Zadania na Rozkłady param. 4.6

1. Uczestnik teleturnieju z prawd. "p" odpowiada poprawnie na kolejne pytania, przy czym odpada z gry, gdy nie umie odpowiedzieć na pytanie. Niech zm. los X oznacza liczbę zadanych pytań. Podać rozkład zmiennej losowej, jej wartość oczekiwaną i wariancję.

Rozwiązanie: (wartości i

· X – zm. los ozn. liczbę zadanych pytań.

1) podać rozkład zm. losowej tzn:
- ustalić jakie wartości przyjmuje zm. los X
- i z jakim prawd.

x_i	1	2	3	4	....
p_i	$1-p$	$p(1-p)$	$p^2(1-p)$	$p^3(1-p)$	

Interpretacja:

uczestnik gra do momentu 1 porażki

- zm. los $X = 4$ tzn, że zaszła sytuacja:

uczestnik kolejno: odpowiedział i odpow. i odp i nie odp.

$$P(X=4) = P(odp)\cdot P(odp)\cdot P(odp)\cdot P(odp')$$

$$P(odp \cap odp \cap odp \cap odp')$$

Zauważmy że:

$$P(X=k) = p^{k-1}\cdot(1-p)$$

↳ mamy tu rozkład geometryczny z parametrem $(1-p)$

Odp: Zm. los ma rozkład jak w tab. i jest to $G_1(1-p)$

2) Parametry tego rozkładu:

Tw.:

podmieniając odp. param. mamy

$$EX = \frac{1}{1-p}$$

$$D^2X = \frac{p}{(1-p)^2}$$

Dodatek:

Jak obliczyć ..., wartość oczekiwaną bez znajomości wzorów?

- wart. oczekiwana dla zm. los. skokowej to:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

- drugi moment

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{n} x^2 \cdot p_i$$

- wariancja

$$D^2X = EX^2 - (EX)^2$$

$$EX = 1 \cdot (1-p) + 2 \cdot p(1-p) + 3p^2(1-p) + 4p^3(1-p) + \ldots +$$

$$EX = (1-p) \cdot \underbrace{\left[1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots \right]}_{S = ?}$$

$$S = 1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots \quad \Big| \cdot p$$

$$p \cdot S = p + 2p^2 + 3p^3 + 4p^4 + \ldots$$

$$S(1-p) = \underbrace{1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + \ldots}_{} \quad \Big| : \frac{1}{1-p}$$

$$S = \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{1-p}$$

$$S = \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad |q| < 1$$

wzór na sumę wyrazów ciągu geom. nieskończonego.

$$EX = \cancel{(1-p)} \cdot \frac{1}{(1-p)^2}$$

$$EX = \frac{1}{1-p}$$

$$EX^2 = 1^2(1-p) + 2^2 p(1-p) + 3^2 p^2(1-p) + 4^2 p^3(1-p) + \dots$$

$$EX^2 = (1-p)\Big[\underbrace{1^2 + 2^2 p + 3^2 p^2 + 4^2 p^3 + \dots}_{S_{II}}\Big]$$

$$S_{II} = 1^2 + 2^2 p + 3^2 p^2 + 4^2 p^3 + \dots \quad \Big| \cdot p$$

$$- \quad S_{II} \cdot p = 1^2 p + 2^2 p^2 + 3^2 p^3 + 4^2 p^4 + \dots$$

$$S_{II}(1-p) = \underbrace{1^2 + 3p + 5p^2 + 7p^3 + \dots}_{S_{III}}$$

$$S_{III} = 1 + 3p + 5p^2 + 7p^3 + \dots \quad / \cdot p$$

$$- \quad p \cdot S_{III} = p + 3p^2 + 5p^3 + 7p^4 + \dots$$

$$S_{III}(1-p) = 1 + 2p + 2p^2 + 2p^3 + 2p^4 + \dots$$