Rachunek prawdopodobieństwa MAP1151
Wydział Elektroniki, rok akad. 2011/12, sem. letni
Wykładowca: dr hab. A. Jurlewicz

Przykłady do listy 5: Zmienne losowe dwuwymiarowe. Rozkłady łączne, brzegowe. Niezależność zmiennych losowych. Współczynnik korelacji. Sumowanie niezależnych zmiennych losowych. Prawo wielkich liczb.

Przykłady do zadania 5.1:

(a) Wektor losowy (X, Y) ma następujący rozkład łączny:
$P(X = 0, Y = -2) = C$; $P(X = 0, Y = 0) = 0$; $P(X = 0, Y = 1) = 0,2$;
$P(X = 2, Y = -2) = P(X = 2, Y = 0) = 0,2$; $P(X = 2, Y = 1) = 0,3$.
Wyznaczyć stałą C oraz rozkłady brzegowe tego wektora losowego. Czy X i Y są niezależne?

- Stała C musi być nieujemna oraz spełniać warunek $C + 0 + 0,2 + 0,2 + 0,2 + 0,3 = 1$, co daje $C = 0,1$
- Rozkład łączny wektora losowego (X, Y) razem z rozkładami brzegowymi zmiennych losowych X i Y możemy podać w postaci tabeli:

	x_n	0	2	r.brzeg. Y
y_k				
-2		$0,1$	$0,2$	$0,3$
0		0	$0,2$	$0,2$
1		$0,2$	$0,3$	$0,5$
r.brzeg.X		$0,3$	$0,7$	$\sum = 1$

- X i Y nie są niezależne, bo np. $P(X = 0, Y = 0) = 0 \neq 0,3 \cdot 0,2 = P(X = 0)P(Y = 0)$.

(b) Znaleźć rozkład łączny wektora losowego (X, Y), gdzie X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $P(X = -1) = 0,1$; $P(X = 3) = 0,9$; $P(Y = 0) = 0,45$; $P(Y = 2) = 0,55$.

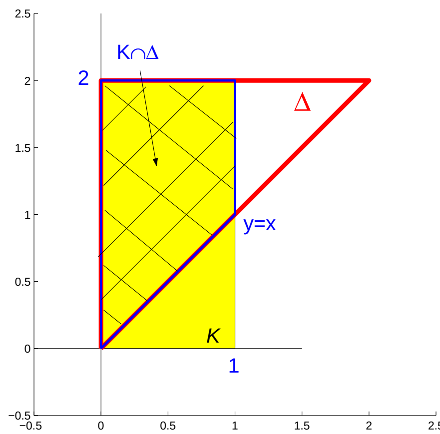
- Zmienne losowe są niezależne, zatem np.
$P(X = -1, Y = 0) = P(X = -1)P(Y = 0) = 0,1 \cdot 0,45 = 0,045$.
Podobnie obliczamy pozostałe prawdopodobieństwa łączne.
- Rozkład łączny wektora losowego (X, Y) razem z rozkładami brzegowymi zmiennych losowych X i Y podajemy w tabeli:

	x_n	-1	3	r.brzeg. Y
y_k				
0		$0,045$	$0,405$	$0,45$
2		$0,055$	$0,495$	$0,55$
r.brzeg.X		$0,1$	$0,9$	$\sum = 1$

Przykład do zadania $\boxed{5.2}$:

(a) Dobrać stałą C tak, aby funkcja $f(x,y) = \begin{cases} C(x^2y+y) & \text{dla } 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$ była gęstością pewnego wektora losowego (X,Y). Obliczyć następnie $P((X,Y)\in\Delta)$, gdzie Δ to obszar $0\leqslant y\leqslant 2,\ 0\leqslant x\leqslant y$. Wyznaczyć rozkłady brzegowe wektora losowego (X,Y). Czy X i Y są niezależne?

- $f(x,y)\geqslant 0$ dla każdego (x,y) wtedy i tylko wtedy, gdy $C\geqslant 0$
  (bo dla $0<x<1, 0<y<2$ mamy $x^2y+y>0$).
  $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = C\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 (x^2y+y)dy = \frac{8}{3}C = 1$ wtedy
  i tylko wtedy, gdy $C=\frac{3}{8}$.
  Oba warunki na gęstość są spełnione, gdy $C=\frac{3}{8}$.

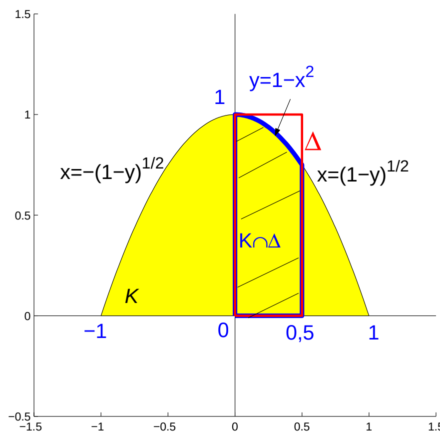


- Oznaczmy przez K prostokąt $0<x<1, 0<y<2$.
  $P((X,Y)\in\Delta) = \iint\limits_{\Delta} f(x,y)dxdy = \frac{3}{8}\int\int\limits_{\Delta\cap K}(x^2y+y)dxdy = \frac{3}{8}\int_0^1 dx\int_x^2 (x^2+1)ydy =$
  $= \frac{3}{8}\int_0^1 (x^2+1)(2-x^2/2)dx = \frac{3}{8}(\frac{2}{3}-\frac{1}{10}+2-\frac{1}{6}) = 0,9$
- Wyznaczamy rozkłady brzegowe:
  $$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2+1)\int\limits_0^2 ydy = \frac{3}{4}(x^2+1) & \text{dla } 0<x<1, \\ 0 & \text{dla pozostalych } x. \end{cases}$$
  $$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{3}{8}y\int\limits_0^1 (x^2+1)dx = \frac{1}{2}y & \text{dla } 0<y<2, \\ 0 & \text{dla pozostalych } y. \end{cases}$$
- Ponieważ dla każdego (x,y) mamy $f_X(x)f_Y(y) = f(x,y)$,
  zmienne losowe X i Y są niezależne.

(b) Dobrać stałą C tak, aby funkcja $f(x,y) = \begin{cases} C & \text{dla } (x,y) \in K \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$ gdzie K to obszar ograniczony krzywymi $y = 1 - x^2$, $y = 0$, była gęstością pewnego wektora losowego (X,Y). Obliczyć następnie $P(0 < X < 0,5; 0 < Y < 1)$. Wyznaczyć rozkłady brzegowe wektora losowego (X,Y). Czy X i Y są niezależne?

- K: $-1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x^2$.

- $f(x,y) \geqslant 0$ dla każdego (x,y) wtedy i tylko wtedy, gdy $C \geqslant 0$
  $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = C\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} dy = C\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \frac{4}{3}C = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $C = \frac{3}{4}$.
  Oba warunki na gęstość są spełnione, gdy $C = \frac{3}{4}$.



- $\Delta : 0 < x < 0,5; 0 < y < 1$
  $P(0 < X < 0,5; 0 < Y < 1) = \int_0^{0,5} dx \int_0^1 f(x,y)dy = \frac{3}{4}\iint\limits_{\Delta\cap K} dxdy = \frac{3}{4}\int_0^{0,5} dx \int_0^{1-x^2} dy =$
  $= \int_0^{0,5}(1-x^2)dx = \frac{11}{32} = 0,34375$
- Wyznaczamy rozkłady brzegowe:
  $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \frac{3}{4}\int\limits_{0}^{1-x^2} dy = \frac{3}{4}(1-x^2) & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$
  K: $0 \leqslant y \leqslant 1, -\sqrt{1-y} \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y}$.
  $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \frac{3}{4}\int\limits_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dx = \frac{3}{2}\sqrt{1-y} & \text{dla } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } y. \end{cases}$
- Ponieważ dla wszystkich $(x,y) \in (-1,1)\times(0,1)$ mamy $f_X(x)f_Y(y) \neq 0$ w przeciwieństwie do $f(x,y)$, zmienne losowe X i Y nie są niezależne.

Przykłady do zadania 5.3:
Wyznaczyć wektor wartości oczekiwanych oraz macierz kowariancji wektora losowego (X, Y) o podanym rozkładzie. Obliczyć współczynnik korelacji zmiennych losowych X i Y, które są składowymi tego wektora.

(a) Rozkład dyskretny podany w tabeli

	x_n	0	2	r.brzeg. Y
y_k				
-2		$0,1$	$0,2$	$0,3$
0		0	$0,2$	$0,2$
1		$0,2$	$0,3$	$0,5$
r.brzeg.X		$0,3$	$0,7$	$\sum = 1$

- $\mathrm{E}X = 0 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,7 = 1,4;$
  $\mathrm{D}^2X = 0^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,7 - (1,4)^2 = 0,84;$
- $\mathrm{E}Y = -2 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,5 = -0,1;$
  $\mathrm{D}^2Y = (-2)^2 \cdot 0,3 + 0^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,5 - (-0,1)^2 = 1,69;$
- $\mathrm{E}XY = 0 \cdot (-2) \cdot 0,1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot (-2) \cdot 0,2 + 2 \cdot 0 \cdot 0,2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,3 = -0,2;$
  $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y = -0,2 - 1,4 \cdot (-0,1) = -0,06$
  $\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{D}^2X}\sqrt{\mathrm{D}^2Y}} = -\frac{0,06}{1,3\sqrt{0,84}} \approx -0,05.$
- **Odp.** $(\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y) = (1,4; -0,1);$
  macierz kowariancji to $\begin{bmatrix} \mathrm{D}^2X & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{D}^2Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,84 & -0,06 \\ -0,06 & 1,69 \end{bmatrix};$
  $\rho_{XY} = -\frac{0,06}{1,3\sqrt{0,84}} \approx -0,05$

(b) Rozkład dyskretny podany w tabeli

	x_n	-1	3	r.brzeg. Y
y_k				
0		$0,045$	$0,405$	$0,45$
2		$0,055$	$0,495$	$0,55$
r.brzeg.X		$0,1$	$0,9$	$\sum = 1$

- $\mathrm{E}X = -1 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,9 = 2,6;$
  $\mathrm{D}^2X = (-1)^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,9 - (2,6)^2 = 1,44;$
- $\mathrm{E}Y = 1,1;\ \mathrm{D}^2Y = 0,99;$
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0;\ \rho_{XY} = 0$, bo zmienne są niezależne.
- **Odp.** $(\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y) = (2,6; 1,1)$; macierz kowariancji to $\begin{bmatrix} 1,44 & 0 \\ 0 & 0,99 \end{bmatrix}$; $\rho_{XY} = 0$

(c) Rozkład ciągły o gęstości $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{8}(x^2y+y) & \text{dla } \ 0<x<1,\ 0<y<2 \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

- $\mathrm{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = \frac{3}{8}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 x(x^2+1)ydy = \frac{9}{16}$;
  $\mathrm{D}^2X = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x,y)dxdy - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{3}{8}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 x^2(x^2+1)ydy - (\frac{9}{16})^2 = \frac{107}{1280}$;
- $\mathrm{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = \frac{3}{8}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 y(x^2+1)ydy = \frac{4}{3}$;
  $\mathrm{D}^2Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2f(x,y)dxdy - (\mathrm{E}Y)^2 = \frac{3}{8}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 y^2(x^2+1)ydy - (\frac{4}{3})^2 = \frac{2}{9}$;
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$; $\rho_{XY} = 0$, bo zmienne są niezależne.
- **Odp.** $(\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y) = (\frac{9}{16}; \frac{4}{3})$; macierz kowariancji to $\begin{bmatrix} \frac{107}{1280} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$; $\rho_{XY} = 0$

(d) Rozkład ciągły o gęstości $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{dla } \ (x,y) \in K \\ 0 & \text{poza tym,} \end{cases}$ gdzie K to obszar ograniczony krzywymi $y = 1 - x^2$, $y = 0$

- $\mathrm{E}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} xdy = 0$;
  $\mathrm{D}^2X = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2f(x,y)dxdy - (\mathrm{E}X)^2 = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} x^2dy - 0 = 0,2$;
- $\mathrm{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} ydy = 0,4$;
  $\mathrm{D}^2Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2f(x,y)dxdy - (\mathrm{E}Y)^2 = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} y^2dy - (0,4)^2 = \frac{12}{175}$;
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} xydy - 0 = 0$; stąd $\rho_{XY} = 0$.
- **Odp.** $(\mathrm{E}X, \mathrm{E}Y) = (0; 0,4)$; macierz kowariancji to $\begin{bmatrix} 0,2 & 0 \\ 0 & \frac{12}{175} \end{bmatrix}$; $\rho_{XY} = 0$

Przykłady do zadania 5.4:

(a) Zmienne losowe X i Y są niezależne, przy czym X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{5}\right)$, a Y rozkład normalny $\mathcal{N}(-1,2)$. Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Z = 2X - 3Y - 2$.

- X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}xp\left(\lambda = \frac{1}{5}\right)$, zatem $\mathrm{E}X = \frac{1}{\lambda} = 5$ i $\mathrm{D}^2X = \frac{1}{\lambda^2} = 25$.
- Y rozkład normalny $\mathcal{N}(-1,2)$, zatem $\mathrm{E}Y = -1$ i $\mathrm{D}^2Y = 2^2 = 4$.
- $\mathrm{E}Z = 2\mathrm{E}X - 3\mathrm{E}Y - 2 = 2\cdot 5 - 3\cdot(-1) - 2 = 11$.
- X i Y są niezależne, więc $\mathrm{D}^2Z = \mathrm{D}^2(2X-3Y-2) = \mathrm{D}^2(2X-3Y) =$
  $= \mathrm{D}^2(2X) + \mathrm{D}^2(-3Y) = 2^2\mathrm{D}^2X + (-3)^2\mathrm{D}^2Y = 4\cdot 25 + 9\cdot 4 = 136$.

(b) Niech $Y = X + N$, gdzie X ma rozkład zerojedynkowy z parametrem $p = 0,4$; a N ma rozkład normalny $\mathcal{N}(1,1)$, przy czym zmienne losowe X i N są niezależne. Obliczyć współczynnik korelacji ρ_{XY}.

- X ma rozkład zerojedynkowy z parametrem $p = 0,4$, zatem $\mathrm{E}X = p = 0,4$ i $\mathrm{D}^2X = p(1-p) = 0,24$.
- N ma rozkład normalny $\mathcal{N}(1,1)$, zatem $\mathrm{E}N = 1$ i $\mathrm{D}^2N = 1$.
- $\mathrm{E}Y = \mathrm{E}X + \mathrm{E}N = 0,4 + 1 = 1,4$
- Zmienne losowe X i N są niezależne. Zatem $\mathrm{D}^2Y = \mathrm{D}^2X + \mathrm{D}^2N = 0,24 + 1 = 1,24$ oraz $\mathrm{E}XY = \mathrm{E}X^2 + \mathrm{E}XN = \mathrm{D}^2X + (\mathrm{E}X)^2 + \mathrm{E}X\mathrm{E}N = 0,24 + (0,4)^2 + 0,4 \cdot 1 = 0,8$.
- Otrzymujemy $\rho_{XY} = \dfrac{\mathrm{E}XY - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y}{\sqrt{\mathrm{D}^2X}\sqrt{\mathrm{D}^2Y}} = \dfrac{0,24}{\sqrt{0,24 \cdot 1,24}} \approx 0,44$.

Przykłady do zadania 5.5:

(a) Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie takim, że

$$P(X_1 = i) = 0,75(0,25)^{i-1}, \quad i = 1,2,\ldots.$$

Do czego jest zbieżna średnia arytmetyczna $\dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$? W sensie jakiej zbieżności?

- Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne o jednakowym rozkładzie geometrycznym $\mathcal{G}eo(p = 0,75)$. Zatem $\mathrm{E}X_1 = \frac{1}{p} = \frac{4}{3}$ istnieje.
- Zachodzi zatem mocne prawo wielkich liczb Kołmogorowa, czyli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} = \mathrm{E}X_1 = \frac{4}{3},$$

- przy czym jest to zbieżność z prawdopodobieństwem 1.

(b) Niech $X_1,\ X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0,1)$. Zdefiniujmy

$$Y_n = \begin{cases} X_n^2 & \text{z prawdopod. } 0,1; \\ X_n & \text{z prawdopod. } 0,9; \end{cases}$$

tzn. $Y_n = T_nX_n^2 + (1 - T_n)X_n$, gdzie T_n jest zmienną losową niezależną od ciągu (X_n) i taką, że $P(T_n = 1) = 1 - P(T_n = 0) = 0,1$; ponadto $T_1, T_2, \ldots$ są niezależne.
Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ z prawdopodobieństwem 1.

- Zmienne $Y_1,\ Y_2, \ldots$ zdefiniowane w zadaniu są niezależne o jednakowym rozkładzie. Ponadto $\mathrm{E}Y_1 = \mathrm{E}T_1\mathrm{E}X_1^2 + (1 - \mathrm{E}T_1)\mathrm{E}X_1 = 0,1(\mathrm{D}^2X_1 + (\mathrm{E}X_1)^2) + 0,9\mathrm{E}X_1 =$
$= 0,1\left(\frac{(1-0)^2}{12} + \left(\frac{1+0}{2}\right)^2\right) + 0,9\left(\frac{1+0}{2}\right) = \frac{29}{60}$ istnieje.
- Zachodzi więc mocne prawo wielkich liczb Kołmogorowa, czyli $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i = \mathrm{E}Y_1 = \dfrac{29}{60}$ z prawdopod. 1.