METODY NUMERYCZNE

ZBIÓR ZADAŃ II

ROZWIĄZANIE

Krzysztof Osial

Zadanie 1.

Stosując iteracyjną metodę Jacobiego znajdź przybliżone rozwiązanie układu równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Wykonaj trzy pierwsze kroki zaczynając od przybliżenia początkowego. Sprawdź czy metoda ta będzie zbieżna dla podanego przykładu.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \underset{b}{\rightarrow} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \underset{x^{(0)}}{\longrightarrow} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} L + U = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{x^{(1)}}{\longrightarrow} = -D^{-1}(L+U) \underset{x^{(0)}}{\longrightarrow} + D^{-1} \underset{b}{\rightarrow} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{x^{(1)}}{\longrightarrow} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{x^{(2)}}{\longrightarrow} = -D^{-1}(L+U) \underset{x^{(1)}}{\longrightarrow} + D^{-1} \underset{b}{\rightarrow} = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{x^{(3)}}{\longrightarrow} = -D^{-1}(L+U) \underset{x^{(2)}}{\longrightarrow} + D^{-1} \underset{b}{\rightarrow} = \begin{bmatrix} 17 \\ 17 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Ze wzoru na iteracyjną metodę Jacobiego wyznaczamy macierz $M = -D^{-1}(L+U)$ następnie liczymy jej wartości własne. Jeżeli największa co do modułu wartość własna macierzy M będzie mniejsza od 1 metoda jest zbieżna, gdy większa od 1, rozbieżna.

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -2 & -3 \\ -2 & -\lambda & -4 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 15\lambda - 20$$

Wielomian charakterystyczny dla $\lambda = 1$ przyjmuje wartość -6 dla $\lambda = 2$ przyjmuje wartość 2. Stąd wynika, że metoda Jacobiego jest rozbieżna dla danego układu równań.

Zadanie 2.

Wykonaj dwa kroki iteracji Gaussa-Seidla nie wykorzystując wzorów macierzowych, dla poniższego układu równań i wektora startowego:

$$A\vec{x} = b, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z wzorów macierzowych udowodnij, że metoda Gaussa-Seidla będzie w tym przypadku zbieżna.

Zapisujemy równanie macierzowe jako układ równań:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Wyznaczamy po jednej niewiadomej z każdego równania kolejno x_1, x_2, x_3

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} + \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{x_1}{2} + \frac{x_3}{2} \\ x_3 = \frac{1}{2} - x_1 + \frac{x_2}{2} \end{cases}$$

Teraz wstawiamy wektor startowy $\underset{x}{\rightarrow}^{(0)}$ do pierwszego równania i otrzymane x_1 wstawiamy do drugiego, ale za x_3 wciąż podstawiamy 0. Następnie mając już policzone x_1 i x_2 wstawiamy je do ostatniego równania i otrzymujemy x_3.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} + \frac{(0)}{4} - \frac{(0)}{2} = \frac{1}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{2} + \frac{(0)}{2} = \frac{5}{8} \\ x_3 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\left(\frac{5}{8}\right)}{2} = \frac{9}{16} \end{cases} \quad \underset{x}{\rightarrow}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

Postępujemy analogicznie, aby uzyskać wektor $\underset{x}{\rightarrow}^{(2)}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} + \frac{\left(\frac{5}{8}\right)}{4} - \frac{\left(\frac{9}{16}\right)}{2} = \frac{1}{8} \\ x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{2} + \frac{\left(\frac{9}{16}\right)}{2} = \frac{27}{32} \\ x_3 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{8}\right) + \frac{\left(\frac{27}{32}\right)}{2} = \frac{51}{64} \end{cases} \quad \underset{x}{\rightarrow}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{27}{32} \\ \frac{51}{64} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{b}{\rightarrow} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{x}{\rightarrow}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \; U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \; D + L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(D + L)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 2 & 0 \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Korzystamy ze wzoru na iteracyjną metodę Gaussa-Seidla

$$\underset{x}{\rightarrow}^{(1)} = (D + L)^{-1} \left(-U * \underset{x}{\rightarrow}^{(0)} + \underset{b}{\rightarrow} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

$$\underset{x}{\rightarrow}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 2 & 0 \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{9}{16} \end{bmatrix}$$

Aby otrzymać $\underset{x}{\rightarrow}^{(2)}$ postępujemy analogicznie

$$\underset{x}{\rightarrow}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 2 & 0 \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} \\ \frac{9}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{27}{32} \\ \frac{51}{64} \end{bmatrix}$$

Ze wzoru na iteracyjną metodę Gaussa-Seidla wyznaczamy macierz $M = (D + L)^{-1}$ następnie liczymy jej wartości własne. Jeżeli największa co do modułu wartość własna macierzy M będzie mniejsza od 1 metoda jest zbieżna, gdy większa od 1, rozbieżna.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 2 & 0 \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 2 - \lambda & 0 \\ -\frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$$

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego to kolejno $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Od razu widać, że największa co do modułu jest wartość $\lambda_3 = 2$, więc metoda jest rozbieżna.

Zadanie 3.

Wykonaj dwa kroki iteracji Gaussa-Seidla dla poniższego układu równań i wektora startowego:

$$Bx = \vec{b}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{b}{\rightarrow} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{x}{\rightarrow}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} D + L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Korzystamy ze wzoru na iteracyjną metodę Gaussa-Seidla

$$\underset{x}{\rightarrow}^{(1)} = (D+L)^{-1}\left(-U * \underset{x}{\rightarrow}^{(0)} + \underset{b}{\rightarrow}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$\underset{x}{\rightarrow}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$\underset{x}{\rightarrow}^{(2)} = (D+L)^{-1}\left(-U * \underset{x}{\rightarrow}^{(1)} + \underset{b}{\rightarrow}\right) = \begin{bmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{33}{32} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

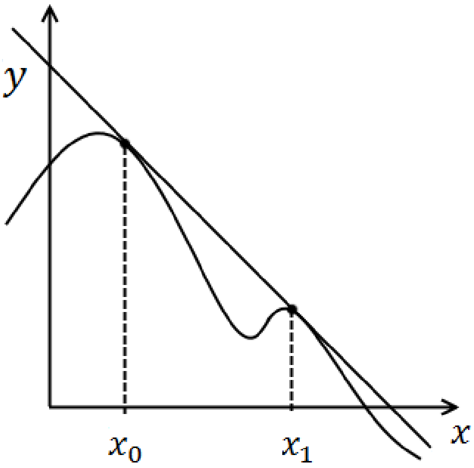
$$\underset{x}{\rightarrow}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{33}{32} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

Zadanie 4.

a) Przedstaw graficzną interpretację metody siecznych rozwiązywania równań nieliniowych. Korzystając z tej interpretacji wyprowadź wzór tej metody.
b) Napisz w języku Matlaba algorytm dla tej metody.

a) 1. sposób - analitycznie

Pochodną przybliżamy przez iloraz różnicowy



$$f'(x_k) \approx \frac{f(x) - fy}{x - x_0}$$

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

2. sposób - geometrycznie, korzystamy z twierdzenia Talesa

Podobieństwo trójkątów:

$$\frac{|x_1 x_2|}{|x_0 x_2|} = \frac{|f(x_1) f(x_2)|}{|f(x_0) f(x_2)|}$$

$$\frac{f(x_0)}{f(x_1)} = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}$$

$$f(x_0)(x_2 - x_1) = f(x_1)(x_2 - x_0)$$

$$f(x_0)x_2 - f(x_0)x_1 = f(x_1)x_2 - f(x_1)x_0$$

$$f(x_0)x_2 - f(x_1)x_2 = f(x_0)x_1 - f(x_1)x_0$$

$$x_2[f(x_0) - f(x_1)] = f(x_0)x_1 - f(x_1)x_0$$

$$x_2 = \frac{f(x_0)x_1 - f(x_1)x_0}{f(x_0) - f(x_1)}$$

b)

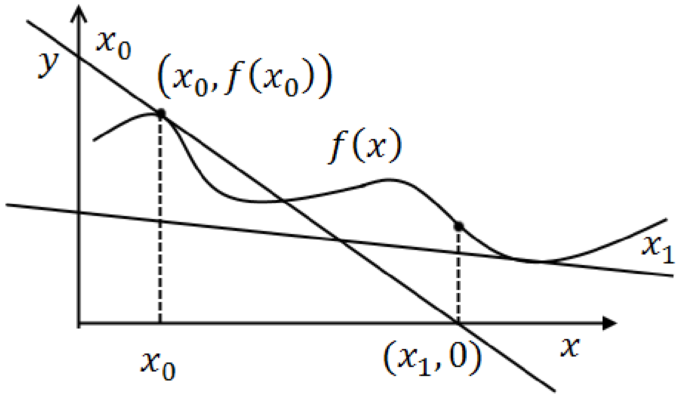
```
function [x0,y,n]=Sieczne(f,a,b,tol,MaxIter)
    x_n_1=a;
    x_n=b;
    x0=b;
    n=0;
    while abs(f(x0))>tol  && n<MaxIter
        n=n+1;
        x0=x_n-(f(x_n).*(x_n-x_n_1))./(f(x_n)-f(x_n_1));
        x_n_1=x_n;
        x_n=x0;
    end
    y=f(x0);
```

Zadanie 5.

a) Przedstaw graficzną interpretację metody stycznych rozwiązywania równań nieliniowych. Korzystając z tej interpretacji wyprowadź wzór tej metody.

b) Napisz w języku Matlaba algorytm dla tej metody.

a) Metoda stycznych (Newtona - Raphsona)



$y = ax + b$

$a = f'(x_0)$

$f'(x_0)x_0 + b = f(x_0)$

$ax_1 + b = 0 \rightarrow b = -f'(x_0)x_1$

$f'(x_0)x_0 - f'(x_0)x_1 = f(x_0)$

$f'(x_0)x_1 = f'(x_0)x_0 - f'(x_0)$

$$x_1 = \frac{f'(x_0)x_0 - f'(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

b)

```
function [p, yp, n]=Styczne(f,fpochodna,x0,tol, MaxIter)
    n=1;
    x_n=x0;
    x_n_1=x0-f(x0)./fpochodna(x0);
    while abs(x_n_1-x_n)>=tol && n<=MaxIter
        x_n=x_n_1;
        x_n_1=x_n-f(x_n)./fpochodna(x_n);
        n=n+1;
    end
    p=x_n_1;
    yp=f(x_n_1);
end
```

Zadanie 6.

a) Przedstaw graficzną interpretację metody stycznych rozwiązywania równań nieliniowych. Korzystając z tej interpretacji wyprowadź wzór tej metody.

b) Wykonaj dwa pierwsze kroki tej metody dla równania $x^2 - 3x = -2$ dla startowej wartości $x = 3$.

a) Wyprowadzenie wzoru było w zadaniu 5.

b) Podstawiamy dane do wzoru na metodę stycznych i wyliczamy kolejno x_1 i x_2

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad x_0 = 3$$

$f'(x) = 2x - 3$

$f(3) = -2$

$f'(3) = 3$

$$x_1 = 3 - \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$
$$f\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{40}{9}$$
$$f'\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{13}{3}$$
$$x_2 = \frac{11}{3} - \left(\frac{\frac{40}{9}}{\frac{11}{3}}\right) = \frac{27}{11}$$

Zadanie 7.

a) Przedstaw graficzną interpretację metody siecznych rozwiązywania równań nieliniowych. Korzystając z tej interpretacji wyprowadź wzór tej metody.
b) Wykonaj dwa pierwsze kroki tej metody dla równania $x^2 - 3x = -2$ dla startowych wartości $x_1 = 4$ i $x_2 = 3$.

a) Wyprowadzenie wzoru było w zadaniu 4.
b) Podstawiamy dane do wzoru na metodę siecznych.
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Zadanie 8.

Wykonaj dwa kroki metod Newtona dla układu równań:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 4 \\ x^2 & + & y^2 & = & 16 \end{array}$$

przyjmując za wektor startowy $[3; 1]$. Czy widzisz jaki powinien być końcowy wynik po wielu krokach iteracji?

$F_1: x + y - 4 = 0$
$F_2: x^2 + y^2 - 16 = 0$

Liczymy pochodne cząstkowe obu funkcji.

$F_{1_x}' = 1 \quad F_{1_y}' = 1$
$F_{2_x}' = 2x \quad F_{2_y}' = 2y$
Wstawiamy pochodne cząstkowe do Jacobianu.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

Następnie za niewiadome podstawiamy współrzędne wektora startowego $[3; 1]$.

$$J\left(\vec{x}^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

Odwracamy Jacobian i wstawiamy do wzoru na wielowymiarową metodę stycznych (Newtona)

$$\left(J\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - \left(J\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right)^{-1} \vec{f}\left(\vec{x}^{(0)}\right)$$

$$\vec{f}\left(\vec{x}^{(0)}\right) = [3 + 1 - 4; 9 + 1 - 16] = [0; -6]$$

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Postępujemy analogicznie licząc $\vec{x}^{(2)}$

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} - \left(J\left(\vec{x}^{(1)}\right)\right)^{-1} \vec{f}\left(\vec{x}^{(1)}\right)$$

$$\vec{f}\left(\vec{x}^{(1)}\right) = \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2} - 4; \frac{81}{4} + \frac{1}{4} - 16\right] = \left[0; \frac{9}{2}\right]$$

$$J\left(\vec{x}^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} \quad \left(J\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{9}{20} \\ -\frac{9}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{81}{20} \\ -\frac{1}{20} \end{bmatrix}$$

Zadanie 9.

Wykonaj dwa kroki metody Newtona dla układu równań:

$$\begin{matrix} x^2 & + & y & = & 4 \\ x & - & y^2 & = & 2 \end{matrix}.$$

przyjmując za wektor startowy [2.5; 0.5]. Czy widzisz jaki powinien być końcowy wynik po wielu krokach iteracji?

$$F_1: x^2 + y - 4 = 0$$
$$F_2: x - y^2 - 2 = 0$$
$$F_{1x}' = 2x \quad F_{1y}' = 1$$
$$F_{2x}' = 1 \quad F_{2y}' = -2y$$
$$J = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & -2y \end{bmatrix}$$

$$J\left(\vec{x}^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \left(J\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - \left(J\left(\vec{x}^{(0)}\right)\right)^{-1} \vec{f}\left(\vec{x}^{(0)}\right)$$

$$\vec{f}\left(\vec{x}^{(0)}\right) = [6.25 + 0.5 - 4; 2.5 - 0.25 - 2] = [2.75; 0.25] = \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} - \left(J\left(\vec{x}^{(1)}\right)\right)^{-1} \vec{f}\left(\vec{x}^{(1)}\right)$$

$$\vec{f}\left(\vec{x}^{(1)}\right) = \left[4 + \frac{1}{4} - 4; 2 - \frac{1}{16} - 2\right] = \left[\frac{1}{4}; -\frac{1}{16}\right]$$

$$J\left(\vec{x}^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \left(J\left(\vec{x}^{(1)}\right)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{48} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{95}{48} \\ \frac{4}{48} \end{bmatrix}$$

Zadanie 10.

Wykonaj dwie iteracje wielowymiarowej metody Newtona dla układu równań. Za wektor startowy przyjmij: $[1; 0]$.

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & - & 4y^2 & = & 4 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}.$$

Czy widzisz jaki powinien być końcowy wynik po wielu krokach iteracji?

$F_1: x^2 - 4y^2 - 4 = 0$

$F_2: x + y - 2 = 0$

${F_1}'_x = 2x \quad {F_1}'_y = -8y$

${F_2}'_x = 1 \quad {F_2}'_y = 1$

$J = \begin{bmatrix} 2x & -8y \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$J\left(\underset{x}{\rightarrow}^{(0)}\right)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\quad \left(J\left(\underset{x}{\rightarrow}^{(0)}\right)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$\underset{x}{\rightarrow}^{(1)}=\underset{x}{\rightarrow}^{(0)}-\left(J\left(\underset{x}{\rightarrow}^{(0)}\right)\right)^{-1}\underset{f}{\rightarrow}\left(\underset{x}{\rightarrow}^{(0)}\right)$$

$$\underset{f}{\rightarrow}\left(\underset{x}{\rightarrow}^{(0)}\right)=[1-4;1-2]=[-3;-1]$$

$$\underset{x}{\rightarrow}^{(1)}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\underset{x}{\rightarrow}^{(2)}=\underset{x}{\rightarrow}^{(1)}-\left(J\left(\underset{x}{\rightarrow}^{(1)}\right)\right)^{-1}\underset{f}{\rightarrow}\left(\underset{x}{\rightarrow}^{(1)}\right)$$

$$\underset{f}{\rightarrow}\left(\underset{x}{\rightarrow}^{(1)}\right)=\left[\frac{25}{4}-1-4;\frac{5}{2}-1-2\right]=\left[\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right]$$

$$J\left(\underset{x}{\rightarrow}^{(1)}\right)=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\quad \left(J\left(\underset{x}{\rightarrow}^{(1)}\right)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$\underset{x}{\rightarrow}^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -4\\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{2}\\ -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{5}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{4}\\ -\frac{9}{4}\end{bmatrix}$$

Zadanie 11.

Oblicz całkę $\int_2^5(3x^2+2x-1)dx$ metodą trapezów z liczbą węzłów $n=4$. Przedstaw interpretację graficzną metody trapezów dla tego przykładu. Przybliżony wynik całki porównaj z jej rzeczywistą wartością wyliczoną analitycznie.

$$\int_2^5(3x^2+2x-1)dx=[x^3+x^2-x]_2^5=(125+25-5)-(8+4-2)=145-10=135$$

1. Sposób: Wzór na całkowanie metodą trapezów:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$$

$$\int_2^5(3x^2+2x-1)dx=\frac{3}{4}\left(f\left(\frac{11}{4}\right)+f\left(\frac{14}{4}\right)+f\left(\frac{17}{4}\right)+\left(\frac{99}{2}\right)\right)=135\frac{27}{35}$$

Zadanie 12.

Policz całkę $\int_2^5 x^2dx$ korzystając z kwadratury Newtona-Cotes'a dla $n=3$. Odpowiednie współczynniki kwadratury: $A_0=A_3=\frac{b-a}{8}$, $A_1=A_2=\frac{3(b-a)}{8}$.

Na początku policzymy całkę analitycznie, żeby potem sprawdzić poprawność wyniku.

$$\int_2^5 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^5 = \frac{1}{3}(125-8) = \frac{117}{3} = 39$$

Korzystamy z ogólnego wzór kwadratur:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) * A_i$$

gdzie x_i to kolejno $2, 3, 4, 5$, ponieważ dzielimy odcinek na $n = 3$ równych części. Otrzymujemy kolejno odcinki: $[2; 3], [3; 4], [4; 5]$.

$$A_0 = \frac{3}{8} \quad A_1 = \frac{9}{8} \quad A_2 = \frac{9}{8} \quad A_3 = \frac{3}{8}$$

$$\int_2^5 x^2 dx \approx 4 * \frac{3}{8} + 9 * \frac{9}{8} + 16 * \frac{9}{8} + 25 * \frac{3}{8} = \frac{12}{8} + \frac{81}{8} + \frac{144}{8} + \frac{75}{8} = 39$$

Zadanie 13.

Policz całkę $\int_2^9 (x+2)dx$ korzystając z kwadratury Newtona-Cotes'a dla $n = 3$. Odpowiednie współczynniki kwadratury: $A_0 = A_3 = \frac{b-a}{8}$, $A_1 = A_2 = \frac{3(b-a)}{8}$.

$$\int_2^9 (x+2)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_3^9 = \frac{117}{2} - \frac{21}{2} = 48$$

Ogólny wzór kwadratur:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) * A_i$$

gdzie x_i to kolejno $3, 5, 7, 9$, ponieważ dzielimy odcinek na $n = 3$ równych części. Otrzymujemy kolejno odcinki $[3; 5], [5; 7], [7; 9]$.

$$A_0 = \frac{6}{8} \quad A_1 = \frac{18}{8} \quad A_2 = \frac{18}{8} \quad A_3 = \frac{6}{8}$$

$$\int_2^9 (x+2)dx \approx 5 * \frac{6}{8} + 7 * \frac{18}{8} + 9 * \frac{18}{8} + 11 * \frac{6}{8} = \frac{30}{8} + \frac{126}{8} + \frac{162}{8} + \frac{66}{8} = 48$$

Zadanie 14.

Policz całkę $\int_0^\infty e^{-x} x^2 dx$ korzystając z kwadratury Gaussa-Laguerre'a dla $n = 5$. Iloczyn skalarny dla wielomianów ortogonalnych Laguerre'a zdefiniowany jest jako $(L_i, L_j) = \int_0^\infty e^{-x} L_i(x) L_j(x) dx$. Odpowiednie współczynniki kwadratury i węzły kwadratury:

i	0	1	2	3	4
A_i	0.52	0.40	0.076	0.0036	0.000023 .
x_i	0.26	1.41	3.6	7.1	13

Do policzenia tej całki również skorzystamy z ogólnego wzoru kwadratur z tym, że iloczyn skalarny dla wielomianów ortogonalnych, czyli e^{-x} traktujemy jako 1.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) * A_i$$

$$\int_0^\infty e^{-x}x^2dx \approx (0.26)^2 * (0.51) + (1.41)^2 * (0.40) + (3.6)^2 * 0.076 + (7.1)^2 * (0.0036) + 13^2 * (0.000023) = 2.000039 \approx 2$$

Zadanie 15.

Wielomiany Czebyszewa dane są wzorem $T_k(x) = \cos(karccosx)$ iloczyn skalarny definiujący je wzorem $\left(T_i, T_j\right) = \int_{-1}^{1} T_i(x)T_j(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Wyprowadź postać wielomianów $T_0(x), T_1(x)$. Korzystając z formuły $T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}\,(x)$ wyprowadź $T_4(x)$. Wiedząc, że wszystkie współczynniki kwadratury Gaussa-Czebyszewa wynoszą $A_i = \frac{\pi}{(n+1)}$ oblicz całkę $\int_2^5 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

$T_k(x) = \cos(karccosx)$ - wzór ogólny

$T_0(x) = \cos(0) = 1$
$T_1(x) = \cos(arccosx) = x$ - funkcja, która za argument przyjmuje funkcję odwrotną, to po prostu x.
Wzór z formuły z podanej w treści zadaniu, służy do wyznaczaniu T_2 wyrazów i wyższych.
$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}\,(x)$
$T_4(x) = 2xT_3(x) - T_2\,(x)$

Jak widzimy z postaci wyżej trzeba wyznaczyć T_2 oraz T_3.

$T_2(x) = 2x * x - 1 = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$
$T4(x) = 2xT_3(x) - T_2(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$

Zadanie 16.

Wielomiany Czebyszewa dane są wzorem $T_k(x) = \cos(karccosx)$ iloczyn skalarny definiujący je wzorem $\left(T_i, T_j\right) = \int_{-1}^{1} T_i(x)T_j(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Wyprowadź postać wielomianów $T_0(x), T_1(x)$. Korzystając z formuły $T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}\,(x)$ wyprowadź $T_4(x)$. Wiedząc, że wszystkie współczynniki kwadratury Gaussa-Czebyszewa wynoszą $A_i = \frac{\pi}{(n+1)}$ oblicz całkę $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

$T_k(x) = \cos(karccosx)$
$T_0(x) = \cos(0arccosx) = 1$
$T_1(x) = \cos(1arccosx)$=x
$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x)$
$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) = 2x * x - 1 = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$

$n = 4\ A_k = n + 1\ x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}, k = 0, 1, 2, 3, 4\ \ A_k = \frac{\pi}{5}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx Q(F) = \sum_{k=0}^{4} A_k * f(x_k)$$

$x_0 = \cos\frac{\pi}{10};\ x_1 = \cos\frac{3\pi}{10};\ \ x_2 = \cos\frac{\pi}{2};\ \ x_3 = \cos\frac{7\pi}{10};\ \ x_4 = \cos\frac{9\pi}{10}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{5} * \cos\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} * \cos\frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} * \cos\frac{7\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\cos\frac{9\pi}{10}$$

Zadanie 17.

W zadaniu 17 był błąd w treści.

Zadanie 18.

Oblicz całkę $\int_{-2}^{1} x^2 dx$ korzystając z metod a) kwadratury Gaussa-Legender'a, b) złożonej metody trapezów, obie dla $n = 4$. Przybliżone wartości węzłów i współczynników kwadratury Gaussa wynoszą:

x_i	A_i
$-x_0 = x_3 \approx 0.861$	$A_0 = A_3 \approx 0.348$
$-x_1 = x_2 \approx 0.340$	$A_1 = A_2 \approx 0.652$

a) Rozwiązanie $a = -2, b = 1, f(x) = x^2$

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \left| \begin{matrix} x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}u \\ x(-1) = -2 \\ x(1) = 1 \\ dx = \frac{3}{2} \end{matrix} \right| = \int_{-1}^{1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}u\right)^2 * \frac{3}{2} du = \int_{-1}^{1} \left(\frac{9}{4}u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{4}\right) * \frac{3}{2} du =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{27}{8}u^2 - \frac{9}{4}u + \frac{3}{8}\right) du = \int_{-1}^{1} F(u) du \approx Q(F) = \sum_{k=0}^{3} A_k F(uk)$$, gdzie uk $(k \in 0, 1, 2, 3)$

są pierwiastkami wielomianu ortogonalnego $P_5(u) = \frac{d^5}{dx^5}[(x^2 - 1)^5] * \frac{1}{2^5 * 5!}$

$u_0 \approx -0{,}861,\ u_1 \approx -0{,}340, u_2 \approx 0{,}340, u_3 \approx 0{,}861$

$$\int_{-1}^{1} F(u) du \approx Q(F) = A_0 * F(u_0) + A_1 * F(u_1) + A_2 * F(u_2) + A_3 * F(u_3) = 3$$

b) $n = 4, h = \frac{b-a}{h}, a = -2, b = 1, x_i = a + ih, h = \frac{3}{4}$

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx \approx \frac{1}{2} h * \left[f(a) + 2 \sum_{i=0}^{3} f(a+ih) + f(b) \right]$$

$f(x_0) = 4, f(x_1) = \frac{25}{16}, f(x_2) = \frac{1}{4}, f(x_3) = \frac{1}{16}$

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx \approx \frac{1}{2} * \frac{3}{4} \left(4 + 2 * \frac{25}{16} + 2 * \frac{1}{4} + 2 * \frac{1}{16} + 1 \right) = \frac{105}{32}$$

Zadanie 19.

Znajdź przybliżenie (2 kroki iteracji) wartości własnych macierzy A i B oraz odpowiadających im wektorów własnych metodą potęgową:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

W celu rozwiązania tego zadania przyjmujemy dowolny wektor niezerowy $\vec{v}$ i tworzymy sobie tabelkę:

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $A^n * \vec{v} \Rightarrow \vec{w}$ - wektor własny

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\vec{v}$	$A\vec{v}$	$A^2\vec{v}$	
1	3	9	$\leftarrow \lambda^{(1)}$ - I składowa wektora
1	3	9	$\leftarrow \lambda^{(2)}$ - II składowa wektora

Wartość własną obliczamy licząc średnią ze składowych wektora:

$$\lambda^{(1)} = \frac{A^2\vec{v}}{A\vec{v}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{A^2\vec{v}}{A\vec{v}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\lambda = \frac{\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}}{2} = 3$$

$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\vec{v}$	$B\vec{v}$	$B^2\vec{v}$	
1	3	10	$\leftarrow \lambda^{(1)}$ - I składowa wektora
1	4	14	$\leftarrow \lambda^{(2)}$ - II składowa wektora

$$\lambda^{(1)} = \frac{B^2\vec{v}}{B\vec{v}} = \frac{10}{3}$$
$$\lambda^{(2)} = \frac{B^2\vec{v}}{B\vec{v}} = \frac{14}{4}$$
$$\lambda = \frac{\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}}{2} = \frac{\frac{10}{3} + \frac{14}{4}}{2} = \frac{41}{12} \approx 3{,}41666$$

Zadanie 20.

Znajdź metodą Kryłowa wielomian charakterystyczny macierzy A. Rozwiąż analitycznie uzyskane w ten sposób równanie charakterystyczne.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{b_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Liczymy kolejno $\overrightarrow{b_1} = A * \overrightarrow{b_0},\ \overrightarrow{b_2} = A * \overrightarrow{b_1},\ \overrightarrow{b_3} = A * \overrightarrow{b_2}$

$$\overrightarrow{b_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\overrightarrow{b_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{b_3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 30 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz z wektorów $\overrightarrow{b_\iota}$ ustawionych kolumnami: $(\overrightarrow{b_2}\ \overrightarrow{b_1}\ \overrightarrow{b_0}) * (x_1\ x_2\ x_3) = -\overrightarrow{b_3}$

Rozwiązujemy poniższy układ metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 \\ -30 \\ -42 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 9x_1 + 2x_2 & -42 \\ 6x_1 + x_2 & -\ 30 \\ 9x_1 + 2x_2 + x_3 & -42 \end{array} \right)$$

$x_1 = -6\ \ x_2 = 6\ \ x_3 = 0$

Wielomian charakterystyczny ma wzór:

$P(A) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 6\lambda$

Wartości własne:

$\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 3 - \sqrt{3}, \lambda_2 = 3 + \sqrt{3}$

Zadanie 21.

Dana jest macierz. Znajdź wzór wielomianu charakterystycznego tej macierzy korzystając z metody Kryłowa. Wylicz następnie analitycznie wartości własne tej macierzy.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{b_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Liczymy kolejno $\overrightarrow{b_1} = A * \overrightarrow{b_0},\ \ \overrightarrow{b_2} = A * \overrightarrow{b_1},\ \ \overrightarrow{b_3} = A * \overrightarrow{b_2}$

$$\overrightarrow{b_1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{b_2} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{b_3} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz z wektorów $\overrightarrow{b_\iota}$ ustawionych kolumnami: $(\overrightarrow{b_2}\ \overrightarrow{b_1}\ \overrightarrow{b_0}) * (x_1\ x_2\ x_3) = -\overrightarrow{b_3}$

Rozwiązujemy poniższy układ metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 2x_1 + x_2 & -9 \\ x_1 - 2x_2 & -6 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 & -3 \end{array}\right)$$

$x_1 = -4{,}8\ \ x_2 = 0{,}6\ \ x_3 = 4{,}2$

Wielomian charakterystyczny ma wzór:

$P(A) = \lambda^3 - 4{,}8\lambda^2 + 0{,}6\lambda + 4{,}2$

Zadanie 22.

Oblicz macierz odwrotną do macierzy C korzystając dwukrotnie z Tw. Cayley'a Hamiltona (pierwsze zastosowanie to metoda Kryłowa):

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\overrightarrow{b_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Liczymy kolejno $\overrightarrow{b_1} = C * \overrightarrow{b_0},\ \ \overrightarrow{b_2} = C * \overrightarrow{b_1},\ \ \overrightarrow{b_3} = C * \overrightarrow{b_2}$

$$\overrightarrow{b_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{b_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{b_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 17 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Tworzymy macierz z wektorów $\overrightarrow{b_\iota}$ ustawionych kolumnami: $(\overrightarrow{b_2}\ \overrightarrow{b_1}\ \overrightarrow{b_0}) * (x_1\ x_2\ x_3) = -\overrightarrow{b_3}$

Rozwiązujemy poniższy układ metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 \\ -17 \\ -27 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{matrix} 6x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + x_2 \\ 7x_1 + x_2 + x_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -28 \\ -17 \\ -27 \end{matrix} \right)$$

$x_1 = -3 \;\; x_2 = -5 \;\; x_3 = -1$

Wielomian charakterystyczny ma wzór:

$P(A) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda - 1$

W miejsce λ wstawiamy macierze C, a wyrazy wolne mnożymy razy macierz jednostkową i wszystko przyrównujemy do 0.

$C^3 - 3C^2 - 5C - 1 * I = 0 \mid * C^{-1}$

$C^2 - 3C - 5I - 1 * C^{-1} = 0$

$C^{-1} = C^2 - 3C - 5I$