1

MATEMATYKA NA PLUS

ROZKŁAD PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Wyz. rozkł. prawd. zmiennej

a) $Y = 3X + 3$

b) $Y = x^2 + 1$

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

a) $y = 3X + 3$ różnowartościowa (↗)

Y_i	-3	0	3	6	9
p_i	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

b) $y = x^2 + 1$ nieróżnowartościowa

Y_i	5	2	1	Y_4	Y_5
p_i	0,6	0,2	0,2		

NA PODSTAWIE DYSTRYBUANTY WYZNACZ PRAWD. TEJ ZM. LOS.

dystrybuanta

x_i	$(-\infty,-1)$	$\langle -1, 0)$	$\langle 0, 2)$	$\langle 2, 10)$	$\langle 10, \infty)$
$F(x)$	0	0,3	0,7	0,75	1

Punkty skokowe $\{-1, 0, 2, 10\}$

x_i	-1	0	2	10
p_i	0,3	0,4	0,05	0,25

MATEMATYKA NA PLUS

(2)

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,3	0,15	t	0,1

Rozkład zmiennej losowej
Dystrybuanta, wart. oczek.
Odchylenie standardowe

a) Wyz. param t
b) Dystrybuanta
c) Naszkicuj wykres rozkładu i dystr.
d) Oblicz war oczek i odch stand.
e) oblicz $P(1{,}5 < x \leq 3)$, $P(x \leq 4)$ $P(6 < x)$

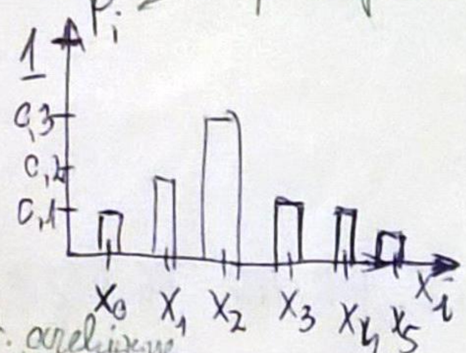
prawdopodobieństwo

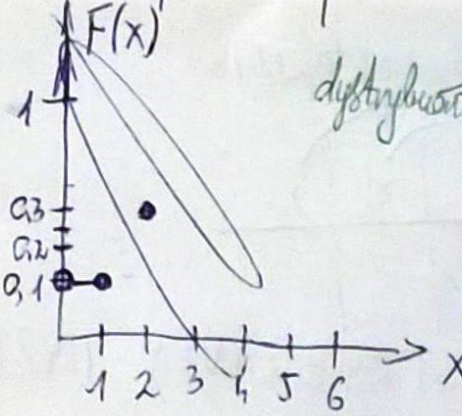
a) $t = 0{,}15$ bo $\boxed{\sum_{i=0}^{k} p_k = 1}$

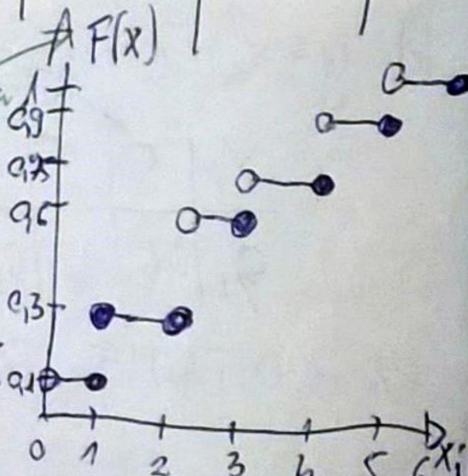
b)

x_i	$(-\infty, 0\rangle$	$(0, 1\rangle$	$(1, 2\rangle$	$(2, 3\rangle$	$(3, 4\rangle$	$(4, 5\rangle$	$(5, \infty)$
$F(x)$	0	0,1	0,3	0,6	0,75	0,9	1

c)







wart. oczekiwana

d) $\boxed{E(x) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i}$ $\quad E(6) = 0 + \cancel{0{,}2} + 0{,}6 + 0{,}45 + \cancel{0{,}6} + \cancel{0{,}5} = 0{,}45 + 1{,}9 =$
$= 2{,}35$

odch. standard

$D(x) = \sqrt{D^2(x)} = \sqrt{2{,}1275} \approx 1{,}46$

wariancja

$D^2(x) = Ex^2 - (Ex)^2 = 7{,}65 - (2{,}35)^2 = 2{,}1275$

$Ex^2 = \sum x_i^2 \cdot p_i = 0 + 0{,}2 + 1{,}2 + 1{,}35 + 2{,}4 + 2{,}5 = 7{,}65$

e) $P(1{,}5 < x \leq 3) = 0{,}3 + 0{,}15 = 0{,}45$

$P(x \leq 4) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}9$

$P(x > 6) = P(\emptyset) = 0$

MATEMATYKA NA PLUS

③

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x<0 \\ 0{,}5-0{,}5\cos x & \text{dla } 0\le x\le \pi \\ 1 & \text{dla } x>\pi \end{cases}$$

func. dystrybuanty

a) znajdź gęstość — wartość przeciętna

b) oblicz $E(x)$, $V(x)$ — wariancja dyst.

c) oblicz $P(0\le x\le \pi)$

a) $\boxed{f(x)=F'(x)}$ — gęstość to pochodna z dystrybuanty

gęstość

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x<0 \\ 0{,}5\sin x & \text{dla } 0\le x\le \pi \\ 0 & x>\pi \end{cases}$$

b)

wart. oczekiwana

$$\boxed{E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cdot 0{,}5\sin x\,dx + \int_{\pi}^{+\infty} x\cdot 0\,dx =$$

$$= 0{,}5\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = 0{,}5\left[-x\cos x+\sin x+C\right]_0^{\pi} = \mathbf{0{,}5\pi}$$

$$\int x\sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u=0{,}5x & du=0{,}5 \\ dv=\sin x & v=-\cos x \end{matrix} \right| = -x\cos x+\int \cos x\,dx =$$

$$= -x\cos x+\sin x+C$$

wariancja

$$\boxed{V(x)=Ex^2-(Ex)^2} \qquad \boxed{Ex^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx} = \int_0^{\pi} x^2\cdot 0{,}5\sin x\,dx = \underset{\dots\dots\dots}{\text{Liczenie całki}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left[\pi^2-2-2\right] = \frac{1}{2}(\pi^2-4)$$

$$V(x) = \frac{\pi^2-4}{2}-\frac{1}{4}\pi^2 = \frac{\pi^2}{2}-2-\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}-2$$

c) $P(0\le x\le \pi) = F(\pi)-F(0) = 1-0 = \underline{1}$

z func. dystrybuanty

Zmienna **X** ma rozkład dwupunktowy wyznacz $\mathbb{E}(X)$ oraz $D^2(X)$

wart. oczek.

wariancja

(i) rozkład skupia się na dwóch wartościach p i q ($p+q=1$)

$P(X=1)=p$, $P(X=0)=q$

$0 \leq p, q \leq 1$

x_i	0	1
p_i	q	p

$$\boxed{\mathbb{E}X = 0\cdot q + 1\cdot p} = 1\cdot p = p$$

$$\boxed{D^2X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2} = p - p^2 = p(1-p) = p\cdot q$$

$$\mathbb{E}x^2 = 0^2\cdot q + 1^2\cdot p = p$$

WYKAŻ, ŻE FUNKCJA JEST DYSTR. ZMIENNEJ LOSOWEJ X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x<1 \\ 1-\frac{1}{x} & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

+ wyznacz funkcję gęstości i policz $P(0<X<1,5)$, $P(X>2)$

funkcja dystrybuanty

a) Wykażmy że F(x) jest funk. dystrybuanty, poniżej warunki

1) $\boxed{0<F(x)<1}$ dla $x\in\mathbb{R}$ — warunek istnienia dystrybuanty (WID)

2) F(X) jest stała dla $x<1$, F(X) jest rosnąca dla $x \geq 1$ $\quad F'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

pochodna > 0 - funkcja rosnąca

funkcja nie może być malejąca

3) $F(X) = -\frac{1}{x}+1 \quad x_0 = 1 \quad \lim_{x\to 1^-} 0 = 0 \quad \lim_{x\to 1^+}\left(1-\frac{1}{x}\right)=0 \quad F(1)=0$

$\boxed{\text{Funkcja jest ciągła dla } x\in\mathbb{R}}$

4) $\boxed{\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} F(x) = 1}$

dystrybuanta musi zaczynać się od 0 i kończyć na war 1

b) $f(x) = F'(x)$

funkcja gęstości

jest pochodną z dystrybuanty

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x<1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

c) $P(0<X<1,5) = F(1,5) - F(0) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

$\underline{P(X>2) = 1 - P(X\leq 2)} = 1 - F(2) = \frac{1}{2}$

$$P(X\leq k) = F(k)$$

MATEMATYKA NA PLUS

5

Zmienna losowa X podlega rozkładowi normalnemu o wartości oczekiwanej 1,5 z odchyleniem standardowym 0,5. Napisz funkcję gęstości i dystrybuantę zm. los. X.

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ dla } x \in \mathbb{R}}$$

gęstość dla rozkładu normalnego

gęstość

$$f(x) = \frac{1}{0{,}5 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-1{,}5)^2}{0{,}5}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-2(x-1{,}5)^2}$$

dystrybuanta

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-2(t-1{,}5)^2} dt \quad x \in \mathbb{R}$$

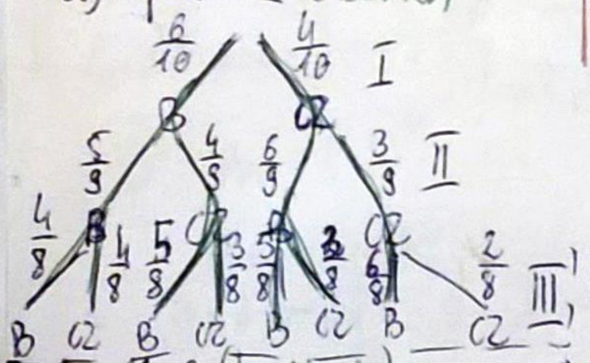
całka niemożliwa do rozwiązania dlatego jest zostawiona jako odpowiedź

W urnie jest 6 kul białych i 4 czarne. Losowo wyciągamy 3 kule. Jakie jest prawdopodob., że spośród otrzymanych kul co najmniej jedna jest biała jeśli:

a) losowanie odbywa się bez zwracania

b) ze zwracaniem

a) sposób 1 (Drzewko)



$$\boxed{P(A) = 1 - P(A')}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

$$P(A') = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}$$

z drzewka

---

sposób 2 (kombinacje)

$$|\Omega| = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120$$

$$|A'| = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

$$P(A') = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$$

b) sposób 1 (drzewko)

$$P(A') = \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} = \frac{64}{1000} = \frac{8}{125} \quad P(A) = 1 - \frac{8}{125} = \frac{117}{125}$$

sposób 2 (wariacje z powtórzeniami)

$$|\Omega| = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

$$|A'| = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \quad P(A') = \frac{64}{1000}$$

$$P(A) = 1 - \frac{64}{1000} = \frac{117}{125}$$

$|\Omega|$ – siła całego zbioru zdarzeń $|A|$ – siła zbioru A

MATEMATYKA NA PLUS

x_i	-2	2	4
p_i	$0,5$	$0,3$	$0,2$

wartość oczekiwana

Wyznacz: a) $E(X)$ b) kwantyl $x_{0,3}$

wariancja

c) medianę $x_{0,5}$ d) D^2X e) DX

odchylenie standard.

f) odchylenie przeciętne od wartości przeciętnej

wart. oczekiwana

a) $E(X) = -2\cdot 0,5 + 2\cdot 0,3 + 4\cdot 0,2 = -1 + 0,6 + 0,8 = 0,4$

b) $\boxed{F(x_p) = p}$ $\quad F(x_p) = 0,3 \quad$ $\boxed{F(x_p) \leq p \leq F(x_p+0)}$

i — warunek do wyznacz. kwantyli x_p+0 oznacza delikatne przesunięcie tak że spoglądamy jest kolejny przedział

funkcja dystrybuanty

x który jest kwantylem rzędu p

x_i	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,4)$	$(4,+\infty)$
$F(x)$	0	$0,5$	$0,8$	1

$F(-2) = 0 \leq 0,3 \qquad F(-2+0) = 0,5 \geq 0,3$

kwantyl $\longrightarrow x_{0,3} = -2$

mediana

c) $\boxed{x_{0,5}}$

$x \in (-2,2) \quad F(x) = 0,5 \leq 0,5 \quad F(x+0) = 0,5 \geq 0,5$

$F(-2) = 0 \leq 0,5 \quad F(-2+0) = 0,5 \geq 0,5$

$F(2) = 0,5 \leq 0,5 \quad F(2+0) = 0,8 \geq 0,5$

zatem każda liczba z przedziału $(-2,2)$ jest medianą

d) $\boxed{D^2X = EX^2 - (EX)^2}$

wariancja

wartość oczekiwana^2

$EX^2 = 2 + 1,2 + 3,2 = 6,4 \qquad \boxed{EX^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i}$

odchylenie standardowe

$D^2X = 6,4 - 0,16 = 6,24$

e) $\boxed{DX = \sqrt{D^2X}} = \sqrt{6,24} \approx 2,5$

wart. oczekiwana

f) $\boxed{d = \sum_{i=1}^{3} |x_i - EX|\, p_i} = |-2-0,4|\cdot 0,5 + |2-0,4|\cdot 0,3 + |4-0,4|\cdot 0,2 =$

odchylenie przeciętne od wartości przeciętnej

$= 2,4\cdot 0,5 + 1,6\cdot 0,3 + 3,6\cdot 0,2 =$

$= 1,2 + 0,48 + 0,72 = 2,4$

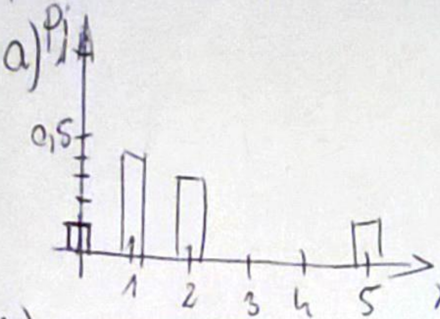
Dwuwymiarowe rozkłady

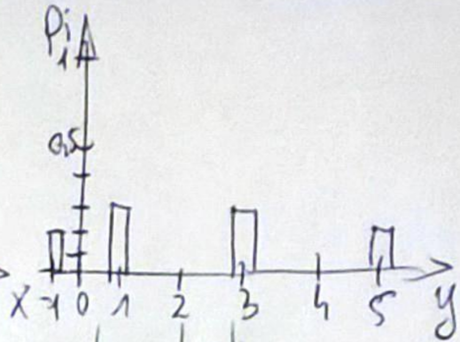
x_i	0	1	2	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

y_i	-1	1	3	5
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

a) naszkicuj histogramy
b) oblicz wsp. asymetrii

a)





b)

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}}$$

moment centralny rz. 3

odchylenie standardowe

współczynnik asymetrii

wartość oczekiwana

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \alpha_1)^3 \cdot p_i$$

$$E(x) = 0 + 0{,}4 + 0{,}6 + 1 = 2 = \alpha_1$$

$$\mu_3 = -2^3 \cdot 0{,}1 + (-1)^3 \cdot 0{,}4 + 0 + 3^3 \cdot 0{,}2 = -0{,}8 + (-0{,}4) + 5{,}4 = 4{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{EX^2 - (EX)^2} = \sqrt{6{,}6 - 4} \approx 1{,}6$$

$$XE^2 = 0 + 0{,}4 + 1{,}2 + 5 = 6{,}6$$

$$\lambda = \frac{4{,}2}{(1{,}6)^3} = \frac{4{,}2}{4{,}096} \approx 1{,}025 > 0$$

asymetria prawostronna

$$E(Y) = -0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}9 + 1 = 2$$

$$E(Y)^2 = 0{,}2 + 0{,}3 + 2{,}7 + 5 = 8{,}2$$

$$\mu_{3Y} = (-3)^3 \cdot 0{,}2 + (-1)^3 \cdot 0{,}3 + 1^3 \cdot 0{,}3 + 3^3 \cdot 0{,}2 = 0$$

$\lambda_y = 0$ współczynnik asymetrii jest równy 0 kiedy na wykresie występuje symetria