Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

MÓDULO 6

Motivación

Ecuaciones Diferenciales

Se componen de una función desconocida y de sus derivadas. Podemos clasificar en:

- **Ecuación diferencial ordinaria:** Cuando la función tiene una variable independiente.
- **Ecuación diferencial parcial:** La función involucra dos o más variables independientes.

Ecuaciones Diferenciales

Se componen de una función desconocida y de sus derivadas. Podemos clasificar en:

- **Ecuación diferencial ordinaria:** Cuando la función tiene una variable independiente.
- **Ecuación diferencial parcial:** La función involucra dos o más variables independientes.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales se clasifican también en cuanto a su orden.

- **EDO de primer orden:** la derivada de mayor orden es una primera derivada.
- **EDO de segundo orden:** la mayor derivada es una segunda derivada.
- etc.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales se clasifican también en cuanto a su orden.

- **EDO de primer orden:** la derivada de mayor orden es una primera derivada.
- **EDO de segundo orden:** la mayor derivada es una segunda derivada.
- etc.

Las ecuaciones de orden superior pueden reducirse a un sistema de ecuaciones de primer orden.

EDO de primer orden

El primer problema consiste en resolver la ecuación diferencial:

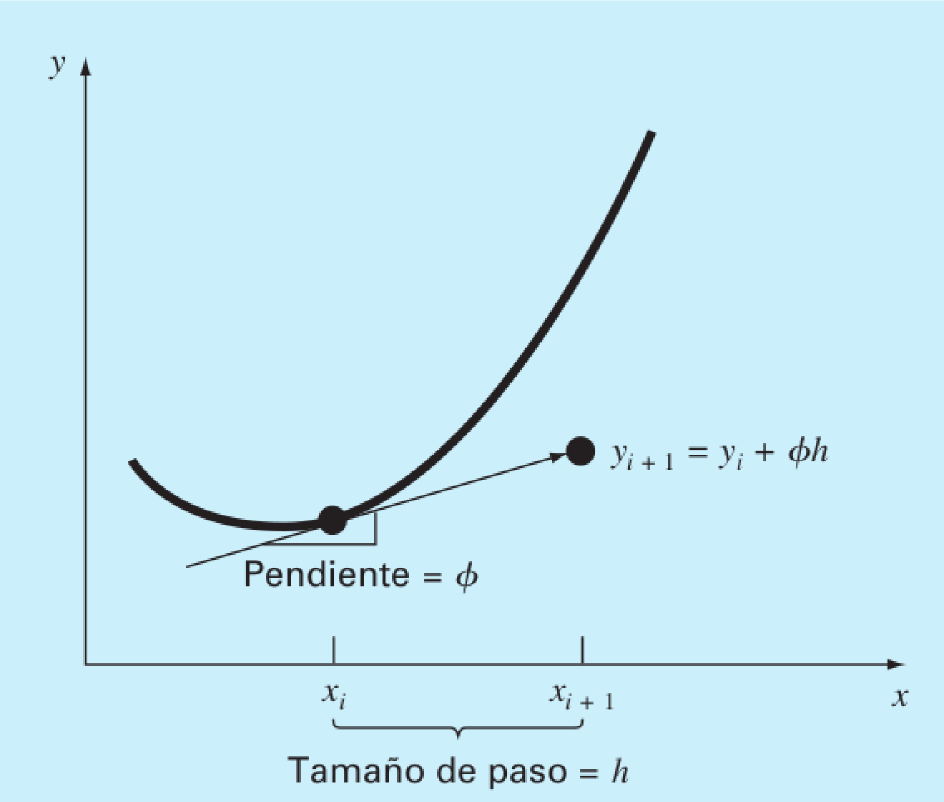
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver estimando iterativamente la pendiente e iterando paso a paso así:

$$\boldsymbol{y_{i+1} = y_i + \phi h}$$

Esto se conoce como **método de un paso.** Los métodos de un paso, en general, difieren solo en la manera en la que se estima la pendiente.

Métodos de un paso



Método de Euler

Método de Euler

La primera derivada ofrece una estimación directa de la pendiente en x_i:

$$\phi = f(x_i, y_i)$$

donde $f(x_i, yi)$ es la ecuación diferencial evaluada en x_i y y_i. La estimación se convierte en:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Esta fórmula se conoce como **método de Euler** (o de Euler-Cauchy o de punto pendiente).

Ejemplo

Utilice el método de Euler para estimar numéricamente la solución de:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

desde $x = 0$ hasta $x = 4$ con un tamaño de paso $h = 0.5$. Asuma una condición inicial en: $y(x = 0) = 1$.

Ejemplo

Integrando y evaluando la condición inicial, se puede llegar a la siguiente solución analítica:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

Ejemplo

El método de Euler se aplica paso a paso, empezando por:

$$y(0.5) = y(0) + f(0,1)(0.5)$$

- $y(0) = 1$ está determinado por la condición inicial.
- $f(0,1)$ corresponde a evaluar en la ecuación diferencial en $(x, y) = (0,1)$.

Ejemplo

De esta manera, la pendiente estimada en x=0 es:

$$f(0{,}1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) = 8.5$$

Y, por lo tanto:

$$y(0.5) = y(0) + f(0{,}1)(0.5) = 1 + 8.5(0.5) = 5.25$$

El valor $y_2 = y(0.5) = 5.25$ será usado para la siguiente iteración, $y(x = 1) = y_3$.

Ejemplo

De esta manera, el segundo paso queda así:

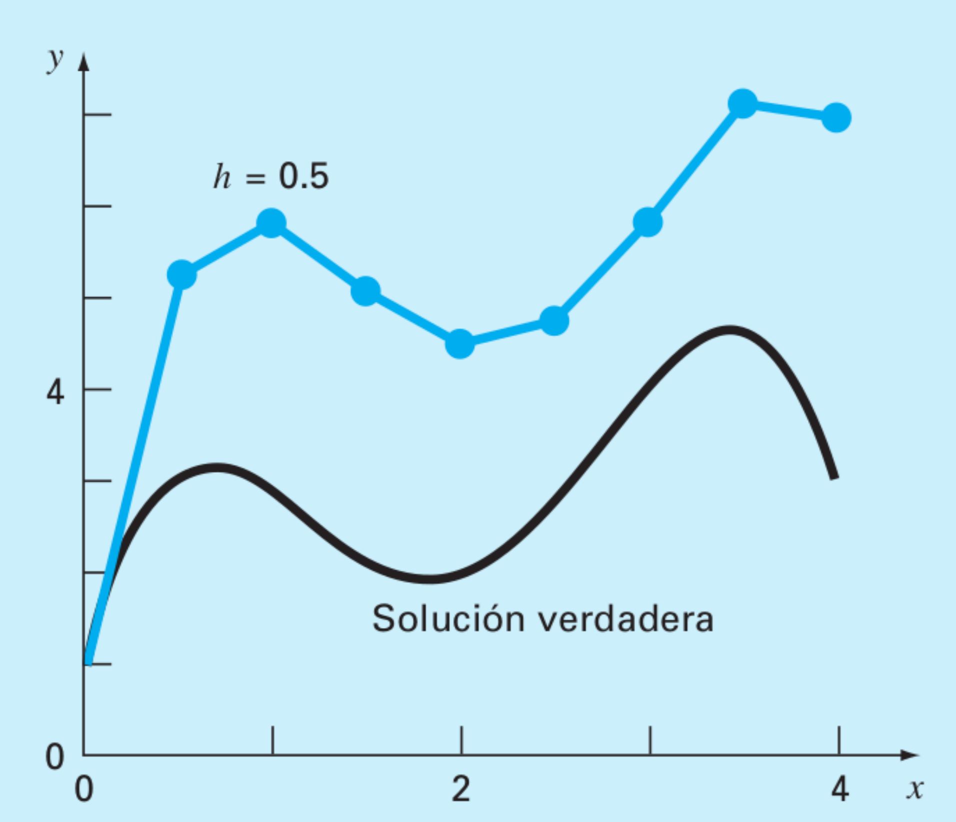
$$y(x = 1) = y(x = 0.5) + f(x = 0.5, y = 5.25)(0.5)$$
$$\mathrm{y}(\mathrm{x} = 1) = 5.25 + [2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5](0.5)$$
$$y(x = 1) = 5.875$$

El valor $y(x = 1) = 5.875$ será usado para la siguiente iteración, $y(x = 1.5)$, y así sucesivamente.

Ejemplo

x	y verdadero	y euler	Error (%)
0.0	1.00000	1.00000	
0.5	3.21875	5.25000	-63.1
1.0	3.00000	5.87500	-95.8
1.5	2.21875	5.12500	131.0
2.0	2.00000	4.50000	-125.0
2.5	2.71875	4.75000	-74.7
3.0	4.00000	5.87500	46.9
3.5	4.71875	7.12500	-51.0
4.0	3.00000	7.00000	-133.3

Ejemplo



Método de Euler

```
% intervalo de integración
xi = 0
xf = 4
% Variables iniciales
x = xi
y = 1
% Tamaño de paso y número de
% pasos
dx = 0.5 %h
nc = (xf – xi)/dx
% condiciones de salida
PRINT x, y
```

```
% ciclo para implementar el
% método de Euler y despliegue
% de resultados
DOFOR i = 1, nc
        %   Estimación   de   la
derivada
    dydx=-2x^3+12x^2-20x+8.5
    y = y + dydx · dx
    x = x + dx
    PRINT x, y
END DO
```

Método de Heun

El método de Heun es una mejor estimación que el método de Euler porque tiene en cuenta la derivada en el punto inicial y final para estimar la pendiente. La pendiente al inicio de un intervalo:

$$y_i' = f(x_i, y_i)$$

se utiliza para extrapolar la pendiente al final (con el método de Euler):

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$$

con esta predicción intermedia (llamada **predictor**), se estima la pendiente al final del intervalo:

$$y_{i+1}' = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$$

Método de Heun

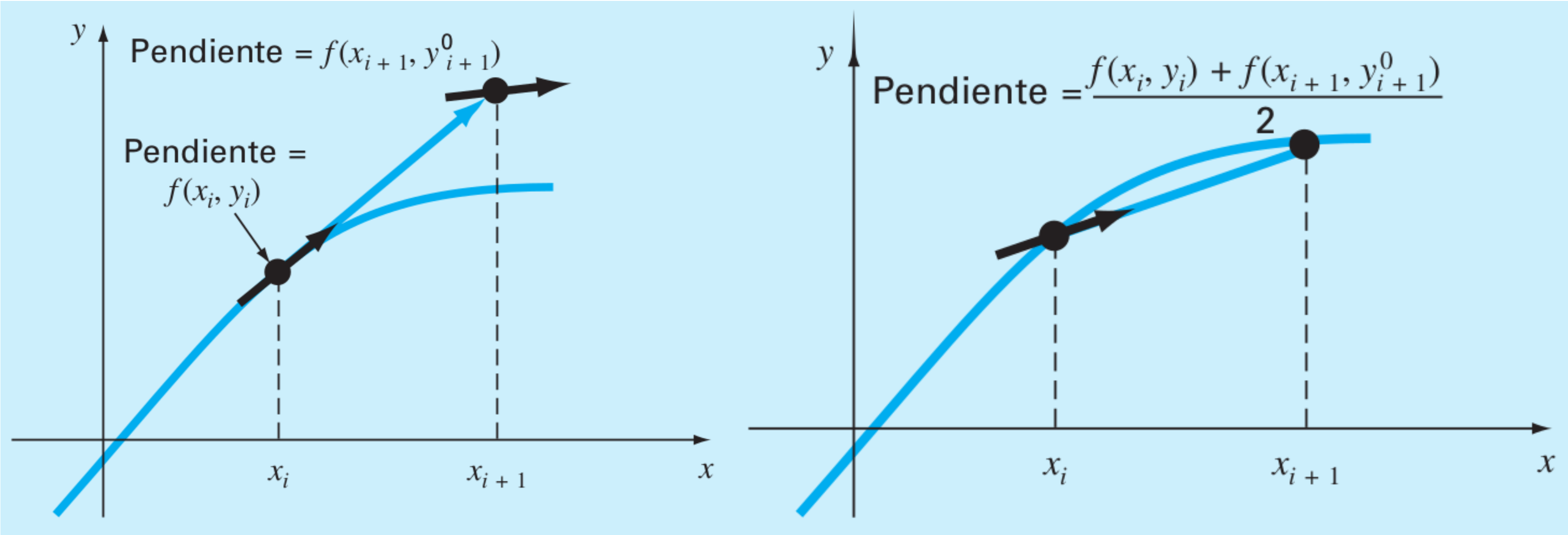
Así, se combinan las dos pendientes para obtener una pendiente promedio en el intervalo:

$$\bar{y}' = \frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}$$

Esa pendiente promedio se usa para extrapolar el valor de y_{i+1} a través de una ecuación que se denomina **corrector**:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2} h$$

Método de Heun



Método de Heun

La ecuación correctora se puede aplicar de forma iterativa, tantas veces como se considere pertinente. Un criterio de parada podría darse a través de:

$$|\varepsilon_t| = \left| \frac{y_{i+1}^{j} - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^{j}} \right|$$

Ejemplo

Resolver

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

desde $x = 0$ hasta $x = 4$, con un tamaño de paso igual a 1. Condición inicial es en $x = 0$, $y = 2$.

La solución analítica está dada por:

$$y = \frac{4}{1.3}\left(e^{0.8x} - e^{-0.5x}\right) + 2e^{-0.5x}$$

Ejemplo

Primero se calcula la pendiente inicial:

$$y_0' = 4e^0 - 0.5(2) = 3$$

Con esta pendiente, se usa la ecuación predictora:

$$y_1^0 = 2 + 3(1) = 5$$

Este valor se utiliza para estimar la pendiente final:

$$y_1' = 4e^{0.8(1)} - 0.5(5) = 6.402164$$

Finalmente, se utiliza la ecuación correctora para dar la estimación:

$$y_1^1 = 2 + \frac{3 + 6.402164}{2}(1) = 6.701082$$

Ejemplo

Dicha estimación se puede utilizar para mejorar la predicción de y_1

$$y_1^2 = 2 + \frac{3 + 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.701082)}{2}(1) = 6.275811$$

Y esta, a su vez, se puede volver a utilizar

$$y_1^3 = 2 + \frac{3+4e^{0.8(1)}-0.5(6.275811)}{2}(1) = 6.382129$$

$$\vdots$$

$$y_1^{15} = 6.3608655$$

Ejemplo

Para los siguientes pasos, se toma la última aproximación como punto de partida.

		Iteraciones del Método de Heun			
		1		*15*	
x	**y verdadero**	**y Heun**	**Error (%)**	**y Heun**	**Error (%)**
0	*2.0000000*	*2.0000000*	*0.00*	*2.0000000*	*0.00*
1	*6.1946314*	*6.7010819*	*8.18*	*6.3608655*	*2.68*
2	*14.8439219*	*16.3197819*	*9.94*	*15.3022367*	*3.09*
3	*33.6771718*	*37.1992489*	*10.46*	*34.7432761*	*3.17*
4	*75.3389626*	*83.3377671*	*10.62*	*77.7350962*	*3.18*

Método del punto medio

Esta técnica usa el método de Euler para predecir un valor de y en el punto medio del intervalo:

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

Después, con este valor, se calcula una pendiente en el punto medio:

$$y'_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

Dicha pendiente se usa para extrapolar linealmente desde x_i hasta x_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right)h$$

No se puede mejorar de forma iterativa.

Métodos de Runge-Kutta

Métodos de Runge-Kutta

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

donde ϕ representa una función de incremento (aprox. a una pendiente). La función incremento se escribe en forma general como

$$\phi = a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n$$

Donde las a_i son constantes y las k son:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + p_1 h, y_i + q_{1,1} k_1 h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + p_2 h, y_i + q_{2,1} k_1 h + q_{2,2} k_2 h\right)$$

$$\vdots$$

$$k_n = f(x_i + p_n h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)$$

Métodos de Runge-Kutta

- En las ecuaciones anteriores, las p y q son constantes.
- Es posible tener varios tipos de métodos de Runge-Kutta empleando diferentes números de términos en la función incremento especificada por n.
- Observe que el método de Runge-Kutta (RK) de primer orden con $n = 1$ y $a_1 = 1$ es, de hecho, el método de Euler.

Runge-Kutta de segundo orden

La versión de segundo orden de Runge-Kutta es:

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{1,1} k_1 h)$$

los valores de a_1 , a_2 , p_1 y q_{11} se evalúan al igualar la ecuación de Runge Kutta de orden dos con la expansión de la serie de Taylor hasta el término de segundo orden.

Runge-Kutta de segundo orden

Al igualar con la serie de Taylor se tiene:

$$a_1 + a_2 = 1$$
$$a_2 p_1 = \frac{1}{2}$$
$$a_2 q_{1,1} = \frac{1}{2}$$

- Como tenemos tres ecuaciones con cuatro incógnitas, debemos dar el valor de una de estas incógnitas para determinar las otras tres (usualmente a_2).
- Debido a que podemos elegir un número infinito de valores para a_2, hay un número infinito de métodos RK de segundo orden

Método de Heun con un solo corrector ($a_2 = ½$)

Suponiendo que a_2 es ½, puede obtenerse $a_1 = ½$ y $p_1 = q_{11} = 1$. De allí:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right)h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f(x_i + h, y_i + k_1 h)$$

k_1 y k_2 son las pendientes al inicio y al final del intervalo. Resulta el método de Heun.

Método del punto medio ($a_2 = 1$)

Suponiendo que a_2 es 1, puede obtenerse $a_1 = 0$ y $p_1 = q_{11} = 1/2$. De allí:

$$y_{i+1} = y_i + k_2 h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

cuyo resultado es el mismo del método del punto medio.

Método de Ralston ($a_2 = 2/3$)

Suponiendo que a_2 es $2/3$, puede obtenerse $a_1 = 1/3$ y $p_1 = q_{11} = 3/4$. De allí:

$$y_{i+1} = y_i + \left(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\right)h$$

donde

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k_1 h\right)$$

Métodos de Runge-Kutta de tercer orden

- Para n = 3, se deben dar a priori los valores de dos incógnitas para establecer los parámetros restantes.
- Un resultado común es:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)\,h$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_1 h\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h\right) \end{aligned}$$

Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden

- Es el más popular de los métodos RK.
- La siguiente, es la forma comúnmente usada y se conoce como ***método clásico RK de cuarto orden***:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\,h$$

donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right)
\end{aligned}$$

Métodos de Runge-Kutta de orden superior

Para resultados más exactos, se recomienda el uso de ***RK 5to orden de Butcher:***

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)\,h$$

donde

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{4}h, y_i + \tfrac{1}{4}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{4}h, y_i + \tfrac{1}{8}k_1 h + \tfrac{1}{8}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i - \tfrac{1}{2}k_2 h + k_3 h\right) \\
k_5 &= f\left(x_i + \tfrac{3}{4}h, y_i + \tfrac{3}{16}k_1 h + \tfrac{9}{16}k_4 h\right) \\
k_6 &= f\left(x_i + h, y_i - \tfrac{3}{7}k_1 h + \tfrac{2}{7}k_2 h + \tfrac{12}{7}k_3 h - \tfrac{12}{7}k_4 h + \tfrac{8}{7}k_5 h\right)
\end{aligned}$$

Pseudocódigo para Métodos RK

```
SUB ynew = RK4 (x, y, h)
    CALL k1 = Derivs(x, y)
    ym = y + k1 · h/2 % Euler
    CALL k2 = Derivs(x + h/2, ym)
    ym = y + k2 · h/2 % Euler
    CALL k3 = Derivs(x + h/2, ym)
    ye = y + k3 · h % Euler
    CALL k4 = Derivs(x + h, ye)
    slope = (k1 + 2(k2 + k3) + k4)/6
    ynew = y + slope · h % Euler
    x = x + h
END SUB
```

Sistemas de Ecuaciones

Sistemas de ecuaciones

Muchos problemas prácticos requieren la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas y no de una sola ecuación. Tales sistemas se representan, en general, como:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_1, \ldots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_1, \ldots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_1, \ldots, y_n)$$

Sistemas de Ecuaciones

- Los métodos mencionados, para ecuaciones solas, pueden extenderse al sistema de ecuaciones anterior.

- El procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones consiste en aplicar la técnica simple por ecuación en cada paso, antes de proceder con el siguiente.

Ejemplo

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el método de Euler, suponiendo que en x=0, y_1=4 y y_2=6. Integre hasta x=2 con un tamaño de paso igual a 0.5.

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

Ejemplo

Se implementa el método de Euler para cada variable

$$y_1(0.5) = 4 + [-0.5(4)]0.5 = 3$$

$$y_2(0.5) = 6 + [4 - 0.3(6) - 0.1(4)]0.5 = 6.9$$

Procediendo de manera similar se tiene:

x	y_1	y_2
0	*4*	*6*
0.5	*3*	*6.9*
1.0	*2.25*	*7.715*
1.5	*1.6875*	*8.44525*
2.0	*1.265625*	*9.094087*

Ejemplo

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando el método RK4, suponiendo que en x=0, y_1=4 y y_2=6. Integre hasta x=2 con un tamaño de paso igual a 0.5.

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

Ejemplo

Primero hay que hallar todas las pendientes del intervalo:

$$k_{1,1} = f_1(0,4,6) = -0.5(4) = -2$$
$$k_{1,2} = f_2(0,4,6) = 4 - 0.3(6) - 0.1(4) = 1.8$$

Con ellos, se calculan los valores intermedios de y_1 y y_2:

$$y_1^1 = y_1 + k_{1,1}\frac{h}{2} = 4 + (-2)\frac{0.5}{2} = 3.5$$
$$y_2^1 = y_2 + k_{1,2}\frac{h}{2} = 6 + (1.8)\frac{0.5}{2} = 6.45$$

Ejemplo

Repetimos el proceso con los datos obtenidos

$$k_{2,1} = f_1(0.25, 3.5, 6.45) = -1.75$$
$$k_{2,2} = f_2(0.25, 3.5, 6.45) = 1.715$$

Con ellos, se calculan nuevamente los valores intermedios de y_1 y y_2:

$$y_1^2 = y_1 + k_{2,1}\frac{h}{2} = 4 + (-1.75)\frac{0.5}{2} = 3.5625$$
$$y_2^2 = y_2 + k_{2,2}\frac{h}{2} = 6 + (1.715)\frac{0.5}{2} = 6.42875$$

Ejemplo

Repetimos el proceso con los datos obtenidos

$$k_{3,1} = f_1(0.25, 3.5625, 6.42875) = -1.78125$$
$$k_{3,2} = f_2(0.25, 3.5625, 6.42875) = 1.715125$$

Con ellos, se calculan los valores finales de y_1 y y_2:

$$y_1^3 = y_1 + k_{3,1}h = 4 + (-1.78125)(0.5) = 3.109375$$
$$y_2^3 = y_2 + k_{3,2}h = 6 + (1.715125)(0.5) = 6.857563$$

Ejemplo

Con ellos, se calculan las pendientes al final del intervalo

$$k_{4,1} = f_1(0.5, 3.109375, 6.857563) = -1.554688$$
$$k_{4,2} = f_2(0.5, 3.109375, 6.857563) = 1.631794$$

Utilizando todos los valores de k, se calcula el valor de las estimaciones

$$y_1(0.5) = 4 + \tfrac{1}{6}[-2 + 2(-1.75 - 1.78125) - 1.554688]\,0.5 = 3.115234$$
$$y_2(0.5) = 6 + \tfrac{1}{6}[1.8 + 2(1.715 + 1.715125) + 1.631794]\,0.5 = 6.857670$$

Ejemplo

Procediendo de manera similar se tiene:

x	**y_1**	**y_2**
0	*4*	*6*
0.5	*3.115234*	*6.857670*
1.0	*2.426171*	*7.632106*
1.5	*1.889523*	*8.326886*
2.0	*1.471577*	*8.946865*

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales se clasifican también en cuanto a su orden.

- **EDO de primer orden:** la derivada de mayor orden es una primera derivada.
- **EDO de segundo orden:** la mayor derivada es una segunda derivada.
- etc.

Las ecuaciones de orden superior pueden reducirse a un sistema de ecuaciones de primer orden.

EDO de orden superior

Las ecuaciones de orden superior pueden reducirse a un sistema de ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, para la ecuación

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

se puede definir una nueva variable y, donde

$$y = \frac{dx}{dt}$$

Al derivar con respecto a t se obtiene:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

EDO de orden superior

Reemplazando estos resultados en la ecuación diferencial original, se obtiene:

$$m\frac{dy}{dt} + cy + kx = 0$$

Por lo cual, se puede definir el sistema de de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{kx+cy}{m}$$

que se puede resolver como en el ejemplo anterior.

EDO de orden superior

Las ecuaciones de orden superior pueden reducirse a un sistema de ecuaciones de primer orden. Por ejemplo, para la ecuación

$$a\frac{d^3x}{dt^3} + m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$y = \frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$z = \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^3x}{dt^3}$$

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = z; \quad \frac{dz}{dt} = -\frac{mz + cy + kx}{a}$$