Aproximación de Funciones

Módulo 4

Interpolación

Introducción

La interpolación se utiliza para proporcionar una estimación al valor de una función tabulada, en valores que no están disponibles en la tabla.

- **Ejemplo:** Cuál es el valor de *sin(0.15)*?

x	$sin(x)$
0	0.0000
0.1	0.0998
0.2	0.1987
0.3	0.2955
0.4	0.3894

Usando **Interpolación lineal:** $sin(0.15) \approx \mathbf{0.1493}$

Valor real (4 cifras decimales) $sin(0.15) = 0.1494$

El problema de interpolación

Dado un conjunto de $n+1$ puntos,

$$\big(x_0, f(x_0)\big), \big(x_1, f(x_1)\big), \big(x_2, f(x_2)\big), \ldots, \big(x_n, f(x_n)\big)$$

Encontrar un polinomio $f_n(x)$ de $n-ésimo$ orden que pasa por todos los puntos, de forma que:

$$\boxed{f_n(x_i) = f(x_i), \qquad para\ i = 0,1,2,\ldots,n}$$

Ejemplo

Un experimento se usa para determinar la viscosidad de un líquido como una función de la temperatura. Se genera la siguiente tabla:

Problema: Estimar la viscosidad cuando la temperatura es de 8 grados.

Temperatura (grados)	***Viscosidad***
0	*1.792*
5	*1.519*
10	*1.308*
15	*1.140*

Problema de interpolación

Encontrar un polinomio que se ajuste exactamente a los puntos de datos.

$$V(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$$

$$V_i = V(T_i)$$

V : Viscosidad

T : Temperatura

a_k : Coeficientes del polinomio

Interpolación Lineal: *V(T)= 1.73 – 0.0422 T*

V(8)= 1.3924

Existencia y unicidad

Dado un conjunto de $n+1$ puntos:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots\ (x_n, f(x_n))$$

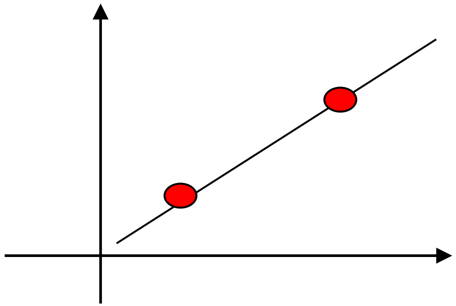
Suposición: $x_0, x_1, \dots, x_n$ son distintos

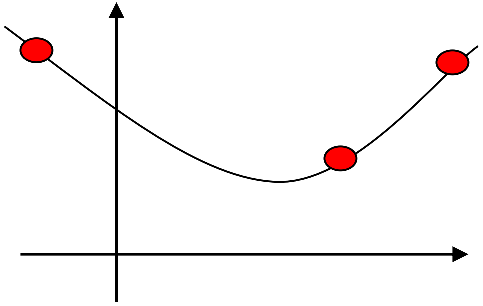
Teorema:

Hay un único polinomio $\boldsymbol{f_n(x)}$ de orden $\leq n$ tal que:

$$f_n(x_i) = f(x_i), \qquad para\ \ i = 0,1,2,\dots,n$$

Ejemplos de interpolación polinómica





Interpolación Lineal

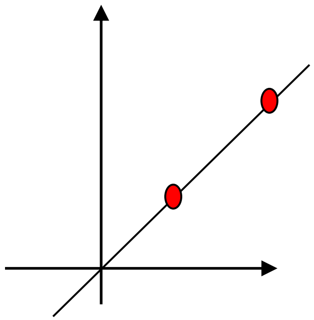
Dados dos puntos cualquiera, existe un polinomio de orden ≤ 1 que pasa por los dos puntos.

Interpolación Cuadrática

Dados tres puntos cualquiera, existe un polinomio de orden ≤ 2 que pasa por los tres puntos.

Interpolación lineal

Dados dos puntos, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$

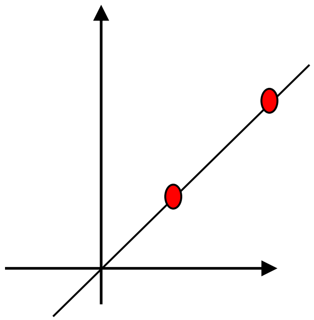


La línea que interpola los dos puntos es:

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Interpolación lineal

Dados dos puntos, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$



La línea que interpola los dos puntos es:

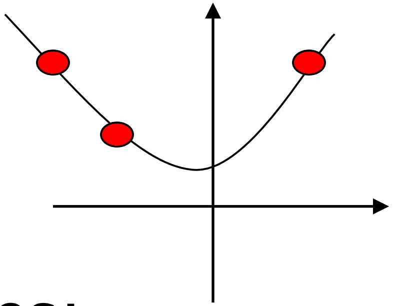
$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

<u>Ejemplo:</u>

Encuentre el polinomio que interpola $(1,2)$ y $(2,4)$.

$$f_1(x) = 2 + \frac{4-2}{2-1}(x-1) = 2 + 2(x-1) = 2x$$

Interpolación Cuadrática



Dados tres puntos cualquiera:
$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$.

El polinomio que interpola los tres puntos es:
$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

donde: $b_0 = f(x_0)$; $b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$;

$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

Interpolación general de orden n

Dados $n + 1$ puntos cualquiera: $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$

El polinomio que interpola todos los puntos es:

$$\boxed{f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})}$$

$$donde:$$

$$b_0 = f(x_0)$$
$$b_1 = f[x_0, x_1]$$
$$\vdots$$
$$b_n = f[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \dots, x_n]$$

Diferencias divididas

$f[x_k] = f(x_k)$ (D.D. Orden 0)

$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$ (D.D. Orden 1)

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ (D.D. Orden 2)

$\vdots$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Tabla de diferencias divididas

Un polinomio de interpolación de orden n, se puede escribir en función de las diferencias divididas:

i	x_i	$f(x_i)$	Primero	Segundo	Tercero
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left\{ F[x_0, x_1, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right\}$$

Tabla de diferencias divididas

x	*F[ ]*	*F[,]*	*F[, ,]*
0	*-5*	*2*	*-4*
1	*-3*	*6*	
-1	*-15*		

x_i	$f(x_i)$
0	-5
1	-3
-1	-15

Las entradas de la tabla de diferencias divididas se obtienen de la tabla de datos mediante operaciones simples.

Tabla de diferencias divididas

x	F[ ]	F[,]	F[, ,]
0	-5	2	-4
1	-3	6	
-1	-15		

x_i	$f(x_i)$
0	-5
1	-3
-1	-15

Las dos primeras columnas de la tabla son las columnas de datos.

Tercera columna: diferencias de primer orden.

Cuarta columna: diferencias de segundo orden.

Tabla de diferencias divididas

x	F[ ]	F[,]	F[, ,]
0	-5	2	
1	-3		
-1	-15		

$$\frac{(-3)-(-5)}{1-0} = 2$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

x_i	y_i
0	-5
1	-3
-1	-15

Tabla de diferencias divididas

x	F[ ]	F[,]	F[, ,]
0	-5	2	
1	-3	6	
-1	-15		

x_i	y_i
0	-5
1	-3
-1	-15

$$\frac{(-15)-(-3)}{-1-1} = 6$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$$

Tabla de diferencias divididas

x	F[ ]	F[,]	F[, ,]
0	-5	2	-4
1	-3	6	
-1	-15		

$$\frac{6-2}{-1-0} = -4$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

x_i	y_i
0	-5
1	-3
-1	-15

19

Tabla de diferencias divididas

x	F[ ]	F[,]	F[, ,]
0	-5	2	-4
1	-3	6	
-1	-15		

x_i	y_i
0	-5
1	-3
-1	-15

$$f_2(x) = -5 + 2(x-0) - 4(x-0)(x-1)$$

$$f_2(x) = F[x_0] + F[x_0 . x_1](x - x_0) + F[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Dos ejemplos

Obtenga los polinomios de interpolación para los dos ejemplos:

x	y
1	0
2	3
3	8

x	y
2	3
1	0
3	8

¿Qué se puede observar?

Dos ejemplos

x	y		
1	0	3	1
2	3	5	
3	8		

$$P_2(x) = 0 + 3(x-1) + 1(x-1)(x-2)$$
$$= x^2 - 1$$

x	y		
2	3	3	1
1	0	4	
3	8		

$$P_2(x) = 3 + 3(x-2) + 1(x-2)(x-1)$$
$$= x^2 - 1$$

El orden de los puntos no debería afectar al polinomio interpolador.

Propiedades de las diferencias divididas

Ordenar los puntos no debería afectar la diferencia dividida:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_1, x_0]$$

Ejemplo

Encuentra un polinomio para interpolar los datos.

x	*f(x)*
2	*3*
4	*5*
5	*1*
6	*6*
7	*9*

Ejemplo

x	DD0: f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	DD3: f[, , ,]	DD4: f[, , , ,]
2	3	5-3 / 4-2 = 1			
4	5				
5	1				
6	6				
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1			
4	5	1-5 / 5-4 = -4			
5	1				
6	6				
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1			
4	5	-4			
5	1	6-1 / 6-5			
6	6				
7	9				

Ejemplo

x	$f(x)$	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1			
4	5	-4			
5	1	5			
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	(-4-1)/(5-2)=-5/3		
4	5	-4			
5	1	5			
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667		
4	5	-4	(5-(-4))/6-4=9/2		
5	1	5			
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667		
4	5	-4	4.5		
5	1	5	3-5/7-5 = -1		
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667	1.5417	
4	5	-4	4.5		
5	1	5	-1		
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667	1.5417	
4	5	-4	4.5	-1.8333	
5	1	5	-1		
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667	1.5417	-0.6750
4	5	-4	4.5	-1.8333	
5	1	5	-1		
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667	1.5417	-0.6750
4	5	-4	4.5	-1.8333	
5	1	5	-1		
6	6	3			
7	9				

$$f_4 = 3 + 1(x-2) - 1.6667(x-2)(x-4) + 1.5417(x-2)(x-4)(x-5) - 0.6750(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)$$

Error en la interpolación polinómica

- Si se conoce el valor verdadero,

$$\varepsilon_a = |f(x) - f_n(x)|$$

- Si no se conoce el valor real, se puede utilizar un punto $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ adicional,

$$\varepsilon_a \approx |f[x_{n+1}, x_n, \ldots, x_0](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)|$$

Interpolación de Lagrange

El problema de interpolación

Dado un conjunto de $n+1$ puntos,

$$\big(x_0, f(x_0)\big), \big(x_0, f(x_0)\big), \dots, (x_n, f(x_n))$$

Encontrar un polinomio $f_n(x)$ de $n-$ *ésimo* orden que pasa por todos los puntos, de forma que:

$$\boxed{f_n(x_i) = f(x_i) \quad para\; i = 0,1,2,\dots,n}$$

Interpolación de Lagrange

Problema:

Dados

x_i	x_0	x_1	....	x_n
y_i	y_0	y_1	....	y_n

Encontrar el polinomio $f_n(x)$ de mínimo orden, tal que:

$$f_n(x_i) = f(x_i) \quad para\ i = 0,1,\dots,n$$

Fórmula de interpolación de Lagrange:

$$\boxed{\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \\ L_i(x) &= \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \end{aligned}}$$

Ejemplo de interpolación de Lagrange

x	1/3	1/4	1
y	2	-1	7

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)} = \frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)}\frac{(x-1)}{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = -18\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)} = \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)}\frac{(x-1)}{\left(\frac{1}{4}-1\right)} = 16\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$$

Ejemplo de interpolación de Lagrange

x	1/3	1/4	1
y	2	-1	7

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)}\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}\frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = 2\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$P_2(x) = 2\left\{-18\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1)\right\} - 1\left\{16\left(\mathrm{x} - \frac{1}{3}\right)(\mathrm{x} - 1)\right\}$$
$$+7\left\{2\left(\mathrm{x} - \frac{1}{3}\right)\left(\mathrm{x} - \frac{1}{4}\right)\right\}$$

Ejemplo

Encuentre un polinomio para interpolar:

Tanto el método de interpolación de Newton como el método de interpolación de Lagrange deben dar la misma respuesta.

x	*y*
0	*1*
1	*3*
2	*2*
3	*5*
4	*4*

Método de interpolación de Newton

x_i	y_i	DD1	DD2	DD3	DD4
0	1	2	-3/2	7/6	-5/8
1	3	-1	2	-4/3	
2	2	3	-2		
3	5	-1			
4	4				

Interpolación polinómica

$$f_4(x) = 1 + 2(x) - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{7}{6}x(x-1)(x-2)$$
$$- \frac{5}{8}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$f_4(x) = 1 + \frac{115}{12}x - \frac{95}{8}x^2 + \frac{59}{12}x^3 - \frac{5}{8}x^4$$

Interpolación con Pol. de Lagrange

$$f_4(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)L_i = L_0 + 3L_1 + 2L_2 + 5L_3 + 4L_4$$

$$L_0 = \frac{(x-1)}{(0-1)}\frac{(x-2)}{(0-2)}\frac{(x-3)}{(0-3)}\frac{(x-4)}{(0-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}$$

$$L_1 = \frac{(x-0)}{(1-0)}\frac{(x-2)}{(1-2)}\frac{(x-3)}{(1-3)}\frac{(x-4)}{(1-4)} = \frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{-6}$$

$$L_2 = \frac{(x-0)}{(2-0)}\frac{(x-1)}{(2-1)}\frac{(x-3)}{(2-3)}\frac{(x-4)}{(2-4)} = \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{4}$$

$$L_3 = \frac{(x-0)}{(3-0)}\frac{(x-1)}{(3-1)}\frac{(x-2)}{(3-2)}\frac{(x-4)}{(3-4)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{-6}$$

$$L_4 = \frac{(x-0)}{(4-0)}\frac{(x-1)}{(4-1)}\frac{(x-2)}{(4-2)}\frac{(x-3)}{(4-3)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

Interpolación Inversa

Interpolación inversa

Problema: Dada una tabla de valores, encontrar el valor de x tal que: $f(x) = yk$, donde y_k es conocido.

x_i	x_0	x_1	....	x_n
y_i	y_0	y_1	....	y_n

Enfoque: Use la interpolación polinómica para obtener $f_n(x)$ para interpolar los datos, luego use el método de **Newton** para encontrar una solución para x.

$$f_n(x) = y_k$$

Interpolación inversa

Interpolación inversa:

1. Intercambiar los roles de x, y.
2. Realizar la interpolación polinomial sobre la nueva tabla.
3. Evaluar.

x_i	x_0	x_1	....	x_n
y_i	y_0	y_1	....	y_n

y_i	y_0	y_1	....	y_n
x_i	x_0	x_1	....	x_n

$$x = f_n(y_k)$$

Interpolación inversa

Pregunta:

¿Qué limitaciones tiene la interpolación inversa?

- La función original debe tener una inversa.
- $y_1, y_2, \dots, y_n$ deben ser distintos.

Ejemplo

Problema: Dada la tabla, encuentre x de tal manera que $f(x) = 2.5$.

x	*1*	*2*	*3*
y	*3.2*	*2.0*	*1.6*

Ejemplo

Problema: Dada la tabla, encuentre x de tal manera que $f(x) = 2.5$.

x	*1*	*2*	*3*
y	*3.2*	*2.0*	*1.6*

3.2	*1*		
2.0	*2*		
1.6	*3*		

Ejemplo

Problema: Dada la tabla, encuentre x de tal manera que $f(x) = 2.5$.

x	*1*	*2*	*3*
y	*3.2*	*2.0*	*1.6*

3.2	*1*	*-0.8333*	*1.0417*
2.0	*2*	*-2.5*	
1.6	*3*		

Ejemplo

Problema: Dada la tabla, encuentre x de tal manera que $f(x) = 2.5$.

x	*1*	*2*	*3*
y	*3.2*	*2.0*	*1.6*

3.2	*1*	*-0.8333*	*1.0417*
2.0	*2*	*-2.5*	
1.6	*3*		

$$x = f_2(y) = 1 - 0.8333(y - 3.2) + 1.0417(y - 3.2)(y - 2)$$
$$x = f_2(2.5) = 1 - 0.8333(-0.7) + 1.0417(-0.7)(0.5) = 1.2187$$

Algoritmos para el polinomio de interpolación

Algoritmo para la interpolación de Newton (Pseudocódigo)

```
(yint, Ea) = NewtInt (x, y, n, xint)
LOCAL fdd_{n,n}
DOFOR i = 0, n
    fdd_{i,i} = y_i ;
END DO
DOFOR j = 1, n
    DOFOR i = 0, n – j
        fdd_{i,j}= (fdd_{i+1,j–1}–fdd_{i,j–1})/(x_{i+j}–x_i);
    END DO
END DO
xterm = 1;
yint_0 = fdd_{0,0} ;

DOFOR order = 1, n
    xterm=xterm*(x_int – x_{order–1})
    yint2 = yint_{order–1} + fdd_{0,order}*xterm
    Ea_{order–1} = yint2 – yint_{order–1}
    yint order = yint2
END DO
```

Ejemplo

Utilice el algoritmo computacional de la diapositiva anterior y la siguiente información para evaluar *f(x) = ln x* en *x = 2*:

x	*1*	*4*	*6*	*5*	*3*	*1.5*	*2.5*	*3.5*
f(x)=ln x	*0*	*1.3862944*	*1.7917595*	*1.6094379*	*1.0986123*	*0.4054641*	*0.9162907*	*1.2527630*

Algoritmo para la interpolación de Lagrange (Pseudocódigo)

```
Lagrng = Lagrng (x, y, n, xint)
sum = 0
DOFOR i = 0, n
    product = y_i
    DOFOR j = 0, n
        IF i ≠ j THEN
            product = product*(xint – x_j)/(x_i – x_j )
        END IF
    END DO
    sum = sum + product
END DO
Lagrng = sum
```

Ejemplo

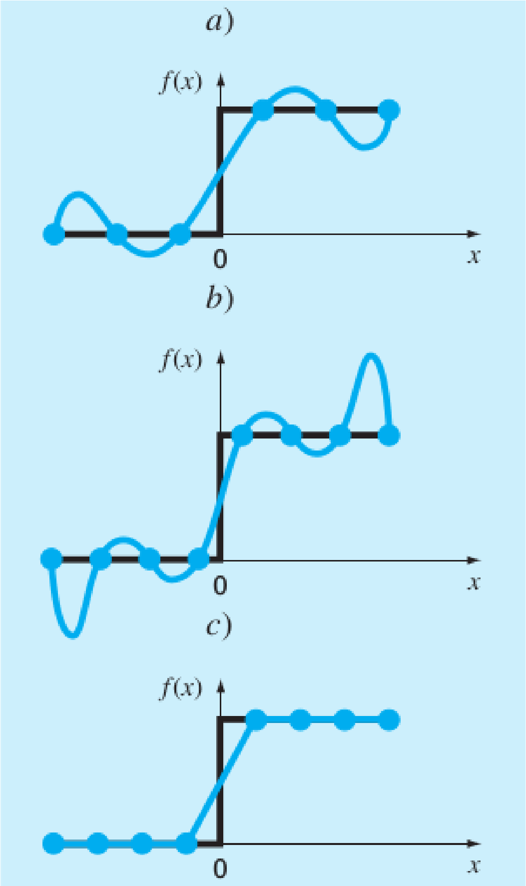
Utilice el algoritmo computacional de la diapositiva anterior y la siguiente información para evaluar $f(x) = \ln x$ en $x = 2$:

x	1	4	6	5	3	1.5	2.5	3.5
$f(x)=\ln x$	0	1.3862944	1.7917595	1.6094379	1.0986123	0.4054651	0.9162907	1.2527630

Interpolación mediante trazadores (Splines)

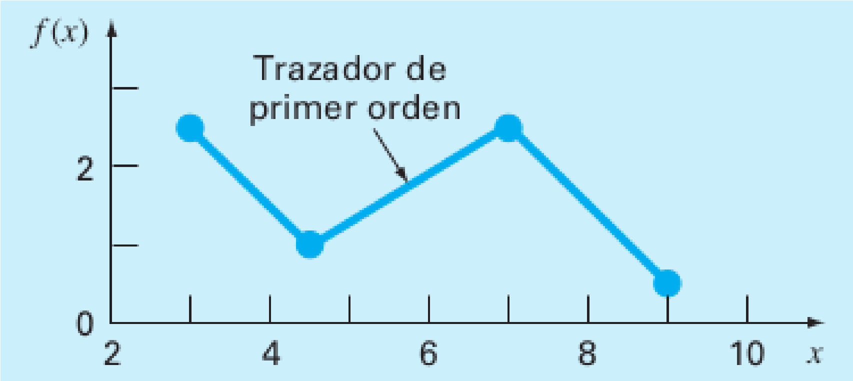
Trazadores

- En lugar de buscar un polinomio de grado n que una n+1 puntos, se buscan varios polinomios de grado inferior para subconjuntos de datos.
- El objetivo es proporcionar una mejor aproximación al comportamiento de las funciones que tienen cambios locales y abruptos.



Trazadores Lineales

La unión más simple entre dos puntos es una línea recta. Se define el conjunto de funciones lineales:



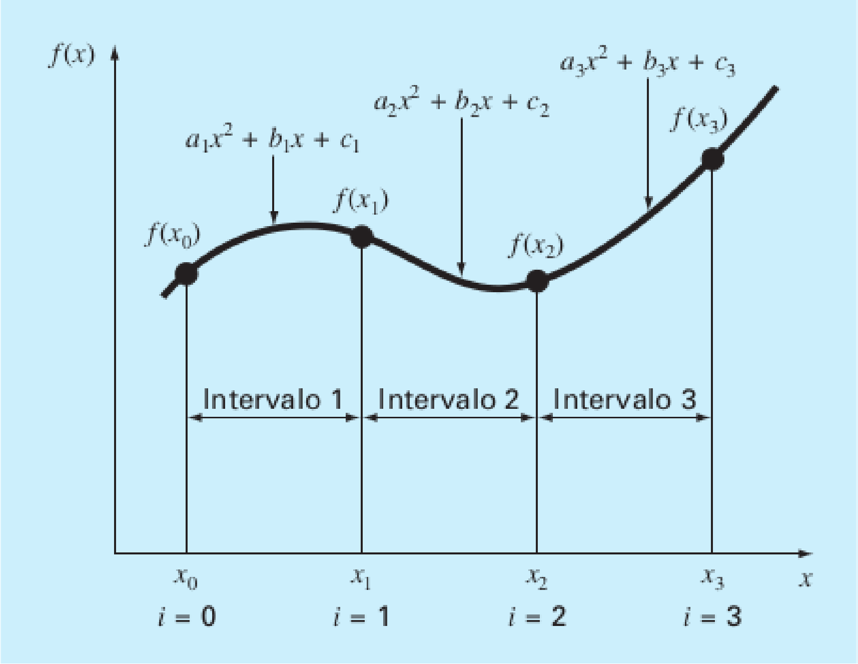
$$
\begin{array}{ll}
f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) & x_0 \leq x \leq x_1 \\
f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) & x_1 \leq x \leq x_2 \\
\vdots & \vdots \\
f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) & x_{n-1} \leq x \leq x_n
\end{array}
$$

Donde $m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

Trazadores Cuadráticos

- El objetivo de los trazadores cuadráticos es obtener un polinomio de segundo grado para cada intervalo entre los datos.
- El polinomio de cada intervalo se representa así:

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$



Trazadores cuadráticos

Hay n intervalos, por lo tanto hay n ecuaciones cuadráticas y $3n$ incógnitas (a,b,c). Para establecerlas se debe cumplir:

1. Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores. 2*(n-1).
2. La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos. (2).
3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales. (n-1).
4. La segunda derivada es cero en el primer punto. (1).

Trazadores cuadráticos

- Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores.

$$\begin{aligned} a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} &= f(x_{i-1}) \\ a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i &= f(x_{i-1}) \end{aligned} \qquad para\ i = 2, \dots, n$$

- La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos.

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$
$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

Trazadores cuadráticos

- Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i \qquad para\; i = 2, \dots, n$$

- La segunda derivada es cero en el primer punto.

$$2a_1 = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

Ejemplo

Ajuste trazadores cuadráticos a los siguientes datos. Con los resultados estime el valor en $x = 5$.

i	***x***	***f(x)***
0	*3.0*	*2.5*
1	*4.5*	*1.0*
2	*7.0*	*2.5*
3	*9.0*	*0.5*

Ejemplo

- Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores. (4 ecuaciones).
- Nodo $i = 1$
  - $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1,\ x_0 \le x \le x_1$
  - $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2, x_1 \le x \le x_2$
  - $f_1(x_1) = a_1(x_1)^2 + b_1x_1 + c_1 = f(x_1) \rightarrow \boldsymbol{a_1(4.5)^2 + b_1(4.5) + c_1 = 1}$
  - $f_2(x_1) = a_2(x_1)^2 + b_2x_1 + c_2 = f(x_1) \rightarrow \boldsymbol{a_2(4.5)^2 + b_2(4.5) + c_2 = 1}$

  - $f_1'(x) = 2a_1x + b_1$
  - $f_2'(x) = 2a_2x + b_2$
  - $f_1'(x_1) = f_2'(x_1) \rightarrow 2a_1x_1 + b_1 = 2a_2x_1 + b_2 \rightarrow \boldsymbol{a_1(2 \times 4.5) + b_1 = a_2(2 \times 4.5) + b_2}$

Ejemplo

- Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores. (4 ecuaciones).

$$
\begin{aligned}
20.5a_1 + 4.5b_1 + c_1 &= 1.0 \\
20.5a_2 + 4.5b_2 + c_2 &= 1.0 \\
49.0a_2 + 7.0b_2 + c_2 &= 2.5 \\
49.0a_3 + 7.0b_3 + c_3 &= 2.5
\end{aligned}
$$

- La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos.

$$
\begin{aligned}
9.0a_1 + 3.0b_1 + c_1 &= 2.5 \\
81.0a_n + 9.0b_n + c_n &= 0.5
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

$$9.0a_1 + b_1 = 9.0a_2 + b_2$$
$$14.0a_2 + b_2 = 14.0a_3 + b_3$$

- La segunda derivada es cero en el primer punto.
- $f_1''(x) = 2a_1 \rightarrow f_1''(x_0) = 2a_1$

$$2a_1 = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

Ejemplo

El problema se reduce a la solución de ocho ecuaciones con ocho incógnitas

$$\begin{bmatrix} 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo

Las soluciones al sistema de ecuaciones son:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0 & b_1 &= -1 & c_1 &= 5.5 \\
a_2 &= 0.64 & b_2 &= -6.76 & c_2 &= 18.46 \\
a_3 &= -1.6 & b_3 &= 24.6 & c_3 &= -91.3
\end{aligned}
$$

El resultado de la interpolación es:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= -x + 5.5 & 3.0 \leq x \leq 4.5 \\
f_2(x) &= 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 & 4.5 \leq x \leq 7.0 \\
f_3(x) &= -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 & 7.0 \leq x \leq 9.0
\end{aligned}
$$

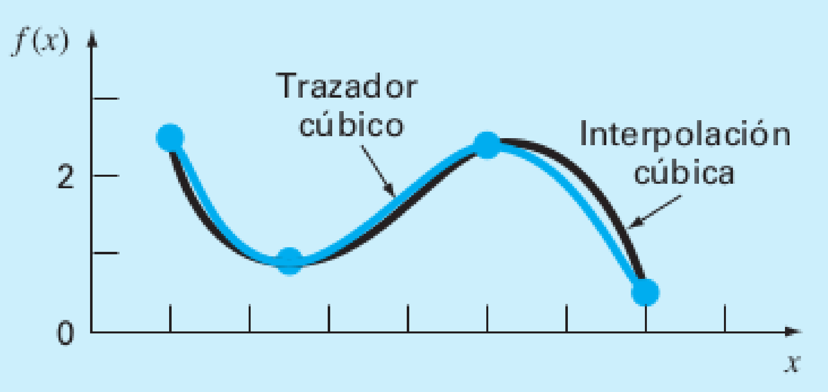
Ejemplo

Se usa $f_2(x)$ para estimar el valor de la función en $x=5$:

$$f_2(x) = 0.64(5)^2 - 6.76(5) + 18.46 = 0.66$$

Trazadores cúbicos

- El trazador cúbico es la versión más común y útil en la práctica de la ingeniería.
- Garantiza que la primera y segunda derivadas sean continuas.
- Su objetivo es obtener un polinomio de tercer grado para cada intervalo entre los datos, así:



$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

Trazadores cúbicos

Hay *n* intervalos, por lo tanto hay *n* ecuaciones cúbicas y *4n* incógnitas *(a,b,c,d)*. Para establecerlas se debe cumplir:

1. Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores. 2*(n-1) = 2n-2
2. La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos. (2)
3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales. (n-1)
4. Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales. (n-1)
5. La segunda derivada en los nodos externos es cero. (2)

Trazadores cúbicos

Aplicando las condiciones de continuidad de la interpolación su primera y segunda derivadas, es posible encontrar la expresión analítica de cada trazador:

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3$$
$$+ \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x)$$
$$+ \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1}) +$$

Trazadores cúbicos

Las incógnitas se evalúan aplicando la siguiente ecuación:

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1})$$
$$= \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

Si se escribe esta ecuación para todos los nodos interiores, resultan n – 1 ecuaciones simultáneas con n – 1 incógnitas. (Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero.)

Trazadores Cúbicos

El sistema de ecuaciones resultantes es:

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-1} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

donde:

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}) - \frac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}}$$

$$b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

$$v_i = b_i - b_{i-1} - \frac{h_{i-1} v_{i-1}}{u_{i-1}}$$

Algoritmo para trazadores cúbicos (Pseudocódigo)

Input (n, x, y)

DOFOR $i = 0, n-1$

$h_i = x_{i+1} - x_i$

$b_i = 6\,(x_{i+1} - y_i)/h_i$

END DO

$u_1 = 2\,(h_0 - h_1)$

$v_1 = b_1 - b_0$

DOFOR $i = 2, n-1$

$u_i = 2(h_i + h_{i-1}) - (h_{i-1})^2/u_{i-1}\,;$

$v_i = b_i - b_{i-1} - h_{i-1}\,v_{i-1}/u_{i-1}$

END DO

$z_n = 0;\ z_0 = 0$

DOFOR $i = n-1, 1$

$z_i = (v_i - h_i\,z_{i+1})/u_i$

END DO

Output (z)

Ejemplo

Utilice el algoritmo computacional de la diapositiva anterior y la siguiente información para evaluar $f(x) = \ln x$ en $x = 2$:

x	1	4	6	5	3	1.5	2.5	3.5
$f(x)=\ln x$	0	1.3862944	1.7917595	1.6094379	1.0986123	0.4054641	0.9162907	1.2527630

Algoritmo para Trazadores cúbicos (Matlab)

Sean $\{x_i, y_i\}$ *n puntos:*

DOFOR $i = 1, n-1$

$h_i = (x_{i+1} - x_i)$

END DO

DOFOR $i = 1, n-2$

$u_i = 2(x_{i+2} - x_i)$

END DO

DOFOR $i = 2, n-1$

$V_{i-1} = (6/h_i)(y_{i+1} - y_i) + (6/h_{i-1})(y_{i-1} - y_i)$

END DO

DOFOR $i = 1, n-2$

$A_{i,i} = u_i$

END DO

DOFOR $i = 2, n-2$

$A_{i,i-1} = h_i$

END DO

DOFOR $i = 1, n-3$

$A_{i,i+1} = h_{i+1}$

END DO

Continuación Algoritmo para Trazadores cúbicos (Matlab)

- *Resolver: [A][z] =[v]*
- *Agregar ceros correspondientes a la segunda derivada: Z=[0;z;0]*
- *Resolver la interpolación correspondiente.*

DOFOR i = 1, n-1

Ecuación de cada intervalo

END DO