

1. Wykonujemy doświadczenie, w którym możliwe są tylko dwa wyniki: sukces z prawdopodobieństwem p oraz porażka z prawdopodobieństwem $1 - p$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że po wykonaniu 1000 doświadczeń średnia liczba sukcesów będzie bliżej p niż 0.001? Ile co najmniej należy wykonać doświadczeń, aby to prawdopodobieństwo wynosiło nie mniej niż 0.99?
2. Pewna partia polityczna ma dwudziestoprocentowe poparcie w społeczeństwie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w okręgu wyborczym składającym się z 10000 wyborców, partia uzyska co najmniej 1000 głosów przy siedemdziesięcioprocentowej frekwencji.
3. Z dotychczasowych obserwacji wynika, że zainteresowanie mężczyzn pewnym kierunkiem studiów jest niewielki i można je szacować na poziomie 1%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 200 osób przyjmowanych w kolejnej rekrutacji będzie co najmniej trzech mężczyzn?
4. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca jest równe 0.515. Wyznaczyć wartość prawdopodobieństwa, że wśród tysiąca noworodków będzie co najwyżej 480 dziewczynek.
5. Obliczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że partia 100 elementów, z których każdy ma czas pracy T_i ($i = 1, 2, \dots, 100$) wystarczy na zapewnienie pracy urzędnika przez łącznie 100 godzin, gdy wiadomo, że $ET_i = 1$ oraz $D^2T_i = 1$.
6. Zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_{100} są niezależne o jednakowym rozkładzie wykładniczym z parametrem 4. Dla

$$X = \sum_{k=1}^{100} X_k$$

wyznaczyć przybliżoną wartość wyrażenia $P(X > 30)$

7. Wśród ziaren pszenicy znajduje się 0.2% ziaren chwastów. Wyznaczyć wartość prawdopodobieństwa, że wśród tysiąca losowo wybranych ziaren znajdują się co najmniej 3 ziarna chwastów?
8. Wielu botaników dokonywało doświadczeń nad krzyżowaniem żółtego groszku (hybryda). Według znanej hipotezy Mendla, prawdopodobieństwo pojawienia się zielonego groszku przy takich krzyżówkach równa się $1/4$. Zakładając słuszność hipotezy Mendla, oblicz prawdopodobieństwo, że dla trzech tysięcy czterystu doświadczeń nad krzyżówką, w co najmniej dziewięciuset przypadkach otrzymamy zielony groszek.
9. Wśród ziaren pszenicy znajduje się 0.2% ziaren chwastów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród wybranych losowo tysiąca ziaren znajdują się co najmniej 3 ziarna chwastów?
10. Załóżmy, że przy składaniu książki w drukarni każda litera ma prawdopodobieństwo 0.0001, że zostanie złożona błędnie. Po złożeniu książki szpalty czyta korektor, który znajduje każdy błąd z prawdopodobieństwem 0.5. Znaleźć prawdopodobieństwo, że w książce o stu tysiącach znaków drukarskich pozostaną po korekcie nie więcej niż dwa błędy.
11. Licznik Geigera – Müllera i źródło promieniowania umieszczono względem siebie tak, że prawdopodobieństwo zarejestrowania przez licznik wypromieniowanej cząsteczki wynosi $\frac{1}{10000}$. Załóżmy, że w czasie obserwacji preparat radioaktywny wypromieniował 30000 cząstek. Jakie jest prawdopodobieństwo, że licznik zarejestrował co najwyżej trzy cząstki?
12. Sklep spożywczy zaopatrują w spirytus dostawcy D_1, D_2, D_3 zachowując proporcje $1 : 1 : 2$. Wiadomo, że dostawy D_1 zawierają średnio 2% butelek z uszkodzonym stemplem lakowym, dostawy D_2 – 4%, a dostawy D_3 – 1%. Klient, który kupił butelkę z uszkodzonym stemplem lakowym kwestionuje jej zawartość. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że:
 - a) na tysiąc reklamowanych butelek co najmniej 300 pochodzi od dostawcy D_3 ,
 - b) na sto butelek, co najmniej cztery będą reklamowane.

Ponadto zbadać, ile co najmniej butelek należy kupić, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż 0.99 trafić na co najmniej jedną butelkę z uszkodzonym stemplem lakowym.

W punktach a) i b) zastosować przybliżenie rozkładem Poissona lub normalnym uzasadniając swój wybór.

13. Sklep zaopatrują w towar trzy zakłady odpowiednio w dwudziestu, pięćdziesięciu oraz trzydziestu procentach. W dostawach tych zakładów procent braków jest odpowiednio równy: 0.5%, 0.3% oraz 0.5%. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że:

- a) na tysiąc zakupionych sztuk towaru co najmniej 300 pochodzi z drugiego zakładu,
- b) na sto zakupionych sztuk towaru co najwyżej cztery, to braki.

Ponadto zbadać, ile co najmniej sztuk towaru trzeba zakupić, aby z prawdopodobieństwem nie mniejszym, niż 0.7 trafić na co najmniej jedną wybrakowaną sztukę towaru z zakładu drugiego.

W punktach a) i b) zastosować przybliżenie rozkładem Poissona lub normalnym uzasadniając swój wybór.

14. Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych X oraz Y dany jest za pomocą tablicy

X		Y	
	0	1	2
0	0.10	0.06	0.08
1	0.27	0.05	0.17
2	0.02	0.05	0.07
3	0.03	0.04	0.06

Obliczyć $E(X + Y)$ oraz $P(X + Y \geq 2 | Y < 2)$.

15. Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych X oraz Y dany jest za pomocą tablicy

X		Y	
	0	1	2
0	0.09	0.01	0.08
1	0.17	0.15	0.17
2	0.03	0.05	0.07
3	0.02	0.10	0.06

Obliczyć $E(X + Y)$ oraz $P(X + Y \leq 1 | Y < 1)$.

16. Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych X oraz Y dany jest za pomocą tablicy

X		Y	
	0	1	2
0	0.09	0.01	0.08
1	0.17	0.11	0.12
2	0.03	0.05	0.07
3	0.02	0.10	0.15

Obliczyć $E(X - 2Y)$ oraz $P(X + Y \leq 1 | Y > 0)$.

17. Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych X oraz Y dany jest za pomocą tablicy

X		Y	
	0	1	2
0	0.18	0.01	0.08
1	0.17	0.01	0.12
2	0.12	0.03	0.01
3	0.02	0.1	0.15

Obliczyć $E(2X + Y)$ oraz $P(X + Y \leq 1 | Y \geq 1)$.

18. Niech $X \sim U(-1, 1)$. Znaleźć rozkład $Y = \text{sign} X$.

19. $X \sim U(0, 3)$. Znaleźć rozkład $Y = \min\{X, X^2\}$

20. $X \sim U(0, 3)$. Znaleźć rozkład $Y = \max\{2, X\}$

21. Obliczyć EX , gdzie X jest sumą wyrzuconych oczek przy 500 – krotnym rzucie kostką.

22. Znaleźć wartość oczekiwaną pola prostokąta, którego obwód jest równy 20, a jeden bok jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $(1, 10)$.

23. Mamy zmienną losową X przyjmującą wartości $1, 2, \dots$, taką, że $P(X \geq n) = (1 - p)^{n-1}$, $p \in (0, 1)$. Oblicz EX .

24. Niech $X \sim U(0, 1)$, $Y = \max\{X, 0.5\}$. Oblicz EY .

25. Gra polega na wykonaniu dwóch kolejnych rzutów sześcienną kostką do gry, przy czym za udział w grze należy wnieść opłatę w wysokości siedmiu paciorków. Wygrana jest równa sumie wyrzuconych oczek. Jaka jest oczekiwana wygrana w tej grze? Czy wiadomość o tym, że w pierwszym rzucie uzyskano trzy oczka zmienia szansę na wygraną?

26. Gra polega na wykonaniu dwóch kolejnych rzutów sześcienną kostką do gry. Wygrana jest równa różnicy oczek wyrzuconych w pierwszym i drugim rzucie. Jaka jest oczekiwana wygrana w tej grze? Czy wiadomość o tym, że w pierwszym rzucie uzyskano trzy oczka zmienia szansę na wygraną?

27. Zmienne losowe X oraz Y są niezależne oraz: $EX = 2$, $DX = 4$, $EY = -3$, $D^2Y = 4$. Oblicz

- a) $E((X - 3)(Y^2 + 3))$
- b) $\varrho(X^2, Y - 3)$
- c) $\min_t E(X - YX - t)^2$

28. Zmienne losowe X oraz Y są niezależne oraz: $EX = 1$, $DX = 2$, $EY = -3$, $D^2Y = 3$. Oblicz

- a) $E((X + 103)(Y^2 + 3))$
- b) $\varrho(X, (Y + 3)^2)$
- c) $\min_t E(YX - 3X - t)^2$

29. Zmienne losowe X oraz Y są niezależne oraz: $EX = 4$, $DX = 3$, $EY = -1$, $D^2Y = 14$. Oblicz

- a) $E((X + 3)(Y^2 + 6))$
- b) $\varrho(X - 3, Y^2 - 1)$
- c) $\min_t E(X(1 - 2Y) - t)^2$

30. Zmienne losowe X oraz Y są niezależne oraz: $EX = 4$, $DX = 3$, $EY = -1$, $D^2Y = 14$. Oblicz

- a) $E((X + 3)(Y^2 + 6))$
- b) $\varrho(X - 3, Y^2 - 1)$
- c) $\min_t E(X(1 - 2Y) - t)^2$

31. Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych X oraz Y dany jest za pomocą tablicy

X	Y		
	0	1	2
0	0.30	0.04	0.09
1	0.19	0.11	0.27

Wyznaczyć współczynnik korelacji zmiennych X , Y . Dobrać tak parametry funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, aby wartość $E(Y - f(X))^2$ była minimalna. Wyznaczyć $D^2(X|Y = 2)$ oraz $E(-3X + 2Y)$.

32. Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych X oraz Y dany jest za pomocą tablicy

X	Y		
	0	1	2
0	0.20	0.04	0.08
1	0.20	0.21	0.27

Wyznaczyć współczynnik korelacji zmiennych X , Y . Dobrać tak parametry funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, aby wartość $E(Y - f(X))^2$ była minimalna. Wyznaczyć $D^2(X|Y < 2)$ oraz $E(X - 2Y)$.

33. Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych X oraz Y dany jest za pomocą tablicy

X	Y	
	-1	1
0	0.2	0.1
1	0.3	0.4

Wyznaczyć $E(-4X - 2Y^2)$ oraz $E(XY)$.

34. Dwuwymiarowy rozkład pary zmiennych losowych X oraz Y dany jest za pomocą tablicy

X		Y	
		0	1
-1		0.2	0.1
1		0.3	0.4

Wyznaczyć $E(4X^3 - 3Y)$ oraz $E(XY)$.

35. Lekarz podał pacjentce test na pewien rodzaj raka. Zastosowany test daje wynik pozytywny w 99% przypadków gdy pacjent ma raka. Jeżeli pacjent nie ma raka test daje w 95% przypadków wynik negatywny. Przed zastosowaniem testu lekarz wiedział tylko, że przeciętnie jedna kobieta na tysiąc jest chora na raka. Co zmieni informacja, że wynik testu jest pozytywny? Jakie jest prawdopodobieństwo, że pacjentka rzeczywiście ma raka?

36. Jedna moneta z 65 ma orła z dwóch stron. Reszta monet jest „uczciwa”. Wybrana losowo jedna moneta przez 5 rzutów dawała w wyniku orła. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowano monetę z dwoma orłami?

37. Towarzystwo lotnicze zauważyło, że 4% pasażerów robiących rezerwacje na konkretny lot nie zgłasza się. W konsekwencji sprzedają 100 zarezerwowanych miejsc w 98 osobowym samolocie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy pasażer, który zgłosi się na lot będzie miał miejsce w samolocie?

38. Przeciętnie jedna osoba na tysiąc ma pewną rzadką typ krwi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w mieście liczącym 100 tys. mieszkańców nikt nie ma tej grupy krwi? Ile osób należałoby przebadać aby szansa znalezienia przynajmniej jednej osoby z tą grupą krwi była większa niż $\frac{1}{2}$?

39. Pewien zakład produkuje 25% produktów pierwszej jakości, 12% drugiej jakości oraz 63% trzeciej jakości. Wylosowano dwa produkty i okazało się, że jeden z nich ma lepszą jakość niż drugi. Jakie jest prawdopodobieństwo, że produkt lepszej jakości jest produktem pierwszej jakości?

40. Z badań genealogicznych wynika, że kobieta jest nośnikiem hemofilii z prawdopodobieństwem p . Jeżeli kobieta jest nośnikiem hemofilii, to każdy jej syn dziedziczy tę chorobę z prawdopodobieństwem 0.5. Kobieta, która nie jest nośnikiem hemofilii rodzi zdrowych synów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że drugi syn będzie zdrowy, jeśli pierwszy syn jest zdrowy.

41. W fabryce produkuje się dwa rodzaje śrubek. Wylosowano dwie śrubki. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania dwóch identycznych śrubek wynosi p , a wylosowania śrubki pierwszego rodzaju wynosi q . Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że jedna ze śrubek jest pierwszego rodzaju, jeżeli wiadomo, że druga też jest pierwszego rodzaju.

42. Mamy dwie partie wyprodukowanych przedmiotów przy czym wiadomo, że wszystkie przedmioty jednej partii odpowiadają wymaganiom technicznym, a 15% przedmiotów drugiej partii jest złej jakości. Przedmiot wzięty z losowo wybranej partii był dobrej jakości. Obliczyć prawdopodobieństwo, że drugi przedmiot wzięty z tej samej partii będzie dobrej jakości, jeżeli pierwszy przedmiot po sprawdzeniu zwrócono z powrotem do partii, z której pochodził.

43. Mamy trzy monety A , B , C takie, że prawdopodobieństwa wyrzucenia orła wynoszą odpowiednio p_A , p_B oraz p_C . Najpierw losujemy jedną monetę z prawdopodobieństwami odpowiednio α_A , α_B oraz α_C ($\alpha_A + \alpha_B + \alpha_C = 1$), a następnie wykonujemy nią n rzutów. Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania samych orłów? Powiedzmy, że w wyniku powyższego eksperymentu zaobserwowano n orłów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana została moneta A

44. Dwie siostry Ania i Beata zmywają szklanki. Ania jako starsza zmywa trzy razy częściej aniżeli Beata. Wiadomo, że prawdopodobieństwo zbitcia szklanki w czasie mycia przez Anię wynosi 0.01, a przez Beatę 0.04. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w czasie zmywania:

- zostanie zbita jedna szklanka,
- szklanka została rozbita. Jakie jest prawdopodobieństwo, że to zbita Ania?

45. W szpitalu na oddziale wewnętrznym przebywa średnio 2000 chorych. Wśród leczonych było 800 cierpiących na chorobę K_1 , 600 na chorobę K_2 , 400 na chorobę K_3 i 200 na chorobę K_4 . Prawdopodobieństwo pełnego wyleczenia z chorób wynosiło 0.9, 0.8, 0.7, 0.5. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

- a) losowo wybrany pacjent będzie całkowicie wyleczony przy wypisaniu ze szpitala,
- b) wypisany pacjent jest całkowicie wyleczony. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cierpiał na chorobę K_2 ?

46. Obok pewnej stacji CPN średnio przejeżdża 3 razy więcej samochodów ciężarowych niż osobowych. Prawdopodobieństwo, że przejeżdżający samochód osobowy będzie nabierał paliwo wynosi 0.01, a ciężarowy 0.05.

- a) jakie jest prawdopodobieństwo, że przejeżdżający samochód będzie nabierał paliwo?
- b) samochód nabierał paliwo; jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to samochód osobowy?

47. W magazynach hurtowni znajdują się sanki produkowane w trzech różnych zakładach: Z_1, Z_2, Z_3 . Zapasy stanowią odpowiednio 40%, 35%, 25% produkcji zakładów Z_1, Z_2, Z_3 . Wiadomo, że zakłady dostarczają odpowiednio 1%, 2%, 3% braków. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo sprawdzone sanki okażą się:

- a) dobre,
- b) sprawdzone sanki okazały się dobre. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zostały wyprodukowane przez zakłady Z_2 ?

48. Na rynku są odkurzacze trzech firm, przy czym firma A ma 50% udziału w rynku, firma B — 30%, zaś firma C — 20%. Wadliwość silników w odkurzaczach poszczególnych firm wynosi odpowiednio 1%, 2% oraz 5%. Jaka powinna być struktura procentowa silników w magazynie punktu serwisowego, by można było bezzwłocznie przystąpić do wymiany zepsutego silnika w odkurzaczu przyniesionym do tego punktu?

49. Wśród kandydatów na studia jest 50% absolwentów klas matematyczno-fizycznych, 30% absolwentów klas biologiczno-chemicznych oraz 20% absolwentów klas humanistycznych. Szanse na zdanie egzaminu z matematyki dla poszczególnych grup absolwentów wynoszą odpowiednio 90%, 80% oraz 50%. Jakiej struktury procentowej absolwentów można się spodziewać wśród studentów pierwszego roku?

50. Eksperyment polega na rzucaniu symetryczną monetą. Eksperyment kończymy, gdy moneta upadnie dwa razy z rzędu na tę samą stronę. Wyznaczyć najmniejszą liczbę rzutów, przy której prawdopodobieństwo zakończenia eksperymentu wynosi co najmniej 0.95.

51. W partii czterdziestu detali znajduje się dziesięć detali wadliwych. Eksperyment polega na kolejnym losowaniu grupy czterech detali do momentu uzyskania samych dobrych detali. Po każdym losowaniu zwracamy detale do partii. Wyznaczyć model probabilistyczny dla liczby kolejnych losowań.

52. Trzy fabryki produkują towar (w sztukach) tak, że pierwsza fabryka pokrywa 30% zapotrzebowania rynku, druga fabryka — 5% oraz trzecia — 65%. Jakość towaru produkowanego przez poszczególne fabryki kształtuje się następująco

Fabryka	wadliwość
pierwsza	12%
druga	15%
trzecia	13%

Kupujemy na rynku w sposób losowy po jednej sztuce tak długo, aż zakupimy trzy dobre sztuki lub gdy liczba zakupów przekroczy 6. Wyznaczyć model probabilistyczny dla liczby zakupów.

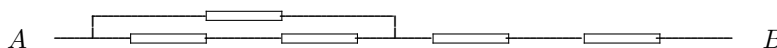
53. W celu zwiększenia niezawodności przyrządu, dubluje się go za pomocą pracujących niezależnie takich samych przyrządów o niezawodności p każdy. Ile należy wziąć przyrządów, aby uzyskać niezawodność nie mniejszą niż 0.99?

54. Przypuśćmy, że pewien owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, a każde z jajeczek wylęga się z prawdopodobieństwem p . Zakładając wzajemną niezależność wylęgania się jaj, znaleźć prawdopodobieństwo, że ilość potomków danego owada wyniesie dokładnie l .

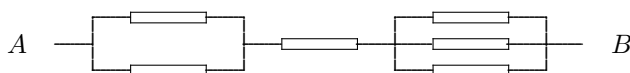
55. Wśród 300 zdających egzaminy na wyższą uczelnię techniczną jest 200 absolwentów klas matematyczno-fizycznych, 75 klas ogólnokształcących i 25 klas humanistycznych. Prawdopodobieństwo zdania egzaminu przez absolwenta jest następujące: dla absolwentów klas matematyczno-fizycznych wynosi 0.9, dla klas ogólnokształcących 0.25 i klas humanistycznych 0.1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo zdający:

- zda egzamin,
- wylosowany absolwent zdał egzamin. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ukończył klasę matematyczno-fizyczną?

56. Na rysunku widać system niezależnie działających bezpieczników. Prawdopodobieństwo przepalenia się bezpiecznika przed upływem czasu T wynosi p . Oblicz prawdopodobieństwo ciągłego przepływu prądu z A do B .



57. Na rysunku widać system niezależnie działających bezpieczników. Prawdopodobieństwo przepalenia się bezpiecznika przed upływem czasu T wynosi p . Oblicz prawdopodobieństwo ciągłego przepływu prądu z A do B .



58. Wykonujemy co sekundę doświadczenie według schematu Bernoulliego aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń, Y – mierzony w sekundach czas oczekiwania na pierwszy sukces. Wyznaczyć rozkład zmiennej Y oraz X .

59. Entomolog pobierał próbę losową z dużej populacji pewnych owadów. Notował płeć chwytanych osobników męskich i przerwał pobieranie próbki, gdy otrzymał M ($M > 1$) osobników męskich. Otrzymał próbkę o liczności X . Niech θ będzie frakcją osobników męskich w populacji. Podać rozkład zmiennej losowej X . Jaka jest wartość oczekiwana ilości złapanych owadów?

60. Sprzedawca jest zainteresowany maksymalizacją zysku ze sprzedaży pewnego, łatwo psującego się towaru. Zakup jednego opakowania kosztuje go \$20, zaś sprzedaje je za \$50. Po jednym dniu niesprzedany towar należy wyrzucić jako niezdatny do spożycia. Wielkość dziennych zakupów jest zmienną losową o rozkładzie:

Ilość towaru	10	11	12	13
Prawdopodobieństwo	.15	.20	.40	.25

Ile towaru powinien sprzedawca zamówić, by mógł oczekiwać największego zysku?

61. Przedsiębiorca zainteresowany jest zatrudnieniem w swojej firmie samochodowej kilku mechaników. Na kolejny rok przewidywane są następujące ilości godzin pracy dla mechaników:

Ilość godzin	10000	12000	14000	16000
Prawdopodobieństwo	.2	.3	.4	.1

Planowana zapłata za jedną godzinę pracy mechanika wynosi \$9 zaś spodziewany zysk z jednej godziny pracy — \$16. Mechanik może pracować 40 godzin w tygodniu oraz ma prawo do dwutygodniowego urlopu. Na podstawie podanych informacji podać optymalną liczbę mechaników, która powinna być zatrudniona.

62. Entomolog pobierał próbę losową z dużej populacji pewnych owadów. Notował płeć chwytanych osobników męskich i przerwał pobieranie próbki, gdy otrzymał M ($M > 1$) osobników męskich. Otrzymał próbkę o liczności X . Niech θ będzie frakcją osobników męskich w populacji. Podać rozkład zmiennej losowej X . Jaka jest wartość oczekiwana ilości złapanych owadów?

63. Z odcinka $[0, 1]$ wybraliśmy losowo i niezależnie wartości x oraz y . Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że pole prostokąta o wierzchołkach w punktach $(0, 0)$, $(x, 0)$, (x, y) , $(0, y)$ układu kartezjańskiego nie przekracza wartości 0.5, jeżeli wiadomo, że $x < 3/5$.

64. Z odcinka $[-1, 1]$ wybraliśmy losowo i niezależnie liczby x oraz y . Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że funkcja $\ln(x^2 + y^2 - 1)$ jest poprawnie określona, jeśli wiadomo, że $x^2 + y^2 > 0.25$.

65. Pewne urządzenie techniczne pracuje dopóty, dopóki nie uszkodzi się któryś z k elementów typu A lub któryś z l elementów typu B . Czas życia elementów typu A jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z gęstością $f_\alpha = \alpha^{-1} \exp(-x/\alpha)$, a czas życia elementów typu B jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z gęstością $f_\beta = \beta^{-1} \exp(-x/\beta)$. Wyznaczyć rozkład czasu T pracy całego urządzenia. Jaka jest wartość oczekiwana czasu pracy?

66. Produkuje się duże serie lamp elektrycznych. Czas życia (trwałość) lampy jest zmienną losową o rozkładzie z gęstością $\theta e^{-\theta x}$ ($x > 0$). Parametr θ w poszczególnych partiach lamp zmienia się zależnie od jakości wolframu, z którego produkuje się włókna żarzenia; zmienność tego parametru opisuje się za pomocą rozkładu o gęstości $[\Gamma(k)]^{-1} \theta^{k-1} e^{-\theta}$ ($\theta > 0$). Podać rozkład czasu życia losowo wybranej z produkcji lampy.

67. Czas do pierwszej awarii samochodu od chwili zakupu ma rozkład wykładniczy przy czym wiadomo, że połowa samochodów rozpatrywanej marki psuje się przed upływem dwóch lat. Jakie są szanse na kolejne dwa lata bezawaryjnej jazdy samochodem, który nie popsuł się przez pierwszy rok?

68. Znaleźć funkcję gęstości oraz dystrybuantę objętości kostki o boku $Y = XI_{(0,2)}(X)$, gdzie X jest zmienną losową opisaną dystrybuantą

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq b \\ a \ln(x) & \text{dla } x \in (b, 4] \\ c & \text{dla } x > 4 \end{cases}$$

69. Znaleźć funkcję gęstości oraz dystrybuantę boku prostokąta o niezmiennym polu równym jeden, jeżeli wiadomo, że drugi bok $Y = \ln(X + 1)$, gdzie X jest zmienną losową opisaną w poprzednim zadaniu.

70. Dobrać stałe a oraz $b > 0$ tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x & \text{dla } x \in [0, b], \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, b]. \end{cases}$$

była gęstością pewnej zmiennej losowej X . Dokładniej mówiąc proszę podać przedział liczbowy dla a oraz wyrazić b jako funkcję argumentu a . Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X . Obliczyć $P(X \in (-1, b/2))$.

71. Znaleźć funkcję gęstości oraz dystrybuantę pola kwadratu o boku $Y = e^X$, gdzie X jest zmienną losową opisaną dystrybuantą

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ a \sin(x) & \text{dla } x \in (0, b] \\ c & \text{dla } x > b \end{cases}$$

72. Dla jakich a , b oraz c funkcja określona wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ a \sin(x) & \text{dla } x \in (0, b] \\ c & \text{dla } x > b \end{cases}$$

jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej X typu ciągłego. Wyznaczyć gęstość tej zmiennej losowej. Obliczyć $P(X \in (-1, b/2))$.

73. Urządzenie składa się z n jednakowych elementów połączonych równolegle, przy czym czas życia każdego z urządzeń ma rozkład wykładniczy o średniej λ . Jaki jest rozkład czasu pracy całego układu? Ile powinno być urządzeń, by prawdopodobieństwo układ pracował co najmniej przez czas T było nie mniejsze niż 0.99?

74. Zmienne losowe ξ_1, ξ_2, \dots są niezależne i każda z nich ma rozkład $N(0, 1)$. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej ξ_1^2 . Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $\xi_1^2 + \xi_2^2$. Uogólnić ten wynik na sumę $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$.

75. Dienne zużycie paliwa przez samochód jest zmienną losową o rozkładzie normalnym ze średnią 40 litrów oraz odchyleniem standardowym 2 litry. Zakładamy, że bak, którego pojemność wynosi 44 litry jest tankowany codziennie. Jaka jest prawdopodobieństwo, że konieczne będzie powtórne tankowanie tego samego dnia?

76. Na jednostkowym okręgu ustalono punkt A . Następnie wybrano losowo punkt M . Niech X oznacza cięciwę AM . Znajdź funkcję gęstości zmiennej losowej X .

77. Dla jakiego a funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 2xe^{-ax^2} & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X . Znaleźć dystrybuantę F_X . Obliczyć $P(X = 6)$.

78. Promień koła jest zmienną losową o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(r) = \begin{cases} e^{-r} & \text{dla } r \geq 0 \\ 0 & \text{dla } r < 0 \end{cases}$$

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa pola tego koła.

79. Dla pewnego a funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4|ax|^3} & \text{dla } |x| > 1 \\ 0 & \text{dla } |x| \leq 1 \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa pewnej zmiennej losowej X ? Wyznaczyć a oraz znaleźć dystrybuantę zmiennej losowej X . Policzyc $P(X \in (0.5; 1.5))$

80. Dla jakiego a funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^4} & \text{dla } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X ? Znaleźć prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmie wartość większą od dwóch.

81. Jeden z boków prostokąta ma rozkład równomierny na przedziale $[0,3]$. Jaki powinien mieć rozkład drugi z boków, jeżeli wiadomo, że zmiana długości boków tego prostokąta nie powoduje zmiany jego pola, które jest równe 1. Podaj funkcję gęstości rozkładu drugiego boku.

82. Pole kwadratu jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{x}} & \text{dla } 0 < x < 9 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Znajdź funkcję gęstości długości boku tego kwadratu

83. Niech $X \sim U(-1, 3)$. Wyznaczyć dystrybuantę i gęstość zmiennej losowej $|X|$.

84. Niech $X \sim U(-1, 2)$. Wyznaczyć dystrybuantę oraz gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$.

85. Gęstość zmiennej losowej X wyraża się wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{x}} & \text{dla } 0 < x < 9 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X .

86. Gęstość zmiennej losowej X wyraża się wzorem:

$$f_X(x) = \begin{cases} (-x^2 + 1)^{\frac{3}{4}} & \text{dla } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Wyznaczyć dystrybuantę zmiennej losowej X .

87. Czas życia żarówki jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o średniej 1000 h. Jaki jest rozkład czasu pracy układu złożonego z dwóch równolegle połączonych żarówek? Jakie jest prawdopodobieństwo, że układ przepracuje co najmniej 1500 h?

88. Wybrano wartość x zgodnie z rozkładem o gęstości $f(x) = 2xI_{(0,1)}(x)$. Następnie wybrano wartość y zgodnie z rozkładem wykładniczym o wartości średniej x . Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że wartość y nie przekroczyła wartości 2.

89. Dobrać tak stałe A i B by funkcja określona wzorem

$$F(x) = A + B \arctan(x) \quad \text{dla} \quad -\infty < x < \infty$$

- a) była dystrybucją zmiennej losowej X
- b) Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej X

90. Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej będącej polem kwadratu, którego długość boku jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym w $(0,4)$.

91. Dla jakiego a funkcja

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x^4} & \text{dla } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{dla } |x| < 1 \end{cases}$$

jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X ? Znaleźć prawdopodobieństwo, że zmienna losowa X przyjmie wartość większą od dwóch.

92. Dwuwymiarowy wektor losowy (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{dla } |x-2| + |y-2| < 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y) \end{cases}$$

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = Y - X$

93. Dane są dwie niezależne zmienne losowe X oraz Y o gęstościach

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 2e^{-2x} & \text{dla } x \geq 0 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } y < 0, \\ 4e^{-4y} & \text{dla } y \geq 0 \end{cases}$$

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X + 2Y$.

94. Dane są dwie niezależne zmienne losowe X oraz Y o gęstościach

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } |x| \leq 1 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |y| > 2, \\ \frac{1}{4} & \text{dla } |y| \leq 2 \end{cases}$$

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X - Y$.

95. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x, y) \end{cases}.$$

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X + Y$.

96. Dane są dwie niezależne zmienne losowe X oraz Y o gęstościach

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ 2e^{-2x} & \text{dla } x \geq 0 \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| > 2, \\ \frac{1}{4} & \text{dla } |x| \leq 2 \end{cases}$$

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = 2X + Y$.

97. Rzucamy monetą. Gdy wypadnie orzeł, losujemy (zgodnie z rozkładem jednostajnym) punkt z odcinka $[0,1]$, a gdy reszka – z odcinka $[0,2]$. Znaleźć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosowany punkt będzie należał do przedziału $[1/2, 3/2]$.

98. Po wylosowaniu wartości x zgodnie z rozkładem o dystrybucie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 1 \\ (x^2 - 1)/5 & \text{dla } x \in [1, 1.5) \\ 1 & \text{dla } x \geq 1.5 \end{cases}$$

gracz A płaci graczowi B $3x$ zł. Nie jest to jednak koniec gry. Otóż po wylosowaniu wartości x losuje się wartość y zgodnie z rozkładem $U(0, x)$. Wtedy gracz B płaci graczowi A $10y$ zł. Jaka jest oczekiwana wygrana gracza A ?

99. Przypuśćmy, że pewien owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, a każde z jajeczek wylęga się z prawdopodobieństwem p . Zakładając wzajemną niezależność wylęgania się jaj, znaleźć prawdopodobieństwo, że ilość potomków danego owada wyniesie dokładnie l .

100. Adam i Bolek grają w następującą grę: automat generuje losowo pary sąsiednich liczb naturalnych i przyznaje losowo jedną Adamowi, a drugą Bolkowi. Adam zna liczbą przypisaną Bolkowi, a Bolek zna liczbą przypisaną Adamowi, ale żaden z nich nie zna swojej liczby. Osoba z mniejszą liczbą płaci drugiej tyle złotych, ile wynosi liczba jej przypisana. Każdy z graczy może uznać, że nie warto grać w danym momencie i poprosić o nową parę liczb. Ale żaden z nich nie skorzysta z prawa weta, bowiem rozumuje tak: „Gdy widzę, że przeciwnik ma liczbę k , to ja mam $k - 1$ lub $k + 1$. Każda z nich jest jednakowo prawdopodobna. Gdy wygram, zyskuję k zł, a gdy przegram, tracę $k - 1$ zł, zatem średnio wygrywam 50 gr”. Drugi gracz rozumuje analogicznie, więc gra jest korzystna dla obu. Jest to niemożliwe. Gdzie tkwi błąd?

101. Na imprezie mikołajkowej wszystkie n prezentów pozbawiono karteczek z imieniem adresata, losowo wymieszano i rozdano uczestnikom. Niech p_k oznacza szansę, że dokładnie k osób dostanie własny prezent. Wyznacz p_0 , a następnie p_k dla $k > 0$.

102. W poszukiwaniu pewnej książki student zdecydował się odwiedzić trzy biblioteki. W każdej z nich szansa, że książka ta należy do jej księgozbioru jest taka sama jak szansa, że nie należy. Jeżeli dana książka jest w bibliotece, to jest jednakowo prawdopodobne, że będzie ona wypożyczona, jak też, że nie będzie dostępna. Co jest bardziej prawdopodobne – dostanie tej książki przez studenta czy nie, jeżeli wiadomo, że biblioteki zaopatrują się niezależnie jedna od drugiej.

103. Podczas egzaminu Robert i Paweł siedzieli obok siebie. Między innymi mieli napisać dwie daty. Robert je pamiętał, ale nie wiedział jak je przyporządkować. Zapytał Pawła, wiedząc, że w trzech przypadkach na cztery Paweł zna prawidłową odpowiedź, chociaż Paweł uważał, że zawsze wie dobrze. Jednak Paweł w jednym przypadku na cztery oszukuje Roberta. Co jest lepsze dla Roberta: posłuchać Pawła, czy odpowiedzieć losowo?

104. Jest n osób: A_1, A_2, \dots, A_n . Osoba A_1 dostaje kartkę ze znakiem $+$. Z prawdopodobieństwem zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie A_2 , która z prawdopodobieństwem zmienia znak na przeciwny i podaje kartkę osobie A_3 , itd. Na zakończenie, po oddaniu kartki przez osobę A_n , zaobserwowano znak $+$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba A_1 nie zmieniła znaku?

105. Pewien matematyk nosi przy sobie dwa pudełka zapalek. Ilekroć chce on zapalić papierosa, wydobywa jedno pudełko losowo z kieszeni. Znaleźć prawdopodobieństwo, że w chwili gdy po raz pierwszy wydobydzie on puste pudełko, drugie będzie zawierało r zapalek ($r = 0, 1, \dots, n$; n jest tu ilością zapalek, które na początku znajdowały się w każdym z pudełek)

106. Grześ i Jaś rzucają na przemian monetą. Jaś wygrywa, gdy pojawią się kolejno OOR , Grześ – gdy ROR . Jakie są prawdopodobieństwa wygranej dla obu chłopców?

107. Wybrano losowo rodzinę z dwojgiem dzieci. Podać założenia, przy których prawdopodobieństwo, że pierwsze dziecko ma na drugie imię Franek, a drugie jest chłopcem wynosi $\frac{1}{2}p\frac{1}{2}(1 - p)$, gdzie p oznacza prawdopodobieństwo nadania chłopcu drugiego imienia Franek. Uzasadnienie proszę poprzeć odpowiednim zapisem formalnym.

108. Więźniów Pawła, Roberta i Wojciecha skazano na śmierć. Jednego król ułaskawił. Paweł przekupił strażnika, który zgodził się wymienić imię więźnia, który zostanie stracony, ale o losie Pawła nie powie nic. Tym sposobem Paweł dowiedział się, że Wojciech zostanie stracony. Niech zdarzenia \mathbf{P} , \mathbf{R} , \mathbf{W} oraz S_W oznaczają odpowiednio, że Paweł zostanie stracony, że Robert, że Wojciech oraz że strażnik powiedział, że Wojciech zostanie stracony. Uzasadnić, czy $P(\mathbf{P}|\mathbf{W}) = P(\mathbf{P}|S_W)$.

109. Wykazać, że jeżeli $P(A_n) = 1$ dla $n = 1, 2, \dots$, to również $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$

110. Pokazać z twierdzenia o ciągłości, że w nieskończonym ciągu prób Bernoulliego szanse, że pojawią się same sukcesy są zerowe.

111. Czy rozkład zmiennej losowej o dystrybucie F jest typu ciągłego?

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ (1+t)/2 & \text{dla } 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{dla } t \geq 1 \end{cases}$$

112. Ile trzeba wykonać średnio rzutów kostką, by otrzymać szóstkę?

113. Rzucamy kostką tak długo, aż wyrzucimy wszystkie możliwe wyniki. Znaleźć wartość średnią liczby rzutów

114. Macierz kowariancji wektora $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]'$ ma postać

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proszę obliczyć $\varrho(X_1, -2X_2)$

115. Wiadomo, że

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 120 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right).$$

Uzasadnić, czy można uznać, że zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X_1 - 3X_2$ oraz wektora losowego $[X_1 - X_2, X_1 + X_2]'$. Czy zmienne losowe $X_1 - X_2$ oraz $X_1 + X_2$ są niezależne?

116. Macierz kowariancji wektora $\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3]'$ ma postać

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Proszę obliczyć $\varrho(X_1, -2X_2)$

117. Wiadomo, że

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 120 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right).$$

Uzasadnić, czy można uznać, że zmienne losowe X_1, X_2 są niezależne. Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $X_1 - 3X_2$ oraz wektora losowego $[X_1 - X_2, X_1 + X_2]'$. Czy zmienne losowe $X_1 - X_2$ oraz $X_1 + X_2$ są niezależne?