1) Zmienne losowe X i Y są niezależne oraz:

$EX = 4$; $EY = -1$

$DX = 3$; $D^2Y = 14$

def. wariancji: !

$D^2Y = EY^2 - (EY)^2$

$EY^2 = D^2Y + (EY)^2$

$EY^2 = 14 + (-1)^2 = 15$

Polecenia / uwzględniając

1) Oblicz: $E((\underbrace{X + 3}) (Y^2 + 6)) = ? =$

$E(XY^2 + 3Y^2 + 6X + 18) = E(X \cdot Y^2) + 3E(Y^2) + 6E(X) + E(18)$

z włas. wart. ocz.

$= \left\{ \begin{array}{l} \cdot E(c) = c \\ \cdot E(c \cdot X) = c \cdot EX \\ \cdot E(X+Y) = EX + EY \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ponieważ X i Y są niezależne} \\ \text{zatem X i } Y^2 \text{ też są} \\ \text{niezależne ze stosownego Tw.} \\ ? \text{ z książki} \\ \text{wtedy } E(\underbrace{X \cdot Y^2}_{X \cdot Y \cdot Y}) = EX \cdot EY^2 \end{array} \right\}$

$= EX \cdot EY^2 + 3E(Y^2) + 6EX + 18$

$= \{ \quad \} = 4 \cdot 15 + 45 + 24 + 18 = 106.$

• Własn. wariancji $D^2X = EX^2 - (EX)^2$

• $D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y + 2Cov(X;Y)$

Jeśli X i Y są niezależne to $Cov(X;Y) = 0$.

$\Longrightarrow$

Uwaga! wynikanie w obie str $\Longleftrightarrow$ jest w kontekście

r. Normalnego

• $D^2(c \cdot X) = c^2 \cdot D^2X$

• $D^2(c) = 0$

2) Obliczyć

$\rho(X-3; Y^2-1)$

ρ [ro:] – współczynnik korelacji liniowej Pearsona

$\rho(X;Y) = \dfrac{Cov(X;Y)}{DX \cdot DY}$ gdzie $Cov(X;Y) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY$

$L = Cov(X-3; Y^2-1) = E\big((X-3)\cdot(Y^2-1)\big) - E(X-3)\cdot E(Y^2-1)$

$= E\big(XY^2 - X - 3Y^2 + 3\big) - \big(EX - E(3)\big)\cdot\big(EY^2 - E(1)\big) =$

$= E(XY^2) - \cancel{EX} - \cancel{3EY^2} + \cancel{3} - EX\cdot EY^2 + \cancel{EX} + \cancel{3EY^2} - \cancel{3} =$

$= EX \cdot EY^2 - EX \cdot EY^2 = 0$

Uwaga:

Można by od razu powołać się na słos. tw.

3) $\min\limits_t E(X(1-2Y)-t)^2$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$= E(X - 2YX - t)^2 = E(X^2 + 4X^2Y^2 + t^2 - 4X^2Y - 2Xt + 4XYt)$

$= EX^2 + 4EX^2 \cdot EY^2 + E(t^2) - 4E(X^2)\cdot EY - 2E(X\cdot t) + 4EX\cdot E(Y\cdot t)$

$= \Big\{$ t to jest jakaś liczba

$= \Big\{ \begin{matrix} EX = 4 \\ DX = 3 \end{matrix} \Big\} \Rightarrow DX = \sqrt{D^2X}$

odchylenie standardowe.

z def. wariancji

$D^2X = EX^2 - (EX)^2$

$EX^2 = D^2X + (EX)^2$

$= 3^2 + 4^2 = \underline{25}$

$= 25 + 4\cdot 25 \cdot 15 + t^2 - 4\cdot 25\cdot(-1) - 2t\cdot 4 + 4t\cdot 4\cdot(-1) =$

$= t^2 - 24t + 25 + 1500 - 100 =$

$= t^2 - 24t + 1425$

i mamy obliczyć $\min\limits_t (t^2 - 24t + 1425) \Rightarrow t_w = -\dfrac{b}{2a} = 12$

$y_w = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{24^2 - 4\cdot 1425}{4}$

Dodatek: Dane są zm. los X i Y. Obliczyć:

$$D^2(2X-3Y) = E(2X-3Y)^2 - \left(E(2X-3Y)\right)^2 =$$

$$= E(4X^2 - 12XY + 9Y^2) - (2EX - 3EY)^2 =$$

$$= 4EX^2 - 12E(XY) + 9EY^2 - 4(EX)^2 + 12EXEY - 9(EY)^2 =$$

$$= 4\left(EX^2 - (EX)^2\right) + 9\left(EY^2 - (EY)^2\right) - 12\left(E(XY) - EXEY\right) =$$

$$= 4\cdot D^2X + 9\cdot D^2Y - 12\cdot Cov(X;Y)$$

$$= 2^2\cdot D^2X + (-3)^2\cdot D^2Y - 2\cdot 2\cdot 3\, Cov(X;Y)$$

$$D^2(aX + bY) = a^2\cdot D^2X + b^2\cdot D^2Y - 2ab\, Cov(X;Y)$$