2 Załóżmy, że X_0 oraz $W_1, W_2, \dots, W_{10}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi, przy tym każda z zmiennych $W_1, W_2 \dots W_{10}$ ma jednakowy rozkład $N(5,1)$. Niech

$$X_{n+1} = \frac{1}{2} X_n + W_{n+1}, \text{ dla } n = 0, 1, \dots, 9$$

Jeżeli wiadomo, że X_0 i X_{10} mają rozkład normalny o jednakowych parametrach. Wyznaczyć parametry tego rozkładu.

Rozwiązanie:

Uwaga: zm. los $X \sim N(\mu; \sigma^2)$ to:

$EX = \mu$ (średnia)

$DX = \sigma$ (odchylenie standardowe)

- $W_1, \dots, W_{10} \sim N(5; 1) \Rightarrow EW_i = 5$

  $DW_i = 1 \Rightarrow D^2 W_i = 1^2$

- X_0 i X_{10} ← wyznaczyć parametry rozkładu (będą identyczne) tych zmiennych losowych tzn: wyznaczyć średnią i wsp. wariancję.

- dla $n = 0$

$$X_1 = \frac{1}{2} X_0 + W_1.$$

- dla $n = 1$

$$X_2 = \frac{1}{2} X_1 + W_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} X_0 + W_1\right) + W_2 = \frac{1}{2^2} \cdot X_0 + \frac{1}{2} W_1 + W_2$$

- dla $n = 2$

$$X_3 = \frac{1}{2} X_2 + W_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^2} \cdot X_0 + \frac{1}{2} W_1 + W_2\right) + W_3 =$$

$$= \frac{1}{2^3} X_0 + \frac{1}{2^2} W_1 + \frac{1}{2} W_2 + W_3$$

⋮

- dla $n = 9$

$$X_{10} = \frac{1}{2^{10}} X_0 + \frac{1}{2^9} W_1 + \frac{1}{2^8} W_2 + \frac{1}{2^7} W_3 + \dots + \frac{1}{2^1} W_9 + \frac{1}{2^0} W_{10}$$

• $EX_{10} = \frac{1}{2^{10}} EX_0 + \frac{1}{2^9} EW_1 + \frac{1}{2^8} EW_2 + \dots + \frac{1}{2^1} EW_9 + \frac{1}{2^0} EW_{10}$

Wiadomo, że: $EX_0 = EX_{10}$

$EX_0 - \frac{1}{2^{10}} EX_0 = 5 \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9} \right)$

suma wyrazów ciągu geom. skończonego w którym:

$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ q = \frac{1}{2} \\ n = 10 \end{array} \right\}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ gdzie $q \neq 1$.

$S_{10} = 1 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)$

$EX_0 \cancel{\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)} = 5 \cdot 2 \cdot \cancel{\left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)}$

$EX_0 = 10$

• $D^2 X_{10} = D^2 \left(\frac{1}{2^{10}} X_0 + \frac{1}{2^9} W_1 + \frac{1}{2^8} W_2 + \frac{1}{2^7} W_3 + \dots + \frac{1}{2^1} W_9 + \frac{1}{2^0} W_{10} \right)$

$= \left\{ \begin{array}{l} \text{ponieważ } X_0 \text{ i wszystkie } W_i \text{ są niezależne} \\ \text{zatem wszystkie } \mathrm{cov} = 0 \end{array} \right\}$

$= \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^2 D^2 X_0 + \left(\frac{1}{2^9}\right)^2 D^2 W_1 + \left(\frac{1}{2^8}\right)^2 D^2 W_2 + \dots + \left(\frac{1}{2^1}\right)^2 D^2 W_9 + \left(\frac{1}{2^0}\right)^2 D^2 W_{10}$

Wiadomo, że: $D^2 X_0 = D^2 X_{10}$.

$D^2 X_0 - \frac{1}{2^{20}} \cdot D^2 X_0 = 1^2 \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots \frac{1}{2^{18}} \right)$

$D^2 X_0 \left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{4}}$

$D^2 X_0 \cancel{\left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right)} = \frac{4}{3} \cancel{\left(1 - \frac{1}{2^{20}}\right)}$

$D^2 X_0 = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ **Odp**: $EX_0 = EX_{10} = 10$

$D^2 X_0 = D^2 X_{10} = \frac{4}{3}$