1. W sprzedaży znajdują się produkty wytwarzane w trzech różnych zakładach Z_1, Z_2, Z_3, których udziały w rynku wynoszą odpowiednio $40\%, 35\%, 25\%$. Wiadomo, że wadliwość produkcji poszczególnych zakładów wynosi odpowiednio $1\%, 2\%, 3\%$. Wyznaczyć udziały produkcji poszczególnych zakładów wśród produktów dostarczanych do punktu napraw gwarancyjnych.

....

Określmy zdarzenia:
A — losowo wybrany produkt będzie wadliwy (trafi do punktu napraw);
B_1 — losowo wybrany produkt wytworzony został w zakładzie Z_1;
B_2 — losowo wybrany produkt wytworzony został w zakładzie Z_2;
B_3 — losowo wybrany produkt wytworzony został w zakładzie Z_3;

Mamy wyznaczyć prawdopodobieństwa: $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$ oraz $P(B_3|A)$.
Obliczymy $P(B_1|A)$. Skorzystamy ze wzoru Bayesa:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}$$

Ponieważ zdarzenia B_1, B_2, B_3 są wzajemnie wykluczające się, więc prawdopodobieństwo wylosowania wadliwego produktu wyznaczymy korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3).$$

Z warunków zadania mamy:

$$P(B_1) = 0.40,\ P(B_2) = 0.35,\ P(B_3) = 0.25$$

$$P(A|B_1) = 0.01,\ P(A|B_2) = 0.02,\ P(A|B_3) = 0.03$$

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy

$$P(A) = 0.0185,$$

czyli na rynku jest 1.85% wadliwych produktów.

Podstawiając odpowiednie wartości otrzymujemy $P(B_1|A) = \frac{0.004}{0.0185} \approx 0.2162$.
W podobny sposób obliczamy $P(B_2|A) \approx 0.3784$ oraz $P(B_3|A) \approx 0.4054$.

Wśród produktów dostarczanych do punktu napraw jest 21.62% produktów pochodzących za zakładu Z_1, 37.84% produktów z zakładu Z_2 oraz 40.54% produktów z zakładu Z_3.

2. Funkcja gęstości dana jest wzorem

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{dla } (x,y) \in (0,1)\times(0,1), \\ 0, & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Obliczyć $E(X+Y|X \geq 0.5)$.

....

Z własności wartości oczekiwanej mamy

$$E(X+Y|X \geq 0.5) = E(X|X \geq 0.5) + E(Y|X \geq 0.5).$$

Znajdziemy gęstości rozkładów warunkowych: $f_{X|X\geq 0.5}(x)$ oraz $f_{Y|X\geq 0.5}(y)$.

Dystrybuanta pierwszego rozkładu warunkowego:

$$F_{X|X\geq 0.5}(x) = P\{X \leq x|X \geq 0.5\} = \frac{P\{X \leq x \& X \geq 0.5\}}{P\{X \geq 0.5\}}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0.5, \\ \frac{P\{0.5 \leq X \leq x\}}{P\{X \geq 0.5\}}, & \text{dla } x > 0.5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0.5, \\ \frac{\int_{0.5}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)dy\right]dt}{\int_{0.5}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)dy\right]dt}, & \text{dla } x > 0.5 \end{cases}$$

Wyznaczamy gęstość rozkładu brzegowego zmiennej losowej X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)dy = x + 1/2, & \text{dla } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$F_{X|X\geq 0.5}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0.5, \\ \frac{\int_{0.5}^{x}(t+0.5)dt}{\int_{0.5}^{\infty}(t+0.5)dt}, & \text{dla } x > 0.5 \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0.5, \\ \frac{4}{5}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right), & \text{dla } 0.5 < x < 1, \\ 1, & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

czyli gęstość wyraża się wzorem

$$f_{X|X\geq 0.5}(x) = F'_{X|X\geq 0.5}(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0.5, \\ \frac{4}{5}(2x-1), & \text{dla } 0.5 < x < 1, \\ 1, & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

A zatem

$$E(X|X \geq 0.5) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|X\geq 0.5}(x)dx = \int_{0.5}^{1} x\frac{4}{5}(2x-1)\,dx = \frac{1}{6}.$$

Dystrybuanta drugiego rozkładu warunkowego:

$$F_{Y|X\geq 0.5}(y) = P\{Y \leq y|X \geq 0.5\} = \frac{P\{Y \leq y \& X \geq 0.5\}}{P\{X \geq 0.5\}}$$

$$= \frac{\int_{0.5}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{y} f(t,u)du\right]dt}{\int_{0.5}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t,u)du\right]dt} = \begin{cases} 0, & \text{dla } y < 0, \\ 1.6(0.375y + 0.25y^2), & \text{dla } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{dla } y > 1 \end{cases}$$

czyli gęstość wyraża się wzorem

$$f_{Y|X\geq 0.5}(y) = F'_{Y|X\geq 0.5}(y) = \begin{cases} 0, & \text{dla } y < 0, \\ 1.6(0.375 + 0.5y), & \text{dla } 0 < y < 1, \\ 1, & \text{dla } y > 1 \end{cases}$$

A zatem

$$E(Y|X \geq 0.5) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X\geq 0.5}(y)dy = \int_0^1 y1.6(0.375 + 0.5y)dx = \frac{1.7}{6}.$$

Tak więc

$$E(X+Y|X \geq 0.5) = \frac{1}{6} + \frac{1.7}{6} = 0.45$$

3. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależne i mają jednakowy rozkład normalny $N(0, \sigma^2)$. Obliczyć $P(5X_1 - X_2 > X_3 - 5X_4)$.

. . . .

Zauważmy, że

$$P(5X_1 - X_2 > X_3 - 5X_4) = P(5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4 > 0)$$

Z własności rozkładu normalnego wiadomo, że zmienna losowa $5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4$ ma rozkład normalny z parametrami:

$$E(5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4) = 5EX_1 - EX_2 - EX_3 + 5EX_4 = 0$$

$$\begin{aligned} D^2(5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4) = {} & (\textit{niezależność zmiennych losowych } X_1, X_2, X_3, X_4) \\ & D^2(5X_1) + D^2X_2 + D^2X_3 + D^2(5X_4) \\ & = 25D^2(X_1) + D^2X_2 + D^2X_3 + 25D^2(X_4) = 52\sigma^2. \end{aligned}$$

Tak więc, zmienna losowa

$$\xi = \frac{5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4}{\sigma\sqrt{52}}$$

ma standardowy rozkład normalny, to znaczy rozkład $N(0, 1)$.

Otrzymujemy

$$P(5X_1 - X_2 > X_3 - 5X_4) = P(5X_1 - X_2 - X_3 + 5X_4 > 0) = P(\xi > 0) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Tutaj $\Phi(\cdot)$ oznacza dystrybuantę standardowego rozkładu normalnego.

4. Obliczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że partia pięciuset elementów, z których każdy ma czas pracy T_i $(i = 1, 2, \ldots, 500)$ wystarczy na zapewnienie pracy urządzenia przez łącznie tysiąc godzin, gdy wiadomo, że $ET_i = 2$ oraz $D^2T_i = 1$.

. . . .

Mamy obliczyć

$$P\left(\sum_{i=1}^{500} T_i > 1000\right)$$

wiedząc, że zmienne losowe T_i są niezależne, o tym samym rozkładzie takim, że $ET_i = 2$ oraz $D^2T_i = 1$. Skorzystamy tutaj z Centralnego Twierdzenia Granicznego głoszącego, że

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} T_i - nET_1}{\sqrt{nD^2T_1}} < u\right) \approx \Phi(u),$$

gdzie $\Phi(u)$ oznacza wartość w punkcie u dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego.

Mamy

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{500} T_i > 1000\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{500} T_i - 500 \cdot 2 > 1000 - 500 \cdot 2\right) \\
&= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} T_i - 500 \cdot 2}{\sqrt{500 \cdot 1}} > \frac{1000 - 500 \cdot 2}{\sqrt{500 \cdot 1}}\right) \\
&= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{500} T_i - 1000}{\sqrt{500}} > 0\right) \\
&\approx 1 - \Phi(0) = 0.5.
\end{aligned}$$

A zatem, z prawdopodobieństwem około $1/2$ partia pięciuset elementów wystarczy na zapewnienie pracy urządzenia przez łącznie tysiąc godzin.