Własności prawdopodobieństwa

Niech $A,\ B,\ A_1,\ A_2, \ldots ,\ A_n$ oznaczają zdarzenia losowe, $\emptyset$ zdarzenie niemożliwe. Niech P oznacza prawdopodobieństwo.

1. $P(\emptyset) = 0$

2. Jeśli $A_1,\ A_2, \ldots ,\ A_n$ wykluczają się wzajemnie, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

3. $P(A') = 1 - P(A)$, gdzie $A' = \Omega \setminus A$

4. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$

5. Jeśli $A \subseteq B$, to $P(A) \leqslant P(B)$

6. $P(A) \leqslant 1$

7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

8. Wzór włączeń i wyłączeń

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \\ &\quad = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \\ &\qquad\qquad \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja. Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie $P(B) > 0$, nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Wzór łańcuchowy. Jeśli $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$, to

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\times$$
$$\times P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Definicja. Rozbiciem przestrzeni Ω nazywamy rodzinę zdarzeń $\{H_i\}_{i \in I}$, które wzajemnie wykluczają się, zaś ich suma jest równa Ω.

Prawdopodobieństwo całkowite.
Jeżeli $\{H_1,\ H_2, \ldots,\ H_n\}$ jest rozbiciem Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla dowolnego zdarzenia A

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$$

Niezależność zdarzeń.

Zdarzenie B nie zależy od zdarzenia A, gdy wiedza o tym, że zaszło A nie wpływa na prawdopodobieństwo zajścia B:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Definicja. Zdarzenia A oraz B nazywamy niezależnymi, gdy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$