Rozwiązania zadań testowych **03.09.2011**

Zadanie.

Żarówki losujemy do uzyskania wadliwej. Wylosowaliśmy z rozkładu:

TAK	**NIE**	**Dwumianowy**
TAK	NIE	**ujemny dwumianowy**
TAK	**NIE**	**geometryczny (ujemny rozkład dwumianowy przy r = 1)**

Objaśnienie:

Pierwsza odpowiedź nie jest prawidłowa, ponieważ losowanie odbywa się do momentu uzyskania wadliwej żarówki. W rozkładzie dwumianowym nie możemy zatem określić wielkości próby.

Druga odpowiedź jest prawidłowa, ponieważ rozkład ujemny dwumianowy (rozkład Pascala) opisuje liczbę sukcesów i porażek w niezależnych próbach Bernoulliego (posiadających równe prawdopodobieństwo). Można ponadto na podstawie rozkładu wnioskować jakie jest prawdopodobieństwo, że w k+r próbach wystąpi r sukcesów.

Trzecia odpowiedź jest prawidłowa, ponieważ rozkład geometryczny opisuje prawdopodobieństwo zdarzenia, że proces stochastyczny Bernoulliego odniesie pierwszy sukces, dokładnie w k-tej próbie ($k \in N^+$)

Zadanie.

Rzucamy kostką. Zdarzenie A to wyrzucenie oczek nieparzystych, B – wyrzucimy nie więcej niż 3 oczka.

TAK	**NIE**	**A i B są niezależne**
TAK	NIE	**P (A|B) < P (A)**
TAK	**NIE**	**P (A+B) = P (A) + P (B)**

Objaśnienie:

Zdarzenia A, B są niezależne, jeżeli:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Niezależność zdarzeń A i B oznacza np. że prawdopodobieństwo zdarzenia A nie zmienia się, nawet gdy wiemy, że zaszło zdarzenie B.

W powyższym zadaniu:

$|\Omega| = 6 \quad \Omega = \{⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅\}$

Wyrzucenie nieparzystej liczby oczek:

$$|A| = 3 \quad A = \{⚀ ⚂ ⚄\} \; P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Zdarzenie B polega na wyrzuceniu liczby 3 oczek lub mniejszej

$$|B| = 3 \quad A = \{⚀ ⚁ ⚂\} \; P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$(A \cap B) = \{⚀ ⚂\}$ − część wspólna zdarzeń A i B $|A \cap B| = 2$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Zatem:
$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

Nie można więc mówić o niezależności zdarzeń A i B.

Odpowiedź druga także jest fałszywa:

$$\mathbf{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} > P(A)$$

Odpowiedź P(A+B) = P(A) + P(B) nie jest prawidłowa:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{|\mathbf{A}|}{|\boldsymbol{\Omega}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \; ; \; \mathbf{P(B)} = \frac{|\mathbf{B}|}{|\boldsymbol{\Omega}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \mathbf{P(A) + P(B) = 1}$$

W przypadku rzutów kostkami, prawdopodobieństwo 1 wynosi w przypadku, gdy rozpatrujemy zdarzenie polegające na wyrzuceniu dowolnej kostki.

P(A+B) to zdarzenie, które polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek $|A| = 3$
$A = \{$⚀ ⚂ ⚄$\}$ i liczby oczek nie większej niż 3 $\rightarrow$ $|B| = 3$ $B = \{$⚀ ⚁ ⚂$\}$.

Wspólnym zbiorem obu zdarzeń jest wyrzucenie następujących oczek:
C={⚀ ⚁ ⚂ ⚄} gdzie $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Widać zatem, że wyrażenie P(A+B) = P(A) + P(B) jest fałszywe.

Zadanie.

Niech X1, X2,…. będą i.i.d. zmiennymi losowymi. Jeżeli $P\{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi = EX\} = 1$ to:

TAK	**NIE**	**mocne prawo wielkich liczb (mpwl)**
TAK	NIE	**centralne twierdzenie graniczne (ctg)**
TAK	**NIE**	**słabe prawo wielkich liczb (spwl)**

Uzasadnienie:

Wariancja musi być skończona albo zmienne losowe muszą mieć ten sam rozkład i być niezależne, a wartość oczekiwana musi być skończona. Jeśli tak będzie to zajdzie mocne prawo wielkich liczb i słabe prawo wielkich liczb.

Odnosząc się do definicji MPWL, można zauważyć, że ciąg zmiennych losowych $(\xi_n)_{n\in N}$

spełnia mocne prawo wielkich liczb, gdy

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E\xi_k) \xrightarrow{p.n.} 0$$

W szczególności, mówimy o słabym prawie wielkich liczb, które jest spełnione gdy ciąg zmiennych losowych $(\xi_n)_{n\in N}$ ma granicę w nieskończoności równą 0:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - E\xi_k) = 0$$

Zadane $P\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi = EX\} = 1$ nie spełnia także centralnego twierdzenia granicznego, ponieważ w CTG dla każdego n ($k \le n$) mamy:

$$\sum_{k=1}^{n} D^2 X_{n,k} = 1$$

gdzie $(X_{n,k})$jest schematem serii, w którym $EX_{n,k} = 0$. Ponadto aby był spełniony warunek

Lindeberga: $\sum_{k=1}^{n} X_{n,k} \xrightarrow{D} N(0,1)$ przy czym dla każdego $\varepsilon > 0$ powinno zachodzić

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} EX_{n,k}^2 1_{\{|X_{n,k}| > \varepsilon\}} = 0$ (tw. Lindeberga)

Zadanie.

Niech ξ_1, ξ_2…..będą i.i.d; Zmienna losowa……. $E\xi_1=\mu$ oraz $D^2\xi_n=\sigma^2<\infty$;
jeżeli

$$\bigwedge_t \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\frac{1}{n}\sum \xi_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \le t\} = \phi(t)$$

to zachodzi:

TAK	**NIE**	**słabe prawo wielkich liczb (spwl)**
TAK	NIE	**centralne twierdzenie graniczne (ctg)**
TAK	**NIE**	**mocne prawo wielkich liczb (mpwl)**

Uzasadnienie:

Żadna odpowiedź nie jest prawidłowa (nie zachodzi słabe prawo wielkich liczb, centralne twierdzenie graniczne oraz mocne prawo wielkich liczb). Mianownik wyrażenia $\frac{\frac{1}{n}\sum \xi_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$ powinien być ilorazem $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Prawidłowe wyrażenie miałoby postać:

$$\bigwedge_t \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\frac{1}{n}\sum \xi_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le t\} = \phi(t)$$

Zadanie.

Niech ξ_1, ξ_2…..będą i.i.d.; Zmienna losowa……. $E\xi_1=\mu$ oraz $D^2\xi_n=\sigma^2<\infty$;
jeżeli

$$\bigwedge_t \lim_{n\to\infty} P\{\frac{\frac{1}{n}\sum \xi_1 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le t\} = \phi(t)$$

to zachodzi:

TAK	**NIE**	**słabe prawo wielkich liczb (spwl)**
TAK	NIE	**centralne twierdzenie graniczne (ctg)**
TAK	**NIE**	**mocne prawo wielkich liczb (mpwl)**

Zadanie.
Żarówki działały z rozkładem wykładniczym z parametrem λ:

TAK	**NIE**	$\bigwedge \mathbf{x,y > 0}$**P{X>x +y|X>x}=P{X>y}**
TAK	NIE	**zmienne losowa X ma własność braku pamięci**
TAK	**NIE**	$\bigwedge \mathbf{x > 0 \lim_{\Delta x\to 0} P(X > x + \Delta x \| X > x\} = \lambda}$

Uzasadnienie:

Rozkład wykładniczy jest rozkładem zm. losowej opisującym sytuację, w której obiekt może przyjmować stany X i Y, przy czym obiekt w stanie X może ze stałym prawdopodobieństwem przejść w stan Y w jednostce czasu.

Prawdopodobieństwo wyznaczane przez ten rozkład to prawdopodobieństwo przejścia ze stanu X w stan Y w czasie δt, zatem dystrybuanta tego rozkładu to prawdopodobieństwo, że obiekt jest w stanie Y.

Innymi słowy, jeżeli w jednostce czasu ma zajść 1/λ niezależnych zdarzeń, to rozkład wykładniczy opisuje odstępy czasu pomiędzy kolejnymi zdarzeniami.

Mamy więc: $X \sim Exp(\lambda)$

$\lambda > 0 -$ parametr skali

Gęstość prawdopodobieństwa: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1_{[0,\infty)}(x)$

Zatem dystrybuanta:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \in (-\infty, 0) \\ 1 - e^{-\lambda x} \text{ dla } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej

$$EX = \frac{1}{\lambda}$$

Rozkład wykładniczy jest ciągłym odpowiednikiem rozkładu geometrycznego. Podobnie jak on ma zatem własność braku pamięci, co potwierdza pierwsza (prawidłowa) odpowiedź:

$P(X > x + y | X > x) = P(X > y)$ dla $x, y > 0$

Własność braku pamięci charakteryzuje rozkłady wykładnicze wśród rozkładów prawdopodobieństwa na przedziale od 0 do ∞ prostej rzeczywistej.

Równoważnie można zapisać $P(X > x + y) = P(X > x)P(X > y)$

Zadanie.

Żarówki działały z rozkładem wykładniczym z parametrem λ. ξ ~ E(λ)

TAK	**NIE**	$\bigwedge x, y > 0$ **P{ ξ >x+y | ξ > y } = P { ξ > y)**
TAK	NIE	**ξ ma brak pamięci**
TAK	**NIE**	$\bigwedge x > 0 \lim_{\Delta x \to 0} P\{\xi x + \Delta x \mid \xi > x\} = \lambda$

Uzasadnienie:

Niech $X \sim Exp(\lambda)$ obliczamy $P(X \geq x + y | X \geq x)$ dla $x, y \geq 0$. Zauważmy, że

$P(X \geq x + y | X \geq x) = \frac{P(X \geq x+y)}{P(X \geq x)}$. Pozostaje więc, jak w wypadku rozkładu geometrycznego

obliczyć $P(x \geq x)$. Mamy więc: $P(X \geq x) = \int_x^\infty \lambda \exp(-\lambda y)\, dy = \exp(-\lambda x)$. Wynika z tego

więc:

$$\bigwedge_{x,y>0} P(X \geq x + y | X \geq x) = \exp(-\lambda y)$$

Znów wielkość ta nie zależy od dotychczasowego „czasu życia" równego x. Co nazywane jest własnością „braku pamięci"

Wiemy również, że $P(X > x + y | X > x) = P(X > y)$ dla $x, y > 0$ oraz prawdziwe jest:

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda_2 \exp(-\lambda_2 y) \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x)\, dy\, dx \\ &= \int_0^\infty \lambda_1 \exp(-\lambda_1 x) \exp(-\lambda_2 x)\, dx = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Prowadzi to do stwierdzenia błędności zapisu $\bigwedge x, y > 0$P{ ξ >x+y | ξ > y } = P { ξ > y)

Wyrażenie $\bigwedge x > 0 \lim_{\Delta x \to 0} P\{\xi x + \Delta x \mid \xi > x\} = \lambda$ nie jest prawidłowe, ponieważ gdy obliczymy $\lim_{\delta \to 0} P(X \epsilon < x, x + \delta) | X \geq x)/\delta$, zauważymy, że $P(X \epsilon < x, x + \delta) | X \geq x)$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że np. urządzenie uszkodzi się w ciągu najbliższych δ jednostek czasu, po chwili x, jeśli wiadomo że do momentu x nie było uszkodzenia urządzenia. Łatwo zauważyć też, że jeśli $\lim_{\delta\to 0} P(X\epsilon x, x+\delta)|X \geq x)/\delta$ istnieje, to równa jest $\frac{f(x)}{P(X\geq x)}$ bo $P(X\epsilon(x, x+\delta)|X \geq x) = \frac{P(X\epsilon<x,x+\delta))}{P(X\geq x)}$ oraz $P(X\epsilon < x, x+\delta)) \approx f(x)\delta$

Zadanie.

Niech X ma rozkład beta z parametrami (a,b)

TAK	**NIE**	**1-X ma rozkład beta z parametrami (b,a)**
TAK	NIE	**jeżeli a+b=1 to X ma rozkład jednostajny**
TAK	**NIE**	**jeżeli a=b, to EX=1/2**

Uzasadnienie:

Parametry rozkładu beta: α > 0 parametr kształtu (liczba rzeczywista), β > 0 parametr kształtu (liczba rzeczywista). Rozkład beta to ciągły rozkład prawdopodobieństwa dany funkcją gęstości zdefiniowaną na przedziale [0,1] wzorem

$$f(x) = c_{\alpha,\beta} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

gdzie α,β > 0to wspomniane wcześniej parametry rozkładu, a$c_{\alpha,\beta}$ jest pewną stałą zależną od α i β.

Jeśli rozwiniemy wzór ze względu na tę stałą, otrzymamy pełną postać funkcji gęstości rozkładu:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

gdzie Γ oraz B to odpowiednio funkcja gamma i funkcja beta.

Momenty zwykłe zmiennej o rozkładzie beta wynoszą:

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+k-1)}.$$

Wartość oczekiwana rozkładu beta przedstawia się wzorem:

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

W przypadku równości parametrów (pytanie 3) α = β, mamy:

$EX = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\alpha} = \frac{1}{2}$ Zatem odpowiedź trzecia jest prawidłowa

Wiedząc ponadto, że dystrybuanta $I_x(\alpha,\beta)$ oraz, że dla parametrów $\alpha = \beta$ rozkłady X oraz (1-X) mają takie same wartości, możemy zauważyć prawidłowość stwierdzenia:
1-X ma rozkład beta z parametrami (b,a)

W specjalnym przypadku, kiedy α = β = 1, rozkład beta przyjmuje postać standardowego rozkładu jednostajnego. Nie jest zatem prawdziwe stwierdzenie, że rozkład beta ma rozkład jednostajny, w przypadku gdy suma parametrów rozkładu jest równa jedności.

Zadanie.

Niech f będzie gęstością rachunku prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X, zaś F będzie jej dystrybuantą.

TAK	**NIE**	**$P\{a < x < b\} = \int_a^b f(x)dx$**
TAK	NIE	**f może przyjmować wartość 0.**
TAK	NIE	**$F(x) = \int_t^{\infty} f(x)dx$**
TAK	**NIE**	**F może przyjmować wartości ujemne**

Aby $F(x) = \int_t^{\infty} f(x)dx$ wyrażenie miało sens i logiczną formę, zgodną z teorią rachunku prawdopodobieństwa, należałoby odwrócić całkę.

Odpowiedź pierwsza jest prawidłowa i stanowi kluczową własność funkcji gęstości:

$$P\{a < x \le b\} = \int_a^b f(x)dx$$

Funkcja gęstości jest nieujemna, w związku z tym może przyjmować wartość 0:

$f(x) \ge 0$

Własności dystrybuanty F(x) zmiennej losowej X typu ciągłego:

$0 \le F(x) \le 1$ dla $-\infty < x < +\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$,

Dystrybuantę zmiennej losowej X typu ciągłego można określić następująco:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)d(t),$$

Zadanie.

Niech X1 i X2 będą zmiennymi losowymi:

TAK	**NIE**	**D^2(X1+X2)= D^2(X1) + D^2(X2)**
TAK	NIE	**E(X1+X2)=EX1 + EX2**
TAK	**NIE**	**[cov(X1,X2)^2] >= D^2(X1)D^2(X2)**

Uzasadnienie:

Odpowiedź pierwsza jest błędna, gdyż własność:

$$D^2(X \pm Y) = D^2(X) + D^2(Y)$$

Ma zastosowanie tylko w przypadku, gdy zmienne X i Y są nieskorelowane.

Bardziej ogólny przypadek pozwala zapisać:

$$D^2(X \pm Y) = D^2(X) + D^2(Y) \pm 2\mathrm{Cov}(X, Y)$$

- należy wówczas obliczyć kowariancję

$$\mathrm{Cov}(X, Y)$$

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}X) \cdot (Y - \mathrm{E}Y)]$$

Odpowiedź druga jest poprawna, wynika z własności wartości oczekiwanej, która mówi, że jeżeli X i Y są dowolnymi zmiennymi losowymi, dla których istnieją wartości oczekiwane EX oraz EY , to

E(X +Y) = EX + EY

Korzystając ze wzoru wariancji udowodnimy błędność ostatniej odpowiedzi:

$$D^2X = E(X - EX)^2$$

Zatem:

$$D^2(X1)D^2(X2) = E(X - EX)^2E(X - EX)^2 \neq \mathrm{cov}(X1, X2)^2$$

Zadanie.

W celu oszacowania popularności wśród studentów wykładowcy podaje się ankiecie pewną ilość osób. Zmienna losowa opisująca ilość studentów pozytywnie oceniających wykładowcę ma rozkład:

TAK	**NIE**	**Hipergeometryczny**
TAK	NIE	**ujemny dwumianowy**
TAK	**NIE**	**Dwumianowy**

Uzasadnienie:

Rozkład hipergeometryczny jest dyskretnym rozkładem prawdopodobieństwa związanym z tzw. schematem urnowym. Zmienna losowa o tym rozkładzie określa liczbę elementów jednego typu występujących w n-elementowej próbie wylosowanej z urny zawierającej m elementów tego typu wśród N wszystkich elementów.

W podanym zadaniu, zmienna losowa określająca ilość studentów pozytywnie oceniających wykładowcę, występuje w próbie n-studentów.

Gdybyśmy rozpatrywali populację nieskończoną lub losowania ze zwracaniem, zastosowalibyśmy rozkład Bernoulliego lub Poissona.

Rozkład dwumianowy nie mógłby dobrze opisywać tej zmiennej, ponieważ opisuje eksperymenty próby Bernoulliego. W rozkładzie dwumianowym mamy opisaną liczbę k – sukcesów w ciągu N niezależnych prób.
W analizowanym zadaniu mamy do czynienia z próbą bez zwracania, ponieważ odpowiedzi dotyczących wykładowców udzielają różni respondenci.

Zadanie.

Mamy zdarzenie A i B_i (i=1,2,...,k), gdzie B_i*B_j=zbiór pusty dla $i \neq j$ oraz $P(B_1)+...+P(b_k)=1$:

TAK	**NIE**	**$P(B_i\|A)P(A)=P(A\|B_i)P(B_i)$**
TAK	NIE	**B_1 i B_2 są niezależne**
TAK	**NIE**	**$P(A)=\sum_{i=1}^{k} P(A\|B_i)P(B_i)$**

Uzasadnienie:

Niech A i B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω oraz P(B)>0

Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A przy założeniu, że zaszło zdarzenie B, możemy zapisać (wzór Bayesa):

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$$

Pierwsza odpowiedź ma następującą postać:

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

Możemy więc zpisać:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$ i mnożąc obustronnie przez $P(A)$ mamy:

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

Zdarzenia B_1 i B_2 są zdarzeniami niezależnymi. Jeśli A i B są niezalezne i P(B) >0, to P(A|B) = P(A), a ponadto w analizowanym zadaniu iloczyn (część wspólna) B_i*B_j jestzbiorem pustym

Na poprawność ostatniej odpowiedzi wskazuje tw. o prawdopodobieństwie całkowitym

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym:
Niech $\{B_n, n \in \mathbb{T} \subset \mathbb{N}\}$ będzie rozbiciem zbioru Ω takim, że $P(B_n) > 0$ dla każdego n. Wtedy dla dowolnego zdarzenia losowego A mamy

$$P(A) = \sum_{n\in\mathbb{T}} P(A|B_n)P(B_n).$$

Zadanie.

Mamy zdarzenie A i Bi (i=1,2,...,k), gdzie Bi*Bj=zbiór pusty dla i≠j oraz $P(B_1)+...+P(b_k)=1$:

TAK	NIE	$P(B_i\|A)P(A)=P(A\|B_i)P(A)$
TAK	NIE	B_1 i B_2 są niezależne
TAK	NIE	$P(A)=\sum_{i=1}^{k} P(A\|B_i)P(B_i)$

Uzasadnienie:

Niech A i B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w tej samej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω oraz P(B)>0

Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A przy założeniu, że zaszło zdarzenie B, możemy zapisać:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Pierwsza odpowiedź ma następującą postać:

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(A)$$

Możemy więc zpisać:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$ i mnożąc obustronnie przez $P(A)$ mamy:

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B)$$

Na tej podstawie możemy powiedzieć, że pierwsza odpowiedź jest fałszywa.

Na poprawność ostatniej odpowiedzi wskazuje tw. o prawdopodobieństwie całkowitym

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym:
Niech $\{B_n, n \in \mathbb{T} \subset \mathbb{N}\}$ będzie rozbiciem zbioru Ω takim, że $P(B_n) > 0$ dla każdego n.
Wtedy dla dowolnego zdarzenia losowego A mamy

$$P(A) = \sum_{n \in \mathbb{T}} P(A|B_n)P(B_n).$$

Iloczyn (część wspólna) B_i*B_j jestzbiorem pustym, w związku z tym możemy wnioskować o niezależności zdarzeń. Można także przeprowadzić logiczny dowód, wychodząc od założeń niezależności i wskazanego wyżej wzoru Bayesa.

Zadanie.

Jeżeli funkcja F jest dystrybuantą zmiennej losowej X to:

TAK	**NIE**	$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
TAK	**NIE**	$P\{a < x \leq b\} = \lim_{x \to b} F(x) - F(a)$
TAK	**NIE**	**F jest ciągła.**

Uzasadnienie:

Z własności dystrybuanty mamy:

F jest funkcją niemalejącą,
tzn. jeżeli $x_1 < x_2$, to $F(x_1) \leqslant F(x_2)$
F jest funkcją lewostronnie ciągłą,
tzn. dla każdego $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to a^-} F(x) = F(a)$
$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
jeżeli $a < b$, to $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$
jeżeli x jest liczbą skończoną, to $P(X \geqslant x) = 1 - F(x)$

Dystrybuanta jest wyłącznie lewostronnie ciągła, dlatego odrzucamy odpowiedź trzecią o ciągłości. Na podstawie powyższej własności rozwinięcia dystrybuanty jako prawdopodobieństwa, odrzucamy także drugą odpowiedź.

Zadanie.

Jeżeli funkcja F jest dystrybuantą zmiennej losowej X to:

TAK	NIE	$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
TAK	NIE	$P\{a < x \leq b\} = F(b) - F(a)$
TAK	**NIE**	**F jest malejąca**

Objaśnienie:

Z własności dystrybuanty, wiemy że F jest funkcja niemalejącą, tzn.

jeżeli $x_1 < x_2$, to $F(x_1) \leq F(x_2)$. Wiadomo także, że granicą dystrybuanty przy x dążącym do nieskończoności jest 1, a w minus nieskończoności osiąga granicę równą 0:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Odpowiedź druga jest błędna, gdyż mało precyzyjnie opisuje jedną z własności. Poprawna (z punktu widzenia matematyki) postać równania wygląda następująco:

$$\text{jeżeli } a < b, \text{ to } P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$$

Kluczowe w tym przypadku jest stwierdzenie, iż zachodzi nierówność a<b

Zadanie.

Niech ξ_1, ξ_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie odpowiednio $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$:

TAK	**NIE**	**Zmienna losowa $\xi_1^2 + \xi_2^2$ ma rozkład chi – kwadrat z 2 stopniami swobody**
TAK	NIE	**Zmienna losowa $\xi_1 - \xi_2$ ma rozkład $N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 - \sigma_2^2)$**
TAK	NIE	**Zmienna losowa $\left(\frac{\xi_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2$ ma rozkład gamma z parametrem 1,2**

Objaśnienie:

Zmienna losowa $(\frac{\xi_1-\mu_1}{\sigma_1})^2 + (\frac{\xi_2-\mu_2}{\sigma_2})^2$ ma rozkład gamma z parametrem 1,2, ponieważ:

Jest to rozkład o gęstości $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leqslant 0, \\ \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} & \text{dla} \quad x > 0, \end{cases}$

gdzie $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ nazywana jest funkcją gamma. Funkcja ta ma następujące własności: $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ i stąd dla $p \in \mathbb{N}$ mamy $\Gamma(p) = (p-1)!$;

oraz $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \pi$ dla $0 < p < 1$ i stąd $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Jeżeli X ma rozkład $\mathcal{G}(\lambda, p)$, to $EX = \frac{p}{\lambda}$ oraz $D^2X = \frac{p}{\lambda^2}$.

Funkcja charakterystyczna tego rozkładu ma postać $\varphi_X(t) = (1 - it/\lambda)^{-p}$.

Zadanie.

Niech ξ_1, ξ_2….. będą niezależnymi zmiennymi losowymi $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_1$

TAK	**NIE**	**Jeśli ξ_1 ma rozkład dwumianowy z parametrem (m_1,p) to η ma rozkład dwumianowy z parametrem $(\sum^n m_1, p)$**
TAK	NIE	**Jeśli ξ_1 ma rozkład Poissona z parametrem λ_1, to η ma rozkład Po z parametrem $\sum \lambda_1$**
TAK	**NIE**	**η ma rozkład gamma z parametrami $(\sum \alpha_1, \sum \lambda_1)$**

Uzasadnienie:

Mamy zmienne losowe niezależne ξ_1, ξ_2,… oraz $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_1$

W poprzednim zadaniu pokazaliśmy własności funkcji gamma oraz jej funkcję charakterystyczną. Wiemy ponadto, że η jest sumą n niezależnych zmiennych losowych. Wiedząc dodatkowo, że parametrami η są $\sum \alpha_1, \sum \lambda_1$, odrzucamy ponad wszelką wątpliwość, możliwość, że η ma rozkład dwumianowy lub r. Poissona.

Zadanie.

Niech ξ_1, ξ_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie z dystrybuantami F_1 , F_2

TAK	**NIE**	$P(\min(\xi_1, \xi_2) \le t) = (1 - F_1(t))(1 - F_t(t))$

TAK	NIE	$P\{\xi_1+\xi_2\le t\}=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(t-x)dF_2(x)$
TAK	**NIE**	$P(\max(\xi_1,\xi_2)\le t)=F_1(t)\cdot F_2(t)$

Aby odpowiedzieć na to pytanie definiujemy na R funkcję $\hat{F}_n(t)$ zwaną dystrybuantą empiryczną

$$\hat{F}_n(t)=\frac{\text{liczba obserwacji nie większych niż } t}{\text{liczba wszystkich obserwacji}}=\frac{\#\{1\le j\le n: x_j\le t\}}{n}$$

Ponieważ obserwacja $(x_1,\ldots,x_n)$ jest realizacją wektora losowego $(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))$, to dla każdego ustalonego t wartość dystrybuanty empirycznej $\hat{F}_n(t)$ traktujemy jako zaobserwowaną wartość zmiennej losowej $\hat{F}_n(t.\omega)$ zwanej również dystrybuantą empiryczną określonej wzorem

$$\hat{F}_n(t.\omega)=\frac{\#\{1\le j\le n: X_j(\omega)\le t\}}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{(-\infty,t]}(X_i(\omega))$$

gdie $\quad \mathbf{1}_{(-\infty,t)}(x)=\begin{cases}1, \text{ dla } x\in(-\infty,t]\\ 0, \text{ dla } x\notin(-\infty,t]\end{cases}.$

Z powyższego wzoru widać, że dla ustalonego t dystrybuanta empiryczna jest sumą niezależnych zmiennych losowych $\mathbf{1}_{(-\infty,t]}(X_i(\omega))$ o rozkładzie dwupunktowym. Ogólnie, dystrybuanta empiryczna jest procesem stochastycznym na R. Z powyższych uwag wynika.

$$E_F(\hat{F}_n(t,\omega))=E_F[\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{(-\infty,t]}(X_i(\omega))]=\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E_F[\mathbf{1}_{(-\infty,t]}(X_i(\omega))]=$$

$$\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P_F(X_i(\omega)\le t)=\tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F(t)=F(t)$$

Zadanie.

Czas życia pewnego urządzenia jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem (λ)

TAK	**NIE**	**średni czas pracy układu wynosi (λ)**
TAK	NIE	**całkowity czas pracy n pracujących niezależnie urządzeń ma rozkład gamma**
TAK	**NIE**	**Jeżeli n urządzeń zaczęło jednocześnie pracować to moment pierwszej awarii jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym ze średnią n(λ)**

Rozkład wykładniczy należy do rozkładów typu ciągłego. Funkcja prawdopdb., ma postać

$$f(x)=\begin{cases}0 \;\; dla\; x\le 0\\ \lambda e^{-2x}\;\; dla\; x>0\\ EX=\frac{1}{\lambda}\end{cases}$$

Dystrybuanta: $F(x)=\begin{cases}0\;\; dla\; x\le 0\\ \lambda-e^{-\lambda x}\;\; dla\; x>0\end{cases}$

$$D^2X=\frac{1}{\lambda^2}$$

Niech $X \sim Exp(\lambda)$. Wówczas gęstość X jest równa

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & dla \quad x \geq 0 \\ 0 & dla \quad x < 0 \end{cases}.$$

dystrybuanta zaś jest równa:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x) & dla \quad x > 0 \\ 0 & dla \quad x \leq 0 \end{cases}.$$

Funkcja generująca momenty wynosi:

$$\begin{aligned} g(t) &= E(\exp(tX)) = \lambda \int_0^\infty \exp(tx - \lambda x)dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \text{ dla } t < \lambda. \end{aligned}$$

Stąd można otrzymać wszystkie momenty. I tak np. mamy:

$$\begin{aligned} EX &= \left.\frac{dg(t)}{dt}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}, \\ EX^2 &= \left.\frac{d^2g(t)}{dt^2}\right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

A więc

$$\operatorname{var}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Wiemy na podstawie powyższych rozważań więc, że średni czas pracy wynosi lambda.

Zadanie.

Niech ξ_1, ξ_2….. będą niezależnymi zmiennymi losowymi $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_1$

TAK	**NIE**	**suma k zmiennych losowych o rozkładzie B(n_i, p) ma rozkład B($n_1+n_2+...+n_k$; p)**
TAK	NIE	**suma k zmiennych o rozkładzie gamma (a_i,b_i) ma rozkład gamma ($a_1+a_2+...+a_k$; $b_1+b_2+...+ b_k$)**
TAK	**NIE**	**Niech $\xi_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ oraz $\xi_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ Zmienna losowa $\xi_1 - \xi_2$ ma rozkład N($\mu_1 - \mu_2$, $\sigma_1^2 - \sigma_2^2$)**

Mamy zmienne losowe niezależne ξ_1, ξ_2 ,… oraz $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_1$

Wiemy ponadto, że η jest sumą n niezależnych zmiennych losowych. Mamy więc rozkład gamma i korzystając z własności rozkładu, wiemy że suma k zmiennych losowych o rozkładzie B(n_i, p) będzie miała rozkład B($n_1+n_2+...+n_k$; p)

Zadanie.

Niech ξ_1, ξ_2….. będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie dwupunktowym

TAK	**NIE**	**P(Σξi=k) ≈** $\frac{e^{-np} np^k}{k!}$
TAK	NIE	**D^2(Σξi) = np(1-p)**
TAK	**NIE**	**1/n*Σξ jest AN(p, p(1-p))**

Uzasadnienie:

Zmienna losowa X ma rozkład dwupunktowy, jeśli istnieją takie punkty x_1, x_2, że P(X = x_1) = p,
P(X = x_2) = 1 – p, gdzie 0 < p < 1.

Jeśli x_1= 1 i x_2 = 0, to taki rozkład nazywamy rozkładem zero-jedynkowym.

Dystrybuanta rozkładu zero-jedynkowego:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x \le 0 \\ 1-p, & \text{gdy} \quad 0 < x \le 1. \\ 1, & \text{gdy} \quad x > 1 \end{cases}$$

Parametry rozkładu zero-jedynkowego:
$m_k = p, \quad \mu_2 = pq, \quad \mu_3 = pq(q-p),$ gdzie $q = 1 - p.$

Zadanie.

Niech ξ_1, ξ_2….. będą i.i.d. o rozkładzie N(μ, σ^2). Niech $\eta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$

TAK	**NIE**	**η ma rozkład N(… μ, … σ^2)**
TAK	NIE	**D^2 η=σ^2**
TAK	**NIE**	**Σξ^2 ma rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody**

Objaśnienie:

Zmienna losowa *X* ma rozkład normalny z parametrami $\mu \in R$, σ > 0, jeśli jej funkcja gęstości ma postać

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \quad x \in R.$$

Dystrybuanta rozkładu normalnego ma postać

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dt, \quad x \in R.$$

Parametry zmiennej losowej o rozkładzie normalnym:
$E(X) = \mu,\ D^2(X) = \sigma^2,\ \mu_3 = \alpha_3 = 0,\ \mu_4 = 3\sigma^4,\ \alpha_4 = 3.$

Rozkład normalny nazywamy standaryzowanym (lub standardowym), jeśli $\mu = 0$ i $\sigma = 1$.

Jeśli $X \sim N(\mu, \sigma)$, to $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Zadanie.

Wykonajmy n rzutów kostką do gry. Niech ξ_i *dla* $(i \in 1\ldots6)$ będzie liczbą rzutów w których wypadło i oczek. Niech $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6)$

TAK	**NIE**	**$E\xi = (\frac{n}{6}, \frac{n}{6}, \frac{n}{6}, \frac{n}{6}, \frac{n}{6}, \frac{n}{6})$**
TAK	NIE	**ξ ma rozkład wielomianowy**
TAK	**NIE**	**ξ_i ma rozkład dwumianowy z parametrami (n,1/6)**

Rozkład dwumianowy wyraża prawdopodobieństwo *k* sukcesów w *n* niezależnych próbach, kiedy każda próba może zakończyć się sukcesem lub porażką.

$$P_k^n = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Wyznaczmy wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe dla rozkładu dwumianowego. Przypisując zdarzeniu będącemu sukcesem wartość ***1***, a będącemu porażką - wartość ***0***, mamy dla pojedynczej próby

$$E(x_i) = 1 \cdot p + \mathbf{0} \cdot q = p,$$
$$\sigma^2(x_i) = E\{(x_i - p)^2\} = (1-p)^2 \cdot p + (\mathbf{0} - p)^2 \cdot q = p \cdot q$$

Dla sumy ***n*** zdarzeń losowych, z których każde może przyjmować wartość zero lub jeden mamy, tj dla

$$x = \sum x_i$$

Kiedy wynik pomiaru może przyjmować nie dwie ale więcej wartości to przestrzeń zdarzeń elementarnych składa się z wielu elementów

$$E = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_l \qquad (5.1.8)$$

W danej próbie może wystąpić tylko jedno z tych zdarzeń. Są to więc zdarzenia wzajemnie wykluczające się. Podobnie jak w rozważanym poprzednio przykładzie rozproszenie może być albo w prawo albo w lewo lub w rzucie monetą: albo orzeł albo reszka a nigdy jedno i drugie razem, tak teraz przykładem może być rzut kostką do gry gdzie możliwości jest sześć, ale wynikiem próby jest tylko jedna z nich. Mamy więc

$$P(A_j) = p_j, \qquad \sum_{j=1}^{l} p_j = 1 \qquad (5.1.9)$$

Mamy więc rozkład wielomianowy postaci:

$$P^n_{(k_1,k_2,\ldots,k_l)} = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{l} k_j!} \cdot \prod_{j=1}^{l} p_j^{k_j}, \qquad \sum_{j=1}^{l} k_j = n$$

Zadanie.

Żarówki działały z rozkładem Poissona z parametrem λ. ξ ~ E(λ)

TAK	**NIE**	$(\forall x, y > 0)$ **P{ξ>x+y|ξ>y}=P{ξ>y)**
TAK	NIE	**ξ ma brak pamieci**
TAK	**NIE**	$(\forall x > 0)$ **lim_(Δx->0)P{ξx+Δx|ξ>x}=λ**

Uzasadnienie:

Mówimy, że rozkład dyskretny ma własność braku pamięci, *jeśli dla każdych liczb naturalnych* m, n *zachodzi* $\mathbb{P}(X > m+n | X > m) = \mathbb{P}(X > n)$.

Rozkład Poissona jest rozkładem zmiennej losowej skokowej, który stosuje się w przypadku określania prawdopodobieństwa zajścia zdarzeń stosunkowo rzadkich i niezależnych od siebie przy występowaniu dużej ilości doświadczeń.
Rozkład Poissona jest przybliżeniem rozkładu Bernoulliego dla dużych prób i przy małym prawdopodobieństwie zajścia zdarzenia sprzyjającego.

Funkcja prawdopodobieństwa w rozkładzie Poissona ma postać:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

gdzie:

$k = 0, 1, 2, \ldots,$

e - podstawa logarytmów naturalnych,

n - liczba doświadczeń

λ - parametr będący stałą - $\boldsymbol{\lambda = np}$

Wartość oczekiwana w rozkładzie Poissona:

E(X) = np = λ

Wariancja w rozkładzie Poissona:

D2(X) = np = λ

Zadanie.

Rzucamy kostką. Zdarzenie A to wyrzucenie oczek nieparzystych,
B – wyrzucimy liczbę oczek podzielną przez 3.

TAK	**NIE**	**A i B są niezależne**
TAK	NIE	**P(A|B) < P(A)**
TAK	**NIE**	**P(A∪B) = P(A) + P(B)**

Objaśnienie:

Zdarzenia A, B są niezależne, jeżeli:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Niezależność zdarzeń A i B oznacza np. że prawdopodobieństwo zdarzenia A nie zmienia się, nawet gdy wiemy, że zaszło zdarzenie B.

W powyższym zadaniu:

$|\Omega| = 6 \quad \Omega = \{$⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅$\}$

Wyrzucenie nieparzystej liczby oczek:

$|A| = 3 \quad A = \{$⚀ ⚂ ⚄$\}$ $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Zdarzenie B polega na wyrzuceniu liczby oczek podzielnej przez 3

$|B| = 3 \quad A = \{$⚂ ⚅$\}$ $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$(A \cap B) = \{$⚂$\}$ – część wspólna zdarzeń A i B $\quad |A \cap B| = 1$

$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$

Zatem:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Powyższe wskazuje na to, iż spełniony jest warunek niezależności zdarzeń A i B.

Odpowiedź druga jest fałszywa:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = P(A)$$

Odpowiedź P(A∪B) = P(A) + P(B) nie jest prawidłowa:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\ ;\ P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow P(A) + P(B) = \frac{5}{6}$$

P(A∪B) to zdarzenie, które polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby oczek $|A| = 3$ $A = \{⚀ ⚂ ⚄\}$ i liczby podzielnej przez 3 $\rightarrow$ $|B| = 2$ $B = \{⚂ ⚅\}$.

Sumą logiczną obu zdarzeń jest wyrzucenie następujących oczek:
C={⚀ ⚂ ⚄ ⚅} gdzie $P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \neq \frac{5}{6}$

Widać zatem, że wyrażenie P(A∪B) = P(A) + P(B) jest fałszywe.

Zadanie.

Niech X=|X1,X2| będzie dwuwymiarowy wektorem losowym o funkcji gęstości f.
Niech f1 oraz f2 będą gęstościami brzegowymi.

TAK	**NIE**	**Zmienne X1 oraz X2 są niezależne jeżeli $\bigwedge_{(x_1,x_2)} f(x_1,x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$**
TAK	NIE	$\mathbf{f_2(x_2) = \int f(x_1,x_2)dx_1}$
TAK	**NIE**	**Zmienne losowe X1 oraz X2 są niezależne jeżeli współczynnik korelacji miedzy zmiennymi wynosi 0**

Mówimy, że zmienne losowe X i Y są niezależne jeżeli dla dowolnych $\bigcap_{x,y \in R} F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$ Zmienne losowe X i Y są skokowo niezależne jeżeli $\bigcap_{x_i, y_k} P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i)P(Y = y_k)$. Zmienne losowe X i Y są absolutnie ciągłe niezależne jeżeli dla dowolnych $\bigcap_{x,y \in R} f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Gęstości rozkładów brzegowych mają postać $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

Prawdziwe jest więc wyrażenie: $\mathbf{f_2(x_2) = \int f(x_1,x_2)dx_1}$

Zadanie.

Czy jeśli zmienne losowe mają współczynnik korelacji = 0, to możemy mówić o ich niezależności?

Zależność statystyczna zmiennych losowychto związek pomiędzy dwiema zmiennymi losowymi X i Y.

Intuicyjnie, zależność dwóch zmiennych oznacza, że znając wartość jednej z nich, dałoby się przynajmniej w niektórych sytuacjach dokładniej przewidzieć wartość drugiej zmiennej, niż bez tej informacji.

Mówimy, że zmienne losowe X,Y są niezależne, gdy dla każdych liczb rzeczywistych a,b zachodzi równość

$$P(X \leq a)P(Y \leq b) = P(X \leq a \wedge Y \leq b)$$

W szczególności niezależność każdej dla pary zmiennych X_i, X_j nie oznacza koniecznie niezależności wszystkich zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_{n}$.

Przy założeniu, że istnieją $D^2X>0$ i $D^2Y>0$, określamy współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y jako:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D^2X \cdot D^2Y}}$$

Z własności współczynnika korelacji wynika, że gdy $\rho_{XY} = 0$, mówimy że X i Y są nieskorelowane

1. Jeżeli funkcja F jest dystrybuanta zmiennej losowej X to:

A. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ (odpowiedź prawidłowa)

B. $P\{a < x \leq b\} = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$ (odpowiedź fałszywa)

C. F(x) jest lewostronnie ciągła (odpowiedź prawidłowa)

Uzasadnienie:

Odpowiedź A ($\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$) stanowi jeden z warunków dystrybuanty zmiennej losowej X.

Funkcja $F(x) = P(X < x),\ x \in R$ nazywana jest dystrybuantą i daje pełną informację o rozkładzie zmiennej.

Granicą dystrybuanty w $-\infty$ jest 0, natomiast granicę w $+\infty$ stanowi 1.
Funkcja F(x) spełnia także warunek lewostronnej ciągłości i jest niemalejąca. Spełnienie tych warunków daje F(x) = P(X < x). Funkcja F ma wtedy probabilistyczną interpretację, reprezentację, zatem może być używana w modelach w roli dystrybuanty.

Zauważmy, że $F(x) = P(X < x) = P_X(B)$ dla $B = (-\infty, x)$
Z dystrybuanty możemy zatem dostać informację o wartościach funkcji P_X na innych zbiorach borelowskich:

$$P(a < X \leq b) = \lim_{x \to b+} F(x) - \lim_{x \to a+} F(x)$$

Zadanie.

Czy gęstość może być funkcją posiadającą wartości ujemne?

Funkcja gęstości przyjmuje wartości nieujemne. Wynika to wprost z jej własności:

$f(x) \geq 0$, dla każdego $x \in R$

Ponadto, jeżeli dystrybuanta F jest różniczkowalna, zachodzi $f(x) = F'(x)$

Niech P będzie rozkładem prawdopodobieństwa w przestrzeni R^N (w szczególności rozkładem na prostej dla N = 1). Funkcję borelowską $f: R^N \to R$ nazywamy gęstością rozkładu

P gdy dla każdego zbioru borelowskiego $B \subseteq R^N$

$$P(B) = \int_B f(x)dx.$$

Jeśli f jest gęstością rozkładu P, to w szczególności, na mocy powyższej definicji:

$$\int_{R^N} f(x)dx = 1.$$

W drugą stronę, każda nieujemna funkcja borelowska f, spełniająca powyższy warunek, jest gęstością pewnego rozkładu prawdopodobieństwa.

Zadanie.

Niech f będzie gęstością rachunku prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X, zaś F będzie jej dystrybuantą.

A. $P\{a < x < b\} = \int_a^b f(x)\,dx$(odpowiedź prawidłowa)

B. funkcja gęstości f może przyjmować wartość 0 (odpowiedź prawidłowa)

C. $F(x) = \int_t^\infty f(x)dx$(odpowiedź prawidłowa)

Pierwsza odpowiedź jest prawidłowa, wynika z własności f.gęstości:

$$P\{a < x \leq b\} = \int_a^b f(x)dx$$

Funkcja gęstości przyjmuje wartości nieujemne, w związku z tym odpowiedź B jest prawidłowa. Wynika to wprost z jej własności:

$f(x) \geq 0$, dla każdego $x \in R$

Przy $t \to -\infty$, dystrybuanta (F_ξ) absolutnie ciągła, byłaby równa 1. Jeśli istnieje funkcja

$f: R \to R$ taka, że $f(x) \geq 0$ dla $x \epsilon R$ oraz

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy \text{ (dystrybuanta abs.ciągła)}$$

Wiemy także, że $\mathbf{F}_\xi(x) \to 1$ przy $t \to -\infty$

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^\infty f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$$

Funkcja gęstości pozwala obliczać prawdopodobieństwo, że wartości zm. losowej X należą do dowolnego przedziału o końcach a, b

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx \to P(t < x < \infty) = \int_t^\infty f(x)dx$$

Korzystając z oczywistej zależności $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$, można zapisać

$P(t < X < \infty) = \mathbf{F}(\infty) - F(t)$

Zadanie.

Niech X= | X_1, X_2| będzie dwuwymiarowym wektorem losowym o łącznej gęstości f. Niech f1 oraz f2 będą gęstościami brzegowymi

a) zmienne X_1 i X_2 są niezależne, jeżeli $(\forall x_2) f(x_1 \mid x_2) = f_1(x_1)$ (odpowiedź błędna)

b) $f(x_2 \mid x_1) = f(x_1, x_2) f_1(x_1)$ (odpowiedź błędna)

c) jeżeli $E(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)=0$ to X_1 i X_2 są niezależne. (odpowiedź prawidłowa)

Uzasadnienie:

a)

Mówimy, że zmienne losowe X i Y są niezależne jeżeli dla dowolnych $\bigcap_{x,y\in R} F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$ Zmienne losowe X i Y są skokowo niezależne jeżeli $\bigcap_{x_i,y_k} P(X=x_i,Y=y_k)=P(X=x_i)P(Y=y_k)$. Zmienne losowe X i Y są absolutnie ciągłe niezależne jeżeli dla dowolnych $\bigcap_{x,y\in R} f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

b)

Zmienną losową (X,Y) nazywamy absolutnie ciągłą, jeżeli istnieje nieujemna funkcja f taka, że łączna dystrybuanta tej zmiennej losowej da się przedstawić jako całka:

$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}[f(u,v)dv]du$, dla $x,y\in R$.

Funkcję **f** nazywamy łączną gęstością prawdopodobieństwa.
Własności łącznej gęstości:

1) $\iint_{R^2} f(x,y)dxdy=1$

2) $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$, gdzie (x,y) jest punktem ciągłości gęstości f

3) $P[(X,Y)\in B]=\iint_B f(x,y)dxdy$, $B\subset R^2$

Gęstości rozkładów brzegowych mają postać $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

Rozkłady warunkowe:

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)},\quad x\in R;\ f(y)>0$$

$$f(y\mid x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)},\quad y\in R;\ f(x)>0$$

Zauważmy, że funkcje $f(x\mid y)$ i $f(y\mid x)$ są nieujemne oraz $\int_{-\infty}^{\infty} f(x\mid y)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx=$

$=\dfrac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\dfrac{f_Y(y)}{f_Y(y)}=1$ i $\int_{-\infty}^{\infty} f(y\mid x)dy=1$, co wskazuje, że można je uważać za gęstości pewnych rozkładów.
Rozkład wyrażony przez f(x|y) nazywamy rozkładem warunkowym zmiennej losowej X pod warunkiem, że Y=y. F(x|y) jest gęstością warunkową.

Funkcję $F(x\mid y)=\int_{-\infty}^{x} f(t\mid y)dt$, $x\in R$, nazywamy dystrybuantą warunkowego rozkładu zmiennej losowej X pod warunkiem, że zmienna losowa Y przyjęła wartość y.
Uwaga: $F(x\mid y)=\lim_{k\to 0} P(X<x\mid y\le Y<y+k)$

c)

Aby pokazać prawdziwość stwierdzenia niezależności X_1 oraz X_2 przy $E(X_1-EX_1)(X_2-EX_2)=0$, należy odwołać się do teorii momentów:

Momentem rządu l + n względem punktu c, d dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y) nazywamy wartość oczekiwaną z $E[(X-c)^l(Y-d)^n]$ c,d $\in$ R
Jeżeli c=d=0 to moment nazywamy momentem zwykłym rzędu l + n i oznaczamy $m_{ln} = E(X^l Y^n)$.
Jeżeli c = EX i d = EY to moment nazywamy momentem centralnym rzędu l + n i oznaczamy $\mu_{ln} = E[(X-EX)^l(Y-EY)^n]$
Momenty zwykłe rzędu pierwszego: m_{10} = EX, m_{01} = EY,
S(m_{10}, m_{01}) – współrzędne środka ciężkości.
Momenty centralne rzędu drugiego: $\mu_{20} = E(X - EX)^2 = \Delta^2 X$, $\mu_{02} = E(Y - EY)^2 = \Delta^2 Y$
$\mu_{11} = E[(X - EX)\cdot(Y - EY)] = cov(X,Y)$ – kowariancja zmiennych losowych X i Y
Własności kowariancji:

1) $cov(X,X) = \Delta^2 X$
2) cov(X,Y) = cov(X,Y)
3) $|cov(X,Y)| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y$ – nierówność Schwarza
4) $Cov(X,Y) = E(X\cdot Y) - EX\cdot EY$
5) $D^2(aX + By + c) = a^2D^2X + 2abcov(X,Y) + b^2D^2Y$ a, b, c $\in$ R

W przypadku 2 – wymiarowej zmiennej losowej (X,Y) mówimy o wektorze wartości oczekiwanej $\underline{\mu}$ = [EX, EY] oraz macierzy momentów centralnych rzędu drugiego (macierzy kowariancji) $\underline{\mu} = \begin{bmatrix} \text{cov}(X,X) & \text{cov}(X,Y) \\ \text{cov}(Y,X) & \text{cov}(Y,Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D^2X & cov(X,Y) \\ \text{cov}(Y,X) & D^2Y \end{bmatrix}$
Macierz kowariancji jest macierzą symetryczną
$$\varrho = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad \sigma_X > 0;\ \sigma_Y > 0$$

Zadanie.

Pytanie o własności rozkładu beta
a. czy dla a=b=1 mamy rozkład jednostajny (odpowiedź prawidłowa)
b. pytanie o wartość oczekiwana dla a=b

Rozkład beta to podstawowy rozkład dla zmiennych, których wartości są ograniczone z dwóch stron (np. $0 \le x \le 1$). R. p. udziału poszczególnych wartości znajdujących się pomiędzy najmniejszą i największą wartością w próbce. Np. R. p. wydajności dobowej procesu technologicznego.

Szczególnym przypadkiem rozkładu beta są rozkłady jednostajny, trójkątny i

Rozkład beta $B(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$:

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(x),$$

$\varphi(t)$ – nie istnieje postać jawna,

$$\mathrm{E}X = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \mathrm{Var}\, X = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Funkcja beta (całka Eulera I rodzaju) dana jest wzorem

$$B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du, \qquad x,y > 0.$$

W szczególności, dla $k, m \in \mathbb{N}$,

$$B(k,m) = \frac{(k-1)!\,(m-1)!}{(m+k-1)!}.$$

Związek między funkcjami beta i gamma:

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

paraboliczny

Rozkład beta – to ciągły rozkład dany funkcją gęstości zdefiniowaną na przedziale [0,1] wzorem

$$f(x) = c_{\alpha,\beta} \cdot x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1},$$

gdzie $\alpha,\beta > 0$ są parametrami rozkładu, zaś $c_{\alpha,\beta}$ jest pewną stałą zależną od α i β.

Jeśli rozwiniemy wzór ze względu na tę stałą, otrzymamy pełną postać funkcji gęstości rozkładu:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\int\limits_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\,du} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

gdzie Γ oraz B to odpowiednio funkcja gamma i funkcja beta.

W specjalnym przypadku, kiedy $\alpha = \beta = 1$, rozkład beta przyjmuje postać standardowego rozkładu jednostajnego.

Momenty zwykłe zmiennej o rozkładzie beta wynoszą:

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+k-1)}.$$

Zadanie.

Niech X_1, X_2,…. Będą i.i.d. zmiennymi losowymi. Jeżeli $P\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi = EX_1\} = 1$ to:

a) MPWL
b) CTG
c) SPWL

Mocne prawo wielkich liczb

$$P(\lim_{n\to\infty} M_n = m) = 1$$

Czyli ciąg zmiennych losowych $M_1, M_2, \ldots$ jest zbieżny z prawdopodobieństwem równym 1 do $E(M_n) = m$.

Zadanie.

Niech X_1, X_2,… będą i.i.d. zmiennymi losowymi o rozkładzie dwupunktowym z parametrem p<0,01.
a) $D^2(\sum X_i) = np(1-p)$ (odpowiedź błędna)
b) $P(\sum X_i = k) \approx \exp\{-np\}(np)^k / k!$ (fałsz)
c) $1/n\sum X_i$ jest AN(p,p(1-p)) (fałsz)

Jeśli zmienna losowa X ma rozkład dwupunktowy, to

$$\mathbb{E}X = p, \quad \mathbb{D}^2X = p(1-p)$$

Zadanie.

Żarówki działały z rozkładem Poissona z parametrem λ.

TAK	**NIE**	$(\forall x, y > 0)$ **P{X>x +y|X>x}=P{X>y}**
TAK	NIE	**zmienne losowa X ma własność braku pamięci**
TAK	**NIE**	$(\forall x > 0) \quad \lim_{\Delta x\to 0} P\{X > x + \Delta x \mid X > x\} = \lambda$

Uzasadnienie:

Mówimy, że rozkład dyskretny ma własność braku pamięci, *jeśli dla każdych liczb naturalnych* m, n *zachodzi* $\mathbb{P}(X > m + n | X > m) = \mathbb{P}(X > n)$.

Ze wzoru na parametr λ wyznaczmy prawdopodobieństwo zdarzenia, którego to zdarzenie dotyczy wyrażonej poprzez liczbę przeprowadzonych doświadczeń, wtedy:

$$p = \frac{\lambda}{n} \text{(16.5)}$$

Wykorzystamy wzór na prawdopodobieństwo dyskretne wylosowania k razy pewnej właściwości o prawdopodobieństwie zdarzenia p w n doświadczeniach, którego rozkład jest opisywany przez rozkład rozkład Bernoulliego, do którego wzoru na rozkład podstawimy wyrażenie na prawdopodobieństwo uzyskania zdarzenia p, którego definicja jest zdefiniowana przez stały parametr λ i liczbę przeprowadzonych doświadczeń.

$$P_{nk} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{(1-\frac{\lambda}{n})^n}{(1-\frac{\lambda}{n})^k} = \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \quad (16.6)$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} (1-\frac{\lambda}{n})^n \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot \ldots \cdot (1-\frac{k-1}{n})}{(1-\frac{\lambda}{n})^k}$$

W analizie matematycznej znamy granicę podaną poniżej, którą wykorzystamy w obliczeniach w punkcie:

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \quad (16.7)$$

Dla obliczeń przeprowadzonych w linijce wykorzystamy wyrażenie na exp z liczby z minus λ, którego definicja jest podana w punkcie, dla której nasz rozkład przy nieskończenie małym prawdopodobieństwie "p", tak by był skończony parametr λ, jest napisany:

$$P_k = \lim_{n\to\infty} P_{nk} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Zadanie.

Niech X=|X1,X2| będzie dwuwymiarowy wektorem losowym o funkcji gęstości f.
Niech f1 oraz f2 będą gęstościami brzegowymi.

TAK	**NIE**	**Zmienne X1 oraz X2 są niezależne jeżeli** $\bigwedge(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2})\ \mathbf{f}(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = \mathbf{f_1}(\mathbf{x_1})\mathbf{f_2}(\mathbf{x_2})$
TAK	NIE	$\mathbf{f_2}(\mathbf{x_2}) = \int \mathbf{f}(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2})\mathbf{dx_1}$
TAK	**NIE**	**Zmienne losowe X1 oraz X2 są niezależne jeżeli współczynnik korelacji miedzy zmiennymi wynosi 0**

Mówimy, że zmienne losowe X i Y są niezależne jeżeli dla dowolnych $\bigcap_{x,y\in R} F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$ Zmienne losowe X i Y są skokowo niezależne jeżeli $\bigcap_{x_i,y_k} P(X = x_i, Y = y_k) = P(X = x_i)P(Y = y_k)$. Zmienne losowe X i Y są absolutnie ciągłe niezależne jeżeli dla dowolnych $\bigcap_{x,y\in R} f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

Gęstości rozkładów brzegowych mają postać $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$

Prawdziwe jest więc wyrażenie: $\mathbf{f_2(x_2) = \int f(x_1, x_2)dx_1}$

Zadanie.

Z dużej partii losujemy żarówki aż do uzyskania wadliwej żarówki. Zmienna losowa opisująca całkowitą ilość wylosowanych żarówek ma rozkład

a) dwumianowy

b) geometryczny

c) ujemny dwumianowy

Objaśnienie:

Pierwsza odpowiedź nie jest prawidłowa, ponieważ losowanie odbywa się do momentu uzyskania wadliwej żarówki. W rozkładzie dwumianowym nie możemy zatem określić wielkości próby.

Druga odpowiedź jest prawidłowa, ponieważ rozkład ujemny dwumianowy (rozkład Pascala) opisuje liczbę sukcesów i porażek w niezależnych próbach Bernoulliego (posiadających równe prawdopodobieństwo). Można ponadto na podstawie rozkładu wnioskować jakie jest prawdopodobieństwo, że w k+r próbach wystąpi r sukcesów.

Trzecia odpowiedź jest prawidłowa, ponieważ rozkład geometryczny opisuje prawdopodobieństwo zdarzenia, że proces stochastyczny Bernoulliego odniesie pierwszy sukces, dokładnie w k-tej próbie ($k \in N^+$)