Zad. 32
Zmienna losowa to funkcja na przestrzeni zdarzeń elementarnych w $\mathbb{R}$ (tj. zdarzeniowi losowemu przyporządkowujemy liczbę z $\mathbb{R}$).
Współczynnik korelacji:

$$r = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

gdzie (z definicji):

$$\sigma_X^2 = D^2(X) = E((X - E(X))^2) = ... = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

W tym przypadku jest łatwo, bo zmienna losowa jest dyskretna (czyli ma dyskretny zbiór wartości) i zamiast całkowania (dla zmiennej losowej ciągłej) mamy sumowanie:

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot (0.2 + 0.04 + 0.08) + 1 \cdot (0.2 + 0.21 + 0.27)$$

p_i jest prawdopodobieństwiem, że zmienna losowa X przyjmie wartość $x = x_i$ (w tym przypadku albo 0, albo 1). $E(X)$ to wartość oczekiwana zmiennej losowej X (i zdefiniowana jest powyższym równaniem) - opisuje spodziewany wynik (uwaga: nie najbardziej prawdopodobny). Zupełnie analogicznie można policzyć $E(Y)$. Żeby znaleźć kowariancję:

$$E(X \cdot Y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = 0 \cdot 0 \cdot 0.2 + 0 \cdot 1 \cdot 0.04 + ... + 1 \cdot 2 \cdot 0.27$$

$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 p_i = ...$$

Uwaga: p_{ij} jest prawdopodobieństwem, że zmienna X przyjmie wartość $x = x_i$ a zmienna Y - $y = y_j$.
Wartość oczekiwana jest addytywna:

$$E(X - 2Y) = E(X) - 2E(Y) = ...$$

Wariancja warunkowa (? - właśnie wymyśliłem tę nazwę i nie wiem, czy jest oficjalna):

$$D^2(X|Y < 2) = E(X^2) - (E(X))^2|_{Y<2}$$

czyli postępujemy tak samo jak przy liczeniu wariancji, ale bierzemy tylko te przypadki, gdy wartość zmiennej Y jest mniejsza niż 2. Przykład:

$$E(X)|_{Y<2} = \sum_i x_i p_i|_{Y<2} = 0 \cdot (0.2 + 0.4) + 1 \cdot (0.2 + 0.21) = 0.41$$

Analogicznie $E(X^2)|_{Y<2}$.
Definiujemy:

$$\chi^2(a,b) = E((Y-aX-b)^2) = E(Y^2 + a^2X^2 + b^2 - 2aXY + 2abX - 2bY) = \\ E(Y^2) + a^2E(X^2) + b^2 - 2aE(X \cdot Y) + 2abE(X) - 2bE(Y)$$

Szukamy minimum funkcji $\chi^2(a,b)$. Trzeba pieczołowicie policzyć wszystkie wartości oczekiwane i zminimalizować, licząc np. pochodne cząstkowe względem a, b:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = 0, \ \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = 0$$

Dostajemy układ równań, który rozwiązujemy na a i b.

Zad. 87
Czas pracy żarówki jest opisany rozkładem wykładniczym o gęstości prawdopodobieństwa:

$$f(t) = \frac{1}{\lambda} e^{-t/\lambda}$$

gdzie $t \geq 0$ (po pierwsze bez sensu jest mówić o ujemnym czasie, po drugie taka jest definicja rozkładu wykładniczego - gdyby liczyć od $-\infty$, to całki byłyby rozbieżne), a $\lambda = 1000$ h. Jeśli $t < 0$ to $f(t) = 0$. Całka

$$\int_{t_2}^{t_1} f(x)dx$$

oznacza prawdopobieństwo, że żarówka przepali się w czasie $t \in [t_1, t_2]$.
Teraz muszę trochę pofilozofować co znaczy "czas pracy 2 równolegle połączonych żarówek".
Łatwiej: obie żarówki świecą
Prawdopodobieństwo, że jedna żarówka świeci w czasie $[0,t]$ wynosi (dystrybuanta rozkładu; sprawdź czy dobrze policzyłem całkę):

$$F(t) = \int_0^t f(x)dx = 1 - e^{-t/\lambda}$$

czyli dla układu 2 żarówek:

$$P(t) = (F(t))^2 = (1 - e^{-t/\lambda})^2$$

Jeżeli chcemy policzyć gęstość prawdopodobieństwa dla tego rozkładu:

$$p(t) = \frac{dP(t)}{dt} = ...$$

Uwaga: możemy pomnożyć dystrybuanty (prawdopodobieństwa), bo obie żarówki świecą niezależnie (niezależne rozkłady p-wa)!!!

Trudniej: co najmniej jedna z żarówek pracuje
W tym przypadku szukany rozkład p-wa jest sumą dwóch rozkładów wykładniczych $f(t)$. Z matematycznego punktu widzenia dodawanie gęstości p-wa jest splotem funkcji, czyli brzydką całką:

$$p(t) = f * f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(t-x)dx = ...$$

Gwoli ścisłości definicja splotu:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx$$

Przy całkowaniu należy uważać na granice i pamietać, że dla $t < 0$ mamy $f(t) = 0$ (!) Żeby odpowiedzieć na pytanie w zadaniu, trzeba policzyć:

$$\int_{1500}^{\infty} p(x)dx$$

Zad. 3
A to zadanie jest całkowicie bezsensowne :) Nie wiem jak zinterpretować "zainteresowanie (...) na poziomie 1%" :/ Dla ustalenia uwagi mamy SGGW i łąkarstwo. Spróbujmy tak: weźmy dowolnego kandydata (mężczyznę) na studia na SGGW. Z p-wem $p = 0.01$ aplikuje na łąkarstwo, z $q = 0.99$ na coś innego (np. informatykę z ekonometrią). Łatwiej też rozpatrzyć zdarzenie A^* - będzie 0, 1 lub 2 chłopaków. Na pierwszy rzut oka chciałoby się zastosować wzór Bernoulliego:

$$P(A^*) = \binom{200}{0} 0.01^0 0.99^{200} + \binom{200}{1} 0.01^1 0.99^{199} + \binom{200}{2} 0.01^2 0.99^{198} = 0.677$$

Ale wg mnie to całkowicie bez sensu... (dlaczego ?).
Być może coś nie tak z moim rozumieniem rachunku p-wa, ale byłbym skłonny powiedzieć, że coś nie tak z zadaniem ;]