Módulo 3

Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Vectores, matrices y ecuaciones lineales.

Vectores

Un vector es un arreglo unidimensional de números. ***Ejemplos:***

$$\text{Vector fila: } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Vector columna: } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Vectores identidad: } e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrices

Una matriz es un arreglo bidimensional de números. ***Ejemplos:***

Matriz cero: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz identidad: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Matrices

Ejemplos:

$$\text{Matriz simétrica: } \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriz triangular superior: } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantes de matrices

Están definidos ***únicamente*** *para matrices cuadradas.* ***Ejemplos:***

$$\boldsymbol{det}\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{bmatrix} = \mathbf{2}\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{vmatrix} - \mathbf{1}\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{vmatrix} + (\mathbf{-1})\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{5} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{2}\,[\mathbf{0} - \mathbf{25}] - \mathbf{1}\,[\mathbf{12} - (\mathbf{-5})] - \mathbf{1}[\mathbf{15} - \mathbf{0}] = \mathbf{-82}$$

Suma y multiplicación de matrices

La suma de dos matrices A y B:

- *Definida sólo si tienen el mismo tamaño.*

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j$$

Multiplicación de dos matrices A(mxn) y B(pxq):

- *El producto C=AB está definido sólo si n=p*

$$C = AB \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} + b_{kj}, \quad \forall i, j$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales se puede representar de diferentes formas:

Forma Estándar

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2.5x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 \qquad\qquad - 6x_3 = 7 \end{cases}$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2.5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Solución de ecuaciones lineales

Ejemplo:

$\begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es una solución a las siguientes ecuaciones:

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$

Solución de ecuaciones lineales

Un conjunto de ecuaciones es ***inconsistente*** *si no existe solución al sistema de ecuaciones.*

El siguiente sistema de ecuaciones es inconsistente.

$$\begin{cases} x - 2y = 6 \\ -0.5x + y = 1 \end{cases}$$

Solución de ecuaciones lineales

Algunos sistemas de ecuaciones pueden tener un ***número infinito de soluciones****:*

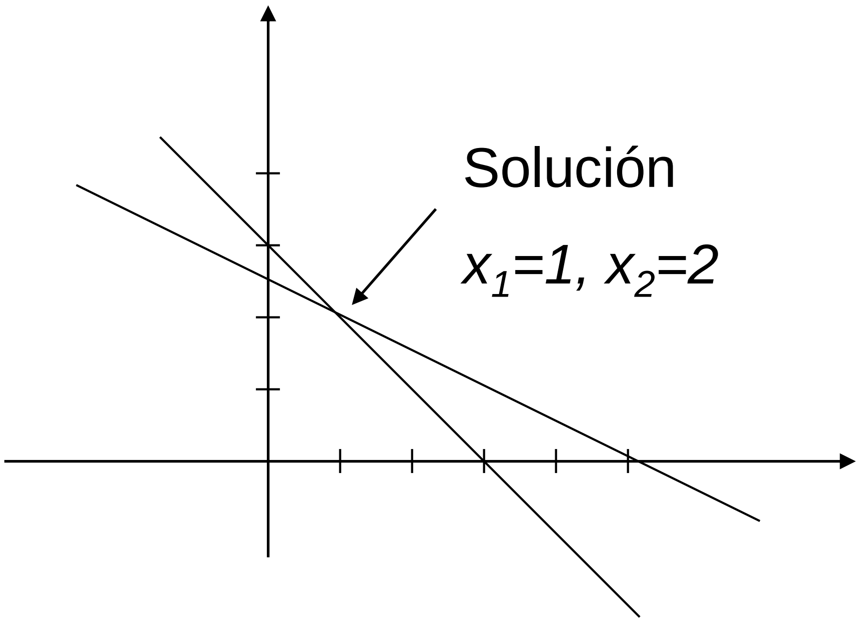
$$x_1 + x_2 = 3$$
$$2x_1 + 4x_2 = 6$$

Tiene un número infinito de soluciones

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0.5(3 - \alpha) \end{bmatrix}$ *es una solución para todo valor de* α*.*

Solución gráfica de sistemas de ecuaciones lineales

$$x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$



Regla de Cramer

Se puede usar la regla de Cramer para resolver el sistema.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

La regla de Cramer no es práctica

La regla de Cramer no es práctica para sistemas grandes:

- *Para resolver sistemas de NxN se requieren $(N+1)(N-1)N!$ multiplicaciones.*
- ***Ejemplo:*** *Para resolver un sistema de 30x30, se necesitan 2.38×10^{35} multiplicaciones.*

Es una alternativa si los determinantes se hallan de forma eficiente.

Eliminación Gaussiana

Eliminación Gaussiana

El método consiste en dos pasos:

- ***Eliminación:*** *El sistema se reduce a una forma triangular superior, a través de una secuencia de operaciones elementales.*
- ***Sustitución:*** *Resolver el sistema empezando por la última variable.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}{}^T & a_{23}{}^T \\ 0 & 0 & a_{33}{}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2{}^T \\ b_3{}^T \end{bmatrix}$$

Operaciones elementales de fila

- *Sumar un múltiplo de una fila a otra.*

- *Multiplicar una fila por una constante diferente de cero.*

Ejemplo: Eliminación

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix}$$

Paso 1: *Eliminar x_1 de las ecuaciones 2,3,4*

Ejemplo: Eliminación

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix}$$

Paso 1: *Eliminar x_1 de las ecuaciones 2,3,4*

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix} \quad F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1$$

Ejemplo: Eliminación

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix}$$

Paso 1: *Eliminar x_1 de las ecuaciones 2,3,4*

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -27 \\ -18 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \leftarrow F_3 - 0.5F_1 \\ F_4 \leftarrow F_4 + F_1 \end{matrix}$$

Ejemplo: Eliminación

Paso 2: *Eliminar x_2 de las ecuaciones 3,4*

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ F_3 \leftarrow F_3 - 3F_2 \\ F_4 \leftarrow F_4 + 0.5F_2 \end{matrix}$$

Paso 3: *Eliminar x_3 de la ecuación 4*

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ F_4 \leftarrow F_4 - 2F_3 \end{matrix}$$

Ejemplo: Eliminación

Resumen de la eliminación

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Sustitución

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Resolver para x_4, luego para x_3, ..., x_1:

$$x_4 = \frac{-3}{-3} = 1, \qquad x_3 = \frac{-9+5}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{-6-2(-2)-2(1)}{-4} = 1, \quad x_1 = \frac{16+2(1)-2(-2)-4(1)}{6} = 3$$

Eliminación

Para eliminar x_1

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij} \leftarrow a_{ij} - (\frac{a_{i1}}{a_{11}})a_{1j} \quad (1 \leq j \leq n) \\ b_i \leftarrow b_i - (\frac{a_{i1}}{a_{11}})b_1 \end{array}\right\} 2 \leq i \leq n$$

Para eliminar x_2

$$\left.\begin{array}{l} a_{ij} \leftarrow a_{ij} - (\frac{a_{i2}}{a_{22}})a_{2j} \quad (2 \leq j \leq n) \\ b_i \leftarrow b_i - (\frac{a_{i2}}{a_{22}})b_2 \end{array}\right\} 3 \leq i \leq n$$

Eliminación

Para eliminar x_k

$$\left.\begin{array}{ll} a_{ij} \leftarrow a_{ij} - (\frac{a_{ik}}{a_{kk}})a_{kj} & (k \leq j \leq n) \\ b_i \leftarrow b_i - (\frac{a_{ik}}{a_{kk}})b_k & \end{array}\right\} (k+1) \leq i \leq n$$

Continuar hasta que x_{n-1} sea eliminado.

Sustitución

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n}x_n - a_{n-2,n-1}x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j}{a_{i,i}}$$

Ejemplo

Resolver utilizando eliminación gaussiana:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Ejemplo

Paso 1: *Eliminar x_1 de las ecuaciones 2,3*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

$Ec1$ no cambia (pivote).

$$Ec2 \leftarrow Ec2 - (\tfrac{2}{1})Ec1$$

$$Ec3 \leftarrow Ec3 - (\tfrac{3}{1})Ec1$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ -x_2 - 4x_3 &= -6 \\ -5x_2 + 7x_3 &= -17 \end{aligned}$$

Ejemplo

Paso 2: *Eliminar x_2 de la ecuación 3*

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\
-x_2 - 4x_3 &= -6 \\
-5x_2 - 7x_3 &= -17
\end{aligned}
$$

$Ec1$ no cambia.

$Ec2$ no cambia (pivote).

$$Ec3 \leftarrow Ec3 - \left(\frac{-5}{-1}\right)Ec2$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\
\qquad -x_2 - 4x_3 = -6 \\
\qquad\qquad 13x_3 = 13
\end{cases}
$$

Ejemplo

Sustitución:

$$x_3 = \frac{b_3}{a_{3,3}} = \frac{13}{13} = 1$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{2,3}x_3}{a_{2,2}} = \frac{-6+4x_3}{-1} = 2$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{1,2}x_2 - a_{1,3}x_3}{a_{1,1}} = \frac{8-2x_2-3x_3}{a_{1,1}} = 1$$

$$\text{La solución es: } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinante

Las operaciones entre filas no afectan el determinante.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Operaciones entre filas}} A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A') = -13$$

¿Cuántas soluciones tiene un Sistema de Ecuaciones AX=B?

Única

det(A)≠0

La matriz reducida no tiene filas de ceros.

Ninguna

det(A)=0

La matriz reducida tiene una o más filas de ceros que corresponden a elementos diferentes de cero en B.

Múltiples

det(A)=0

La matriz reducida tiene una o más filas de ceros que corresponden a elementos iguales a cero en B.

Ejemplos

Única

det(A)≠0

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Solución: $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

Ninguna

det(A)=0

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

No hay solución

$0 = -1$ ¡Imposible!

Múltiples

det(A)=0

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Infinitas soluciones:

$$X = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 - 0.5\alpha \end{bmatrix}$$

Pseudo-código para la eliminación

```
Para k = 1 hasta n-1
  Para i = k+1 hasta n
       factor = a[i,k] / a[k,k]
       Para j = k+1 hasta n
              a[i,j] = a[i,j] - factor * a[k,j]
       Fin Para
       b[i] = b[i] - factor * b[k]
  Fin Para
Fin Para
```

Pseudo-código para la sustitución

```
xn = bn / an,n
Para i = n-1 hasta 1
  sum = bi
  Para j = i+1 hasta n
       sum = sum – ai,j * xjj
  Fin Para
  xi = sum / ai,i
Fin Para
```

Problemas con la eliminación gaussiana

La eliminación gaussiana puede fallar en casos muy simples:

- *El pivote es cero.*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- *El pivote es muy pequeño, generando errores serios de cálculo.*

$$\begin{bmatrix} 10^{-10} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En estos casos usamos el pivoteo parcial escalado.

Ejemplo

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Vector de escala: *Encontrar el elemento de mayor magnitud en cada fila.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Vector de escala: *Encontrar el elemento de mayor magnitud en cada fila.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Vector de escala: *Encontrar el elemento de mayor magnitud en cada fila.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vector escala: $S = [2 \quad 4 \quad 8 \quad 5]$

Ejemplo

Vector de escala: *Encontrar el elemento de mayor magnitud en cada fila.*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vector escala: $S = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

Vector índices: $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

¿Por qué usar el vector de índices?

- *El vector de índices se usa porque es mucho más fácil intercambiar un solo elemento índice en comparación con el intercambio de los valores de una fila completa.*

- *En problemas con N muy grande, el intercambio del contenido de las filas puede no ser práctico.*

Ejemplo: Selección de la ecuación pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} S = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \end{bmatrix} \\ L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ejemplo: Selección de la ecuación pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} S = [2 \quad 4 \quad 8 \quad 5] \\ L = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \end{cases}$$

Usamos un vector auxiliar

$$R = \left\{ \frac{|a_{l_i,1}|}{S_{l_i}}, i = 1,2,3,4 \right\} = \left\{ \frac{|1|}{2}, \frac{|3|}{4}, \frac{|5|}{8}, \frac{|4|}{5} \right\}$$

Ejemplo: Selección de la ecuación pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} S = [2 \quad 4 \quad 8 \quad 5] \\ L = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4] \end{cases}$$

Usamos un vector auxiliar

$$R = \left\{ \frac{|a_{l_i,1}|}{S_{l_i}}, i = 1,2,3,4 \right\} = \left\{ \frac{|1|}{2}, \frac{|3|}{4}, \frac{|5|}{8}, \frac{|4|}{5} \right\}$$

Ejemplo: Selección de la ecuación pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} S = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \end{bmatrix} \\ L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Usamos un vector auxiliar

$$R = \left\{ \frac{\left|a_{l_i,1}\right|}{S_{l_i}}, i = 1,2,3,4 \right\} = \left\{ \frac{|1|}{2}, \frac{|3|}{4}, \frac{|5|}{8}, \color{red}{\frac{|4|}{5}} \right\}$$

La ecuación 4 es la primera ecuación pivote. Intercambiar l_4 y l_1

$$L = \begin{bmatrix} \color{red}{4} & 2 & 3 & \color{red}{1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Paso 1: *Eliminar x_1.*

Actualizar A y B

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ \color{red}{4} & \color{red}{2} & \color{red}{5} & \color{red}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \color{red}{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -2.75 & 1.75 \\ 0 & 5.5 & -0.25 & -0.75 \\ \color{red}{4} & \color{red}{2} & \color{red}{5} & \color{red}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \\ 2.25 \\ \color{red}{-1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Selección de la segunda ecuación pivote.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -2.75 & 1.75 \\ 0 & 5.5 & -0.25 & -0.75 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \\ 2.25 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} S = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \end{bmatrix} \\ L = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$R = \left\{ \frac{|a_{l_i,2}|}{S_{l_i}}, i = 2, 3, 4 \right\} = \left\{ \frac{|0.5|}{4}, \frac{|5.5|}{8}, \frac{|1.5|}{2} \right\} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Paso 2: *Eliminar x_2.*

Actualizar A y B

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -2.75 & 1.75 \\ 0 & 5.5 & -0.25 & -0.75 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \\ 2.25 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & -2.5 & 1.8333 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1.6667 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.1667 \\ 6.8333 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Paso 3: *Eliminar* x_3. $S = \{2{,}4{,}8{,}5\}$ $L = \{4{,}1{,}3{,}2\}$

$$R = \left\{\frac{|a_{l_i,3}|}{s_{l_i}}, i = 3{,}4\right\} = \left\{\frac{|0{,}25|}{8}, \frac{|2{,}5|}{4}\right\} \Rightarrow L = \{4 \quad 1 \quad 2 \quad 3\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & -2.5 & 1.8333 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1.6667 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.1667 \\ 6.8333 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & -2.5 & 1.8333 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.1667 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & -2.5 & 1.8333 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.1667 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Sustitución:

$$x_4 = \frac{b_3}{a_{3,4}} = \frac{9}{2} = 4.5, \quad x_3 = \frac{b_2 - a_{2,4}x_4}{a_{2,3}} = \frac{2.1667 - 1.8333x_4}{-2.5} = 2.4327$$

$$x_2 = \frac{b_1 - a_{1,4}x_4 - a_{1,3}x_3}{a_{1,2}} = \frac{1.25 - 0.25x_4 - 0.75x_3}{-1.5} = 1.1333$$

$$x_1 = \frac{b_4 - a_{4,4}x_4 - a_{4,3}x_3 - a_{4,2}x_2}{a_{4,1}} = \frac{-1 - 3x_4 - 5x_3 - 2x_2}{4} = -7.233$$

¿Cómo sabemos si una solución es buena o no?

*Dado **AX = B***

X es una solución si AX-B = 0

*Sea r, el vector residual, **r = AX-B***

Debido al error de redondeo, r puede no ser cero

La solución es aceptable si: $\max_i |r_i| \leq \varepsilon$

¿Qué tan buena es la solución?

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{Solución: } \begin{bmatrix} -7.233 \\ 1.1333 \\ 2.4327 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Residuos: } R = \begin{bmatrix} -0.0009 \\ 0.0003 \\ -0.0024 \\ -0.0019 \end{bmatrix}$$

Observaciones

- *Se utiliza el vector de índice para evitar la necesidad de mover las filas, lo cual puede no ser práctico para problemas grandes.*
- *Si ordenamos el sistema en el orden del último valor del vector índice, tenemos una forma triangular.*
- *El vector de escala se forma tomando el máximo en magnitud en cada fila.*
- *El vector de escala no cambia.*
- *Las matrices originales A y B se utilizan para verificar los residuos.*

Método Gauss-Jordan

- *El método reduce el sistema general de ecuaciones* ***AX=B*** *a uno de la forma* ***IX=B' => X=B'*** *donde* ***I*** *es una matriz de identidad.*
- *Solo se realiza la eliminación hacia adelante y no se necesita sustitución hacia atrás.*
- *Tiene los mismos problemas que la eliminación ingenua de Gauss y puede modificarse para hacer pivoteo parcial escalado.*
- *Lleva un 50% más de tiempo que el método gaussiano.*

Ejemplo: Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Paso 1: *Eliminar x_1 de las ecuaciones 2, 3.*

$$\left.\begin{array}{c} Ec1 \leftarrow Ec1/2 \\ Ec2 \leftarrow Ec2 - (\frac{4}{1})Ec1 \\ Ec3 \leftarrow Ec3 - (\frac{2}{1})Ec1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Paso 2: *Eliminar x_2 de las ecuaciones 1, 3.*

$$\left.\begin{array}{c} Ec2 \leftarrow Ec2/6 \\ Ec1 \leftarrow Ec1 - (\frac{-1}{1})Ec2 \\ Ec3 \leftarrow Ec3 - (\frac{0}{1})Ec2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1667 \\ 0 & 1 & -0.8333 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1667 \\ 1.1667 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.1667 \\ 0 & 1 & -0.8333 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1667 \\ 1.1667 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Paso 3: *Eliminar x_3 de las ecuaciones 1, 2.*

$$\left.\begin{array}{c} Ec3 \leftarrow Ec3/2 \\ Ec1 \leftarrow Ec1 - (\frac{0.1667}{1})Ec3 \\ Ec2 \leftarrow Ec2 - (\frac{-0.8333}{1})Ec3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Gauss-Jordan

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Es transformado a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Solución:} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$