1 Wśród 200 uczniów 1% wybiera szkołę X. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej 3 uczniów ją wybiorą.

Rozkład Poissona:

$n = 200$

$$P(S=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}$$

$p = 0{,}01$

$\lambda = np = 2$

S - losowo wybrana osoba wybiera szkołę X

$$P(S \geq 3) = 1 - P(S<3) = 1 - P(S=0) - P(S=1) - P(S=2) =$$

$$1 - e^{2} \cdot \frac{2^0}{0!} - e^{2} \frac{2^1}{1!} - e^{2} \cdot \frac{2^2}{2!} = \underline{\underline{1 - 5 \cdot e^{2}}}$$

2. Z 10 000 dorosłego ... , gdzie frekwencja wynosi 70% pewna partia ma 20% poparcie. Oblicz prawdopodobieństwo, że partia uzyska więcej niż 1000 osób

X_i - oznacza, że i-ty wyborca odda głos na partię

X_i	0	1
p	0,8	0,2

$EX_i = 0{,}2$

$D^2X_i = p(1-p) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 = \cancel{0{,}06}\ 0{,}16$

$S_n = S_{7000} = X_1 + X_2 + \dots + X_{7000}$ - oznacza liczbę głosów oddanych na tę partię wśród 7000 osób, które przyjdą na wybory

z CTG = $S_{7000} \sim N(n\,EX_i;\ \sqrt{n}\ DX_i)$

$S_{7000} \sim N(7000 \cdot 0{,}2;\ \sqrt{7000} \cdot 0{,}4)$

$S_{7000} \sim N(1400;\ 33{,}5)$

$$P(S_{7000} \geq 1000) = P\left(\frac{S_{7000} - 1400}{33{,}5} \geq \frac{1000 - 1400}{33{,}5}\right) = P(Z \geq -11{,}9) =$$

$$= 1 - (Z < -11{,}9) = 1 - \Phi(-11{,}9) \approx 0$$

Zadanie 24

Obliczyć w przybliżeniu, że partia 500 elementów z których każdy ma czas pracy T_i $(i = 1, 2, \ldots, 500)$ wystarczy na zapewnienie pracy urządzenia przez [brakujące słowo] 1000 godzin.

$E T_i = 2$ $\quad D^2 T_i = 1$ $\quad D T_i = 1$ (chyba 1000)

$n = 500$ $\quad T_i$ - zmienna losowa oznaczająca czas pracy i-tego urządzenia

$S_{500} \sim N(n\,EX, \sqrt{n}\,DX)$ $\quad S_{500} = T_1 + T_2 + \ldots + T_{500}$

$N(1000; 22{,}4)$

$P(S_{500} = 1000) = P(1000 - \frac{1}{2} < S_{500} < 1000 + \frac{1}{2})$

$= P\left(\frac{1000 - \frac{1}{2} - 1000}{22{,}4} < \frac{X - 1000}{22{,}4} < \frac{1000 - \frac{1}{2} - 1000}{22{,}4}\right) =$

$= P(-0{,}02 < Z < 0{,}02) =$

$= \Phi(0{,}02) - \Phi(-0{,}02) = \Phi(0{,}02) - 1 + \Phi(0{,}02)$

Zadanie 25

Funkcja gęstości dana jest wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{dla } (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Obliczyć $E(X + Y \mid Y \geq 0{,}5)$

$$E(X \mid A) = \frac{1}{P(A)} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$$

$E(X \mid Y \geq 0{,}5) + E(Y \mid Y \geq 0{,}5)$

Rozkłady brzegowe

$f_1(x) = \int_0^1 (x + y)\,dy = x + \frac{1}{2}$

$f_1(y) = \int_0^1 (x + y)\,dx = y + \frac{1}{2}$

$$E(X \mid Y \geq 0{,}5) = \frac{1}{\int_{0{,}5}^{1} y + \frac{1}{2}\,dy} \cdot \int_{0{,}5}^{1}\int_{0}^{1} x(x+y)\,dx\,dy$$

$$E(Y \mid Y \geq 0{,}5) = \frac{1}{\int_{0{,}5}^{1} y + \frac{1}{2}\,dy} \cdot \int_{0{,}5}^{1}\int_{0}^{1} y(x+y)\,dx\,dy$$

Zadanie 23

Załóżmy, że X_0 oraz $W_1, \dots, W_{10}$ są zmiennymi losowymi niezależnymi, przy czym $W_i \sim N(5, 1^2)$. Niech $X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n + W_{n+1}$ dla $n = 0, 1, \dots, 9$. Wiadomo, że zmienne X_0 i X_{10} mają ten sam rozkład normalny. Wyznacz parametry tego rozkładu.

$$EX_0 = EX_{10} \qquad D^2 X_0 = D^2 X_{10} \qquad X_0, \dots, X_{10} \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Rozpisujemy pokolei

$$X_{10} = \frac{1}{2} X_9 + W_{10}$$

$$X_9 = \frac{1}{2} X_8 + W_9 \; / \cdot \tfrac{1}{2} \iff \frac{1}{2} X_9 = \frac{1}{2^2} X_8 + \frac{1}{2} W_9$$

$$\frac{1}{2^2} X_8 = \frac{1}{2^3} X_7 + \frac{1}{2^2} W_8$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^9} X_1 = \frac{1}{2^{10}} \cdot X_0 + \frac{1}{2^9} W_1$$

$$X_{10} = \frac{1}{2^{10}} X_0 + \frac{1}{2^9} W_1 + \frac{1}{2^8} W_2 + \dots + \frac{1}{2} W_{10}$$

$$W_1, \dots, W_{10} \sim N(5, 1^2) \qquad X_0, \dots, X_{10} \sim (\mu, \sigma^2)$$

$$\mu = \frac{1}{2^{10}} \mu + \frac{1}{2^9} \cdot 5 + \dots + \frac{1}{2^0} \cdot 5 \implies \mu$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{1}{2^8}\right)^2 1 + \dots + \left(\frac{1}{2^0}\right)^2 \cdot 1 \implies \sigma^2 = \sigma$$

Zadanie 20

Wśród ziaren pszenicy znajduje się 0,002% (~~0,0002~~) ziaren chwastów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród losowo wybranych 1000 ziaren znajduje się conajmniej 3 ziarna chwastów.

$n = 10^3$

$p = 0{,}002 = 10^{-3} 2 \quad \lambda = np = 2 \qquad Po(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$ — X - zmienna losowa mówiąca o ilości chwastów ziaren w pszenicy.

Zadanie 21.

W szpitalu na oddziale wewnętrznym przebywa średnio 2000 chorych było 800 cierpiących na chorobę K_1, 600 na K_2, 400 na K_3 i 200 na K_4. Prawdopodobieństwa całkowitego wyleczenia z choroby to kolejno 0,9, 0,8, 0,7, 0,5

a) Oblicz P, że losowo wybrany pacjent wyjdzie zdrowy ze szpitala, b) Wypisany pacjent jest cierpiał na K_2

K - pr, że pacjent jest zdrowy i wychodzi

K_i - pr, że pacjent cierpiał na chorobę $i = 1,2,3,4$

$K_i \neq K_j \wedge j \neq i \Rightarrow$ pr. całkowite

i	$K \mid K_i$	K_i
1	0,9	0,4
2	0,8	0,3
3	0,7	0,2
4	0,5	0,1

a) $P(K) = \sum_{i=1}^{4} P(K_i)\, P(K \mid K_i)$

b) $P(K_2 \mid K) = \frac{P(K_2)\, P(K \mid K_2)}{P(K)}$

Zadanie 22

Zmienne X_1, X_2, X_3, X_4 to niezależne zmienne losowe o rozkładzie $N(0, \sigma^2)$. Oblicz $P(X_1 - 5X_2 > 5X_3 - X_4)$.

$P(\underbrace{X_1 - 5X_2 - 5X_3 + X_4}_{Y} > 0) \qquad \frac{Y - EY}{\sqrt{D^2Y}} \sim N(0,1)$

$EY = ? \qquad D^2Y = ?$

$EY = E(X_1 - 5X_2 - 5X_3 + X_4) = EX_1 - 5EX_2 - 5EX_3 + EX_4 = 0$

$D^2Y = D^2(X_1 - 5X_2 - 5X_3 + X_4) = D^2X_1 + 5^2 D^2X_2 + 5^2 D^2X_3 + D^2X_4 =$

$= 52\sigma^2$

$DY = 2\sqrt{13}\sigma \rightarrow Y \sim (0, 2\sqrt{13}\sigma)$

$(Y > 0) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - P\left(\frac{Y - 0}{2\sqrt{13}\sigma} < \frac{0 - 0}{2\sqrt{13}\sigma}\right) = 1 - P(Z < 0)$

$= 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$

Zadanie 17

Przy składaniu książki drukarka składa błędne litery z prawdopodobieństwem $p = 10^{-3} = 0{,}001$. Korektor znajduje każdy błąd z prawdopodobieństwem 0,5. Znaleźć prawdopodobieństwo, że w książce o 100 000 liter błąd maksymalnie 2 błędy

$p_1 = 10^{-3}$ $\quad$ p_1, p_2 – niezależne
$p_2 = 0{,}5$ $\quad$ $p = p_1 \cdot p_2 = 0{,}0005$

$\lambda = np = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{5} = 50$

Błąd przybliżenia Poissona $\frac{\lambda^2}{n}$ $\quad$ $P_0 = \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}$

$$P(X \leq 2) = P(k=0) + P(k=1) + P(k=2)$$

Zadanie 18

Licznik źródła promieniowania, źródło to umieszczono wpodolem siebie tak, że prawdopodobieństwo zarejestrowania przez licznik napromieniowanej cząsteczki wynosi 0,0001. Załóżmy, że w czasie obsługi preparat radioaktywny wyprodukuje 30000 cząstek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że licznik zarejestruje conajmniej 3 cząsteczki

$\lambda = np = 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^{4} = 3$

$n = 3 \cdot 10^{4}$
$p = 10^{4}$

$P(K \leq 3)$ $\quad$ $P(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}$

Zadanie 19

Dwie siostry A i B myją szklanki. A jako starsza zmywa 3 razy szybciej niż B. Wiadomo, że prawdopodobieństwo zbicia szklanki w czasie mycia przez A wynosi 10^{-2} a przez B $4 \cdot 10^{-2}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że podczas zmywania zostanie stłuczona szklanka. Szklanka została stłuczona. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to A.

A	3/4	0,01
B	1/4	0,04

D – prawdopodobieństwo, że szklanka została zbita
D_i – prawdopodobieństwo, że szklanka została wzięta przez siostrę i $i = 1, 2$

$D_i \neq D_j \cap i \neq j \Rightarrow$ pr. całkowite

$P(D_1) = 3/4 \quad P(D \mid D_1) = 0{,}01$
$P(D_2) = 1/4 \quad P(D \mid D_2) = 0{,}04$

a) $P(D) = 0{,}01 \cdot 3/4 + 0{,}04 \cdot 1/4 = \frac{7}{400}$

$P(D) = P(D_1)P(D \mid D_1) + P(D_2)P(D \mid D_2)$

b) $P(D_1 \mid D) = \frac{P(D_1) \cdot P(D \mid D_1)}{P(D)} = \frac{\frac{3}{400}}{\frac{7}{400}} = \frac{3}{7}$

Zadanie 15

Wielu botaników dokonywało doświadczeń nad krzyżowaniem żółtego groszku. Wg hipotezy Mendla prawdopodobieństwo pojawienia się zielonego groszku przy takich krzyżówkach wynosi 1/4. Zakładając słuszność hipotezy Mendla obliczyć P, że dla 3400 doświadczeń conaj mniej 800 to zielony groszek

$p = 1/4$
$n = 3400$
$S_n \geq 800$

X_i - zmienna losowa opisująca pojawienie się zielonego groszku w 3400 doświadczeń $i = 0, 1, 2, \ldots, 3400$

Przybliżenie rozkładu normalnego $X_{\mu,\sigma} \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\mu = np = 850$

$\sigma^2 = np(1-p) = 637{,}5$

Zadanie 16

Niech ξ_1, ξ_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona odpowiednio $Po(\lambda_1)$, $Po(\lambda_2)$. Wyznaczyć rozkład $\eta = \xi_1 + \xi_2$

X, Y niezależne $\rightarrow$ $P(X \cap Y) = P(X) P(Y)$ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Zadanie 13

W pewnym dalekim kraju jedynym pożądanym potomstwem są dziewczynki. W związku z tym, aby ograniczyć liczbę chłopców matki rodzą dzieci do pierwszej dziewczynki.

Jakie są proporcje płci w tym państwie?

$X \sim$ ilość chłopców do urodzenia pierwszej dziewczynki

$X \sim G(\frac{1}{2})$, bo $p = 1/2$ $\boxed{\text{stąd to!}}$

$$P_p(X) = p(1-p)^k = 1/2(1-1/2)^{x-1} = (1/2)^x$$

Aby ustalić to liczymy liczbę oczekiwaną chłopców i dziewczynek

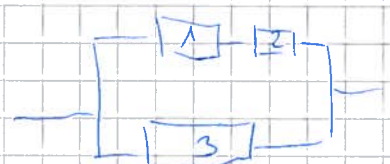
Z zadania wiemy, że liczba ~~chłopców~~ oczekiwana dziewczynek wynosi 1

$$EX = \frac{1-p}{p} = 1/2 / 1/2 = \underline{1}$$

Odp. Chłopców i dziewczynek jest tyle samo

Zadanie 14

Urządzenie składa się z trzech identycznych niezależnie pracujących elementów (działek). Czas życia każdego z elementów jest ~~określony~~ o zmienną losową o rozkładzie o dystrybuancie F'. Podać rozkład czasu życia całego układu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cały układ będzie pracował dłużej niż t godzin?



X_i - zmienna losowa opisująca czas życia i-tego elementu

X_1, X_2, X_3 - niezależne $F' = F_1' = F_2' = F_3'$ - rozkład elementów

T - czas życia układu

(1, 2) szeregowo (3) równolegle, więc aby układ działał T to $T = \max(\min(X_1, X_2); \ldots)$ $T \geq 0, t \geq 0$

$F(t)$ - dystrybuanta w t $F_T(t) = P(T \leq t) =$

$$= P(\max(\min(X_1, X_2), X_3) \leq t \overset{X_1 X_2 X_3 \text{ niezależne}}{=} P(\min(X_1, X_2) \leq t) \cdot \underbrace{P(X_3 \leq t)}_{F_3'} =$$

$$= (1 - P(\min(X_1, X_2) > t)) \cdot F_3' = [1 - (P(x_1 > t) \cdot P(x_2 > t))] \cdot F_3' =$$

$$= [1 - (1 - P(x_1 \leq t)) \cdot (1 - P(x_2 \leq t))] F_3' = \underbrace{[1 - (1 - F_1')(1 - F_2')] \cdot F_3'}_{\text{rozkład życia}}$$

praca układu dłużej niż t

$$P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = \underbrace{1 - (F' - F'(1 - F')^2}_{\text{prawdopodobieństwo}}$$

Zadanie 11

Uczestnik odpowiada na pytania z prawdopodobieństwem p. Odpada po tym jak nie zna odpowiedzi. Podaj rozkład zmiennej ξ wówczas oraz wartość oczekiwaną

Co to za rozkład ?

$\xi \sim G(p)$ ξ - ilość pytań do uzyskania błędnej odpowiedzi.

k - sukces, zła odpowiedź $p = 1 - \underline{p}$

$$P_{k,p} \{ \xi = k \} = (1-p)(1-(1-p))^{k} = 1-p(p)^k = p^k - p^{k+1}$$

$$E\xi = \frac{1-(1-p)}{1-p} = \frac{p}{1-p}$$

$$D^2\xi = \frac{1-(1-p)}{(1-p)^2}$$

<u>Rozkład geometryczny</u>

K - to nr K-tego sukcesu.

Zadanie 12

Przypuśćmy, że pewien owad składa „k" jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}$. Każde z jajeczek wylęga się z prawdopodobieństwem p. Zakładając wzajemną niezależność wylęgania się znaleźć prawdopodobieństwo, że ilość potomków wyniesie l.

$X = k$ - ilość złożonych jajeczek
$Y = L$ - ilość potomków

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P(Y=L \mid X=k) =$$

Zadanie 9

W pewnej rodzinie była dwójka dzieci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwójka to chłopiec jeśli wiadomo, że pierwsze to chłopiec.

A - I - dziecko to chłopiec
B - II - dziecko to chłopiec

$P(A \cap B \mid A \cup B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ z niezależności

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Zadanie 10

W pewnej miejscowości są bardzo wysokie opłaty za parkowanie wynoszące a zł. Z drugiej strony system kontroli jest bardzo słaby, wynosi 0,01 szansy na złapanie. W przypadku pierwszego złapania mandat wynosi $50a$ zł a w przypadku kolejnego $100a$ zł. Oblicz ~~prawdopodobieństwo~~ przeciętny koszt parkowania 100 razy bez biletu i porównaj z płaceniem

X - ilość zapłaconych mandatów na 100 parkowań
Y - wartość zapłaconych mandatów

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{w p.p} \\ 50a + 100a(x-1) & \text{dla } x \in [1, +\infty) \end{cases}$$

$EX = np \quad p = 0{,}01 \quad n = 100$, do tutaj to tak

$$EX = \sum_{x=0}^{100} x \binom{100}{x} 0{,}01^{x} (0{,}99)^{100-x}$$

$$EY = 50a + 100a(EX - 1)$$

? $\longrightarrow$ $EY = \sum_{x=1}^{100} (100ax - 9a) \binom{100}{x} (0{,}01)^{x} (0{,}99)^{100-x}$

spr

Zadanie 7

300 osób zdaje egzamin na wyższe uczelnie. 200 absolwentów Mat.-, 75 OG oraz 25 humanistycznych. Prawdopodobieństwo, że zdają wynoszą kolejno 0,9; 0,25; 0,1

a) prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba zda
b) spośród osób, które zdadzą egzamin losujemy jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to osoba z mat-inf

Z – zdarzenie, że osoba zda
Z_i – zdarzenie, że osoba pochodzi z danej klasy i, $i \in \{1,2,3\}$

Ω – liczba wszystkich absolwentów

$P(Z/Z_1) = 0,9 \quad P(Z/Z_2) = 0,25 \quad P(Z/Z_3) = 0,1$

$P(Z_1) = 2/3 \quad P(Z_2) = 1/4 \quad P(Z_3) = 1/12$

a) $Z_i \neq Z_j \wedge i \neq j$ stosujemy więc wzór na prawdopodobieństwo

$$P(Z) = P(Z/Z_1)P(Z_1) + P(Z/Z_2)P(Z_2) + P(Z/Z_3) = 0,67$$

b) $$P(Z_1/Z) = \underbrace{\frac{P(Z_1)P(Z/Z_1)}{P(Z)}}_{\text{schemat Bayesa}} = \frac{2/3 \cdot 0,9}{0,67} \approx 0,9$$

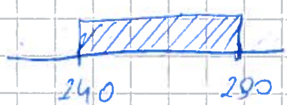
Zadanie 8

Biegły podczas sprawy na ustalenie ojcostwa oświadczył, że czas trwania ciąży (w dniach) ma w przybliżeniu rozkład normalny z parametrami $\mu = 270$ $\sigma = 10$. Pozwany może udowodnić, że był poza granicami kraju pomiędzy 290 a 240 dniem przed narodzinami dziecka. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pozwany w kraju w czasie poczęcia.

X – czas trwania ciąży w dniach $\quad X \sim N(270, 10)$
$X \sim N(\mu, \sigma)$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{240-270}{10} = -3$$

$$Z = \frac{290-270}{10} = 2$$



$$P(240 \leq X < 290) = \Phi(2) - \Phi(3)$$

Zadanie 8

Czas pracy auta (w godzinach) ma rozkład wykładniczy z $EX = 2$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że czas auta naprawy przekroczy 4 godziny? Po 4 godzinach auto nie zostało naprawione. Jakie jest prawdopodobieństwo, że łączny czas naprawy przekroczy 8 h?

$EX = 2 \Rightarrow \lambda = 2$ dla rozkładu wykładniczego

$E(\lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$ $\qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & \wedge\ x \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

Zadanie 4

Pewien układ składa się z trzech identycznych elementów których czas pracy jest dystrybuantą $F(x)$. Oblicz prawdopodobieństwo, że będzie działać po czasie t, jeżeli elementy są:

a) szeregowo
b) równolegle

(3) Z partii zawierającej 100 wyrobów (10 jest wybrakowanych) losujemy ze zwracaniem 5. Znaleźć zmienną losową, która jest liczbą wybrakowanych wyrobów w próbie.

Obliczyć wariancję i wartość oczekiwaną.

$EX = ?$ $\quad D^2X = ?$

10 złych wyrobów $\quad$ 5 - ilość w brane $\quad$ k - ilość sukcesów w próbie
90 dobrych

$p = \frac{10}{100} = 0{,}1$

1) losujemy 5 ze zwracaniem !

X_i - zmienna losowa oznaczająca liczbę wybrakowanych elementów w próbie.

$EX = np = 5 \cdot 0{,}1 = \underline{1/2}$
$D^2X = npq = 5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = \underline{\underline{9/20}}$

$$P_{n,p}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$P(X=0) = \binom{5}{0} 0{,}1^0 \, 0{,}9^5 = 0{,}59049$
$P(X=1) = \binom{5}{1} 0{,}1^1 \, 0{,}9^4 = 0{,}32805$
$P(X=2) = \binom{5}{2} 0{,}1^2 \, 0{,}9^3 = 0{,}0729$
$P(X=3) = \binom{5}{3} 0{,}1^3 \, 0{,}9^2 = 0{,}0081$
$P(X=4) = \binom{5}{4} 0{,}1^4 \, 0{,}9^1 = 0{,}00045$
$P(X=5) = \binom{5}{5} 0{,}1^5 \, 0{,}9^0 = 0{,}00001$

x_i	0	1	2	3	4	5
p						

} zmienna losowa / rozkład

29

W pętli jest 400 sprawnych autobusów. Prawdopodobieństwo, że wybrany autobus jest sprawny wynosi 0,85. Oblicz, że w losowo wybranej chwili co najmniej 200 autobusów jest sprawnych

X_i - i-ty autobus jest sprawny

x_i	0	1
p	0,15	0,85

$EX_i = 0,85$

$D^2 X_i = p(1-p) = 0,15 \cdot 0,85$

$S_n = S_{400} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{400}$ - oznacza liczbę sprawnych autobusów dostępnych 400 w zajezdni

$S_{400} \sim N(n\,EX_i ; \sqrt{n}\, DX_i)$

CGT

$P(X \geq 200)$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu n}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

$$P\left(\frac{S_n - 0,85 \cdot 400}{20 \cdot \sqrt{D^2X}} \geq \frac{200 - 0,85 \cdot 400}{20 \cdot \sqrt{D^2X}}\right)$$

$\frac{\lambda^2}{n}$ - błąd przybliżenia Po

$\frac{p^2 + q^2}{npq}$ - błąd przybliżenia N

27.

Podczas egzaminu Robert i Paweł siedzieli obok siebie. ~~Nagły~~ ostatnie mieli napisać dwie daty Robert ich pamiętał ale nie umiał przyporządkować. Zapytał Pawła wiedząc że w 3/4 przypadkach zna prawidłową odp. Paweł zawsze wie dobrze. Oblicza jego szanse z szansą 1/4. Co jest lepsze dla Roberta posłuchać Pawła czy strzelać.

$p = 1/2$ – Robert strzela
$q = 3/4$ – Paweł zna odp
$r = 1/4$ – Paweł kłamie

A – zmienna losowa dobrej odpowiedzi
B – zmienna losowa podpowiedzi prawdziwej

B \ A	1	0
1	$3/4 \cdot 3/4$	$1/4 \cdot 3/4$
0	$3/4 \cdot 1/4$	$1/4 \cdot 1/4$

C – Paweł podaje prawidłową odpowiedź

$$P(C) = P\{A=1, B=1\} + P\{A=0, B=0\} =$$
$$= 9/16 + \frac{1}{16} = 5/8$$

$\underline{5/8 > \frac{1}{2}}$. Powinien posłuchać.

28. Szpital -> 400 pacjentów z podejrzeniem grypy. Szansa, że ktoś jest chory to 0,3. Jakie jest p-p, że przynajmniej 140 jest chorych.

$n = 400$
$p = 0,03$
X_i – zmienna losowa opisująca stan pacjenta

$EX = np \quad D^2X = np(1-p)$
$EX = 120 \quad D^2X = 84 \quad \sqrt{D^2X} = 9,17$

$S_{400} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{400} \qquad S_n \sim (EX, \sqrt{np(1-p)})$

$$P(S_{400} \geq 140) = P\left(\frac{S_n - 120}{9,17} \geq \frac{140-120}{9,17}\right)$$

czemu?

chyba źle

CGT

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu n}{\sqrt{\sigma n}}$$

przecież

26.

Wiedząc, że $Y = 2X + W$, gdzie X i W są niezależnymi zmiennymi losowymi, $X \sim N(0,9)$, $W \sim N(0,4)$. Dla jakiego $\underline{\underline{a}}$ zachodzi $X = aY + U$, gdzie Y i U są niezależne?

$$Y = 2X + W \qquad X \sim N(0,9) \qquad Y \sim N(0,4)$$

$$X = aY + U \qquad EX = 0 \quad D^2X = 9 \quad DX = 3$$
$$EW = 0 \quad D^2W = 4 \quad DW = 2$$

$$\overset{0}{E(X)} = E(aY + U) = aEY + EU = aE(2X + W) + EU =$$

$$= a2\underbrace{EX}_{0} + a\underbrace{EW}_{0} + EU$$ czyli to też 0

$$D^2X = D^2(aY + U) = a^2D^2Y + D^2U = a^2D^2(2X + W) + D^2U =$$

$$= 4a^2\underbrace{D^2X}_{9} + \underbrace{D^2W}_{4} + D^2U = 40a^2 + D^2U$$

$$D^2U = D^2X - 40a^2$$
$$\underline{\underline{D^2U = 9 - 40a^2}}$$

$$U = X - aY = X - a(2X + W) = X - 2aX - aW = X(1-2a) - aW$$

$$\underline{\underline{D^2U}} = D^2(X(1-2a) - aW) = (1-2a)^2 \cdot 9 - a^2 4 = (1 - 4a + 4a^2)$$

$$\cdot 9 - 4a^2 = \underline{\underline{9 - 36a + 32a^2}}$$