(21) 6) Czas życia żarówki jest zm. los. o rozkładzie wykładniczym o śr. $\frac{1}{1000}$ h

Jaki jest rozkład czasu pracy układu złożonego z 3 szeregowo połączonych żarówek

Jakie jest prawd. że układ przepracuje conajmniej 1500 h.

Rozwiązanie:
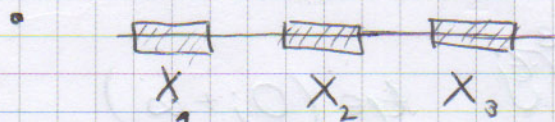
$X_1 \qquad X_2 \qquad X_3$

żeby cały układ zadziałał musi być:

$$P(\ X_1 \cap X_2 \cap X_3\ )$$

• X^3 – zm. los. oznaczająca działanie całego układu.

$$Y = X^3$$

! • mamy tu minimum przekształcenie typu:

zm. los $X \sim Exp(\lambda = 1000) \quad \longrightarrow$ r. wykładniczy.

Wyznaczyć rozkład zm. los. $Y = X^3$

$$F_X(t) = P(X \leqslant t), \quad \longleftarrow \text{ def. dystrybuanty.}$$

wyznaczyć rozkład zm. los. to znaczy: wyznaczyć jej dystrybuantę albo gęstość (gdy mamy zm. los. ciągłą)

$$F_Y(t) = P(Y \leqslant t) = P(X^3 \leqslant t) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Rozważmy/prawdopodobieństwo} \\ \text{nierówności względem} \\ X \end{array} \right\} =$$

$$= P(X \leqslant \sqrt[3]{t}) = \int_{-\infty}^{\sqrt[3]{t}} f_X(x)\, dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{wiadomo, że} \\ \text{zm los } X \sim Exp(\lambda) \text{ to:} \\ f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{dla } x \in (0; +\infty) \\ 0 & \text{poza} \end{cases} \end{array} \right.$$

w r. wykładniczym

$$EX = \frac{1}{\lambda}$$

$$D^2 X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

tu: $EX = \frac{1}{1000} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1000$

$$f(x) = \begin{cases} 1000 \cdot e^{-1000 x} & \text{dla } x \in (0; +\infty) \\ 0 & \text{poza} \end{cases}$$

$$= \int_0^{\sqrt[3]{t}} 1000\, e^{-1000 x}\, dx = 1000 \cdot \frac{e^{-1000 x}}{-1000} \Big|_0^{\sqrt[3]{t}} = -e^{-\sqrt[3]{t}\, 1000} + 1$$

Zatem:

$$F_Y(t) = 1 - e^{-1000\sqrt[3]{t}} \Big|^1$$

$$F_Y'(t) = 0 - e^{-1000\cdot\sqrt[3]{t}} \cdot \left(-1000 \cdot \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\overset{\left(t^{\frac{2}{3}}\right)'}{}$$

$$f_Y(t) = \begin{cases} 1000 \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{-\frac{1}{3}} \cdot e^{-1000\sqrt[3]{t}} & t \in (0; +\infty) \\ 0 & poza \end{cases}$$

Spr. czy aby na pewno f_Y jest gęstością