(2) Prawd. Całkowite + ~ r. Poissona
Wzór Bayesa albo Normalnym.

Zadanie z Dostawcami i uszkodzonymi butelkami.

	D_1	D_2	D_3
U	2%	4%	1%
D	98%	96%	99%
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(uszkodzone)

1) Oblicz prawd, że na 100 butelek co najmniej 4 będą reklamowane.

- $n = 100$
- S – losowo wybrana butelka okaże się uszkodzona
- $p = ?$

$$P(U) = P(U|D_1)\cdot P(D_1) + P(U|D_2)\cdot P(D_2) + P(U|D_3)\cdot P(D_3)$$
$$= 0{,}02 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}04 \cdot \frac{1}{4} + 0{,}01 \cdot \frac{2}{4} =$$
$$= \frac{1}{4}\left(0{,}02 + 0{,}04 + 0{,}02\right) = \frac{1}{4}(0{,}08) = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{100} = 0{,}02.$$

- $k \geq 4. \Rightarrow k = 4, 5, \ldots, 100$

mamy do czynienia ze schematem Bernoulliego

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$$
$$= 1 - \binom{100}{0}(0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^{100} - \text{itd.}$$

r. kłopotliwe!

$\Downarrow$

Przybliżamy rozkład dwumianowy

$n \cdot p \leq 10$ rzędu kilkunastu.

$100 \cdot \cancel{\frac{7}{100}} \frac{2}{100} = 2 \leq 10$ ✓

Aproksymujemy r. dwumianowy rozkładem Poisson $\lambda = 2$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) =$$

$$= 1 - e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} - e^{-2} \frac{2^1}{1!} - e^{-2} \frac{2^2}{2!} - e^{-2} \cdot \frac{2^3}{3!} =$$

$$= 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3}\right)$$

Odp:

2) Oblicz prawd., że na 1000 reklamowanych co najmniej 300 pochodzi od dostawcy D_3.

- $n = 1000$
- S – losowo wybrana uszkodzona butelka okaże się od dostawcy D_3
- $p = ?$ } Mimo zad. wybieramy butelkę uszkodzoną. Jakie jest prawd., że pochodzi od dostawcy D_3

zobaczmy które zaszło !

$$P(D_3 | U) = ?$$

$$P(D_3 | U) = \frac{P(D_3 \cap U)}{P(U)} =$$

← Wzór rozpisuje wykorzystując prawd. „przestawione" def.

$$P(U | D_3) = \frac{P(U \cap D_3)}{P(D_3)}$$

$$= \frac{P(U|D_3) \cdot P(D_3)}{P(U|D_1) P(D_1) + P(U|D_2) \cdot P(D_2) + P(U|D_3) \cdot P(D_3)}$$

wzór Bayesa

$$= \frac{0{,}01 \cdot \frac{1}{2}}{0{,}02} = \frac{1}{4}$$

2

$p = \frac{1}{4}$

- $k \geq 300$

Formalnie: $n \cdot p = 1000 \cdot \frac{1}{4} = 250 \not\leq 10$

Przybliżamy rozkład dwupunktowy r. normalnym (bo n duże, p małe i $n \cdot p \not\leq 10$)

- X_i – zm. losowa oznacza, że losowo wybrana i-ta butelka reklamowana pochodzi od dostawcy D_3
- X_i ma rozkład dwupunktowy $(0;1)$

gdy i-ta butelka jest od dostawcy D_3

X_i	0	1
p_i	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

z parametrami $EX_i = \frac{1}{4}$

$$D^2 X_i = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

Wprowadzamy zm. los

$$S_{1000} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{1000}$$

↳ zm. los oznaczająca liczbę butelek ~~reklamowanych wśród~~ od dostawcy D_3 wśród badanych 1000 butelek reklamowanych.

$$S_{1000} \sim \quad ES_{1000} = 1000 \cdot \frac{1}{4} = 250$$

$$DS_{1000} = \sqrt{1000 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{187{,}5} = 13{,}69$$

Pyt. w zad.: Obliczyć prawd., że na 1000 reklamowanych co najmniej 300 pochodzi od D_3

$$P(S_{1000} \geq 300) = ? = 1 - P(S_{1000} < 300) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{S_{1000} - 250}{13{,}69} < \frac{300 - 250}{13{,}69}\right) = 1 - P(Z < 3{,}65) =$$

$Z \sim N(0;1)$

$$= \left\{ P(Z < a) = \Phi(a) \right\} = 1 - \Phi(3{,}65) = 1 - 0{,}99987\ldots$$