Universidad Industrial de Santander

Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones

Métodos Numéricos

Laboratorio: Interpolación

1. Introducción

Con frecuencia tendrá la oportunidad de estimar valores intermedios entre puntos de datos precisos. El método más común utilizado para este propósito es la interpolación polinómica. La fórmula general para un polinomio de orden n puede escribirse como

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{1}$$

Para $n+1$ puntos de datos, hay un único polinomio de orden n que pasa por todos los puntos. Por ejemplo, solo hay una línea recta (es decir, un polinomio de primer orden) que conecta dos puntos. Del mismo modo, sólo una parábola conecta un conjunto de tres puntos. La interpolación polinómica consiste en determinar el único polinomio de orden n que se ajusta a $n+1$ puntos de datos. Este polinomio proporciona una fórmula para calcular valores intermedios. Antes de continuar, debemos tener en cuenta que MATLAB representa los coeficientes polinómicos de manera diferente a la ecuación (1). En lugar de usar potencias crecientes de x, utiliza potencias decrecientes como en

$$f(x) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \ldots + p_n x + \ldots + p_{n+1} \tag{2}$$

Determinación de coeficientes polinomiales

Una forma sencilla de calcular los coeficientes de la ecuación (2) se basa en el hecho de que se requieren $n+1$ puntos de datos para determinar los $n+1$ coeficientes, como en el siguiente ejemplo. Esto nos permite generar $n+1$ ecuaciones algebraicas lineales que podemos resolver simultáneamente para los coeficientes.

Determinación de coeficientes polinomiales con ecuaciones simultáneas

Supongamos que queremos determinar los coeficientes de la parábola $f(x) = p_1 x^2 + p_2 x + p_3$, que pasa por los siguientes puntos

$$x_1 = 300 \qquad f(x_1) = 0.616$$

$$x_2 = 400 \qquad f(x_2) = 0.525$$

$$x_3 = 500 \qquad f(x_3) = 0.457$$

Cada uno de estos pares se puede sustituir en la ecuación (2) para obtener un sistema de tres ecuaciones

$$90000p_1 + 300p_2 + p_3 = 0.616$$
$$160000p_1 + 400p_2 + p_3 = 0.525$$
$$250000p_1 + 500p_2 + p_3 = 0.457$$

Por lo tanto, el problema se reduce a la resolución de tres ecuaciones algebraicas lineales simultáneas para los tres coeficientes desconocidos. Se puede usar un sencillo script de MATLAB para obtener la solución:

```
>> format long
>> A = [90000 300 1; 160000 400 1; 250000 500 1];
>> b = [0.616; 0.525; 0.457];
>> p = A\b

p =   0.0000011500000
     -0.0017150000000
      1.0270000000000
```

Así, la parábola que pasa exactamente a través de los tres puntos es

$$f(x) = 0.00000115x^2 - 0.001715x + 1.027$$

Este polinomio provee un medio para determinar puntos intermedios. Por ejemplo, el valor de $f(x)$ en $x=350$:

$$f(350) = 0.00000115(350)^2 - 0.001715(350) + 1.027 = 0.567625$$

Funciones de MATLAB: *polyfit* y *polyval*

La función ***polyfit*** se puede usar para realizar una regresión polinómica. En tales aplicaciones, el número de puntos de datos es mayor que el número de coeficientes que se estiman. En consecuencia, la línea de ajuste de mínimos cuadrados no pasa necesariamente por ninguno de los puntos, sino que sigue la tendencia general de los datos.

Para el caso donde el número de puntos de datos es igual al número de coeficientes, ***polyfit*** realiza la interpolación. Es decir, devuelve los coeficientes del polinomio que pasan directamente a través de los puntos de datos. Usando el ejemplo anterior,

```
>> format long
>> X = [300 400 500];
>> Y = [0.616 0.525 0.457];
>> p = polyfit(X,Y,2)
```

```
p =
0.00000115000000 -0.00171500000000 1.02700000000000
```

Es posible utilizar la función **polyval** para realizar una interpolación, así:

```
>> d = polyval(p,350)
d =
0.56762500000000
```

2. Diferencia dividida de Newton

El análisis anterior se puede generalizar para ajustar un polinomio de orden *(n-1)* a *n* puntos de datos. El polinomio de orden *(n-1)* es

$$f_{n-1}(x) = b_1 + b_2(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

Para un polinomio de orden *(n − 1)*, se requieren *n* puntos de datos: $[x1, f(x1)], [x2, f(x2)], \ldots, [xn, f(xn)]$. Utilizamos estos puntos de datos y las siguientes ecuaciones para evaluar los coeficientes:

$$\begin{gathered} b_1 = f(x_1) \\ b_2 = f[x_2, x_1] \\ b_3 = f[x_3, x_2, x_1] \\ \vdots \\ b_2 = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1] \end{gathered}$$

donde las evaluaciones de funciones entre paréntesis cuadrados son diferencias finitas divididas. Por ejemplo, la primera diferencia dividida finita se representa generalmente como

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(\mathrm{x}_i) - f(x_j)}{\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_j}$$

La segunda diferencia dividida finita, que representa la diferencia de dos primeras diferencias divididas, se expresa generalmente como

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, \mathrm{x}_j] - f[x_j, \mathrm{x}_k]}{\mathrm{x}_i - \mathrm{x}_k}$$

Del mismo modo, la enésima diferencia dividida finita es

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_1] = \frac{f[\mathrm{x}_n, \mathrm{x}_{n-1}, \ldots, x_2] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots x_1]}{x_n - x_1}$$

Estas diferencias se pueden usar para evaluar los coeficientes y, en consecuencia, para obtener la forma general del polinomio de interpolación de Newton:

$$f_{n-1}(x) = f(x_1) + f[x_2, x_1](x - x_1) + \cdots + f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1](x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1})$$

Ejercicio

Escriba un código que permita:

- Calcular las diferencias divididas finitas.
- Interpolar, en base a lo anterior, el valor en una variable dada.

3. Interpolación de Lagrange

Supongamos que formulamos un polinomio de interpolación lineal como el promedio ponderado de los dos valores que estamos conectando por una línea recta:

$$\mathrm{f}(x) = L_1 f(x_1) + L_2 f(x_2)$$

donde las L son los coeficientes de ponderación. Es lógico pensar que el primer coeficiente de ponderación sea la línea recta que es igual a 1 en x_1 y 0 en x_2, esto es:

$$L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$$

Del mismo modo, el segundo coeficiente sería la línea recta que es igual a 1 en x_2 y 0 en x_1, esto

$$L_1 = \frac{x - \mathrm{x}_1}{\mathrm{x}_2 - x_1}$$

Sustituyendo estos coeficientes en la ecuación anterior se obtiene la línea recta que conecta los puntos:

$$f_1(x) = \frac{x - x_2}{\mathrm{x}_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

donde la nomenclatura $f_1(x)$ designa que este es un polinomio de primer orden. La ecuación anterior se conoce como el polinomio de interpolación lineal de Lagrange. La misma estrategia se puede emplear para ajustar una parábola a través de tres puntos. Para este caso, se usarían tres parábolas con cada una pasando por uno de los puntos e igualando cero en las otras dos. Su suma representaría la parábola única que conecta los tres puntos. Tal polinomio de interpolación de Lagrange de segundo orden se puede escribir como

$$f_2(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3)$$

Observe cómo el primer término es igual a $f(x_1)$ en x_1 y es igual a cero en x_2 y x_3. Los otros términos funcionan de manera similar. Tanto las versiones de primer y segundo orden como los polinomios de Lagrange de orden superior se pueden representar de forma concisa como

$$f_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i f(x_i)$$

donde

$$\mathrm{L}_i = \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

donde n = el número de puntos de datos y $\prod$ designa el "producto de".

Ejercicio

Escriba un código que permita interpolar, en base a lo anterior, el valor en una variable dada.

4. Taller

1. Use el polinomio de interpolación de Newton para determinar y en $x = 8$ con la mejor exactitud posible.

x	0	1	2	5.5	11	13	16	18
y	0.5	3.134	5.3	9.9	10.2	9.35	7.2	6.2

2. Dados los datos

x	1	2	2.5	3	4	5
y	0	5	6.5	7	3	1

   a. Calcule $f(3.4)$ utilizando el polinomio de interpolación de Newton
   b. Repita el cálculo utilizando el polinomio de Lagrange.

3. La aceleración debida a la gravedad a determinada altura y por encima de la superficie de la tierra, está dada por:

y (m)	0	30000	60000	90000	120000
g (m/s²)	9.8100	9.7487	9.6879	9.6278	9.5682

   a. Calcule g en $y = 55000\ m$ utilizando el polinomio de interpolación de Newton
   b. Repita el cálculo utilizando el polinomio de Lagrange.