Rozkład dwumianowy - przybliżenie go rozkładem Poissona lub normalnym.

① Prawdopodobieństwo zachorowania na grypę w okresie zimowym wynosi 0,2 (=> ok. 20% społecz. choruje na grypę w okresie zim)

Do przychodni zgłosiło się 16 pacjentów.
Oblicz prawd., że:

1) co najmniej 2 pacjentów będzie chorych
2) nie więcej niż 3 będzie chorych
3) wszyscy zdrowi
4) chorych od 6 - 14.

Rozwiązanie:

- $n = 16$ (ilość prób)
- S - sukces polega na tym, że losowo wybrany pacjent okaże się chory.
  def. sukcesu na jednej próbie
- $p = 0,2$ Prawd. zajścia sukcesu.

1) • $k \geq 2 \Leftrightarrow k = 2, 3, \dots, 16$ ← liczba pożądanych sukcesów.

Stosujemy tu do schematu n-prób Bernoulliego

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot \underbrace{(1-p)}_{q}^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad 0! \overset{def}{=} 1$$

prawd. otrzymania k sukcesów w n-próbach Bernoulliego. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=16) =$$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) =$$

$$= 1 - \binom{16}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{16} - \binom{16}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{15} =$$

$$= 1 - 0,8^{16} - 16 \cdot 0,2 \cdot 0,8^{15} =$$ { rachunki ok, tam kalkulator zrobi

$\binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$

2)

$k \leq 3 \iff k = 0, 1, 2, 3$

$$P(X \leqslant 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \binom{16}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{16} + \binom{16}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{15} + \binom{16}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^{14} + \binom{16}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^{13}$$

$$= 0{,}8^{16} + 16 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{15} + 120 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}8^{14} + 336 \cdot 0{,}008 \cdot 0{,}8^{13}$$

$$= 0{,}8^{16} + 3{,}2 \cdot 0{,}8^{15} + 4{,}8 \cdot 0{,}8^{14} + 2{,}688 \cdot 0{,}8^{13}$$

3) $k = 0$ (zero sukcesów, że trafi się pacjent chory)

$$P(X=0) = \binom{16}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{16} = 0{,}8^{16}$$

4) $6 \leqslant k \leqslant 14 \iff k = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$

gdyby przez zd. przeciwne to $\rightarrow k' = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 15, 16$ i tak sporo liczenia

$$P(6 \leqslant X \leqslant 14) = \binom{16}{6} 0{,}2^6 \cdot 0{,}8^{10} + \binom{16}{7} 0{,}2^7 \cdot 0{,}8^9 + \binom{16}{8} 0{,}2^8 \cdot 0{,}8^8 + !$$

$$+ \binom{16}{9} 0{,}2^9 \, 0{,}8^7 + \binom{16}{10} 0{,}2^{10} \, 0{,}8^6 + \binom{16}{11} 0{,}2^{11} \, 0{,}8^5 + \binom{16}{12} 0{,}2^{12} \, 0{,}8^4 + \binom{16}{13} 0{,}2^{13} \, 0{,}8^3$$

$$+ \binom{16}{14} 0{,}2^{14} \, 0{,}8^2$$

② To samo zagadnienie, ale 60 pacjentów.

- $n = 60$
- s = to samo
- $p = 0,2$

1) $k \geq 2$.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$$
$$= 1 - \binom{60}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^{60} - \binom{60}{1} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{59}$$

rach. zaczynają komplikować się

gdy n rośnie ↗

p maleje ↘

⇓

pojawia się temat przybliżenia r. dwumianowego

r. Poissona (dwupunktowy)

tu: spr. czy $n \cdot p \leq \underline{\underline{10}}$ (rzędu kilkunastu)

16

18.

r. Normalnym.

$n \cdot p = 60 \cdot \frac{2}{10} = 12$ ← rzędu kilkunastu

Zatem przybliżam rozkład dwumianowy rozkładem Poissona.

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\lambda = n \cdot p$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$$
$$= 1 - e^{-12} \cdot \frac{12^0}{0!} - e^{-12} \cdot \frac{12^1}{1!} = 1 - e^{-12} \cdot \left(\frac{12^0}{0!} + \frac{12^1}{1!}\right) = 1 - e^{-12} \cdot 13.$$

Rachunki ~~jeszcze~~ w następnej ok.

2) Liczba chorych od 26 - 34

, 13

$$P(26 \leq X \leq 34) = P(X=26) + P(X=27) + \ldots + P(X=34) =$$

$$= e^{-12} \cdot \frac{12^{26}}{26!} + e^{-12} \cdot \frac{12^{27}}{27!} + \ldots + e^{-12} \cdot \frac{12^{34}}{34!}$$

rach BARDZO kłopotliwe.

$\Downarrow$

Przybliżam rozkład dwumianowy rozkładem normalnym.

Rozw: Ponieważ $n \cdot p = 12$ i $k = 26, \ldots, 34$. stąd.

• X_i – zm. los. świadcząca czy losowo wybrany i-ty pacjent jest chory czy nie.

$i = 1, \ldots, 60.$

: X_i ma rozkład dwupunktowy $(0-1)$

X_i	0	1 ← gdy pacjent jest chory.
p_i	$\underbrace{0{,}8}_{q=1-p}$	$\underbrace{0{,}2}_{p}$

: z parametrami $EX_i = p$ czyli $EX_i = 0{,}2$

$D^2X_i = p \cdot q$ $\quad D^2X_i = 0{,}2 \cdot 0{,}8$

wprowadzam zm. los.

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

- $S_{60} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{60}$

$\uparrow$ zm. los. oznaczająca liczbę [illegible] chorych wśród badanych 60.

: wiadomo, że $S_n \sim$ (ma rozkład) z parametrami: $ES_n = n \cdot EX_i$

$$DS_n = \sqrt{n \cdot D^2 X_i}$$

$$S_{60} \sim \; : \; ES_{60} = 60 \cdot 0{,}2 = 12$$

$$DS_{60} = \sqrt{60 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}$$

Czyli: $ES_{60} = 12$

$DS_{60} = 3{,}1 \qquad = 3{,}098.$

Aby w zad. obliczyć prawd., że liczba chorych przypadków będzie od 26-34 sprowadza się do obliczenia prawd.:

$$P(26 \leqslant S_{60} \leqslant 34) \overset{?}{=} \left\{ \begin{array}{l} \text{wykonuję standaryzację zm. los. } S_{60} \text{ dzięki} \\ Z = \dfrac{S_n - ES_n}{DS_n} \\ \uparrow \\ \text{to jest zm. los. zestandaryzowana} \\ \text{o rozkładzie } N(0,1) \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(\frac{26 - 12}{3{,}1} \leqslant \frac{S_{60} - 12}{3{,}1} \leqslant \frac{34 - 12}{3{,}1}\right) =$$

$Z \sim N(0;1)$

$$= P(4{,}51 \leqslant Z \leqslant 7{,}1) = \left\{ P(a < Z \leqslant b) = \Phi(b) - \Phi(a) \right.$$

wart. dystrybuanty rozkładu N(0,1) w punkcie b. (czyli prawd. dla b)

$$= \Phi(7{,}1) - \Phi(4{,}51) \cong 0$$

0,99999660

Uwagi dotyczące prawd. dla rozkładu normalnego,

- $P(Z \leqslant a) = \Phi(a)$
- $P(Z \geqslant b) = 1 - P(Z < b) = 1 - \Phi(b)$
- $\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$

Dodatek:

- Niech $X_1, X_2 \ldots X_n$ ← współ zm. los niezależnymi!! mają ten sam rozkład z parametrami:

  EX_i – taką wartość oczekiwaną

  $D^2 X_i$ – taką wariancję

- wyznaczyć parametry rozkładu zmiennych losowych:

  $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

$$ES_n = E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) =$$

$$= EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n =$$

$= \Big\{$ pamiętać wszystkie zm. los są z tego samego rozkładu zatem

$$EX_1 = EX_2 = \ldots = EX_n = \underline{\underline{EX_i}}$$

$$= n \cdot EX_i$$

Własności wartości oczekiwanej:

- $E(X+Y) + EX + EY$
- $E(c \cdot X) = c \cdot EX$
- $E(c) = c$.