Praca domowa nr 2 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

Zad. 1. Dziesięcioro studentów zdaje egzamin z matematyki. Obliczyć, iloma sposobami można wystawić im oceny (w skali od 2 do 5), jeśli:

a) żaden nie otrzyma „dwójki", **b)** każdy ze zdających otrzyma co najmniej „czwórkę".

UWAGA: w każdym z podpunktów opisać zbiór możliwych wyników.

a) $A = \{(S_1, \dots, S_{10}) : S_i \in \{3,4,5\}\}$

$|A| = W_3^{10} = 3^{10}$

b) $B = \{(S_1, \dots, S_{10}) : Si \in \{4,5\}\}$

$|B| = W_2^{10} = 2^{10}$

Zad. 2. Obliczyć, na ile sposobów pojedynczy brydżysta może otrzymać:

a) dokładnie dwa asy, **b)** dokładnie trzy asy, **c)** co najmniej jednego asa.

a) $C_4^2 * C_{48}^{11} = \binom{4}{2} * \binom{48}{11}$

b) $C_4^3 * C_{48}^{10} = \binom{4}{3} * \binom{48}{10}$

c) $\binom{52}{13} - \binom{48}{13}$

Zad. 3. Obliczyć, ile różnych słów (mających sens lub nie) można ułożyć przestawiając w dowolny sposób litery w wyrazie SZCZEBRZESZYN.

Słowo: $S\ Z\ C\ Z\ E\ B\ R\ Z\ E\ S\ Z\ Y\ N$

Ilości liter: $|Z| = 4$ $|S| = 2$ $|E| = 2$

$$|\Omega| = \frac{13!}{4! * 2! * 2!}$$

Zad. 4. Osiem osób siada na ośmiu krzesłach ustawionych przy okrągłym stole. Obliczyć, na ile sposobów mogą one usiąść tak, aby: **a)** ustalone dwie osoby siedziały obok siebie, **b)** ustalone trzy osoby siedziały obok siebie, **c)** ustalone dwie osoby były rozdzielone przez trzy inne, **d)** ustalone dwie osoby były rozdzielone przez ustalone trzy inne.

a) C_8^1 - wybieramy miejsce, od którego liczymy

P_2 - usadzamy te dwie osoby obok siebie

P_6 - resztę osób usadzamy na P_6 sposobów

$$C_8^1 * P_2 * P_6 = \binom{8}{1} * 2! * 6! = 11520$$

b) C_8^1 - wybieramy miejsce, od którego liczymy

P_3 - usadzamy te dwie osoby obok siebie

P_5 - resztę osób usadzamy na P_5 sposobów

$$C_8^1 * P_2 * P_6 = \binom{8}{1} * 3! * 5! = 5760$$

c) $C_8^1 * P_2 * P_6 = \binom{8}{1} * 2! * 6! = 11520$

d) $C_8^1 * P_2 * P_3 * P_3 = \binom{8}{1} * 2! * 3! * 3! = 576$

Zad. 5. Obliczyć, na ile sposobów można rozdać 20 pączków 10 osobom (pączki uznajemy za nierozróżnialne oraz dopuszczamy sytuację, gdy ktoś nie dostanie pączka).

WSKAZÓWKA: zob. zadanie o kulach i komórkach z ostatniego wykładu.

Wzór: $\binom{n+k-1}{k}$ n - ilość osób, k - ilość pączków

$\binom{10+20-1}{20} = \binom{29}{20}$

Zad. 6. Sprawdzamy działanie trzech urządzeń. Niech zdarzenie A_k oznacza, że k-te urządzenie jest wadliwe (k=1,2,3). Za pomocą zdarzeń A_k zapisać zdarzenia:

a) przynajmniej jedno urządzenie nie jest wadliwe, **b)** dokładnie jedno urządzenie nie jest wadliwe, **c)** nie więcej niż jedno urządzenie jest dobre.

$A_k : k \in \{1,2,3\}$ - urządzenie jest wadliwe

a) $A_1' \cup A_2' \cup A_3'$ - co najmniej jedno urządzenie jest wadliwe

b) $(A_1' \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3')$ - dokładnie jedno urządzenie jest wadliwe

c) $(A_1' \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3') \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ - nie więcej niż jedno urządzenie jest dobre

Zad. 7. W wyścigu samochodowym biorą udział trzy załogi fabryczne pewnego koncernu samochodowego. Niech A_i oznacza zdarzenie, ze i-ta załoga ukończyła wyścig (i=1,2,3). Za pomocą zdarzeń A_i zapisać następujące zdarzenia:

a) dokładnie jedna załoga ukończyła wyścig, **b)** co najmniej dwie załogi ukończyły wyścig.

$A_i : i \in \{1,2,3\}$ - zdarzenie, że i-ta załoga ukończyła wyścig

a) $(A_1 \cap A_2' \cap A_3') \cup (A_1' \cap A_2 \cap A_3') \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3')$ - dokładnie jedna załoga ukończyła wyścig

b) $(A_1 \cap A_2 \cap A_3') \cup (A_1 \cap A_2' \cap A_3) \cup (A_1' \cap A_2 \cap A_3)$ - co najmniej dwie załogi ukończyły wyścig

Zad. 8. Rzucamy trzy razy monetą. Niech zdarzenie B_i polega na tym, że otrzymamy reszkę w i-tym rzucie. Za pomocą działań na zdarzeniach B_i zapisać następujące zdarzenia:

a) otrzymano co najmniej jedną reszkę, **b)** w drugim rzucie otrzymano reszkę, **c)** liczba reszek była większa od liczby orłów, **d)** otrzymano dokładnie jedną reszkę.

B_i - otrzymanie reszki w rzucie

a) $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ - otrzymano co najmniej jedną reszkę

b) B_2 - w drugim rzucie otrzymano reszkę

c) $(B_1 \cap B_2 \cap B_3') \cup (B_1 \cap B_2' \cap B_3) \cup (B_1' \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ - liczba reszek była większa od liczby orłów

d) $(B_1 \cap B_2' \cap B_3') \cup (B_1' \cap B_2 \cap B_3') \cup (B_1' \cap B_2' \cap B_3)$ - otrzymano dokładnie jedną reszkę

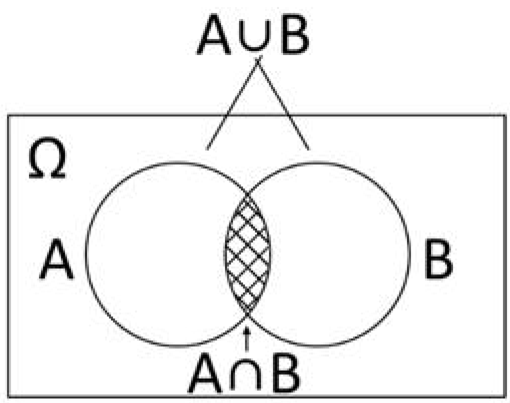
Praca domowa nr 3 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

(UWAGA: w zad. 3-9 określić zbiory zdarzeń elementarnych Ω)

Zad. 1. Wiadomo, że: $P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}7$, $P(A\cup B)=0{,}8$. Obliczyć prawdopodobieństwa: **a)** $P(A\cap B)$, **b)** $P(A'\cap B')$, **c)** $P(A'\cap B)$, **d)** $P(A'\cup B)$.

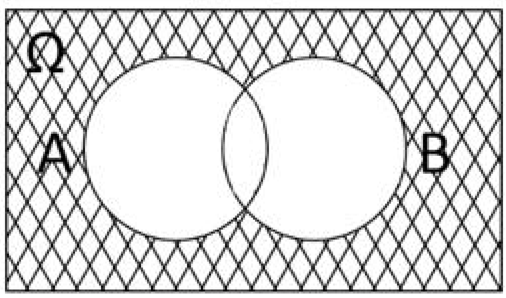
$P(A) = 0{,}6 \; P(B) = 0{,}7 \; P(A \cup B) = 0{,}8$

$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$



a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

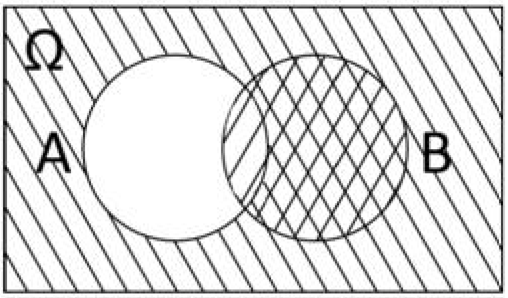
$P(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}8 = 0{,}5$



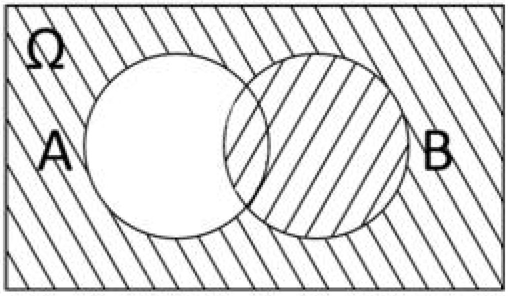
b) $P(A' \cap B') = P((A \cup B)') =$

$P(\Omega(A \cup B)) = P(\Omega) - P(A \cup B) =$

$= 1 - 0{,}8 = 0{,}2$



c) $P(A' \cap B) = P(B \backslash (A \cap B)) =$
$P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2$



d) $P(A' \cup B) = P(A' \cup (B \cap A)) =$
$P(A') + P(B \cap A) = (1 - 0{,}6) + 0{,}5 = 0{,}9$

Zad. 2. Wśród studentów I roku pewnego wydziału 120 zdawało egzaminy z matematyki i fizyki. Okazało się, że 15 z nich nie zdało egzaminu tylko z matematyki, 10 nie zdało egzaminu tylko z fizyki, natomiast 5 nie zdało obu egzaminów. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że losowo wybrany student: **a)** nie zdał egzaminu z matematyki, ale zdał z fizyki, **b)** nie zdał egzaminu z fizyki, ale zdał z matematyki, **c)** nie zdał obu egzaminów, **d)** zdał co najmniej jeden egzamin, **e)** zdał oba egzaminy.

$|\Omega|$ - ilość studentów (120)
M - studenci, którzy zdali matematykę
F - studenci, którzy zdali fizykę

$$P(M) = \frac{|M|}{|\Omega|} = \frac{120-15}{120} = \frac{105}{120}$$

$$P(F) = \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{120-10}{120} = \frac{110}{120}$$

$P(M' \cap F') = \frac{5}{120}$ - nie zdało obydwu egzaminów

a) nie zdał egzaminu z matematyki, ale zdał z fizyki

$$P(M' \cap F) = P\big((\Omega \backslash M) \cap F\big) = P(F) - P(M \cap F) = *$$

$$P(M' \cap F') = P((M \cup F)') = 1 - P(M \cup F)$$

$$\frac{5}{120} = 1 - P(M \cup F) <=> \frac{115}{120} = P(M \cup F)$$

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$

$$* \, P(F) - P(M \cap F) = \frac{110}{120} - \frac{100}{120} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

b) nie zdał fizyki, ale zdał matematykę

$$P(M \cap F') = P\big((\Omega \backslash F) \cap M\big) = P\big(M \backslash (F \cap M)\big) =$$

$$P(M) - P(F \cap M) = \frac{105}{120} - \frac{100}{120} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$$

c) nie zdał obu egzaminów

$$P((M \cup F)') = P\big(\Omega \backslash (M \cup F)\big) = 1 - \frac{115}{120} = \frac{1}{24}$$

d) zdał co najmniej jeden egzamin

$$P\big(M \cup F \cup (M \cap F)\big) = P(M \cup F) = \frac{115}{120} = \frac{23}{24}$$

e) zdał oba egzaminy

$$P(M \cap F) = \frac{100}{120} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Zad. 3. Ze zbioru liczb $\{1,2,3,\ldots,1400\}$ losujemy jedną liczbę. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowana liczba jest podzielna przez 9 lub 12.

$\Omega = \{x : x \in \{1, \ldots, 1400\}\}$

$A = \{x : x \in \Omega \wedge 9|x\}$ - podzielne przez 9

$B = \{x : x \in \Omega \wedge 12|x\}$ - podzielne przez 12

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{\left\lfloor \frac{1400}{9} \right\rfloor}{1400} = \frac{155}{1400}$$

$$P(B) = \frac{\left\lfloor \frac{1400}{12} \right\rfloor}{1400} = \frac{116}{1400}$$

$$NWW(9,12) = 36$$
$$NWD(9,12) = 3$$

$$P(A \cap B) = \frac{\left\lfloor \frac{1400}{NWW} \right\rfloor}{1400} = \frac{\left\lfloor \frac{1400}{36} \right\rfloor}{1400} = \frac{38}{1400}$$

$$P(A \cup B) = \frac{155}{1400} + \frac{116}{1400} - \frac{38}{1400} = \frac{233}{1400}$$

Zad. 4. Z partii liczącej 18 detali dobrych i 4 wadliwe wybrano losowo trzy sztuki. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że: **a)** wszystkie detale będą dobre, **b)** co najmniej jeden detal będzie dobry, **c)** co najwyżej jeden detal będzie dobry.

$$\Omega = \left\{\{x_1, x_2, x_3\} : \forall i \in \{1,2,3\} x_i \in \{1,2,\ldots,22\} \wedge \forall i,j \in \{1,2,3\} i \neq j => x_i \neq x_j\right\}$$

a) $A = \{\{x_1, x_2, x_3\} : x \in \Omega \wedge \forall i \in \{1,2,3\} x_i \in \{1, \ldots, 18\}\}$

A_i - i-ty detal jest dobry

$$P(A) = \frac{\binom{18}{3}}{\binom{22}{3}} = \frac{18! * 19! * 3!}{22! * 15! * 3!} = \frac{18 * 17 * 16}{22 * 21 * 20} = \frac{204}{385}$$

b) B - co najmniej jeden detal będzie dobry

$$P(B') = P(\Omega \backslash B) = 1 - P(B)$$

$$1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{22}{3}} => 1 - \frac{4!}{20! * 21! * 22!} => 1 - \frac{2}{770} => 1 - \underset{\downarrow}{\overset{\text{wszystkie złe}}{\frac{1}{385}}} = \frac{384}{385}$$

c) C - co najwyżej jeden detal będzie dobry

$$P(A) = \frac{\binom{18}{1}\binom{4}{2}}{\binom{22}{3}} = \frac{9 * 6}{770} = 27/385$$

$$P(C) = \frac{1 + 27}{285} = \frac{28}{385}$$

Zad. 5. Z 52 kart wylosowano 6. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kart będą zarówno karty czerwone, jak i czarne.

$$\Omega = \left\{\{x_1, \ldots, x_6\} : x \in \{1, \ldots, 52\} \wedge \forall \mathrm{i,j} \in \{1, \ldots, 6\}\ \mathrm{i} \neq \mathrm{j} => \mathrm{x_i} \neq \mathrm{x_j}\right\}$$

A - wylosowano karty czerwone jak i czarne

$$P(A) = \frac{\binom{26}{1}\binom{26}{1}\binom{50}{4}}{\binom{52}{6}}$$

Zad. 6. Z 52 kart wybrano 13. Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie 7 kart jednego rodzaju (pik lub trefl lub karo lub kier).

$$\Omega = \left\{\{x_1, \dots, x_{13}\}: x \in \{1, \dots, 52\} \wedge \forall i, j \in \{1, \dots, 13\}\ i \neq j => x_i \neq x_j\right\}$$

A - zdarzenie, że wylosujemy pik lub trefl lub karo lub kier

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{13}{7}\binom{39}{6}}{\binom{52}{13}}$$

Zad. 7. Na dziesięciu klockach wyrzeźbiono litery: a, a, k, s, s, t, t, t, y, y. Bawiąc się nimi dziecko układa je w rząd. Obliczyć prawdopodobieństwo, że przypadkowo złoży ono słowo „statystyka".

$$\Omega = \left\{\{x_1, \dots, x_{10}\}: x \in \{1, \dots, 10\}\right\}$$

Słowo: $S\ T\ A\ T\ Y\ S\ T\ Y\ K\ A$

Ilości liter: $|S| = 2\ |T| = 3\ |A| = 2\ |Y| = 2\ |K| = 1$

$$|\Omega| = \frac{10!}{2! * 3! * 2! * 2! * 1!}$$

A - zdarzenie, że utworzymy słowo "STATYSTYKA" $|A| = 1$

$$P(A) = \frac{1}{\frac{10!}{2! * 3! * 2! * 2! * 1!}} = \frac{2! * 3! * 2! * 2! * 1!}{10!}$$

Zad. 8. Cyfry 0,1,...,9 ustawiono losowo. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: **a)** między 0 i 1 znajdą się dokładnie cztery cyfry, **b)** cyfry 4,5,6 będą stały obok siebie w dowolnej kolejności.

$$\Omega = \left\{\{x_1, \dots, x_{10}\}: x \in \{0, \dots, 9\}\right\}$$

$$|\Omega| = 10!$$

A - zdarzenie, że między 0 i 1 znajdują się 4 cyfry

$$|A| = 5 * 8! * 2!$$

$$P(A) = \frac{5 * 8! * 2!}{10!} = \frac{5 * 8! * 2!}{8! * 9 * 10} = \frac{1}{9}$$

B - cyfry 4, 5, 6 będą stały w dowolnej kolejności

$$|B| = 8! * 3!$$

$$P(B) = \frac{8! * 3!}{10!} = \frac{1}{15}$$

Zad. 9. Windą jedzie 5 pasażerów, którzy mogą wysiąść na 8 piętrach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: **a)** wszyscy wysiądą na tym samym piętrze, **b)** wszyscy wysiądą na różnych piętrach, **c)** dokładnie trzy osoby wysiądą na tym samym piętrze (a inne osoby na pozostałych, ale różnych, piętrach).

$$\Omega = \left\{\{x_1, \dots, x_5\}: \forall i \in \{1, \dots, 5\}: x_i \in \{1, \dots, 8\}\right\} \qquad |\Omega| = 8^5$$

a) A - wszyscy wysiądą na tym samym piętrze

$$P(A) = \frac{\binom{8}{1}}{8^5} = \frac{1}{8^4}$$

b) B - wszyscy wysiądą na różnych piętrach

$$P(B) = \frac{8 * 7 * 6 * 5 * 4}{8^5} = \frac{840}{8^4} = \frac{105}{512}$$

c) C - trzy osoby wyjdą na tym samym piętrze reszta wysiądzie na różnych

$$P(C) = \frac{\binom{5}{3} * 8 * 7 * 6}{8^5} = \frac{10 * 7 * 6}{4096} = \frac{105}{1024}$$

Praca domowa nr 4 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

Zad. 1. Wiadomo, że: $P(A \cap B') = \frac{1}{12}$, $P(A' \cap B) = \frac{1}{8}$, $P(A' \cap B') = \frac{5}{12}$. Obliczyć prawdopodobieństwa: **a)** $P(A' \cup B')$, **b)** $P(A \cap B)$.

WSKAZÓWKA DO a): $(A' \cup B') = (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A' \cap B')$.

$P(A \cap B') = \frac{1}{12}$ $P(A' \cap B) = \frac{1}{8}$ $P(A' \cap B') = \frac{5}{12}$

b) $P(A' \cap B) = P(B \backslash (A \cap B)) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = P(\Omega \backslash (A \cup B)) =$

$= P(\Omega) - P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B) = \frac{5}{12} => P(A \cup B) = \frac{7}{12}$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$P(A \cap B') = P(A \backslash (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

$P(A) = \frac{1}{12} + P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{12} + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + P(A \cap B) - \frac{7}{12} = 0$

$\frac{2}{24} + \frac{3}{24} + P(A \cap B) - \frac{14}{24} = 0 => P(A \cap B) = \frac{9}{24}$

a) $P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = P(\Omega \backslash (A \cap B)) = 1 - \frac{9}{24} = \frac{15}{24} = \frac{3}{8}$

Zad. 2. Z cyfr 1,2,3,...,9 losujemy, bez zwracania, trzy cyfry. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczby trzycyfrowe otrzymane z tych cyfr będą: **a)** większe od 666, **b)** mniejsze od 333.

$|\Omega| = 9 * 8 * 7 = 504$

a) $|A| = 3 * 8 * 7 + 1 * 3 * 7 = 189$ $P(A) = \frac{189}{504}$

b) $|B| = 2 * 8 * 7 + 1 * 2 * 7 = 126$ $P(B) = \frac{126}{504}$

Zad. 3. Rozwiązać zad. 1, gdy losowania są ze zwracaniem.

$|\Omega| = 9 * 9 * 9 = 9^3 = 729$

a) $|A| = 3 * 9 * 9 + 1 * 3 * 9 + 1 * 1 * 3 = 273$ $P(A) = \frac{273}{729} = \frac{91}{243}$

(711-999) (671-699) (667-669)

b) $|B| = 2 * 9 * 9 + 1 * 2 * 9 + 1 * 1 * 2 = 182$ $P(B) = \frac{182}{729}$

(111-299) (311-329) (331-332)

Zad. 4. Trzydziestoosobowa klasa udała się do kina. W kinie uczniowie ustawili się w pojedynczej kolejce do kasy, przy czym ustawienie miało charakter losowy. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że między dwojgiem ustalonych uczniów będzie dokładnie dziesięcioro innych.

$|\Omega| = 30!$

miejsce krańcowe - (30-12+1)*2!*28!

$$P(A) = \frac{(30 - 12 + 1) * 2! * 28!}{30!} = \frac{38}{870} = \frac{19}{435}$$

Zad. 5. W szafie znajduje się 5 par butów. Wyjęto z szafy w sposób losowy 4 buty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wybranych butów nie będzie ani jednej pary.

$$|\Omega| = \binom{10}{4} = \frac{10!}{6! * 4!} = \frac{6! * 7 * 8 * 9 * 10}{6! * 2 * 3 * 4} = 210$$

$$|A| = \binom{5}{4}\binom{2}{1}^4 = \frac{5!}{4!} * 2^4 = 80 \quad P(A) = \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$$

Zad. 6. Cztery młode małżeństwa umówiły się na wspólną wizytę na basenie, oznaczając jako miejsce spotkania kasę przy wejściu. Z pewnych względów wszystkie spośród ośmiu osób przychodziły pojedynczo. Okazało się, że o ustalonej godzinie spotkania w miejscu spotkania były cztery osoby. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród nich było co najmniej jedno małżeństwo.

$$|\Omega| = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4! * 4!} = \frac{4! * 5 * 6 * 7 * 8}{4! * 4!} = \frac{5 * 6 * 7 * 8}{2 * 3 * 4} = 70$$

$$|A'| = \binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1} = 16 \quad P(A') = \frac{16}{70} \qquad P(A) = \frac{54}{70} = \frac{27}{35}$$

Zad. 7. Ośmiu pięściarzy podzielono na dwie grupy po czterech zawodników każda. Obliczyć prawdopodobieństwo, że 2 najsilniejszych pięściarzy będzie: **a)** w tej samej grupie, **b)** w dwóch różnych grupach. Zakładamy, że grupy są rozróżnialne (ponumerowane).

$$|\Omega| = \binom{8}{4} = 70$$

a) $|A| = \binom{6}{2} * 2 = \frac{6!}{4! * 2!} * 2 = 30 \qquad P(A) = \frac{30}{70} = 3/7$

b) $|B| = \binom{6}{3} * 2 = \frac{6!}{3! * 3!} * 2 = 40 \qquad P(B) = \frac{4}{7}$

Zad. 8. W klasie jest 10 dziewcząt i 10 chłopców, którym przydzielono losowo miejsca w 10 dwuosobowych ławkach. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w każdej ławce będą siedzieli dziewczynka i chłopiec.

D - dziewczynka C - chłopiec

$|D_1\ C_1|D_2\ C_2|D_3\ C_3| \dots |D_{10}\ C_{10}|$

$Di: i \in \{1,3,5, \dots, 19\}$

$Ci: i \in \{2,4,6, \dots, 20\}$

Takich ustawień jest $10! * 10!$ i na dodatek w każdej z ławek dziewczynka i chłopiec mogą się zamienić miejscami także mnożymy razy 2^{10}, ponieważ są dwa miejsca i 10 ławek.

$|\Omega| = 20!$, ponieważ mamy 20 uczniów

A - zdarzenie że w ławce usiądzie dziewczynka i chłopiec

$$P(A) = \frac{2^{10} * (10!)^2}{20!}$$

Zad. 9. W czasie spotkania towarzyskiego, na którym było 10 par małżeńskich (w sumie 20 osób) wybrano losowo 3 mężczyzn i 3 kobiety. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wybranych osób: **a)** nie będzie męża i żony, **b)** będzie dokładnie jedna para małżeńska, **c)** będą dokładnie dwie pary małżeńskie, **d)** znajdą się najstarsza z kobiet i najstarszy z mężczyzn.

$$|\Omega| = \binom{10}{3}\binom{10}{3}$$

a) nie będzie męża i żony

$$|A| = \binom{10}{3}\binom{7}{3} = \frac{10!}{7! * 3!} * \frac{7!}{4! * 3!} = 4200 \quad P(A) = \frac{\binom{10}{3}\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}^2} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}$$

b) będzie dokładnie jedna para małżeńska

$$|B| = \binom{10}{1}\binom{9}{2}\binom{7}{2} \quad P(B) = \frac{36 * 21 * 10}{120 * 120} = \frac{21}{40}$$

c) będą dokładnie dwie pary małżeńskie

$$|C| = \binom{10}{2}\binom{8}{1}\binom{7}{1} \quad P(C) = \frac{45 * 8 * 7}{120 * 120} = \frac{7}{40}$$

d) najstarsza z kobiet i najstarszy z mężczyzn

$$|D| = \binom{9}{2}\binom{9}{2} \quad P(D) = \left(\frac{36}{120}\right)^2 = \frac{9}{1000}$$

Zad. 10. Przy okrągłym stole jest 10 miejsc, na które siadają w sposób losowy 4 osoby. Obliczyć prawdopodobieństwo, wszystkie 4 osoby usiądą na krzesłach stojących obok siebie.

$$|\Omega| = \binom{10}{4} * 4!$$

A - wszystkie 4 osoby usiądą na krzesłach obok siebie

$$|A| = 10 * 4! \qquad P(A) = \frac{10 * 4!}{\binom{10}{4} * 4!} = \frac{10}{210} = \frac{1}{21}$$

Zad. 11. Rzucamy dwa razy symetryczną, sześcienną kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że różnica (w sensie modułu) wyrzuconych oczek jest równa 3.

$|\Omega| = 6 * 6 = 36$

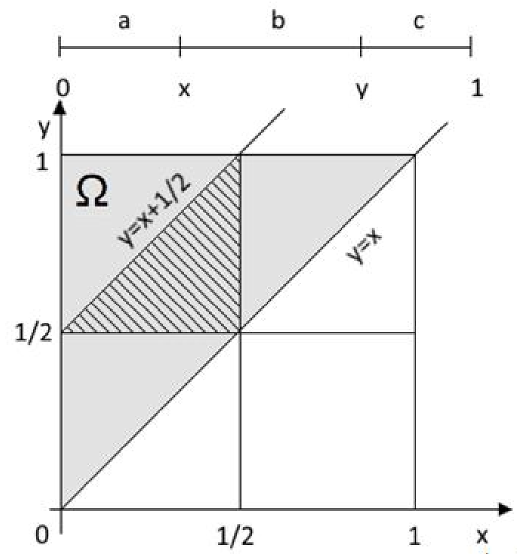
A - zdarzenie, że różnica oczek w sensie modułu będzie równa 3

X	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Praca domowa nr 5 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka”

Zad. 1. Z przedziału $[0,1]$ wybieramy losowo dwa punkty, które dzielą ten przedział na 3 odcinki. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z odcinków tych można zbudować trójkąt.



Możemy założyć, że x oznacza mniejszą z wylosowanych liczb, czyli, że $x \leq y$. W ten sposób obcinamy przestrzeń zdarzeń elementarnych do części kwadratu leżącej powyżej prostej $y = x$, czyli do trójkąta o wierzchołkach (0,0);(0,1);(1,1) jego pole jest naszą omegą |Ω|.

Warunek na stworzenie trójkąta:

1) $a + b > c$ 2) $a + c > b$ 3) $b + c > a$

1) $a = x \quad => x + y - x > 1 - y$

2) $b = y - x \quad => x + 1 - y > y - x$

3) $c = 1 - y \quad => y - x + 1 - y > x$

1) $2y > 1 \quad => y > \frac{1}{2}$

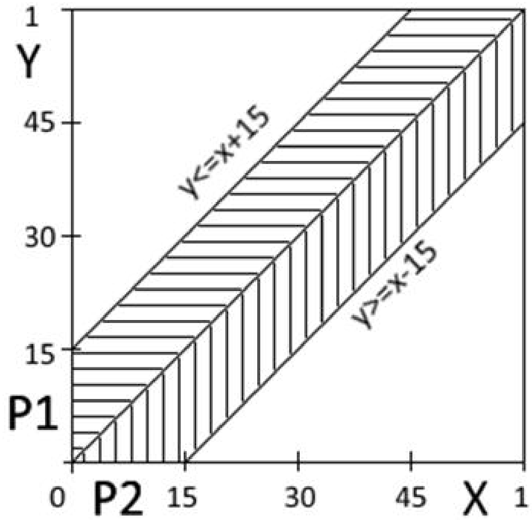
2) $2x + 1 > 2y => y < x + \frac{1}{2}$

3) $2x < 1 \quad => x < \frac{1}{2}$

$y - x < \frac{1}{2} \qquad y < \frac{1}{2} + x$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}}{1 * 1 * \frac{1}{2}} = \frac{1}{8} * 2 = \frac{1}{4}$$

Zad. 2. Dwie osoby umówiły się na spotkanie między godzinami 10-tą a 11-tą. Osoba, która przyjdzie pierwsza czeka na drugą co najwyżej 15 minut, lecz nie dłużej niż do 11-tej, a potem odchodzi. Obliczyć prawdopodobieństwo, że spotkanie dojdzie do skutku. Zakładamy, że moment przybycia każdej z osób jest losowy.



X - osoba 1 $\quad Y$ - osoba 2

Różnica w czasie ma być mniejsza niż 15 minut, czyli:

$|y - x| \leq 15$

$y - x \leq 15 \wedge y - x \geq -15$

$y \leq x + 15 \ \wedge y \geq x - 15$

$|\Omega| = [0,1]^2 = 1$

A - zdarzenie, że obie osoby się spotkają

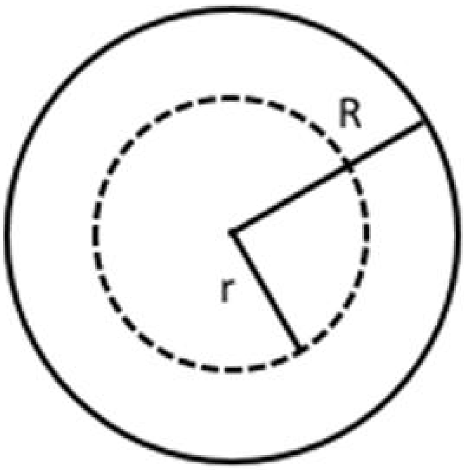
$|A| = P_1 + P_2 \quad P_1 = P_2$

$$P_1 = \frac{1}{2} - \frac{\frac{9}{16}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{9}{32} = \frac{16}{32} - \frac{9}{32} = \frac{7}{32}$$

$$|A| = 2 * P_1 = \frac{14}{32}$$

$$P(A) = \frac{7}{16}$$

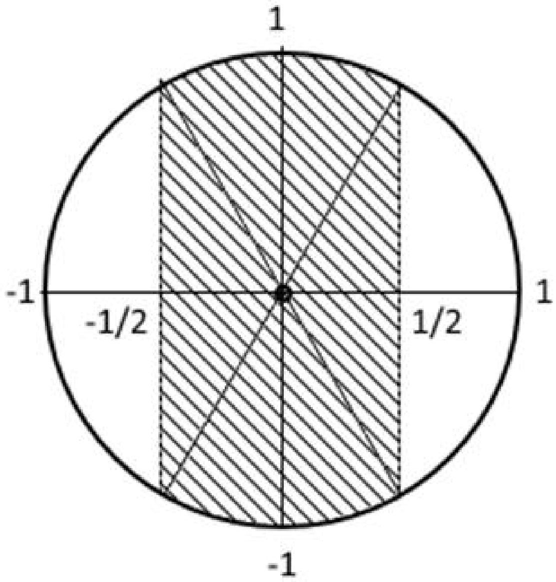
Zad. 3. Z koła o promieniu R wybrano losowo jeden punkt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrany punkt znajdzie się w odległości nie większej od pewnej liczby r ($0 < r < 1$) od środka koła.



A - odległość punktu od środka = r

$$P(A) = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

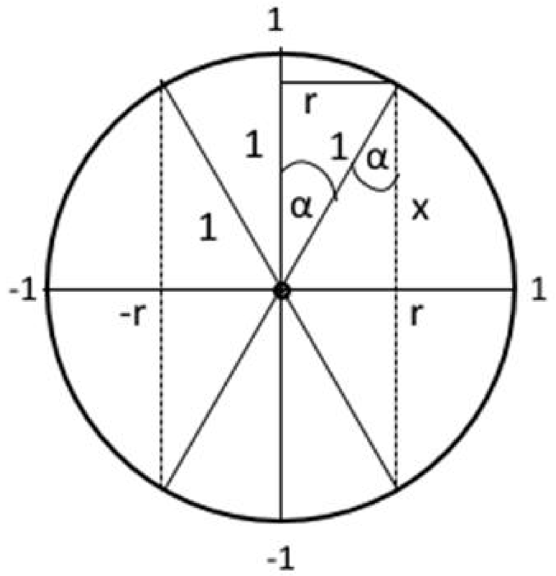
Zad. 4. Z koła o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych wybrano losowo jeden punkt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że rzut wylosowanego punktu na oś OX będzie odległy od początku układu współrzędnych o nie więcej niż $1/2$ .m



$$P = 2 * \frac{1}{6}\pi + 4 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} * \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P(A) = \frac{\frac{\pi}{3} * \frac{\sqrt{3}}{2}}{\pi r^2} = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$$

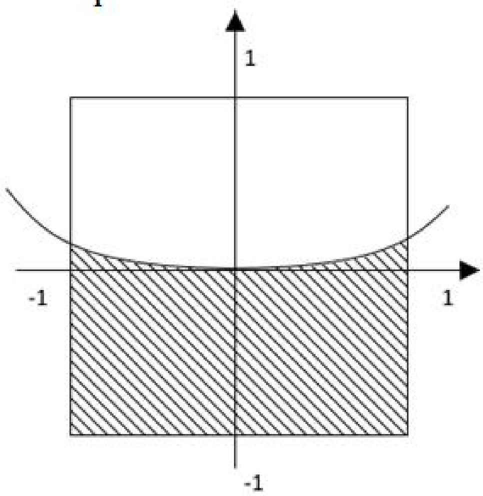
Zad. 5. Na obwodzie koła (na okręgu) o promieniu 1 i środku w początku układu współrzędnych wybrano losowo jeden punkt. Obliczyć prawdopodobieństwo, że rzut wylosowanego punktu na oś OX będzie odległy od początku układu współrzędnych o nie więcej niż r ($0 < r < 1$).



$$sin\alpha = \frac{r}{1} = r$$
$$arcsinr = \alpha$$
$$n(A) = \frac{2 * 2arcsinr}{2\pi} * 2\pi = 4arcsinr$$
$$P(A) = \frac{4arcsinr}{2\pi} = \frac{2arcsinr}{\pi}$$

Zad. 6. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że pierwiastki równania $mx^2 + kx + 1 = 0$ są rzeczywiste, jeśli wiadomo, że liczby k, m wybrano losowo z przedziału $[-1, 1]$ ($(k,m) \in [-1,1] \times [-1,1]$).

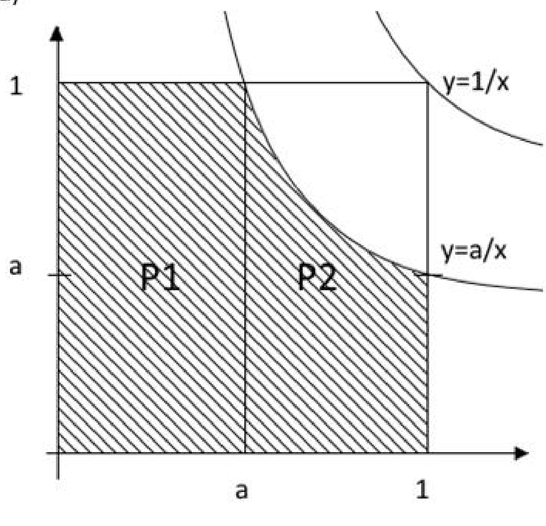
$$mx^2 + kx + 1 = 0 \quad \left((k,m) \in [-1,1]\text{x}[-1,1]\right)$$
$$|\Omega| = [-1,1]^2 = 2^2 = 4$$
Rzeczywiste gdy $\Delta = k^2 - 4m \geq 0$
$$m \leq \frac{k^2}{4}$$



$$P(A) = \frac{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\frac{k^2}{4}} dmdk}{4} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{\frac{k^2}{4}} dmdk =$$
$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(k^2+1)dk = \frac{1}{4}\left[\frac{k^3}{12} + k\right]_{-1}^{1} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{13}{12} * 2\right) = \frac{13}{24}$$

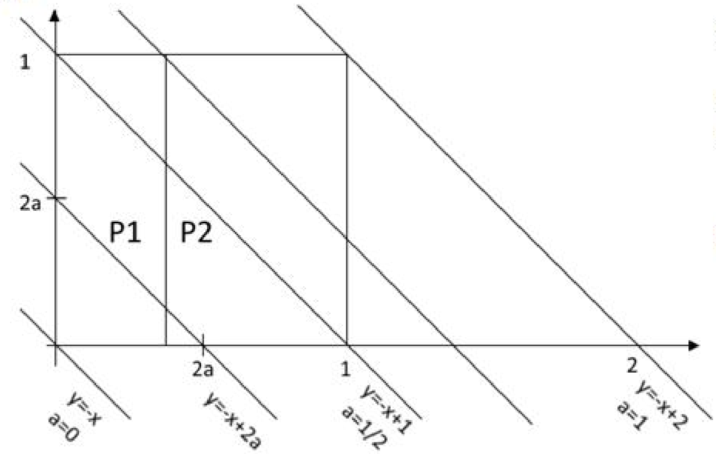
Zad. 7. W kwadrat o wierzchołkach: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ rzucono losowo punkt. Niech (x, y) oznacza jego współrzędne. Obliczyć (w zależności od a) prawdopodobieństwa: **a)** $P(x \cdot y \leq a)$, **b)** $P\left(\frac{x+y}{2} \leq a\right)$.

a)



$$P_2 : \int_a^1 \frac{a}{x} dx = a \int_a^1 \frac{1}{x} dx = a[\ln|x|]_a^1 =$$
$$= -a \ln a$$
$$P_1 : a * 1 = a$$
$$P(A) = \begin{cases} 0, & gdy\ a \leq 0 \\ a(1 - \ln a), & 0 < a < 1 \\ 1, & gdy\ a \geq 1 \end{cases}$$

b)



$$\frac{x+y}{2} \le a$$
$$y \le 2a - x$$
$$y \le -x + 2a$$
$$P(A) = \begin{cases} 0, & gdy\; a < 0 \\ 2a^2, & gdy\; 0 \le a \le 1/2 \\ a^2 + 4a - 1, & gdy\; \frac{1}{2} < a < 1 \\ 1, & gdy\; a \ge 1 \end{cases}$$

$$dla\; 0 < a \le \frac{1}{2}: \int_0^{2a} (-x + 2a)dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2ax\right]_0^{2a} = -2a^2 + 4a^2 = 2a^2$$

$$dla \frac{1}{2} < a < 1\; P_1: 1 * 2a = 2a$$

$$P_2: \int_{2a}^{1} (-x + 2a) = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2ax\right]_{2a}^{1} = -1 + 2a^2 + 2a - 4a^2 = -2a^2 + 2a - 1$$

Praca domowa nr 6, 7 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka”

Zad. 1. Do 5 pustych wagonów metra wsiadło losowo 9 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden wagon będzie pusty.

A - zdarzenie, że żaden wagon nie pozostanie pusty

$|\Omega| = 5^9$ - wszystkie wagony mogą przyjąć ludzi na tyle sposobów

W tym zadaniu korzystamy ze wzoru włączeń i wyłączeń

$$P(A) = \binom{5}{1}\left(\frac{4}{5}\right)^9 - \binom{5}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^9 + \binom{5}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^9 - \binom{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^9$$

Zad. 2. Rzucono dwa razy kostką. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie większa od 8, jeśli wiadomo, że: **a)** w którymś rzucie wypadło 5 oczek, **b)** za pierwszym razem wypadło 5 oczek.

$|\Omega| = 6 * 6 = 36$

A - zdarzenie, że suma oczek będzie większa niż 8

a) B - zdarzenie, że w którymś rzucie wypadnie 5

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ - wzór na prawdopodobieństwo warunkowe

X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(A \cap B) = \frac{5}{36} \quad P(B) = \frac{11}{36}$$
$$P(A|B) = \frac{5}{36} * \frac{36}{11} = \frac{5}{11}$$

b) B - zdarzenie, że za pierwszym razem wypadło 5 oczek

X	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36} \quad P(B) = \frac{6}{36}$$
$$P(A|B) = \frac{3}{36} * \frac{36}{6} = \frac{1}{2}$$

Zad. 3. Z talii 8 kart - 4 króli i 4 asów - wybieramy losowo 2 karty. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrano 2 asy, jeśli wiadomo, że: **a)** wybrano co najmniej 1 asa, **b)** wśród wybranych kart jest czerwony as, **c)** wśród wybranych kart jest as trefl.

8 kart -> 4 króle i 4 asy wybieramy losowo dwie karty

$$|\Omega| = \binom{8}{2} = \frac{8 * 7}{2} = 28$$

A - zdarzenie, że wybrano 2 asy, jeśli wiadomo, że:

a) B - wybrano co najmniej 1 asa

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{4}{2}}{28} = \frac{\frac{24 * 3}{4}}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$
$$P(B) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1} + \binom{4}{2}}{28} = \frac{16 + 6}{28} = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}$$

b) B - wśród wybranych kart jest czerwony as

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$
$$P(B) = \frac{\binom{2}{1}\binom{7}{1}}{28} = \frac{2 * 7}{28} = \frac{1}{2}$$
$$P(A|B) = \frac{3}{14} * 2 = \frac{3}{7}$$

Zad. 4. Ze zbioru 10 elementów, wśród których 7 ma pewną cechę „C”, a 3 tej cechy nie posiada losujemy, bez zwracania, cztery razy po jednym elemencie. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane elementy będą miały cechę „C”.

A - zdarzenie, że wszystkie wylosowane elementy będą miały cechę "C"

$$P(A) = \frac{7}{10} * \frac{6}{9} * \frac{5}{8} * \frac{4}{7} = \frac{1}{6}$$

Zad. 5. W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, a w drugiej są 4 białe i 1 czarna. Rzucamy kostką. Jeśli wypadną mniej niż 3 oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, w przeciwnym razie losujemy jedną kulę z drugiej urny. Obliczyć prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej.

A - wybrano kulę białą

B_1 - wypadną mniej niż 3 oczka

B_2 - wypadnie więcej niż 2 oczka

$$\left.\begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \end{array}\right\} \quad P(B_1) + P(B_2) = 1 \quad !$$

$$P(A) = P(A|B_1) * P(B_1) + P(A|B_2) * P(B_2)$$

$$P(B_1) = \frac{1}{3} \qquad\qquad P(B_2) = \frac{2}{3}$$

\ /

rzuty kostką

$$B_1 - oczka < 3 \qquad B_2 - oczka \geq 3$$

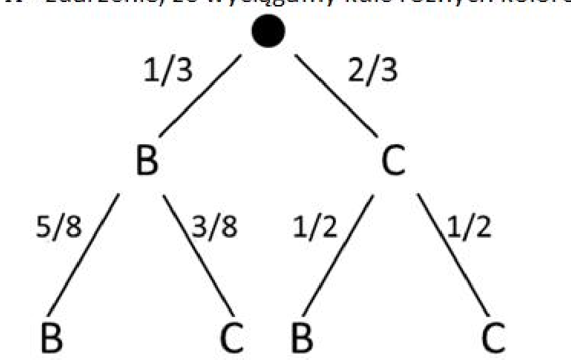
$$P(A|B_1) = \frac{3}{5} \qquad\qquad P(A|B_2) = \frac{4}{5}$$

$$P(A) = \frac{3}{5} * \frac{1}{3} + \frac{4}{5} * \frac{2}{3} = \frac{11}{15}$$

Zad. 6. W pierwszej urnie znajdują się 2 kule białe i 4 czarne, a w drugiej 4 białe i 3 czarne. Z pierwszej urny losujemy jedną kulę i wrzucamy do urny drugiej. Następnie, z drugiej urny przenosimy jedną kulę do urny pierwszej. Na końcu, z urny drugiej losujemy dwie kule. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy kule różnych kolorów.

$$|\Omega| = \binom{7}{2} = 21$$

A - zdarzenie, że wyciągamy kule różnych kolorów



Pierwszy poziom drzewka oznacza sytuację, którą uzyskamy po przełożeniu pierwszej kuli.

Drugi poziom po przełożeniu następnej.

5/24	3/24	2/6	2/6
$\binom{4}{1}\binom{3}{1}$	$\binom{5}{1}\binom{2}{1}$	$\binom{4}{1}\binom{3}{1}$	$\binom{4}{1}\binom{3}{1}$
$4 * 3 = 12$	$5 * 2 = 10$	$4 * 3 = 12$	$4 * 3 = 12$

Korzystamy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite ponieważ $\frac{5}{24} + \frac{3}{24} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = 1$

Z prawdopodobieństwa $\frac{5}{24}$ mamy sytuację, że mamy 4 białe i 3 czarne kule.

Z prawdopodobieństwa $\frac{3}{24}$ mamy sytuację, że mamy 5 kul białych i 2 czarne.

W przypadkach gdy prawdopodobieństwo wynosi $\frac{2}{6}$ mamy sytuację, że mamy 4 kule białe i 3 czarne.

$$P(A) = \frac{12}{21} * \frac{5}{24} + \frac{10}{21} * \frac{9}{24} + \frac{12}{21} * \frac{2}{6} + \frac{12}{21} * \frac{2}{6} = \frac{292}{504} \approx 0{,}56$$

Zad. 7. Wykonujemy pomiary trzema urządzeniami, z których jeden jest nieco rozregulowany. Przy wykonywaniu pomiaru sprawnym przyrządem prawdopodobieństwo otrzymania błędu pomiarowego przewyższającego tolerancję wynosi 0,03, natomiast prawdopodobieństwo to dla przyrządu nie do końca sprawnego jest równe 0,3. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: **a)** wynik pomiaru losowo wziętym przyrządem przewyższa tolerancję, **b)** wynik pomiaru, który przewyższył tolerancję został otrzymany nie w pełni sprawnym przyrządem.

A - wykonanie pomiaru przewyższającego tolerancję

a) $P(B_1) = \frac{2}{3}$ $\quad P(B_2) = \frac{1}{3}$

$P(A|B_1) = 0{,}03 \quad P(A|B_2) = 0{,}3$

$$P(A) = 0{,}03 * \frac{2}{3} + 0{,}3 * \frac{1}{3} = \frac{3}{100} * \frac{2}{3} + \frac{3}{10} * \frac{1}{3} = \frac{12}{100}$$

b) $P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)*P(B_2)}{P(A)}$

gdzie $P(A) = P(A|B_1) * P(B_1) + P(A|B_2) * P(B_2)$ - wzór Bayes'a

$$P(A|B_1) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(B_1)}$$

$$P(B_2|A) = \frac{\frac{3}{100} * \frac{1}{3}}{\frac{12}{100}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{12}{100}} = \frac{10}{12}$$

Zad. 8. Strzelano z dwóch dział do tego samego celu. Z pierwszego działa oddano 9 strzałów, a z drugiego 10. Pierwsze działo trafia średnio 8 razy na 10 strzałów, a drugie 7 razy na 10 strzałów; **a)** Obliczyć prawdopodobieństwo, że cel został zniszczony; **b)** Pocisk trafił w cel. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pocisk pochodził z pierwszego działa.

A - cel został zniszczony

B_1 - strzał z 1. armaty

B_2 - strzał z 2. armaty

$$P(A) = P(A|B_1) * P(B_1) + P(A|B_2) * P(B_2)$$

$$P(A) = \frac{8}{10} * \frac{9}{19} + \frac{7}{10} * \frac{10}{19} = \frac{71}{95}$$

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) * P(B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{8}{10} * \frac{9}{19}}{\frac{71}{95}} = \frac{36}{71}$$

Zad. 9. Trzy ściany czworościanu zostały pomalowane na biało, czerwono i zielono, natomiast czwarta w biało-czerwono-zielone pasy. Doświadczenie polega na rzucaniu czworościanu na płaszczyznę i obserwowaniu ściany, na którą upadł czworościan. Niech: A - zdarzenie, że czworościan upadnie na ścianę białą, B - zdarzenie, że czworościan upadnie na ścianę czerwoną, C - zdarzenie, że czworościan upadnie na ścianę zieloną. Zbadać, czy zdarzenia A, B, C są: **a)** niezależne parami, **b)** niezależne.

A - biała ściana
B - czerwona ściana
C - zielona ściana

$P(A)=\frac{1}{2}\quad P(B)=\frac{1}{2}\quad P(C)=\frac{1}{2}$

a) $P(A\cap B)=\frac{1}{4}\quad P(A\cap C)=\frac{1}{4}\quad P(B\cap C)=\frac{1}{4}$

$P(A\cap B)=?=P(A)*P(B)=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ - są niezależne parami

$P(A\cap C)=?=P(A)*P(C)=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ - są niezależne parami

$P(B\cap C)=?=P(B)*P(C)=\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ - są niezależne parami

b) $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{4}$ - ponieważ mamy jedną ścianę o 3 kolorach

$P(A\cap B\cap C)=?=P(A)*P(B)*P(C)=\frac{1}{8}$ - nie są niezależne

Zad. 10. Wykazać, że jeśli zdarzenia A, B są niezależne, wtedy niezależne są również zdarzenia A', B'.
Wskazówka: skorzystać z tego, że $(A'\cap B')' = A\cup B$, co implikuje, że $P(A'\cap B') = 1 - P(A\cup B)$.

$P(A\cap B)=P(A)*P(B)$
$P(A'\cap B')=P(A')*P(B')$
$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
$P(A)+P(B)-P(A\cup B)=P(A)*P(B)$
$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)$
$-P(A\cup B)=P(A)*P(B)-P(A)-P(B)\ obustronnie\ dodajemy+1$
$1-P(A\cup B)=1-P(A)-\big(P(B)-P(A)*P(B)\big)\ wyciągamy\ P(B)\ przed\ nawias$
$P(A'\cap B')=\big(1-P(A)\big)-P(B)*(1-P(A)$
$P(A'\cap B')=P(A')*\big(1-P(B)\big)$
$P(A'\cap B')=P(A')*P(B')$

Praca domowa nr 8 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

Zad. 1. Zdarzenia A_1, A_2, A_3, A_4 są niezależne oraz: $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $P(A_3) = p_3$, $P(A_4) = p_4$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: **a)** zajdzie co najmniej jedno ze zdarzeń A_1, A_2, A_3, A_4, **b)** zajdzie dokładnie jedno ze zdarzeń A_1, A_2, A_3, A_4.

a) $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=P[(A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4')']=(1-P(A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4')$
$1-P(A_1')P(A_2')P(A_3')P(A_4')=1-((1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4))$
b) $P[(A_1\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4')\cup(A_1'\cap A_2\cap A_3'\cap A_4')\cup(A_1'\cap A_2'\cap A_3\cap A_4')\cup(A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4)]=$
$=P(A_1\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4')+P(A_1'\cap A_2\cap A_3'\cap A_4')+P(A_1'\cap A_2'\cap A_3\cap A_4')+P(A_1'\cap A_2'\cap A_3'\cap A_4)$
$=p_1(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)+(1-p_1)p_2(1-p_3)(1-p_4)+(1-p_1)(1-p_2)p_3(1-p_4)+$
$+(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)p_4$

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=P(A)*P(B)\\ P(A'\cap B')=P(A')*P(B')\\ P(A\cap B')=P(A)*P(B')\\ P(A'\cap B)=P(A')*P(B)\end{array}\right\}\ \text{niezależność}$$

Zad. 2. Załóżmy, ze prawdziwa jest hipoteza Mendla, iż dla krzyżówki grochu w drugim pokoleniu stosunek nasion żółtych do zielonych jest jak 3:1. Wylosowano niezależnie 10 nasion. Obliczyć prawdopodobieństwo, że: **a)** będą co najwyżej 4 nasiona żółte, **b)** będzie co najmniej 5 i nie więcej niż 8 nasion żółtych.

sukces - wylosowanie żółtego nasiona
porażka - wylosowanie żółtego nasiona
$n = 10$ - ilość prób
$p = \frac{3}{4} \quad q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
$P_n(k) = \binom{n}{k} * p^k * q^{n-k}$ - wzór na schemat Bernoulliego

$$P(A_k) = \binom{10}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}$$

A_k - dokładnie k nasiona żółte

a) $\sum_{k=0}^{4} P(A_k) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{10}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}$$

b) $\sum_{k=5}^{8} P(A_k) = P(A_5) + P(A_6) + P(A_7) + P(A_8)$

$$\sum_{k=5}^{8} \binom{10}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{10-k}$$

Zad. 3. Właściciel kurzej fermy stwierdził, że kogutków wykluwa się trzy razy więcej niż kurek. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z 5 niezależnie wybranych jajek wykluje się co najmniej 1 kogutek, ale nie mniej niż 2 kurki.

sukces - wyklucie się koguta
porażka - wyklucie się kury
$n = 3$ - ilość prób
$p = \frac{3}{4} \quad q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$$P(A_k) = \binom{5}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{5-k}$$

$$\sum_{k=1}^{3} \binom{5}{k} * \left(\frac{3}{4}\right)^k * \left(\frac{1}{4}\right)^{5-k}$$

Zad. 4. Z talii 52 kart losujemy 6. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę wylosowanych pików. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X.

6 kart z 52, x - ilość pików $\in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ pików w całej talii

$|\Omega| = \binom{52}{6}$

$$P(X=0) = \frac{\binom{13}{0}\binom{39}{6}}{\binom{52}{6}} \qquad P(X=3) = \frac{\binom{13}{3}\binom{39}{4}}{\binom{52}{6}} \qquad P(X=6) = \frac{\binom{13}{6}\binom{39}{0}}{\binom{52}{6}}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{5}}{\binom{52}{6}} \qquad P(X=4) = \frac{\binom{13}{4}\binom{39}{3}}{\binom{52}{6}}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{13}{2}\binom{39}{4}}{\binom{52}{6}} \qquad P(X=5) = \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{2}}{\binom{52}{6}}$$

$$k \in \{0,1,2,3,4,5,6\}: P(X=k) = \frac{\binom{13}{k}\binom{39}{6-k}}{\binom{52}{6}}$$

Zad. 5. Obsługa działa artyleryjskiego ma 3 pociski. Prawdopodobieństwo trafienia do celu jednym pociskiem (przy jednym wystrzale) w danych warunkach wynosi 0,7. Strzelanie kończy się z chwilą trafienia do celu lub wyczerpania pocisków. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę oddanych strzałów. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X.

0,7 - sukces (strzał celny)

0,3 - porażka (strzał niecelny)

za 1 razem: $0{,}7 * 0{,}3^0 = 0{,}7$ (sukces bez porażki)

za 2 razem: $0{,}3^1 * 0{,}7 = 0{,}21$ (jedna porażka)

za 3 razem: $0{,}3 * 0{,}3 * 0{,}7 + 0{,}3 * 0{,}3 * 0{,}3 = 0{,}09$ (wyczerpanie pocisków lub trafienie w cel)

X_i	1	2	3
$P(X_i)$	0,7	0,21	0,09

Zad. 6. Niech X będzie wynikiem pojedynczego rzutu symetryczną, sześcienną kostką do gry. Wyznaczyć:

a) rozkład X, **b)** dystrybuantę X oraz jej wykres, **c)** prawdopodobieństwa: $P(3 < X < 5)$, $P(3 < X \le 5)$, $P(3 \le X \le 5)$, $P(3 \le X < 5)$.

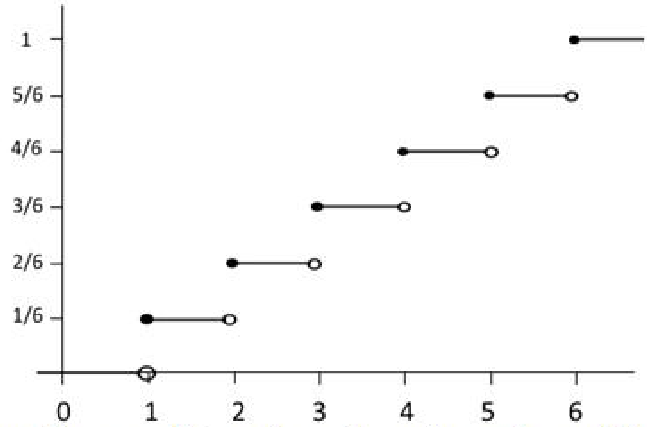
X - zmienna losowa opisująca rzut kostką

a) rozkład zmiennej losowej

X_i	1	2	3	4	5	6	wartości zmiennej losowej
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	rozkład

b) dystrybuanta

t	$(-\infty,1)$	$<1,2)$	$<2,3)$	$<3,4)$	$<4,5)$	$<5,6)$	$<6,+\infty)$
$F_x(t)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1



$$F_x(t)\begin{cases} 0 & t \in (-\infty,1) \\ \frac{1}{6} & t \in <1,2) \\ \frac{2}{6} & t \in <2,3) \\ \frac{3}{6} & t \in <3,4) \\ \frac{4}{6} & t \in <4,5) \\ \frac{5}{6} & t \in <5,6) \\ 1 & t \in <6,+\infty) \end{cases}$$

c) $P(a < x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a) = F_x(b) - F_x(a)$

$$P(3 < x < 5) = F_x(5^-) - F_x(3) = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(3 < x \leq 5) = F_x(5) - F_x(3) = \frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$$

$$P(3 \leq x \leq 5) = F_x(5) - F_x(3^-) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6}$$

$$P(3 \leq x < 5) = F_x(5^-) - F_x(3^-) = \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6}$$

Zad. 7. Na drodze ruchu pociągów znajdują się - w znacznej odległości od siebie - 4 semafory, z których każdy - wobec odległości niezależnie od siebie - zezwala na przejazd pociągu z prawdopodobieństwem 0,8. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę semaforów zezwalających na przejazd i poprzedzających pierwsze zatrzymanie lub stację docelową. Wyznaczyć: **a)** rozkład X, **b)** dystrybuantę X oraz jej wykres, **c)** $P(X \geq 2)$.

$\{x = k\}$- pociąg przejechał k semaforów i zatrzymał się na $k+1$ dla $k = \{0,1,2,3\}$

a) $P(X = k) = (0{,}8)^k * 0{,}2$

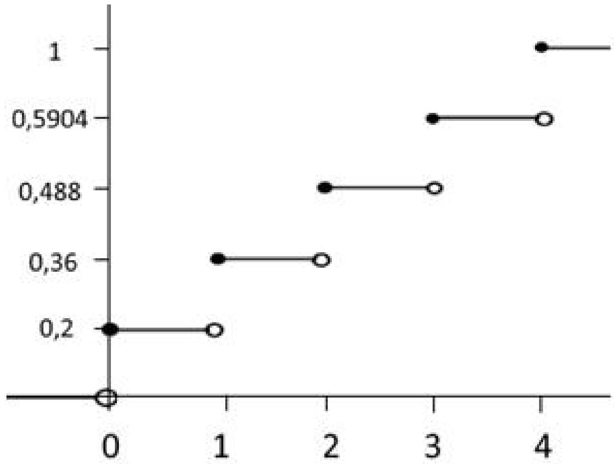
$P(X = 4) = (0{,}8)^4 = 0{,}4096$

a) rozkład X

X_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,2	$0{,}8 * 0{,}2$	$0{,}8 * 0{,}8 * 0{,}2$	$0{,}8 * 0{,}8 * 0{,}8 * 0{,}2$	$0{,}8 * 0{,}8 * 0{,}8 * 0{,}8$
	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

b) dystrybuanta X

t	$(-\infty,0)$	$<0,1)$	$<1,2)$	$<2,3)$	$<3,4)$	$<4,+\infty)$
$F_X(t)$	0	0,2	0,36	0,488	0,5904	1



$$F_x(t)\begin{cases} 0 & t \in (-\infty,0) \\ 0{,}2 & t \in <0,1) \\ 0{,}36 & t \in <1,2) \\ 0{,}488 & t \in <2,3) \\ 0{,}5904 & t \in <3,4) \\ 1 & t \in <4+\infty) \end{cases}$$

c) $P(X \geq 2) = P(2 \leq X) = 1 - F_x(2^-) = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$

Zad. 8. Dystrybuanta zmiennej losowej X jest dana wzorem: $F(t)=\begin{cases} 0, & \text{gdy } t<-2, \\ 0{,}1, & \text{gdy } -2\le t<2, \\ 0{,}6, & \text{gdy } 2\le t<4, \\ 1, & \text{gdy } t\ge 4. \end{cases}$ Wyznaczyć:

a) rozkład zmiennej losowej X, **b)** $P(-2<X\le 4)$, **c)** prawdopodobieństwo, że w pięciu niezależnych doświadczeniach zmienna losowa X co najmniej raz przyjmie wartość z przedziału $(-2,4\rangle$.

t	$(-\infty,-2)$	$<-2{,}2)$	$<2{,}4)$	$<4+\infty)$
$F_X(t)$	0	0,1	0,6	1

a) Rozkład zmiennej losowej X

X_i	-2	2	4
$P(X=x_i)$	0,1	0,5	0,4

b) $P(-2<x\le 4)=F_x(4)-F_x(-2)=0{,}9$

c) A - zdarzenie, że co najmniej jedna zmienna losowa przyjmie wartość z przedziału $(-2{,}4>$

A' - zdarzenie, że zmienna losowa nie przyjmie w ogóle wartości z przedziału $(-2{,}4>$

$P(A')=(0{,}1)^5 \quad P(A)=1-(0{,}1)^5=0{,}99999$

Zad. 9. Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa postaci:

x_i	$-1/2$	$-1/3$	$1/3$	$1/2$
$p_i=P(X=x_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1

Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej Y, jeśli: **a)** $Y=6X-5$, **b)** $Y=X^4$.

a) $Y=6x-5$

$ZW_x=\left\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\} => ZW_y=\{-8,-7,-3,-2\}$

$P(Y=-8)=P\left(X=-\frac{1}{2}\right)=0{,}2$

$P(Y=-7)=P\left(X=-\frac{1}{3}\right)=0{,}4$

$P(Y=-3)=P\left(X=\frac{1}{3}\right)=0{,}3$

$P(Y=2)=P\left(X=\frac{1}{2}\right)=0{,}1$

$P(Y=-8)=P\left(X=-\frac{1}{2}\right)=0{,}2$

Y_i	-8	-7	-3	-2
$P((6x-5)=y_i)$	0,2	0,4	0,3	0,1

b) $Y=x^4$

$ZW_x=\left\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\} => ZW_y=\left\{\frac{1}{81},\frac{1}{16}\right\}$

$P\left(Y=\frac{1}{81}\right)=P\left(X=-\frac{1}{3}\right)+P\left(X=\frac{1}{3}\right)=0{,}4+0{,}3=0{,}7$

$P\left(Y=\frac{1}{16}\right)=P\left(X=-\frac{1}{2}\right)+P\left(X=\frac{1}{2}\right)=0{,}2+0{,}1=0{,}3$

Y_i	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{16}$
$P((x^4)=y_i)$	0,7	0,3

Praca domowa nr 9, 10 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

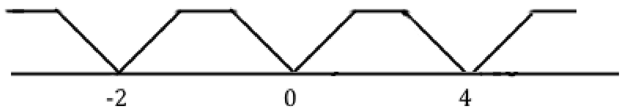
Zad. 1. Wyznaczyć c, dla której funkcja f, dana wzorem: **a)** $f(x)=cx(1-x)^2 I_{(0,1)}(x)$, **b)** $f(x)=cxe^{-4x^2} I_{(0,+\infty)}(x)$, jest gęstością zmiennej losowej.

Wskazówka do a): $cx(1-x)^2 = c(x-2x^2+x^3)$;

Wskazówka do b): przy wyznaczaniu całki $\int xe^{-4x^2}dx$, należy zastosować podstawienie $-4x^2 = t$.

Zad. 2. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{1}{3}, & \text{gdy } -2\le x<0, \\ \frac{1}{3}-\frac{x}{12}, & \text{gdy } 0\le x<4, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$ Wyznaczyć: **a)** dystrybuantę zmiennej losowej X, **b)** $P(X\in\langle 1,3\rangle)$, **c)** prawdopodobieństwo zdarzenia, że w czterech niezależnych doświadczeniach co najmniej dwa razy zmienna losowa X przyjmie wartość z przedziału $\langle 1,3\rangle$.

a)



$$1.\ t\in(-\infty,-2)\ F(t)=P(x\le t)=\int_{-\infty}^{t}0dx=0$$

$$2.\ t\in[-2,0)\ F(t)=\int_{-\infty}^{t}fxdx=\int_{-\infty}^{-2}0dx+\int_{-2}^{t}\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{3}\right)dx=\int_{-2}^{t}\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{3}\right)=\left[\frac{x^2}{12}+\frac{1}{3}x\right]_{-2}^{t}=\frac{t^2}{12}+\frac{t}{3}+\frac{1}{3}$$

$$3.\ t\in[0,4)F(t)=\int_{-\infty}^{-2}0dx+\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{3}\right)dx+\int_{0}^{t}\left(\frac{1}{3}+\left(-\frac{x}{12}\right)\right)dx=\left[\frac{x^2}{12}+\frac{1}{3}x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{24}\right]_{0}^{t}=\frac{1}{3}+\frac{t}{3}-\frac{t^2}{24}$$

$$4.\ t\in[4,+\infty)F(t)=\int_{-\infty}^{-2}0dx+\int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{3}\right)dx+\int_{0}^{4}\left(\frac{1}{3}+\left(-\frac{x}{12}\right)\right)dx+\int_{4}^{+\infty}0dx=\left[\frac{x^2}{12}+\frac{1}{3}x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}x-\frac{x^2}{24}\right]_{0}^{4}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{16}{24}=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=1$$

$$F(t)\begin{cases} 0\ dla\ t\in(-\infty,-2) \\ \frac{t^2}{12}+\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\ dla\ t\in<-2,0) \\ -\frac{t^2}{24}+\frac{t}{3}+\frac{1}{3}\ dla\ t\in<0,4) \\ 1\ dla\ t\in<4,+\infty) \end{cases}$$

$b)\ P(X\in<1,3>)=P(1\le X\ge 3)=F(3)-F(1^-)=-\frac{9}{24}+1+\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{24}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

$c)\ p=\frac{1}{3}\ q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$P(S_4\ge 2)=1-P(S_4<2)=1-P(S_4=0)-P(S_4=1)=1-\binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^4-\binom{4}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{11}{27}$

Zad. 3. Wyznaczyć $P(|X-2|<1)$, gdy zmienna losowa X ma rozkład o gęstości

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{12}+\frac{1}{6}, & \text{gdy } -2\le x<2, \\ \frac{2}{3}-\frac{x}{6}, & \text{gdy } 2\le x<4, \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{12}+\frac{1}{6}\ dla\ x\in<-2,2) \\ \frac{3}{2}-\frac{x}{6}dla\ x\in<2,4> \\ 0\ poza\ tym \end{cases}$$

$$P(|x-2|<1)=P(-1<x-2<1)=P(1<x<3)$$

$$P(1<x<3)=\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{1}^{2}\left(\frac{x}{12}+\frac{1}{6}\right)dx+\int_{2}^{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{6}\right)dx=\left[\frac{x^2}{24}+\frac{1}{6}x\right]_{1}^{2}+\left[\frac{3}{2}x-\frac{x^2}{12}\right]_{2}^{3}$$
$$=13/24$$

Zad. 4. Dana jest funkcja F, postaci $F(t)=\begin{cases} 0, & \text{gdy } t\in(-\infty,1), \\ \frac{t^3-1}{7}, & \text{gdy } t\in\langle 1,2), \\ 1, & \text{gdy } t\in\langle 2,+\infty). \end{cases}$ Wykonać następujące polecenia:

a) ustalić, czy F jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej typu ciągłego,
b) jeśli odpowiedź w pkt. a) jest pozytywna, wyznaczyć gęstość rozkładu tej zmiennej losowej.
Uwaga do a): podpunkt ten proszę zrobić graficznie (rozwiązanie graficzne polega na naszkicowaniu wykresu funkcji F i odczytaniu z tego wykresu, czy są spełnione własności (i)-(iii) dystrybuanty zmiennej losowej typu ciągłego - *jako warunek (iii) rozważyć ciągłość, która implikuje prawostronną ciągłość*);

Uwaga do b): zastosować wzór $f(t)=\begin{cases} F'(t), & \text{gdy } F'(t) \text{ istnieje}, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$ i przyjąć, że $F'(t)$ nie istnieje, gdy $t=1$, $t=2$.

$$dla\ t = 1{,}5 = \frac{3}{2}: \ \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 1}{7} = \frac{\frac{27}{8} - 1}{7} = \frac{19}{8 * 7} = \frac{19}{56} \approx 0{,}339$$

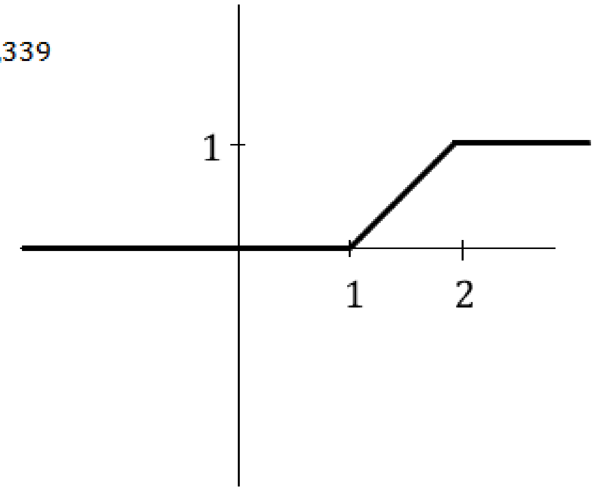
$$dla\ t = 1: = \frac{1 - 1^-}{7} \approx 0\ OK$$

$$dla\ t = 2: = \frac{8 - 1}{7} = 1\ OK$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} F'(x)\ gdy\ F'(x) istineje \\ \quad 0\ gdy\ nie \end{cases}$$

$$t \in (1{,}2): \left(\frac{t^3 - 1}{7}\right)' = \left(\frac{1}{7}t^3 - \frac{1}{7}\right)' = \frac{3}{7}t^2$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{7}t^2\ x \in (1{,}2) \\ 0\ x\ nie \in (1{,}2) \end{cases} = \frac{3}{7}t^2 I_{1,2}(x)$$



Zad. 5. Dana jest funkcja $F(t)=\begin{cases} 0, & \text{gdy } t\in(-\infty,1), \\ \frac{t-1}{2}, & \text{gdy } t\in\langle 1,c\rangle, \\ 1, & \text{gdy } t\in(c,+\infty). \end{cases}$. Wykonać następujące polecenia:

a) wyznaczyć stałą c, dla której F jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X typu ciągłego,
b) obliczyć $P(3/2 \le X \le 5/2)$.
Uwaga do a): podpunkt ten sprowadza się do wyznaczenia wartości c, dla której zachodzi własność (iii) dystrybuanty (czyli prawostronna ciągłość F w c: $\lim_{t\to c^+} F(t)=F(c)$); własność (i) sprawdzić tak jak na ćwiczeniach - wyznaczyć pochodną funkcji „środkowej” dla $t\in(1,3)$; to, że własność (ii) będzie spełniona jest łatwo sprawdzić (bo we wzorze na F występują wartości 0, 1 w, odpowiednio, $-\infty$, $+\infty$).

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 1) \\ \frac{t-1}{2}, & t \in < 1, c > \\ 1, & t \in (c, +\infty) \end{cases}$$

a)

$$\lim_{t\to c^-} \frac{t-1}{2} = \lim_{t\to c^+} 1$$

$$\frac{c-1}{2} = 1 => c = 3$$

b)

$$P\left(\frac{3}{2} \le X \le \frac{5}{2}\right) = F_x\left(\frac{5}{2}\right) - F_x\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Zad. 6. Pewien człowiek bierze udział w następującej grze: wyciąga z talii 52 kart 1 kartę; jeśli wyciągnie asa, to otrzymuje 5 zł, jeśli jakąś figurę, to otrzymuje 2 zł, a jeśli wyciągnie kartę inną od wymienionych, to płaci 1 zł. Niech X będzie zmienną losową, oznaczającą wygraną gracza. Wyznaczyć: **a)** EX (tzn., wartość oczekiwaną wygraną gracza - wraz z interpretacją), **b)** D^2X (wraz z interpretacją), **c)** trzeci moment zwykły, zmiennej losowej X (tzn., EX^3).

X_i	-1	2	5
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$

$$a)\ EX = -1 * \frac{9}{13} + 2 * \frac{3}{13} + 5 * \frac{1}{13} = \frac{2}{13}$$

Interpretacja: Średni oczekiwany wynik to $\frac{2}{13}$ zł

$$b)\ D^{2X} = E(X^- EX)^2$$

$$D^2X = E\left(-1 - \frac{2}{13}\right)^2 + E\left(2 - \frac{2}{13}\right)^2 + E\left(5 - \frac{2}{13}\right)^2 = E\left(-\frac{15}{13}\right)^2 + E\left(\frac{24}{13}\right)^2 + E\left(\frac{63}{13}\right)^2$$

$$= \frac{225}{169} * \frac{9}{13} + \frac{576}{169} * \frac{3}{13} + \frac{3969}{169} * \frac{1}{13} = \frac{2025}{2197} + \frac{1728}{2197} + \frac{3969}{2197} = \frac{7722}{2197} \approx 3{,}51$$

Y_i	$\frac{225}{169}$	$\frac{576}{169}$	$\frac{3969}{169}$
$P(Y_i)$	$\frac{9}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$

Interpretacja: W sensie średniokwadratowym wartości wygranej będą się różnić od $\frac{2}{13}$zł o ≈ 3.51

c) trzeci moment zwykły:

$$EX^3 = (-1)^3 * \frac{9}{13} + 2^3 * \frac{3}{13} + 5^3 * \frac{1}{13} = -\frac{9}{13} + \frac{24}{13} + \frac{125}{13} = \frac{140}{13} \approx 10{,}77 \text{ zł}$$

Zad. 7. Ustalić, ile powinien płacić gracz za wyciągnięcie karty różnej od asa i figury, aby gra z poprzedniego zadania była sprawiedliwa (tzn., aby wartość oczekiwana wygranej była równa 0).

$$0 = c * \frac{9}{13} + \frac{6}{13} + \frac{5}{13}$$

$$\frac{90}{13} = -\frac{11}{13} => 9c = -11 => c = -\frac{11}{9}$$

Gracz powinien płacić $\frac{11}{9}$ zł

Zad. 8. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x) = \begin{cases} 12x^3 - 24x^2 + 12x, & \text{gdy } x \in (0,1), \\ 0, & \text{gdy } x \notin (0,1). \end{cases}$

Wyznaczyć:

a) wartość oczekiwaną (wraz z interpretacją), **b)** wariancję (wraz z interpretacją), zmiennej losowej X .

a) $f(x)\begin{cases}12x^3-24x^2+12x & x\in(0,1)\\ 0 & w\,p.p.\end{cases}$

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{+\infty}^{0}odx+\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^{+\infty}0dx=\int_0^1(12x^4-24x^3+12x^2)dx=$$

$$=\left[\frac{12}{5}x^5-\frac{24}{4}x^4+\frac{12}{3}x^3\right]_0^1=\frac{12}{5}-\frac{24}{4}+\frac{12}{3}=\frac{2}{5}$$

Interpretacja: Średnia wartość zmiennej losowej X wynosi $\frac{2}{5}$

b) $EX^2=\int_0^1(12x^5-24x^4+12x^3)dx=\frac{12}{6}-\frac{24}{5}+\frac{12}{4}=2-4\frac{4}{5}+3=\frac{1}{5}<\infty$

$$D^2X=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{5}-\frac{4}{25}=\frac{1}{25}$$

Zad. 9. Zakładając, że zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & \text{gdy } x\in\langle -1,3\rangle,\\ 0, & \text{gdy } x\notin\langle -1,3\rangle.\end{cases}$.

Wyznaczyć czwarty moment zwykły tej zmiennej losowej (tzn., EX^4).

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & x\in<-1,3>\\ 0 & x\ nie\in<1.3>\end{cases}$$

$$EX^4=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4f(x)dx=\int 0dx+\int_1^3\frac{x^4}{4}dx+\int 0dx=\left[\frac{x^5}{20}\right]_{-1}^{3}=\frac{243}{20}+\frac{1}{20}=\frac{244}{20}=12\frac{1}{5}$$

Zad. 10. Zad. 2. Zmienna losowa X ma rozkład prawdopodobieństwa postaci:

x_i	-4	-2	0	1	3
$p_i=P(X=x_i)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

Wyznaczyć zbiór median zmiennej losowej X.

X_i	-4	-2	0	1	3
$P(X=x_i)$	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2

Wyznaczyć zbiór median X

$$F(t)=\begin{cases}0 & t\in(-\infty,-4)\\ 0{,}1 & t\in<-4,-2)\\ 0{,}2 & t\in<-2,0)\\ 0{,}5 & t\in<0,1)\\ 0{,}8 & t\in<1,3)\\ 1 & t\in<3,+\infty)\end{cases}$$

$$X_{0,5}\!:\begin{cases}F(x_{0,5}{}^-)\le 0{,}5 \Rightarrow x\in(-\infty,1]\\ F(x_{0,5})\ge 0{,}5 \Rightarrow x\in[0,+\infty)\end{cases}\Rightarrow x_{0,5}\in[0,1]$$

Praca domowa nr 11 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka”

Zad. 1. Zmienna losowa X ma rozkład o gęstości $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}x, & \text{gdy } 0\le x\le 4,\\ 0, & \text{poza tym.}\end{cases}$ Wyznaczyć medianę zmiennej losowej X oraz podać interpretację otrzymanej wartości mediany.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & 0 \le x \le 4 \\ 0 & poza\ tym \end{cases}$ całka z gęstośći - dystrybuanta

mediana: $Me = X_{0,5}: Me = \int_{-\infty}^{X_{0,5}} f(x)dx = 0,5$

$$Me = \int_{-\infty}^{X_{0,5}} \frac{1}{8} x dx = \left[\frac{1}{16}x^2\right]_0^{X_{0,5}} = \frac{1}{16}x_{0,5}{}^2$$

$$\frac{1}{16}x_{0,5}{}^2 = 0,5$$

$x_{0,5}{}^2 = 8 => x_{0,5} = 2\sqrt{2}$

Interpretacja: $Me = 2\sqrt{2}$, 50% wartości x jest mniejsze lub równe $2\sqrt{2}$, 50% wartości x jest większe lub równe $2\sqrt{2}$

Zad. 2. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $[1,5]$ ($X \sim U([1,5])$). Wyznaczyć: **a)** wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y = 3X + 2$, **b)** wariancję zmiennej losowej $Y = 3X + 2$, **c)** odchylenie standardowe zmiennej losowej $Y = 3X + 2$ (to ostatnie z interpretacją).

WSKAZÓWKA: proszę zajrzeć do informacji o rozkładzie jednostajnym, podanych na wykładzie.

$X \sim U([1,5])$ <= rozkład jednostajny $EX = \frac{a+b}{2}$ $D^2X = \frac{(b-a)^2}{12}$

a b

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x\ nie \in [a,b] \end{cases} => \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

a) $EU = E(3X + 2) = 3EX + E(2) = 3 * \frac{1+5}{2} + 2 = \frac{18}{2} + 2 = 11$

b) $D^2(3X + 2) = D^2(3X) = 3^2 * D^2X = 9 * \frac{16}{12} = \frac{9*4}{3} = 12$

c) $\sqrt{D^2Y} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

Interpretacja: Wartość $Y = 3X + 2$ różnią się w sensie średnim od $EY = 11$ o wartość $2\sqrt{2}$

Zad. 3. Wiadomo, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ ($X \sim Exp(\lambda)$, gdzie $\lambda > 0$) oraz $P(X < 3) = 26/27$. Wyznaczyć: **a)** parametr λ, **b)** wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y = 2X - 3$, **c)** wariancję zmiennej losowej $Y = 2X - 3$, **d)** odchylenie standardowe zmiennej losowej $Y = 2X - 3$ (to ostatnie z interpretacją).

a) $X \sim Exp(\lambda)$ - rozkład wykładniczy

$\lambda > 0$

$$P(x < 3) = \frac{26}{27}$$

a) $\lambda = ?$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & gdy\ x > 0 \\ 0 & gdy\ x \le 0 \end{cases}$$

$$P(x < 3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx = \int_0^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = \begin{cases} t = -\lambda x \\ dt = -\lambda dx \end{cases} \begin{cases} \square \\ \square \end{cases} = -\int e^t dt = [-e^t]_0^3 =$$

$$= -e^{-3\lambda} + e^0 = -e^{-3\lambda} + 1$$

$$-e^{-3\lambda} + 1 = \frac{26}{27} => e^{-3\lambda} = \frac{1}{27} => \frac{1}{e^{3\lambda}} = \frac{1}{27} => e^{3\lambda} = 27 \ / \ln \square$$

$3\lambda = \ln 27 => 3\lambda = \ln 3^3 => 3\lambda = 3 \ln 3 => \lambda = \ln 3$

$$EX = \frac{1}{\lambda} \quad D^2X = \frac{1}{\lambda^2}$$

b) $EY = E(2X - 3) = 2EX - E(3) = 2 * \frac{1}{\ln 3} - 3$

c) $D^2Y = D^2(2X - 3) = D^2(2X) - D^2(3) = 4D^2X = 4 * \frac{1}{\ln^2 3} = \left(\frac{2}{\ln 3}\right)^2$

d) $\sqrt{D^2Y} = \frac{2}{\ln 3}$

Interpretacja: Wartości $Y = 2X - 3$ różnią się w sensie średnim od wartości $EX = \frac{2}{\ln 3} - 3$ o wartość $\frac{2}{\ln 3}$

Zad. 4. Wyznaczyć dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej Y, jeśli:

a) $Y = 4|X|$ i $X \sim N(0,1)$, **b)** $Y = e^X$ i $X \sim N(0,1)$.

a) $Y = 4|X|, X \sim N(0,1)$ $wynaczyć\ dystrubuantę\ i\ gęstość\ Y$

$t \in [0, +\infty)$

$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(4|X| \leq t) = P(\phi) = 0$

$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(4|X| \leq t) = P\left(|X| \leq \frac{t}{4}\right) = P\left(-\frac{t}{4} \leq X \leq \frac{t}{4}\right) bo\ X \sim N(0,1) =$

$= \phi\left(\frac{t}{4}\right) - \phi\left(-\frac{t}{4}\right) = \phi\left(\frac{t}{4}\right) - \left[1 - \phi\left(\frac{t}{4}\right)\right] = 2\phi\left(\frac{t}{4}\right) - 1$

$F_Y(t) = F_{N|X|} = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0) \\ 2\phi\left(\frac{t}{4}\right) - 1 & t \in [0, +\infty) \end{cases}$ $\qquad f_y(t) = \begin{cases} F_Y'(t)\, gdy\ istnieje \\ 0 \qquad w\ p.p. \end{cases}$

$t \in (-\infty, 0)$

$F_Y'(t) = 0$

$t \in [0, +\infty)$

$f_y(t) = \left[2\,\phi\left(\frac{t}{4}\right) - 1\right]_t' = \left[2\phi\left(\frac{t}{4}\right)\right]_t' = 2\left[\phi\left(\frac{t}{4}\right)\right]_t' * \left(\frac{t}{4}\right)' = ze\ wzoru = 2 * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\left(\frac{t}{4}\right)^2}{2}} * \frac{1}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{32}}$

$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{32}} \end{cases}$

Praca domowa nr 12, 13 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

Zad. 1. Zmienna losowa X ma rozkład normalny o średniej (-5) i odchyleniu standardowym 10. Obliczyć prawdopodobieństwa:

a) $P(-1 < X < 5)$, **b)** $P(X \leq -9)$, **c)** $P(-7 < X < 1)$, **d)** $P(X \geq -7)$, **e)** $P(|X + 5| \leq 10)$ (ostatni podpunkt rozwiązać dwoma sposobami: **(i)** zamieniając nierówność z modułem na nierówność dwustronną, **(ii)** korzystając z reguły jednej sigmy).

Wzory: $X \sim N(m, \delta) => Y = \frac{X-m}{\delta} \sim N(0,1)$

$X \sim N(-5,10) \quad Y = \frac{X+5}{10} \sim N(0,1) \quad m = -5 \quad \delta = 10$

a) $P(-1 < X < 5) = F_{N(-5,10)}(5) - F_{N(-5,10)}(-1) = \phi\left(\frac{5+5}{10}\right) - \phi\left(\frac{-1+5}{10}\right) = \phi(1) - \phi(0{,}4) =$

$= 0{,}84134 - 0{,}65542 = 0{,}18592$

b) $P(X \leq -9) = F_{N(-5,10)}(-9) = \phi\left(\frac{-9+5}{10}\right) = \phi(-0{,}4) = 1 - \phi(0{,}4) = 1 - 0{,}65542 = 0{,}34458$

c) $P(-7 < X < 1) = F_{N(-5,10)}(1) - F_{N(-5,10)}(-7) = \phi\left(\frac{125}{10}\right) - \phi\left(\frac{-7+5}{10}\right) =$

$\phi(0{,}6) - \phi(-0{,}2) = \phi(0{,}6) - [1 - \phi(0{,}2)] = \phi(0{,}6) - 1 + \phi(0{,}2) = 0{,}72575 - 1 + 0{,}57926 = 0{,}30501$

d) $P(X \geq -7) = 1 - P(X < -7) = 1 - F_{N(-5,10)}(-7) = \phi\left(\frac{-7+5}{10}\right) = \phi(-0{,}2) =$

$= 1 + \phi(0{,}2) = 1 - 1 + 0{,}57926 = 0{,}57926$

e) 1. sposób $P(|X + 5| \leq 10) = z\ reguły\ jednej\ sigmy = P(|X - m| < 5) = 0{,}68268$

2. sposób $P(-10 \leq X + 5 \leq 10) = P(-15 \leq X \leq 5) = F_{N(-5,10)}(5) - F_{N(-5,10)}(-15) =$

$= \phi\left(\frac{5+5}{10}\right) - \phi\left(\frac{-15+5}{10}\right) = \phi(1) - \phi(-1) = \phi(1) - [1 - \phi(1)] =$

$= \phi(1) - 1 + \phi(1) = 2\phi(1) - 1 = 2 * 0{,}84134 - 1 = 0{,}68268$

Zad. 2. Ciężar jabłek dostarczanych do skupu ma rozkład normalny ze średnią 8 (dag) i odchyleniem standardowym 3 (dag). Obliczyć, jaki procent jabłek dostarczanych do skupu nadaje się na eksport, jeżeli za jabłka eksportowe uważa się tylko te, które ważą więcej niż 11 dag.

$X \sim N(8,3)$

$P(X > 11) = 1 - P(X < 11) = 1 - F_{N(8,3)}(11) = 1 - \phi\left(\frac{11-8}{3}\right) = \phi(1) =$

$= 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866 \approx 15{,}87\%$

Zad. 3. Wzrost dzieci jest zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią 110 (cm) i odchyleniem standardowym 20 (cm). Obliczyć prawdopodobieństwo, że przynajmniej jedno z trójki losowo wybranych dzieci będzie miało wzrost większy od przeciętnej.

$X \sim N(110{,}20)$ $Y = \frac{X-110}{20} \sim N(0{,}1)$

sukces - dziecko ma wzrost większy od przeciętnego

$p = P(X > 110) = 1 - P(X \le 110) = 1 - P\left(\frac{X-110}{20} \le \frac{0}{20}\right) = 1 - P(Y \le 0) = 1 - \phi(0) = 0{,}5$

$P(S_3 \ge 1) = 1 - P(S_3 = 0) = 1 - \binom{3}{0} p^0(1-p)^3 = 1 - (1-p)^3 = 1 - (1-0{,}5)^3 = 0{,}875$

Zad. 4. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco: $P(X=2,Y=3)=0{,}1$, $P(X=2,Y=4)=0{,}4$, $P(X=5,Y=3)=0{,}3$, $P(X=5,Y=4)=0{,}2$. Wykonać poniższe polecenia:
a) wyznaczyć rozkład łączny (X,Y), **b)** na podstawie rozkładu łącznego z a), wyznaczyć odpowiednie rozkłady brzegowe, **c)** zbadać, czy zmienne losowe X i Y są niezależne, **d)** wyznaczyć $F_{(X,Y)}(4{,}4)$, gdzie $F_{(X,Y)}$ oznacza dystrybuantę rozkładu łącznego zmiennej losowej (X,Y).

$P(X=2, Y=3) = 0{,}1$ $P(X=2, Y=4) = 0{,}4$
$P(X=5, Y=3) = 0{,}3$ $P(X=5, Y=4) = 0{,}2$

a)

X \ Y	3	4
2	0,1	0,4
5	0,3	0,2

b) $P(X=2) = P(X=2, Y=3) + P(X=2, Y=4) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$
$P(X=5) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$

X_i	2	5
$P(X=x_i)$	0,5	0,5

$P(Y=3) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$
$P(Y=4) = 0{,}4 + 0{,}2 = 0{,}6$

Y_i	9	4
$P(Y=y_i)$	0,4	0,6

c) Czy dla dowolnych $X_i \in ZW_x$ i $Y_i \in ZW_y$ $P(X=x_i, Y=y_i) = P(X=x_i) * P(Y=y_i)$
Czy np. $P(X=2, Y=3) = P(X=2) * P(Y=3)$
$L = P(X=2, Y=3) = 0{,}1$
$P = P(X=2) * P(Y=3) = 0{,}4 * 0{,}5 = 0{,}2$ $L \neq P$ $X\ i\ Y\ są\ niezależne$
d) $F(x,y)(4{,}4) = P(X \le 4, Y \le 4) = P(X=x_i, Y=yi) = P(X=2, Y=3) + P(X=2, Y=4) = 0{,}1 + 0{,}4 = 0{,}5$

Zad. 5. Niech X,Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi, że: $P(X=2)=\frac{1}{4}$, $P(X=5)=\frac{3}{4}$, $P(Y=1)=\frac{1}{3}$, $P(Y=4)=\frac{2}{3}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej Z, jeśli: **a)** $Z=\min(X,Y)$, **b)** $Z=\max(X,Y)$, **c)** $Z=X+Y$.

$X,Y - niezależne$ $P(X=2) = \frac{1}{4}$ $P(X=5) = \frac{3}{2}$ $P(Y=1) = \frac{1}{3}$ $P(Y=4) = \frac{2}{3}$
$ZW_x = \{2{,}5\}$ $ZW_y = \{1{,}4\}$
a) $Z = \min(X,Y) \Rightarrow ZW_z = ZW_{\min(X,Y)} = \{1{,}2{,}4\}$
$P(Z=1) = P(\min(X,Y)=1) = P(X=2, Y=1) + P(X=5, Y=1) = z\ nzal$
$= P(X=2)P(Y=1) + P(X=5)P(Y=1) = \frac{1}{4} * \frac{1}{3} + \frac{3}{4} * \frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
$P(Z=2) = P(\min(X,Y)=2) = P(X=2, Y=4) = P(X=2)P(Y=4) = \frac{1}{4} * \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$
$P(Z=4) = P(\min(X,Y)=4) = P(X=5, Y=4) = P(X=5)P(Y=4) = \frac{3}{4} * \frac{2}{3} = 1/2$

X_i	1	2	4
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

b) $Z = \max(X, Y) => ZW_z = ZW_{\max(X,Y)} = \{2,4,5\}$

c) $Z = X + Y => ZW_z = \{3,6,9\}$

Zad. 6. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład skokowy podany w tabeli:

X \ Y	-1	0	1
1	1/11	3/11	1/11
3	3/11	1/11	2/11

Wyznaczyć następujące rozkłady warunkowe:

a) rozkład zmiennej losowej $X|Y=-1$, **b)** rozkład zmiennej losowej $Y|X=3$.

X \ Y	-1	0	1
1	$\frac{1}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$
3	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$

a) $X|Y = -1$

$$P(X = 1|Y = -1) = \frac{P(X = 1, Y = -1)}{P(Y = -1)} = \frac{1}{11} * \frac{11}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 3|Y = -1) = \frac{P(X = 3, Y = -1)}{P(Y = -1)} = \frac{3}{11} * \frac{11}{4} = \frac{3}{4}$$

X_i	1	3
$P(X = x_i \vert Y = 1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

b) $Y|X = 3$

$$P(X = 3|Y = -1) = \frac{P(X = 3, Y = -1)}{P(X = 3)} = \frac{3}{11} * \frac{11}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 3|Y = 0) = \frac{P(X = 3, Y = 0)}{P(X = 3)} = \frac{1}{11} * \frac{11}{6} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 3|Y = -1) = \frac{P(X = 3, Y = 1)}{P(X = 3)} = \frac{2}{11} * \frac{11}{6} = \frac{1}{3}$$

Y_i	-1	0	1
$P(X = x_i \vert Y = 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Zad. 7. Dana jest funkcja $f(x,y)=\begin{cases} c\left(6xy - x^2 y\right), & \text{gdy } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$. Znaleźć wartość c, dla której funkcja f jest gęstością pewnej dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y).

$$f(X,Y) = \begin{cases} c(6xy - X^2 y) gdy\ 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 2 \\ o\ w\ p.p. \end{cases} \quad c \ge 0 \wedge \iint_{R^2} f(x,y)dxdy = 1$$

$$6xy - x^2y = xy(6 - x) => c \ge 0$$

$$\iint_{R^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^2 c(6xy - x^2y)dxdy =$$

$$c\int_0^1\int_0^2 = c\int_0^1\left[\int_0^2 (6xy - x^2y)dy\right]dx = c\int_0^1\left[\left(6x\frac{y^2}{2} - \frac{x^2y^2}{2}\right)\right]_0^2 dx = c\int_0^1 (12x - 2x^2)dx =$$

$$= c\left[\left(12\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^1 = c\left(6 - \frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}c => \frac{16}{3}c = 1 => c = \frac{3}{16} \geq 0$$

Zad. 8. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości danej wzorem:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{18}, & \text{gdy } 0 < x < 3, 0 < y < 4x, \\ 0, & \text{w p.p.,} \end{cases}$ **b)** $f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & \text{dla } 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{w p.p.,} \end{cases}$ **c)** $f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$

Wyznaczyć odpowiednie gęstości brzegowe.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{18} \; 0 < x < 3 \\ 0 \; w \; p.p. \end{cases}$$

a) $f_1(x) = f_x(x)$:

1. Gdy $x \; nie \in (0,3) \; to \; f(x,y) = 0 => f_1(x) = f_x(x) = def = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dy = 0$

2. Gdy $x \in (0,3) to \; f_1(x) = f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{4x} \frac{1}{18}dy = \left[\frac{1}{18}y\right]_0^{4x} = \frac{2}{9}x$

$$f_1(x) = f_x(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x, x \in (0,3) \\ 0, x \; nie \in (0,3) \end{cases}$$

$f_2(y) = f_y(y)$

1. Gdy $y \; nie \in (0,12) \; to \; f(x,y) = 0 => \int_{-\infty}^{+\infty} 0dx = 0$

2. Gdy $y \in (0,12) \; to \; f_2(y) = f_y(y) = \int_{\frac{y}{4}}^{3} \frac{1}{18}dx = \left[\frac{1}{18}x\right]_{\frac{y}{4}}^{3} = \frac{1}{6} - \frac{y}{72}$

$$f_2(y) = f_y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{y}{72}, y \in (0,12) \\ 0, y \; nie \in (0,12) \end{cases}$$

b) $f(x,y) = \begin{cases} 8xy \; 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 \; w \; p.p. \end{cases}$

$f_1(x) = f_x(x)$:

1. Gdy $x \; nie \in [0,1] \; to \; f(x,y) = 0 => \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = 0$

2. Gdy $x \in [0,1] \; to \; f_1(x) = f_x(x) = \int_x^{-\infty} 8xydy = \left[\frac{8xy^2}{2}\right]_x^1 = 4x - 4x^3$

$$f_1(x) = f_x(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x, x \in [0,1] \\ 0, x \; nie \in [0,1] \end{cases}$$

$f_2(y) = f_y(y)$

1. Gdy $y \; nie \in [0,1] \; to \; f(x,y) = 0 => \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = 0$

2. Gdy $y \in [0,1] \; to \; f_2(y) = f_y(y) = \int_0^0 8xydy = \left[\frac{8xy^2}{2}\right]_0^y = 4y^3$

$$f_2(y) = f_y(y) = \begin{cases} 4y^3, y \in [0,1] \\ 0, y \; nie \in [0,1] \end{cases}$$

c) $f(x,y) = \begin{cases} 2 \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1-x \\ 0 \; w \; p.p. \end{cases}$

$f_1(x) = f_x(x)$

1. Gdy $x \; nie \in [0,1] \; to \; f(x,y) = 0 => \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = 0$

2. Gdy $x \in [0,1] \; to \; f_1(x) = f_x(x) = \int_0^{1-x} 2dy = [2y]_0^{1-x} = 2 - 2x$

$$f_1(x) = f_x(x) = \begin{cases} 2 - 2x, x \in [0,1] \\ 0, x \; nie \in [0,1] \end{cases}$$

$f_2(y) = f_y(y)$

1. Gdy $y \; nie \in [0,1] \; to \; f(x,y) = 0 => \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = 0$

2. Gdy $y \in [0,1] \; to \; f_2(y) = f_y(yx) = \int_0^{1-y} 2dx = [2y]_0^{1-y} = 2 - 2y$

$$f_2(y) = f_y(y) = \begin{cases} 2 - 2y, y \in [0,1] \\ 0, y \; nie \in [0,1] \end{cases}$$

Zad. 9. Zbadać niezależność zmiennych losowych X, Y, tworzących dwuwymiarowe zmienne losowe (X, Y)
o gęstościach z zad. 8a)-c).

X, Y −niezależne$<=> \forall(x,y) \in R^2 \;\; f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$

a) niech $x = 1 \; y = 1$

$czy\; f(1,1) = f_1(1) f_2(1)$

$$\frac{1}{18} = \frac{2}{9} * \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{72}\right) => \frac{1}{8} \neq \frac{11}{324} \; x, y \, nie \, są \, niezależne$$

b) niech $x = 1 \; y = 1$

$czy\; f(1,1) = f_1(1) f_2(1)$

$$8 * 1 * 1 = (4 * 1 - 4 * 1^3) * 4 * 1^3 => \; 8 \neq 0 \; x, y \, są \, niezależne$$

c) niech $x = 1 \; y = 1$

$czy\; f(1,1) = f_1(1) f_2(1)$

$$2 = (2 - 2 * 1)(2 - 2 * 1) => 2 \neq 0 \; x, y \, nie \, są \, niezależne$$

Zad. 10. Dla rozkładu z zad. 8b) obliczyć: **a)** EX , **b)** EY , **c)** $E(X^2Y)$, **d)** D^2X .

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & 0 \le x \le y \le 1 \\ 0 & \quad\quad w\, p.p. \end{cases}$$

a) $EX = \iint_{R^2} x f(x,y) dxdy = \int_0^1 \int_x^1 x 8xy dxdy = \int_0^1 [4x^2y^2]_x^1 dx = \int_0^1 (4x^2 - 4x^4) dx =$

$$= 4\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

b) $EY = \int_0^y \int_0^1 y(8xy) dxdy = \int_0^1 [4x^2y^2]_0^y dy = \int_0^1 4y^4 dy = 4\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5}$

c) $E(X^2Y) = \int_0^y \int_0^1 x^2 y(8xy) dxdy = \int_0^1 [2x^4y^2]_0^y dy = \int_0^1 2y^6 dy = \frac{2}{7}[y^7]_0^1 = \frac{2}{7}$

d) $D^2X = EX^2 - (EX)^2$

$$EX^2 = \int_0^y \int_0^1 x^2(8xy) dxdy = \int_0^1 [2x^4y]_0^y dy = \int_0^1 2y^5 dy = \frac{2}{6}[y^6]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$D^2X = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{64}{225} = \frac{75}{225} - \frac{64}{225} = \frac{11}{225}$$

Praca domowa nr 14 z przedmiotu „Rachunek prawdopodobieństwa i Statystyka"

Zad. 1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład o gęstości $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{gdy } 0 < x < 2, 0 < y < 3x, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$ Wyznaczyć odpowiednie gęstości brzegowe.

Wzory: $X \sim N(m, \delta) => Y = \frac{X-m}{\delta} \sim N(0,1)$

$$X \sim N(-5,10) \quad Y = \frac{X+5}{10} \sim N(0,1) \quad m = -5 \quad \delta = 10$$

a) $P(-1 < X < 5) = F_{N(-5,10)}(5) - F_{N(-5,10)}(-1) = \phi\left(\frac{5+5}{10}\right) - \phi\left(-\frac{1+5}{10}\right) = \phi(1) - \phi(0{,}4) =$

$= 0{,}84134 - 0{,}65542 = 0{,}18592$

b) $P(X \le -9) = F_{N(-5,10)}(-9) = \phi\left(-\frac{9+5}{10}\right) = \phi(-0{,}4) = 1 - \phi(0{,}4) = 1 - 0{,}65542 = 0{,}34458$

c) $P(-7 < X < 1) = F_{N(-5,10)}(1) - F_{N(-5,10)}(-7) = \phi\left(\frac{125}{10}\right) - \phi\left(\frac{-7+5}{10}\right) =$

$\phi(0{,}6) - \phi(-0{,}2) = \phi(0{,}6) - [1 - \phi(0{,}2)] = \phi(0{,}6) - 1 + \phi(0{,}2) = 0{,}72575 - 1 + 0{,}57926 = 0{,}30501$

d) $P(X \ge -7) = 1 - P(X < -7) = 1 - F_{N(-5,10)}(-7) = \phi\left(\frac{-7+5}{10}\right) = \phi(-0{,}2) =$

$= 1 + \phi(0{,}2) = 1 - 1 + 0{,}57926 = 0{,}57926$

e) 1. sposób $P(|X+5| \le 10) = z\, reguły\, jednej\, sigmy = P(|X - m| < 5) = 0{,}68268$

2. sposób $P(-10 \le X + 5 \le 10) = P(-15 \le X \le 5) = F_{N(-5,10)}(5) - F_{N(-5,10)}(-15) =$

$$= \phi\left(\frac{5+5}{10}\right) - \phi\left(\frac{-15+5}{10}\right) = \phi(1) - \phi(-1) = \phi(1) - [1 - \phi(1)] =$$

$$= \phi(1) - 1 + \phi(1) = 2\phi(1) - 1 = 2 * 0{,}84134 - 1 = 0{,}68268$$

Zad. 2. Wiadomo, że: $X \sim N(0,\sigma)$, gdzie σ jest pewną liczbą dodatnią, oraz $Y = X^2$. Obliczyć $Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - (EX)\cdot(EY)$ - współczynnik kowariancji zmiennych losowych X, Y.

Wskazówki do zad. 1: (i) jeśli $X \sim N(0,\sigma)$, to $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, **(ii)** jeśli $g(x)$ jest funkcją nieparzystą w zbiorze liczb rzeczywistych R, to $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = 0$, **(iii)** $g(x) = x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ jest funkcją nieparzystą w R.

$$X \sim N(0,6) \quad Y = X^2 \quad \delta > 0$$
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2)$$
$$E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta}} e^{-\frac{x^2}{2\delta}} dx = 0 \quad EX = 0 \quad EX^2 = 0$$

funkcja nieparzysta w R

$$Cov(X,Y) = 0 - 0 - 0 = 0$$

Zad. 3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład typu ciągłego o gęstości danej wzorem
$f(x,y) = \begin{cases} 2, & \text{dla } 0 \le x \le 1 \text{ i } 0 \le y \le 1-x, \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$ Wykonać następujące polecenia:

a) obliczyć: $E(XY)$, $E(X)$, $E(Y)$, oraz $Cov(X,Y)$ - kowariancję zmiennych losowych X, Y,

b) obliczyć: $E(X^2)$, $E(Y^2)$, oraz: $D^2(X)$, $D^2(Y)$,

c) korzystając z wyników uzyskanych w a), b), obliczyć $\rho(X,Y)$ - współczynnik korelacji zmiennych losowych X, Y,

d) ustalić, czy otrzymana w podpunkcie c) wartość współczynnika korelacji może świadczyć o bardzo silnej liniowej współzależności między zmiennymi losowymi X, Y.

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1-x \\ 2, & w\ p.p. \end{cases}$$

a)

$$EX = \int_0^1 \int_0^{1-x} x2dydx = \int_0^1 [2xy]_0^{1-x} dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx = \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$EY = \int_0^1 \int_0^{1-y} 2ydxdy = \frac{1}{3}$$

$$E(XY = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy2dydx = \int_0^1 [xy^2]_0^{1-x} dx \quad =$$

$$= \int_0^1 x(1 - 2x + x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3} * \frac{1}{3} = -\frac{1}{36}$$

b)

$$E(X^2) = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 2dydx = \cdots = \frac{1}{6}$$

$E(Y^2) = \frac{1}{6}$ - symetria

$$D^2X = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

c)

$$p(x,y) = \frac{COR(X,Y)}{\sqrt{D^2XD^2Y}} = \frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)^2}} = -\frac{1}{36} * \frac{18}{1} = -\frac{1}{2}$$

d) Wartość $-\frac{1}{2}$ nie świadczy o bardzo silnej liniowej współzależności między X i Y gdyż $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ nie jest bliskie 1

Zad. 4. Prawdopodobieństwo, że losowo wybrana sztuka pewnego wyrobu jest wadliwa wynosi 0,1. Korzystając z Twierdzenia de Moivre'a-Laplace'a, jako szczególnego przypadku CTG, wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wśród 400 losowo wybranych sztuk wyrobu ilość sztuk wadliwych:

a) nie przekroczy 43, **b)** przekroczy 34, **c)** przekroczy 38 i nie przekroczy 42.

$$P\left(\frac{Sn-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le a\right)\approx \phi(a), a\in R$$

$$P\left(a_1<\frac{Sn-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le a_2\right)\approx\ \phi(a_2)-\phi(a_1)$$

sukces - sztuka jest wadliwa

$p=0{,}1\quad 1-p=0{,}9$

a) $n=400=>n$ "duże"

$$P(S_{400}\le 43)=P\left(\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}3}}\le\frac{43-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\right)=P\left(\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\le\frac{1}{2}\right)=\phi\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}69146$$

b) $n=400=>n$ "duże"

$$P(S_{400}\le 34)=1-P(S_{400}\le 34)=1-P\left(\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\le\frac{34-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\right)=$$

$$=1-P\left(\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\le -1\right)=1-\phi(-1)=1-\big(1-\phi(1)\big)=1-1+\phi(1)=\phi(1)=0{,}84134$$

c) $n=400=>n$ "duże"

$$P(38<S_{400}\le 42)=P\left(\frac{38-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}<\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\le\frac{42-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\right)=P\left(-\frac{1}{3}<\frac{S_{400}-400*0{,}1}{\sqrt{400*0{,}1*0{,}9}}\le\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\phi\left(\frac{1}{3}\right)-\phi\left(-\frac{1}{3}\right)=\phi\left(\frac{1}{3}\right)-\left(1-\phi\left(\frac{1}{3}\right)\right)=2\phi\left(\frac{1}{3}\right)-1=2*0{,}63-1=1{,}26-1=0{,}26$$

$$\phi\left(\frac{1}{3}\right)\approx 0{,}63$$

Zad. 5. W centrali telefonicznej znajduje się n linii telefonicznych działających niezależnie. Prawdopodobieństwo, ze dowolna linia jest zajęta wynosi 0,1. Ustalić, jakie powinno być n, aby prawdopodobieństwo, że więcej niż 7 linii jest zajętych było równe co najmniej 0,95.

sukces - linia jest zajęta $p=0{,}1\quad 1-p=0{,}9$

S_n - liczba linii zajętych wśród n linii

7% linii zajętych więc$=>0{,}07n$

$$P(S_n>0{,}07n)\ge 0{,}95=>1-P(S_n\le 0{,}07n)=1-P\left(\frac{S_n-n*0{,}1}{\sqrt{n*0{,}9*0{,}1}}\le\frac{0{,}07n-0{,}1n}{\sqrt{0{,}1*0{,}9*n}}\right)\approx$$

$$\approx 1-\phi\left(\frac{-0{,}03n}{\sqrt{0{,}09n}}\right)=\phi\left(\frac{0{,}03n}{0{,}3\sqrt{n}}\right)\ge 0{,}95<=>\phi\left(\frac{0{,}03n}{0{,}3\sqrt{n}}\right)\ge\phi(1{,}64)$$

$\phi(1{,}64)\approx 0{,}95$

$$\frac{0{,}03n}{0{,}3\sqrt{n}}\ge 1{,}64=>0{,}1\frac{n}{\sqrt{n}}\ge 1{,}64=>\frac{n}{\sqrt{n}}\ge 16{,}4=>\frac{n\sqrt{n}}{n}\ge 16{,}4=>$$

$$\sqrt{n}\ge 16{,}4\ |^2=>n\ge 268{,}96$$

Odpowiedź: $n\ge 268{,}96\wedge n\in N=>n=269$

Zad. 6. Rzucamy 30 000 razy symetryczną monetą. Korzystając z nierówności Czebyszewa dla częstości sukcesów w schemacie Bernoulliego, oszacować prawdopodobieństwo, że liczba orłów będzie różnić się od 15 000 o co najmniej 300.

sukces - wypadł orzeł

$$p=\frac{1}{2}\quad q=1-p=\frac{1}{2}\quad n=30000$$

$$\forall\varepsilon>0\ \ P\left(\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\right)\ge\varepsilon\right)\le\frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$P(|S_{30000}-15000|\ge 300)=P\left(\left|\frac{S_{30000}}{30000}-\frac{15000}{30000}\right|\ge\frac{300}{30000}\right)=$$

$$=P\left(\left|\frac{S_{30000}}{30000}-\frac{1}{2}\right|\ge\frac{1}{100}\right)\le\frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{2}}{30000*\left(\frac{1}{100}\right)^2}=\frac{\frac{1}{4}}{3}=\frac{1}{12}$$

STATYSTYKA

Ćwiczenia nr 11, 12 (RPiS)

Zad. 1. W celu zbadania wydajności pracy robotników pewnego zakładu produkcyjnego, wybrano losowo 10 robotników i sprawdzono wydajności pracy tychże robotników. Otrzymano następujące wyniki (w szt./godz.): 18,6; 17,9; 18,1; 17,0; 18,7; 18,3; 17,6; 17,1; 16,0; 16,5. Zakładając, że rozkład wydajności pracy ogółu robotników danego zakładu jest rozkładem normalnym, oszacować przedziałowo nieznaną średnią wydajność pracy w populacji wszystkich robotników danego zakładu; przyjąć poziom ufności 0,95.

Populacja: ogół robotników pewnego zakładu produkcyjnego,
Cecha X : wydajność pracy losowo wybranego robotnika zakładu,
Założenie: $X \sim N(m, \sigma)$, gdzie m, σ - nieznane,
Cel: oszacować przedziałowo parametr m - nieznaną średnią wydajność pracy w populacji ogółu robotników zakładu,
Technika statystyczna: wyznaczenie 95%-owej realizacji przedziału ufności dla m.

Wzór na realizację przedziału ufności dla średniej m, przy poziomie ufności $1-\alpha$: $m \in \left(\bar{x} - t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$;

Obliczenia:

$$\bar{x} = \frac{18{,}6 + 17{,}9 + \ldots + 16{,}5}{10} = \frac{175{,}8}{10} = 17{,}58 \text{ (szt./godz.)},$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 17{,}58)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\left[(18{,}6-17{,}58)^2 + (17{,}9-17{,}58)^2 + \ldots + (16{,}5-17{,}58)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{9}\cdot 7{,}416} = \sqrt{0{,}824} = 0{,}908 \text{ (szt./godz.)},$$

$$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0{,}05;9} = 2{,}2622.$$

Stąd: $m \in \left(17{,}58 - 2{,}2622 \cdot \frac{0{,}908}{\sqrt{10}}; 17{,}58 + 2{,}2622 \cdot \frac{0{,}908}{\sqrt{10}}\right)$,

$m \in (17{,}58 - 0{,}65; 17{,}58 + 0{,}65)$,

$m \in (16{,}93 \text{ (szt./godz.)}; 18{,}23 \text{ (szt./godz.)})$.

Odp. Średnia wydajność pracy w populacji wszystkich robotników zakładu jest jakąś liczbą z przedziału $(16{,}93 \text{ (szt./godz.)}; 18{,}23 \text{ (szt./godz.)})$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Zad. 2. Z 10 poletek zebrano plon pewnego zboża i uzyskano wyniki: $\sum_{i=1}^{10} x_i = 200$, $\sum_{i=1}^{10}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 36$. Zakładając, że rozkład wielkości plonów z ogółu poletek jest rozkładem normalnym, oszacować przedziałowo nieznany średni plon z poletka w populacji wszystkich poletek; przyjąć poziom ufności 0,95.

Populacja: ogół poletek, na których uprawiane jest pewne zboże,
Cecha X : plon danego zboża z losowo wybranego poletka,
Założenie: $X \sim N(m, \sigma)$, gdzie m, σ - nieznane,
Cel: oszacować przedziałowo parametr m - nieznany średni plon pewnego zboża w populacji wszystkich poletek,
Technika statystyczna: wyznaczenie 95%-owej realizacji przedziału ufności dla m.

Wzór na realizację przedziału ufności dla średniej m, przy poziomie ufności $1-\alpha$: $m \in \left(\bar{x} - t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$;

Obliczenia:

$$\bar{x} = \bar{x}_{10} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{200}{10} = 20,$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\cdot 36} = \sqrt{4} = 2,$$

$$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0{,}05;9} = 2{,}2622.$$

Stąd: $m \in \left(20 - 2{,}2622 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}; 20 + 2{,}2622 \cdot \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$,

$m \in (20 - 1{,}43; 20 + 1{,}43)$,

$m \in (18{,}57; 21{,}43)$.

Odp. Średni plon zboża w populacji wszystkich poletek jest jakąś liczbą z przedziału $(18{,}57; 21{,}43)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Zad. 3. Wśród 17 losowo wybranych pracowników pewnego zakładu przeprowadzono ankietę na temat czasu dojazdu do pracy. W wyniku otrzymano: $\sum_{i=1}^{17} x_i = 425$, $\sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 10\,881$. Zakładając, że rozkład czasu dojazdu w populacji ogółu pracowników danego zakładu jest rozkładem normalnym, oszacować przedziałowo nieznany średni czas dojazdu do pracy w populacji wszystkich pracowników zakładu; przyjąć poziom ufności 0,95.

Populacja: ogół pracowników pewnego zakładu,
Cecha X : czas dojazdu do pracy losowo wybranego pracownika zakładu,
Założenie: $X \sim N(m,\sigma)$, gdzie m, σ - nieznane,
Cel: oszacować przedziałowo parametr m - nieznany średni czas dojazdu do pracy w populacji wszystkich pracowników zakładu,
Technika statystyczna: wyznaczenie 95%-owej realizacji przedziału ufności dla m.

Wzór na realizację przedziału ufności dla średniej m, przy poziomie ufności $1-\alpha$: $m \in \left(\bar{x} - t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha;n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$;

Obliczenia:

$$\bar{x} = \bar{x}_{17} = \frac{\sum_{i=1}^{17} x_i}{17} = \frac{425}{17} = 25,$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{17-1}\left[\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 17\cdot\left(\bar{x}\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{16}\cdot[10881-17\cdot 625]} = \sqrt{\frac{1}{16}\cdot[10881-10625]} = \sqrt{\frac{1}{16}\cdot 256} = \sqrt{16} = 4,$$

$1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow t_{\alpha;n-1} = t_{0,05;16} = 2{,}1199$.

Stąd: $m \in \left(25 - 2{,}1199\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}; 25 + 2{,}1199\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$,

$m \in (25 - 2{,}06; 25 + 2{,}06)$,

$m \in (22{,}94; 27{,}06)$.

Odp. Średni czas dojazdu do pracy w populacji wszystkich pracowników zakładu jest jakąś liczbą z przedziału $(22{,}94; 27{,}06)$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Zad. 4. Skontrolowano 1000 pojazdów i okazało się, że 80 z nich nie posiadało aktualnego ubezpieczenia „OC". Oszacować na tej podstawie odsetek pojazdów jeżdżących po polskich drogach bez wykupionego obowiązkowego ubezpieczenia „OC" ; przyjąć poziom ufności 0,95.

Populacja: ogół pojazdów jeżdżących po polskich drogach (zarejestrowanych w Polsce),
Cecha X : posiadanie ubezpieczenia „OC" (= 1, gdy dla pojazdu jest wykupione „OC"/= 0, w p.p.),
Założenie: $X \sim D(p)$, gdzie p - frakcja (odsetek) pojazdów jeżdżących po polskich drogach - jest nieznana,
Cel: oszacować przedziałowo parametr p - nieznaną frakcję (odsetek) pojazdów jeżdżących po polskich drogach bez wykupionego ubezpieczenia „OC",
Technika statystyczna: wyznaczenie 95%-owej realizacji przybliżonego przedziału ufności dla p.
Wzór na realizację przybliżonego przedziału ufności (gdy liczność próby = n - „duża"), przy poziomie ufności $=1-\alpha$:

$$p \in \left(\hat{p} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}, \hat{p} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)}{n}}\right);$$

Obliczenia:

$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{80}{1000} = 0{,}08$, $1-\alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0,975} = 1{,}96$.

Stąd: $p \in \left(0{,}08 - 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}08\cdot 0{,}92}{1000}}; 0{,}08 + 1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}08\cdot 0{,}92}{1000}}\right)$,

$p \in (0{,}08 - 0{,}017; 0{,}08 + 0{,}017)$,

$p \in (0{,}063; 0{,}097) = (6{,}3\,(\%); 9{,}7\,(\%))$

Odp. Odsetek pojazdów jeżdżących po polskich drogach bez wykupionego ubezpieczenia „OC" jest jakąś wartością z przedziału $(6{,}3\,(\%); 9{,}7\,(\%))$. Zaufanie do tego wniosku wynosi 95%.

Zad. 5. Maszyna pakująca kostki masła jest nastawiona na pakowanie kostek o masie 250 g. W celu sprawdzenia, czy maszyna nie uległa rozregulowaniu, pobrano z bieżącej produkcji próbę 10 kostek masła i otrzymano wyniki (w gramach): 254, 269, 254, 248, 263, 256, 258, 261, 264, 258. Zakładając, że rozkład masy kostek jest normalny, ustalić, czy na podstawie uzyskanych wyników można sądzić, że maszyna uległa rozregulowaniu. Przyjąć poziom istotności 0,05.

Populacja: ogół pakowanych kostek masła,
Cecha X : masa losowo wybranej kostki masła,
Założenie: $X \sim N(m,\sigma)$, gdzie m, σ - nieznane,
Cel: ponieważ rozregulowanie maszyny interpretujemy jako pakowanie kostek o wadze różniącej się od 250 g, to należy zweryfikować hipotezę H_0: $m = 250\,(g)$, wobec hipotezy H_1: $m \neq 250\,(g)$; poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.
UWAGA: będziemy skłonni uznać, że maszyna uległa rozregulowaniu, jeśli stwierdzimy, że hipotezę H_0: $m = 250\,(g)$ należy odrzucić na korzyść hipotezy H_1: $m \neq 250\,(g)$;

Technika statystyczna: test t-Studenta dla średniej w rozkładzie normalnym.

Wzór na wartość statystyki testowej: $t_{emp} = \frac{\bar{x} - m_0}{s}\sqrt{n}$;

Obliczenia:

$$\bar{x} = \bar{x}_{10} = \frac{254 + 269 + \ldots + 258}{10} = \frac{2585}{10} = 258{,}5 \ \ (\mathrm{g}),$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 258{,}5)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\left[(254-258{,}5)^2 + (269-258{,}5)^2 + \ldots + (258-258{,}5)^2\right]} = \sqrt{\frac{1}{9}\cdot 324{,}5} = \sqrt{36{,}0(5)} = 6{,}004 \ \ (\mathrm{g});$$

Zatem, $t_{emp} = \frac{258{,}5 - 250}{6{,}004}\sqrt{10} = 4{,}48$;

$1 - \alpha = 0{,}95 \ \Rightarrow \ \alpha = 0{,}05 \ \Rightarrow \ t_{\alpha;n-1} = t_{0{,}05;9} = 2{,}2622$.

Stąd, otrzymujemy, że

$|t_{emp}| = |4{,}48| = 4{,}48 > 2{,}2622 = t_{0{,}05;9}$ (lub równoważnie, że $t_{emp} = 4{,}45 \in W = (-\infty;-2{,}2622\rangle \cup \langle 2{,}2622;+\infty)$).

Odp. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ odrzucamy hipotezę H₀: $m = 250\,(\mathrm{g})$ na korzyść hipotezy H₁: $m \neq 250\,(\mathrm{g})$.

Wniosek. Ponieważ za prawdziwą możemy przyjąć hipotezę H₁: $m \neq 250\,(\mathrm{g})$, to tym samym - możemy uznać, że maszyna uległa rozregulowaniu.

Zad. 6. Ustalić, czy na poziomie istotności 0,05 można stwierdzić, że w transporcie psuje się 25% owoców, jeżeli wśród 200 przebadanych owoców było 60 zepsutych.

Populacja: ogół owoców z transportu,

Cecha X: stopień zepsucia losowo wybranego owocu (=1, gdy owoc jest zepsuty/=0, gdy owoc nie jest zepsuty),

Założenie: $X \sim D(p)$, gdzie p - frakcja (odsetek) owoców zepsutych w całym transporcie - jest nieznana,

Cel: weryfikacja hipotezy H₀: $p = 0{,}25$, wobec hipotezy statystycznej H₁: $p \neq 0{,}25$; poziom istotności $\alpha = 0{,}05$.

Technika statystyczna: ponieważ $n = 200$ - „duże", to możemy stosować test u dla jednej populacji, czyli przybliżony test istotności dla frakcji (prawdopodobieństwa sukcesu).

Wzór na wartość statystyki testowej: $u_{emp} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$;

Obliczenia: $k = 60, n = 200 \Rightarrow \hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{60}{200} = 0{,}3$, a zatem, $u_{emp} = \frac{0{,}3 - 0{,}25}{\sqrt{\frac{0{,}25\cdot 0{,}75}{200}}} = \frac{0{,}05}{0{,}0306} = 1{,}63$,

$\alpha = 0{,}05 \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{0{,}05}{2}} = u_{1-0{,}025} = u_{0{,}975} = 1{,}96$; Otrzymujemy zatem, że

$|u_{emp}| = |1{,}63| = 1{,}63 < 1{,}96 = u_{0{,}975}$ (lub równoważnie, że $u_{emp} = 1{,}63 \notin W = (-\infty;-1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96;+\infty)$).

Odp. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H₀: $p = 0{,}25$.

Wniosek. Możemy stwierdzić, że w transporcie psuje się 25% owoców.

Ćwiczenia nr 13, 14, 15 (RPiS)

Zad. 1. W pewnym sklepie zważono jaja, dostarczone przez dwóch różnych dostawców. Pobrano po 10 jaj od każdego dostawcy i otrzymano wyniki:

$$\sum_{i=1}^{10} x_{1i} = 645, \ \sum_{i=1}^{10}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = 12{,}5, \ \sum_{i=1}^{10} x_{2i} = 680, \ \sum_{i=1}^{10}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 10.$$

Zakładając, że rozkłady wag jaj dostarczanych przez dostawców są rozkładami normalnymi o tych samych wariancjach, zweryfikować, na poziomie istotności 0,1, hipotezę o równości średnich wagi jaj dostarczanych przez dostawców.

Populacja 1: ogół jaj od I dostawcy,

Populacja 2: ogół jaj od II dostawcy,

Cecha X_1: waga losowo wybranego jaja od I dostawcy,

Cecha X_2: waga losowo wybranego jaja od II dostawcy,

Założenia: $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$, $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$, gdzie m_1, m_2, σ_1, σ_2 nieznane, i $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (czyli $\sigma_1 = \sigma_2$), (m_1 - średnia waga jaj w populacji wszystkich jaj od I dostawcy, m_2 - średnia waga jaj w populacji wszystkich jaj od II dostawcy),

Cel: weryfikacja hipotezy zerowej H₀: $m_1 = m_2$, wobec hipotezy alternatywnej H₁: $m_1 \neq m_2$; poziom istotności $\alpha = 0{,}05$,

Technika statystyczna: test t-Studenta na równość średnich w rozkładach normalnych.

Wzór na wartość statystyki testowej: $t_{emp} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_r}$;

Obliczenia: $\bar{x}_1 = \frac{x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n_1}}{n_1} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{1i}}{10} = \frac{645}{10} = 64{,}5$, $\bar{x}_2 = \frac{x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n_2}}{n_2} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_{2i}}{10} = \frac{680}{10} = 68$,

$\operatorname{var} x_1 = (n_1 - 1)s_1^2 = \sum_{i=1}^{10}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 = 12{,}5$, $\operatorname{var} x_2 = (n_2 - 1)s_2^2 = \sum_{i=1}^{10}(x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = 10$,

$$s_r=\sqrt{\frac{\operatorname{var}x_1+\operatorname{var}x_2}{n_1+n_2-2}\cdot\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}=\sqrt{\frac{12{,}5+10}{10+10-2}\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)}=\sqrt{\frac{22{,}5}{18}\cdot\frac{1}{5}}=\sqrt{1{,}25\cdot\frac{1}{5}}=\sqrt{0{,}25}=0{,}5;$$

Zatem,

$$t_{emp}=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s_r}=\frac{64{,}5-68}{0{,}5}=\frac{-3{,}5}{0{,}5}=-7,$$

$$t_{\alpha;n_1+n_2-2}=t_{0,1;10+10-2}=t_{0,1;18}=1{,}7341$$

Otrzymujemy zatem, że

$|t_{emp}|=7>1{,}7341=t_{0,1;18}$ (lub równoważnie, że $t_{emp}=-7\in W=(-\infty;-1{,}7341\rangle\cup\langle 1{,}7341;+\infty)$).

Odp. Na poziomie istotności $\alpha=0{,}1$ odrzucamy hipotezę H₀: $m_1=m_2$ na korzyść hipotezy alternatywnej H₁: $m_1\neq m_2$.

Wniosek. Możemy uznać, że średnia waga jaj pochodzących od I dostawcy różni się średniej wagi jaj pochodzących od II dostawcy.

Zad. 2. Przeprowadzono sondaż wśród 2600 losowo wybranych pasażerów warszawskiego metra. 1820 spośród nich oceniło, że jest zadowolona z komfortu jazdy. W podobnym badaniu przeprowadzonym wśród 3000 pasażerów stołecznych tramwajów 1890 osób pozytywnie oceniło komfort jazdy. Ustalić, czy na podstawie dokonanych badań można sądzić, że frakcja osób zadowolonych z komfortu jazdy metrem jest równa frakcji osób zadowolonych z komfortu jazdy tramwajami. Przyjąć poziom istotności 0,1.

Populacja 1: ogół pasażerów warszawskiego metra,
Populacja 2: ogół pasażerów stołecznych tramwajów,
Cecha X_1: poziom zadowolenia z komfortu podróżowania losowo wybranego pasażera warszawskiego metra,
Cecha X_2: poziom zadowolenia z komfortu podróżowania losowo wybranego pasażera stołecznych tramwajów,
Założenia: $X_1\sim D(p_1)$, $X_2\sim D(p_2)$, tzn.:

$$X_1=\begin{cases}1, & \text{gdy sukces (osoba zadowolona z komfortu podr. metrem)}\\ 0, & \text{w p.p.}\end{cases}=\begin{cases}1, & \text{z p-stwem } p_1,\\ 0, & \text{z p-stwem } 1-p_1,\end{cases}$$

$$X_2=\begin{cases}1, & \text{gdy sukces (osoba zadowolana z komfortu podr. tramwajami)}\\ 0, & \text{w p.p.}\end{cases}=\begin{cases}1, & \text{z p-stwem } p_2,\\ 0, & \text{z p-stwem } 1-p_2,\end{cases}$$

Cel: weryfikacja hipotezy H₀: $p_1=p_2$, wobec hipotezy alternatywnej H₁: $p_1\neq p_2$, gdzie: p_1 - frakcja (odsetek) osób zadowolonych z komfortu podróżowania warszawskim metrem, p_2 - frakcja (odsetek) osób zadowolonych z komfortu podróżowania stołecznymi tramwajami; poziom istotności $\alpha=0{,}1$.

Technika statystyczna: ponieważ liczebności $n_1=2600$, $n_2=1820$ są duże, to możemy zastosować przybliżony test u dla dwóch populacji, czyli przybliżony test istotności na równość dwóch frakcji.

Wzór na wartość statystyki testowej: $u_{emp}=\dfrac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$;

Obliczenia: $\hat{p}_1=\frac{k_1}{n_1}=\frac{1820}{2600}=0{,}7$, $\hat{p}_2=\frac{k_2}{n_2}=\frac{1890}{3000}=0{,}63$, $\hat{p}=\frac{(k_1+k_2)}{(n_1+n_2)}=\frac{(1820+1890)}{(2600+3000)}=\frac{3710}{5600}=0{,}6625$;

Zatem,

$$u_{emp}=\frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\left(1-\hat{p}\right)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}=\frac{0{,}7-0{,}63}{\sqrt{0{,}6625\cdot(1-0{,}6625)\cdot\left(\frac{1}{2600}+\frac{1}{3000}\right)}}=\frac{0{,}07}{0{,}01267}=5{,}52,$$

$\alpha=0{,}1\Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}}=u_{1-\frac{0{,}1}{2}}=u_{1-0{,}05}=u_{0{,}95}=1{,}6449$; Otrzymujemy zatem, że

$|u_{emp}|=|5{,}52|=5{,}52>1{,}6449=u_{0{,}95}$ (lub równoważnie, że $u_{emp}=5{,}52\in W=(-\infty;-1{,}6449\rangle\cup\langle 1{,}6449;+\infty)$).

Odp. Na poziomie istotności $\alpha=0{,}1$ odrzucamy hipotezę H₀: $p_1=p_2$ na korzyść hipotezy alternatywnej H₁: $p_1\neq p_2$.

Wniosek. Możemy uznać, że odsetek zadowolonych z komfortu jazdy warszawskim metrem jest różny od odsetka zadowolonych z komfortu jazdy stołecznymi tramwajami.

Zad. 3. Na podstawie 12 wyników pomiaru pewnej, mającej rozkład normalny, cechy, otrzymanych dla 12 losowo wybranych elementów badanej populacji, przeprowadzono - przy użyciu pewnego pakietu statystycznego - test *t*-Studenta dla średniej m, na poziomie istotności 0,05, gdzie hipoteza zerowa brzmiała H₀: $m=3{,}2$, natomiast hipotezą alternatywną była hipoteza H₁: $m\neq 3{,}2$. Otrzymano następujący wydruk:

One Sample t-test
data: wyniki_pomiarów
t = -1.6682, df = 11, p-value = 0.1235

alternative hypothesis: true mean is not equal to 3.2
95 percent confidence interval:
3.128487 3.209846
sample estimates:
mean of x
3.169167

Korzystając z powyższego wydruku, wykonać następujące polecenia:
a) odczytać *p*-wartość i zinterpretować ją, **b)** ustalić, czy odczytana *p*-wartość skłania nas do przyjęcia, czy też może do odrzucenia hipotezy H_0 (odpowiedź uzasadnić), **c)** odczytać 95%-ową realizację przedziału ufności dla nieznanej średniej m, otrzymaną na podstawie 12 odnotowanych wyników, **d)** ustalić, czy odczytana realizacja przedziału ufności skłania nas do przyjęcia, czy też może do odrzucenia hipotezy H_0 (odpowiedź uzasadnić), **e)** odczytać wartość statystyki testowej *t*-Studenta, **f)** zweryfikować H_0 na podstawie wartości statystyki testowej i odpowiedniej wartości krytycznej rozkładu *t*-Studenta, **g)** ustalić, co oznacza ostatnia wartość z wydruku.

Ad. a) *p*-wartość = $0{,}1235$; **Ad. b)** *p*-wartość = $0{,}1235 > 0{,}05$ = poziom istotności testu $\Rightarrow$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 (hipotezę H_0 przyjmujemy); **Ad. c)** $m \in (3{,}128487; 3{,}209846)$ - 95%-owa realizacja przedziału ufności dla nieznanej średniej m; **Ad. d)** $m_0 = 3{,}2 \in (3{,}128487; 3{,}209846)$ $\Rightarrow$ hipotezę H_0: $m = 3{,}2$ przyjmujemy;
Ad. e) $t_{emp} = -1{,}6682$; **Ad. f)** $|t_{emp}| = 1{,}6682 < 2{,}2010 = t_{0{,}05;11}$ $\Rightarrow$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H_0: $m = 3{,}2$;
Ad. g) $3{,}169167 = \overline{x}_{12}$ - średnia wyników z 12-elementowej próby.

Zad. 4. Sprzedawca odzieży damskiej twierdzi, że klientki w jednakowym stopniu preferują 5 kolorów sukienek letnich. Próba 200 losowo wybranych kobiet, odwiedzających ten sklep, dostarczyła takich oto informacji, dotyczących preferowanych kolorów:

Kolor	Liczba klientek (n_i)
Biały	32
Czarny	45
Czerwony	34
Zielony	46
Żółty	43

Na poziomie istotności 0,05 zweryfikować słuszność stwierdzenia sprzedawcy.

Populacja: ogół klientek sklepu z odzieżą,
Cecha X: preferowany kolor sukienki,
Założenie: cecha X przyjmuje wartości (warianty) będące kolorami sukienek; X - cecha jakościowa,
Cel: jeśli $p_i = P$(losowo wybrana klientka preferuje sukienkę koloru o numerze *i*) $= P(X = \text{kolor nr } i)$, to musimy zweryfikować hipotezę zerową H_0: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1/5$, wobec hipotezy alternatywnej H_1: $\exists_{i_1 \neq i_2}\ p_{i_1} \neq p_{i_2}$,
poziom istotności $\alpha = 0{,}05$;
Hipotezę H_0 możemy również zapisać następująco:
H_0: cecha X ma rozkład postaci:

Kolor sukienki	Biały (nr 1)	Czarny (nr 2)	Czerwony (nr 3)	Zielony (nr 4)	Żółty (nr 5)
$p_i = P(X = i\text{-ty kolor})$	1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

Technika statystyczna: test chi-kwadrat zgodności.

Wzór na wartość statystyki testowej: $\chi^2_{emp} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i - \hat{n}_i\right)^2}{\hat{n}_i}$, gdzie $\hat{n}_i = n \cdot p_i$;

Obliczenia: Na podstawie danych z tabeli musimy najpierw obliczyć wartość $\chi^2_{emp} = \sum_{i=1}^{5} \frac{\left(n_i - \hat{n}_i\right)^2}{\hat{n}_i}$.

Klasy (kolory)	n_i	p_i	$\hat{n}_i = n \cdot p_i$	$\left(n_i - \hat{n}_i\right)^2$	$\left(n_i - \hat{n}_i\right)^2 / n_i$
Biały (1)	32	1/5	200 · (1/5)=40	$(32-40)^2=64$	64/40=1,6
Czarny (2)	45	1/5	40	$(45-40)^2=25$	25/40=0,625
Czerwony (3)	34	1/5	40	$(34-40)^2=36$	36/40=0,9
Zielony (4)	46	1/5	40	$(46-40)^2=36$	36/40=0,9
Żółty (5)	43	1/5	40	$(43-40)^2=9$	9/40=0,225

$n = \sum_{i=1}^{5} n_i = 200$ $\qquad$ $\sum = \chi^2_{emp} = \frac{170}{40} = 4{,}25$

Zatem, $\chi^2_{emp} = 4{,}25$;
Wartość krytyczna: $\chi^2_{\alpha;k-l-1} = \chi^2_{0{,}05;5-0-1} = \chi^2_{0{,}05;4} = 9{,}4877$; Stąd, $\chi^2_{emp} = 4{,}25 < 9{,}4877 = \chi^2_{0{,}05;4}$.
Odp. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej H_0: $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1/5$ na korzyść hipotezy alternatywnej H_1: $\exists_{i_1 \neq i_2}\ p_{i_1} \neq p_{i_2}$.

Wniosek. Stwierdzenie sprzedawcy - że klientki jego sklepu w jednakowym stopniu preferują wszystkie kolory sukienek letnich - możemy uznać za słuszne.

Zad. 5. Pewien produkt można wytwarzać 3 metodami produkcji. Wysunięto hipotezę, że nie ma zależności między metodą produkcji (cecha X, o wariantach *I*, *II*, *III*), a jakością produkcji (cecha Y, o wariantach *dobra*, *zła*). Na poziomie istotności 0,05 zweryfikować to przypuszczenie, dysponując następującymi danymi:

X (metoda prod.) \ Y (jakość prod.)	dobra	zła
I	40	10
II	80	60
III	60	20

Populacja: ogół produktów,
Cechy X, Y: X - metoda produkcji (o 3 wariantach: I, II, III), Y - jakość produkcji (o 2 wariantach: dobra, zła),
Założenie: cechy X, Y są traktowane jako cechy jakościowe, o wariantach: I, II, III (metoda produkcji), dobra, zła (jakość produkcji),
Cel: weryfikacja hipotezy H_0: cechy X, Y są niezależne, wobec hipotezy alternatywnej H_1: istnieje zależność między cechami X, Y; poziom istotności $\alpha = 0{,}05$,
Technika statystyczna: test chi-kwadrat niezależności.

Wzór na wartość statystyki testowej: $\chi^2_{emp} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \frac{\left(n_{ij} - \hat{n}_{ij}\right)^2}{\hat{n}_{ij}}$. Obliczenia:

X (metoda pr.) \ Y (jakość pr.)	dobra	zła	
I	40	10	$\sum = n_{1.} = 50$
II	80	60	$\sum = n_{2.} = 140$
III	60	20	$\sum = n_{3.} = 80$
	$\sum = n_{.1} = 180$	$\sum = n_{.2} = 90$	$\sum\sum = n = 270$

$$\hat{n}_{11} = \frac{n_{1.} \cdot n_{.1}}{n} = \frac{50 \cdot 180}{270} = 33,(3), \quad \hat{n}_{12} = \frac{n_{1.} \cdot n_{.2}}{n} = \frac{50 \cdot 90}{270} = 16,(6),$$

$$\hat{n}_{21} = \frac{n_{2.} \cdot n_{.1}}{n} = \frac{140 \cdot 180}{270} = 93,(3), \quad \hat{n}_{22} = \frac{n_{2.} \cdot n_{.2}}{n} = \frac{140 \cdot 90}{270} = 46,(6),$$

$$\hat{n}_{31} = \frac{n_{3.} \cdot n_{.1}}{n} = \frac{80 \cdot 180}{270} = 53,(3), \quad \hat{n}_{32} = \frac{n_{3.} \cdot n_{.2}}{n} = \frac{80 \cdot 90}{270} = 26,(6).$$

$$\chi^2_{emp} = \frac{(40-33,(3))^2}{33,(3)} + \frac{(10-16,(6))^2}{16,(6)} + \frac{(80-93,(3))^2}{93,(3)} + \frac{(60-46,(6))^2}{46,(6)} + \frac{(60-53,(3))^2}{53,(3)} + \frac{(20-26,(6))^2}{26,(6)} = 12{,}2;$$

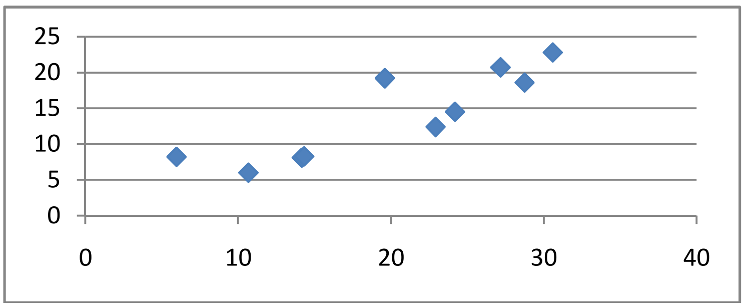
Wartość krytyczna: $\chi^2_{\alpha;(k-1)(l-1)} = \chi^2_{0,05;2\cdot 1} = \chi^2_{0,05;2} = 5{,}9915$;

Stąd, $\chi^2_{emp} = 12{,}2 > 5{,}9915 = \chi^2_{0,05;2}$

Odp. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ odrzucamy hipotezę H_0 o niezależności cech X, Y.
Wniosek. Stwierdzamy istnienie zależności między metodą produkcji (cecha X) a jakością produkcji (cecha Y).

Zad. 6. W pewnym regionie Polski przeprowadzano badania nad zależnością między wielkością bezrobocia (cecha X - w %) oraz wynikiem wyborczym pewnej partii (cecha Y - również w %). Wyniki dla 10 wylosowanych okręgów wyborczych oraz wykres rozproszenia (*scatter plot*) podano poniżej:

x_i	22,92	14,17	27,17	28,75	24,19	14,32	19,60	10,67	5,97	30,59
y_i	12,37	8,09	20,69	18,57	14,49	8,27	19,18	5,99	8,20	22,77



Wykonać następujące polecenia, przy założeniu, że łączny rozkład cech X, Y jest normalny:
a) zweryfikować, na poziomie istotności 0,05, hipotezę o liniowej niezależności cech X i Y w populacji ogółu okręgów wyborczych danego regionu,

b) w przypadku, gdy hipotezę weryfikowaną w punkcie a) należy odrzucić, oszacować równanie funkcji regresji,
c) zinterpretować wartość współczynnika kierunkowego z oszacowanego w punkcie b) równania funkcji regresji,
d) przewidzieć, jaki będzie wynik wyborczy rozważanej partii w okręgu, gdzie bezrobocie wynosi 30%,
e) wiadomo, że wartość współczynnika determinacji wynosi 0,7649; co można powiedzieć o dopasowaniu oszacowania liniowej funkcji regresji do danych?

Ad. a)
Populacja: wszystkie okręgi wyborcze w pewnym regionie Polski,
Badane cechy: X - bezrobocie (w %), Y - wynik wyborczy pewnej partii (w %),
Założenie: wektor (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny,
Cel: weryfikacja hipotezy H$_0$: $\rho = 0$ (o braku liniowej współzależności między X i Y), wobec hipotezy alternatywnej H$_1$: $\rho \neq 0$, o istnieniu liniowej zależności między cechami X, Y; poziom istotności $\alpha = 0{,}05$,
UWAGA: założenie, że (X,Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny gwarantuje, że warunek $\rho = 0$ jest równoważny warunkowi liniowej niezależności (czyli - braku liniowej zależności) cech X i Y,
Technika statystyczna: test współczynnika korelacji liniowej.
Na podstawie obserwacji $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{10}, y_{10})$ (patrz tabela), wyznaczamy wartość statystyki testowej ze wzoru $r_{emp} = \dfrac{c(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var} x}\sqrt{\operatorname{var} y}}$;

Obliczenia: $\bar{x} = \bar{x}_{10} = \dfrac{22{,}92+14{,}17+\ldots+30{,}59}{10} = \dfrac{198{,}35}{10} = 19{,}835(\%)$, $\bar{y} = \bar{y}_{10} = \dfrac{12{,}37+8{,}09+\ldots+22{,}77}{10} = \dfrac{138{,}62}{10} = 13{,}862(\%)$,

$$c(x,y) = \sum_{i=1}^{10}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right) = [(22{,}92-19{,}835)(12{,}37-13{,}862)+(14{,}17-19{,}835)(8{,}09-13{,}862)+\ldots+(30{,}59-19{,}835)(22{,}77-13{,}862)]$$
$$= \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10 \cdot 19{,}835 \cdot 13{,}862 = 398{,}9319,$$

$$\operatorname{var} x = \sum_{i=1}^{10}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \left[(22{,}92-19{,}835)^2 + (14{,}17-19{,}835)^2 + \ldots + (30{,}59-19{,}835)^2\right] = \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10\cdot(19{,}835)^2 = 616{,}2309,$$

$$\operatorname{var} y = \sum_{i=1}^{10}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 = \left[(12{,}37-13{,}862)^2 + (8{,}09-13{,}862)^2 + \ldots + (22{,}77-13{,}862)^2\right] = \sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10\cdot 13{,}862 = 337{,}654;$$

$r_{emp} = \dfrac{c(x,y)}{\sqrt{\operatorname{var} x}\sqrt{\operatorname{var} y}} = \dfrac{398{,}9319}{\sqrt{616{,}2309}\sqrt{337{,}654}} = \dfrac{398{,}9319}{456{,}15} = 0{,}8746$, wartość krytyczna: $r_{\alpha;n} = r_{0,05;10} = 0{,}6319$,

$|r_{emp}| = |0{,}8746| = 0{,}8746 > 0{,}6319 = r_{0,05;10}$.
Odp. Na poziomie istotności 0,05 odrzucamy hipotezę H$_0$: ρ=0, o braku liniowej współzależności między X,Y na korzyść hipotezy alternatywnej H$_1$: $\rho \neq 0$, o istnieniu liniowej zależności między X,Y.
Wniosek. Istnieje liniowa zależność między wielkością bezrobocia a wynikiem wyborczym danej partii;

Ad. b) Oszacowanie $E(Y|X = x) = \hat{f}(x) = \hat{y}(x) = b_1 x + b_0$;

$b_1 = \dfrac{c(x,y)}{\operatorname{var} x} = \dfrac{398{,}9319}{616{,}2309} = 0{,}647$, $b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 13{,}862 - 0{,}647 \cdot 19{,}835 = 1{,}021$.

Zatem, $\hat{f}(x) = \hat{y}(x) = 0{,}647x + 1{,}021 \Rightarrow$ średni wynik partii = $0{,}647 \times$ bezrobocie;

Ad. c) Interpretacja $b_1 = 0{,}647$: jeśli bezrobocie wzrośnie o 1 %, to wynik wyborczy danej partii wzrośnie, <u>średnio rzecz biorąc</u>, o 0,647%;

Ad. d) Przewidywany wynik wyborczy danej partii w okręgu, w którym bezrobocie wynosi 30% to $\hat{f}(30) = 0{,}647 \cdot 30 + 1{,}021 = 20{,}4\ (\%)$.

Ad. e) Wartość współczynnika determinacji 0,7649 świadczy o zadowalającym dopasowaniu oszacowania do danych.