Matematyka na plus

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{dla } x<-3\\ c & \text{dla } -3\leq x\leq -1\\ 0 & \text{dla } x>-1\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$

$$\int_{-\infty}^{-3} 0dx+\int_{-3}^{-1} Cdx+\int_{-1}^{+\infty} 0dx=1$$

$$\left[cx\right]_{-3}^{-1}=1$$

$$-1c+3c=1$$

$$2c=1$$

$$c=\frac{1}{2}$$

2.1

$$f(x)=\begin{cases}\frac{a}{x^4} & \text{dla } |x|\geq 1\\ 0 & \text{dla } |x|<1\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)=\int_{-\infty}^{-1}\frac{a}{x^4}dx+\int_{-1}^{1}0dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{a}{x^4}dx=\left[-\frac{a}{3x^3}\right]_{-\infty}^{-1}+\left[-\frac{a}{3x^3}\right]_{1}^{+\infty}=$$

$$=\frac{a}{3}-0+0+\frac{a}{3\cdot 1^3}=\frac{2a}{3}$$

$$\frac{2a}{3}=1 \quad /\cdot 3$$

$$2a=3$$

$$a=\frac{3}{2}$$

Egzamin C RPIS

Zadanie 13 (w innym arkuszu)

Zadanie 14

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{x}} & \text{dla } 0<x<9 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Wyznacz dystrybuantę X

$$F(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{9} \frac{1}{6\sqrt{x}}dx + \int_{9}^{+\infty} 0dx$$

$$F(X\leq 0 \wedge x\geq 9)=0$$

$$F(0<x<9)=\int_{0}^{9}\frac{1}{6\sqrt{x}}dx=\frac{1}{6}\int_{0}^{9}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\frac{1}{6}\Big[2\sqrt{x}\Big]_{0}^{9}=\frac{1}{6}(2\cdot\sqrt{9}-0)=\underline{1}$$

$$F(x)=\begin{cases} \frac{1}{6}2\sqrt{x} & \text{dla } 0<x<9 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Zadanie 15

$$f(x,y)\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } |x|+|y|\leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y) \end{cases}$$

$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{-1} 0dx+\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}dx+\int_{1}^{+\infty} 0dx=\Big[\frac{1}{2}x\Big]_{-1}^{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$f_y(y)\begin{cases} 1 & \text{dla } -1\leq y\leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } y \end{cases}$$

3.22

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{3}{4}x+2xy+\frac{1}{4}y & \text{, dla } (x,y)\in(0,1)\times(0,1)\\ 0 & \text{, poza tym}\end{cases}$$

$$f_{\xi_1|\xi_2=x_2}(x_1)=\frac{f_\xi(x_1,x_2)}{f_{\xi_2}(x_2)}$$

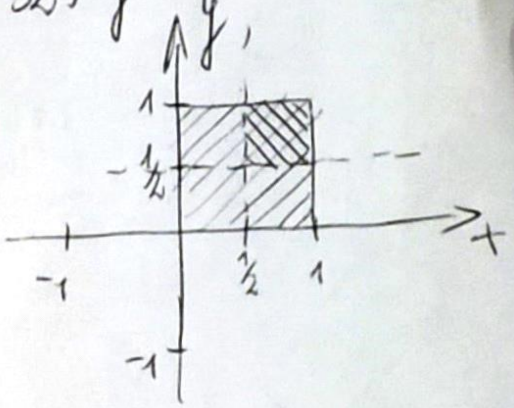
~~Oblicz $E(\xi|\eta=0,5)$~~

oblicz $P(\xi>\frac{1}{2}|\eta>\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{3}{4}x+2xy+\frac{1}{4}y\,dxdy=$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{2}+x^2y+\frac{1}{4}xy\right]_{\frac{1}{2}}^{1}dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left[\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1^2}{2}+1^2\cdot y+\frac{1}{4}\cdot y\cdot 1\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{(\frac{1}{2})^2}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot y+\frac{1}{4}\cdot y\cdot\frac{1}{2}\right)\right]dy=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{7}{8}y+\frac{9}{32}\right)dy=$$

$$=\left[\frac{7}{8}\cdot\frac{y^2}{2}+\frac{9}{32}y\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{23}{64}$$



3.34

	$\eta<1$: 0	η: 1	2	$P(\xi=x_i)$
ξ = 0	0,10	0,06	0,08	0,24
1	0,27	0,05	0,17	0,49
2	0,02	0,05	0,07	0,14
3	0,03	0,04	0,06	0,13
	0,42	0,20	0,38	1

oblicz $E(\xi+\eta\geq 2|\eta<1)$ i $E(\xi+\eta)$

$E\xi=0+1\cdot 0,49+2\cdot 0,14+3\cdot 0,13=$
$=0,49+0,28+0,39=0,49+0,67=1,16$

$E\eta=0+0,20+0,76=0,96$

$E(\xi+\eta)=1,16+0,96=2,12$

$E(\xi+\eta\geq 2|\eta<1)=0,02+0,03=0,05$

Egzamin zadanie 4

$|\Omega| = 200$

M - zdarzenie rekrutacji mężczyzny

$|M| = 15\% \cdot 200 = 0{,}30$

~~$X \sim Bin(200, 0{,}3)$~~

~~$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2))$~~ $=$

$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X' < 3) = 1 - (P(X'=0) + P(X'=1) + P(X'=2))$

$X \sim Poisson(200 \cdot 0{,}3) \Rightarrow X \sim Poisson(60)$

$P(X'=0) = \frac{60^0}{0!} e^{-60} = 1 \frac{1}{e^{60}} = \frac{1}{e^{60}}$

$P(X'=1) = \frac{60^1}{1!} e^{-60} = 60 \frac{1}{e^{60}}$

$P(X'=2) = \frac{60^2}{2!} e^{-60} = \frac{1800}{e^{60}}$

$P(X' < 3) = \frac{1}{e^{60}} + \frac{60}{e^{60}} + \frac{1800}{e^{60}} = \frac{1861}{e^{60}}$

$P(X \geqslant 3) = 1 - \frac{1861}{e^{60}} \approx 0{,}9999$

Egzamin zadanie 3

$|\Omega| = \binom{6}{1} + \binom{5}{1} + \binom{4}{1} = \frac{6!}{1!\,5!} + \frac{5!}{1!\,4!} + \frac{4!}{1!\,3!} = 6 + 5 + 4 = 15$

$A = 1 + \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 10$

~~$|\Omega| = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$~~

$P(A) = \frac{2}{3}$

Rozkład normalny

Zad 1

~~$E(X) = \Sigma$~~ Zmienne losowa X ma rozkład normalny o średniej (-5) i odch. stand 10

Oblicz prawdopodobieństwa

~~a) $P(-1<X<5) = F_{N(-5,10)}(5)$~~

Wzory: $X \sim N(m, \sigma) \Rightarrow Y = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$

Normalizacja

$X \sim N(-5, 10)$ $\quad Y = \frac{X+5}{10} \sim N(0,1)$ $\quad m=-5 \quad \sigma=10$

a) $P(-1<X<5) = F_{N(-5,10)}(5) - F_{N(-5,10)}(-1) = \Phi\left(\frac{5+5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-1+5}{10}\right) =$

$= \Phi(1) - \Phi(0{,}4) = 0{,}84134 - 0{,}65542 = 0{,}18592$

to biorę z tabelki dla F(x) ~~dl~~ rozkładu normalnego

Rozkład t studenta (s.32 zad 1 - krzyżowy pdf)

Zad 1

szt.	18	17	18	17	18	18	17	17	16	16
godz	6	9	1	0	7	3	6	1	0	5

~~Zmienne szt i godz są~~ niezależne zatem

$\bar{x} = E(x) =$

Zadanie 3

Rzucamy 3 kostki jakie jest prawd. że przynajmniej na 1 kostce wypadnie jedynka

~~Rozdanie ... kostki A - zdarzenie wypadnięcia min 1 kostki~~

~~$P(X=1)$ - zdarz.~~ ~~$P(X=1)$ - zdar prawd. wypadnięcia k-ilości oczek~~

~~$P(A)=P(X=1)+P(X=1)+P(X=1)$~~

A - przynajmniej na jednej kostce wypadnie „1"

B - na każdej kostce wypadnie inna liczba oczek

$A \cap B$ - na każdej inna liczba oczek w tym jedna „1"

$\Omega = \{(w_1, w_2, w_3) : w_i \in \{1,2,3,4,5,6\},\ i=1,2,3\}$

$\overline{\Omega} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ - moc zbioru

$\overline{B} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

$P(B) = \frac{120}{6^3}$

$A \cap B = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$

$P(A \cap B) = \frac{20}{6^3}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{20}{6^3} \cdot \frac{6^3}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

ZAD 6.8

n - ilość prób - niezależnych

p - p. sukcesu

k - liczba żądanych sukcesów

$q = (1-p)$

$n=10$

$p=0{,}1$

$k \leqslant 2$

$q=0{,}9$

Tw. Bernoulliego

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P(X \leqslant 2) = \binom{10}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{10-2} = 0{,}1937$$

1.38

B_1 – wylosowano I partię

B_2 – wylosowano II partię

$$P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$$

A_1 – pierwszy dobry

A_2 – drugi dobry

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\cancel{P(A_1)} \cdot P(A_2)}{\cancel{P(A_1)}} = P(A_2)$$

$$P(A_1|B_1) = P(A_2|B_1) = 1$$

$$P(A_1|B_2) = P(A_2|B_2) = 0{,}85$$

$$P(A_2) = P(A_2|B_1)P(B_1) + P(A_2|B_2) \cdot P(B_2) = 0{,}925$$

~~2.8~~

~~F(x)~~ $F_{\xi}(t) = 1 - e$

2.18

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$E\xi(x) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} =$

$= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6} = 3{,}5$

~~$P(X_1) = 1/6$~~

$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

$X_1 = 1, \; p_1 = 1$

~~$X_2 = 2, \; p_1 = 0{,}5$~~

$G(p) = P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$ dle $k \in \mathbb{N}$ $\quad p_i = \frac{7-i}{6}$

$EX = \sum_{i=1}^{6} EX_i = \frac{1}{\frac{7-1}{6}} + \frac{1}{\frac{7-2}{6}} + \frac{1}{\frac{7-3}{6}} + \frac{1}{\frac{7-4}{6}} + \frac{1}{\frac{7-5}{6}} + \frac{1}{\frac{7-6}{6}} =$

$EX_i = \frac{1}{p_i}$

$= 1 + \frac{6}{5} + \frac{6}{4} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = 1 + 1\frac{1}{5} + 1\frac{2}{4} + 2 + 3 + 6 =$

$= 16 + \frac{1}{5} + \frac{2}{4} = 16\frac{14}{20}$

$\frac{4}{5} + \frac{10}{20}$

2.19 $\quad Bin(20, \frac{1}{2})$

$P\{\xi \leq 5\} = \cancel{\binom{20}{1}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{19} + \binom{20}{2}\frac{1}{2}^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{18}} + \binom{20}{5}\frac{1}{2}^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^{15} =$

$= \frac{20!}{15!\,5!}\cdot\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}^{15} =$

$= \frac{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{120} =$

$= 10336 \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{32768}$

A_5 – trafienie 5 orłów pod rząd

$P(A_5) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

Prawd. wylosowanie serii 5 orłów

O O O O O

k – liczba sukcesów

$X \sim Bin(20, \frac{1}{2})$

$P(X=5$

$X \sim Bin(16, \frac{1}{32})$

~~$P(X) = 1$~~ $\cancel{16 \frac{1}{32} = \frac{1}{2}}$

szanse wylosowania orła w 5 ciu rzutach

$Bin(5, \frac{1}{32})$

$P_5(1) = \binom{5}{1}\frac{1}{32}^1\left(1-\frac{1}{32}\right)^4 =$

$= \frac{5!}{1!\,4!}\cdot\frac{1}{32}\cdot\left(\frac{31}{32}\right)^4 = \frac{5}{32}\cdot 0{,}88 =$

$= \frac{4{,}4}{32} = \frac{44}{320} = \frac{11}{80}$

Zad 4

$|\Omega| = 1000$

$|A_1| = 100$ wylicz zwycięskie

$P(I) = \frac{1}{10}$

$X \sim Bin(10, \frac{1}{10})$

$P(X=2) = \binom{10}{2}\cdot\frac{1}{10}^2\left(1-\frac{1}{10}\right)^8 = \frac{10!}{2!\,8!}\cdot\frac{1}{100}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^8 = \frac{9\cdot 10}{2}\cdot\frac{1}{100} =$

$45 \cdot \frac{1}{100}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^8 = \frac{45}{100}\cdot\frac{43\,046\,721}{100\,000\,000} = \frac{1\,937\,102\,445}{10\,000\,000\,000}$

$= 0{,}19$