cdot(-1) - 2 = 11.$
   - X i Y są niezależne, więc $\mathrm{D}^2Z = \mathrm{D}^2(2X - 3Y - 2) = \mathrm{D}^2(2X - 3Y) =$
     $= \mathrm{D}^2(2X) + \mathrm{D}^2(-3Y) = 2^2\mathrm{D}^2X + (-3)^2\mathrm{D}^2Y = 4\cdot 25 + 9\cdot 4 = 136.$

6. Niech $Y = X + N$, gdzie X ma rozkład zerojedynkowy z parametrem $p = 0,4$; a N ma rozkład normalny $\mathcal{N}(1,1)$, przy czym zmienne losowe X i N są niezależne. Obliczyć współczynnik korelacji ρ_{XY}.
   Rozwiązanie:
   - X ma rozkład zerojedynkowy z parametrem $p = 0,4$,
     zatem $\mathrm{E}X = p = 0,4$ i $\mathrm{D}^2X = p(1-p) = 0,24$.
   - N ma rozkład normalny $\mathcal{N}(1,1)$, zatem $\mathrm{E}N = 1$ i $\mathrm{D}^2N = 1$.
   - $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}X + \mathrm{E}N = 0,4 + 1 = 1,4$
   - Zmienne losowe X i N są niezależne.
     Zatem $\mathrm{D}^2Y = \mathrm{D}^2X + \mathrm{D}^2N = 0,24 + 1 = 1,24$ oraz
     $\mathrm{E}XY = \mathrm{E}X^2 + \mathrm{E}XN = \mathrm{D}^2X + (\mathrm{E}X)^2 + \mathrm{E}X\mathrm{E}N = 0,24 + (0,4)^2 + 0,4\cdot 1 = 0,8.$

     Inny sposób: $\mathrm{D}^2(X+Y) = \mathrm{D}^2X + \mathrm{D}^2Y - 2(\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y)$, zatem
     $\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^2(X+Y) - \mathrm{D}^2X - \mathrm{D}^2Y) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}^2(2X+N) - \mathrm{D}^2X - \mathrm{D}^2Y) =$
     $= \frac{1}{2}((4-1)\mathrm{D}^2X + \mathrm{D}^2N - \mathrm{D}^2Y) = \frac{1}{2}(3\cdot 0,24 + 1 - 1,24) = 0,24$
   - Otrzymujemy $\rho_{XY} = \frac{\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}^2X} sqrt \mathrm{D}^2Y} = \frac{0,24}{\sqrt{0,24\cdot 1,24}} \approx 0,44.$

Rachunek prawdopodobieństwa MAP3040, WPPT/FT
Przykłady - Lista nr 6: Działania na zmiennych losowych.

1. Zmienne X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(2)$, a Y rozkład normalny $\mathcal{N}(1,2)$. Jaka jest funkcja charakterystyczna rozkładu zmiennej losowej $X+Y$, a jaka zmiennej losowej $4X-Y$?

   Rozwiązanie:
   - X ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda=2)$, więc $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)} = e^{2(e^{it}-1)}$.
   - Y ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m=1, \sigma=2)$, więc $\varphi_Y(t) = e^{itm-t^2\sigma^2/2} = e^{it-2t^2}$.
   - Zmienne X i Y są niezależne.
     Zatem $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t) = e^{2(e^{it}-1)}\cdot e^{it-2t^2}$
   - $\varphi_{4X-Y}(t) = \varphi_X(4t)\cdot\varphi_Y(-t) = e^{2(e^{i(4t)}-1)}\cdot e^{-it-2t^2}$, gdyż
     dla dowolnej stałej a i zmiennej losowej X mamy
     $$\varphi_{aX}(t) = \mathrm{E}e^{it(aX)} = \mathrm{E}e^{i(at)X} = \varphi_X(at).$$

2. Pokazać, że suma dwóch niezależnych zmiennych losowych odpowiednio o rozkładach gamma $\mathcal{G}(\lambda, p_1)$ i $\mathcal{G}(\lambda, p_2)$ ma również rozkład gamma.

   Rozwiązanie:
   - X ma rozkład gamma $\mathcal{G}(\lambda, p_1)$, więc $\varphi_X(t) = (1-it/\lambda)^{-p_1}$.
   - Y ma rozkład gamma $\mathcal{G}(\lambda, p_2)$, więc $\varphi_Y(t) = (1-it/\lambda)^{-p_2}$.
   - Zmienne X i Y są niezależne.
     Zatem $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t) = (1-it/\lambda)^{-p_1}\cdot(1-it/\lambda)^{-p_2} = (1-it/\lambda)^{-(p_1+p_2)}$.
   - Jest to funkcja charakterystyczna rozkładu gamma $\mathcal{G}(\lambda, p_1+p_2)$,
     zatem $X+Y$ ma taki właśnie rozkład gamma.

3. Pokazać, że suma dwóch niezależnych zmiennych losowych odpowiednio o rozkładach Poissona $\mathcal{P}(\lambda_1)$ i $\mathcal{P}(\lambda_2)$ ma również rozkład Poissona.

   Rozwiązanie:
   - X ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda_1)$, więc $\varphi_X(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}$.
   - Y ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda_2)$, więc $\varphi_Y(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$.
   - Zmienne X i Y są niezależne.
     Zatem $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}\cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$.
   - Jest to funkcja charakterystyczna rozkładu Poissona $\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$,
     zatem $X+Y$ ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$.

4. Niech X_1, X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Cauchy'ego $\mathcal{C}(0,1)$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej $Y = \dfrac{X_1+X_2}{2}$.

   Rozwiązanie:
   - X_1 i X_2 mają rozkład Cauchy'ego $\mathcal{C}(0,1)$, więc $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t) = e^{-|t|}$.
   - Zmienne X_1 i X_2 są niezależne. Zatem dla $Y = \frac{X_1+X_2}{2}$ mamy
     $$\varphi_Y(t) = \varphi_{X_1+X_2}\left(\tfrac{t}{2}\right) = \varphi_{X_1}\left(\tfrac{t}{2}\right)\cdot\varphi_{X_2}\left(\tfrac{t}{2}\right) = e^{-\left|\frac{t}{2}\right|}e^{-\left|\frac{t}{2}\right|} = e^{-|t|}.$$
   - Jest to funkcja charakterystyczna rozkładu Cauchy'ego $\mathcal{C}(0,1)$,
     zatem Y ma taki właśnie rozkład.

5. Sznur lampek choinkowych składa się ze 100 żarówek połączonych szeregowo. Żarówki psują się niezależnie, a czas świecenia każdej z nich ma taki sam rozkład Weibulla $\mathcal{W}(1,2)$. Znaleźć rozkład czasu działania sznura lampek.
Rozwiązanie:

- Oznaczmy przez T_i czas świecenia żarówki nr i, $i = 1, 2, \ldots, 100$.
  Z treści zadania $T_1, T_2, \ldots, T_{100}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie Weibulla $\mathcal{W}(1,2)$.
  Dystrybuanta tego rozkładu ma postać $F(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t \leqslant 0, \\ 1 - e^{-t^2}, & \text{gdy } t > 0. \end{cases}$
- Czas działania sznura lampek połączonych szeregowo to $T = \min(T_1, T_2, \ldots, T_{100})$.
  Z niezależności $T_1, T_2, \ldots, T_{100}$ otrzymujemy $F_T(t) = 1 - (1 - F(t))^{100} =$
  $$= \begin{cases} 0, & \text{gdy } t \leqslant 0, \\ 1 - (1 - (1 - e^{-t^2}))^{100}, & \text{gdy } t > 0. \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t \leqslant 0, \\ 1 - e^{-(10t)^2}, & \text{gdy } t > 0. \end{cases}$$
- Zatem T ma rozkład Weibulla $\mathcal{W}(10,2)$.

6. Zmienne losowe X i Y są niezależne o takim samym rozkładzie wykładniczym o średniej 4. Obliczyć $\mathrm{E}\min(X, Y)$.
Rozwiązanie:

- X i Y mają rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$ o średniej 4.
  Zatem $\frac{1}{\lambda} = \mathrm{E}X = \mathrm{E}Y = 4$, czyli $\lambda = \frac{1}{4}$.
- Dystrybuanty mają więc postać $F_X(x) = F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{x}{4}}, & \text{gdy } x \geqslant 0. \end{cases}$
- Zmienne X i Y są niezależne, więc dla $Z = \min(X, Y)$ mamy
  $F_Z(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z)) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } z < 0, \\ 1 - e^{-\frac{z}{2}}, & \text{gdy } z \geqslant 0. \end{cases}$
- Zatem Z ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{2}\right)$,
- a stąd $\mathrm{E}\min(X, Y) = \mathrm{E}Z = \frac{1}{1/2} = 2$.

7. Pokazać, że randomizując parametr λ zmiennej o rozkładzie Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$ zgodnie z rozkładem gamma $\mathcal{G}(1,3)$ otrzymujemy zmienną o rozkładzie ujemnym dwumianowym. Jakie parametry ma ten rozkład ujemny dwumianowy?
Rozwiązanie:

- Mamy $P(X=n|\Lambda=\lambda)=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ dla $n=0,1,\ldots,$

  gdzie Λ ma rozkład gamma $\mathcal{G}(1,3)$,

  czyli rozkład ciągły o gęstości $f_\Lambda(\lambda)=\begin{cases} 0, & \text{gdy } \lambda\leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\lambda^2e^{-\lambda}, & \text{gdy } \lambda>0; \end{cases}$

  $(\Gamma(3)=2!=2)$.
- Zatem dla $n=0,1,\ldots$ otrzymujemy

  $$P(X=n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}P(X=n|\Lambda=\lambda)f_\Lambda(\lambda)d\lambda=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{1}{2}\lambda^2e^{-\lambda}d\lambda=$$

  $$=\frac{1}{2n!}\int\limits_0^\infty\lambda^{(n+3)-1}e^{-2\lambda}d\lambda=\frac{1}{2n!}\frac{\Gamma(n+3)}{2^{n+3}}=\frac{((n+3)-1)!}{n!(3-1)!}\frac{1}{2^{n+3}}=$$

  $$=\binom{(n+3)-1}{3-1}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{(n+3)-3}.$$
- Widać stąd, że $P(X+3=k)=\dbinom{k-1}{3-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{k-3}$ dla $k=3,4,\ldots,$

  czyli $X+3$ ma rozkład ujemny dwumianowy $\mathcal{NB}\left(3,\frac{1}{2}\right)$.

Rachunek prawdopodobieństwa MAP3040, WPPT/FT
Przykłady - Lista nr 7: Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a. Centralne twierdzenie graniczne Lindeberga-Lévy'ego. Twierdzenie Poissona.

1. Z partii towaru o wadliwości 3% pobrano próbkę 500–elementową. Na podstawie tw. Moivre'a–Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że liczba wadliwych elementów w próbie nie przekroczy 4%.
   Rozwiązanie:

   - Model: schemat Bernoulliego, sukces-wylosowany towar jest wadliwy, $p = 0,03$ (3%), $n = 500$ - dość duże, by użyć przybliżenia na podstawie tw. Moivre'a-Laplace'a.
   - Niech X oznacza liczbę wadliwych towarów w próbce, czyli liczbę sukcesów. Mamy oszacować $P(X \leqslant 4\% \cdot 500) = P(X \leqslant 20)$.
   - $P(X \leqslant 20) = P(X \leqslant 20,5) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{20,5-500\cdot 0,03}{\sqrt{500\cdot 0,03\cdot(1-0,03)}}\right) =$
     $= P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{5,5}{\sqrt{14,55}}\right) \approx \Phi\left(\frac{5,5}{\sqrt{14,55}}\right) \approx \Phi(1,44) = 0,9251$
     z tablic standardowego rozkładu normalnego.

2. W dużym okręgu wyborczym 60% wyborców popiera emisję nowych obligacji, a 40% jest przeciw temu projektowi. Na podstawie tw. Moivre'a–Laplace'a oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo odrzucenia projektu w wyborach, w których weźmie udział tylko 160 osób wybranych losowo.
   Rozwiązanie:

   - Model: schemat Bernoulliego, sukces-wyborca jest za emisją obligacji, $p = 0,6$ (60%), $n = 160$ - dość duże, by użyć przybliżenia na podstawie tw. Moivre'a-Laplace'a.
   - Niech X oznacza liczbę wyborców popierających projekt, czyli liczbę sukcesów. Projekt zostanie odrzucony, gdy $X \leqslant 50\% \cdot 160 = 80$.
   - $P(X \leqslant 80) = P(X \leqslant 80,5) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{80,5-160\cdot 0,6}{\sqrt{160\cdot 0,6\cdot(1-0,6)}}\right) =$
     $= P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant -2,5\right) \approx \Phi(-2,5) = 1 - \Phi(2,5) = 1 - 0,9938 = 0,0062$
     z tablic standardowego rozkładu normalnego.

3. W pewnym towarzystwie ubezpieczeniowym jest ubezpieczonych 10000 samochodów. Każdy z właścicieli płaci roczną składkę 30 zł za samochód. Średnio 6 na 1000 samochodów ulega uszkodzeniu w ciągu roku. Właścicielowi uszkodzonego pojazdu towarzystwo wypłaca 2500 zł. Na podstawie tw. Moivre'a–Laplace'a oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku **a)** towarzystwo nie poniesie strat, **b)** zysk przekroczy 125000 zł?
Rozwiązanie:

- Wpłata do towarzystwa ubezpieczeniowego wynosi $W = 30 \cdot 10000 = 300000$ zł Wypłata to $W_y = 2500 \cdot X$ zł, gdzie X ilość uszkodzeń.
- X to liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego, gdzie sukces to uszkodzenie samochodu, $p = 0,006$ (6 na 1000 samochodów), $n = 10000$ - dość duże, by użyć przybliżenia na podstawie tw. Moivre'a-Laplace'a.
- Zysk towarzystwa to $Z = W - W_y$.
- **Ad. a)** Towarzystwo nie poniesie strat, gdy $Z \geqslant 0$, czyli gdy $X \leqslant 120$.
  $P(X \leqslant 120) = P(X \leqslant 120,5) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{120,5-10000\cdot 0,006}{\sqrt{10000\cdot 0,006\cdot(1-0,006)}}\right) =$
  $= P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{60,5}{\sqrt{59,64}}\right) \approx \Phi\left(\frac{60,5}{\sqrt{59,64}}\right) \approx \Phi(7,83) \gg 0,999995 = \Phi(4,417)$
  (na podstawie tablic standardowego rozkładu normalnego).
- **Ad. b)** Zysk przekroczy 125000 zł, gdy $Z > 125000$, czyli gdy $X < 70$.
  $P(X < 70) = P(X < 69,5) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{69,5-10000\cdot 0,006}{\sqrt{10000\cdot 0,006\cdot(1-0,006)}}\right) =$
  $= P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{9,5}{\sqrt{59,64}}\right) \approx \Phi\left(\frac{9,5}{\sqrt{59,64}}\right) \approx \Phi(1,23) = 0,8907$
  z tablic standardowego rozkładu normalnego.

4. Pewna konstrukcja składa się ze 100 jednakowych elementów. Na podstawie CTG Lindeberga–Lévy'ego oszacować prawdopodobieństwo, że całkowita masa tej konstrukcji nie przekroczy 335 kg, jeśli rozkład masy elementów, z których jest złożona, ma wartość oczekiwaną 3,3 kg i odchylenie standardowe 0,1 kg?
Rozwiązanie:

- Oznaczmy przez X_i masę elementu nr i w kg, $i = 1, 2, \ldots, 100$. Zakładamy, że $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Z treści zadania mają one jednakowy rozkład, przy czym $\mathrm{E}X_1 = 3,3$; a $\mathrm{D}^2 X_1 = (0,1)^2$.
- Masa całej konstrukcji to $X = \sum\limits_{i=1}^{100} X_i$. Mamy oszacować $P(X \leqslant 335)$.
- Ponieważ wariancja $\mathrm{D}^2 X_1$ jest skończona i większa od 0, a $n = 100$ wystarczająco duże, możemy skorzystać z tw. Lindeberga–Lévy'ego. Otrzymujemy
  $P(X \leqslant 335) = P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mathrm{E}X_1}{\sqrt{n\mathrm{D}^2 X_1}} \leqslant \frac{335-100\cdot 3,3}{\sqrt{100\cdot(0,1)^2}}\right) = P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - n\mathrm{E}X_1}{\sqrt{n\mathrm{D}^2 X_1}} \leqslant 5\right) \approx$
  $\approx \Phi(5) > 0,999995 = \Phi(4,417)$
  (na podstawie tablic standardowego rozkładu normalnego).

5. Czas oczekiwania na tramwaj linii 4 jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o średniej 15 minut. Pan A codziennie w dni robocze dojeżdża nim do pracy. Oszacować na podstawie CTG Lindeberga–Lévy'ego prawdopodobieństwo, że pan A traci kwartalnie (czyli w ciągu 65 kolejnych dni roboczych) na czekanie na tramwaj linii 4 więcej niż 1000 minut.
Rozwiązanie:

- Oznaczmy przez T_i czas oczekiwania na tramwaj w dniu o kolejnym numerze i (w minutach), $i = 1, 2, \ldots, 65$.
Zakładamy, że $T_1, T_2, \ldots, T_{65}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.
- Z treści zadania mają one jednakowy rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp(\lambda)$ o średniej 15 minut. Zatem $1/\lambda = \mathrm{E}T_1 = 15$, a stąd $\mathrm{D}^2 T_1 = \frac{1}{\lambda^2} = 15^2$.
- Czas stracony kwartalnie na dojazdy to $T = \sum\limits_{i=1}^{65} T_i$.
Mamy oszacować $P(T > 1000)$.
- Ponieważ wariancja $\mathrm{D}^2 T_1$ jest skończona i większa od 0, a $n = 65$ wystarczająco duże, możemy skorzystać z tw. Lindeberga–Lévy'ego. Otrzymujemy
$P(T > 1000) = P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} T_i - n\mathrm{E}T_1}{\sqrt{n\mathrm{D}^2 T_1}} > \frac{1000 - 65\cdot 15}{\sqrt{65\cdot(15)^2}}\right) = P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} T_i - n\mathrm{E}T_1}{\sqrt{n\mathrm{D}^2 T_1}} > \frac{25}{15\sqrt{65}}\right) \approx$
$\approx 1 - \Phi\left(\frac{25}{15\sqrt{65}}\right) \approx 1 - \Phi(0,21) = 1 - 0,5832 = 0,4168$
z tablic standardowego rozkładu normalnego.

6. Prawdopodobieństwo, że dowolna osoba odpowie na przesłaną pocztą reklamę i zamówi książkę, wynosi 0,1. Reklamę wysłano do 20 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo, że **a)** dokładnie 2 osoby, **b)** więcej niż 2 osoby przyślą zamówienia. Obliczenia wykonać metodą dokładną, przybliżoną z tw. Poissona i przybliżoną z tw. Moivre'a–Laplace'a. Porównać wyniki.
Rozwiązanie:

- Model: schemat Bernoulliego, sukces-osoba odpowie na reklamę,
$p = 0,1$, $n = 20$.
- Niech X oznacza liczbę osób, które zamówiły książkę, czyli liczbę sukcesów.
- **Ad. a)** Wzór dokładny:
$P(X = 2) = \binom{20}{2}(0,1)^2(1-0,1)^{20-2} \approx 0,2852.$
Przybliżenie Poissona:
$P(X = 2) \approx p_2 = 0,2707$; gdzie
p_2 odczytane z tablic rozkładu Poissona z $\lambda = np = 20 \cdot 0,1 = 2$.
Przybliżenie z tw. Moivre'a-Laplace'a:
$P(X = 2) = P(1,5 < X < 2,5) =$
$= P\left(\frac{1,5 - 20\cdot 0,1}{\sqrt{20\cdot 0,1\cdot(1-0,1)}} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{2,5 - 20\cdot 0,1}{\sqrt{20\cdot 0,1\cdot(1-0,1)}}\right) =$
$= P\left(-\frac{0,5}{\sqrt{1,8}} < \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{0,5}{\sqrt{1,8}}\right) \approx \Phi(\frac{0,5}{\sqrt{1,8}}) - \Phi(-\frac{0,5}{\sqrt{1,8}}) =$
$= 2\Phi(\frac{0,5}{\sqrt{1,8}}) - 1 \approx 2\Phi(0,37) - 1 = 2 \cdot 0,6443 - 1 = 0,2886$
z tablic standardowego rozkładu normalnego.

- **Ad. b)** Wzór dokładny:
  $P(X>2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=$
  $=1-\binom{20}{0}(0,1)^0(1-0,1)^{20-0}-\binom{20}{1}(0,1)^1(1-0,1)^{20-1}-\binom{20}{2}(0,1)^2(1-0,1)^{20-2}=$
  $=1-(0,9)^{20}-20\cdot 0,1\cdot(0,9)^{19}-190\cdot(0,1)^2\cdot(0,9)^{18}\approx 0,3231.$

  Przybliżenie Poissona:
  $P(X>2)\approx 1-p_0-p_1-p_2=1-0,1353-0,2707-0,2707=0,3233;$
  gdzie p_k odczytane z tablic rozkładu Poissona z $\lambda=np=20\cdot 0,1=2$.

  Przybliżenie z tw. Moivre'a-Laplace'a:
  $P(X>2)=P(X>2,5)=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}>\frac{2{,}5-20\cdot 0{,}1}{\sqrt{20\cdot 0{,}1\cdot(1-0{,}1)}}\right)=$
  $=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}>\frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}8}}\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}8}}\right)\approx 1-\Phi(0,37)=1-0,6443=0,3557$
  z tablic standardowego rozkładu normalnego.

  Porównanie otrzymanych wartości :

	wzory dokładne	z tw. Poissona	z tw. Moivre'a-Laplace'a
$P(X=2)$	0,2852	0,2707	0,2886
$P(X>2)$	0,3231	0,3233	0,3557

7. Przy masowych prześwietleniach małoobrazkowych prawdopodobieństwo natrafienia na chorego na gruźlicę jest 0,01. Na podstawie tw. Poissona i tw. Moivre'a–Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że wśród 200 ludzi prześwietlonych będzie nie mniej niż 3 chorych. Porównać wyniki.
   Rozwiązanie:

   - Model: schemat Bernoulliego, sukces-pacjent jest chory, $p=0,01$, $n=200$.
   - Niech X oznacza liczbę chorych. Mamy oszacować $P(X\geqslant 3)$.
   - Przybliżenie Poissona:
     $P(X\geqslant 3)\approx 1-p_0-p_1-p_2=$
     $=1-0,1353-0,2707-0,2707=0,3233;$
     gdzie p_k odczytane z tablic rozkładu Poissona z $\lambda=np=200\cdot 0,01=2$.
   - Przybliżenie z tw. Moivre'a-Laplace'a:
     $P(X\geqslant 3)=P(X>2,5)=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}>\frac{2{,}5-200\cdot 0{,}01}{\sqrt{200\cdot 0{,}01\cdot(1-0{,}01)}}\right)=$
     $=P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}>\frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}98}}\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{0{,}5}{\sqrt{1{,}98}}\right)\approx 1-\Phi(0,36)=1-0,6406=0,3594$
     z tablic standardowego rozkładu normalnego.

   Porównanie otrzymanych wartości $P(X\geqslant 3)$:

z tw. Poissona	z tw. Moivre'a-Laplace'a
0,3233	0,3594

8. Czas pracy lampy pewnego typu ma rozkład wykładniczy o średniej 900 godzin. Na podstawie tw. Lindeberga–Lévy'ego określić, ile lamp trzeba mieć w zapasie, aby z prawdopodobieństwem 0,99 wystarczyło ich na 4 lata nieprzerwanej pracy? Przyjmujemy, że spalona lampa jest natychmiast wymieniana na nową.
Rozwiązanie:

- Oznaczmy przez T_i czas pracy lampy nr i (w godzinach), $i = 1, 2, \ldots, n$. Z treści zadania $T_1, T_2, \ldots, T_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o takim samym rozkładzie wykładniczym o średniej 900 godzin, czyli z parametrem λ takim, że $\frac{1}{\lambda} = \mathrm{E}T_i = 900$. Mamy zatem $\mathrm{D}^2 T_i = \frac{1}{\lambda^2} = 900^2$.
- Szukamy takiego n, aby
$$P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i \geqslant (3 \cdot 365 + 366) \cdot 24\right) = P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i \geqslant 35064\right) \geqslant 0,99 \qquad (1)$$
(wśród 4 lat jest jeden rok przestępny).
- Z tw. Lindeberga-Lévy'ego mamy
$$P\left(\sum_{i=1}^{n} T_i \geqslant 35064\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} T_i - n\mathrm{E}T_1}{\sqrt{n\mathrm{D}^2 T_1}} \geqslant \frac{35064-900n}{900\sqrt{n}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{35064-900n}{900\sqrt{n}}\right).$$
Jeżeli
$$\Phi\left(\frac{35064-900n}{900\sqrt{n}}\right) \leqslant 0,01; \qquad (2)$$
to nierówność (1) jest spełniona.
- Z tablic standardowego rozkładu normalnego odczytujemy, że $\Phi(-2,326) = 0,01$. Zatem nierówność (2) jest spełniona, gdy $\frac{35064-900n}{900\sqrt{n}} \leqslant -2,326$.
Rozwiązujemy nierówność $35064 - 900n \leqslant -2,326 \cdot 900\sqrt{n} < 0$, gdzie n jest liczbą naturalną. Odpowiada to warunkom
$(35064 - 900n)^2 \geqslant (2,326 \cdot 900)^2 n$ i $n > \frac{35064}{900} = 38,96$.
Rozwiązując równanie kwadratowe i uwzględniając drugi warunek dostajemy odpowiedź: $n \geqslant 57$.
- Wniosek: Wystarczy 57 lamp.