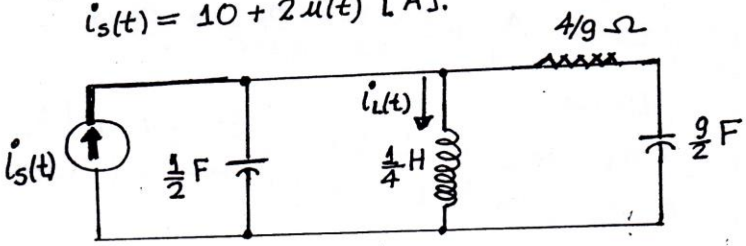
— Respuesta Completa de un Circuito Eléctrico utilizando las técnicas de la Transformada de Laplace.

Ejercicios tomados del libro "Circuitos Eléctricos
Básicos para el Estudiante — Un enfoque con la frecuencia
compleja $s=\sigma+j\omega$" Raúl Omar Vila Casado — Primera
reimpresión: Enero de 2012. Ediciones Universidad
Industrial de Santander.

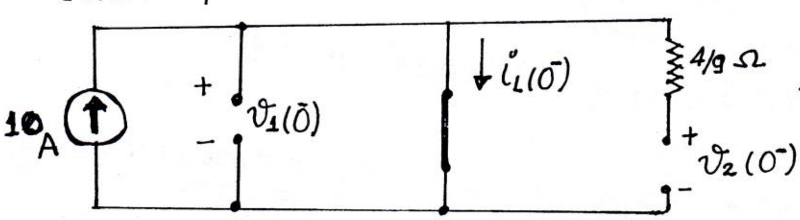
Ejemplo 4.13 (página 314)

En el circuito de la figura 4.44, halle $i_L(t)$ para $t>0$ si
$i_s(t) = 10 + 2u(t)$ [A].



Solución: A simple vista se observan tres elementos almacenadores de energía independientes de tal manera que la ecuación diferencial es de tercer orden y por ende el transitorio tiene tres frecuencias.

Circuito para $t<0$.

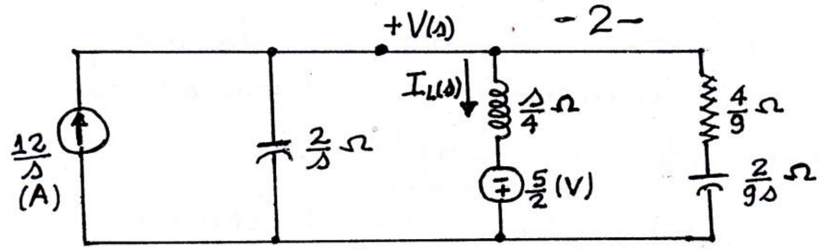


$i_L(0^-) = 10$ [A]

$v_1(0^-) = v_2(0^-) = 0$ [V]

Circuito para $t>0$ y en el dominio de la frecuencia compleja s.

$$i_s(t) = 12 \text{ [A]} \Rightarrow \mathcal{L}[i_s(t)] = \mathcal{L}[12] = \frac{12}{s} \text{ [A]}$$



Por análisis de nodos:

$$\frac{12}{s} = \frac{V(s) + 5/2}{s/4} + \frac{V(s)}{2/s} + \frac{V(s)}{\frac{4}{9} + \frac{2}{9s}}$$

$$V(s) = \frac{4s+2}{s^3+5s^2+8s+4}$$

$$I_L(s) = \frac{V(s) + 5/2}{s/4} = \frac{10s^3+50s^2+96s+48}{s(s^3+5s^2+8s+4)}$$

$$I_L(s) = \frac{10s^3+50s^2+96s+48}{s(s+1)(s+2)^2} = \left[\frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+1}\right] + \left[\frac{B_2}{(s+2)^2} + \frac{B_1}{s+2}\right]$$

y en el dominio del tiempo:

$$i_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_L(s)] = \left[A_1 + A_2 e^{-t} + (B_2 t + B_1) e^{-2t}\right] u(t) \text{ [A]}.$$

Para las constantes A_1 y A_2 se aplica la técnica del 1er caso (Factores Lineales no repetidos):

$G(s) = 10s^3+50s^2+96s+48$; $H(s) = s^4+5s^3+8s^2+4s$

$H'(s) = 4s^3+15s^2+16s+4$; $A_1 = \frac{G(0)}{H'(0)} = \frac{48}{4} = 12$

$$A_2 = \frac{G(-1)}{H'(-1)} = \frac{-8}{-1} = 8$$

Para las constantes B_2 y B_1 se aplica la técnica del 3° Caso (Factores Lineales repetidos):

$$Q(s) = (s+2)^2 I_L(s) = \frac{10s^3+50s^2+96s+48}{s^2+s}$$

$$B_2 = Q(-2) = \frac{-24}{2} = -12$$

$$Q'(s) = \frac{30s^2+100s+96}{s^2+s} - \frac{(10s^3+50s^2+96s+48)(2s+1)}{(s^2+s)^2}$$

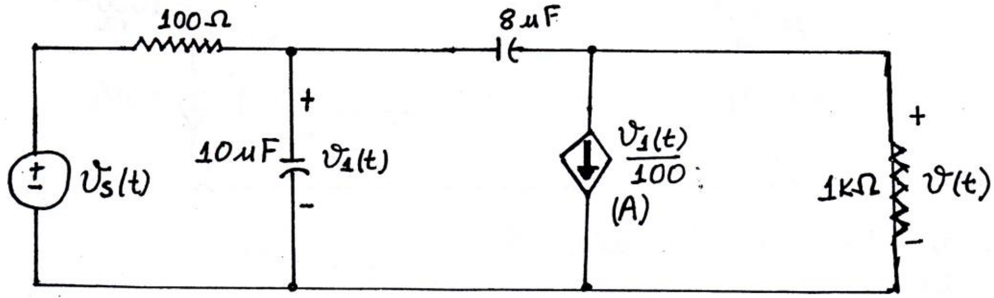
$B_1 = Q'(-2) = -10$ y por consiguiente:

$$i_L(t) = \left[12 + 8e^{-t} - (12t+10)e^{-2t}\right] u(t) \quad \text{[A]}$$

Respuesta forzada: $i_f(t) = 12$ [A]

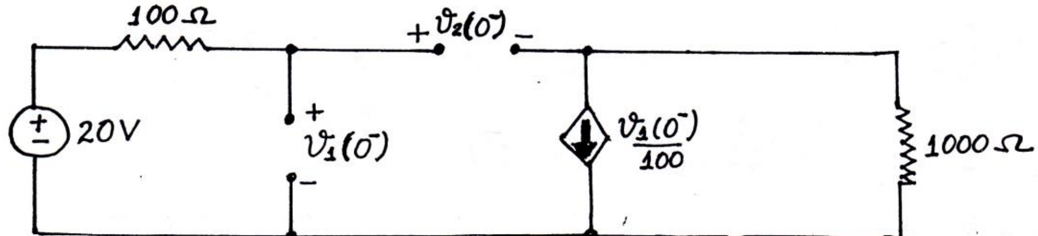
Respuesta natural o el transitorio: $i_n(t) = 8e^{-t} - (12t+10)e^{-2t}$ [A].

Ejemplo 4.12 (Página 310). Halle $v(t)$ para $t>0$, en el circuito de la figura 4.43, si $v_S(t) = 20\,u(-t)$ [V].



Solución:

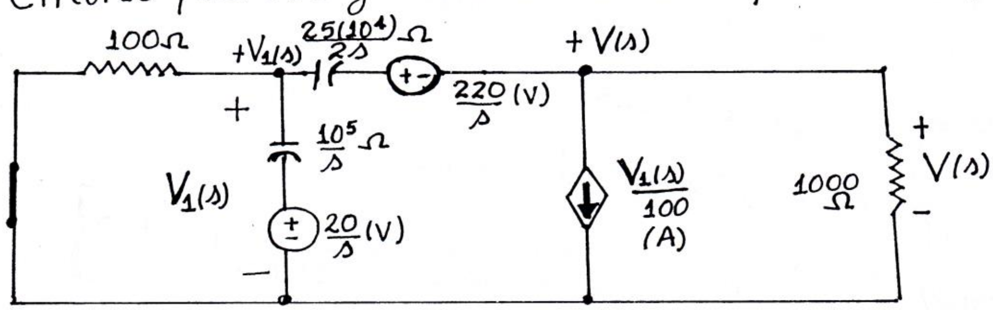
Circuito para $t<0$



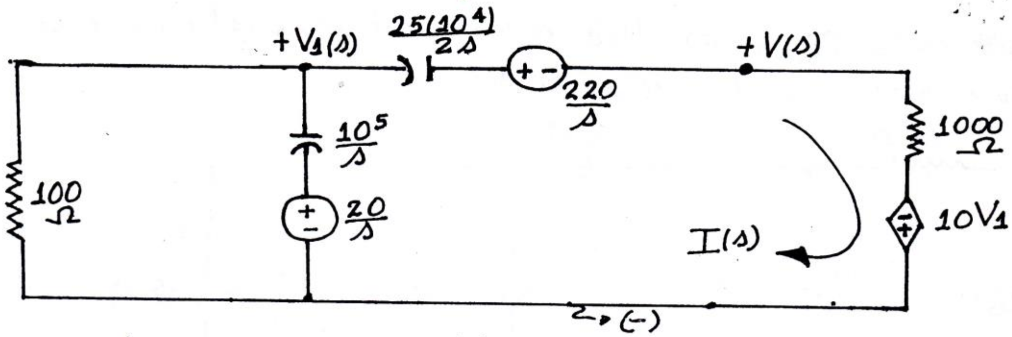
$v_1(0^-) = 20$ [V]. Por LVK: $-v_1(0^-) + v_2(0^-) - 10\,v_1(0^-) = 0$

$v_2(0^-) = 11\,v_1(0^-) = 220$ [V].

Circuito para $t>0$ y en el dominio de la frecuencia compleja s.



Haciendo la transformación de la fuente de corriente en una fuente de tensión, se tiene:



$$V(s) = 1000 I(s) - 10 V_1(s) \quad (1)$$

LIK en V_1:

$$\frac{V_1}{100} + \frac{V_1 - \frac{20}{s}}{10^5/s} + \underbrace{\frac{V_1 + 10V_1 - \frac{220}{s}}{10^3 + \frac{25(10^4)}{2s}}}_{I(s)} = 0 \quad (2)$$

$$V_1\left[\frac{1}{100} + \frac{s}{10^5} + \frac{11s}{10^3(s+125)}\right] = \frac{2}{10^4} + \frac{220}{10^3(s+125)}$$

$$V_1(s) = \frac{20(s+1225)}{s^2+2225s+125(10^3)} \quad (3)$$

En (2) se tiene que:

$$I(s) = V_1\left[-\frac{11s}{10^3(s+125)}\right] - \frac{22}{100(s+125)} \quad (4)$$

Reemplazando (4) en (1) se tiene:

$$V(s) = 10^3\left[\frac{V_1(11s)}{10^3(s+125)} - \frac{22}{10^2(s+125)}\right] - 10V_1$$

$$V(s) = \left(\frac{1}{s+125}\right)\left[V_1(s-1250) - 220\right] \quad (5)$$

Reemplazando (3) en (5) se tiene:

$$V(s) = \left(\frac{1}{s+125}\right)\left[(s-1250)\left[\frac{20(s+1225)}{s^2+2225s+125(10^3)}\right] - 220\right]$$

$$V(s) = \frac{-100(2s^2+4900s+581250)}{(s+125)(s^2+2225s+125(10^3))} \quad (6)$$

El circuito para $t>0$ es un circuito sin fuente de excitación y por consiguiente no hay respuesta forzada y sólo existe la respuesta natural.

Sin embargo, el denominador de la función respuesta es de 3er grado lo que implicaría una "supuesta" respuesta forzada dada por la ecuación de 1er grado $(s+125)$, lo cual nó es cierto y por ello debemos verificar que el numerador tiene como factor a $(s+125)$.

Utilicemos la división sintética:

$$(2s^2+4900s+581250)\div(s+125)$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 4900 & 581250 & -125 \\ & -250 & -581250 & \\ \hline 2 & 4650 & 0 & \end{array}$$

Por consiguiente:

$$2s^2+4900s+581250=(2s+4650)(s+125)$$

$$V(s)=-\frac{200\,(s+2325)}{s^2+2225s+125(10^3)} \quad (7)$$

$$s^2+2225s+125(10^3)=0 \Longrightarrow \begin{cases} s_1=-57.67 \\ s_2=-2167.32 \end{cases}$$

$$V(s)=\frac{-200\,(s+2325)}{(s+57.67)\,(s+2167.32)}=\frac{A_1}{s+57.67}+\frac{A_2}{s+2167.32}$$

y en el dominio del tiempo:

$$v(t)=\mathcal{L}^{-1}[V(s)]=\left[A_1e^{-57.67t}+A_2e^{-2167.32}\right]u(t)\ [V]$$

$$G(s)=-200(s+2325)$$

$$H(s)=s^2+2225s+125(10^3)\ ;\ H'(s)=2s+2225$$

$$A_1 = \frac{G(-57.67)}{H'(-57.67)} = -214.94$$

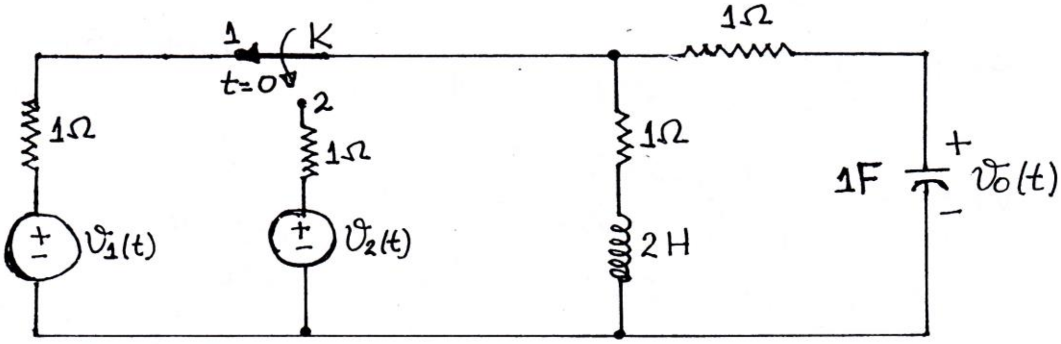
$$A_2 = \frac{G(-2167.32)}{H'(-2167.32)} = 14.94$$

$$v(t) = \left[-214.94\,e^{-57.67t} + 14.94\,e^{-2167.32t}\right]u(t)\ [V]$$

Ejemplo 4.9 (Página 299).

Considere el circuito de la figura 4.38. El interruptor se encuentra en la posición 1 hasta que el estado estacionario es alcanzado. En $t=0$ pasa a la posición 2. Halle la respuesta completa de $v_o(t)$ para $t>0$ si:

$$v_1(t) = 20e^{-3t}\ [V] \quad ; \quad v_2(t) = 20\cos t\ [V].$$



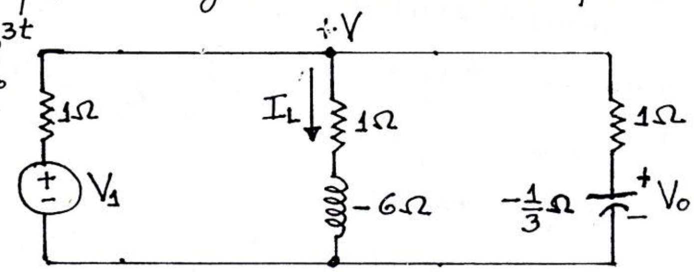
Solución:

Circuito para $t<0$ y en el dominio de la frecuencia.

$v_1(t) = 20e^{-3t}$

$V_1(s) = 20\angle 0°$

$s = -3$



Hallamos la corriente en la bobina y la tensión en el capacitor

LIK en el nodo V

$$\frac{V-V_1}{1}+\frac{V}{-5}+\frac{V}{2/3}=0 \therefore V\left[1-\frac{1}{5}+\frac{3}{2}\right]=V_1$$

$$V=\frac{10V_1}{23}=\frac{10[20\angle 0^\circ]}{23}=\boxed{\frac{200\angle 0^\circ}{23}=V}$$

$$I_L=-\frac{V}{5}=-\frac{40}{23}\angle 0^\circ \therefore i_L(t)=-\frac{40}{23}e^{-3t}\,[A]$$

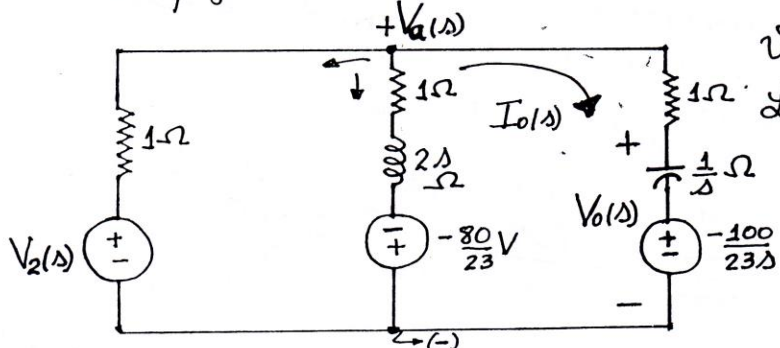
$$i_L(0)=i_L(0^-)=-\frac{40}{23}\,[A]$$

Por un divisor de tensión: $V_0=\dfrac{V[-1/3]}{2/3}=-\dfrac{V}{2}=-\dfrac{200}{2(23)}$

$$V_0=-\frac{100}{23}\angle 0^\circ \therefore v_0(t)=-\frac{100}{23}e^{-3t}\,[V]$$

$$v_0(0)=v_0(0^-)=-\frac{100}{23}\,[V]$$

Circuito para $t>0$ y en el dominio de la frecuencia compleja s.



$$v_2(t)=20\cos t\,[V]$$
$$\mathcal{L}[v_2(t)]=V_2(s)=\frac{20s}{s^2+1}$$

① $$I_0(s)\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{100}{23}=V_0(s)=V_a(s)-I_0(s)(1)$$

LIK en el nodo Va

$$\frac{V_a-V_2}{1}+\frac{V_a-\frac{80}{23}}{1+2s}+\underbrace{\frac{V_a+\frac{100}{23s}}{1+\frac{1}{s}}}_{I_0(s)}=0$$

$$V_a\left[1+\frac{1}{1+2s}+\frac{s}{1+s}\right]=V_2(s)+\frac{80/23}{1+2s}-\frac{100/23}{1+s}$$

$$V_a(s)=\frac{20}{23}\left[\frac{40s^3+68s^2+17s-1}{(s^2+1)(4s^2+5s+2)}\right] \quad ②$$

pero $I_o(s) = \frac{s}{1+s}\left[V_a(s) + \frac{100}{23s}\right]$ ③

Reemplazando ③ en ① se tiene:

$$V_o(s) = V_a(s) - I_o(s) = V_a(s) - \frac{sV_a(s)}{1+s} - \frac{100}{23(1+s)}$$

$$V_o(s) = \frac{1}{23(1+s)}\left[23V_a(s) - 100\right] \quad ④$$

Reemplazando ② en ④

$$V_o(s) = \frac{1}{23(1+s)}\left[20\left[\frac{40s^3+68s^2+17s-1}{(s^2+1)(4s^2+5s+2)}\right] - 100\right]$$

$$V_o(s) = -\left[\frac{400s^4 - 300s^3 - 760s^2 + 160s + 220}{23(s+1)(s^2+1)(4s^2+5s+2)}\right] \quad ⑤$$

En el denominador se observa un factor $(s+1)$ que está sobrando por cuanto el factor (s^2+1) corresponde a la respuesta forzada (es el denominador del Laplaciano de la función excitatriz Coseno) y la otra ecuación cuadrática $(4s^2+5s+2)$ corresponde a la respuesta natural.

Utilicemos la división sintética:

400	−300	−760	160	220	|−1
	−400	+700	+60	−220	
400	−700	−60	220	0	

Por consiguiente:

$$400s^4 - 300s^3 - 760s^2 + 160s + 220 = (s+1)(400s^3 - 700s^2 - 60s + 220)$$

$$V_o(s) = -\frac{10}{23}\left[\frac{40s^3 - 70s^2 - 6s + 22}{(s^2+1)(4s^2+5s+2)}\right]$$

$4s^2+5s+2=0 \Rightarrow s_{1,2} = -0.625 \pm j0.33$

$a_1 = -0.625 + j0.33 = \alpha_1 + j\beta_1$

$a_1^* = -0.625 - j0.33$ $\quad \alpha_1 = -0.625 \; ; \; \beta_1 = 0.33$

$$4s^2+5s+2 = 4(s-a_1)(s-a_1^*)$$

$$s^2+1=0 \Rightarrow s_{1,2} = 0 \pm j$$

$$a_2 = 0+j = \alpha_2 + j\beta_2 \quad \therefore \alpha_2 = 0;\ \beta_2 = 1$$

$$a_2^* = -j \qquad s^2+1 = (s-a_2)(s-a_2^*)$$

Se aplica la 2ª Técnica (Factores con raíces complejas).

$$v_o(t) = \left[2e^{\alpha_1 t}|Q_1(a_1)|\cos(\beta_1 t+\theta_1) + 2e^{\alpha_2 t}|Q(a_2)|\cos(\beta_2 t+\theta_2)\right]u(t)\ [V]$$

$$V_o(s) = -\frac{10}{23}\left[\frac{40s^3-70s^2-6s+22}{4(s-a_1)(s-a_1^*)(s^2+1)}\right]$$

$$V_o(s) = -\frac{5}{46}\left[\frac{40s^3-70s^2-6s+22}{(s-a_1)(s-a_1^*)(s^2+1)}\right]$$

$$Q_1(s) = (s-a_1)V_o(s) = -\frac{5}{46}\left[\frac{40s^3-70s^2-6s+22}{(s-a_1^*)(s^2+1)}\right]$$

para $s = a_1 = -0.625+j0.33$

$$Q_1(a_1) = Q_1(-0.625+j0.33) = 5.03\ \angle -168.4^\circ$$

donde: $|Q(a_1)| = 5.03$; $\theta_1 = -168.4^\circ$

$$V_o(s) = -\frac{10}{23}\left[\frac{40s^3-70s^2-6s+22}{(s-a_2)(s-a_2^*)(4s^2+5s+2)}\right]$$

$$Q_2(s) = (s-a_2)V_o(s) = -\frac{10}{23}\left[\frac{40s^3-70s^2-6s+22}{(s-a_2^*)(4s^2+5s+2)}\right]$$

para $s = a_2 = j$

$$Q_2(a_2) = Q_2(j) = 4.15\ \angle -48.37^\circ$$

$$v_o(t) = \left[2e^{-0.625t}(5.03)\cos(0.33t-168.4^\circ) + 2e^{0}(4.15)\cos(t-48.37^\circ)\right]$$

$$v_o(t) = \left[10.06\,e^{-0.625t}\cos(0.33t-168.4^\circ) + 8.3\cos(t-48.37^\circ)\right]u(t)\ [V]$$

Respuesta forzada: $v_f(t) = 8.3\cos(t-48.37^\circ)$ [V]

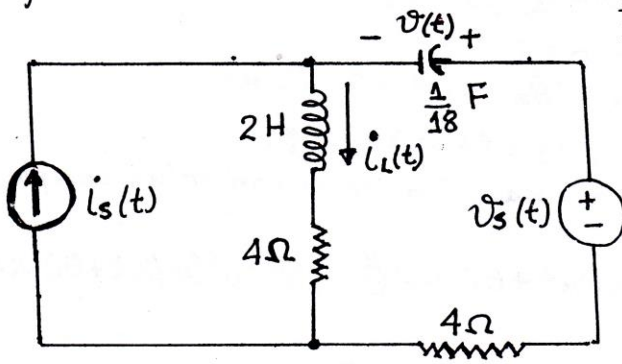
Respuesta Natural: $v_n(t) = 10.06\,e^{-0.625t}\cos(0.33t-168.4^\circ)$ [V]

Ejemplo 4.15 (Página 321).

En el circuito de la figura 4.46 halle la respuesta completa de $v(t)$ si:

$v_s(t) = 6\cos 3t\, u(t)$ [V]

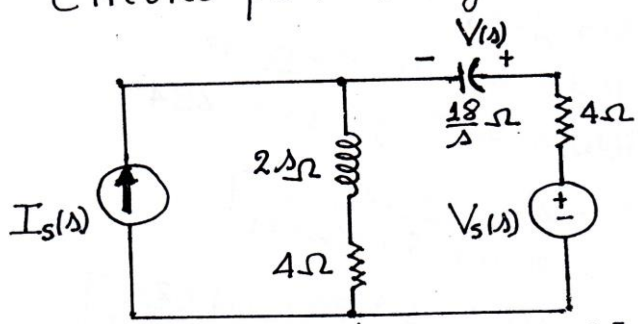
$i_s(t) = 2\cos 2t\, u(t)$ [A]



Solución: Por el interruptor matemático no se necesita el circuito para $t<0$ porque el inductor y el capacitor no han almacenado energía y por lo tanto:

$i_L(0^-) = 0 = i_L(0^+)$ $\qquad$ $v(0^-) = 0 = v(0^+)$

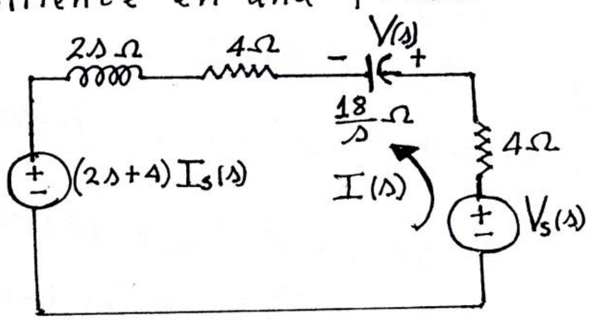
Circuito para $t>0$ y en el dominio de s.



$V_s(s) = \mathcal{L}[v_s(t)] = \dfrac{6s}{s^2+9}$

$I_s(s) = \mathcal{L}[i_s(t)] = \dfrac{2s}{s^2+4}$

Haciendo la transformación de la fuente de corriente en una fuente de tensión, se tiene:



Por LVK

$$I(s)\left[8+2s+\frac{18}{s}\right]=V_s(s)-2(s+2)\,I_s(s)=\frac{6s}{s^2+9}-2(s+2)\left[\frac{2s}{s^2+4}\right]$$

$$I(s)=-s^2\left[\frac{2s^3+s^2+18s+24}{(s^2+4s+9)(s^2+9)(s^2+4)}\right] \quad (1)$$

$$V(s)=\frac{18}{s}\,I(s) \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) se tiene:

$$V(s)=-18s\left[\frac{2s^3+s^2+18s+24}{(s^2+4s+9)(s^2+9)(s^2+4)}\right]$$

$$s^2+4s+9=0 \Rightarrow s_{1,2}=-2\pm j2.23$$
$$a_1=-2+j2.23=\alpha_1+j\beta_1 \;\therefore\; \alpha_1=-2,\;\beta_1=2.23$$
$$a_1^*=-2-j2.23$$

$$s^2+9=0 \Rightarrow s_{1,2}=0\pm j3$$
$$a_2=0+j3=j3=\alpha_2+j\beta_2 \;\therefore\; \alpha_2=0,\;\beta_2=3$$
$$a_2^*=0-j3$$

$$s^2+4=0 \Rightarrow s_{1,2}=0\pm j2$$
$$a_3=0+j2=j2=\alpha_3+j\beta_3 \;\therefore\; \alpha_3=0,\;\beta_3=2$$
$$a_3^*=0-j2$$

Se aplica la 2ª Técnica (Factores con raíces complejas)

$$v(t)=\Big[2e^{\alpha_1 t}|Q(a_1)|\cos(\beta_1 t+\theta_1)+2e^{\alpha_2 t}|Q(a_2)|\cos(\beta_2 t+\theta_2)+2e^{\alpha_3 t}|Q(a_3)|\cos(\beta_3 t$$

$$Q_1(s)=(s-a_1)V(s)=-\frac{18\left[2s^4+s^3+18s^2+24s\right]}{(s-a_1^*)(s^2+9)(s^2+4)}$$

para $s=a_1=-2+j2.23$

$$Q_1(a_1)=Q_1(-2+j2.23)=7.45\;\underline{|44.98^\circ}$$

donde: $|Q(a_1)|=7.45$; $\theta_1=44.98^\circ$

$$Q_2(s)=(s-a_2)V(s)=-18\,\frac{\left[2s^4+s^3+18s^2+24s\right]}{(s-a_2^*)(s^2+4s+9)(s^2+4)}$$

para $s=a_2=j3$

$$Q_2(a_2)=Q_2(j3)=2.25\;\underline{|-90^\circ}$$

donde : $|Q(a_2)| = 2.25$; $\theta_2 = -90^\circ$

$$Q_3(s) = (s-a_3)\,V(s) = \frac{-18\left[2s^4+s^3+18s^2+24s\right]}{(s-a_3^*)(s^2+4s+9)(s^2+9)}$$

para $s = a_3 = j2$

$$Q_3(a_3) = Q_3(j2) = 5.39\,\angle 167^\circ$$

$$v(t) = \left[2e^{-2t}(7.45)\cos(2.33t+44.98^\circ) + 2e^{0}(2.25)\cos(3t-90^\circ) + 2e^{0}(5.39)\cos(2t+167^\circ)\right]$$

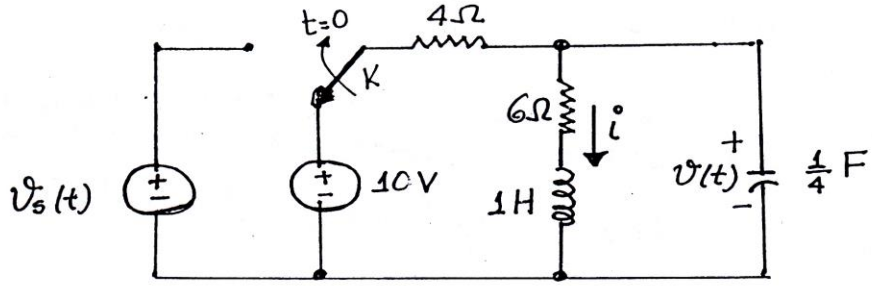
$$v(t) = \left[14.9\,e^{-2t}\cos(2.33t+44.98^\circ) + 4.5\cos(3t-90^\circ) + 10.78\cos(2t+167^\circ)\right]u(t)\ [V]$$

Respuesta forzada: $v_f(t) = 4.5\cos(3t-90^\circ) + 10.78\cos(2t+167^\circ)$ [V]

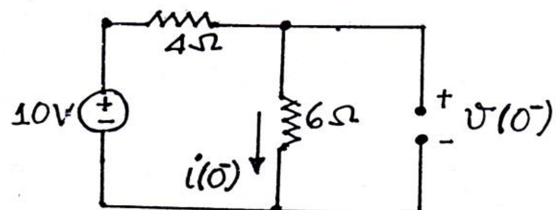
Respuesta natural: $v_n(t) = 14.9\,e^{-2t}\cos(2.33t+44.98^\circ)$ [V].

<u>NOTA</u>: Con las técnicas de la Transformada de Laplace no se requiere el uso de la "Superposición" por tener el circuito dos fuentes de excitación con diferente <u>frecuencia</u> compleja.

Ejemplo 4.8 (Pagina 292). Determinar la respuesta completa $v(t)$ para $t>0$, en el circuito de la figura 4.36. Suponga que el circuito se encuentra en estado estable cuando $t=0^-$.
$v_s(t) = 6e^{-3t}u(t)$ [V].



Solución: Circuito para $t<0$

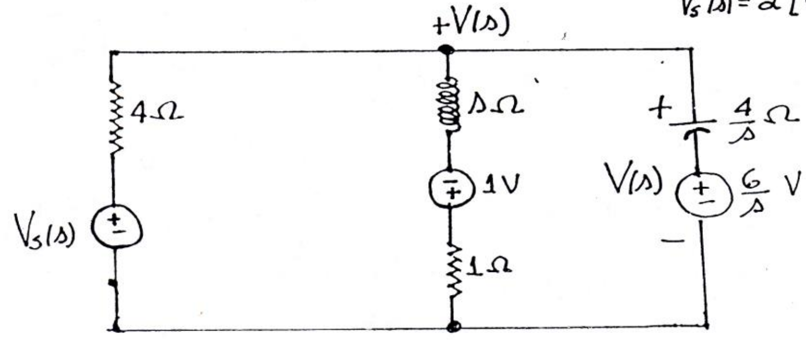


Aplicamos el COCI en la bobina y CTO ABTO en el capacitor por tener una fuente continua. Por consiguiente:

$$i(0^-) = \frac{10}{10} = 1\,[A] \quad ; \quad v(0^-) = 6\,[V].$$

Circuito para $t>0$ y en el dominio de s.

$$V_s(s) = \mathcal{L}[v_s(t)] = \frac{6}{s+3}$$



$$\frac{V(s)-V_s(s)}{4}+\frac{V(s)+1}{s+6}+\frac{V(s)-\frac{6}{s}}{4/s}=0$$

$$V(s)\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{s+6}+\frac{s}{4}\right]=\frac{V_s(s)}{4}+\frac{3}{2}-\frac{1}{s+6}$$

$$V(s)\left[\frac{s^2+7s+10}{4(s+6)}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{6}{s+3}+6\right]-\frac{1}{s+6}=\frac{3s^2+28s+66}{2(s+3)(s+6)}$$

$$V(s)=\frac{6s^2+56s+132}{(s+3)(s^2+7s+10)}=\frac{6s^2+56s+132}{(s+3)(s+2)(s+5)}=\frac{A_1}{s+3}+\frac{A_2}{s+2}+\frac{A_3}{s+5}$$

y en el dominio del tiempo:

$$v(t)=\mathcal{L}^{-1}[V(s)]=\left[A_1 e^{-3t}+A_2 e^{-2t}+A_3 e^{-5t}\right]u(t)\ \boxed{V}$$

$$V(s)=\frac{6s^2+56s+132}{s^3+10s^2+31s+30};\quad \begin{aligned} G(s)&=6s^2+56s+132\\ H(s)&=s^3+10s^2+31s+30\\ H'(s)&=3s^2+20s+31\end{aligned}$$

Para hallar las constantes A_1, A_2 y A_3 se aplica la 1ª Técnica (Factores Lineales nó repetidos).

$$A_1=\frac{G(-3)}{H'(-3)}=\frac{18}{-2}=-9$$

$$A_2=\frac{G(-2)}{H'(-2)}=\frac{44}{3}$$

$$A_3=\frac{G(-5)}{H'(-5)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

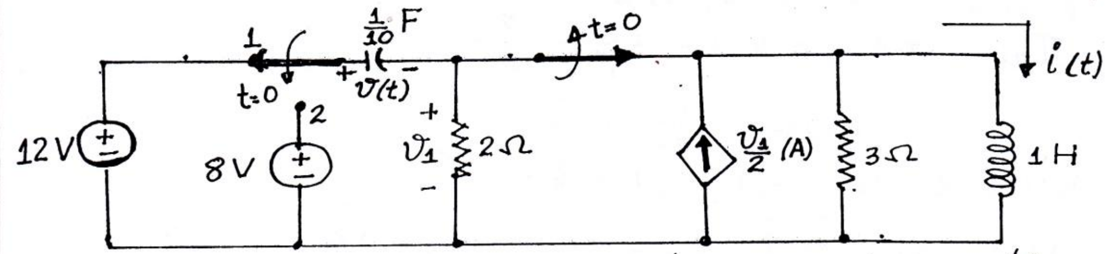
Por consiguiente:

$$v(t)=\left[-9e^{-3t}+\frac{44}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-5t}\right]u(t)\ \boxed{V}$$

Respuesta forzada: $v_f(t)=-9e^{-3t}$ [V]

Respuesta natural: $v_n(t)=\frac{44}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-5t}$ [V].

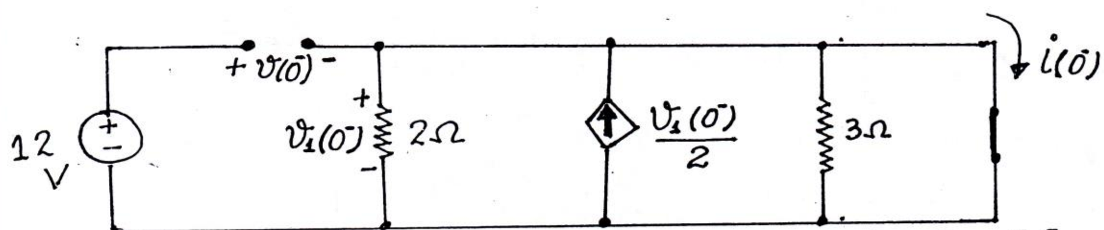
Ejemplo 4.11 (Página 307).



En el circuito de la figura 4.42, los interruptores están en la posición mostrada. En $t=0$, el de la izquierda pasa a la posición 2 y el de la derecha se abre.
Halle $v(t)$ e $i(t)$ para $t>0$.

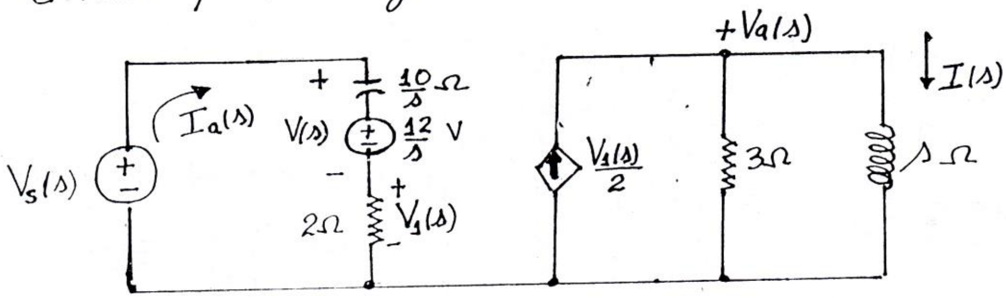
Solución:

Circuito para $t<0$



A la izquierda se observa que: $v(0^-) = 12$ [V] ; $v_1(0^-) = 0$ [V]
A la derecha se tiene: $i(0^-) = \frac{v_1(0^-)}{2} = 0$ [A]

Circuito para $t>0$ y en el dominio de s.



$v_s(t) = 8\,[V] \therefore V_s(s) = \mathcal{L}[v_s(t)] = \frac{8}{s}[V]$.

En el circuito de la izquierda:

$$I_a(s)\left[2+\frac{10}{s}\right] = V_s(s) - \frac{12}{s} = \frac{8}{s} - \frac{12}{s} = -\frac{4}{s}$$

$$I_a(s) = -\frac{2}{s+5}\ [A]$$

$$V_1(s) = 2I_a(s) = -\frac{4}{s+5}\ [V] = V_1(s) \quad (1)$$

$$V(s) = I_a(s)\left[\frac{10}{s}\right] + \frac{12}{s} = \frac{10}{s}\left(\frac{-2}{s+5}\right) + \frac{12}{s}$$

$$V(s) = \frac{12s+40}{s(s+5)} = \frac{A_1}{s-0} + \frac{A_2}{s+5}$$ y en el dominio del tiempo

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}[V(s)] = [A_1 + A_2 e^{-5t}]u(t)\ [V]$$

Para hallar las constantes A_1 y A_2 se aplica la 1ª Técnica (Factores Lineales no repetidos):

$$G(s) = 12s+40 \ ; \quad H(s) = s^2+5s \therefore H'(s) = 2s+5$$

$$A_1 = \frac{G(0)}{H'(0)} = \frac{40}{5} = 8 \quad ; \quad A_2 = \frac{G(-5)}{H'(-5)} = \frac{-20}{-5} = 4$$

y por consiguiente: $v(t) = [8 + 4e^{-5t}]u(t)\ [V]$

Respuesta forzada: $v_f(t) = 8\,[V]$

Respuesta natural: $v_n(t) = 4e^{-5t}\,[V]$.

En el circuito de la derecha: $\frac{V_a(s)}{3} + \frac{V_a(s)}{s} = \frac{V_1(s)}{2} = -\frac{2}{s+5}$

$$V_a(s) = \frac{-6s}{(s+3)(s+5)}$$

$$I(s) = \frac{V_a(s)}{s} = \frac{-6}{(s+3)(s+5)} = \frac{B_1}{s+3} + \frac{B_2}{s+5}$$

y en el dominio del tiempo:

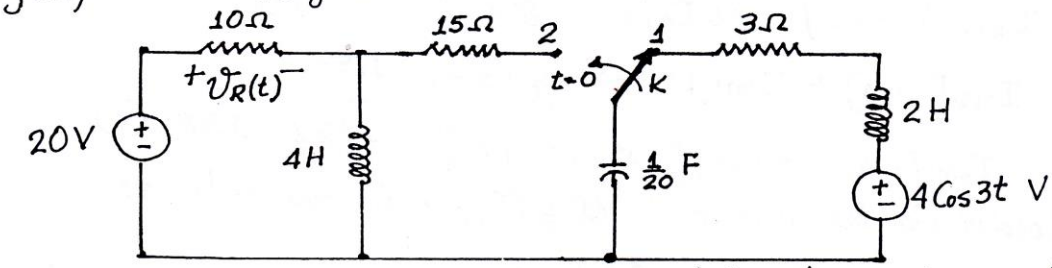
$$i(t) = [B_1 e^{-3t} + B_2 e^{-5t}]u(t)\ [A].$$

<u>1ª Técnica.</u> $G(s) = -6 \ ; \quad H(s) = s^2+8s+15 \therefore H'(s) = 2s+8$

$$B_1 = \frac{G(-3)}{H'(-3)} = \frac{-6}{2} = -3 \quad ; \quad B_2 = \frac{G(-5)}{H'(-5)} = \frac{-6}{-2} = 3$$

y por consiguiente: $i(t) = [-3e^{-3t} + 3e^{-5t}]u(t)\ [A]$

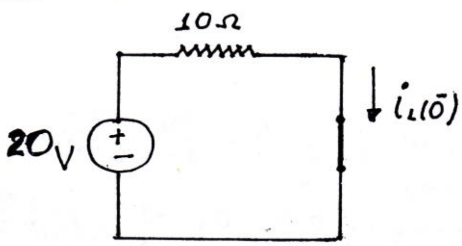
Ejemplo 4.14 (Página 317).



El circuito de la figura 4.45 se halla en estado estacionario con el interruptor en la posición 1. En $t=0$ pasa a la posición 2. Halle la respuesta completa de $v_R(t)$ para $t>0$.

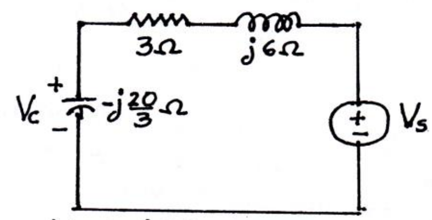
Solución: Circuito para $t<0$

Circuito de la izquierda:



$$i_L(0^-) = \frac{20}{10} = 2\,[A]$$

Circuito de la derecha:



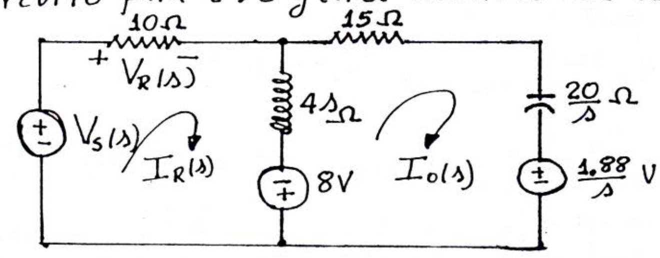
$v_s(t) = 4\cos 3t$

$V_s(s) = 4\angle 0^\circ$ para $s = j3$

Por un divisor de tensión: $V_c = \dfrac{V_s\left(-j\frac{20}{3}\right)}{3 - j\frac{2}{3}} = 8.67\angle -77.47^\circ$

en el dominio del tiempo: $v_c(t) = 8.67\cos(3t - 77.47^\circ)$ y evaluada en $t=0$, se tiene: $v_c(0^-) = 8.67\cos(-77.47^\circ) = 1.88\,[V]$.

Circuito para $t>0$ y en el dominio de s.



$v_s(t) = 20\,[V]$

$V_s(s) = \mathcal{L}[v_s(t)] = \frac{20}{s}\,[V]$

$V_R(s) = 10 I_R(s)$

$$I_R(s)[10+4s]-4sI_o(s) = 8+V_s(s) \quad ①$$

$$I_R(s)[-4s]+I_o(s)\left[15+4s+\frac{20}{s}\right] = -8-\frac{1.88}{s}$$

$$I_R(s)[-4s^2]+I_o(s)[4s^2+15s+20] = -(8s+1.88) \quad ②$$

Resolviendo las ecuaciones ① y ②, por Cramer, se tiene:

$$I_R(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8+V_s(s) & -4s \\ -(8s+1.88) & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10+4s & -4s \\ -4s^2 & 4s^2+15s+20 \end{vmatrix}} = \frac{192.48s+460+400/s}{100s^2+230s+200}$$

$$I_R(s) = \frac{192.48s^2+460s+400}{10s(10s^2+23s+20)}$$

$$V_R(s) = 10I_R(s) = \frac{(192.48s^2+460s+400)}{s(10s^2+23s+20)} = \frac{A}{s}+\frac{B_1}{s-a_1}+\frac{B_2}{s-a_1^*}$$

$$10s^2+23s+20=0 \Rightarrow s_{1,2} = -1.15 \pm j\,0.823 \; ; \quad a_1=-1.15+j\,0.823 \quad a_1^*=-1.15-j\,0.823$$

$$10s^2+23s+20 = 10(s-a_1)(s-a_1^*)$$

(raíces complejas) $a_1=\alpha+j\beta=-1.15+j0.823$; $\alpha=-1.15$; $\beta=0.823$

Se aplica la 2ª Técnica (Factores con raíces complejas) y en el dominio del tiempo, se tiene:

$$v_R(t) = \left[2e^{\alpha t}\,|Q(a_1)|\,\cos(\beta t+\theta) + A\right]u(t)\ [V]$$

$$Q(s) = (s-a_1)V_R(s) = \frac{4[48.12s^2+115s+100]}{10s\,(s-a_1^*)}$$

para $s=a_1=-1.15+j0.823$ donde: $|Q(a_1)|=0.647$, $\theta=-125.76°$

$$Q(a_1) = Q(-1.15+j0.823) = 0.647\,\underline{|-125.76°}$$

$$Q_1(s) = sV_R(s) = \frac{4[48.12s^2+115s+100]}{10s^2+23s+20} \quad \text{para } s=0$$

$$Q_1(0) = 20 = A \Rightarrow$$

$$v_R(t) = \left[1.29e^{-1.15t}\cos(0.823t-125.76°)+20\right]u(t)\ [V]$$

Respuesta forzada: $v_{Rf}(t) = 20\ [V]$

Respuesta natural: $v_{Rn}(t) = 1.29\,e^{-1.15t}\cos(0.823t-125.76°)\ [V]$