Następujące zadania polegają na tym, że jeżeli mamy całkę $\int f(x) = F(x) + C$, to należy sprawdzić, czy $(F(x) + C)' = f(x)$ (Jeżeli tak, to oznacza, że całka została dobrze porachowana). Następnie samodzielnie wyznaczamy całkę znanymi metodami (całkowanie przez częśći lub/i przez podstawienie). Mając całkę nieoznaczoną, możemy porachować całkę oznaczoną ( w niektórych punktach są zamieszczone).

**1.** $\int (0.5 - 0.5\,x + 2\,x^3)\,dx = 0.5\,x - 0.25\,x^2 + \frac{x^4}{2} + C$ oraz $\int_0^1 (0.5 - 0.5\,x + 2\,x^3)\,dx = 0.75$

**2.** $\int \sqrt{x}\,\ln(x)\,dx = -x + x\,\ln(x) + C$

**3.** $\int x\,\sin(x^2)\,dx = \frac{-\cos(x^2)}{2} + C$ oraz $\int_0^{\pi/2} x\,\sin(x^2)\,dx = \sin(\frac{\pi^2}{8})^2$

**4.** $\int e^x\,x\,dx = e^x\,(-1 + x) + C$

**5.** $\int xe^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = -e^{\frac{-x^2}{2}} + C$ oraz $\int_0^1 xe^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$

**6.** $\int e^{1-x}\,x\,\left(1 - x^2\right)\,dx = e^{1-x}\,\left(5 + 5\,x + 3\,x^2 + x^3\right) + C$ oraz $\int_0^1 e^{1-x}\,x\,\left(1 - x^2\right)\,dx = 14 - 5\,e$

**7.** $\int (-1 - e^x + x + \cos(x))\,dx = -e^x - x + \frac{x^2}{2} + \sin(x) + C$

**8.** $\int \frac{\sqrt{x}}{(x^2)^{\frac{1}{3}}}\,dx = \frac{6\,x^{\frac{3}{2}}}{5\,(x^2)^{\frac{1}{3}}} + C$

**9.** $\int \frac{\sqrt{x}+x^2}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \frac{6\,x^{\frac{7}{6}}}{7} + \frac{3\,x^{\frac{8}{3}}}{8} + C$

**10.** $\int \frac{1+2\,x}{-1+3\,x}\,dx = \frac{2\,x}{3} + \frac{5\,\log(-1+3\,x)}{9} + C$

**11.** $\int \frac{e^x+x^e}{e}\,dx = \frac{e^x+\frac{x^{1+e}}{1+e}}{e} + C$

**12.** $\int (2 - 3\,x)^{\frac{1}{5}}\,dx = \frac{-5\,(2-3\,x)^{\frac{6}{5}}}{18} + C$

**13.** $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{\arctan(\frac{x}{2})}{2} + C$

**14.** $\int \arcsin(x)\,dx = \sqrt{1-x^2} + x\,\arcsin(x) + C$

.......................................................................................................

W następnych zadaniach zbadać zbieżność całek (tzn. sprawdzić, czy mają skończoną wartość):

**15.** $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

**Pomoc.** Ponieważ $1/\sqrt{x}$ nie jest określone dla $x = 0$, formalnie powinno się wykonać następujące operacje: Niech $3 > a > 0$. Wtedy $\int_a^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{a}$. Zatem $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{3} - 2\lim_{a\to 0^+} \sqrt{a}$

**16.** $\int_1^\infty \frac{2x^2+1}{(1+x^2)x^2}\,dx$

**Pomoc.** Ta całka nie jest zbieżna. Całka nieokreślona $\int \frac{2x^2+1}{(1+x^2)x^2}\,dx = -\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x) + C$. Aby ją wyznaczyć, należy zauważyć, że

$$\frac{2x^2+1}{(1+x^2)x^2} = \frac{x^2+1+x^2}{(1+x^2)x^2} = \frac{x^2+1}{(1+x^2)x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)x^2}$$

**17.** $\int_0^1 (-1 + x)^{-\frac{1}{3}}\,dx$

**Pomoc.** Ta całka wynosi $\frac{-3}{2}$

**18.** $\int_1^\infty \left(x^{-2} + \frac{2}{x}\right)^2 dx$.

**Pomoc.** $\int_1^\infty \left(x^{-2} + \frac{2}{x}\right)^2 dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \left(x^{-2} + \frac{2}{x}\right)^2 dx = \lim_{a\to\infty} (\frac{-1}{3\,a^3} - \frac{2}{a^2} - \frac{4}{a}) - (\frac{-1}{3\cdot 1^3} - \frac{2}{1^2} - \frac{4}{1})$

.......................................................................................................

**19.** Obliczyć pole $D = \{(x, y) : y^2 < 2x,\ x < 8\}$. Być może jest ono równe $\frac{128}{3}$.

**20.** Obliczyć pole zawarte pomiędzy parabolami $y^2 = x,\ x^2 = 8y$.

**21.** Sprawdzić, czy

$$\int_3^5 \frac{x}{-4+x^2}\,dx = \frac{\ln(\frac{21}{5})}{2}$$

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{1+2\,x+x^2}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^6 \frac{x}{\sqrt{4+x^4}} = \frac{6}{7}$$