EGZAMIN Z PROBABILISTYKI

Imię i nazwisko .... **grupa** .... **suma punktów** ....

Test składa się z 12 zadań. W każdym zadaniu jest 5 pytań, na które należy odpowiedzieć TAK (wpisując w kratce obok T) lub NIE (wpisując N).
Za każdą poprawną odpowiedź otrzymuje się 2 punkty, za złą odejmowany jest 1 punkt (za zadanie nie można otrzymać jednak mniej niż 0 punktów).

1. Dystrybuanta zmiennej losowej (X,Y) ma postać $F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leqslant 0 \vee y \leqslant 0 \\ x & , \quad 0 < x \leqslant 1 \wedge y > 0 \\ 1 & , \quad x > 1 \wedge y > 0 \end{cases}$. Wtedy:

   - ☐ (X,Y) nie ma rozkładu ciągłego
   - ☐ X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0;1]$
   - ☐ Y ma rozkład jednopunktowy skupiony w punkcie 1
   - ☐ $VY = 0$
   - ☐ $P\left(0 \leqslant X < \frac{2}{3}, 0 \leqslant Y < 1\right) = \frac{2}{3}$

2. Rzucamy jednocześnie kostką sześcienną i symetryczną monetą. Niech A i B oznaczają zdarzenia: A - wypadła reszka lub nie więcej niż 5 oczek; B - wypadł orzeł i nie więcej niż 3 oczka. Wtedy:

   - ☐ A i B są zdarzeniami niezależnymi
   - ☐ $P(B - A) = 0$
   - ☐ $P(B|A') = \frac{8}{11}$
   - ☐ $P(A|B) = 1$
   - ☐ $P(A \cap B) = P(B)$

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład dyskretny dany tabelą:

$X \setminus Y$	-1	0	1
-2	$1/6$	$2q$	q
2	q	p	q

   Wiadomo, że $P(Y=-1) = P(Y=0) = P(Y=1)$. Wtedy:

   - ☐ X i Y są nieskorelowane
   - ☐ $cov(X - 2Y, X + Y - 1) < 2$
   - ☐ $F_{XY}(2,0) = \frac{2}{3}$
   - ☐ $E(X|Y=1) = E(X|Y=-1)$
   - ☐ Rozkład warunkowy X pod warunkiem $\{Y=0\}$ jest rozkładem 1 - punktowym

4. Funkcja $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest dystrybuantą pewnej dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y). Wtedy:

   - ☐ Istnieje punkt (x_0, y_0) taki, że $F(x_0, y_0) = 1$
   - ☐ $\lim_{n\to+\infty} F(-n, y) = 0$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$
   - ☐ $\lim_{n\to+\infty} F(1, n) = 1$
   - ☐ Jeśli $x \leqslant x_0$ i $y \leqslant y_0$, to $F(x,y) \leqslant F(x_0, y_0)$
   - ☐ Funkcja $h(x) = F(x, y_0)$, gdzie y_0 jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest ściśle rosnąca i lewostronnie ciągła w $\mathbb{R}$

5. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład normalny o gęstości

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{1}{12}\left(8(x-2)^2 - 4(x-2)(y+3) + 2(y+3)^2\right)\right\}. \text{ Wtedy:}$$

- [ ] $C_{XY} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$
- [ ] Y ma rozkład normalny $N(-3, 4)$
- [ ] Zmienne losowe $X + 2Y$ i $X - Y$ są niezależne
- [ ] $P(X - Y > 5) = 0,5$
- [ ] $\rho_{X+2Y,X-Y} = -1$

6. Funkcja gęstości pewnej jednowymiarowej zmiennej losowej X ma postać

$$f_X(x) = \frac{1}{b(x^2+1)} \text{ dla } x \in \mathbb{R}. \quad \text{Wtedy:}$$

- [ ] $b = \dfrac{1}{\pi}$
- [ ] $F_X(x) = \dfrac{1}{\pi} arc\,tg x + \dfrac{1}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$
- [ ] Nie istnieje EX
- [ ] X jest zmienną losową rzędu drugiego
- [ ] Jeśli $Y = |X|$, to $f_Y(y) = \dfrac{1}{\pi(y^2+1)}$ dla wszystkich $y > 0$

7. Funkcja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona jest następująco: $F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leqslant 0 \\ cx^2 + d & , \quad 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & , \quad x > 1 \end{cases}$. Wtedy:

- [ ] Jeśli $d = \dfrac{1}{2}$ oraz c jest dowolną liczbą z przedziału $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, to F jest dystrybuantą pewnej jednowymiarowej zmiennej losowej
- [ ] Jeśli c i d są dowolnymi liczbami takimi, że $d \geqslant 0$ i $c + d \leqslant 1$, to F jest dystrybuantą pewnej jednowymiarowej zmiennej losowej
- [ ] Jeśli $c = 0$ i d jest dowolną liczbą z przedziału $[0; 1]$, to F jest dystrybuantą pewnej jednowymiarowej zmiennej losowej o rozkładzie skokowym
- [ ] Jeśli $c = 0$ i d jest dowolną liczbą z przedziału $(0; 1)$, to F jest dystrybuantą pewnej jednowymiarowej zmiennej losowej o rozkładzie 2-punktowym
- [ ] Jeśli $c = 1$ i $d = 0$, to F jest dystrybuantą pewnej jednowymiarowej zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym

8. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi rzędu drugiego, określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Wtedy:

- [ ] Jeśli X ma rozkład ciągły, to $X + Y$ ma rozkład ciągły
- [ ] $V(|X| - |Y|) = V(|X|) - V(|Y|)$
- [ ] $cov(|X|, |Y|) = 0$
- [ ] $P(\min(X, Y) > 1) = (1 - F_X(1))(1 - F_Y(1))$
- [ ] $P(\min(X, Y) < 1) = F_X(1) + F_Y(1) - F_X(1) \cdot F_Y(1)$

9. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na prostokącie $[0; 2] \times [0; 1]$. Niech $Z = X + Y$. Wtedy:
   - ☐ Z nie ma rozkładu ciągłego
   - ☐ $EX = 1$
   - ☐ Jeśli $z \in (0; 1]$, to $F_Z(z \,|\, Y < X) = \frac{1}{4}z^2$
   - ☐ $cov(Z, X) = \frac{5}{12}$
   - ☐ X i Y są skorelowane

10. Rzucamy niesymetryczną monetą $\left(P(O) = \frac{1}{3}\right)$, dopóki nie pojawi się orzeł. Niech X oznacza liczbę wykonanych rzutów. Wtedy:
    - ☐ X ma rozkład geometryczny z parametrem $\frac{1}{3}$
    - ☐ X ma rozkład geometryczny z parametrem $\frac{2}{3}$
    - ☐ $EX = \frac{3}{2}$
    - ☐ $P(X > 15 \,|\, X > 10) = P(X > 5)$
    - ☐ $P(X \leqslant 30) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{30}$

11. $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, takim, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $EX_k = 1$, $VX_k = 4$. Wtedy:
    - ☐ $P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i < 160\right) > \frac{1}{2}$
    - ☐ $P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i\right| < 160\right) > 2\Phi(3)$
    - ☐ Zmienna losowa $\sum_{i=1}^{64} X_i$ ma rozkład normalny $N(64, 16)$
    - ☐ $P\left(\sum_{i=1}^{64} X_i < 80\right) + P\left(\sum_{i=1}^{64} X_i < 48\right) = 1$
    - ☐ Zmienna losowa $\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100}{20}$ ma rozkład normalny $N(0, 1)$

12. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Bernoulliego z parametrami odpowiednio $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ i $\left(6, \frac{1}{2}\right)$. Wtedy:
    - ☐ $X + Y$ ma rozkład Bernoulliego z parametrami $\left(9, \frac{1}{2}\right)$
    - ☐ $EY = 3$
    - ☐ $V(X + Y) = \frac{9}{2}$
    - ☐ $S_Y = \mathbb{N}$
    - ☐ $F_Y(2) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^6$