
Einschränkung kosmologischer Modelle mit zusätzlichen Raumdimensionen mit Hilfe von Supernovae Beobachtungen

Bachelorarbeit an der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München
(Universitätssternwarte München)



Vorgelegt von
Damian Piotr Cytacki
aus Groß-Strehlitz

Betreut von
Prof. Dr. Jochen Weller

München, den xx.xx.xxxx

Constraint of cosmological models with additional spatial dimensions using supernova observations

Bachelor's Thesis at the Faculty of Physics
Ludwig Maximilian University Munich
(University Observatory Munich)



Submitted by
Damian Piotr Cytacki
from Strzelce Opolskie (Poland)

Supervised by
Prof. Dr. Jochen Weller

Munich, xx.xx.xxxx

DANKSAGUNG

Als erstes möchte ich mich bei meinem Betreuer Jochen bedanken. Danke, dass ich die Möglichkeit bekommen habe, die Bachelorarbeit bei dir zu schreiben und damit die Chance erhalten habe, tiefer in das Gebiet der Kosmologie eintauchen zu dürfen. Danke, dass du immer zur Seite standest, als ich Fragen hatte oder mal nicht weiter wusste.

Des Weiteren danke ich all meinen Freunden, die ich auf dieser Reise kennenlernen durfte. Insbesondere bedanke ich mich bei Lukas. Danke, dass ich immer auf dich zählen konnte und du mir immer Mut zugesprochen hast. Ich werde es sehr vermissen, neben dir in den Vorlesungen zu sitzen. Danke auch für das Gegenlesen dieser Arbeit.

Ein besonderer Dank gilt auch meiner Familie, die mich stets unterstützt und mir den nötigen Rückhalt gegeben hat, um diese Herausforderung zu meistern. Ohne sie wäre es nicht möglich gewesen, das Studium zu vollenden.

Zu guter Letzt möchte ich mich bei meiner Freundin bedanken. Fabi, ich danke dir von ganzem Herzen, dass du es immer geschafft hast, mich aufzubauen und immer an mich geglaubt hast – besonders in den Momenten, als ich selbst nicht mehr an mich glaubte. Ich weiß nicht, wie ich das ohne dich geschafft hätte.

Durch Anwendung bestimmter Symmetrieannahmen, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit erläutert werden, lassen sich aus den Einstein'schen Feldgleichungen die **Friedmanngleichungen** ableiten, welche die Dynamik und damit auch die Expansion des Universums beschreiben.

Das auf diesen Annahmen basierende Modell ist unter dem Namen **Standardmodell der Kosmologie**, beziehungsweise als Λ CDM-Modell bekannt.

Das Standardmodell beschreibt die Expansion des Universums durch die Existenz der **kosmologischen Konstante** Λ , die in den Friedmanngleichungen auftaucht.

Ein weiteres Modell, das die Expansion des Universums beschreibt, ist das **DGP-Modell**, das von Gia Dvali, Gregory Gabadadze und Massimo Porrati entwickelt wurde. Das Modell modifiziert die Gravitation durch die Einführung einer zusätzlichen Raumdimension, was zur beschleunigten Expansion des Universums führt.

Ziel dieser Arbeit ist es, diejenigen Parameter zu finden, die die beiden Modelle am besten charakterisieren. Im Fall des Standardmodells wird dieses durch die Parameter $\theta = (\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$ beschrieben, während das DGP-Modell durch die Parameter $\theta = (\Omega_{m,0}, \alpha)$ beschrieben wird.

Nach einer Einführung in die physikalischen und mathematischen Grundlagen sowie einer Vorstellung der beiden Modelle werden anschließend die bestpassenden Parameter mit Hilfe des Datensatzes Union2.1 des **Supernova Cosmology Project** bestimmt. Dieser Datensatz enthält Informationen über verschiedene Supernovae vom Typ Ia.

Es wird eine sogenannte χ^2 -Verteilung eingeführt und minimiert, um die bestpassenden Parameter $\theta_{\text{best}} = (\Omega_{m,0,\text{best}}, \Omega_{\Lambda,0,\text{best}})$ für das Standardmodell und $\theta_{\text{best}} = (\Omega_{m,0,\text{best}}, \alpha_{\text{best}})$ für das DGP-Modell zu bestimmen.

Die optimalen Parameter lauten $\theta_{\text{best}} = (\Omega_{m,0,\text{best}}, \Omega_{\Lambda,0,\text{best}}) = (0.277^{+0.018}_{-0.021}, 0.723^{+0.018}_{-0.021})$ und $\theta_{\text{best}} = (\Omega_{m,0,\text{best}}, \alpha_{\text{best}}) = (0.277, -0.06)$.

Aufgrund der großen Unsicherheiten des α -Parameters im DGP-Modell lässt sich keine eindeutige Aussage über das zutreffende Modell treffen. Zusätzliche Datensätze und die daraus bestimmten Parameter deuten jedoch auf das Λ CDM-Modell hin.

1	Physikalische und mathematische Grundlagen	1
1.1	Distanzmessungen in der Astrophysik	1
1.1.1	Die Parallaxen Methode	1
1.1.2	Scheinbare Helligkeit, absolute Helligkeit und Entfernungsmodul	2
1.2	Standardkerzen	4
1.2.1	Cepheiden	4
1.2.2	Supernovae vom Type Ia	5
1.3	Rotverschiebung	6
1.4	Metrik und metrischer Tensor	9
1.5	Einstein'sche Feldgleichung	10
1.5.1	Kosmologische Konstante Λ	10
2	Das Standardmodell der Kosmologie / ΛCDM-Modell	12
2.1	Annahmen des Standardmodells	12
2.2	Robertson-Walker-Metrik und die Friedmann-Gleichungen	14
2.3	Dichteparameter	16
2.3.1	Beziehung zwischen dem Skalenfaktor $a(t)$ und der Rotverschiebung z	17
2.4	Entfernungsmaße	19
3	Das Dvali-Gabadadze-Porrati-Modell	21
4	Bestimmung der Parameter	25
4.1	Das Supernova Cosmology Project Datenset Union2.1	25
4.2	Parameterbestimmung im Λ CDM-Modell	27
4.2.1	Gleichzeitige Bestimmung von H_0 und θ_{best} durch χ^2 -Minimierung	27
4.2.2	Bestimmung von θ_{best} ohne Berücksichtigung von H_0 durch χ^2 -Minimierung	28
4.3	Parameterbestimmung im DGP-Modell	30
5	Diskussion der Ergebnisse	33

1.1 Distanzmessungen in der Astrophysik

Werfen wir einen Blick in den Nachthimmel, so ist die einzige Information, die uns auf der Erde erreicht, das Licht ferner Objekte im Universum.

Mithilfe dieses Lichts können Menschen Informationen über die Entfernungen zu den Objekten gewinnen. Dabei existieren verschiedene Methoden, um diese Entfernungen zu bestimmen.

1.1.1 Die Parallaxen Methode

Betrachtet wird ein Objekt vor einem Fixsternhintergrund. Fixsterne sind Sterne, die ihre relative Position am Himmel beibehalten. Aufgrund der jährlichen Bewegung der Erde um die Sonne scheint sich das Objekt gegenüber dem Fixsternhintergrund leicht nach links und rechts zu bewegen.

Die Sonne, die Erde und das Objekt bilden ein rechtwinkliges Dreieck, in dem sich der Parallaxenwinkel befindet. Gelingt es, den Parallaxenwinkel zu messen, kann man daraus die Entfernung zum Objekt bestimmen.

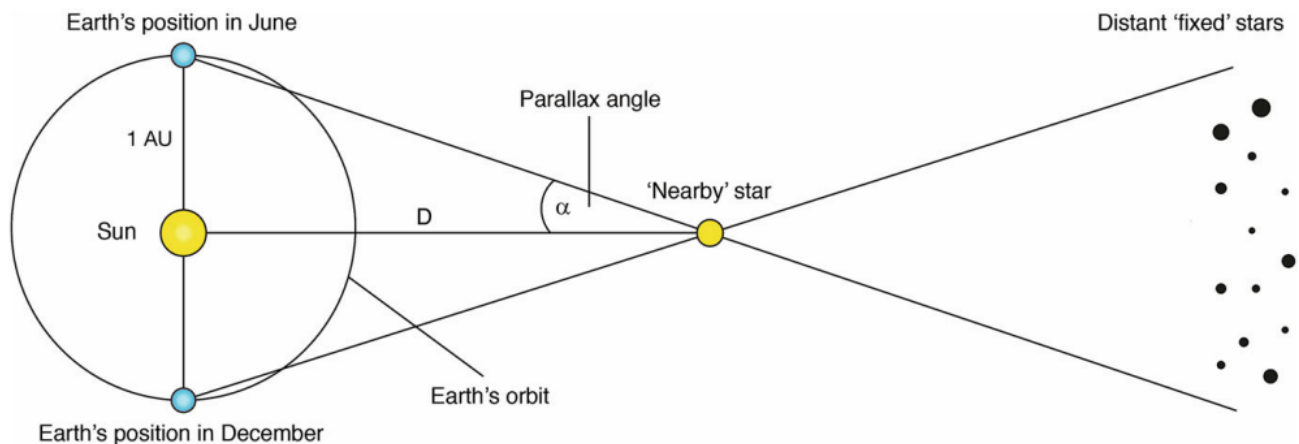


Abbildung 1.1: Messung der Distanz mithilfe der Parallaxenmethode und des Parallaxenwinkels [Sch25, Seite 103]

Aus der mittleren Entfernung Erde–Sonne und dem Parallaxenwinkel α lässt sich die Entfernung zum Objekt mit der bekannten trigonometrischen Formel berechnen:

$$\tan(\alpha) = \frac{1\text{AU}}{D} \quad \tan(\alpha) \approx \alpha \quad [\alpha] = \text{rad}$$

wobei die mittlere Entfernung Erde–Sonne einer Astronomischen Einheit $1\text{AU} = 149.6 \times 10^9\text{m}$ entspricht und die Kleinwinkelnäherung anwendbar ist, da für die beobachteten Winkel $|\alpha| \ll 1$ gilt. Damit vereinfacht sich die trigonometrische Formel zu:

$$\alpha \approx \frac{1\text{AU}}{D} \quad \Longleftrightarrow \quad D \approx \frac{1\text{AU}}{\alpha} \quad (1.1)$$

Mithilfe dieser Formel lässt sich auch die sinnvolle astronomische Einheit Parsec definieren: Ein Parsec ist die Entfernung, unter der ein Objekt erscheint, wenn der Parallaxenwinkel eine Bogen Sekunde beträgt.

$$1\text{pc} := \frac{1\text{AU}}{\tan(1'')} \approx \frac{1\text{AU}}{1''} \approx \frac{149.6 \times 10^9\text{m}}{4.8481 \times 10^{-6}} \approx 3.085 \times 10^{16}\text{m} \approx 3.26\text{ly}$$

1.1.2 Scheinbare Helligkeit, absolute Helligkeit und Entfernungsmodul

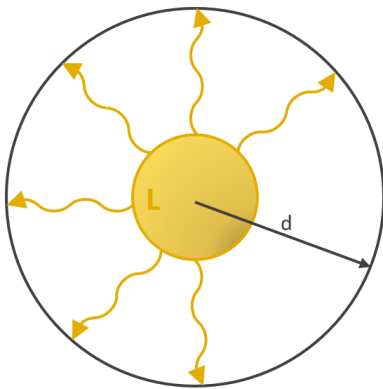


Abbildung 1.2: Isotrope Strahlung eines Objekts mit Leuchtkraft L .

Im Folgenden wird ein Objekt mit Leuchtkraft L betrachtet, das elektromagnetische Strahlung isotrop in den Raum emittiert. Der Strahlungsfluss in einer Entfernung d vom Objekt ergibt sich zu

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (1.2)$$

wobei F die Strahlungsleistung pro Quadratmeter beschreibt.

Bevor weitere Größen mithilfe des Strahlungsflusses definiert werden, wird zunächst der historische Hintergrund betrachtet, der zu ihrer Einführung führte.

Hipparchus von Nikäa teilte Sterne nach ihrer scheinbaren Helligkeit in sechs Größenklassen ein, wobei Sterne der ersten Größenklasse die hellsten und die der sechsten die schwächsten sein sollten. Ernst Heinrich Weber und Gustav Theodor Fechner zeigten, dass das menschliche Gehirn logarithmisch auf Reize reagiert. Auf dieser Erkenntnis baut die Definition der astronomischen Magnitudenskala auf. [WWW09]

Die Magnitudendifferenz zweier Strahlungsquellen $\Delta m = m_1 - m_2$ lautet:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right) \quad (1.3)$$

wobei m_i , F_i , ($i \in \{1, 2\}$) die Magnitude und der Strahlungsfluss der i-ten Strahlungsquelle sind. Der Vorfaktor -2.5 wurde dabei so gewählt, dass die damals von Hipparchus vorgegebenen scheinbaren Helligkeiten der Sterne in etwa erhalten bleibt.

Stellt man die Formel nach dem Verhältnis der Strahlungsflüsse um und setzt eine Magnitudendifferenz $\Delta m = -5$ ein, ergibt sich ein Verhältnis von 100:

$$\Delta m = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right) \iff \frac{F_1}{F_2} = 10^{-\frac{2\Delta m}{5}} \stackrel{\Delta m = -5}{=} 10^2 = 100$$

Somit ist der Strahlungsfluss einer Quelle mit Magnitude $m_1 = 1$ um einen Faktor 100 größer als der einer Quelle mit Magnitude $m_2 = 6$

Mithilfe der Gleichungen (1.2) und (1.3) lässt sich eine Beziehung zwischen der Magnitudendifferenz zweier Objekte und ihren jeweiligen Entfernungen herstellen:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right) = -2.5 \log_{10} \left(\frac{L_1}{4\pi d_1^2} \frac{4\pi d_2^2}{L_2} \right) = -2.5 \log_{10} \left(\frac{L_1}{L_2} \right) - 5 \log_{10} \left(\frac{d_2}{d_1} \right) \quad (1.4)$$

Kennt man die Magnitudendifferenz, die Leuchtkraft der Objekte sowie die Entfernung zu einem der beiden Objekte, so lässt sich die Entfernung zum anderen Objekt berechnen.

Eine weitere hilfreiche Größe ist die absolute Helligkeit M . Während die scheinbare Helligkeit angibt, wie hell ein Objekt von der Erde aus erscheint und somit keine intrinsische Eigenschaft des Objekts darstellt, gibt die absolute Helligkeit an, wie hell ein Objekt bei einer Entfernung von 10pc erscheinen würde oder anders gesagt: die absolute Helligkeit ist die scheinbare Helligkeit eines 10pc entfernten Objekts. Die Differenz zwischen der scheinbaren Helligkeit und der absoluten Helligkeit wird als Entfernungsmodul bezeichnet.

$$m - M = \underbrace{-2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L} \right)}_{=0} - 5 \log_{10} \left(\frac{10pc}{d} \right) = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10pc} \right) \quad (1.5)$$

Das Entfernungsmodul bringt einen sehr großen Vorteil mit sich: Kennt man die Differenz der scheinbaren und absoluten Helligkeit, so lässt sich die Entfernung zum Objekt direkt bestimmen. In der Praxis ist dies jedoch nicht einfach möglich, da man sich nicht 10pc weit entfernen kann, um den Strahlungsfluss zu messen.

Es gibt jedoch eine Klasse von Objekten, deren absolute Helligkeit man direkt messen, bzw. abschätzen kann.

1.2 Standardkerzen

Eine Standardkerze ist ein astrophysikalisches Objekt, dessen absolute Helligkeit, bzw. Leuchtkraft bekannt ist. Kennt man zusätzlich den beobachteten Strahlungsfluss, lässt sich daraus direkt die Entfernung zum Objekt bestimmen.

1.2.1 Cepheiden

Die Cepheiden sind eine Gruppe von pulsationsveränderlichen Sternen, benannt nach dem Stern δ -Cephei. Pulsationsveränderliche Sterne haben die Eigenschaft, dass ihre Helligkeit periodisch schwankt. Ohne zu tief auf den Mechanismus einzugehen, sei an dieser Stelle erwähnt, dass diese Helligkeitsschwankungen mit dem hydrostatischen Gleichgewicht der Sterne zusammenhängen. [\[Han20\]](#)

Die amerikanische Astronomin Henrietta Swan Leavitt sammelte Daten über Cepheiden in der kleinen Magellanschen Wolke und entdeckte im Jahr 1912, dass eine Beziehung zwischen der Periode und der Helligkeit der Cepheiden besteht. Leavitt nahm dabei an, dass alle Cepheiden in etwa die gleiche Entfernung haben und die unterschiedlichen Helligkeiten somit mit den intrinsischen Eigenschaften der Cepheiden im Zusammenhang stehen.

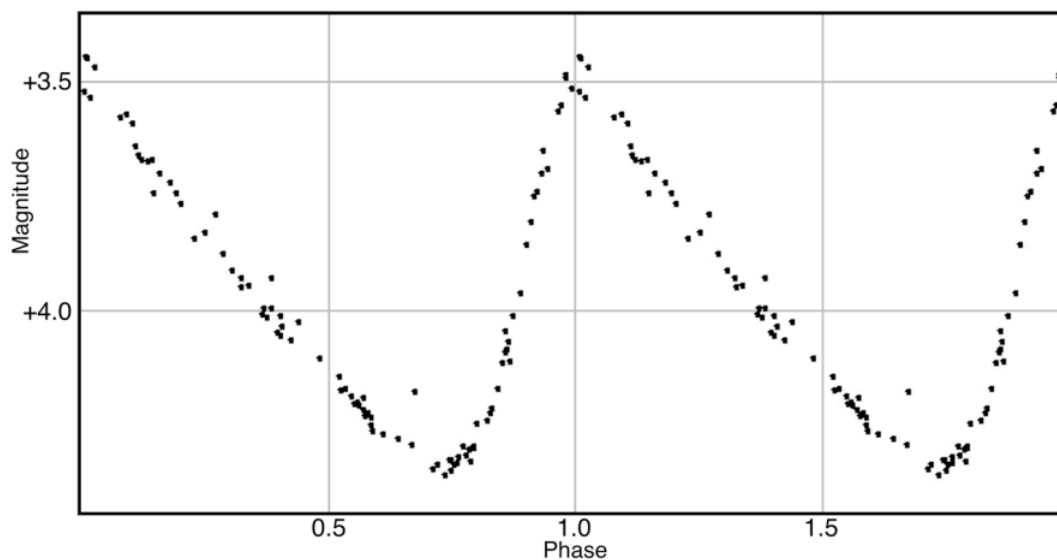


Abbildung 1.3: Periodische Veränderung der Magnitude von δ -Cephei. Phase von 1.0 entspricht dabei einer Periode der Länge 5.4 Tage. [\[Sch25, Seite 106\]](#)

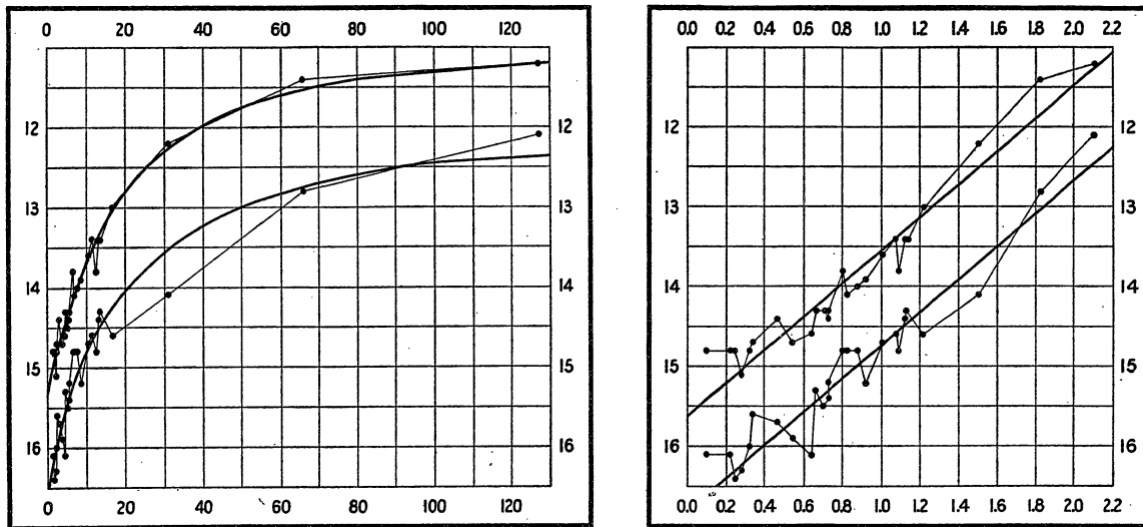


Abbildung 1.4: Die von Leavitt entdeckte Beziehung zwischen Periodendauer und Helligkeit. [LP12]

Links: Maximale und minimale Helligkeiten (y-Achse) aufgetragen gegen die Periodendauer (x-Achse) in Tagen.

Rechts: Maximale und minimale Helligkeiten (y-Achse) aufgetragen gegen den \log_{10} der Periodendauer (x-Achse).

Leavitt zeigte, dass zwischen der absoluten Magnitude und dem Zehnerlogarithmus der Periode ein linearer Zusammenhang besteht. Gelingt es die Periode eines Cepheiden zu messen, so kann man daraus die absolute Helligkeit berechnen. Mit Hilfe des Entfernungsmoduls kann die Distanz bestimmt werden.

1.2.2 Supernovae vom Type Ia

Eine weitere Standardkerze, mit deren Hilfe im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Parameter der beiden Modelle bestimmt werden, sind Supernovae vom Typ Ia.

Bei sehr großen Distanzen wird es zunehmend schwieriger Objekte zu finden, die hell genug sind, um ihre Eigenschaften zu messen und daraus neue Erkenntnisse zu gewinnen. Supernovae vom Typ Ia erreichen Helligkeiten, die mit denen der Heimatgalaxien vergleichbar sind, in denen sie sich befinden. Dadurch bleiben sie selbst bei sehr großen Distanzen gut sichtbar.

Der Entstehungsmechanismus einer Supernovaexplosion des angegebenen Types ist sehr komplex und soll nur kurz beleuchtet werden:

Der Ausgangspunkt ist ein Binärsystem bestehend aus einem weißen Zwerg und einem Begleitstern. Der weiße Zwerg befindet sich im hydrostatischen Gleichgewicht. Während die Gravitation den Stern immer weiter zusammendrücken will, entsteht ein Gegendruck welcher aufgrund des degenerierten Elektronendrucks der Gravitation entgegenwirkt.

Im Binärsystem beginnt der weiße Zwerg, Materie vom Begleitstern zu akkretieren, das führt zu einem Massezuwachs. Erreicht die Masse die Chandrasekhar-Grenze von $1.4M_{\odot}$, wobei $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}\text{kg}$, kann der Elektronendruck der Gravitation nicht mehr stand halten und der Stern kollabiert. Es kommt zu einer nuklearen Reaktion und letztendlich zu einer Explosion. Ein Produkt der nuklearen Reaktion ist unter anderem das radioaktive ^{56}Ni . Dieses zerfällt in ^{56}Co und weiter in ^{56}Fe . Die bereits heiße Sternmaterie, die sich ausbreitet wird durch den Zerfall weiter aufgeheizt, was zur einer Helligkeitsteigerung führt die, bis zu einem bestimmten Punkt anwächst.

Durch den Mangel an weiterer radioaktiven Materie und das Abstrahlen der Sternmaterie kühlt sich alles ab und die Helligkeit sinkt. [Blo24] [Wel06]

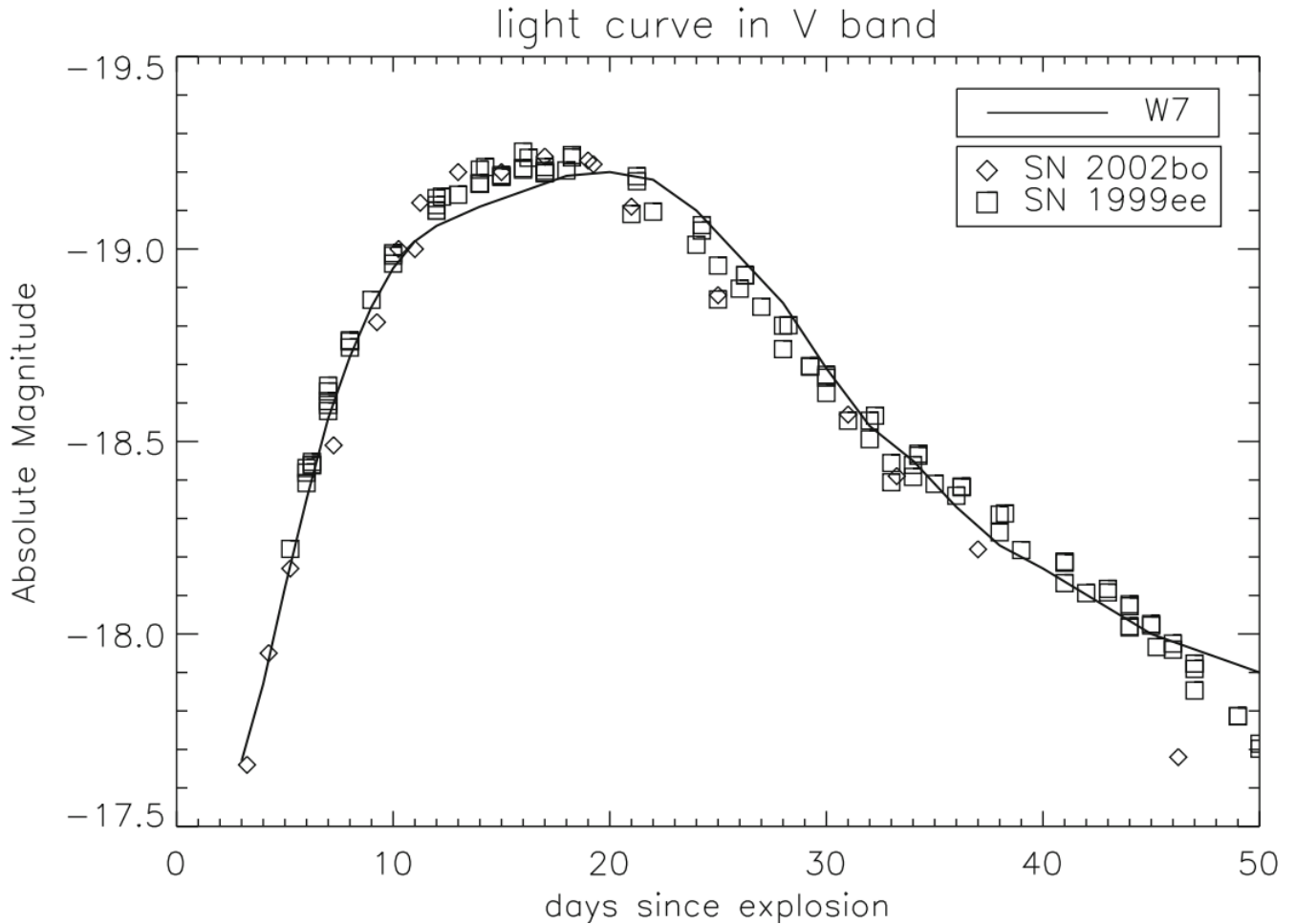


Abbildung 1.5: Charakteristische Helligkeitskurve einer Supernova vom Typ Ia. Die Grafik zeigt den typischen Anstieg der Helligkeit bis das Maximum erreicht wird und den darauffolgenden Abfall. [Sch25, Seite 113]

1.3 Rotverschiebung

Ein weiterer Effekt, der auf großen Distanzen eine wichtige Rolle spielt und mit welchem man Distanzen berechnen kann, ist die Rotverschiebung des Lichts.

Im Jahr 2011 erhielten die Astronomen Saul Perlmutter, Brian P. Schmidt und Adam Riess den Nobelpreis für Physik für den Nachweis der beschleunigten Ausdehnung des Univerums. Reist Licht durch den Raum, so vergrößert sich aufgrund der Expansion des Raums die Wellenlänge, was als Konsequenz hat, dass das ausgesandte Licht rötter erscheint, als es eigentlich bei Emission war.

Dies motiviert die Einführung der Rotverschiebung:

$$z := \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{\text{emittiert}}} = \frac{\lambda_{\text{beobachtet}} - \lambda_{\text{emittiert}}}{\lambda_{\text{emittiert}}} \quad (1.6)$$

Bewegt sich die Quelle vom Beobachter weg, ist die Rotverschiebung positiv. Bei negativer Rotverschiebung spricht man von einer Blauverschiebung. Im Fall einer Blauverschiebung bewegt sich die Quelle auf den Beobachter zu.

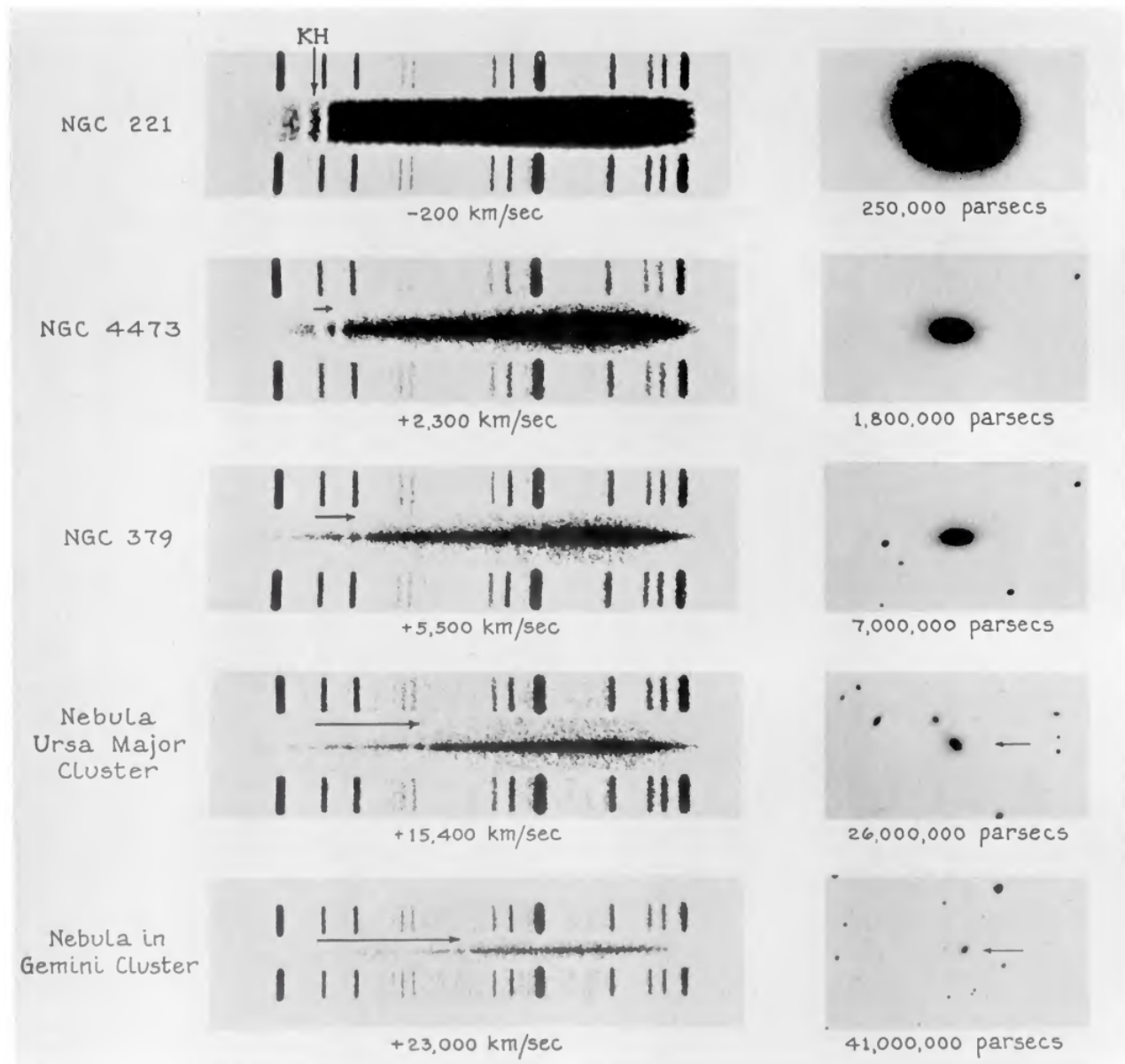


Abbildung 1.6: Rotverschiebung verschiedener Galaxiespektren. Der mittlere Bereich zeigt das beobachtete Spektrum. Der senkrechte Pfeil, der im ersten Spektrum nach unten zeigt, markiert die H- und K-Linien des Kalziums. Die waagerechten Pfeile verdeutlichen, wie stark die Spektren rotverschoben wurden. [Hum36]

Mit Hilfe der relativistischen Doppler-Formel

$$z = \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}} - 1$$

kann man die Geschwindigkeit v berechnen, mit der sich ein Objekt, dessen Licht wir empfangen, von uns entfernt. Dazu werden die beiden Wurzelterme unter der Annahme, dass die Geschwindigkeit des Objekts im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit gering ist, taylorentwickelt.

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$$

Mit dieser Entwicklung erhält man die Formel für die Geschwindigkeit:

$$z = \frac{v}{c} \quad \Longleftrightarrow \quad v = cz \tag{1.7}$$

Aus diesem Zusammenhang kann man für kleine Rotverschiebung auch die Distanzen zu den Objekten bestimmen. Edwin Hubble stellte fest: Je weiter sich Galaxien von uns befinden, desto schneller bewegen sie sich von uns weg. Hubble fand heraus, dass die Geschwindigkeiten proportional zu den Distanzen sind, wobei die Proportionalitätskonstante die Hubble-Konstante H_0 ist.

Das Hubble-Gesetz lautet damit:

$$v = H_0 d \Longleftrightarrow cz \approx H_0 d \Longleftrightarrow d \approx \frac{cz}{H_0} \tag{1.8}$$

wobei die Hubble-Konstante ungefähr $70 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ beträgt. [Bar19]

Wichtig zu erwähnen ist, dass nach heutigem Wissenstand die Hubble-Konstante keine echte Konstante ist, sondern sich aufgrund der beschleunigten Ausdehnung des Universums auch im Laufe der Zeit verändert. Daher ist es sinnvoller, nicht von der Hubble-Konstante, sondern vom Hubble-Parameter $H(t)$ zu sprechen, wobei $H(t_{\text{heute}}) = H_0$.

1.4 Metrik und metrischer Tensor

Die mathematische Definition einer Metrik lautet:

Sei X eine Menge. Eine Metrik ist eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ auf $X \times X$ die folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) Positive Definitheit: $\forall x, y \in X : d(x, y) > 0$ und $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

(2) Symmetrie: $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$.

(3) Dreiecksungleichung: $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Das Paar (X, d) wird metrischer Raum genannt. [MK19]

Ein wichtiges Beispiel einer Metrik ist die Abstandsmetrik auf \mathbb{R}^n , die den Abstand zwischen zwei Punkten im Raum beschreibt. Sie nimmt die folgende Form an:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (x_i - y_i)^2} \quad (\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n) \qquad d(\vec{x}, \vec{0}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n)$$

Betrachtet man den Fall \mathbb{R}^3 , lässt sich das infinitesimale Linienelement, das vom Ursprung aus gemessen wird, definieren als

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j \tag{1.9}$$

g_{ij} ist der metrischer Tensor und ist im Rahmen dieser Bachelorarbeit als eine Matrix zu betrachten. Die rechte Seite von (1.9) verwendet die Einstein'sche Summenkonvention, bei der über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

Im Fall von kartesischen Koordinaten nimmt die Metrik die Form $g_{ij} = \delta_{ij}$ an und wird durch die Einheitsmatrix dargestellt.

Damit ergibt sich die folgende Darstellung: $g_{\text{Kartesisch}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aus dieser Form erhält man die bekannte Abstandsformel: $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$.

Beschreibt man Systeme die bestimmte Symmetrien aufweisen, ist es sinnvoll Koordinatensysteme zu verwenden, die an die Symmetrie des Problems angepasst sind. Ein anderes Koordinatensystem, das im weiteren Verlauf sich als nützlich erweisen wird, sind die Kugelkoordinaten:

$$g_{\text{Kugel}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \implies ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

1.5 Einstein'sche Feldgleichung

Die Feldgleichung lässt sich auf unterschiedliche Weise herleiten. Da diese Herleitungen jedoch den Rahmen dieser Bachelorarbeit sprengen würden, wird die Gleichung im Folgenden ohne Herleitung angegeben.

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1.10)$$

$\mathcal{R}_{\mu\nu}$: Ricci-Tensor, \mathcal{R} : Ricci-Skalar, $g_{\mu\nu}$: Metrik, Λ : kosmologische Konstante und $T_{\mu\nu}$: Energie-Impuls-Tensor

Die linke Seite der Gleichung beschreibt wie sich die Raumzeit verhält, während die rechte Seite das Verhalten von Materie beschreibt.

1.5.1 Kosmologische Konstante Λ

Die Feldgleichung kann sowohl mit als auch ohne eine kosmologische Konstante Λ formuliert werden. Einstein selbst glaubte jedoch an ein statisches Universum, sodass er die Konstante einführte um diese Eigenschaft zu garantieren. Das von Einstein eingeführte Konstrukt war jedoch instabil, sodass kleinste Störungen zu einer Expansion oder einem Kollaps des Universums führten.

Jahre später gelang es den Wissenschaftlern, anhand verschiedener Beobachtungsdaten die beschleunigte Ausdehnung des Universums zu entdecken. Diese beschleunigte Ausdehnung wird der kosmologischen Konstante zugeschrieben, sodass sie ein Bestandteil des Standardmodells der Kosmologie wurde, das die Entwicklung des Universums beschreibt.

Ein Modell, das die Expansion des Universums beschreibt, ist das Standardmodell der Kosmologie. Die Expansion wird dabei maßgeblich durch die kosmologische Konstante Λ beeinflusst, die mit der dunklen Energie bzw. der Vakuumenergie des leeren Raums in Verbindung gebracht wird. Λ führt zu einer beschleunigten Expansion des Universums, da sie im Rahmen der Feldgleichungen der Gravitation als eine Form von negativem Druck entgegen wirkt.

2.1 Annahmen des Standardmodells

Das Standardmodell basiert auf dem kosmologischen Prinzip, das besagt, dass das Univerum auf großen Skalen (größer als 100Mpc [Ryd16]) homogen und isotrop ist.

Homogenität: Die Materieverteilung im Universum ist im Mittel überall gleich.

Isotropie: Das Universum und seine Eigenschaften sehen in allen Richtungen gleich aus.

Dem kosmologischen Prinzip zufolge nimmt die Erde keine besondere Stellung im Universum ein. Daher lassen sich die Entwicklung und Eigenschaften des Universums prinzipiell von jedem Ort aus betrachten.

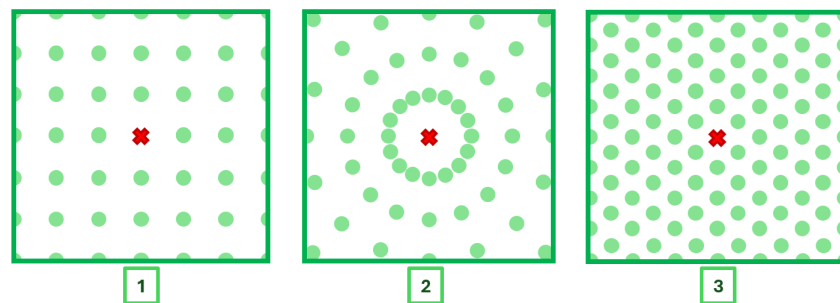


Abbildung 2.1: Visualisierung des kosmologischen Prinzips.

- 1 : Homogene, aber nicht isotrope Verteilung.
- 2 : Isotrope, aber nicht homogene Verteilung.
- 3 : Homogene und isotrope Verteilung.

Starke Argumente für das kosmologische Prinzip liefern die großräumig homogene Verteilung der Galaxien sowie die Messdaten des COBE-Satelliten, die zeigen, dass das Spektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung dem eines idealen Schwarzkörpers entspricht, was auf Isotropie hindeutet.

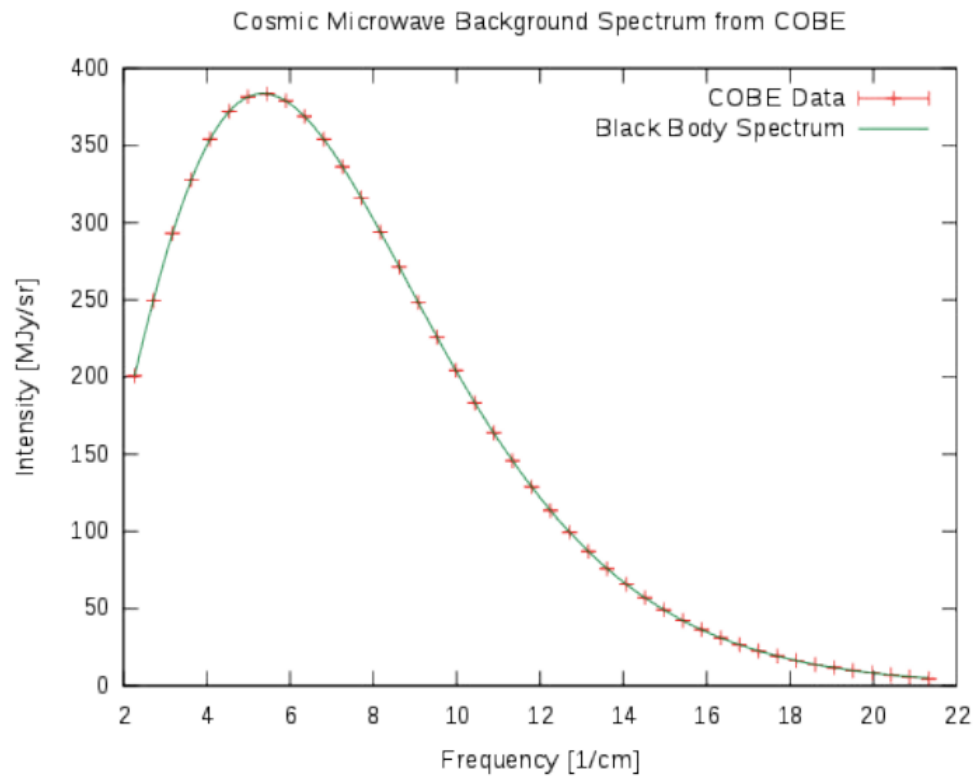


Abbildung 2.2: Vergleich der vom COBE-Satelliten gemessenen Intensitätsverteilung mit einem theoretischen Schwarzkörperspektrum. Die Übereinstimmung zeigt, dass die kosmische Mikrowellenhintergrundstrahlung mit hoher Genauigkeit einem idealen Schwarzkörper entspricht. [Row21]

2.2 Robertson-Walker-Metrik und die Friedmann-Gleichungen

Eine mögliche Metrik, die das kosmologische Prinzip berücksichtigt, ist die Robertson-Walker-Metrik. Das Linienelement dieser Metrik nimmt die folgende Form an:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, $a(t)$ der zeitabhängige Skalenfaktor des Universums, der die Veränderung der Distanzen beschreibt und für die heutige Zeit mit dem heutigen Wert $a(t_0) = a(t_{\text{heute}}) := 1$. Der Parameter k kennzeichnet die Krümmung des Raums.

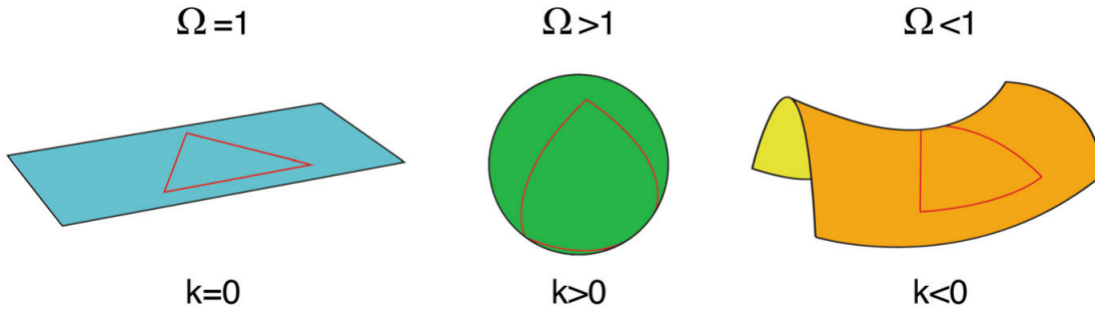


Abbildung 2.3: Mögliche Geometrien des Universums. Für $k = 0$ ist das Universum flach, für $k = 1$ geschlossen und für $k = -1$ offen. Eine alternative Charakterisierung beruht auf der Summe der Dichteparameter Ω . $\Omega = 1$ für ein flaches Universum, $\Omega > 1$ für ein geschlossenes und $\Omega < 1$ für ein offenes Universum. [Sch25, Seite 180]

Durch Anwendung der Robertson-Walker-Metrik und der Einstein'schen Feldgleichungen erhält man die zwei Friedmann-Gleichungen:

$$H^2(t) = \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2(t)} \quad (2.2)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (2.3)$$

Dabei ist $H(t)$ der Hubbleparameter, $a(t)$ der Skalenfaktor, Λ die kosmologische Konstante, G die Newton'sche Gravitationskonstante, k der Krümmungsparameter, $\rho(t) = \rho_{\text{baryonische Materie}}(t) + \rho_{\text{dunkle Materie}}(t) + \rho_{\text{Strahlung}}(t) + \rho_{\text{Neutrino}}(t) + \dots$ und $p(t)$ ist der kosmologische Druck, der durch seine Größe und Vorzeichen die Dynamik des Universums beeinflusst

Erweitert man in der Gleichung (2.2) den $\frac{\Lambda c^2}{3}$ Term durch $\frac{8\pi G}{8\pi G}$, kann man die Gleichung umschreiben zu:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} (\rho(t) + \rho_\Lambda) - \frac{kc^2}{a^2(t)} \quad \text{mit} \quad \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}. \quad (2.4)$$

Im weiteren Verlauf wird nur der Fall von

$\rho_{tot} = \rho_{\text{baryonische Materie}} + \rho_{\text{dunke Materie}} + \rho_{\text{Strahlung}} + \rho_{\text{Neutrino}} + \dots + \rho_\Lambda = \rho_{\text{baryonische Materie}} + \rho_\Lambda$
und $k = 0$ betrachtet.

Als Abkürzung wird der Index „baryonische Materie“ fallen gelassen und durch „m“ ersetzt.

Die Gleichung (2.4) nimmt dadurch die folgende Form an:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} (\rho_m(t) + \rho_\Lambda) \quad (2.5)$$

2.3 Dichteparameter

Multiplikation der Gleichung (2.5) mit $\frac{3}{8\pi G}$ motiviert eine weitere Vereinfachung. Die linke Seite wird nun als $\rho_{crit}(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$ bezeichnet. Teilt man beide Seiten durch $\rho_{crit}(t)$ erhält man die zwei Dichteparameter und die Beziehung:

$$\Omega_m(t) = \frac{\rho_m(t)}{\rho_{crit}(t)} \quad \Omega_\Lambda(t) = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{crit}(t)} \quad \implies \quad \Omega_m(t) + \Omega_\Lambda(t) = 1 \quad (2.6)$$

Diese Beziehung muss für alle Zeiten t gelten, somit ebenfalls für die heutige Zeit t_0 .

$$\Omega_m(t_0) := \Omega_{m,0} \quad \Omega_\Lambda(t_0) := \Omega_{\Lambda,0} \quad \implies \quad \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1 \quad (2.7)$$

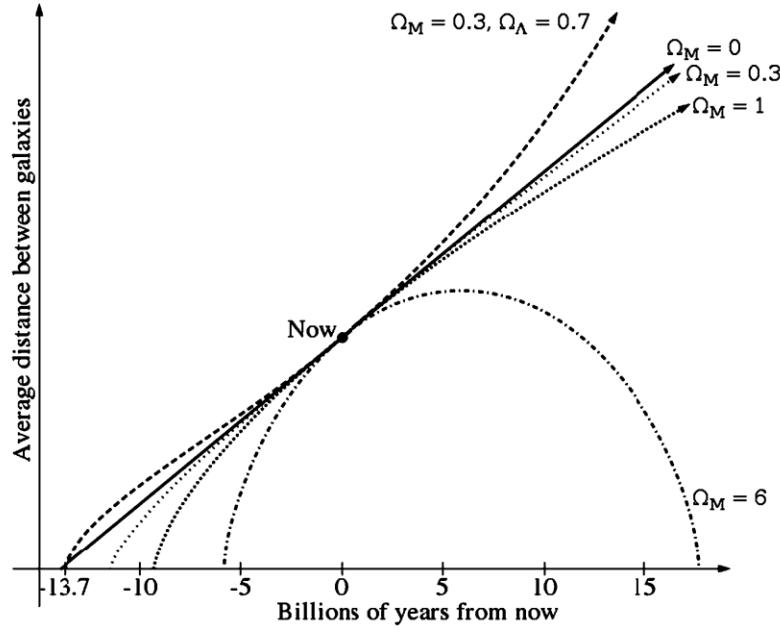


Abbildung 2.4: Entwicklung der relativen Abstände zwischen Galaxien für verschiedene Werte von Ω_m und Ω_Λ . Der Fall $\Omega_m = 0.3$ und $\Omega_\Lambda = 0.7$ beschreibt nach dem heutigen Wissenstand unser Universum zur jetzigen Zeit. [CJ13]

Durch die Expansion des Universums wird Materie immer weiter ausgedünnt. Es muss also eine Beziehung zwischen dem Skalenfaktor $a(t)$ und $\rho_m(t)$ existieren. Beide Größen sind proportional zueinander mit der Proportionalitätskonstante $\rho_{m,0}$. (für genauere Herleitung, siehe: [Bar19, Seite 14])

$$\rho_m(t) \propto a^{-3}(t) \quad \implies \quad \rho_m(t) = \frac{\rho_{m,0}}{a^3(t)}$$

Aus der Tatsache, dass $\rho_{m,0}$ geschrieben werden kann als:

$$\rho_{m,0} = \Omega_{m,0} \cdot \rho_{\text{crit},0} = \Omega_{m,0} \cdot \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.8)$$

und ρ_Λ keine Zeitabhängigkeit hat und somit für alle Zeiten gleich bleibt, kann mit Hilfe von $\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}$, (2.7) und (2.8) die Gleichung (2.5) in die folgende Form gebracht werden:

$$H^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + 1 - \Omega_{m,0} \right) \quad (2.9)$$

2.3.1 Beziehung zwischen dem Skalenfaktor $a(t)$ und der Rotverschiebung z

Die Rotverschiebung ist eine Größe, die von der Erde aus beobachtet und gemessen werden kann. Gelingt es, eine Beziehung zwischen dem Skalenfaktor $a(t)$ und der Rotverschiebung z herzustellen, so lässt sich der Skalenfaktor in Gleichung (2.9) durch die Rotverschiebung ausdrücken. Dadurch erhält man eine Gleichung, die von einer gut beobachtbaren Größe abhängt.

Um die Wirkung der Expansion auf Licht zu untersuchen, nutzt man die Tatsache, dass sich Licht auf einer Nullgeodäte bewegt, also $ds^2 = 0$ gilt. Platziert man einen Beobachter im Ursprung des Koordinatensystems ($r = 0$) und betrachtet eine radiale Nullgeodäte, so gilt außerdem: $ds^2 = d\theta = d\phi = 0$.

Das Linienelement nimmt damit die folgende Form an:

$$0 = c^2 dt^2 - a^2(t) dr^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{cdt}{a(t)} = \pm dr$$

Dabei steht das „+“-Zeichen für einen vom Beobachter aus emittierten Lichtstrahl und das „-“-Zeichen für einen bei dem Beobachter ankommenden Lichtstrahl. Für einen Lichtstrahl, der zur Zeit t_1 und Distanz r_1 emittiert wird und im Ursprung zur Zeit t_0 ankommt, erhält man:

$$c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 dr \quad \Longleftrightarrow \quad c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = r_1$$

Um zu verstehen, wie sich die Frequenz ν_0 (bzw. die Wellenlänge) des ankommenden Lichts in Relation zur emittierten Frequenz ν_1 verhält, betrachtet man zwei aufeinander folgende Wellenfronten. Die erste Wellenfront wird zum Zeitpunkt t_1 emittiert und erreicht den Beobachter zum Zeitpunkt t_0 . Die zweite Wellenfront wird zum Zeitpunkt $t_1 + dt_1$ emittiert und trifft beim Beobachter zum Zeitpunkt $t_0 + dt_0$ an. Analog zur vorherigen Gleichung berechnet man:

$$c \int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 dr \quad \Longleftrightarrow \quad c \int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)} = r_1$$

Durch Gleichsetzen der beiden vorherigen Gleichungen erhält man:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1+dt_1}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Subtrahiert man $\int_{t_1+dt_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$ folgt die Gleichung

$$\int_{t_1}^{t_1+dt_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a(t)}$$

Unter der Annahme, dass sich während der Zeit zwischen Emission und Absorbition der Skalenfaktor kaum ändert, kann man ihn als ungefähr konstant annehmen und erhält daraus:

$$\frac{dt_0}{a(t_0)} = \frac{dt_1}{a(t_1)} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{dt_1}{dt_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}$$

Dabei kann man diesen Ausdruck durch die Rotverschiebung z darstellen

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a(t_1) = a(t) = \frac{a(t_0)}{1+z} \stackrel{a(t_0)=1}{=} \frac{1}{1+z} \quad (2.10)$$

Nutzt man den aus der Gleichung (2.10) hergeleiteten Zusammenhang zwischen Skalenfaktor und Rotverschiebung, kann man die Gleichung (2.9) in ihre finale Form schreiben:

$$\boxed{H^2 = H_0^2 (\Omega_{m,0}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{m,0}) = H_0^2 E^2(z)} \quad (2.11)$$

mit $E(z) = \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{m,0}}$.

2.4 EntfernungsmäÙe

Die mitbewegte Entfernung (comoving distance) d_c bleibt während der Expansion des Universums konstant. Sie kann mit den folgenden Ausdruck berechnet werden:

$$d_c = -c \int_0^t \frac{dt}{a} \stackrel{(1)}{=} -c \int_0^{a(t)} \frac{da}{a\dot{a}} \stackrel{(2)}{=} -c \int_0^{a(t)} \frac{da}{Ha^2} \stackrel{(3)}{=} c \int_0^z \frac{dz}{H(\tilde{z})}$$

(1): Substitution mit Hilfe der Beziehung: $\dot{a} = \frac{da}{dt} \iff dt = \frac{da}{\dot{a}}$.

(2): Ersetzung von \dot{a} durch Ha .

(3): Substitution von a durch $\frac{1}{1+z}$ und damit folgend $da = -(1+z)^{-2}dz$.

Die Winkeldurchmesserentfernung (angular diameter distance) d_A wird definiert als:

$$d_A := \frac{d_c}{1+z} = \frac{c}{1+z} \int_0^z \frac{dz}{H(\tilde{z})}$$

und die Leuchtkraftentfernung (luminosity distance) d_L wird definiert als:

$$d_L := (1+z)^2 d_A = (1+z) d_c = c(1+z) \int_0^z \frac{dz}{H(\tilde{z})}$$

Die Leuchtkraftentfernung (auch Leuchtkraftdistanz) erweist sich im weiteren Verlauf als nützliches Werkzeug zur Bestimmung der Parameter.

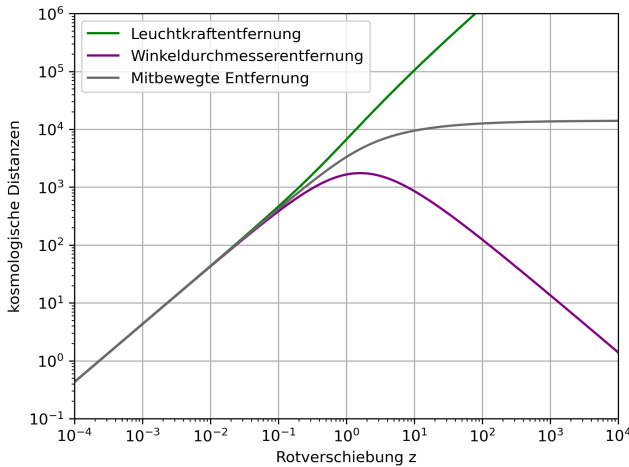


Abbildung 2.5: Plot der verschiedenen EntfernungsmäÙe für das Λ CDM-Modell mit den Parametern $H = 70 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ und $\Omega_{m,0} = 0.3$.

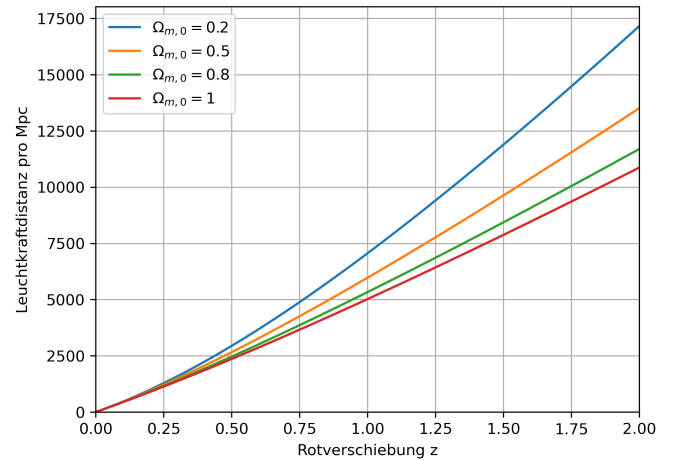


Abbildung 2.6: Plot der Leuchtkraftdistanz für verschiedene Werte von $\Omega_{m,0}$.

In Abbildung 2.5 erkennt man den linearen Anstieg bei kleinen Rotverschiebungen. Dieser lineare Anstieg wurde bereits vom Hubble-Gesetz in Gleichung (1.8) vorhergesagt.

Ein weiteres Modell, das die Expansion des Universums beschreibt, wurde im Jahr 2000 durch Gia Dvali, Gregory Gabadadze und Massimo Porrati vorgeschlagen. In diesem Modell wird eine zusätzliche Raumdimension eingeführt. Das bedeutet einen Übergang von einem vierdimensionalen Minkowskiraum (drei räumliche und eine zeitliche Koordinate) zu einem fünfdimensionalen Minkowskiraum (vier räumliche und eine zeitliche Koordinate).

Die starke Kernkraft, die schwache Kernkraft und die elektromagnetische Kraft sind auf die dreidimensionalen Bran beschränkt. Die Gravitationskraft ist die einzige Kraft, die in die neue vierte räumliche Dimension hineinwirkt. Bei großen Entfernungen auf der Bran wird die Gravitationskraft durch hinausfließen in die vierte Dimension abgeschwächt. [DT03] [Wel22]

Die Wirkung in diesem Modell ist gegeben durch:

$$S = \frac{c^4}{r_c} \frac{1}{8\pi G} \int d^4x dy \sqrt{-\det(g_{AB})} \mathcal{R}^{(5)} + \int d^4x \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} \left(\frac{c^4}{8\pi G} \mathcal{R}^{(4)} + \mathcal{L}_{\text{SM}} \right) \quad (3.1)$$

Dabei ist g_{AB} ($A, B = 0, 1, 2, 3, 4$) die fünfdimensionale Minkowskimetrik mit Signatur $(-, +, +, +, +)$, $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) die vierdimensionale Minkowskimetrik mit Signatur $(-, +, +, +)$, \mathcal{R} die jeweiligen vierdimensionalen und fünfdimensionalen Ricciskalare, \mathcal{L}_{SM} die Lagrangedichte des Standardmodells der Teilchenphysik, y die zusätzliche Raumkoordinate und r_c gibt an, bei welcher Entfernung die Gravitation anfängt auf die neue Raumkoordinate auszuweichen und somit schwächer wird.

Die modifizierte Einsteingleichung lautet damit

$$\frac{1}{r_c} \mathcal{G}_{AB} + \delta(y) \delta_A^\mu \delta_B^\nu \left(G_{\mu\nu} - \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \right) = 0 \quad (3.2)$$

wobei $\mathcal{G}_{AB} = \mathcal{R}_{AB} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{AB}$ und $G_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu}$ die Einsteintensoren sind.

Mit dem Ansatz

$$ds_5^2 = f(y, H)ds_4^2 - dy^2$$

erhält man die modifizierte Friedmann-Gleichung:

$$H^2 \pm \frac{c}{r_c} H = \frac{8\pi G}{3} \rho_m \quad (3.3)$$

Dabei ist ds_4^2 die maximal symmetrische Robertson-Walker-Metrik in vier Dimensionen, H den vierdimensionalen Hubble-Parameter und $f(y, H)$ der Warp-Faktor.

Im weiteren Verlauf wird die Gleichung (3.3) mit dem negativen Vorzeichen betrachtet, da dieses Vorzeichen zur beschleunigten Expansion des Universums führt.

Die Gleichung (3.3) wird durch die Einführung eines neuen Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ umgeschrieben zu:

$$H^2 - \left(\frac{c}{r_c}\right)^{2-\alpha} H^\alpha = \frac{8\pi G}{3} \rho_m \quad (3.4)$$

Für $\alpha = 0$ erhält man das Standardmodell der Kosmologie und für $\alpha = 1$ das DGP-Modell.

Durch die drei Zusammenhänge

$$(1) \rho_m(t) = \frac{\rho_{m,0}}{a(t)} \quad (2) a(t) = \frac{1}{1+z} \quad (3) \rho_{m,0} = \Omega_{m,0} \cdot \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

kann die Gleichung (3.4) geschrieben werden als:

$$H^2 - \left(\frac{c}{r_c}\right)^{2-\alpha} H^\alpha = H_0^2 \Omega_{m,0} (1+z)^3 \quad (3.5)$$

Setzt man die Rotverschiebung zu $z = 0$ und löst nach r_c auf, erhält man eine Gleichung für r_c in welcher r_c durch H_0 , $\Omega_{m,0}$ und α beschrieben wird [DT03, Seite 3]:

$$r_c = \frac{c}{H_0} (1 - \Omega_{m,0})^{\frac{1}{\alpha-2}}$$

Setzt man das gefundene r_c in Gleichung (3.5) ein, erhält man:

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 - \left(\frac{H}{H_0}\right)^\alpha (1 - \Omega_{m,0}) - \Omega_{m,0}(1+z)^3 = 0 \quad (3.6)$$

und mit der Substitution aus Gleichung (2.11) kommt man auf die finale Form

$$\boxed{E^2(z) - E^\alpha(z)(1 - \Omega_{m,0}) - \Omega_{m,0}(1+z)^3 = 0} \quad (3.7)$$

Das DGP-Modell verzichtet somit auf die Einführung der kosmologischen Konstante Λ und wird nur durch die Parameter $\Omega_{m,0}$ und α beschrieben. Wie auch im Standardmodell der Kosmologie wird im weiteren Verlauf ein flaches Universum betrachtet, dadurch ändert sich im DGP-Modell die Form der Gleichung für die Leuchtkraftdistanz d_L nicht.

Das Ziel ist es die Parameter $\theta = (\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$ des Standardmodells der Kosmologie und $\theta = (\Omega_{m,0}, \alpha)$ des DGP-Modells zu bestimmen. Dazu wird das Datenset des **Supernova Cosmology Project** verwendet. Nach der Einführung der χ^2 -Verteilung wird diese minimiert um die bestmöglichen Werte für die zwei Parametervektoren zu finden.

4.1 Das Supernova Cosmology Project Datenset Union2.1

Das Union2.1 Datenset des Supernova Cosmology Project beinhaltet die Namen, Entfernungsmodule m_{rel} , Rotverschiebungen z und die Fehler σ der Entfernungsmodule von 580 Supernovae, die durch das Hubble-Weltraumteleskop bestimmt wurden.

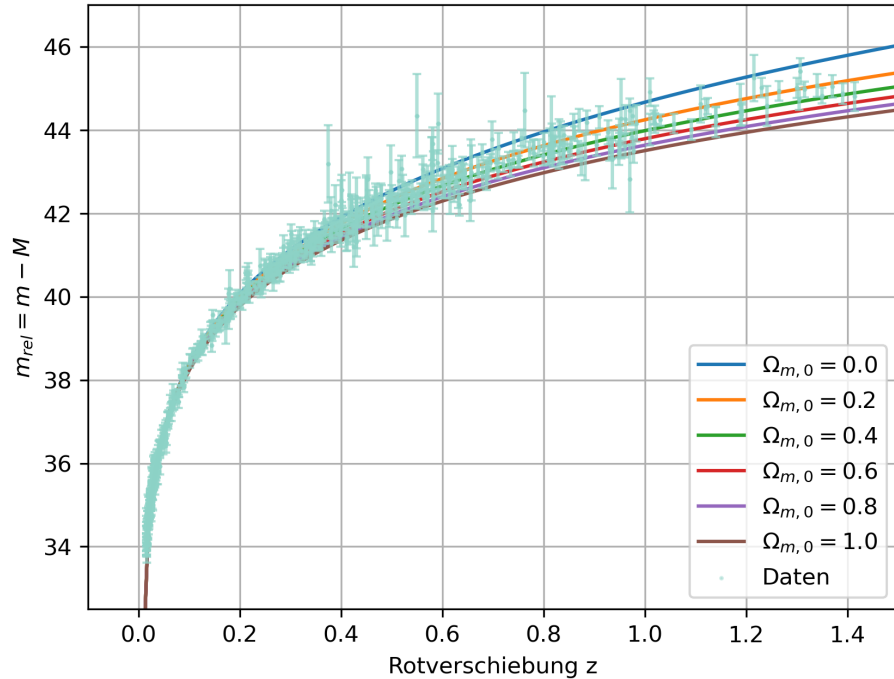


Abbildung 4.1: Plot der relativen Magnituden / Entfernungsmodule für verschiedene Werte von $\Omega_{m,0}$ aufgetragen gegen Rotverschiebungen z , wobei $H_0 = 70 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ benutzt wurde.

Vergleicht man die theoretischen Entfernungsmodule mit den Daten, kann man bereits sehen, dass $\Omega_{m,0} \in [0.2, 0.4]$ betragen muss.

Die theoretischen Entfernungsmodule (im Weiteren einfach m_{rel}^{th}) wurden mit Hilfe von Gleichung (1.5) berechnet:

$$m_{rel}^{th} = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z, \boldsymbol{\theta}, H_0)}{10 \text{pc}} \right) = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L(z, \boldsymbol{\theta}, H_0)}{\text{Mpc}} \right) + 25 \quad (4.1)$$

Die Gleichung (4.1) kann noch umgeschrieben werden zu [Wel06, Seite 17]:

$$m = M + 25 + 5 \log_{10} \left(\frac{H_0}{H_0} \frac{d_L(z, \boldsymbol{\theta}, H_0)}{\text{Mpc}} \right) = \underbrace{M + 25 - 5 \log_{10}(H_0)}_{=: \mathcal{M}(H_0)} + 5 \log_{10} \left(\overbrace{H_0 d_L(z, \boldsymbol{\theta}, H_0)}^{=: \mathcal{D}_L(z, \boldsymbol{\theta})} \text{Mpc}^{-1} \right)$$

$$m = \mathcal{M}(H_0) + 5 \log_{10} \left(\frac{\mathcal{D}_L(z, \boldsymbol{\theta})}{\text{Mpc}} \right) \quad (4.2)$$

Unter der Annahme, dass die einzelnen Datenpunkte normalverteilt sind und unabhängig voneinander, definiert man die χ^2 -Verteilung:

$$\chi^2(\boldsymbol{\theta}, H_0 | \{D_i\}) := \sum_{i=1}^{N_{\text{Daten}}} \left[\frac{m_i - m_{rel}^{th}(z_i, \boldsymbol{\theta}, H_0)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (4.3)$$

und damit auch die Likelihood:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, H_0 | \{D_i\}) \propto e^{-\frac{1}{2} \chi^2(\boldsymbol{\theta}, H_0 | \{D_i\})} \quad (4.4)$$

Durch Einführung einer Proportionalitätskonstanten wird (4.4) zu:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, H_0 | \{D_i\}) = \mathcal{L}_0 e^{-\frac{1}{2} \chi^2(\boldsymbol{\theta}, H_0 | \{D_i\})} \quad (4.5)$$

Die besten Werte für die Parameter $\boldsymbol{\theta}$ (ohne Berücksichtigung von H_0) befinden sich am Maximum der Likelihood-Funktion, an diesem gilt:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}_{\text{best}}} = 0$$

Eine äquivalente Bedingung lautet:

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{best}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta})$$

4.2 Parameterbestimmung im Λ CDM-Modell

4.2.1 Gleichzeitige Bestimmung von H_0 und θ_{best} durch χ^2 -Minimierung

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import quad
4 from scipy.optimize import fsolve
5 from scipy.optimize import minimize
6 from numba import njit
7 from tqdm import tqdm

```

Listing 4.1: Alle zur Bestimmung der Parameter benötigten Imports.

```

1 # Hubble-Parameter Funktion
2 @njit
3 def hubble_parameter(rotverschiebung, omega_m0, h_0):
4     #H_0 Einheiten: km/(s*Mpc)
5     return h_0 * np.sqrt(omega_m0 * np.power((1 + rotverschiebung), 3) + 1 - omega_m0)
6
7 # Funktionen zur Berechnung der Leuchtkraftdistanz
8 @njit
9 def integrand(rotverschiebung, omega_m0, h_0):
10     return 1/hubble_parameter(rotverschiebung, omega_m0, h_0)
11
12 def leuchtkraftdistanz(rotverschiebung, omega_m0, h_0):
13     c = 3e5 #Lichtgeschwindigkeit in km/s
14     return c * (1 + rotverschiebung) * quad(integrand, 0, rotverschiebung, args = (omega_m0, h_0))
15     [0]
16
17 # Funktion zur Berechnung der relativen Magnituden
18 @njit
19 def m_rel_theoretisch(leuchtkraftdistanz):
20     return 5 * np.log10(leuchtkraftdistanz) + 25
21
22 # Definition der chi^2-Verteilung
23 def chi2(omega_m0, h_0):
24     chi = 0 #Wahl eines Startwertes
25     d_L = np.array([leuchtkraftdistanz(rotverschiebung, omega_m0, h_0) for rotverschiebung in
26                     rotverschiebungen_data])
27     for i in range(d_L.size):
28         chi += ((m_rel_theoretisch(d_L[i]) - magnituden_data[i]) / fehler_data[i])**2
29     return chi

```

Listing 4.2: Definitionen der Funktionen, die im weiteren Verlauf zur Bestimmung der Parameter verwendet werden. **njit** stammt aus den **numba** Softwarepaket ab und beschleunigt die Ausführung vom Code und **quad** wird aus **scipy.integrate** importiert und sorgt für die Berechnung von Integralen.

```

1 # Minimum der chi^2-Verteilung finden
2
3 # Startwerte
4 chi2_min = 1e30
5 omega_m0_min = 0
6 h_0_min = 0
7
8 for omega_m0 in np.linspace(0.2, 0.4, 300):
9     for h_0 in np.linspace(65, 75, 300):
10         chi2_wert = chi2(omega_m0, h_0)
11         if chi2_wert < chi2_min:
12             chi2_min = chi2_wert
13             omega_m0_min = omega_m0
14             h_0_min = h_0

```

Listing 4.3: Kleines Programm um das Minimum der χ^2 -Verteilung und damit die Werte der gesuchten Parameter zu finden.

Die damit berechneten Parameter lauten: $\theta_{\text{best}} = (\Omega_{m,0,\text{best}}, \Omega_{\Lambda,0,\text{best}}) = (0.277, 0.723)$ und die Hubblekonstante: $H_{0,\text{best}} = 70.06 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$.

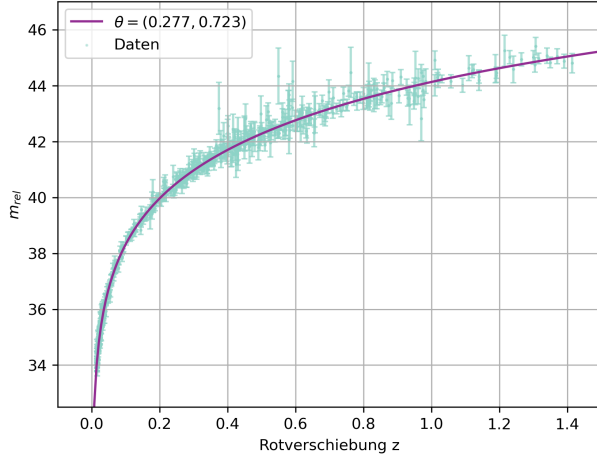


Abbildung 4.2: Vergleich zwischen den Union2.1 Daten für die relativen Magnituden mit der Funktion für die relativen Magnituden mit den gefundenen Parameterwerten $\theta_{\text{best}} = (0.277, 0.723)$ und $H_{0,\text{best}} = 70.06$.

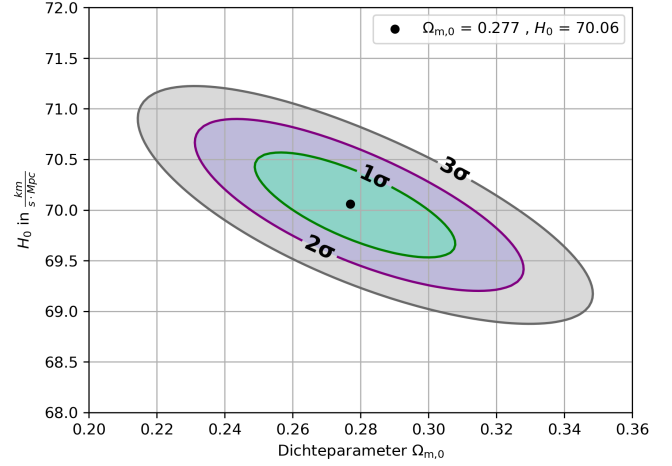


Abbildung 4.3: Plot der ersten drei Konfidenzbereiche σ durch Berechnung von $\chi^2(\theta, H_0 | \{D_i\})$.

4.2.2 Bestimmung von θ_{best} ohne Berücksichtigung von H_0 durch χ^2 -Minimierung

Ziel dieses Kapitels ist es $\Omega_{m,0}$ und $\Omega_{\Lambda,0}$ für das Λ CDM-Modell zu bestimmen. Die Hubble-Konstante H_0 ist dabei nicht von Interesse. Das Problem ist jedoch, dass die Hubble-Konstante in den Gleichungen für die Likelihood $\mathcal{L}(\theta, H_0 | \{D_i\})$ sowie in der χ^2 -Verteilung auftritt.

Eine Möglichkeit um die Hubble-Konstante zu eliminieren, besteht darin, die Likelihood $\mathcal{L}(\theta, H_0 | \{D_i\})$ über H_0 zu marginalisieren. Dadurch ergibt sich eine neue Likelihood $\mathcal{L}_{H_0}(\theta | \{D_i\})$, in der die Hubble-Konstante nicht mehr auftaucht.

Die Marginalisierung von $\mathcal{L}(\theta, H_0 | \{D_i\})$ über H_0 entspricht einer Integration über H_0 :

$$\mathcal{L}_{H_0}(\theta | \{D_i\}) = \int_0^\infty \mathcal{L}(\theta, H_0 | \{D_i\}) dH_0 \quad (4.6)$$

Da die Hubble-Konstante H_0 nur als ein linear addierter Term auftritt, kann man den ganzen Prozess auch analytisch lösen. Dazu werden die folgenden drei Größen definiert:

$$c_1(\{\sigma_i\} | \{D_i\}) := \sum_{i=1}^{N_{\text{Daten}}} \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (4.7)$$

$$f_0(\theta | \{D_i\}) := \sum_{i=1}^{N_{\text{Daten}}} \frac{5 \log_{10}(\mathcal{D}_L(z_i, \theta)) - m_i}{\sigma_i^2} \quad (4.8)$$

$$f_1(\boldsymbol{\theta}|\{D_i\}) := \sum_{i=1}^{N_{\text{Daten}}} \frac{(5 \log_{10}(\mathcal{D}_L(z_i, \boldsymbol{\theta})) - m_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (4.9)$$

Damit erhält man die zu minimierende Verteilung als:

$$\chi_A^2(\boldsymbol{\theta}|\{D_i\}) = f_1(\boldsymbol{\theta}|\{D_i\}) - \frac{f_0^2(\boldsymbol{\theta}|\{D_i\})}{c_1^2(\{\sigma_i\}|\{D_i\})} \quad (4.10)$$

Durch Minimierung der χ_A^2 -Verteilung erhält man wieder die Parameter $\boldsymbol{\theta}_{\text{best}} = (0.277, 0.723)$. Vergleicht man den Plot der marginalisierten Likelihood $\mathcal{L}_{H_0}(\Omega_{m,0}|\{D_i\})$ mit der analytischen Likelihood $\mathcal{L}_A(\Omega_{m,0}|\{D_i\})$ erkennt man, dass beide Plots gleich aussehen und die gleichen Werte für $(\Omega_{m,0,\text{best}}, \Omega_{\Lambda,0,\text{best}})$ liefern.

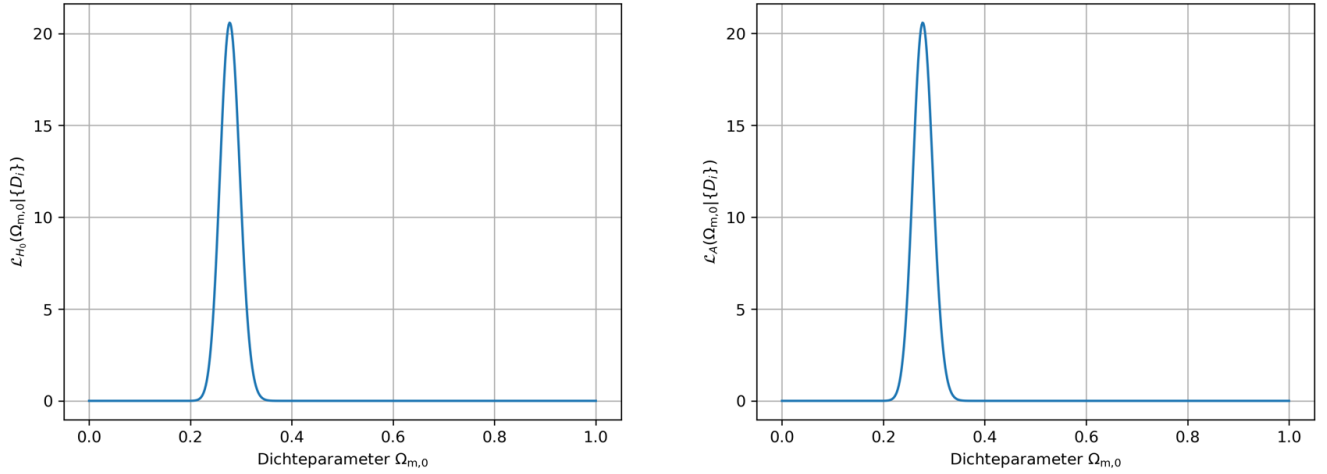


Abbildung 4.4: Vergleich der Plots für die marginalisierte Likelihood (links) und analytische Likelihood (rechts).

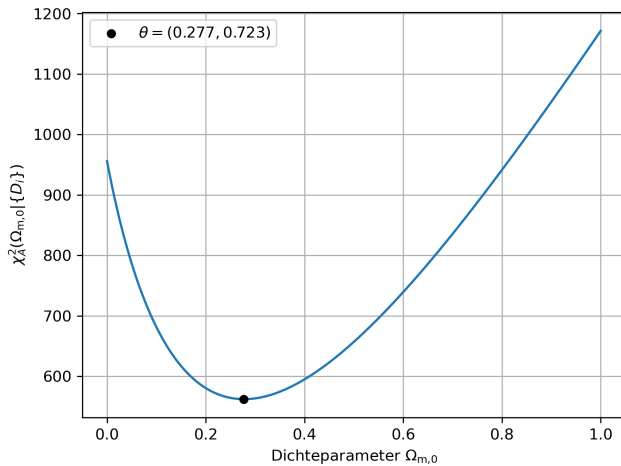


Abbildung 4.5: Plot der $\chi_A^2(\Omega_{m,0}|\{D_i\})$ -Verteilung aufgetragen gegen Dichteparameter $\Omega_{m,0}$.

Um den 1σ -Fehler von $(\Omega_{m,0,\text{best}}, \Omega_{\Lambda,0,\text{best}})$ zu bestimmen, müssen die Schnittpunkte $\Omega_{m,0}^{\min}$ und $\Omega_{m,0}^{\max}$ der $\chi_A^2(\Omega_{m,0}|\{D_i\})$ -Verteilung mit der Geraden $\chi_{\text{lin}}^2 = \chi_{\min}^2 + 1$ gefunden werden, wobei χ_{\min}^2 der kleinste Wert der $\chi_A^2(\Omega_{m,0}|\{D_i\})$ -Verteilung ist. [Pre+92]

Den oberen Fehler erhält man durch die Berechnung von $\Omega_{m,0}^{\max} - \Omega_{m,0,\text{best}}$ und den unteren Fehler durch die Berechnung von $\Omega_{m,0,\text{best}} - \Omega_{m,0}^{\min}$.

Als Ergebnis für die Dichteparameter erhält man:

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{best}} = (0.277^{+0.018}_{-0.021}, 0.723^{+0.018}_{-0.021})$$

4.3 Parameterbestimmung im DGP-Modell

Um den Hubble-Parameter zu finden, muss die Gleichung (3.7) gelöst werden. Dazu werden die folgenden zwei Funktionen implementiert:

```

1 # Funktion aus Gleichung (3.7)
2 @njit
3 def hilfsfunktion(E, rotverschiebung, omega_m0, alpha):
4     return E**2 - E**alpha * (1 - omega_m0) - omega_m0 * (1 + rotverschiebung)**3
5
6 # Ableitung der Funktion aus Gleichung (3.7)
7 @njit
8 def hilfsfunktion_ableitung(E, rotverschiebung, omega_m0, alpha):
9     return 2 * E - alpha * E**(alpha - 1) * (1 - omega_m0)

```

Listing 4.4: Funktionen zur Bestimmung des Hubble-Parameters im DGP-Modell.

In Gleichung (3.7) wurde die Substitution $\frac{H}{H_0} = E(z)$ verwendet. Mit Hilfe der oben definierten Funktionen kann man $E(z)$ bestimmen und daraus den Hubble-Parameter $H(z) = H_0 E(z)$ erhalten.

```

1 # Berechnung des Hubble-Parameters
2 def hubble_parameter_dgp(rotverschiebung, omega_m0, h_0, alpha):
3     # h_0 in Einheiten: km/(s*Mpc)
4     # Nullstellenberechnung von Gleichung (3.7)
5     E_lsg = fsolve(hilfsfunktion, np.sqrt(omega_m0 * (1 + rotverschiebung)**3 + 1 - omega_m0),
6     args = (rotverschiebung, omega_m0, alpha),
7     fprime = hilfsfunktion_ableitung)
8     return h_0 * E_lsg
9
10 # Funktionen zur Berechnung der Leuchtkraftdistanz
11 def integrand_dgp(rotverschiebung, omega_m0, h_0, alpha):
12     return 1/hubble_parameter_dgp(rotverschiebung, omega_m0, h_0, alpha)
13
14 def leuchtkraftdistanz_dgp(rotverschiebung, omega_m0, h_0, alpha):
15     c = 3e5 #Lichtgeschwindigkeit in km/s
16     return c * (1 + rotverschiebung) * quad(integrand_dgp, 0, rotverschiebung, args = (omega_m0,
17     h_0, alpha))[0]
18
19 # Funktion zur Berechnung der relativen Magnituden
20 @njit
21 def m_rel_theoretisch_dgp(leuchtkraftdistanz_dgp):
22     return 5 * np.log10(leuchtkraftdistanz_dgp) + 25

```

Listing 4.5: Code für die Berechnung des Hubble-Parameters im DGP-Modell, sowie weitere Definitionen von Funktionen die zur Parameterbestimmung wichtig sind.

Die Bestimmung der Parameter funktioniert wie im Λ CDM-Modell durch Minimierung der analytischen $\chi^2_A(\Omega_{m,0}|\{D_{ij}\})$ -Verteilung, wobei diese im DGP-Modell die gleiche Definition hat, wie im Kapitel über die Bestimmung der Parameter im Λ CDM-Modell, jedoch dieses Mal von den Parametern $\Omega_{m,0}$ und α abhängt.

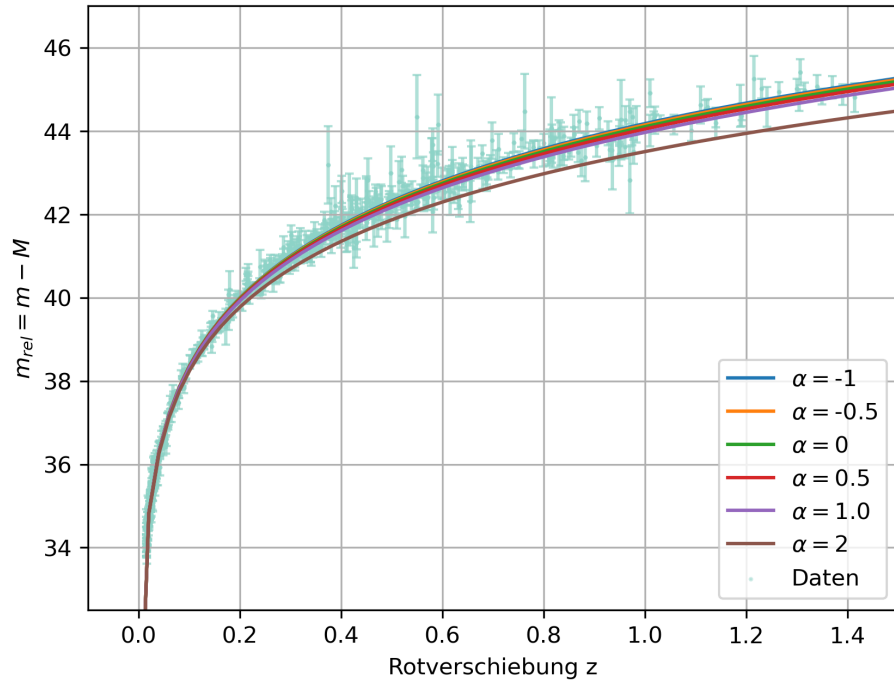


Abbildung 4.6: Plot der relativen Magnituden / Entfernungsmodule für verschiedene Werte von α aufgetragen gegen Rotverschiebungen z , wobei $H_0 = 70 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$ benutzt wurde.

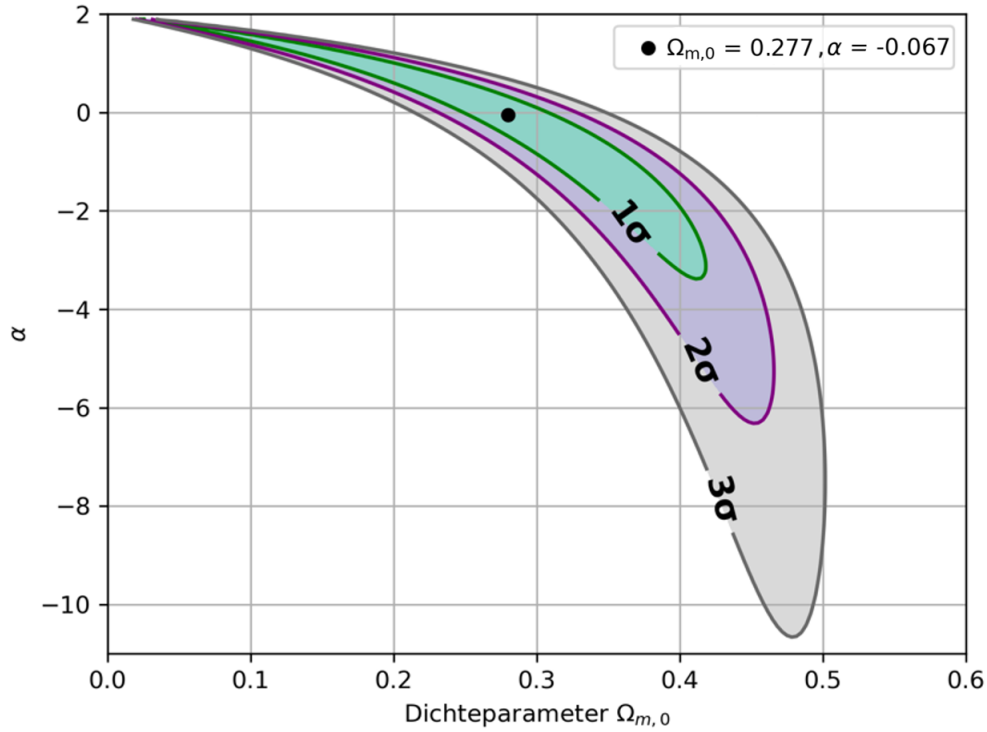


Abbildung 4.7: Plot des Dichteparameters $\Omega_{m,0}$ gegen Interpolationsparameter α mit eingezeichneten Konfidenzbereichen σ .

Die Minimierung der analytischen χ^2_A -Verteilung liefert die folgenden besten Parameter:

$$\theta_{\text{best}} = (\Omega_{m,0,\text{best}}, \alpha_{\text{best}}) = (0.277, -0.067)$$

Die in dieser Bachelorarbeit bestimmten Parameter für die beiden Modelle lauten:

$$\theta_{\text{best}}^{\Lambda\text{CDM}} = (\Omega_{\text{m},0,\text{best}}, \Omega_{\Lambda,0,\text{best}}) = (0.277^{+0.018}_{-0.021}, 0.723^{+0.018}_{-0.021})$$

$$\theta_{\text{best}}^{\text{DGP}} = (\Omega_{\text{m},0,\text{best}}, \alpha_{\text{best}}) = (0.277, -0.067)$$

Zum Vergleich der gefundenen Werte für $\Omega_{\text{m},0,\text{best}}^{\Lambda\text{CDM}}$ und $\Omega_{\text{m},0,\text{best}}^{\text{DGP}}$ wird das Paper [Suz+12] verwendet. Die Autoren bestimmten ebenfalls mögliche Werte und Fehler für den Parameter $\Omega_{\text{m},0,\text{best}}$ unter Verwendung der Supernovae Beobachtungen, aber auch unter Verwendung von Daten aus der kosmischen Hintergrundstrahlung und den baryonischen akustischen Oszillationen.

Fit	Ω_{m}
BAO+CMB+ H_0	$0.267^{+0.015}_{-0.014}$
SNe	$0.277^{+0.022}_{-0.021}$
SNe+BAO+ H_0	$0.288^{+0.020}_{-0.019}$
SNe+CMB	$0.272^{+0.017}_{-0.017}$
SNe+CMB+ H_0	$0.262^{+0.015}_{-0.014}$
SNe+BAO+CMB	$0.278^{+0.014}_{-0.013}$
SNe+BAO+CMB+ H_0	$0.271^{+0.012}_{-0.012}$

Die Daten aus der linken Tabelle stammen aus [Suz+12]. Vergleicht man die erhaltenen Werte $\Omega_{\text{m},0,\text{best}}^{\Lambda\text{CDM}}$ und $\Omega_{\text{m},0,\text{best}}^{\text{DGP}}$ mit den Daten aus der Tabelle, sieht man, dass sich die Werte bei reinen Supernova-Daten überschneiden. Dies gilt auch für alle Datensätze, bei denen zusätzliche Informationen, wie beispielsweise Daten aus der kosmischen Hintergrundstrahlung und den baryonischen akustischen Oszillationen, mit einfließen. Zusammenfassend konnte der $\Omega_{\text{m},0}$ Wert aus der Tabelle reproduziert werden. Obwohl die Daten aus der Tabelle für das ΛCDM -Modell gelten, stimmt das in dieser Arbeit bestimmte $\Omega_{\text{m},0,\text{best}}^{\text{DGP}}$ auch mit diesen Daten überein.

Eine eindeutige Aussage darüber, welches Modell tatsächlich zutrifft, lässt sich nicht treffen. Bereits im Plot (Abb. 4.7) ist zu erkennen, dass in der ersten Konfidenz-Umgebung um die gefundenen Werte der Interpolationsparameter α sowohl den Wert $\alpha = 1$ annimmt, was für das DGP-Modell spricht, als auch der Wert $\alpha = 0$ innerhalb dieser Konfidenz-Umgebung liegt, was für das ΛCDM -Modell spricht. Somit reichen die reinen Supernova-Daten nicht aus, um eindeutig auf ein Modell zu schließen, was auch in der nächsten Abbildung deutlich wird:

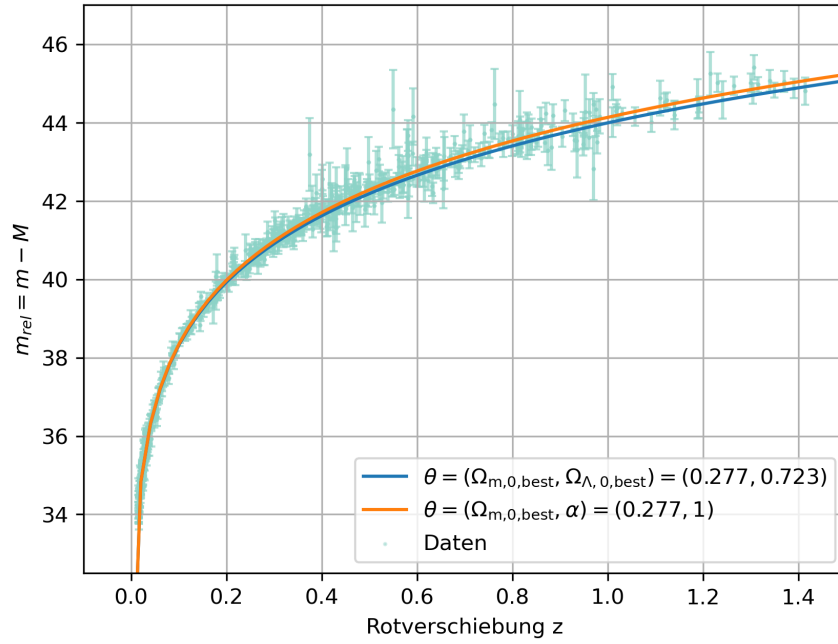


Abbildung 5.1: Plot der relativen Magnituden für beide Modelle mit gefundenem Dichteparameter $\Omega_{m,0,\text{best}}$ aufgetragen gegen die Rotverschiebungen z . Die blaue Linie entspricht dem Λ CDM-Modell und die orangene dem DGP-Modell.

Aus der oberen Abbildung ist erkennbar, dass selbst bei höheren Rotverschiebungen z die beiden Modelle kaum unterscheidbar sind. Um weitere Aussagen treffen zu können, müssen weitere Daten wie zum Beispiel Daten der kosmischen Hintergrundstrahlung oder Daten der baryonischen akustischen Oszillationen in Betracht gezogen werden.

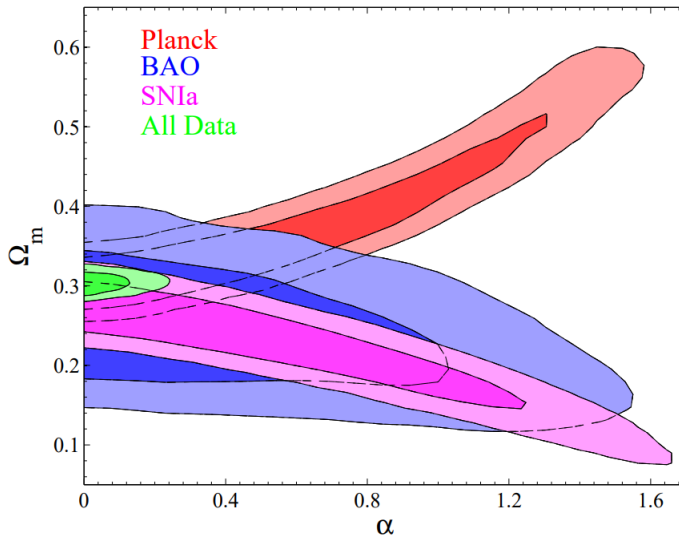


Abbildung 5.2: Konfidenzbereiche im (α, Ω_m) -Parameterraum für verschiedene Datensätze: Planck (rot), BAO (blau), Supernovae Typ Ia (magenta) und die Kombination aller Daten (grün). [LX13]

In der linken Abbildung die aus [LX13] stammt, kann man die Konfidenzbereiche der Parameter im DGP-Modell sehen. Wird nur der magentafarbene Bereich, der für die Supernova-Daten steht, betrachtet, sieht man, dass der Parameter α bereits im ersten Konfidenzbereich ein Element des Intervalls $[0, 1]$ ist. Erst durch Betrachtung weiterer Daten kann man den Bereich von α bereits auf das Intervall $[0, 0.2]$ einschränken.

Auch wenn anhand der dargestellten Konfidenzbereiche keine eindeutige Aussage darüber getroffen werden kann, welches Modell die Realität besser beschreibt, zeigt sich dennoch eine Tendenz in Richtung des Λ CDM-Modells. Durch die Einbeziehung zusätzlicher Datensätze wird der Parameter α zunehmend eingeschränkt und nähert sich immer mehr dem Wert null an, was für das Λ CDM-Modell spricht.

- [Bar19] Matthias Bartelmann. *Das kosmologische Standardmodell*. Springer, 2019. ISBN: 978-3-662-59626-5. DOI: [10.1007/978-3-662-59627-2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-59627-2).
- [Blo24] Stéphane Blondin. *Type Ia supernovae*. Encyclopedia of Astrophysics. 2024. arXiv: [2411.09740](https://arxiv.org/abs/2411.09740) [astro-ph.SR].
- [CJ13] Juan Casado und David Jou. „Steady Flow cosmological model“. In: *Springer* (2013). DOI: [10.1007/s10509-012-1349-2](https://doi.org/10.1007/s10509-012-1349-2).
- [DT03] Gia Dvali und Michael S. Turner. *Dark Energy as a Modification of the Friedmann Equation*. 2003. arXiv: [astro-ph/0301510](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0301510) [astro-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0301510>.
- [Han20] Arnold Hanslmeier. *Einführung in Astronomie und Astrophysik*. Springer, 2020. ISBN: 978-3-662-60412-0. DOI: [10.1007/978-3-662-60413-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-60413-7).
- [Hum36] Milton Lasell Humason. „The Apparent Radial Velocities of 100 Extra-Galactic Nebulae“. In: *Astrophysical Journal*, vol. 83, p.10 (1936). DOI: [10.1086/143696](https://doi.org/10.1086/143696).
- [LP12] Henrietta S. Leavitt und Edward C. Pickering. „Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud“. In: *Harvard College Observatory Circular* (1912). URL: <https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1912HarCi.173....1L>.
- [LX13] Hong Li und Jun-Qing Xia. „Testing Dvali-Gabadadze-Porrati Gravity with Planck“. In: *Elsevier BV* (2013). DOI: [10.1016/j.physletb.2013.09.005](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2013.09.005).
- [MK19] Florian Modler und Martik Kreh. *Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2*. Springer, 2019. ISBN: 978-3-662-59225-0. DOI: [10.1007/978-3-662-59226-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-59226-7).
- [Pre+92] William H. Press u. a. *Numerical Recipes in FORTRAN 77*. Cambridge University Press, 1992. ISBN: 9780521430647. URL: <https://www.cambridge.org/us/universitypress/subjects/mathematics/numerical-recipes/numerical-recipes-fortran-77-art-scientific-computing-volume-1-2nd-edition>.
- [Row21] David Rowland. „Cosmic Microwave Background is Electromagnetic Fog“. In: *OSP J Phy Astronomy 2* (2021). URL: https://www.ospublishers.com/Cosmic-Microwave-Background-is-Electromagnetic-Fog.html#Article_Info.
- [Ryd16] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2016. ISBN: 9781107154834. DOI: [10.1017/9781316651087](https://doi.org/10.1017/9781316651087).
- [Sch25] Joel L. Schiff. *Basic Mathematical Insights into Astrophysics*. Springer, 2025. ISBN: 978-3-031-79099-7. DOI: [10.1007/978-3-031-79100-0](https://doi.org/10.1007/978-3-031-79100-0).
- [Suz+12] N. Suzuki u. a. „The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey: V. Improving the Dark Energy Constraints Above $z > 1$ and Building an Early-Type-Hosted Supernova Sample“. In: *The Astrophysical Journal* (2012). DOI: [10.1088/0004-637x/746/1/85](https://doi.org/10.1088/0004-637x/746/1/85).
- [WWW09] Alfred Weigert, Heinrich J. Wendker und Lutz Wisotzki. *Astronomie und Astrophysik*. Wiley-VCH, 2009. ISBN: 978-3-527-40793-4. URL: <https://www.wiley-vch.de/de/fachgebiete/naturwissenschaften/astronomie-und-astrophysik-978-3-527-40793-4>.

- [Wel06] Jochen Weller. *Dark Energy - Observational Evidence and Theoretical Modeling Lectures I+II*. 2006. URL: <https://cms-cdn.lmu.de/media/17-physik/17-physicsos/pdf/lecture11.pdf>.
- [Wel22] Jochen Weller. *Jochen Weller: Die Dunkle Energie und die beschleunigte Ausdehnung des Universums*. YouTube-Video. 2022. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=DRCgmDMxzLw> (besucht am 14. 05. 2025).

SELBSTÄNDIGKEITSERKLÄRUNG

Ich versichere hiermit, die vorliegende Arbeit mit dem Titel

**Einschränkung kosmologischer Modelle mit zusätzlichen Raumdimensionen mit Hilfe
von Supernovae Beobachtungen**

selbständig verfasst zu haben und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Damian Cytacki
München, den xx.xx.xxxx