

## Zginanie czyste

Wymiary stanowiska pomiarowego

$l[mm]$	$a[mm]$	$E[MPa]$	$b[mm]$	$h[mm]$	$A[mm^2]$	$I_y[mm^4]$	$W_Y[mm^3]$
1000	296	$2.1 * 10^5$	30	20	600	$2 * 10^4$	$2 * 10^3$

Wyniki pomiarów

$lp.$	$P[N]$	$c_i[mm]$	$f_c = c_i - c_0[mm]$	$\epsilon_i[tens8]$	$\epsilon_i[tens9]$	$\epsilon_i[tens9] - \epsilon_0[tens9]$
0	0	7.5	0	0	- 0.156	0
1	49.05	7.93	0.43	0.036	-0.123	0.033
2	98.1	8.35	0.85	0.073	-0.088	0.068
3	147.15	8.79	1.29	0.112	-0.053	0.103
4	196.2	9.22	1.72	0.15	-0.017	0.139
5	215.82	9.39	1.84	0.164	-0.004	0.152

Wyznaczanie doświadczalnej wartości modułu Younga na podstawie pomiaru czujnikowego

$$\text{Strzałka ugięcia: } f_c = \frac{Pal^2}{8EJ_y}$$

Błąd względny:

$$E = \frac{Pal^2}{8J_y f_c}$$

$$\frac{|E_i - E|}{E} * 100\%$$

$$E_1 = \frac{49.05N * 0.296m * 1^2m}{8 * 2 * 10^{-8}m^4 * 0.43 * 10^{-3}m} \approx 211.029GPa \quad \frac{|211.029GPa - 210GPa|}{210GPa} * 100\% = 0.49\%$$

$$E_2 = \frac{98.1N * 0.296m * 1^2m}{8 * 2 * 10^{-8}m^4 * 0.85 * 10^{-3}m} \approx 213.512GPa \quad \frac{|213.512GPa - 210GPa|}{210GPa} * 100\% \approx 1.67\%$$

$$E_3 = \frac{147.15N * 0.296m * 1^2m}{8 * 2 * 10^{-8}m^4 * 1.29 * 10^{-3}m} \approx 211.029GPa \quad \frac{|211.029GPa - 210GPa|}{210GPa} * 100\% = 0.49\%$$

$$E_4 = \frac{196.2N * 0.296m * 1^2m}{8 * 2 * 10^{-8}m^4 * 1.72 * 10^{-3}m} \approx 211.029GPa \quad \frac{|211.029GPa - 210GPa|}{210GPa} * 100\% = 0.49\%$$

$$E_5 = \frac{215.82N * 0.296m * 1^2m}{8 * 2 * 10^{-8}m^4 * 1.84 * 10^{-3}m} \approx 216.993GPa \quad \frac{|216.993GPa - 210GPa|}{210GPa} * 100\% = 3.33\%$$

2.3.2 Wyznaczanie doświadczalnej wartości modułu Younga na podstawie pomiaru tensometrycznego

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{M_g z}{I_y \epsilon} = \frac{Pah}{2I_y \epsilon}$$

Moduł Younga	Błąd względny
$E_{18} = \frac{49.05N*0.296m*2*10^{-2}m}{2*2*10^{-8}m^4*0.036*10^{-3}} \approx$	$\frac{ 198.888-210 }{210} * 100\% \approx 5.29\%$
$E_{28} = \frac{98.1N*0.296m*2*10^{-2}m}{2*2*10^{-8}m^4*0.036*10^{-3}} \approx 198.888MPa$	$\frac{ 198.888-210 }{210} * 100\% \approx 5.29\%$
$E_{38} = \frac{147.15N*0.296m*2*10^{-2}m}{2*2*10^{-8}m^4*0.036*10^{-3}} \approx$	$\frac{ 198.888-210 }{210} * 100\% \approx 5.29\%$
$E_{48} = \frac{196.2N*0.296m*2*10^{-2}m}{2*2*10^{-8}m^4*0.036*10^{-3}} \approx$	$\frac{ 198.888-210 }{210} * 100\% \approx 5.29\%$
$E_{58} = \frac{215.82N*0.296m*2*10^{-2}m}{2*2*10^{-8}m^4*0.036*10^{-3}} \approx 194.764 MPa$	$\frac{ 194.764-210 }{210} * 100\% \approx 7.26\%$

2.3.3 Wyznaczyć wartość doświadczalną krzywizny osi belki na podstawie pomiaru:

**a) czujnikowego:**

Korzystając z:  $f_c = \frac{Pal^2}{8EJ_y}$

$$f_{c1} = \frac{215.82*0.296*1}{8*210*10^6*2*10^{-8}m^4} = 0.0036m = 3.6mm$$

$$f_{c2} = \frac{98.1*0.296*1}{8*210*10^6*2*10^{-8}m^4} = 0.00864m = 0.8646mm$$

$$f_{c3} = \frac{215.82*0.296*1}{8*210*10^6*2*10^{-8}m^4} = 0.0036m = 3.6mm$$

$$f_{c4} = \frac{215.82*0.296*1}{8*210*10^6*2*10^{-8}m^4} = 0.0036m = 3.6mm$$

$$f_{c5} = \frac{215.82*0.296*1}{8*210*10^6*2*10^{-8}m^4} = 0.0036m = 3.6mm$$

**b) tensometrycznego** dla wskazanego obciążenia wraz z porównaniem z wielkością teoretyczną(wraz z błędem względnym):

### Zginanie poprzeczne

$P[N]$	$c_{1i}$	$c_{2i}$	$\epsilon_i(13)$	$\epsilon_i(14)$	$\epsilon_i(15)$	$\epsilon_i(16)$
$P_0 = 0$	0.25	7.1	0	-0.72	-0.139	-0.118
$P_1 = 20$	3.4	5.65	0.023	-0.687	-0.129	-0.086
$P_2 = 50$	5.13	3	0.075	-0.621	-0.106	-0.028
$P_1 + P_2 = 70$	8.45	1.6	0.098	-0.588	-0.095	0.003

$P[N]$	$c'_{1i}$	$c'_{2i}$	$\epsilon_i(13)$	$\epsilon'_i(14)$	$\epsilon'_i(15)$	$\epsilon'_i(16)$
$P_0 = 0$	0	0	0	0	0	0
$P_1 = 20$	3.15	1.45	0.023	0.033	0.01	0.032
$P_2 = 50$	4.88	4.1	0.075	0.099	0.033	0.09
$P_1 + P_2 = 70$	8.2	5.5	0.098	0.132	0.044	0.121

Zasada superpozycji - suma przemieszczeń z pierwszego i drugiego obciążenia osobno jest przemieszczeniem dla sumy obciążeń:

$$\begin{array}{lcl}
\text{dla } c'_1: & 3.15 \text{ mm} + 4.88 \text{ mm} = 8.03 \text{ mm} & \frac{|8.2\text{mm}-8.03\text{mm}|}{8.02\text{mm}} * 100\% = 2.1\% \\
\text{dla } c'_2: & 1.45 \text{ mm} + 4.1 \text{ mm} = 5.55 \text{ mm} & \frac{|5.5\text{mm}-5.55\text{mm}|}{5.5\text{mm}} * 100\% = 0.9\% \\
\text{dla } \epsilon'_{13}: & 0.023 + 0.075 = 0.98 & \frac{|0.98-0.98|}{0.98} * 100\% = 0\% \\
\text{dla } \epsilon'_{14}: & 0.033 + 0.099 = 0.132 & \frac{|0.132-0.132|}{0.132} * 100\% = 0\% \\
\text{dla } \epsilon'_{15}: & 0.01 + 0.033 = 0.043 & \frac{|0.044-0.043|}{0.044} * 100\% = 2.3\% \\
\text{dla } \epsilon'_{16}: & 0.032 + 0.09 = 0.122 & \frac{|0.121-0.122|}{0.121} * 100\% = 0.8\%
\end{array}$$

Powyższe wyniki, z powodu niskich błędów względnych (mniej niż 3%), można uznać za wiarygodne sprawdzenie zasady superpozycji na przykładzie zginanej belki.

Zasada Bettiego - praca wykonana przez pierwsze obciążenie na przemieszczeniu wywołanym drugim obciążeniem jest równa pracy drugiego obciążenia na przemieszczeniu wywołanym przez pierwsze:

$$P_1 * c_{12} = P_2 * c_{21}$$

$$20 \text{ N} * 4.88 \text{ mm} = 50 \text{ N} * 1.45 \text{ mm}$$

$$97.6 \text{ N} * \text{mm} \approx 72.5 \text{ N} * \text{mm}$$

W przypadku zasady Bettiego wyniki doświadczalne odbiegają od założeń teoretycznych. Przyczyną tego mogą być nieliniowości w badanym ustroju.

### Zginanie ukośne

	$V_i[N]$	$\epsilon_i(1)$	$\epsilon_i(2)$	$\epsilon_i(3)$	$\epsilon_i(4)$
0	0	0	-0.077	-0.299	-0.257
1	50	0.277	-0.16	-0.377	-0.16
2	70	0.39	-0.195	-0.41	-0.13
	$V_i[N]$	$\epsilon_i(1)$	$\epsilon'_i(2)$	$\epsilon'_i(3)$	$\epsilon'_i(4)$
0	0	0	0	0	0
1	50	0.277	-0.083	-0.078	0.097
2	70	0.39	-0.118	-0.111	0.127

dural -  $E = 73 \text{ GPa}$

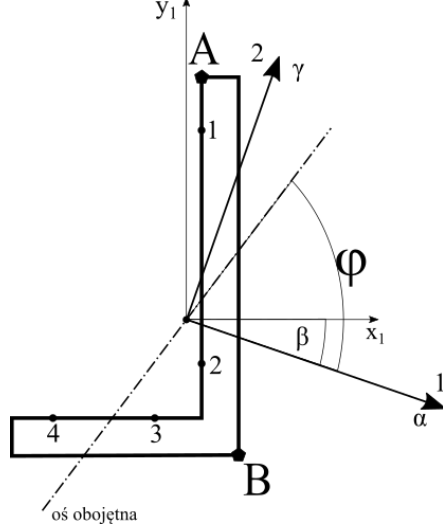
Wartości doświadczalne naprężeń ( $\sigma = |\epsilon * E|$ ):

$$\sigma_1 = 0.277\text{‰} * 73 \text{ GPa} = 20.221 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = -0.083\text{‰} * 73 \text{ GPa} = -6.059 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -0.078\text{‰} * 73 \text{ GPa} = -5.694 \text{ MPa}$$

$$\sigma_4 = 0.097\text{‰} * 73 \text{ GPa} = 7.081 \text{ MPa}$$



Współrzędne środka ciężkości:

$$x_c = \frac{30\text{mm} * 5\text{mm} * 15\text{mm} + 45\text{mm} * 5\text{mm} * 27.5\text{mm}}{30\text{mm} * 5\text{mm} + 45\text{mm} * 5\text{mm}} = 22.5\text{mm}$$

$$y_c = \frac{30\text{mm} * 5\text{mm} * 2.5\text{mm} + 45\text{mm} * 5\text{mm} * 27.5\text{mm}}{30\text{mm} * 5\text{mm} + 45\text{mm} * 5\text{mm}} = 17.5\text{mm}$$

$$S_c = [22.5\text{mm}; 17.5\text{mm}]$$

Momenty bezwładności względem osi  $x_1$  i  $y_1$ :

$$I_{x_1} = \frac{5\text{mm} * (45\text{mm})^3}{12} + 5\text{mm} * 45\text{mm} * (27.5\text{mm} - 17.5\text{mm})^2 + \frac{30\text{mm} * (5\text{mm})^3}{12} + 5\text{mm} * 30\text{mm} * (17.5\text{mm} - 2.5\text{mm})^2 = 59468.75\text{mm}^4 + 34062.5\text{mm}^4 = 93531.25\text{mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{5\text{mm} * (30\text{mm})^3}{12} + 5\text{mm} * 30\text{mm} * (22.5\text{mm} - 15\text{mm})^2 + \frac{45\text{mm} * (5\text{mm})^3}{12} + 45\text{mm} * 5\text{mm} * (27.5\text{mm} - 22.5\text{mm})^2 = 19687.5\text{mm}^4 + 6093.75\text{mm}^4 = 25781.25\text{mm}^4$$

Moment dewiacyjny względem układu  $x_1 y_1$ :

$$I_{x_1 y_1} = 0 + (22.5\text{mm} - 15\text{mm}) * (17.5\text{mm} - 2.5\text{mm}) * 30\text{mm} * 5\text{mm} + 0 + (27.5\text{mm} - 22.5\text{mm}) * (27.5\text{mm} - 17.5\text{mm}) * 45\text{mm} * 5\text{mm} = 28125\text{mm}^4$$

Momenty główne bezwładności:

$$I = \frac{I_{x_1} + I_{y_1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2}\right)^2 + I_{x_1 y_1}^2}$$

$$I_1 = \frac{93531.25\text{mm}^4 + 25781\text{mm}^4}{2} + \sqrt{\left(\frac{93531.25\text{mm}^4 - 25781\text{mm}^4}{2}\right)^2 + (28125\text{mm}^4)^2} =$$

$$107562.78mm^4$$

$$I_2 = \frac{93531.25mm^4 + 25781mm^4}{2} - \sqrt{\left(\frac{93531.25mm^4 + 25781.25mm^4}{2}\right)^2 + (28125mm^4)^2} =$$

$$11749.22mm^4$$

Kąt orientacji układu z osiami głównymi względem układu  $x_1y_1$ :

$$tg(2\beta) = \frac{-2I_{x_1y_1}}{I_{x_1} - I_{y_1}}$$

$$tg(2\beta) = \frac{-2 \cdot 28125mm^4}{93531.25mm^4 - 25781mm^4} = -0.830255$$

$$\beta = -19.9^\circ \approx -20^\circ$$

Wektor momentu gnącego rzutowany na osie nowego układu:

$$M_\alpha = M * \cos\beta = 50N * 1m * \cos 20^\circ = 47Nm$$

$$M_\gamma = M * \sin\beta = 50N * 1m * \sin 20^\circ = 17.1Nm$$

Równanie funkcji naprężeń:

$$\sigma = \frac{M_\gamma}{I_2}\alpha - \frac{M_\alpha}{I_1}\gamma$$

$$\sigma = \frac{17.1Nm}{11749.22mm^4}\alpha - \frac{47Nm}{107562.78mm^4}\gamma$$

$$\sigma = 1455443016\alpha - 436957289\gamma \left[\frac{N}{m^3}\right]$$

Szukamy osi obojętnej:

$$\sigma = 0 \Rightarrow 0 = 1455443016\alpha - 436957289\gamma$$

$\gamma = 3,330858\alpha$  - równanie osi obojętnej w układzie osi głównych

$\phi \approx 73.3^\circ$  - kąt o jaki obrócona jest oś obojętna

Transformacja współrzędnych z układu pierwotnego do układu osi głównych:

$$\alpha = x_1 \cos\beta - y_1 \sin\beta$$

$$\gamma = x_1 \sin\beta + y_1 \cos\beta$$

Punkt A( $x_1, y_1$ ) = [2.5 mm, 32.5 mm]:

$$\alpha_A = 2.5mm * \cos(20^\circ) - 32.5mm * \sin(20^\circ) \approx -8.77mm$$

$$\gamma_A = 2.5mm * \sin(20^\circ) + 32.5mm * \cos(20^\circ) \approx 31.4mm$$

Punkt B( $x_1, y_1$ ) = [7.5 mm, -17.5 mm]:

$$\alpha_B = 7.5mm * \cos(20^\circ) + 17.5mm * \sin(20^\circ) \approx 13.03mm$$

$$\gamma_B = 7.5mm * \sin(20^\circ) - 17.5mm * \cos(20^\circ) \approx -13.88mm$$

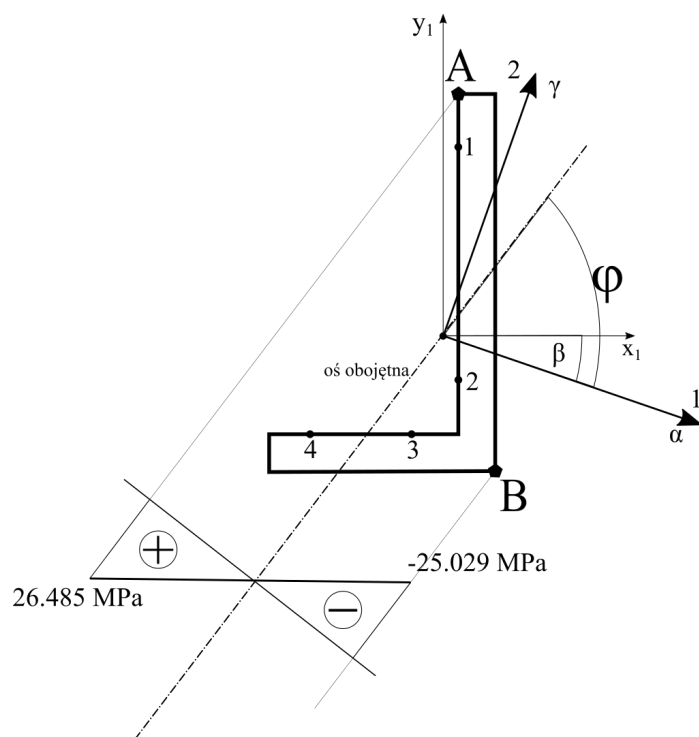
Naprężenia w A:

$$\sigma_A = 1455443016 \frac{N}{m^3} * (-8.77)mm - 436957289 \frac{N}{m^3} * 31.4mm = -26.485MPa$$

Naprężenia w B:

$$\sigma_B = 1455443016 \frac{N}{m^3} * 13.03mm - 436957289 \frac{N}{m^3} * (-13.88)mm = 25.029MPa$$

W naprężeniach należy uwzględnić, że faktyczne znaki są różne od powyższych, co zaznaczono na wykresie naprężeń.



Współrzędne tensometrów w układzie  $x_1y_1$ :

tensometr	$x_1[mm]$	$y_1[mm]$
1	2.5	25.5
2	2.5	-5.3
3	-3.7,	-12.5
4	-17.1	-12.5

Transformacja do układu osi głównych  $\alpha\gamma$ :

tensometr	$\alpha[mm]$	$\gamma[mm]$
1	-6.37	24.82
2	4.16	-4.13
3	0.8,	-13.01
4	-11.79	-17.59

tensometr	napężenie [MPa]
1	-20.116
2	7.859
3	6.849
4	-9.474

Błąd względny pomiarów tensometrycznych naprężeń:

tensometr	błąd względny
1	$\frac{  -20.116MPa - 20.221MPa  }{ -20.116MPa } * 100\% \approx 0.52\%$
2	$\frac{  7.859MPa - 6.059MPa  }{ 7.859MPa } * 100\% \approx 22.9\%$
3	$\frac{  6.849MPa - 5.694MPa  }{ 6.849MPa } * 100\% \approx 16.9\%$
4	$\frac{  -9.474MPa - 7.081MPa  }{ -9.474MPa } * 100\% \approx 25.3\%$

