Praca domowa nr 2 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

Zad. 1. Dziesięcioro studentów zdaje egzamin z matematyki. Obliczyć, iloma sposobami można wystawić im oceny (w skali od 2 do 5), jeśli:

a) żaden nie otrzyma „dwójki", **b)** każdy ze zdających otrzyma co najmniej „czwórkę".

UWAGA: w każdym z podpunktów opisać zbiór możliwych wyników.

a) $A = \{(S_1, \dots, S_{10}) : S_i \in \{3,4,5\}\}$

$|A| = W_3^{10} = 3^{10}$

b) $B = \{(S_1, \dots, S_{10}) : Si \in \{4,5\}\}$

$|B| = W_2^{10} = 2^{10}$

Zad. 2. Obliczyć, na ile sposobów pojedynczy brydżysta może otrzymać:

a) dokładnie dwa asy, **b)** dokładnie trzy asy, **c)** co najmniej jednego asa.

a) $C_4^2 * C_{48}^{11} = \binom{4}{2} * \binom{48}{11}$

b) $C_4^3 * C_{48}^{10} = \binom{4}{3} * \binom{48}{10}$

c) $\binom{52}{13} - \binom{48}{13}$

Zad. 3. Obliczyć, ile różnych słów (mających sens lub nie) można ułożyć przestawiając w dowolny sposób litery w wyrazie SZCZEBRZESZYN.

Słowo: $S\ Z\ C\ Z\ E\ B\ R\ Z\ E\ S\ Z\ Y\ N$

Ilości liter: $|Z| = 4$ $|S| = 2$ $|E| = 2$

$$|\Omega| = \frac{13!}{4! * 2! * 2!}$$

Zad. 4. Osiem osób siada na ośmiu krzesłach ustawionych przy okrągłym stole. Obliczyć, na ile sposobów mogą one usiąść tak, aby: **a)** ustalone dwie osoby siedziały obok siebie, **b)** ustalone trzy osoby siedziały obok siebie, **c)** ustalone dwie osoby były rozdzielone przez trzy inne, **d)** ustalone dwie osoby były rozdzielone przez ustalone trzy inne.

a) C_8^1 - wybieramy miejsce, od którego liczymy

P_2 - usadzamy te dwie osoby obok siebie

P_6 - resztę osób usadzamy na P_6 sposobów

$C_8^1 * P_2 * P_6 = \binom{8}{1} * 2! * 6! = 11520$

b) C_8^1 - wybieramy miejsce, od którego liczymy

P_3 - usadzamy te dwie osoby obok siebie

P_5 - resztę osób usadzamy na P_5 sposobów

$C_8^1 * P_2 * P_6 = \binom{8}{1} * 3! * 5! = 5760$

c) $C_8^1 * P_2 * P_6 = \binom{8}{1} * 2! * 6! = 11520$

d) $C_8^1 * P_2 * P_3 * P_3 = \binom{8}{1} * 2! * 3! * 3! = 576$

Zad. 5. Obliczyć, na ile sposobów można rozdać 20 pączków 10 osobom (pączki uznajemy za nierozróżnialne oraz dopuszczamy sytuację, gdy ktoś nie dostanie pączka).

WSKAZÓWKA: zob. zadanie o kulach i komórkach z ostatniego wykładu.

Wzór: $\binom{n+k-1}{k}$ n - ilość osób, k - ilość pączków

$\binom{10+20-1}{20} = \binom{29}{20}$

Zad. 6. Sprawdzamy działanie trzech urządzeń. Niech zdarzenie A_k oznacza, że k-te urządzenie jest wadliwe (k=1,2,3). Za pomocą zdarzeń A_k zapisać zdarzenia:

a) przynajmniej jedno urządzenie nie jest wadliwe, **b)** dokładnie jedno urządzenie nie jest wadliwe, **c)** nie więcej niż jedno urządzenie jest dobre.

$A_k: k \in \{1,2,3\}$ - urządzenie jest wadliwe

a) $A_1' \cup A_2' \cup A_3'$ - co najmniej jedno urządzenie jest wadliwe

b) $(A_1' \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3')$ - dokładnie jedno urządzenie jest wadliwe

c) $(A_1' \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3') \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ - nie więcej niż jedno urządzenie jest dobre

Zad. 7. W wyścigu samochodowym biorą udział trzy załogi fabryczne pewnego koncernu samochodowego. Niech A_i oznacza zdarzenie, ze i-ta załoga ukończyła wyścig (i=1,2,3). Za pomocą zdarzeń A_i zapisać następujące zdarzenia:

a) dokładnie jedna załoga ukończyła wyścig, **b)** co najmniej dwie załogi ukończyły wyścig.

$A_i: i \in \{1,2,3\}$ - zdarzenie, że i-ta załoga ukończyła wyścig

a) $(A_1 \cap A_2' \cap A_3') \cup (A_1' \cap A_2 \cap A_3') \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3')$ - dokładnie jedna załoga ukończyła wyścig

b) $(A_1 \cap A_2 \cap A_3') \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1' \cap A_2 \cap A_3)$ - co najmniej dwie załogi ukończyły wyścig

Zad. 8. Rzucamy trzy razy monetą. Niech zdarzenie B_i polega na tym, że otrzymamy reszkę w i-tym rzucie. Za pomocą działań na zdarzeniach B_i zapisać następujące zdarzenia:

a) otrzymano co najmniej jedną reszkę, **b)** w drugim rzucie otrzymano reszkę, **c)** liczba reszek była większa od liczby orłów, **d)** otrzymano dokładnie jedną reszkę.

B_i - otrzymanie reszki w rzucie

a) $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ - otrzymano co najmniej jedną reszkę

b) B_2 - w drugim rzucie otrzymano reszkę

c) $(B_1 \cap B_2 \cap B_3') \cup (B_1 \cap B_2' \cap B_3) \cup (B_1' \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ - liczba reszek była większa od liczby orłów

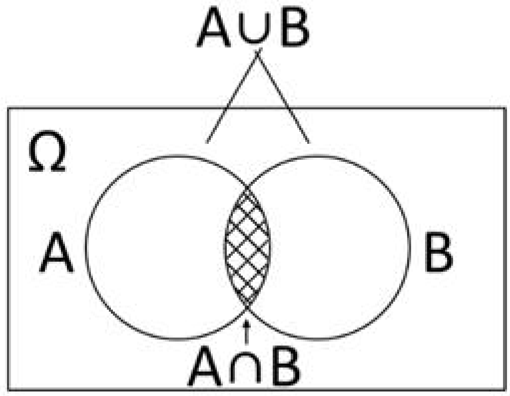
d) $(B_1 \cap B_2' \cap B_3') \cup (B_1' \cap B_2 \cap B_3') \cup (B_1' \cap B_2' \cap B_3)$ - otrzymano dokładnie jedną reszkę

Praca domowa nr 3 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka”

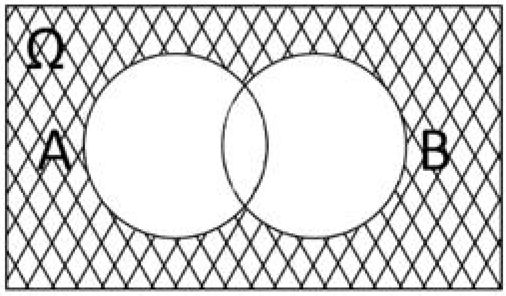
(UWAGA: w zad. 3-9 określić zbiory zdarzeń elementarnych Ω)

Zad. 1. Wiadomo, że: $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}7$, $P(A \cup B) = 0{,}8$. Obliczyć prawdopodobieństwa: **a)** $P(A \cap B)$, **b)** $P(A' \cap B')$, **c)** $P(A' \cap B)$, **d)** $P(A' \cup B)$.

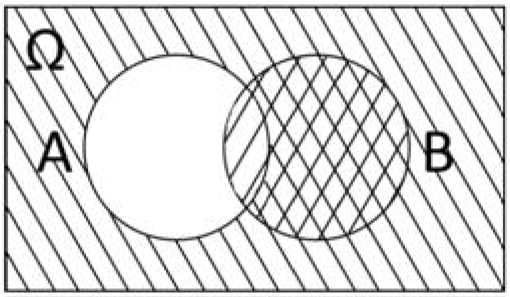
$P(A) = 0{,}6 \; P(B) = 0{,}7 \; P(A \cup B) = 0{,}8$
$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$



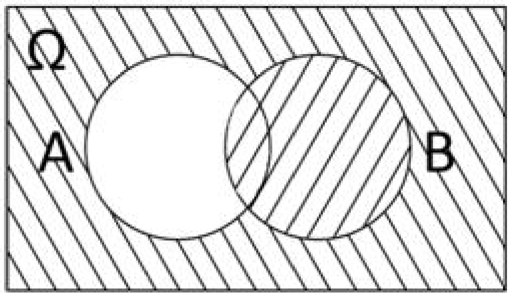
a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}8 = 0{,}5$



b) $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') =$
$P(\Omega(A \cup B)) = P(\Omega) - P(A \cup B) =$
$= 1 - 0{,}8 = 0{,}2$



c) $P(A' \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) =$
$P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2$



d) $P(A' \cup B) = P(A' \cup (B \cap A)) =$
$P(A') + P(B \cap A) = (1 - 0{,}6) + 0{,}5 = 0{,}9$

Zad. 2. Wśród studentów I roku pewnego wydziału 120 zdawało egzaminy z matematyki i fizyki. Okazało się, że 15 z nich nie zdało egzaminu tylko z matematyki, 10 nie zdało egzaminu tylko z fizyki, natomiast 5 nie zdało obu egzaminów. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrany student: **a)** nie zdał egzaminu z matematyki, ale zdał z fizyki, **b)** nie zdał egzaminu z fizyki, ale zdał z matematyki, **c)** nie zdał obu egzaminów, **d)** zdał co najmniej jeden egzamin, **e)** zdał oba egzaminy.

$|\Omega|$ - ilość studentów (120)
M - studenci, którzy zdali matematykę
F - studenci, którzy zdali fizykę

$$P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{120-15}{120} = \frac{105}{120}$$

$$P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{120-10}{120} = \frac{110}{120}$$

$P(M' \cap F') = \frac{5}{120}$ - nie zdało obydwu egzaminów

a) nie zdał egzaminu z matematyki, ale zdał z fizyki

$$P(M' \cap F) = P\big((\Omega \backslash M) \cap F\big) = P(F) - P(M \cap F) = *$$

$$P(M' \cap F') = P((M \cup F)') = 1 - P(M \cup F)$$

$$\frac{5}{120} = 1 - P(M \cup F) <=> \frac{115}{120} = P(M \cup F)$$

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$

$$* \, P(F) - P(M \cap F) = \frac{110}{120} - \frac{100}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

b) nie zdał fizyki, ale zdał matematykę

$$P(M \cap F') = P\big((\Omega \backslash F) \cap M\big) = P\big(M \backslash (F \cap M)\big) =$$

$$P(M) - P(F \cap M) = \frac{105}{120} - \frac{100}{120} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

c) nie zdał obu egzaminów

$$P((M \cup F)') = P\big(\Omega \backslash (M \cup F)\big) = 1 - \frac{115}{120} = \frac{1}{24}$$

d) zdał co najmniej jeden egzamin

$$P\big(M \cup F \cup (M \cap F)\big) = P(M \cup F) = \frac{115}{120} = \frac{23}{24}$$

e) zdał oba egzaminy

$$P(M \cap F) = \frac{100}{120} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Zad. 3. Ze zbioru liczb $\{1,2,3,\ldots,1400\}$ losujemy jedną liczbę. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana liczba jest podzielna przez 9 lub 12.

$$\Omega = \{x : x \in \{1, \ldots, 1400\}\}$$

$A = \{x : x \in \Omega \wedge 9|x\}$ - podzielne przez 9
$B = \{x : x \in \Omega \wedge 12|x\}$ - podzielne przez 12

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{\left\lfloor \frac{1400}{9} \right\rfloor}{1400} = \frac{155}{1400}$$

$$P(B) = \frac{\left\lfloor \frac{1400}{12} \right\rfloor}{1400} = \frac{116}{1400}$$

$$NWW(9,12) = 36$$
$$NWD(9,12) = 3$$

$$P(A \cap B) = \frac{\left\lfloor \frac{1400}{NWW} \right\rfloor}{1400} = \frac{\left\lfloor \frac{1400}{36} \right\rfloor}{1400} = \frac{38}{1400}$$

$$P(A \cup B) = \frac{155}{1400} + \frac{116}{1400} - \frac{38}{1400} = \frac{233}{1400}$$

Zad. 4. Z partii liczącej 18 detali dobrych i 4 wadliwe wybrano losowo trzy sztuki. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że: **a)** wszystkie detale będą dobre, **b)** co najmniej jeden detal będzie dobry, **c)** co najwyżej jeden detal będzie dobry.

$\Omega = \left\{\{x_1, x_2, x_3\}: \forall\, i\ \in \{1,2,3\} x_i \in \{1,2,\dots,22\} \wedge \forall\, i,j\ \in \{1,2,3\} i \neq j => x_i \neq x_j\right\}$

a) $A = \{\{x_1, x_2, x_3\}: x\ \in \Omega \wedge \forall\, i\ \in \{1,2,3\} x_i \in \{1,\dots,18\}\}\}$

A_i - i-ty detal jest dobry

$$P(A) = \frac{\binom{18}{3}}{\binom{22}{3}} = \frac{18! * 19! * 3!}{22! * 15! * 3!} = \frac{18 * 17 * 16}{22 * 21 * 20} = \frac{204}{385}$$

b) B - co najmniej jeden detal będzie dobry

$P(B') = P(\Omega \backslash B) = 1 - P(B)$

wszystkie złe

$$1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{22}{3}} => 1 - \frac{4!}{20! * 21! * 22!} => 1 - \frac{2}{770} => 1 - \frac{1}{385} = \frac{384}{385}$$

c) C - co najwyżej jeden detal będzie dobry

$$P(A) = \frac{\binom{18}{1}\binom{4}{2}}{\binom{22}{3}} = \frac{9 * 6}{770} = 27/385$$

$$P(C) = \frac{1 + 27}{285} = \frac{28}{385}$$

Zad. 5. Z 52 kart wylosowano 6. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kart będą zarówno karty czerwone, jak i czarne.

$\Omega = \left\{\{x_1, \dots, x_6\}: x \in \{1, \dots, 52\} \wedge \forall \mathrm{i,j}\ \in \{1, \dots, 6\}\ \mathrm{i} \neq \mathrm{j} => \mathrm{x_i} \neq \mathrm{x_j}\right\}$

A - wylosowano karty czerwone jak i czarne

$$P(A) = \frac{\binom{26}{1}\binom{26}{1}\binom{50}{4}}{\binom{52}{6}}$$

Zad. 6. Z 52 kart wybrano 13. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie 7 kart jednego rodzaju (pik lub trefl lub karo lub kier).

$\Omega = \left\{\{x_1, \dots, x_{13}\}: x \in \{1, \dots, 52\} \wedge \forall \mathrm{i,j}\ \in \{1, \dots, 13\}\ \mathrm{i} \neq \mathrm{j} => \mathrm{x_i} \neq \mathrm{x_j}\right\}$

A - zdarzenie, że wylosujemy pik lub trefl lub karo lub kier

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{7}\binom{39}{6}}{\binom{52}{13}}$$

Zad. 7. Na dziesięciu klockach wyrzeźbiono litery: a, a, k, s, s, t, t, t, y, y. Bawiąc się nimi dziecko układa je w rząd. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przypadkowo złoży ono słowo „statystyka”.

$\Omega = \left\{\{x_1, \dots, x_{10}\}: x \in \{1, \dots, 10\}\right\}$

Słowo: $S\ T\ A\ T\ Y\ S\ T\ Y\ K\ A$

Ilości liter: $|S| = 2\ |T| = 3\ |A| = 2\ |Y| = 2\ |K| = 1$

$$|\Omega| = \frac{10!}{2! * 3! * 2! * 2! * 1!}$$

A - zdarzenie, że utworzymy słowo "STATYSTYKA" $|A| = 1$

$$P(A) = \frac{1}{\frac{10!}{2! * 3! * 2! * 2! * 1!}} = \frac{2! * 3! * 2! * 2! * 1!}{10!}$$

Zad. 8. Cyfry 0,1,...,9 ustawiono losowo. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: **a)** między 0 i 1 znajdą się dokładnie cztery cyfry, **b)** cyfry 4,5,6 będą stały obok siebie w dowolnej kolejności.

$\Omega = \{\{x_1, \dots, x_{10}\}: x \in \{0, \dots, 9\}\}$
$|\Omega| = 10!$
A - zdarzenie, że między 0 i 1 znajdują się 4 cyfry
$|A| = 5 * 8! * 2!$

$$P(A) = \frac{5 * 8! * 2!}{10!} = \frac{5 * 8! * 2!}{8! * 9 * 10} = \frac{1}{9}$$

B - cyfry 4, 5, 6 będą stały w dowolnej kolejności
$|B| = 8! * 3!$

$$P(B) = \frac{8! * 3!}{10!} = \frac{1}{15}$$

Zad. 9. Windą jedzie 5 pasażerów, którzy mogą wysiąść na 8 piętrach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: **a)** wszyscy wysiądą na tym samym piętrze, **b)** wszyscy wysiądą na różnych piętrach, **c)** dokładnie trzy osoby wysiądą na tym samym piętrze (a inne osoby na pozostałych, ale różnych, piętrach).

$\Omega = \{\{x_1, \dots, x_5\}: \forall i \in \{1, \dots, 5\}: x_i \in \{1, \dots, 8\}\}$ $\quad |\Omega| = 8^5$

a) A - wszyscy wysiądą na tym samym piętrze

$$P(A) = \frac{\binom{8}{1}}{8^5} = \frac{1}{8^4}$$

b) B - wszyscy wysiądą na różnych piętrach

$$P(B) = \frac{8 * 7 * 6 * 5 * 4}{8^5} = \frac{840}{8^4} = \frac{105}{512}$$

c) C - trzy osoby wyjdą na tym samym piętrze reszta wysiądzie na różnych

$$P(C) = \frac{\binom{5}{3} * 8 * 7 * 6}{8^5} = \frac{10 * 7 * 6}{4096} = \frac{105}{1024}$$

Praca domowa nr 4 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka”

Zad. 1. Wiadomo, że: $P(A \cap B') = \frac{1}{12}$, $P(A' \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A' \cap B') = \frac{5}{12}$. Obliczyć prawdopodobieństwa: **a)** $P(A' \cup B')$, **b)** $P(A \cap B)$.

WSKAZÓWKA DO a): $(A' \cup B') = (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$.

$P(A \cap B') = \frac{1}{12}$ $P(A' \cap B) = \frac{1}{8}$ $P(A' \cap B') = \frac{5}{12}$

b) $P(A' \cap B) = P(B \setminus (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = P(\Omega \setminus (A \cup B)) =$

$= P(\Omega) - P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B) = \frac{5}{12} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{7}{12}$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B') = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

$P(A) = \frac{1}{12} + P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{12} + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + P(A \cap B) - \frac{7}{12} = 0$

$\frac{2}{24} + \frac{3}{24} + P(A \cap B) - \frac{14}{24} = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{9}{24}$

a) $P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = P(\Omega \setminus (A \cap B)) = 1 - \frac{9}{24} = \frac{15}{24} = \frac{3}{8}$

Zad. 2. Z cyfr 1,2,3,...,9 losujemy, bez zwracania, trzy cyfry. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczby trzycyfrowe otrzymane z tych cyfr będą: **a)** większe od 666, **b)** mniejsze od 333.

$|\Omega| = 9*8*7 = 504$

a) $|A| = 3*8*7 + 1*3*7 = 189 \quad P(A) = \frac{189}{504}$

b) $|B| = 2*8*7 + 1*2*7 = 126 \quad P(B) = \frac{126}{504}$

Zad. 3. Rozwiązać zad. 1, gdy losowania są ze zwracaniem.

$|\Omega| = 9*9*9 = 9^3 = 729$

a) $|A| = 3*9*9 + 1*3*9 + 1*1*3 = 273 \quad P(A) = \frac{273}{729} = \frac{91}{243}$

(711-999) (671-699) (667-669)

b) $|B| = 2*9*9 + 1*2*9 + 1*1*2 = 182 \quad P(B) = \frac{182}{729}$

(111-299) (311-329) (331-332)

Zad. 4. Trzydziestoosobowa klasa udała się do kina. W kinie uczniowie ustawili się w pojedynczej kolejce do kasy, przy czym ustawienie miało charakter losowy. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że między dwojgiem ustalonych uczniów będzie dokładnie dziesięcioro innych.

$|\Omega| = 30!$

miejsce krańcowe - (30-12+1)*2!*28!

$$P(A) = \frac{(30-12+1)*2!*28!}{30!} = \frac{38}{870} = \frac{19}{435}$$

Zad. 5. W szafie znajduje się 5 par butów. Wyjęto z szafy w sposób losowy 4 buty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wybranych butów nie będzie ani jednej pary.

$$|\Omega| = \binom{10}{4} = \frac{10!}{6!*4!} = \frac{6!*7*8*9*10}{6!*2*3*4} = 210$$

$$|A| = \binom{5}{4}\binom{2}{1}^4 = \frac{5!}{4!}*2^4 = 80 \quad P(A) = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$$

Zad. 6. Cztery młode małżeństwa umówiły się na wspólną wizytę na basenie, oznaczając jako miejsce spotkania kasę przy wejściu. Z pewnych względów wszystkie spośród ośmiu osób przychodziły pojedynczo. Okazało się, że o ustalonej godzinie spotkania w miejscu spotkania były cztery osoby. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród nich było co najmniej jedno małżeństwo.

$$|\Omega| = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!*4!} = \frac{4!*5*6*7*8}{4!*4!} = \frac{5*6*7*8}{2*3*4} = 70$$

$$|A'| = \binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 16 \quad 70 - 16 = 53$$

Zad. 7. Ośmiu pięściarzy podzielono na dwie grupy po czterech zawodników każda. Obliczyć prawdopodobieństwo, że 2 najsilniejszych pięściarzy będzie: **a)** w tej samej grupie, **b)** w dwóch różnych grupach. Zakładamy, że grupy są rozróżnialne (ponumerowane).

$$|\Omega| = \binom{8}{4} = 70$$

a) $|A| = \binom{6}{2}*2 = \frac{6!}{4!*2!}*2 = 30 \quad P(A) = \frac{30}{70} = 3/7$

b) $|B| = \binom{6}{3}*2 = \frac{6!}{3!*3!}*2 = 40 \quad P(B) = \frac{4}{7}$

Zad. 8. W klasie jest 10 dziewcząt i 10 chłopców, którym przydzielono losowo miejsca w 10 dwuosobowych ławkach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w każdej ławce będą siedzieli dziewczynka i chłopiec.

D - dziewczynka C - chłopiec

$|D_1\ C_1|D_2\ C_2|D_3\ C_3| \dots |D_{10}\ C_{10}|$

$Di: i \in \{1,3,5,\dots,19\}$

$Ci: i \in \{2,4,6,\dots,20\}$

Takich ustawień jest $10! * 10!$ i na dodatek w każdej z ławek dziewczynka i chłopiec mogą się zamienić miejscami także mnożymy razy 2^{10}, ponieważ są dwa miejsca i 10 ławek.

$|\Omega| = 20!$, ponieważ mamy 20 uczniów

A - zdarzenie że w ławce usiądzie dziewczynka i chłopiec

$$P(A) = \frac{2^{10} * (10!)^2}{20!}$$

Zad. 9. W czasie spotkania towarzyskiego, na którym było 10 par małżeńskich (w sumie 20 osób) wybrano losowo 3 mężczyzn i 3 kobiety. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wybranych osób: **a)** nie będzie męża i żony, **b)** będzie dokładnie jedna para małżeńska, **c)** będą dokładnie dwie pary małżeńskie, **d)** znajdą się najstarsza z kobiet i najstarszy z mężczyzn.

$$|\Omega| = \binom{10}{3}\binom{10}{3}$$

a) nie będzie męża i żony

$$|A| = \binom{10}{3}\binom{7}{3} = \frac{10!}{7! * 3!} * \frac{7!}{4! * 3!} = 4200 \quad P(A) = \frac{\binom{10}{3}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}^2} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

b) będzie dokładnie jedna para małżeńska

$$|B| = \binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{2} \quad P(B) = \frac{36 * 21 * 10}{120 * 120} = \frac{21}{40}$$

c) będą dokładnie dwie pary małżeńskie

$$|C| = \binom{10}{2}\binom{8}{1}\binom{7}{1} \quad P(C) = \frac{45 * 8 * 7}{120 * 120} = \frac{7}{40}$$

d) najstarsza z kobiet i najstarszy z mężczyzn

$$|D| = \binom{9}{2}\binom{9}{2} \quad P(D) = \left(\frac{36}{120}\right)^2 = \frac{9}{1000}$$

Zad. 10. Przy okrągłym stole jest 10 miejsc, na które siadają w sposób losowy 4 osoby. Obliczyć prawdopodobieństwo, wszystkie 4 osoby usiądą na krzesłach stojących obok siebie.

$$|\Omega| = \binom{10}{4} * 4!$$

A - wszystkie 4 osoby usiądą na krzesłach obok siebie

$$|A| = 10 * 4! \qquad P(A) = \frac{10 * 4!}{\binom{10}{4} * 4!} = \frac{10}{210} = \frac{1}{21}$$

Zad. 11. Rzucamy dwa razy symetryczną, sześcienną kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że różnica (w sensie modułu) wyrzuconych oczek jest równa 3.

$|\Omega| = 6 * 6 = 36$

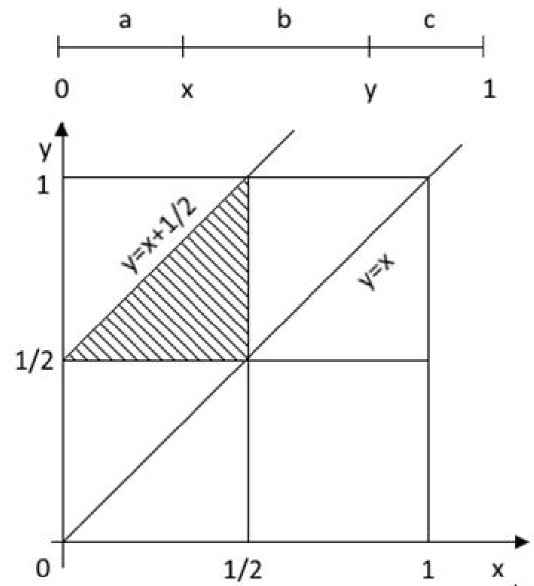
A - zdarzenie, że różnica oczek w sensie modułu będzie równa 3

X	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Praca domowa nr 5 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

Zad. 1. Z przedziału $[0,1]$ wybieramy losowo dwa punkty, które dzielą ten przedział na 3 odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z odcinków tych można zbudować trójkąt.



Warunek na stworzenie trójkąta: suma długości dwóch dowolnych boków jest większa od pozostałego.

Losuję jeden punk (x,y) z kwadratu [0,1]x[0,1]

$|\Omega| = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1 \land 0 \leq y \leq 1\} = [0,1]x[0,1]$

$a + b + c = 1$

Najdłuższy odcinek musi być krótszy od $\frac{1}{2}$

Zakładam, że $x \leq y$

Jeżeli $x \geq \frac{1}{2}$ to odcinek [0,X] jest dłuższy od $\frac{1}{2}$

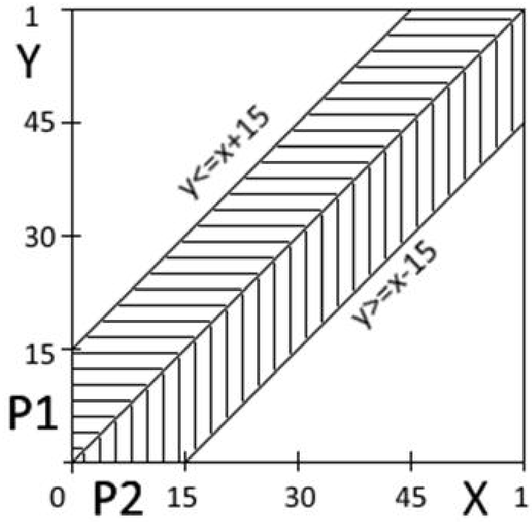
Zatem $x < \frac{1}{2}$

Jeżeli $y \geq \frac{1}{2} \land y < 2$ to odcinek [Y,1] jest dłuższy od $\frac{1}{2}$. Zatem $y > \frac{1}{2}$

Długość odcinka [x,y] musi być mniejsza od $\frac{1}{2}$

$$y - x < \frac{1}{2} \quad y < \frac{1}{2} + x \qquad P(A) = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}}{1 * 1 * \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} * 2 = \frac{1}{4}$$

Zad. 2. Dwie osoby umówiły się na spotkanie między godzinami 10-tą a 11-tą. Osoba, która przyjdzie pierwsza czeka na drugą co najwyżej 15 minut, lecz nie dłużej niż do 11-tej, a potem odchodzi. Obliczyć prawdopodobieństwo, że spotkanie dojdzie do skutku. Zakładamy, że moment przybycia każdej z osób jest losowy.



X - osoba 1 $\quad Y$ - osoba 2

Różnica w czasie ma być mniejsza niż 15 minut, czyli:

$|y-x| \leq 15$

$y-x \leq 15 \wedge y-x \geq -15$

$y \leq x+15 \wedge y \geq x-15$

$|\Omega| = [0,1]^2 = 1$

A - zdarzenie, że obie osoby się spotkają

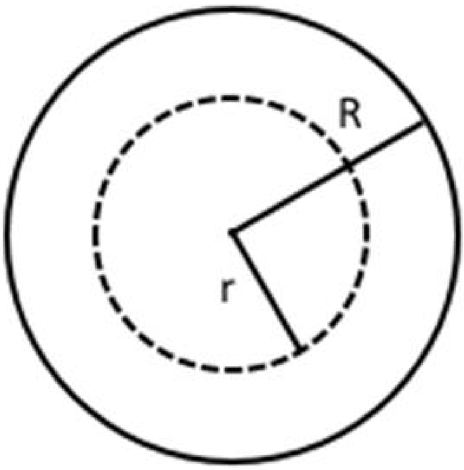
$|A| = P_1 + P_2 \quad P_1 = P_2$

$$P_1 = \frac{1}{2} - \frac{\frac{9}{16}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{9}{32} = \frac{16}{32} - \frac{9}{32} = \frac{7}{32}$$

$$|A| = 2 * P_1 = \frac{14}{32}$$

$$P(A) = \frac{7}{16}$$

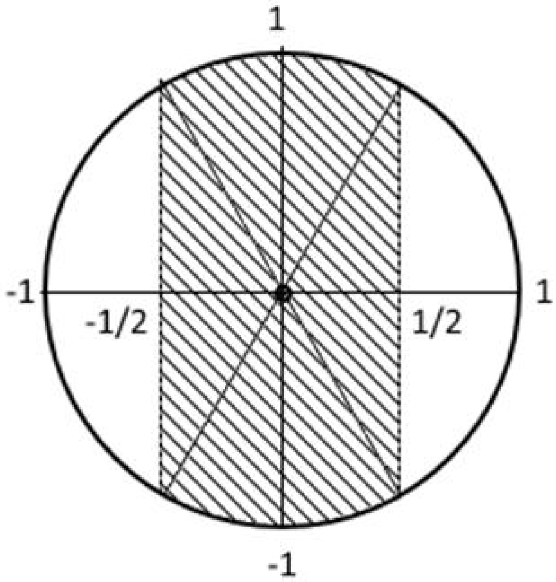
Zad. 3. Z koła o promieniu R wybrano losowo jeden punkt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrany punkt znajdzie się w odległości nie większej od pewnej liczby r ($0 < r < 1$) od środka koła.



A - odległość punktu od środka = r

$$P(A) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

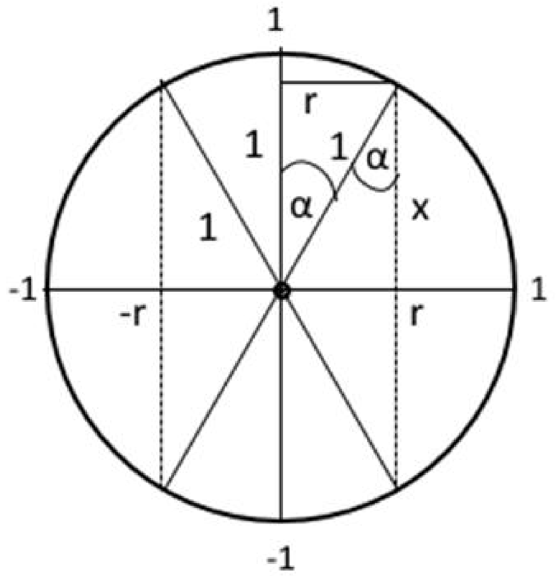
Zad. 4. Z koła o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych wybrano losowo jeden punkt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że rzut wylosowanego punktu na oś OX będzie odległy od początku układu współrzędnych o nie więcej niż $1/2$ .m



$$P = 2 * \frac{1}{6}\pi + 4 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} * \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P(A) = \frac{\frac{\pi}{3} * \frac{\sqrt{3}}{2}}{\pi r^2} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

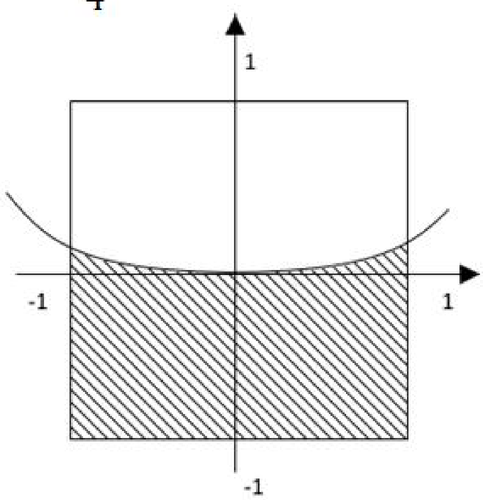
Zad. 5. Na obwodzie koła (na okręgu) o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych wybrano losowo jeden punkt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że rzut wylosowanego punktu na oś OX będzie odległy od początku układu współrzędnych o nie więcej niż r ($0 < r < 1$).



$$sin\alpha = \frac{r}{1} = r$$
$$arcsinr = \alpha$$
$$n(A) = \frac{2 * 2arcsinr}{2\pi} * 2\pi = 4arcsinr$$
$$P(A) = \frac{4arcsinr}{2\pi} = \frac{2arcsinr}{\pi}$$

Zad. 6. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że pierwiastki równania $mx^2 + kx + 1 = 0$ są rzeczywiste, jeśli wiadomo, że liczby k, m wybrano losowo z przedziału $[-1,1]$ ($(k,m) \in [-1,1] \times [-1,1]$).

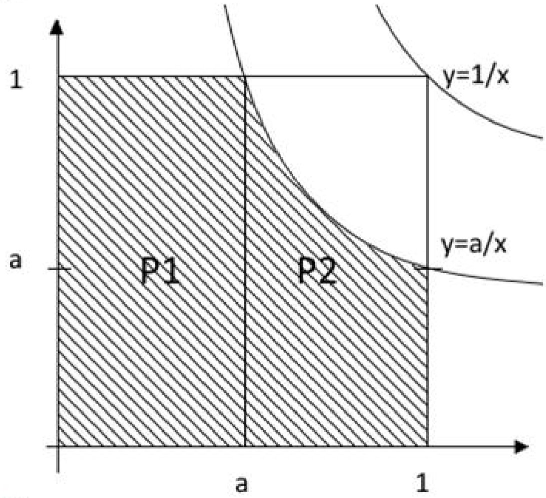
$$mx^2 + kx + 1 = 0 \quad ((k,m) \in [-1,1]\text{x}[-1,1])$$
$$|\Omega| = [-1,1]^2 = 2^2 = 4$$
Rzeczywiste gdy $\Delta = k^2 - 4m \geq 0$
$$m \leq \frac{k^2}{4}$$



$$P(A) = \frac{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\frac{k^2}{4}} dmdk}{4} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\frac{k^2}{4}} dmdk =$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(k^2 + 1)dk = \frac{1}{4}\left[\frac{k^3}{12} + k\right]_{-1}^{1} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{13}{12} * 2\right) = \frac{13}{24}$$

Zad. 7. W kwadrat o wierzchołkach: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ rzucono losowo punkt. Niech (x,y) oznacza jego współrzędne. Obliczyć (w zależności od a) prawdopodobieństwa: **a)** $P(x \cdot y \leq a)$, **b)** $P\left(\frac{x+y}{2} \leq a\right)$.

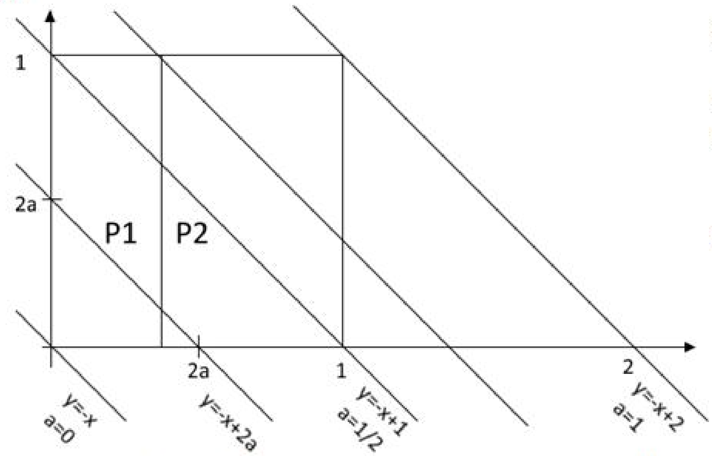
a)



$P_2\colon \int_a^1 \frac{a}{x}dx = a\int_a^1 \frac{1}{x}dx = a[\ln|x|]_a^1 =$
$= -a\ln a$
$P_1\colon a * 1 = a$

$$P(A) = \begin{cases} 0, & gdy\ a \le 0 \\ a(1-\ln a), & 0 < a < 1 \\ 1, & gdy\ a \ge 1 \end{cases}$$

b)



$\frac{x+y}{2} \le a$
$y \le 2a - x$
$y \le -x + 2a$

$$P(A) = \begin{cases} 0, & gdy\ a < 0 \\ 2a^2, & gdy\ 0 \le a \le 1/2 \\ a^2 + 4a - 1, & gdy\ \frac{1}{2} < a < 1 \\ 1, & gdy\ a \ge 1 \end{cases}$$

$dla\ 0 < a \le \frac{1}{2}\colon \int_0^{2a}(-x+2a)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2ax\right]_0^{2a} = -2a^2 + 4a^2 = 2a^2$

$dla\ \frac{1}{2} < a < 1\ P_1\colon 1 * 2a = 2a$

$P_2\colon \int_{2a}^1(-x+2a) = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2ax\right]_{2a}^1 = -1 + 2a^2 + 2a - 4a^2 = -2a^2 + 2a - 1$

Praca domowa nr 6, 7 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka”

Zad. 1. Do 5 pustych wagonów metra wsiadło losowo 9 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden wagon będzie pusty.

A - zdarzenie, że żaden wagon nie pozostanie pusty
$|\Omega| = 5^9$ - wszystkie wagony mogą przyjąć ludzi na tyle sposobów
W tym zadaniu korzystamy ze wzoru włączeń i wyłączeń

$$P(A) = \binom{5}{1}\left(\frac{4}{5}\right)^9 - \binom{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^9 + \binom{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^9 - \binom{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^9$$

Zad. 2. Rzucono dwa razy kostką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie większa od 8, jeśli wiadomo, że: **a)** w którymś rzucie wypadło 5 oczek, **b)** za pierwszym razem wypadło 5 oczek.

$|\Omega| = 6 * 6 = 36$

A - zdarzenie, że suma oczek będzie większa niż 8

a) B - zdarzenie, że w którymś rzucie wypadnie 5

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ - wzór na prawdopodobieństwo warunkowe

X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36} \quad P(B) = \frac{11}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{5}{36} * \frac{36}{11} = \frac{5}{11}$$

b) B - zdarzenie, że za pierwszym razem wypadło 5 oczek

X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} \quad P(B) = \frac{6}{36}$$

$$P(A|B) = \frac{3}{36} * \frac{36}{6} = \frac{1}{2}$$

Zad. 3. Z talii 8 kart - 4 króli i 4 asów - wybieramy losowo 2 karty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrano 2 asy, jeśli wiadomo, że: **a)** wybrano co najmniej 1 asa, **b)** wśród wybranych kart jest czerwony as, **c)** wśród wybranych kart jest as trefl.

8 kart -> 4 króle i 4 asy wybieramy losowo dwie karty

$$|\Omega| = \binom{8}{2} = \frac{8 * 7}{2} = 28$$

A - zdarzenie, że wybrano 2 asy, jeśli wiadomo, że:

a) B - wybrano co najmniej 1 asa

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}}{28} = \frac{\frac{24 * 3}{4}}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1} + \binom{4}{2}}{28} = \frac{16 + 6}{28} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$$

b) B - wśród wybranych kart jest czerwony as

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

$$P(B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{7}{1}}{28} = \frac{2 * 7}{28} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{3}{14} * 2 = \frac{3}{7}$$

Zad. 4. Ze zbioru 10 elementów, wśród których 7 ma pewną cechę „C", a 3 tej cechy nie posiada losujemy, bez zwracania, cztery razy po jednym elemencie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane elementy będą miały cechę „C".

A - zdarzenie, że wszystkie wylosowane elementy będą miały cechę "C"

$$P(A) = \frac{7}{10} * \frac{6}{9} * \frac{5}{8} * \frac{4}{7} = \frac{1}{6}$$

Zad. 5. W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, a w drugiej są 4 białe i 1 czarna. Rzucamy kostką. Jeśli wypadną mniej niż 3 oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie losujemy jedną kulę z drugiej urny. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

A - wybrano kulę białą

$$\left.\begin{array}{l} B_1 \text{ - wypadną mniej niż 3 oczka} \\ B_2 \text{ - wypadnie więcej niż 2 oczka} \end{array}\right\} \quad P(B_1) + P(B_2) = 1 \quad !$$

$$P(A) = P(A|B_1) * P(B_1) + P(A|B_2) * P(B_2)$$

$$P(B_1) = \frac{1}{3} \qquad P(B_2) = \frac{2}{3}$$

rzuty kostką

$$B_1 - oczka < 3 \qquad B_2 - oczka \geq 3$$

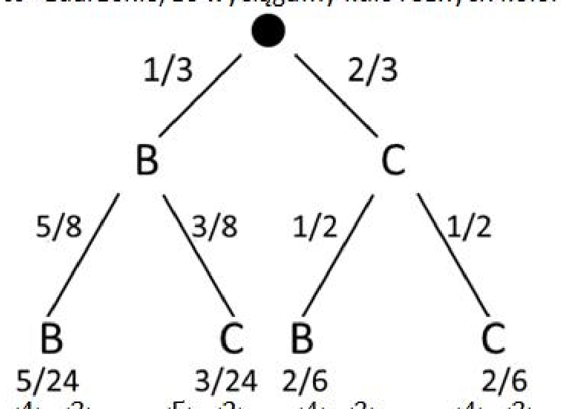
$$P(A|B_1) = \frac{3}{5} \qquad P(A|B_2) = \frac{4}{5}$$

$$P(A) = \frac{3}{5} * \frac{1}{3} + \frac{4}{5} * \frac{2}{3} = \frac{11}{15}$$

Zad. 6. W pierwszej urnie znajdują się 2 kule białe i 4 czarne, a w drugiej 4 białe i 3 czarne. Z pierwszej urny losujemy jedną kulę i wrzucamy do urny drugiej. Następnie, z drugiej urny przenosimy jedną kulę do urny pierwszej. Na końcu, z urny drugiej losujemy dwie kule. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy kule różnych kolorów.

$$|\Omega| = \binom{7}{2} = 21$$

A - zdarzenie, że wyciągamy kule różnych kolorów



Pierwszy poziom drzewka oznacza sytuację, którą uzyskamy po przełożeniu pierwszej kuli.

Drugi poziom po przełożeniu następnej.

$$\binom{4}{1}\binom{3}{1} \qquad \binom{5}{1}\binom{2}{1} \qquad \binom{4}{1}\binom{3}{1} \qquad \binom{4}{1}\binom{3}{1}$$

$$4 * 3 = 12 \qquad 5 * 2 = 10 \qquad 4 * 3 = 12 \qquad 4 * 3 = 12$$

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite ponieważ $\frac{5}{24} + \frac{3}{24} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = 1$

Z prawdopodobieństwa $\frac{5}{24}$ mamy sytuację, że mamy 4 białe i 3 czarne kule.

Z prawdopodobieństwa $\frac{3}{24}$ mamy sytuację, że mamy 5 kul białych i 2 czarne.

W przypadkach gdy prawdopodobieństwo wynosi $\frac{2}{6}$ mamy sytuację, że mamy 4 kule białe i 3 czarne.

$$P(A) = \frac{12}{21} * \frac{5}{24} + \frac{10}{21} * \frac{9}{24} + \frac{12}{21} * \frac{2}{6} + \frac{12}{21} * \frac{2}{6} = \frac{292}{504} \approx 0{,}56$$

Zad. 7. Wykonujemy pomiary trzema urządzeniami, z których jeden jest nieco rozregulowany. Przy wykonywaniu pomiaru sprawnym przyrządem prawdopodobieństwo otrzymania błędu pomiarowego przewyższającego tolerancję wynosi 0,03, natomiast prawdopodobieństwo to dla przyrządu nie do końca sprawnego jest równe 0,3. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: **a)** wynik pomiaru losowo wziętym przyrządem przewyższa tolerancję, **b)** wynik pomiaru, który przewyższył tolerancję został otrzymany nie w pełni sprawnym przyrządem.

A - wykonanie pomiaru przewyższającego tolerancję

a) $P(B_1) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $P(B_2) = \frac{1}{3}$

$P(A|B_1) = 0{,}03$ $\qquad$ $P(A|B_2) = 0{,}3$

$$P(A) = 0{,}03 * \frac{2}{3} + 0{,}3 * \frac{1}{3} = \frac{3}{100} * \frac{2}{3} + \frac{3}{10} * \frac{1}{3} = \frac{12}{100}$$

b) $P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)*P(B_2)}{P(A)}$

gdzie $P(A) = P(A|B_1) * P(B_1) + P(A|B_2) * P(B_2)$ - wzór Bayes'a

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$$

$$P(B_2|A) = \frac{\frac{3}{100} * \frac{1}{3}}{\frac{12}{100}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{12}{100}} = \frac{10}{12}$$

Zad. 8. Strzelano z dwóch dział do tego samego celu. Z pierwszego działa oddano 9 strzałów, a z drugiego 10. Pierwsze działo trafia średnio 8 razy na 10 strzałów, a drugie 7 razy na 10 strzałów; **a)** Obliczyć prawdopodobieństwo, że cel został zniszczony; **b)** Pocisk trafił w cel. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pocisk pochodził z pierwszego działa.

A - cel został zniszczony

B_1 - strzał z 1. armaty

B_2 - strzał z 2. armaty

$$P(A) = P(A|B_1) * P(B_1) + P(A|B_2) * P(B_2)$$

$$P(A) = \frac{8}{10} * \frac{9}{19} + \frac{7}{10} * \frac{10}{19} = \frac{71}{95}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) * P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{10} * \frac{9}{19}}{\frac{71}{95}} = \frac{36}{71}$$

Zad. 9. Trzy ściany czworościanu zostały pomalowane na biało, czerwono i zielono, natomiast czwarta w biało-czerwono-zielone pasy. Doświadczenie polega na rzucaniu czworościanu na płaszczyznę i obserwowaniu ściany, na którą upadł czworościan. Niech: A - zdarzenie, że czworościan upadnie na ścianę białą, B - zdarzenie, że czworościan upadnie na ścianę czerwoną, C - zdarzenie, że czworościan upadnie na ścianę zieloną. Zbadać, czy zdarzenia A, B, C są: **a)** niezależne parami, **b)** niezależne.

A - biała ściana

B - czerwona ściana

C - zielona ściana

$P(A) = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(C) = \frac{1}{2}$

a) $P(A \cap B) = \frac{1}{4} \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4} \quad P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) = ? = P(A) * P(B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ - są niezależne parami

$P(A \cap C) = ? = P(A) * P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ - są niezależne parami

$P(B \cap C) = ? = P(B) * P(C) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ - są niezależne parami

b) $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ - ponieważ mamy jedną ścianę o 3 kolorach

$P(A \cap B \cap C) = ? = P(A) * P(B) * P(C) = \frac{1}{8}$ - nie są niezależne

Zad. 10. Wykazać, że jeśli zdarzenia A, B są niezależne, wtedy niezależne są również zdarzenia A', B'.
Wskazówka: skorzystać z tego, że $(A' \cap B')' = A \cup B$, co implikuje, że $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$.

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$
$$P(A' \cap B') = P(A') * P(B')$$
$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) * P(B)$$
$$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$$
$$-P(A \cup B) = P(A) * P(B) - P(A) - P(B) \ obustronnie\ dodajemy + 1$$
$$1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - \big(P(B) - P(A) * P(B)\big) \ wyciągamy\ P(B)\ przed\ nawias$$
$$P(A' \cap B') = \big(1 - P(A)\big) - P(B) * (1 - P(A)$$
$$P(A' \cap B') = P(A') * \big(1 - P(B)\big)$$
$$P(A' \cap B') = P(A') * P(B')$$

Praca domowa nr 8 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

Zad. 1. Zdarzenia A_1, A_2, A_3, A_4 są niezależne oraz: $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $P(A_3) = p_3$, $P(A_4) = p_4$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: **a)** zajdzie co najmniej jedno ze zdarzeń A_1, A_2, A_3, A_4, **b)** zajdzie dokładnie jedno ze zdarzeń A_1, A_2, A_3, A_4.

a) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = P[(A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4')'] = (1 - P(A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4')$
$1 - P(A_1')P(A_2')P(A_3')P(A_4') = 1 - ((1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4))$

b) $P[(A_1 \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4') \cup (A_1' \cap A_2 \cap A_3' \cap A_4') \cup (A_1' \cap A_2' \cap A_3 \cap A_4') \cup (A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4)] =$
$= P(A_1 \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4') + P(A_1' \cap A_2 \cap A_3' \cap A_4') + P(A_1' \cap A_2' \cap A_3 \cap A_4') + P(A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4)$
$= p_1(1 - p_2)(1 - p_3)(1 - p_4) + (1 - p_1)p_2(1 - p_3)(1 - p_4) + (1 - p_1)(1 - p_2)p_3(1 - p_4) +$
$+(1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3)p_4$

$$\left.\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) * P(B) \\ P(A' \cap B') &= P(A') * P(B') \\ P(A \cap B') &= P(A) * P(B') \\ P(A' \cap B) &= P(A') * P(B) \end{aligned}\right\} \text{niezależność}$$

Zad. 2. Załóżmy, ze prawdziwa jest hipoteza Mendla, iż dla krzyżówki grochu w drugim pokoleniu stosunek nasion żółtych do zielonych jest jak 3:1. Wylosowano niezależnie 10 nasion. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: **a)** będą co najwyżej 4 nasiona żółte, **b)** będzie co najmniej 5 i nie więcej niż 8 nasion żółtych.

sukces - wylosowanie żółtego nasiona

porażka - wylosowanie żółtego nasiona

$n = 10$ - ilość prób

$p = \frac{3}{4} \quad q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P_n(k) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$ - wzór na schemat Bernoulliego

$$P(A_k) = \binom{10}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}$$

A_k - dokładnie k nasiona żółte

a) $\sum_{k=0}^{4} P(A_k) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{10}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}$$

b) $\sum_{k=5}^{8} P(A_k) = P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + P(A_8)$

$$\sum_{k=5}^{8} \binom{10}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}$$

Zad. 3. Właściciel kurzej fermy stwierdził, że kogutków wykluwa się trzy razy więcej niż kurek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z 5 niezależnie wybranych jajek wykluje się co najmniej 1 kogutek, ale nie mniej niż 2 kurki.

sukces - wyklucie się koguta

porażka - wyklucie się kury

$n = 3$ - ilość prób

$p = \frac{3}{4} \quad q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$P(A_k) = \binom{5}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{5-k}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \binom{5}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{5-k}$$

Zad. 4. Z talii 52 kart losujemy 6. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę wylosowanych pików. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X.

6 kart z 52, x - ilość pików $\in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ pików w całej talii

$|\Omega| = \binom{52}{6}$

$$P(X=0) = \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{6}}{\binom{52}{6}} \qquad P(X=3) = \frac{\binom{13}{3}\binom{39}{4}}{\binom{52}{6}} \qquad P(X=6) = \frac{\binom{13}{6}\binom{39}{0}}{\binom{52}{6}}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{5}}{\binom{52}{6}} \qquad P(X=4) = \frac{\binom{13}{4}\binom{39}{3}}{\binom{52}{6}}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{13}{2}\binom{39}{4}}{\binom{52}{6}} \qquad P(X=5) = \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{2}}{\binom{52}{6}}$$

$$k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}: P(X=k) = \frac{\binom{13}{k}\binom{39}{6-k}}{\binom{52}{6}}$$

Zad. 5. Obsługa działa artyleryjskiego ma 3 pociski. Prawdopodobieństwo trafienia do celu jednym pociskiem (przy jednym wystrzale) w danych warunkach wynosi 0,7. Strzelanie kończy się z chwilą trafienia do celu lub wyczerpania pocisków. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę oddanych strzałów. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X.

0,7 - sukces (strzał celny)

0,3 - porażka (strzał niecelny)

za 1 razem: $0{,}7 * 0{,}3^0 = 0{,}7$ (sukces bez porażki)

za 2 razem: $0{,}3^1 * 0{,}7 = 0{,}21$ (jedna porażka)

za 3 razem: $0{,}3 * 0{,}3 * 0{,}7 + 0{,}3 * 0{,}3 * 0{,}3 = 0{,}09$ (wyczerpanie pocisków lub trafienie w cel)

X_i	1	2	3
$P(X_i)$	0,7	0,21	0,09

Zad. 6. Niech X będzie wynikiem pojedynczego rzutu symetryczną, sześcienną kostką do gry. Wyznaczyć:

a) rozkład X, **b)** dystrybuantę X oraz jej wykres, **c)** prawdopodobieństwa: $P(3 < X < 5)$, $P(3 < X \le 5)$, $P(3 \le X \le 5)$, $P(3 \le X < 5)$.

X - zmienna losowa opisująca rzut kostką

a) rozkład zmiennej losowej

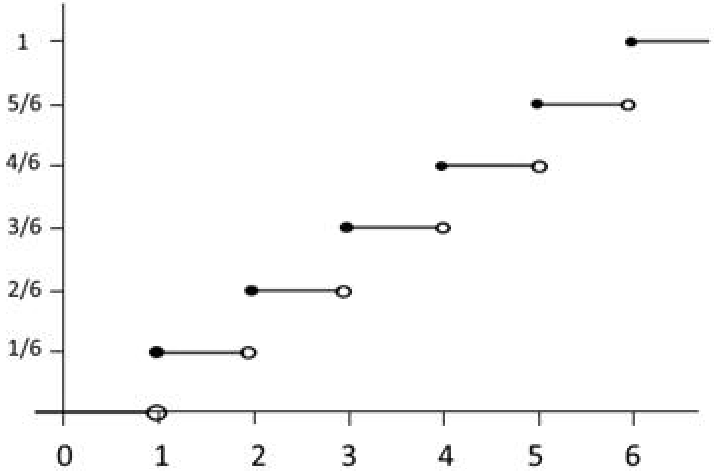
X_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

wartości zmiennej losowej

rozkład

b) dystrybuanta

t	$(-\infty,1)$	$<1,2)$	$<2,3)$	$<3,4)$	$<4,5)$	$<5,6)$	$<6,+\infty)$
$F_x(t)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1



$$F_x(t)\begin{cases} 0 & t\in(-\infty,1) \\ \frac{1}{6} & t\in<1,2) \\ \frac{2}{6} & t\in<2,3) \\ \frac{3}{6} & t\in<3,4) \\ \frac{4}{6} & t\in<4,5) \\ \frac{5}{6} & t\in<5,6) \\ 1 & t\in<6,+\infty) \end{cases}$$

c) $P(a < x \le b) = P(x \le b) - P(x \le a) = F_x(b) - F_x(a)$

$P(3 < x < 5) = F_x(5^-) - F_x(3) = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

$P(3 < x \le 5) = F_x(5) - F_x(3) = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$

$P(3 \le x \le 5) = F_x(5) - F_x(3^-) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$

$P(3 \le x < 5) = F_x(5^-) - F_x(3^-) = \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6}$

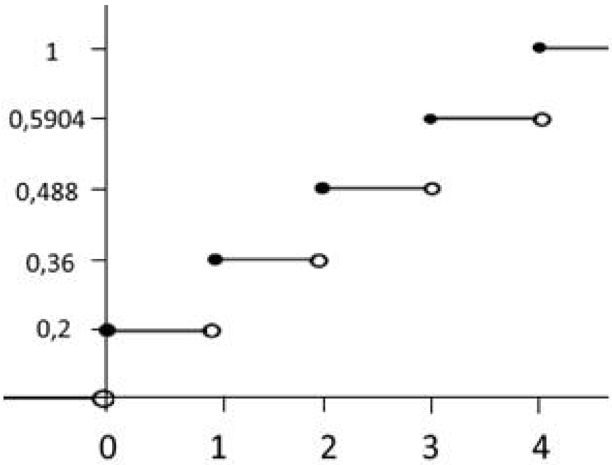
Zad. 7. Na drodze ruchu pociągów znajdują się - w znacznej odległości od siebie - 4 semafory, z których każdy - wobec odległości niezależnie od siebie - zezwala na przejazd pociągu z prawdopodobieństwem 0,8. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę semaforów zezwalających na przejazd i poprzedzających pierwsze zatrzymanie lub stację docelową. Wyznaczyć: **a)** rozkład X, **b)** dystrybuantę X oraz jej wykres, **c)** $P(X \ge 2)$.

$\{x = k\}$- pociąg przejechał k semaforów i zatrzymał się na $k + 1$ dla $k = \{0,1,2,3\}$
a) $P(X = k) = (0{,}8)^k * 0{,}2$
$P(X = 4) = (0{,}8)^4 = 0{,}4096$
a) rozkład X

X_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	0,8 * 0,2	0,8 * 0,8 * 0,2	0,8 * 0,8 * 0,8 * 0,2	0,8 * 0,8 * 0,8 * 0,8
	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

b) dystrybuanta X

t	$(-\infty, 0)$	$< 0{,}1)$	$< 1{,}2)$	$< 2{,}3)$	$< 3{,}4)$	$< 4, +\infty)$
$F_X(t)$	0	0,2	0,36	0,488	0,5904	1



$$F_x(t)\begin{cases} 0 \; t \in (-\infty, 0) \\ 0{,}2 \;\; t \in< 0{,}1) \\ 0{,}36 \; t \in< 1{,}2) \\ 0{,}488 \;\; t \in< 2{,}3) \\ 0{,}5904 \;\; t \in< 3{,}4) \\ 1 \; t \in< 4 + \infty) \end{cases}$$

c) $P(X \geq 2) = P(2 \leq X) = 1 - F_x(2^-) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

Zad. 8. Dystrybuanta zmiennej losowej X jest dana wzorem: $F(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t < -2, \\ 0{,}1, & \text{gdy } -2 \leq t < 2, \\ 0{,}6, & \text{gdy } 2 \leq t < 4, \\ 1, & \text{gdy } t \geq 4. \end{cases}$ Wyznaczyć:

a) rozkład zmiennej losowej X, **b)** $P(-2 < X \leq 4)$, **c)** prawdopodobieństwo, że w pięciu niezależnych doświadczeniach zmienna losowa X co najmniej raz przyjmie wartość z przedziału $(-2, 4\rangle$.

t	$(-\infty, -2)$	$< -2{,}2)$	$< 2{,}4)$	$< 4 + \infty)$
$F_X(t)$	0	0,1	0,6	1

a) Rozkład zmiennej losowej X

X_i	-2	2	4
$P(X = x_i)$	0,1	0,5	0,4

b) $P(-2 < x \leq 4) = F_x(4) - F_x(-2) = 0{,}9$
c) A - zdarzenie, że co najmniej jedna zmienna losowa przyjmie wartość z przedziału $(-2{,}4 >$
A' - zdarzenie, że zmienna losowa nie przyjmie w ogóle wartości z przedziału $(-2{,}4 >$
$P(A') = (0{,}1)^5 \quad P(A) = 1 - (0{,}1)^5 = 0{,}99999$

Zad. 9. Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa postaci:

x_i	$-1/2$	$-1/3$	$1/3$	$1/2$
$p_i = P(X = x_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1

Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej Y, jeśli: **a)** $Y = 6X - 5$, **b)** $Y = X^4$.

a) $Y = 6x - 5$

$ZW_x = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow ZW_y = \{-8, -7, -3, -2\}$

$P(Y = -8) = P\left(X = -\frac{1}{2}\right) = 0{,}2$

$P(Y = -7) = P\left(X = -\frac{1}{3}\right) = 0{,}4$

$P(Y = -3) = P\left(X = \frac{1}{3}\right) = 0{,}3$

$P(Y = 2) = P\left(X = \frac{1}{2}\right) = 0{,}1$

$P(Y = -8) = P\left(X = -\frac{1}{2}\right) = 0{,}2$

Y_i	-8	-7	-3	-2
$P((6x-5) = y_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1

b) $Y = x^4$

$ZW_x = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow ZW_y = \left\{\frac{1}{81}, \frac{1}{16}\right\}$

$P\left(Y = \frac{1}{81}\right) = P\left(X = -\frac{1}{3}\right) + P\left(X = \frac{1}{3}\right) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$

$P\left(Y = \frac{1}{16}\right) = P\left(X = -\frac{1}{2}\right) + P\left(X = \frac{1}{2}\right) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$

Y_i	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{16}$
$P((x^4) = y_i)$	0,7	0,3

Praca domowa nr 9, 10 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

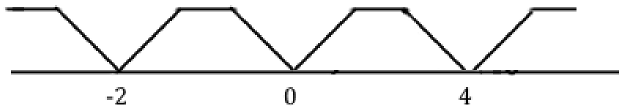
Zad. 1. Wyznaczyć c, dla której funkcja f, dana wzorem: **a)** $f(x) = cx(1-x)^2 I_{(0,1)}(x)$, **b)** $f(x) = cxe^{-4x^2} I_{(0,+\infty)}(x)$, jest gęstością zmiennej losowej.

Wskazówka do a): $cx(1-x)^2 = c(x - 2x^2 + x^3)$;

Wskazówka do b): przy wyznaczaniu całki $\int xe^{-4x^2}dx$, należy zastosować podstawienie $-4x^2 = t$.

Zad. 2. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{1}{3}, & \text{gdy } -2 \le x < 0, \\ \frac{1}{3} - \frac{x}{12}, & \text{gdy } 0 \le x < 4, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$ Wyznaczyć: **a)** dystrybuantę zmiennej losowej X, **b)** $P(X \in \langle 1,3 \rangle)$, **c)** prawdopodobieństwo zdarzenia, że w czterech niezależnych doświadczeniach co najmniej dwa razy zmienna losowa X przyjmie wartość z przedziału $\langle 1,3 \rangle$.

a)



$1.\, t \in (-\infty,-2)\ F(t) = P(x \le t) = \int_{-\infty}^{t} 0dx = 0$

$2.\, t \in [-2,0)\ F(t) = \int_{-\infty}^{t} fxdx = \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{t} \left(\frac{x}{6}+\frac{1}{3}\right)dx = \int_{-2}^{t}\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{x^2}{12}+\frac{1}{3}x\right]_{-2}^{t} = \frac{t^2}{12}+\frac{t}{3}+\frac{1}{3}$

$3.\, t \in [0,4) F(t) = \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{3}\right)dx + \int_{0}^{t}\left(\frac{1}{3}+\left(-\frac{x}{12}\right)\right)dx = \left[\frac{x^2}{12}+\frac{1}{3}x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{24}\right]_{0}^{t} = \frac{1}{3}+\frac{t}{3}-\frac{t^2}{24}$

$4.\, t \in [4,+\infty) F(t) = \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{3}\right)dx + \int_{0}^{4}\left(\frac{1}{3}+\left(-\frac{x}{12}\right)\right)dx + \int_{4}^{+\infty} 0dx = \left[\frac{x^2}{12}+\frac{1}{3}x\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{24}\right]_{0}^{4}$
$= \frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{16}{24} = \frac{5}{3}-\frac{2}{3} = 1$

$$F(t)\begin{cases} 0\ dla\ t \in (-\infty,-2) \\ \frac{t^2}{12}+\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\ dla\ t \in <-2,0) \\ -\frac{t^2}{24}+\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\ dla\ t \in <0,4) \\ 1\ dla\ t \in <4,+\infty) \end{cases}$$

$b)\ P(X \in <1,3>) = P(1 \le X \ge 3) = F(3) - F(1^-) = -\frac{9}{24}+1+\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

$c)\ p = \frac{1}{3}\ q = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(S_4 \ge 2) = 1 - P(S_4 < 2) = 1 - P(S_4 = 0) - P(S_4 = 1) = 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{11}{27}$

Zad. 3. Wyznaczyć $P(|X-2|<1)$, gdy zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{12}+\frac{1}{6}, & \text{gdy } -2 \le x < 2, \\ \frac{2}{3}-\frac{x}{6}, & \text{gdy } 2 \le x < 4, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{12}+\frac{1}{6}\ dla\ x \in <-2,2) \\ \frac{3}{2}-\frac{x}{6} dla\ x \in <2,4> \\ 0\ poza\ tym \end{cases}$$

$P(|x-2|<1) = P(-1 < x-2 < 1) = P(1 < x < 3)$

$P(1<x<3) = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^2\left(\frac{x}{12}+\frac{1}{6}\right)dx + \int_2^3\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{6}\right)dx = \left[\frac{x^2}{24}+\frac{1}{6}x\right]_1^2 + \left[\frac{3}{2}x-\frac{x^2}{12}\right]_2^3$
$= 13/24$

Zad. 4. Dana jest funkcja F, postaci $F(t)=\begin{cases} 0, & \text{gdy } t \in (-\infty,1), \\ \frac{t^3-1}{7}, & \text{gdy } t \in \langle 1,2), \\ 1, & \text{gdy } t \in \langle 2,+\infty). \end{cases}$ Wykonać następujące polecenia:

a) ustalić, czy F jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej typu ciągłego,

b) jeśli odpowiedź w pkt. a) jest pozytywna, wyznaczyć gęstość rozkładu tej zmiennej losowej.

Uwaga do a): podpunkt ten proszę zrobić graficznie (rozwiązanie graficzne polega na naszkicowaniu wykresu funkcji F i odczytaniu z tego wykresu, czy są spełnione własności (i)-(iii) dystrybuanty zmiennej losowej typu ciągłego - *jako warunek (iii) rozważyć ciągłość, która implikuje prawostronną ciągłość*);

Uwaga do b): zastosować wzór $f(t)=\begin{cases} F'(t), & \text{gdy } F'(t) \text{ istnieje,} \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$ i przyjąć, że $F'(t)$ nie istnieje, gdy $t=1$, $t=2$.

$$dla\ t = 1{,}5 = \frac{3}{2}: \ \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1}{7} = \frac{\frac{27}{8} - 1}{7} = \frac{19}{8 * 7} = \frac{19}{56} \approx 0{,}339$$

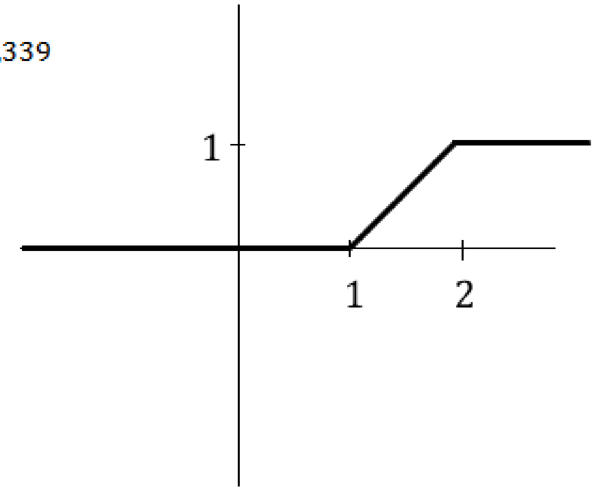
$$dla\ t = 1: = \frac{1 - 1^{-}}{7} \approx 0\ OK$$

$$dla\ t = 2: = \frac{8 - 1}{7} = 1\ OK$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} F'(x)\ gdy\ F'(x) istinieje \\ \quad 0\ gdy\ nie \end{cases}$$

$$t \in (1{,}2): \left(\frac{t^3 - 1}{7}\right)' = \left(\frac{1}{7}t^3 - \frac{1}{7}\right)' = \frac{3}{7}t^2$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}t^2\ x \in (1{,}2) \\ 0\ x\ nie \in (1{,}2) \end{cases} = \frac{3}{7}t^2 I_{1,2}(x)$$



Zad. 5. Dana jest funkcja $F(t)=\begin{cases} 0, & \text{gdy } t \in (-\infty,1), \\ \frac{t-1}{2}, & \text{gdy } t \in \langle 1,c \rangle, \\ 1, & \text{gdy } t \in (c,+\infty). \end{cases}$. Wykonać następujące polecenia:

a) wyznaczyć stałą c, dla której F jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X typu ciągłego,
b) obliczyć $P(3/2 \le X \le 5/2)$.

Uwaga do a): podpunkt ten sprowadza się do wyznaczenia wartości c, dla której zachodzi własność (iii) dystrybuanty (czyli prawostronna ciągłość F w c: $\lim_{t \to c^+} F(t) = F(c)$); własność (i) sprawdzić tak jak na ćwiczeniach - wyznaczyć pochodną funkcji „środkowej" dla $t \in (1,3)$; to, że własność (ii) będzie spełniona jest łatwo sprawdzić (bo we wzorze na F występują wartości 0, 1 w, odpowiednio, $-\infty$, $+\infty$).

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 1) \\ \frac{t-1}{2}, & t \in < 1, c > \\ 1, & t \in (c, +\infty) \end{cases}$$

a)

$$\lim_{t \to c^-} \frac{t-1}{2} = \lim_{t \to c^+} 1$$

$$\frac{c-1}{2} = 1 => c = 3$$

b)

$$P\left(\frac{3}{2} \le X \le \frac{5}{2}\right) = F_x\left(\frac{5}{2}\right) - F_x\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Zad. 6. Pewien człowiek bierze udział w następującej grze: wyciąga z talii 52 kart 1 kartę; jeśli wyciągnie asa, to otrzymuje 5 zł, jeśli jakąś figurę, to otrzymuje 2 zł, a jeśli wyciągnie kartę inną od wymienionych, to płaci 1 zł. Niech X będzie zmienną losową, oznaczającą wygraną gracza. Wyznaczyć: **a)** EX (tzn., wartość oczekiwaną wygraną gracza - wraz z interpretacją), **b)** D^2X (wraz z interpretacją), **c)** trzeci moment zwykły, zmiennej losowej X (tzn., EX^3).

X_i	-1	2	5
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$

$a)\ EX = -1 * \frac{9}{13} + 2 * \frac{3}{13} + 5 * \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$

Interpretacja: Średni oczekiwany wynik to $\frac{2}{13}$ zł

$b)\ D^{2X} = E(X^- EX)^2$

$$D^2X = E\left(-1 - \frac{2}{13}\right)^2 + E\left(2 - \frac{2}{13}\right)^2 + E\left(5 - \frac{2}{13}\right)^2 = E\left(-\frac{15}{13}\right)^2 + E\left(\frac{24}{13}\right)^2 + E\left(\frac{63}{13}\right)^2$$
$$= \frac{225}{169} * \frac{9}{13} + \frac{576}{169} * \frac{3}{13} + \frac{3969}{169} * \frac{1}{13} = \frac{2025}{2197} + \frac{1728}{2197} + \frac{3969}{2197} = \frac{7722}{2197} \approx 3{,}51$$

Y_i	$\frac{225}{169}$	$\frac{576}{169}$	$\frac{3969}{169}$
$P(Y_i)$	$\frac{9}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$

Interpretacja: W sensie średniokwadratowym wartości wygranej będą się różnić od $\frac{2}{13}$zł o ≈ 3.51

c) trzeci moment zwykły:

$$EX^3 = (-1)^3 * \frac{9}{13} + 2^3 * \frac{3}{13} + 5^3 * \frac{1}{13} = -\frac{9}{13} + \frac{24}{13} + \frac{125}{13} = \frac{140}{13} \approx 10{,}77 \text{ zł}$$

Zad. 7. Ustalić, ile powinien płacić gracz za wyciągnięcie karty różnej od asa i figury, aby gra z poprzedniego zadania była sprawiedliwa (tzn., aby wartość oczekiwana wygranej była równa 0).

$$0 = c * \frac{9}{13} + \frac{6}{13} + \frac{5}{13}$$
$$\frac{90}{13} = -\frac{11}{13} => 9c = -11 => c = -\frac{11}{9}$$

Gracz powinien płacić $\frac{11}{9}$ zł

Zad. 8. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x) = \begin{cases} 12x^3 - 24x^2 + 12x, & \text{gdy } x \in (0,1), \\ 0, & \text{gdy } x \notin (0,1). \end{cases}$

Wyznaczyć:

a) wartość oczekiwaną (wraz z interpretacją), **b)** wariancję (wraz z interpretacją), zmiennej losowej X.

a) $f(x) \begin{cases} 12x^3 - 24x^2 + 12x & x \in (0,1) \\ 0 & w\ p.p. \end{cases}$

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{+\infty}^{0} odx + \int_0^1 xf(x)dx + \int_1^{+\infty} 0dx = \int_0^1 (12x^4 - 24x^3 + 12x^2)dx =$$
$$= \left[\frac{12}{5}x^5 - \frac{24}{4}x^4 + \frac{12}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{12}{5} - \frac{24}{4} + \frac{12}{3} = \frac{2}{5}$$

Interpretacja: Średnia wartość zmiennej losowej X wynosi $\frac{2}{5}$

b) $EX^2 = \int_0^1 (12x^5 - 24x^4 + 12x^3)dx = \frac{12}{6} - \frac{24}{5} + \frac{12}{4} = 2 - 4\frac{4}{5} + 3 = \frac{1}{5} < \infty$

$$D^2X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}$$

Zad. 9. Zakładając, że zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & \text{gdy } x\in\langle -1,3\rangle,\\ 0, & \text{gdy } x\notin\langle -1,3\rangle.\end{cases}$.

Wyznaczyć czwarty moment zwykły tej zmiennej losowej (tzn., EX^4).

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x\in<-1,3>\\ 0 & x\ nie\in<1.3>\end{cases}$$

$$EX^4=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4f(x)dx=\int 0dx+\int_1^3\frac{x^4}{4}dx+\int 0dx=\left[\frac{x^5}{20}\right]_{-1}^3=\frac{243}{20}+\frac{1}{20}=\frac{244}{20}=12\frac{1}{5}$$

Zad. 10. Zad. 2. Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa postaci:

x_i	-4	-2	0	1	3
$p_i=P(X=x_i)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

Wyznaczyć zbiór median zmiennej losowej X.

X_i	-4	-2	0	1	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

Wyznaczyć zbiór median X

$$F(t)=\begin{cases}0 & t\in(-\infty,-4)\\ 0{,}1 & t\in<-4,-2)\\ 0{,}2 & t\in<-2,0)\\ 0{,}5 & t\in<0,1)\\ 0{,}8 & t\in<1,3)\\ 1 & t\in<3,+\infty)\end{cases}$$

$$X_{0,5}:\begin{cases}F\left(x_{0,5}{}^{-}\right)\le 0{,}5 => x\in(-\infty,1]\\ F\left(x_{0,5}\right)\ge 0{,}5 => x\in[0,+\infty)\end{cases} => x_{0,5}\in[0,1]$$

Praca domowa nr 11 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

Zad. 1. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x, & \text{gdy } 0\le x\le 4,\\ 0, & \text{poza tym.}\end{cases}$ Wyznaczyć medianę zmiennej losowej X oraz podać interpretację otrzymanej wartości mediany.

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x & 0\le x\le 4\\ 0 & poza\ tym\end{cases}$ całka z gęstośći - dystrybuanta

mediana: $Me=X_{0,5}: Me=\int_{-\infty}^{X_{0,5}}f(x)dx=0{,}5$

$$Me=\int_{-\infty}^{X_{0,5}}\frac{1}{8}xdx=\left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^{X_{0,5}}=\frac{1}{16}x_{0,5}{}^2$$

$$\frac{1}{16}x_{0,5}{}^2=0{,}5$$

$$x_{0,5}{}^2=8 => x_{0,5}=2\sqrt{2}$$

Interpretacja: $Me=2\sqrt{2}$, 50% wartości x jest mniejsze lub równe $2\sqrt{2}$, 50% wartości x jest większe lub równe $2\sqrt{2}$

Zad. 2. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[1,5]$ ($X\sim U([1,5])$). Wyznaczyć: **a)** wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y=3X+2$, **b)** wariancję zmiennej losowej $Y=3X+2$, **c)** odchylenie standardowe zmiennej losowej $Y=3X+2$ (to ostatnie z interpretacją).
WSKAZÓWKA: proszę zajrzeć do informacji o rozkładzie jednostajnym, podanych na wykładzie.

$X \sim U([1,5])$ <= rozkład jednostajny $EX = \frac{a+b}{2}$ $D^2X = \frac{(b-a)^2}{12}$

a b

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x\ nie \in [a,b] \end{cases} => \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

a) $EU = E(3X+2) = 3EX + E(2) = 3 * \frac{1+5}{2} + 2 = \frac{18}{2} + 2 = 11$

b) $D^2(3X+2) = D^2(3X) = 3^2 * D^2X = 9 * \frac{16}{12} = \frac{9*4}{3} = 12$

c) $\sqrt{D^2Y} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Interpretacja: Wartość $Y = 3X + 2$ różnią się w sensie średnim od $EY = 11$ o wartość $2\sqrt{2}$

Zad. 3. Wiadomo, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ ($X \sim Exp(\lambda)$, gdzie $\lambda > 0$) oraz $P(X < 3) = 26/27$. Wyznaczyć: **a)** parametr λ, **b)** wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y = 2X - 3$, **c)** wariancję zmiennej losowej $Y = 2X - 3$, **d)** odchylenie standardowe zmiennej losowej $Y = 2X - 3$ (to ostatnie z interpretacją).

a) $X \sim Exp(\lambda)$ - rozkład wykładniczy

$\lambda > 0$

$$P(x < 3) = \frac{26}{27}$$

a) $\lambda = ?$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & gdy\ x > 0 \\ 0 & gdy\ x \le 0 \end{cases}$$

$$P(x<3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda x}dx = \begin{cases} t = -\lambda x \\ dt = -\lambda dx \end{cases} \begin{cases} \square \\ \square \end{cases} = -\int e^t dt = [-e^t]_0^3 =$$

$$= -e^{-3\lambda} + e^0 = -e^{-3\lambda} + 1$$

$$-e^{-3\lambda} + 1 = \frac{26}{27} => e^{-3\lambda} = \frac{1}{27} => \frac{1}{e^{3\lambda}} = \frac{1}{27} => e^{3\lambda} = 27 \ / \ln \square$$

$$3\lambda = \ln 27 => 3\lambda = \ln 3^3 => 3\lambda = 3\ln 3 => \lambda = \ln 3$$

$$EX = \frac{1}{\lambda} \quad D^2X = \frac{1}{\lambda^2}$$

b) $EY = E(2X-3) = 2EX - E(3) = 2 * \frac{1}{\ln 3} - 3$

c) $D^2Y = D^2(2X-3) = D^2(2X) - D^2(3) = 4D^2X = 4 * \frac{1}{\ln^2 3} = \left(\frac{2}{\ln 3}\right)^2$

d) $\sqrt{D^2Y} = \frac{2}{\ln 3}$

Interpretacja: Wartości $Y = 2X - 3$ różnią się w sensie średnim od wartości $EX = \frac{2}{\ln 3} - 3$ o wartość $\frac{2}{\ln 3}$

Zad. 4. Wyznaczyć dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej Y, jeśli:

a) $Y = 4|X|$ i $X \sim N(0,1)$, **b)** $Y = e^X$ i $X \sim N(0,1)$.

a) $Y = 4|X|, X \sim N(0,1)$ *wynaczyć dystrubuantę i gęstość Y*

$t \in [0, +\infty)$

$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(4|X| \le t) = P(\phi) = 0$

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(4|X| \le t) = P\left(|X| \le \frac{t}{4}\right) = P\left(-\frac{t}{4} \le X \le \frac{t}{4}\right) bo\ X \sim N(0,1) =$$

$$= \phi\left(\frac{t}{4}\right) - \phi\left(-\frac{t}{4}\right) = \phi\left(\frac{t}{4}\right) - \left[1 - \phi\left(\frac{t}{4}\right)\right] = 2\phi\left(\frac{t}{4}\right) - 1$$

$$F_Y(t) = F_{N|X|} = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0) \\ 2\phi\left(\frac{t}{4}\right) - 1 & t \in [0, +\infty) \end{cases} \qquad f_y(t) = \begin{cases} F_Y'(t)\ gdy\ istnieje \\ 0 \quad w\ p.p. \end{cases}$$

$t \in (-\infty, 0)$

$F_Y'(t) = 0$

$t \in [0, +\infty)$

$$f_y(t) = \left[2\phi\left(\frac{t}{4}\right) - 1\right]_t' = \left[2\phi\left(\frac{t}{4}\right)\right]_t' = 2\left[\phi\left(\frac{t}{4}\right)\right]_t' * \left(\frac{t}{4}\right)' = ze\ wzoru = 2 * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\left(\frac{t}{4}\right)^2}{2}} * \frac{1}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{32}}$$

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{32}} \end{cases}$$

Praca domowa nr 12, 13 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka”

Zad. 1. Zmienna losowa X ma rozkład normalny o średniej (-5) i odchyleniu standardowym 10. Obliczyć prawdopodobieństwa:

a) $P(-1<X<5)$, **b)** $P(X\le -9)$, **c)** $P(-7<X<1)$, **d)** $P(X\ge -7)$, **e)** $P(|X+5|\le 10)$ (ostatni podpunkt rozwiązać dwoma sposobami: **(i)** zamieniając nierówność z modułem na nierówność dwustronną, **(ii)** korzystając z reguły jednej sigmy).

Wzory: $X\sim N(m,\delta) => Y=\frac{X-m}{\delta}\sim N(0,1)$

$X\sim N(-5{,}10)\quad Y=\dfrac{X+5}{10}\sim N(0{,}1)\quad m=-5\quad \delta=10$

a) $P(-1<X<5)=F_{N(-5,10)}(5)-F_{N(-5,10)}(-1)=\phi\left(\frac{5+5}{10}\right)-\phi\left(\frac{-1+5}{10}\right)=\phi(1)-\phi(0{,}4)=$
$=0{,}84134-0{,}65542=0{,}18592$

b) $P(X\le -9)=F_{N(-5,10)}(-9)=\phi\left(\frac{-9+5}{10}\right)=\phi(-0{,}4)=1-\phi(0{,}4)=1-0{,}65542=0{,}34458$

c) $P(-7<X<1)=F_{N(-5,10)}(1)-F_{N(-5,10)}(-7)=\phi\left(\frac{125}{10}\right)-\phi\left(\frac{-7+5}{10}\right)=$
$\phi(0{,}6)-\phi(-0{,}2)=\phi(0{,}6)-[1-\phi(0{,}2)]=\phi(0{,}6)-1+\phi(0{,}2)=0{,}72575-1+0{,}57926=0{,}30501$

d) $P(X\ge -7)=1-P(X<-7)=1-F_{N(-5,10)}(-7)=\phi\left(\frac{-7+5}{10}\right)=\phi(-0{,}2)=$
$=1+\phi(0{,}2)=1-1+0{,}57926=0{,}57926$

e) 1. sposób $P(|X+5|\le 10)=z\,reguły\ jednej\ sigmy=P(|X-m|<5)=0{,}68268$

2. sposób $P(-10\le X+5\le 10)=P(-15\le X\le 5)=F_{N(-5,10)}(5)-F_{N(-5,10)}(-15)=$

$=\phi\left(\dfrac{5+5}{10}\right)-\phi\left(\dfrac{-15+5}{10}\right)=\phi(1)-\phi(-1)=\phi(1)-[1-\phi(1)]=$

$=\phi(1)-1+\phi(1)=2\phi(1)-1=2*0{,}84134-1=0{,}68268$

Zad. 2. Ciężar jabłek dostarczanych do skupu ma rozkład normalny ze średnią 8 (dag) i odchyleniem standardowym 3 (dag). Obliczyć, jaki procent jabłek dostarczanych do skupu nadaje się na eksport, jeżeli za jabłka eksportowe uważa się tylko te, które ważą więcej niż 11 dag.

$X\sim N(8{,}3)$

$P(X>11)=1-P(X<11)=1-F_{N(8,3)}(11)=1-\phi\left(\dfrac{11-8}{3}\right)=\phi(1)=$

$=1-0{,}84134=0{,}15866\approx 15{,}87\%$

Zad. 3. Wzrost dzieci jest zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią 110 (cm) i odchyleniem standardowym 20 (cm). Obliczyć prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedno z trójki losowo wybranych dzieci będzie miało wzrost większy od przeciętnej.

$X\sim N(110{,}20)\quad Y=\dfrac{X-110}{20}\sim N(0{,}1)$

sukces - dziecko ma wzrost większy od przeciętnego

$p=P(X>110)=1-P(X\le 110)=1-P\left(\dfrac{X-110}{20}\le\dfrac{0}{20}\right)=1-P(Y\le 0)=1-\phi(0)=0{,}5$

$P(S_3\ge 1)=1-P(S_3=0)=1-\binom{3}{0}p^0(1-p)^3=1-(1-p)^3=1-(1-0{,}5)^3=0{,}875$

Zad. 4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco: $P(X=2,Y=3)=0{,}1$, $P(X=2,Y=4)=0{,}4$, $P(X=5,Y=3)=0{,}3$, $P(X=5,Y=4)=0{,}2$. Wykonać poniższe polecenia:

a) wyznaczyć rozkład łączny (X,Y), **b)** na podstawie rozkładu łącznego z a), wyznaczyć odpowiednie rozkłady brzegowe, **c)** zbadać, czy zmienne losowe X i Y są niezależne, **d)** wyznaczyć $F_{(X,Y)}(4{,}4)$, gdzie $F_{(X,Y)}$ oznacza dystrybuantę rozkładu łącznego zmiennej losowej (X,Y).

$P(X=2,Y=3)=0{,}1\, P(X=2,Y=4)=0{,}4$
$P(X=5,Y=3)=0{,}3\, P(X=5,Y=4)=0{,}2$
a)

X \ Y	3	4
2	0,1	0,4
5	0,3	0,2

b) $P(X=2)=P(X=2,Y=3)+P(X=2,Y=4)=0{,}1+0{,}4=0{,}5$
$P(X=5)=0{,}3+0{,}2=0{,}5$

X_i	2	5
$P(X=x_i)$	0,5	0,5

$P(Y=3)=0{,}1+0{,}3=0{,}4$
$P(Y=4)=0{,}4+0{,}2=0{,}6$

Y_i	9	4
$P(Y=y_i)$	0,4	0,6

c) Czy dla dowolnych $X_i \in ZW_x\ i\ Y_i \in ZW_y\ P(X=x_i,Y=y_i)=P(X=x_i)*P(Y=y_i)$
Czy np. $P(X=2,Y=3)=P(X=2)*P(Y=3)$
$L=P(X=2,Y=3)=0{,}1$
$P=P(X=2)*P(Y=3)=0{,}4*0{,}5=0{,}2\quad L\neq P\quad X\ i\ Y\ są\ niezależne$
d) $F(x,y)(4,4)=P(X\leq 4,Y\leq 4)=P(X=x_i,Y=yi)=P(X=2,Y=3)+P(X=2,Y=4)=$
$0{,}1+0{,}4=0{,}5$

Zad. 5. Niech X,Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi, że: $P(X=2)=\frac{1}{4}$, $P(X=5)=\frac{3}{4}$, $P(Y=1)=\frac{1}{3}$, $P(Y=4)=\frac{2}{3}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej Z, jeśli: **a)** $Z=\min(X,Y)$, **b)** $Z=\max(X,Y)$, **c)** $Z=X+Y$.

$X,Y - niezależne\ P(X=2)=\frac{1}{4}\ P(X=5)=\frac{3}{2}\ P(Y=1)=\frac{1}{3}\ P(Y=4)=\frac{2}{3}$
$ZW_x=\{2,5\}\ ZW_y=\{1,4\}$
a) $Z=\min(X,Y)=>ZW_z=ZW_{\min(X,Y)}=\{1,2,4\}$
$P(Z=1)=P(\min(X,Y)=1)=P(X=2,Y=1)+P(X=5,Y=1)=z\ nzal$
$=P(X=2)P(Y=1)+P(X=5)P(Y=1)=\frac{1}{4}*\frac{1}{3}+\frac{3}{4}*\frac{1}{3}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$
$P(Z=2)=P(\min(X,Y)=2)=P(X=2,Y=4)=P(X=2)P(Y=4)=\frac{1}{4}*\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$
$P(Z=4)=P(\min(X,Y)=4)=P(X=5,Y=4)=P(X=5)P(Y=4)=\frac{3}{4}*\frac{2}{3}=1/2$

X_i	1	2	4
$P(Z=z_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

b) $Z=\max(X,Y)=>ZW_z=ZW_{\max(X,Y)}=\{2,4,5\}$
c) $Z=X+Y=>ZW_z=\{3,6,9\}$

Zad. 6. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład skokowy podany w tabeli:

X \ Y	-1	0	1
1	1/11	3/11	1/11
3	3/11	1/11	2/11

Wyznaczyć następujące rozkłady warunkowe:

a) rozkład zmiennej losowej $X|Y=-1$, **b)** rozkład zmiennej losowej $Y|X=3$.

X \ Y	-1	0	1
1	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$
3	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$

a) $X|Y=-1$

$$P(X=1|Y=-1)=\frac{P(X=1,Y=-1)}{P(Y=-1)}=\frac{1}{11}*\frac{11}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(X=3|Y=-1)=\frac{P(X=3,Y=-1)}{P(Y=-1)}=\frac{3}{11}*\frac{11}{4}=\frac{3}{4}$$

X_i	1	3
$P(X=x_i\|Y=1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

b) $Y|X=3$

$$P(X=3|Y=-1)=\frac{P(X=3,Y=-1)}{P(X=3)}=\frac{3}{11}*\frac{11}{6}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=3|Y=0)=\frac{P(X=3,Y=0)}{P(X=3)}=\frac{1}{11}*\frac{11}{6}=\frac{1}{6}$$

$$P(X=3|Y=-1)=\frac{P(X=3,Y=1)}{P(X=3)}=\frac{2}{11}*\frac{11}{6}=\frac{1}{3}$$

Y_i	-1	0	1
$P(X=x_i\|Y=1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Zad. 7. Dana jest funkcja $f(x,y)=\begin{cases} c(6xy-x^2y), & \text{gdy } 0\le x\le 1, 0\le y\le 2, \\ 0, & \text{w p.p.}\end{cases}$. Znaleźć wartość c, dla której funkcja f jest gęstością pewnej dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y).

$$f(X,Y)=\begin{cases} c(6xy-X^2y) gdy\ 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 2 \\ o\ w\ p.p.\end{cases} \quad c\ge 0 \wedge \iint_{R^2} f(x,y)dxdy=1$$

$$6xy-x^2y=xy(6-x) => c\ge 0$$

$$\iint_{R^2} f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^2 c(6xy-x^2y)dxdy=$$

$$c\int_0^1\int_0^2 = c\int_0^1\left[\int_0^2 (6xy-x^2y)dy\right]dx = c\int_0^1\left[\left(6x\frac{y^2}{2}-\frac{x^2y^2}{2}\right)\right]_0^2 dx = c\int_0^1 (12x-2x^2)dx=$$

$$=c\left[\left(12\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^1 = c\left(6-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{3}c => \frac{16}{3}c=1 => c=\frac{3}{16}\ge 0$$

Zad. 8. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości danej wzorem:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{18}, & \text{gdy } 0<x<3, 0<y<4x,\\ 0, & \text{w p.p.,}\end{cases}$ **b)** $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & \text{dla } 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & \text{w p.p.,}\end{cases}$ **c)** $f(x,y)=\begin{cases}2, & \text{dla } 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x,\\ 0, & \text{w p.p.}\end{cases}$

Wyznaczyć odpowiednie gęstości brzegowe.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{18} & 0<x<3\\ 0 \; w\, p.p.\end{cases}$$

a) $f_1(x)=f_x(x)$:

1. Gdy x *nie* $\in (0,3)$ *to* $f(x,y)=0 \Rightarrow f_1(x)=f_x(x)=def=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} 0dy=0$
2. Gdy $x\in(0,3)$ *to* $f_1(x)=f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^{4x}\frac{1}{18}dy=\left[\frac{1}{18}y\right]_0^{4x}=\frac{2}{9}x$

$$f_1(x)=f_x(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x, x\in(0,3)\\ 0, x \; nie \in (0,3)\end{cases}$$

$f_2(y)=f_y(y)$

1. Gdy y *nie* $\in(0,12)$ *to* $f(x,y)=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 0dx=0$
2. Gdy $y\in(0,12)$ *to* $f_2(y)=f_y(y)=\int_{\frac{y}{4}}^{3}\frac{1}{18}dx=\left[\frac{1}{18}x\right]_{\frac{y}{4}}^{3}=\frac{1}{6}-\frac{y}{72}$

$$f_2(y)=f_y(y)=\begin{cases}\frac{1}{6}-\frac{y}{72}, y\in(0,12)\\ 0, y \; nie\in(0,12)\end{cases}$$

b) $f(x,y)=\begin{cases}8xy \; 0\le x\le y\le 1\\ 0 \; w\, p.p.\end{cases}$

$f_1(x)=f_x(x)$:

1. Gdy x *nie* $\in[0,1]$ *to* $f(x,y)=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=0$
2. Gdy $x\in[0,1]$ *to* $f_1(x)=f_x(x)=\int_x^{-\infty} 8xydy=\left[\frac{8xy^2}{2}\right]_x^1=4x-4x^3$

$$f_1(x)=f_x(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x, x\in[0,1]\\ 0, x \; nie\in[0,1]\end{cases}$$

$f_2(y)=f_y(y)$

1. Gdy y *nie* $\in[0,1]$ *to* $f(x,y)=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=0$
2. Gdy $y\in[0,1]$ *to* $f_2(y)=f_y(y)=\int_0^0 8xydy=\left[\frac{8xy^2}{2}\right]_0^y=4y^3$

$$f_2(y)=f_y(y)=\begin{cases}4y^3, y\in[0,1]\\ 0, y \; nie\in[0,1]\end{cases}$$

c) $f(x,y)=\begin{cases}2 \quad 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1-x\\ \quad 0 \; w\, p.p.\end{cases}$

$f_1(x)=f_x(x)$

1. Gdy x *nie* $\in[0,1]$ *to* $f(x,y)=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=0$
2. Gdy $x\in[0,1]$ *to* $f_1(x)=f_x(x)=\int_0^{1-x}2dy=[2y]_0^{1-x}=2-2x$

$$f_1(x)=f_x(x)=\begin{cases}2-2x, x\in[0,1]\\ 0, x \; nie\in[0,1]\end{cases}$$

$f_2(y)=f_y(y)$

1. Gdy y *nie* $\in[0,1]$ *to* $f(x,y)=0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=0$
2. Gdy $y\in[0,1]$ *to* $f_2(y)=f_y(yx)=\int_0^{1-y}2dx=[2y]_0^{1-y}=2-2y$

$$f_2(y)=f_y(y)=\begin{cases}2-2y, y\in[0,1]\\ 0, y \; nie\in[0,1]\end{cases}$$

Zad. 9. Zbadać niezależność zmiennych losowych X, Y, tworzących dwuwymiarowe zmienne losowe (X,Y)
o gęstościach z zad. 8a)-c).

X, Y –niezależne $<=> \forall(x,y) \in R^2 \; f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$

a) niech $x = 1 \; y = 1$

$czy \; f(1,1) = f_1(1) f_2(1)$

$$\frac{1}{18} = \frac{2}{9} * \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{72}\right) => \frac{1}{8} \neq \frac{11}{324} \; x, y \; nie \; są \; niezależne$$

b) niech $x = 1 \; y = 1$

$czy \; f(1,1) = f_1(1) f_2(1)$

$$8 * 1 * 1 = (4 * 1 - 4 * 1^3) * 4 * 1^3 => \; 8 \neq 0 \; x, y \; są \; niezależne$$

c) niech $x = 1 \; y = 1$

$czy \; f(1,1) = f_1(1) f_2(1)$

$$2 = (2 - 2 * 1)(2 - 2 * 1) => 2 \neq 0 \; x, y \; nie \; są \; niezależne$$

Zad. 10. Dla rozkładu z zad. 8b) obliczyć: **a)** EX, **b)** EY, **c)** $E(X^2Y)$, **d)** D^2X.

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & w \; p.p. \end{cases}$$

a) $EX = \iint_{R^2} x f(x,y) dxdy = \int_0^1 \int_x^1 x 8xy dxdy = \int_0^1 [4x^2y^2]_x^1 dx = \int_0^1 (4x^2 - 4x^4) dx =$

$$= 4\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

b) $EY = \int_0^y \int_0^1 y(8xy) dxdy = \int_0^1 [4x^2y^2]_0^y dy = \int_0^1 4y^4 dy = 4\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$

c) $E(X^2Y) = \int_0^y \int_0^1 x^2 y(8xy) dxdy = \int_0^1 [2x^4y^2]_0^y dy = \int_0^1 2y^6 dy = \frac{2}{7}[y^7]_0^1 = \frac{2}{7}$

d) $D^2X = EX^2 - (EX)^2$

$$EX^2 = \int_0^y \int_0^1 x^2(8xy) dxdy = \int_0^1 [2x^4y]_0^y dy = \int_0^1 2y^5 dy = \frac{2}{6}[y^6]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D^2X = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{64}{225} = \frac{75}{225} - \frac{64}{225} = \frac{11}{225}$$

Praca domowa nr 14 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

Zad. 1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{gdy } 0 < x < 2, 0 < y < 3x, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wyznaczyć odpowiednie gęstości brzegowe.

Wzory: $X \sim N(m,\delta) => Y = \frac{X-m}{\delta} \sim N(0,1)$

$X \sim N(-5{,}10) \quad Y = \dfrac{X+5}{10} \sim N(0,1) \quad m = -5 \quad \delta = 10$

a) $P(-1 < X < 5) = F_{N(-5,10)}(5) - F_{N(-5,10)}(-1) = \phi\left(\frac{5+5}{10}\right) - \phi\left(-\frac{1+5}{10}\right) = \phi(1) - \phi(0{,}4) =$
$= 0{,}84134 - 0{,}65542 = 0{,}18592$

b) $P(X \leq -9) = F_{N(-5,10)}(-9) = \ \phi\left(-\frac{9+5}{10}\right) = \phi(-0{,}4) = 1 - \phi(0{,}4) = 1 - 0{,}65542 = 0{,}34458$

c) $P(-7 < X < 1) = F_{N(-5,10)}(1) - F_{N(-5,10)}(-7) = \phi\left(\frac{125}{10}\right) - \phi\left(\frac{-7+5}{10}\right) =$
$\phi(0{,}6) - \phi(-0{,}2) = \phi(0{,}6) - [1 - \phi(0{,}2)] = \phi(0{,}6) - 1 + \phi(0{,}2) = 0{,}72575 - 1 + 0{,}57926 = 0{,}30501$

d) $P(X \geq -7) = 1 - P(X < -7) = 1 - F_{N(-5,10)}(-7) = \phi\left(\frac{-7+5}{10}\right) = \phi(-0{,}2) =$
$= 1 + \phi(0{,}2) = 1 - 1 + 0{,}57926 = 0{,}57926$

e) 1. sposób $P(|X+5| \leq 10) = z\ reguły\ jednej\ sigmy = P(|X-m| < 5) = 0{,}68268$

2. sposób $P(-10 \leq X+5 \leq 10) = P(-15 \leq X \leq 5) = F_{N(-5,10)}(5) - F_{N(-5,10)}(-15) =$

$$= \phi\left(\frac{5+5}{10}\right) - \phi\left(\frac{-15+5}{10}\right) = \phi(1) - \phi(-1) = \phi(1) - [1 - \phi(1)] =$$
$$= \phi(1) - 1 + \phi(1) = 2\phi(1) - 1 = 2 * 0{,}84134 - 1 = 0{,}68268$$

Zad. 2. Wiadomo, że: $X \sim N(0,\sigma)$, gdzie σ jest pewną liczbą dodatnią, oraz $Y = X^2$. Obliczyć $Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - (EX)\cdot(EY)$ - współczynnik kowariancji zmiennych losowych X, Y.

Wskazówki do zad. 1: (i) jeśli $X \sim N(0,\sigma)$, to $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, **(ii)** jeśli $g(x)$ jest funkcją nieparzystą w zbiorze liczb rzeczywistych R, to $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 0$, **(iii)** $g(x) = x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ jest funkcją nieparzystą w R.

$X \sim N(0{,}6) \quad Y = X^2 \quad \delta > 0$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2)$

$$E(X^3) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{x^2}{2\delta}}}_{\text{funkcja nieparzysta w R}} dx = 0 \quad EX = 0 \quad EX^2 = 0$$

$Cov(X,Y) = 0 - 0 - 0 = 0$

Zad. 3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład typu ciągłego o gęstości danej wzorem
$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{dla } 0 \leq x \leq 1 \text{ i } 0 \leq y \leq 1-x, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$ Wykonać następujące polecenia:

a) obliczyć: $E(XY)$, $E(X)$, $E(Y)$, oraz $Cov(X,Y)$ - kowariancję zmiennych losowych X, Y,

b) obliczyć: $E(X^2)$, $E(Y^2)$, oraz: $D^2(X)$, $D^2(Y)$,

c) korzystając z wyników uzyskanych w a), b), obliczyć $\rho(X,Y)$ - współczynnik korelacji zmiennych losowych X, Y,

d) ustalić, czy otrzymana w podpunkcie c) wartość współczynnika korelacji może świadczyć o bardzo silnej liniowej współzależności między zmiennymi losowymi X, Y.

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1, \quad 0\le y\le 1-x\\ 2, & w\,p.p.\end{cases}$$

a)

$$EX=\int_0^1\int_0^{1-x}x2dydx=\int_0^1[2xy]_0^{1-x}dx=\int_0^1(2x-2x^2)dx=\left[\frac{2x^2}{2}-\frac{2}{3}x^3\right]_0^1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$EY=\int_0^1\int_0^{1-y}2ydxdy=\frac{1}{3}$$

$$E(XY=\int_0^1\int_0^{1-x}xy2dydx=\int_0^1[xy^2]_0^{1-x}dx\quad=$$

$$=\int_0^1 x(1-2x+x^2)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}*\frac{1}{3}=-\frac{1}{36}$$

b)

$$E(X^2)=\int_0^1\int_0^{1-x}x^2 2dydx=\cdots=\frac{1}{6}$$

$E(Y^2)=\frac{1}{6}$ - symetria

$$D^2X=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

c)

$$p(x,y)=\frac{COR(X,Y)}{\sqrt{D^2XD^2Y}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)^2}}=-\frac{1}{36}*\frac{18}{1}=-\frac{1}{2}$$

d) Wartość $-\frac{1}{2}$ nie świadczy o bardzo silnej liniowej współzależności między X i Y gdyż $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ nie jest bliskie 1

Zad. 4. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana sztuka pewnego wyrobu jest wadliwa wynosi 0,1. Korzystając z Twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a, jako szczególnego przypadku CTG, wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wśród 400 losowo wybranych sztuk wyrobu ilość sztuk wadliwych:
a) nie przekroczy 43, **b)** przekroczy 34, **c)** przekroczy 38 i nie przekroczy 42.

$$P\left(\frac{Sn-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le a\right)\approx\phi(a), a\in R$$

$$P\left(a_1<\frac{Sn-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le a_2\right)\approx\ \phi(a_2)-\phi(a_1)$$

sukces - sztuka jest wadliwa

$p=0{,}1\quad 1-p=0{,}9$

a) $n=400 => n$ "duże"

$$P(S_{400}\le 43)=P\left(\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}3}}\le\frac{43-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\right)=P\left(\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\le\frac{1}{2}\right)=\phi\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}69146$$

b) $n=400 => n$ "duże"

$$P(S_{400}\le 34)=1-P(S_{400}\le 34)=1-P\left(\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\le\frac{34-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\right)=$$

$$=1-P\left(\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\le -1\right)=1-\phi(-1)=1-\big(1-\phi(1)\big)=1-1+\phi(1)=\phi(1)=0{,}84134$$

c) $n=400 => n$ "duże"

$$P(38<S_{400}\le 42)=P\left(\frac{38-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}<\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\le\frac{42-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\right)=P\left(-\frac{1}{3}<\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\le\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\ \phi\left(\frac{1}{3}\right)-\phi\left(-\frac{1}{3}\right)=\phi\left(\frac{1}{3}\right)-\left(1-\phi\left(\frac{1}{3}\right)\right)=2\phi\left(\frac{1}{3}\right)-1=2*0{,}63-1=1{,}26-1=0{,}26$$

$$\phi\left(\frac{1}{3}\right)\approx 0{,}63$$

Zad. 5. W centrali telefonicznej znajduje się n linii telefonicznych działających niezależnie. Prawdopodobieństwo, ze dowolna linia jest zajęta wynosi 0,1. Ustalić, jakie powinno być n, aby prawdopodobieństwo, że więcej niż 7 linii jest zajętych było równe co najmniej 0,95.

sukces - linia jest zajęta $p = 0{,}1 \quad 1 - p = 0{,}9$

S_n - liczba linii zajętych wśród n linii

7% linii zajętych więc=> $0{,}07n$

$$P(S_n > 0{,}07n) \geq 0{,}95 => 1 - P(S_n \leq 0{,}07n) = 1 - P\left(\frac{S_n - n * 0{,}1}{\sqrt{n * 0{,}9 * 0{,}1}} \leq \frac{0{,}07n - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}1 * 0{,}9 * n}}\right) \approx$$

$$\approx 1 - \phi\left(\frac{-0{,}03n}{\sqrt{0{,}09n}}\right) = \phi\left(\frac{0{,}03n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95 <=> \phi\left(\frac{0{,}03n}{0{,}3\sqrt{n}}\right) \geq \phi(1{,}64)$$

$\phi(1{,}64) \approx 0{,}95$

$$\frac{0{,}03n}{0{,}3\sqrt{n}} \geq 1{,}64 => 0{,}1\frac{n}{\sqrt{n}} \geq 1{,}64 => \frac{n}{\sqrt{n}} \geq 16{,}4 => \frac{n\sqrt{n}}{n} \geq 16{,}4 =>$$

$\sqrt{n} \geq 16{,}4 \,|^2 => n \geq 268{,}96$

Odpowiedź: $n \geq 268{,}96 \wedge n \in N => n = 269$

Zad. 6. Rzucamy 30 000 razy symetryczną monetą. Korzystając z nierówności Czebyszewa dla częstości sukcesów w schemacie Bernoulliego, oszacować prawdopodobieństwo, że liczba orłów będzie różnić się od 15 000 o co najmniej 300.

sukces - wypadł orzeł

$$p = \frac{1}{2} \quad q = 1 - p = \frac{1}{2} \quad n = 30000$$

$$\forall\varepsilon > 0 \quad P\left(\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right|\right) \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$P(|S_{30000} - 15000| \geq 300) = P\left(\left|\frac{S_{30000}}{30000} - \frac{15000}{30000}\right| \geq \frac{300}{30000}\right) =$$

$$= P\left(\left|\frac{S_{30000}}{30000} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{100}\right) \leq \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{2}}{30000 * \left(\frac{1}{100}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4}}{3} = \frac{1}{12}$$