1. Aksjomaty prawdopodobieństwa oraz wynikające z nich własności prawdopodobieństwa,

Funkcja $P: F \to R$ jest funkcją prawdopodobieństwa, gdy:

- $P(A) \geq 0$dla dowolnego $A \in F$
- P(Ω) = 1
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$ … jeżeli zbiory $A_1, A_2, A_3 \ldots$ są parami rozłączne (tzn. nie mają części wspólnej, $A_i \cap A_j = \emptyset\ dla\ i\ \neq j$

Z aksjomatów tych wynikają pewne własności prawdopodobieństwa:

- dla każdego zdarzenia A prawdziwe jest P($\overline{\mathrm{A}}$)= 1- P(A)
- dla każdego zdarzenia A $\in \Omega$ prawdziwa jest nierówność: 0 $\leq$ P(A) $\leq$1.

2. Wzór włączeń i wyłączeń,

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ są zbiorami skończonymi, to $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{T \in P_k(n)} | \bigcap_{j \in T} A_j |$

3. Wzór łańcuchowy,

Niech (Ω, F, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $A_1, \ldots, A_n \in F$ oraz $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$
Wtedy: $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P\big(A_3\big|(A_1 \cap A_2)\big) \ldots P\big(A_n\big|(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})\big)$

4. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym, z założeniami,

Niech $\{B_n, n \in T \subset N\}$ będzie rozbiciem zbioru Ω takim, że $P(B_n) > 0$ dla każdego n.
Wtedy dla dowolnego zdarzenia losowego A mamy $P(A) = \sum_{n \in T} P(A|B_n)P(B_n)$

5. Twierdzenie (wzór) Bayesa, z założeniami,

Niech $\{B_n, n \in T \subset N\}$ będzie rozbiciem zbioru Ω takim, że $P(B_n) > 0$ dla każdego n.
Wtedy dla dowolnego zdarzenia losowego A takiego, że $P(A) > 0$ i dla każdego $n \in T$ mamy $P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A)}$

P(A) możemy wyliczyć z twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym.

6. Definicje niezależności dwóch oraz niezależności *n* zdarzeń,

Dla dwóch zdarzeń:

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, jeśli prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń jest równe iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Dla n zdarzeń:

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazywamy niezależnymi, jeśli dla dowolnego ciągu indeksów $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ zachodzi $P\big(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\big) = P\big(A_{i_1}\big) \cdot \ldots \cdot A_{i_k}$

7. Schemat Bernoulliego - jego określenie oraz wzór na prawdopodobieństwo liczby sukcesów,

Jeżeli przeprowadzimy *n* niezależnych i identycznych doświadczeń, w których są tylko dwa możliwe wyniki, to taki ciąg powtórzeń tego samego doświadczenia nazywamy schematem Bernoulliego. W schemacie tym jedno ze zdarzeń elementarnych nazywamy sukcesem, a drugie porażką.

W schemacie *n* prób Bernoulliego prawdopodobieństwo $P_n(k)$ otrzymania dokładnie *k* sukcesów wyraża się wzorem: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

gdzie *p* jest prawdopodobieństwem sukcesu, zaś $q = 1 - p$ prawdopodobieństwem porażki w próbie Bernoulliego, przy czym $0 < p < 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

8. Definicja dystrybuanty jednowymiarowej zmiennej losowej (dla typu dyskretnego oraz typu ciągłego),

Dystrybuantą jednowymiarowej zmiennej losowej X : Ω → R nazywamy funkcję F_X : R → R określoną wzorem: $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X^{-1}(-\infty, x])$

Jeśli X ma rozkład dyskretny, to: $F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$

Zmienna losowa X o dystrybuancie F_X ma rozkład ciągły (jest typu ciągłego), jeżeli istnieje funkcja $f_X: R \to R$ taka, że: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

9. **Własności dystrybuanty jednowymiarowej zmiennej losowej (dla typu dyskretnego oraz typu ciągłego),**

Funkcja F : R → R jest dystrybuantą jednowymiarowej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, gdy:

- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
- F jest funkcją niemalejącą ($x_1 < x_2 \to F(x_1) \leq F(x_2)$)
- F jest funkcją co najmniej prawostronnie ciągłą

Jeśli X ma rozkład ciągły, to:

- F_X jest funkcją ciągłą w zbiorze R
- $F'_X(x) = f(x)$ w każdym punkcie ciągłości x funkcji f_X

10. **Definicja gęstości jednowymiarowej zmiennej losowej typu ciągłego i jej własności,**

Jeśli dystrybuanta jest funkcją ciągłą to wówczas nieujemna funkcja określona jako $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$ zwana jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa lub gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Zgodnie z tą definicją, gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej X określa prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia w którym $(\mathrm{x} \leq \mathrm{X} < \mathrm{x} + \mathrm{dx})$

Własności:

- $\bigwedge_{a<b} P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
- $\bigwedge_{c\epsilon R} P(X = c) = 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- Jeśli x jest punktem ciągłości, to f(x) = F'(x)

11. **Zapisywanie wzorów na prawdopodobieństwo $P(a < X \leq b)$ (itp.) za pomocą dystrybuanty oraz za pomocą gęstości (to drugie - w przypadku zmiennej losowej typu ciągłego),**

Za pomocą dystrybuanty (F(x) – dystrybuanta):

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)^-$ - dla zmiennej losowej typu dyskretnego

$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ – dla zmiennej losowej typu ciągłego

Za pomocą gęstości (f(x) – gęstość):

$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ – dla typu ciągłego

12. **Wzory na wartość oczekiwaną zmiennej losowej (dla zmiennych losowych typu dyskretnego oraz dla zmiennych losowych typu ciągłego),**

gdy X jest typu dyskretnego (skokowego) o rozkładzie postaci {(x_i, p_i), i = 1,2,...n}: $EX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

gdy X jest typu ciągłego o gęstości f: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

13. **Własności wartości oczekiwanej,**

- wartość oczekiwana zmiennej dyskretnej określonej w skończonej przestrzeni zdarzeń elementarnych jest skończoną sumą liczb rzeczywistych i zawsze istnieje
- jeśli zmienna losowa przyjmuje nieskończenie wiele wartości, to może się zdarzyć, że wartość oczekiwana tej zmiennej nie istnieje
- jeśli istnieją EX i EY, to dla każdego rzeczywistego c zachodzą równości:
  $E(c) = c$
  $E(cX) = c \cdot EX$
  $E(c_1 \cdot X + c_2 \cdot Y) = c_1 \cdot EX + c_2 \cdot EY$
  Jeśli $X \geq 0$, $to\ EX \geq 0$
  Jeśli $X \leq Y, to\ EX \leq EY$
  $|EX| \leq E|X|$

$E(X - EX) = 0$

- jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, to $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$

14. Wzory na wariancję zmiennej losowej (dla zmiennych losowych typu dyskretnego oraz dla zmiennych losowych typu ciągłego),

$D^2X = E(X - EX)^2$

15. Własności wariancji,

Niech X – zmienna losowa, której EX < ∞. Wtedy istnieje wariancja D^2X oraz:

- $D^2X = E(X^2) - (EX)^2$
- $D^2X \geq 0$
- $D^2(c \cdot X) = c^2 \cdot D^2X$

16. Interpretacja odchylenia standardowego zmiennej losowej,

Odchylenie standardowe $\sqrt{D^2X}$ zmiennej losowej X informuje o tym, jak średnio różnią się wartości zmiennej losowej od wartości średniej.

17. Momenty zwykle oraz momenty centralne (dla zmiennych losowy typu dyskretnego oraz dla zmiennych losowych typu ciągłego),

Momenty zwykłe – wartości oczekiwane zmiennych losowych X^r, gdzie $r > 0$.

Np. EX^2 - drugi moment (moment zwykły rzędu drugiego)

Momenty centralne rzędu r to wartości $E(X - EX)^r$, o ile istnieją.

Np. D^2X - moment centralny drugiego rzędu, czyli wariancja.

18. Przykłady ważniejszych zmiennych losowych typu dyskretnego oraz typu ciągłego (wraz z odpowiednimi wzorami określającymi te rozkłady),

Przykłady zmiennej typu dyskretnego/skokowego:

- dwupunktowy – X ma rozkład dwupunktowy z parametrem p, ozn. $X \sim D(p)$, jeśli istnieją liczby rzeczywiste
  a, b oraz $p \in (0,1)$ takie, że: $P(X = a) = p$, $P(X = b) = 1 - p$, $EX = ap + b(1 - p)$, $D^2X = p(1 - p)(a - b)^2$
- dwumianowy – X ma rozkład dwumianowy z parametrem n oraz $p \in (0,1)$, ozn. $X \sim B_{in}(n, p)$, jeśli $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, k = 0,1 \dots n, EX = np, D^2X = np(1 - p)$
- Poissona – X ma rozkład Poissona z parametrem λ, ozn. $X \sim P_o(\lambda)$, $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0,1,2 \dots$, $EX = \lambda, D^2X = \lambda$
- geometryczny – X ma rozkład geometryczny z parametrem $p \in (0,1)$, ozn. $X \sim Geo(p)$, jeśli $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, k = 1,2 \dots, EX = \frac{1}{p}, D^2X = \frac{1-p}{p^2}$

Przykłady zmiennej typu ciągłego:

- jednostajny – X ma rozkład jednostajny w przedziale [a, b], jeśli gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem $f(x) = \{\frac{1}{b-a}, gdy\ x \in [a, b];\ 0\ w\ p.p.\}$. ozn. $X \sim U([a, b]), EX = \frac{a+b}{2}, D^2X = \frac{(b-a)^2}{12}$

- wykładniczy – X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ, ozn. $X \sim Exp(\lambda)$, jeśli gęstość tego rozkładu wyraża się wzorem $f(x) = \{\lambda e^{-\lambda x}, gdy\ x > 0; 0\ w\ p.p.\}, EX = \frac{1}{\lambda}, D^2X = \frac{1}{\lambda^2}$
- normalny (Gaussa) – X ma rozkład normalny z parametrami m, δ, ozn. $X \sim N(m, \delta)$, jeżeli gęstość tego rozkładu jest dana wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \delta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\delta^2}}, EX = m, D^2X = \delta^2$

19. Reguły jednej, dwóch oraz trzech sigm,

Dla rozkładu normalnego $X \sim N(m, \delta)$ lub zbliżonego do niego:

$P(|X - m| < \delta) = 68{,}27\%$, czyli 68,27% wartości cechy znajduje się w zakresie od $\bar{x} - \delta$ do $\bar{x} + \delta$

$P(|X - m| < 2\delta) = 95{,}45\%$, czyli 95,45% wartości cechy znajduje się w zakresie od $\bar{x} - 2\delta$ do $\bar{x} + 2\delta$

$P(|X - m| < 3\delta) = 99{,}73\%$, czyli 99,73% wartości cechy znajduje się w zakresie od $\bar{x} - 3\delta$ do $\bar{x} + 3\delta$

Gdzie $\bar{x}$ – średnia arytmetyczna, δ - odchylenie standardowe

20. Definicja dystrybuanty dwuwymiarowej zmiennej losowej (dla typu dyskretnego oraz typu ciągłego),

Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) to funkcja $F: R^2 \to [0,1]$ określona wzorem: $F(t, s) = F_{(X,Y)}(t, s) = P(X \le t, Y \le s)$

w przypadku typu dyskretnego/skokowego:

$F_{(X,Y)}(t, s) = \sum_{i:\, x_i \le t, j:\, y_j \le s} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i:\, x_i \le t, j:\, y_j \le s} p_{ij}$

w przypadku typu ciągłego:

$F_{(X,Y)}(t, s) = \int_{-\infty}^{t} \left[\int_{-\infty}^{s} f(x, y) dy\right] dx$

21. Własności dystrybuanty dwuwymiarowej zmiennej losowej (dla typu dyskretnego oraz typu ciągłego),

- dla każdego t_1, t_2: $t_1 < t_2 => F(t_1, s) \le F(t_2, s);$ $s \epsilon R$
- dla każdego s_1, s_2: $s_1 < s_2 => F(t, s_1) \le F(t, s_2);$ $t \epsilon R$
  To funkcja niemalejąca
- $F_{(X,Y)}(t, s) \to 0, gdy\ t \to -\infty\ lub\ s \to -\infty$
- $F_{(X,Y)}(t, s) \to 1, gdy\ t \to +\infty\ lub\ s \to +\infty$
  Jest prawostronnie ciągła
- $jeśli\ t \le u\ i\ s \le v, to\ F_{(X,Y)}(u, v) - F_{(X,Y)}(u, s) - F_{(X,Y)}(t, v) + F_{(X,Y)}(t, s) \ge 0$

22. Definicja gęstości dwuwymiarowej zmiennej losowej typu ciągłego,

Wektor losowy (X, Y) jest dwuwymiarową zmienną losową typu ciągłego, gdy istnieje nieujemna funkcja f określona na R^2 taka, że $P\big((X, Y) \in A\big) = \iint_{R^2} f(x, y) dxdy$ dla każdego $A \in B(R^2)$.

Funkcję f nazywamy gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y).

Spełnia ona warunek: $\iint_{R^2} f(x, y) dxdy = 1$

23. Wzory na prawdopodobieństwo warunkowe dla zmiennej losowej typu dyskretnego,

$P\ (X = x_i\ |Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$, $\qquad P\left(Y = y_j\ |X = x_i\right) = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$

24. Wzory na gęstości brzegowe,

$f_1(x) = f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$, $\qquad f_2(y) = f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

25. Nierówność Schwarza,

Jeśli X, Y – zmienne losowe, takie że $EX^2 < +\infty$, $EY^2 < +\infty$ to wtedy $E(X\cdot Y) \le \sqrt{EX^2} \cdot \sqrt{EY^2}$

26. Definicja kowariancji i jej własności,

cov(X, Y) = E(XY) – E(X)·E(Y)

Kowariancja jest to wielkość charakteryzująca wspólne zmiany dwóch zmiennych X i Y. Jest oczekiwaną wartością iloczynu wartości zmiennych X i Y od ich wartości oczekiwanych.

Własności:

- |cov (X, Y)| ≤ $\sqrt{D^2X \cdot D^2Y}$ o ile $D^2X < +\infty$, $D^2Y < +\infty$
- Cov(X + a, Y + b) = cov(X, Y)
- Cov(aX + bY, Z) = a·cov(X,Z) + b·cov(Y, Z)

27. Definicja współczynnika korelacji i interpretacje jego wartości,

Współczynnik korelacji jest miernikiem zależności między dwiema cechami

$\rho\ (X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D^2X} * \sqrt{D^2Y}}$ o ile $D^2X > 0$, $D^2Y > 0$

Własności:

- | ρ (X, Y) | ≤ 1
- Jeśli ρ (X, Y) = 0 , to mówimy, że X, Y są nieskorelowane
- Jeśli ρ (X, Y) = 1, to istnieje liniowa zależność dodatnia między zmiennymi losowymi X, Y tzn. $Y = aX + b$
- Jeśli ρ (X, Y) = -1, to istnieje liniowa zależność ujemna między zmiennymi losowymi X, Y
- Jeśli ρ (X, Y) > 0, to większym wartościom jednej zmiennej losowej odpowiadają średnio większe wartości drugiej zmiennej losowej
- Jeśli ρ (X, Y) < 0, to większym wartościom X/Y odpowiadają średnio większe wartości Y/X

28. Wyznaczanie momentów zwykłych zmiennej losowej $X \sim N(0,1)$,

$$EX^t = \int_{-\infty}^{+\infty} x^t * f(x)dx$$

29. Sformułowanie Twierdzenia De Moivre'a-Laplace'a (tzn., CTG dla schematu Bernoulliego),

$$P\left(\alpha < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \beta\right) = \theta(\beta) - \theta(\alpha)$$

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \beta\right) = \theta(\beta)$$

$$P(S_n \le m) = P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \theta(\frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}})$$

30. Nierówność Markowa i jej wykorzystanie w dowodzie nierówności Czebyszewa,

$$P\ (|X| \ge \varepsilon\ ) \le \frac{E\ (|X|^p)}{\varepsilon^p}$$

31. Nierówność Czebyszewa dla częstości sukcesów w schemacie Bernoulliego,

$$\forall\, \varepsilon > 0\; P\left(\left|\frac{Sn}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p*q}{n*\varepsilon^2}$$

32. Pojęcie próby losowej,

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nazywamy próbą losową rozmiaru n z rozkładu o gęstości f(x) (o dystrybuancie F(x)) jeśli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie z gęstości f(x) (z dystrybuantą F(x)).

33. Pojęcie statystyki z próby,

Statystyką z próby nazywamy zmienną losową (np. Z_N), będącą funkcją zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Statystykami z próby są, na przykład, średnia arytmetyczna, wariancja oraz inne parametry.

34. Definicja estymatora,

Estymatorem parametru θ rozkładu cechy X nazywamy dowolną statystykę $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, służącą do oszacowania nieznanej wartości tego parametru.

35. Definicja przedziału ufności,

Przedział ufności (estymator przedziałowy) jest przedziałem o końcach zależnych od próby losowej $X_1, X_2, \ldots, X_n$, który z pewnym, z góry zadanym, prawdopodobieństwem pokrywa nieznaną wartość parametru θ, tzn. $P\left(\theta \in \left(\underline{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ \bar{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)\right)\right) = 1 - \alpha$.

36. Od czego zależy długość przedziału ufności?,

Długość przedziału ufności zależy od:

- liczność próby – im liczniejsza próba, tym mniejsza długość ($n \nearrow\ \Rightarrow\ d \searrow$),
- poziom ufności – im większy poziom ufności, tym większa długość ($1-\alpha \nearrow\ \Rightarrow\ d \nearrow$),
- wariancja cechy – im większa wariancja cechy, tym mniejsza długość ($\sigma^2 \nearrow\ \Rightarrow\ d \searrow$).

37. Definicje błędu I rodzaju oraz błędu II rodzaju,

Przy testowaniu hipotez statystycznych istnieją dwa rodzaje błędów:

- błąd I rodzaju – polega on na odrzuceniu H_0, gdy jest ona w rzeczywistości prawdziwa,
- błąd II rodzaju – polega on na nieodrzuceniu (przyjęciu) hipotezy H_0, gdy jest ona w rzeczywistości fałszywa.

38. Definicja poziomu istotności testu,

Poziom istotności testu (oznaczany najczęściej przez α) jest to prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju, czyli odrzucenia hipotezy zerowej, gdy jest ona w rzeczywistości prawdziwa.

39. Definicja mocy testu,

Moc testu (oznaczany najczęściej przez $1-\beta$) jest to prawdopodobieństwo niepopełnienia błędu II rodzaju, czyli prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej.

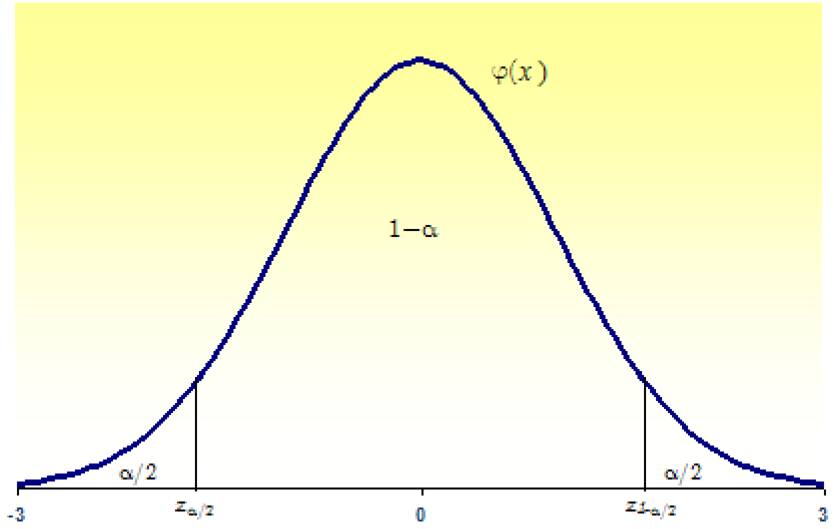
40. Definicja *p*-wartości oraz jej wyznaczanie dla podanej wartości statystyki testowej odpowiedniego testu,

p-wartość (*p*-value) – minimalny poziom istotności, przy którym otrzymana wartość statystyki testowej prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej H_0.

α oznacza poziom istotności testu. Wtedy:

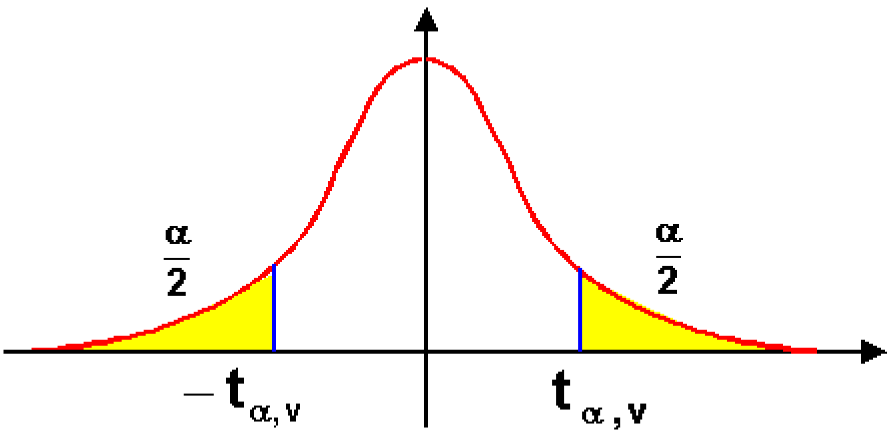
- gdy *p*-wartość $\leq \alpha$, to hipotezę H_0 odrzucamy na korzyść hipotezy alternatywnej H_1,
- gdy *p*-wartość $> \alpha$, to nie mamy podstaw do odrzucenia hipotezy H_0 (H_0 przyjmujemy).

41. Zaznaczanie (na odpowiednim rysunku) kwantyla rozkładu normalnego,



Gdzie $z_{\alpha/2}$ stanowi wartość z tablicy kwantyli rozkładu normalnego, odczytaną dla odpowiedniego α (u nas zamiast *z* oznacza się to *u*)

42. Zaznaczanie (na odpowiednim rysunku) wartości krytycznej rozkładu t-Studenta,



Gdzie $t_{\alpha,V}$ stanowi wartość z tablicy kwantyli rozkładu normalnego, odczytaną dla odpowiedniego α i V (u nas zamiast *V* oznacza się to *r*)

43. Jakiego rodzaju hipotezy weryfikujemy w teście chi-kwadrat zgodności?,

Weryfikujemy hipotezę H_0: cecha X ma rozkład F; poziom istotności α .

44. Jakiego rodzaju hipotezy weryfikujemy w teście chi-kwadrat niezależności?,

Obserwujemy dwie cechy: X , Y (mogą być ilościowe lub jakościowe).

Weryfikujemy hipotezę H_0: cechy X , Y są niezależne, wobec hipotezy alternatywnej H_1: istnieje zależność między cechami X , Y ; poziom istotności α .

45. Interpretacja współczynnika kierunkowego w oszacowaniu liniowej funkcji regresji.

Współczynnik ten odpowiada na pytanie, jaki jest przeciętny przyrost wartości zmiennej zależnej na jednostkę przyrostu zmiennej niezależnej.