Aproximación de Funciones

Módulo 4

Interpolación

Introducción

La interpolación se utiliza para proporcionar una estimación al valor de una función tabulada, en valores que no están disponibles en la tabla.

- **Ejemplo:** Cuál es el valor de *sin(0.15)*?

x	*sin(x)*
0	*0.0000*
0.1	*0.0998*
0.2	*0.1987*
0.3	*0.2955*
0.4	*0.3894*

Usando **Interpolación lineal:** *sin(0.15)* ≈ ***0.1493***

Valor real (4 cifras decimales) *sin(0.15)* = *0.1494*

El problema de interpolación

Dado un conjunto de $n+1$ puntos,

$$\big(x_0, f(x_0)\big), \big(x_1, f(x_1)\big), \big(x_2, f(x_2)\big), \dots, \big(x_n, f(x_n)\big)$$

Encontrar un polinomio $f_n(x)$ de $n-ésimo$ orden que pasa por todos los puntos, de forma que:

$$\boxed{f_n(x_i) = f(x_i), \qquad para\ i = 0,1,2,\dots,n}$$

Ejemplo

Un experimento se usa para determinar la viscosidad de un líquido como una función de la temperatura. Se genera la siguiente tabla:

Problema: Estimar la viscosidad cuando la temperatura es de 8 grados.

Temperatura (grados)	*Viscosidad*
0	*1.792*
5	*1.519*
10	*1.308*
15	*1.140*

Problema de interpolación

Encontrar un polinomio que se ajuste exactamente a los puntos de datos.

$$V(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$$

$$V_i = V(T_i)$$

V	: Viscosidad
T	: Temperatura
a_k	: Coeficientes del polinomio

Interpolación Lineal: *V(T)= 1.73 – 0.0422 T*

V(8)= 1.3924

Existencia y unicidad

Dado un conjunto de $n+1$ puntos:

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots\ (x_n, f(x_n))$$

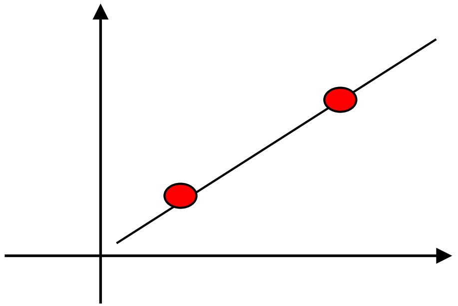
Suposición: $x_0, x_1, \dots, x_n$ son distintos

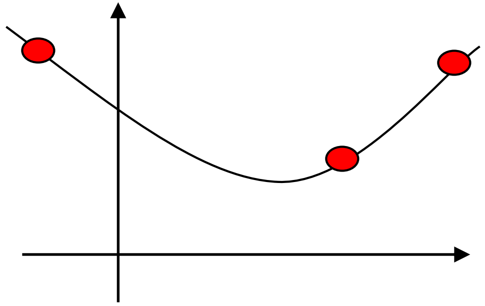
Teorema:

Hay un único polinomio $\boldsymbol{f_n(x)}$ de orden $\leq n$ tal que:

$$f_n(x_i) = f(x_i), \qquad para\ \ i = 0,1,2,\dots,n$$

Ejemplos de interpolación polinómica





Interpolación Lineal

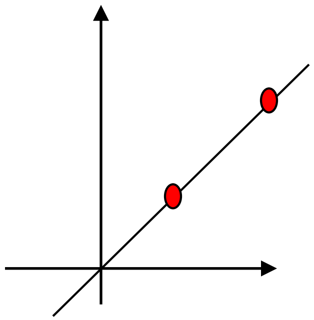
Dados dos puntos cualquiera, existe un polinomio de orden ≤ 1 que pasa por los dos puntos.

Interpolación Cuadrática

Dados tres puntos cualquiera, existe un polinomio de orden ≤ 2 que pasa por los tres puntos.

Interpolación lineal

Dados dos puntos, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$

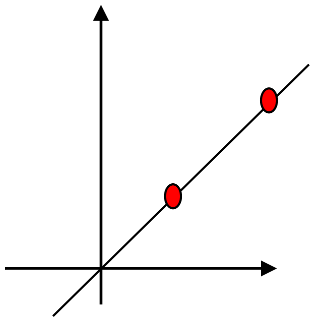


La línea que interpola los dos puntos es:

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Interpolación lineal

Dados dos puntos, $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$



La línea que interpola los dos puntos es:

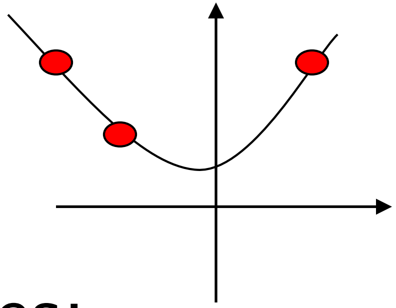
$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Ejemplo:

Encuentre el polinomio que interpola $(1,2)$ y $(2,4)$.

$$f_1(x) = 2 + \frac{4-2}{2-1}(x-1) = 2 + 2(x-1) = 2x$$

Interpolación Cuadrática



Dados tres puntos cualquiera:
$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$.

El polinomio que interpola los tres puntos es:
$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

donde: $b_0 = f(x_0)$; $b_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$;

$$b_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

Interpolación general de orden n

Dados $n+1$ puntos cualquiera: $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$

El polinomio que interpola todos los puntos es:

$$\boxed{\begin{aligned} f_n(x) &= b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \\ &\ldots + b_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned}}$$

$$donde:$$

$$\begin{aligned} &b_0 = f(x_0) \\ &b_1 = f[x_0, x_1] \\ &\vdots \\ &b_n = f[\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

Diferencias divididas

$f[x_k] = f(x_k)$ (D.D. Orden 0)

$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$ (D.D. Orden 1)

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$ (D.D. Orden 2)

$\vdots$

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Tabla de diferencias divididas

Un polinomio de interpolación de orden n, se puede escribir en función de las diferencias divididas:

i	x_i	$f(x_i)$	Primero	Segundo	Tercero
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left\{ F[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right\}$$

Tabla de diferencias divididas

x	*F[ ]*	*F[,]*	*F[, ,]*
0	*-5*	*2*	*-4*
1	*-3*	*6*	
-1	*-15*		

x_i	$f(x_i)$
0	-5
1	-3
-1	-15

Las entradas de la tabla de diferencias divididas se obtienen de la tabla de datos mediante operaciones simples.

Tabla de diferencias divididas

x	F[ ]	F[,]	F[, ,]
0	-5	2	-4
1	-3	6	
-1	-15		

x_i	$f(x_i)$
0	-5
1	-3
-1	-15

Las dos primeras columnas de la tabla son las columnas de datos.

Tercera columna: diferencias de primer orden.

Cuarta columna: diferencias de segundo orden.

Tabla de diferencias divididas

x	F[ ]	F[,]	F[, ,]
0	-5	2	
1	-3		
-1	-15		

$$\frac{(-3)-(-5)}{1-0} = 2$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$$

x_i	y_i
0	-5
1	-3
-1	-15

Tabla de diferencias divididas

x	F[ ]	F[,]	F[, ,]
0	-5	2	
1	-3	6	
-1	-15		

$$\frac{(-15)-(-3)}{-1-1} = 6$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$$

x_i	y_i
0	-5
1	-3
-1	-15

Tabla de diferencias divididas

x	F[ ]	F[,]	F[, ,]
0	*-5*	*2*	*-4*
1	*-3*	*6*	
-1	*-15*		

x_i	y_i
0	-5
1	-3
-1	-15

$$\frac{6-2}{-1-0} = -4$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

19

Tabla de diferencias divididas

x	F[ ]	F[,]	F[, ,]
0	-5	2	-4
1	-3	6	
-1	-15		

x_i	y_i
0	-5
1	-3
-1	-15

$$f_2(x) = -5 + 2(x-0) - 4(x-0)(x-1)$$

$$f_2(x) = F[x_0] + F[x_0 . x_1](x-x_0) + F[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

Dos ejemplos

Obtenga los polinomios de interpolación para los dos ejemplos:

x	y
1	0
2	3
3	8

x	y
2	3
1	0
3	8

¿Qué se puede observar?

Dos ejemplos

x	y		
1	0	3	1
2	3	5	
3	8		

$$P_2(x) = 0 + 3(x-1) + 1(x-1)(x-2)$$
$$= x^2 - 1$$

x	y		
2	3	3	1
1	0	4	
3	8		

$$P_2(x) = 3 + 3(x-2) + 1(x-2)(x-1)$$
$$= x^2 - 1$$

El orden de los puntos no debería afectar al polinomio interpolador.

Propiedades de las diferencias divididas

Ordenar los puntos no debería afectar la diferencia dividida:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_1, x_0]$$

Ejemplo

Encuentra un polinomio para interpolar los datos.

x	$f(x)$
2	3
4	5
5	1
6	6
7	9

Ejemplo

x	DD0: f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	DD3: f[, , ,]	DD4: f[, , , ,]
2	3	5-3 / 4-2 = 1			
4	5				
5	1				
6	6				
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1			
4	5	1-5 / 5-4 = -4			
5	1				
6	6				
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1			
4	5	-4			
5	1	6-1 / 6-5			
6	6				
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1			
4	5	-4			
5	1	5			
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	(-4-1)/(5-2)=-5/3		
4	5	-4			
5	1	5			
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667		
4	5	-4	(5-(-4))/6-4=9/2		
5	1	5			
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667		
4	5	-4	4.5		
5	1	5	3-5/7-5 = -1		
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667	1.5417	
4	5	-4	4.5		
5	1	5	-1		
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667	1.5417	
4	5	-4	4.5	-1.8333	
5	1	5	-1		
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	DD1: f[,]	DD2: f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667	1.5417	-0.6750
4	5	-4	4.5	-1.8333	
5	1	5	-1		
6	6	3			
7	9				

Ejemplo

x	f(x)	f[,]	f[, ,]	f[, , ,]	f[, , , ,]
2	3	1	-1.6667	1.5417	-0.6750
4	5	-4	4.5	-1.8333	
5	1	5	-1		
6	6	3			
7	9				

$$f_4 = 3 + 1(x-2) - 1.6667(x-2)(x-4) + 1.5417(x-2)(x-4)(x-5) - 0.6750(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)$$

Error en la interpolación polinómica

- Si se conoce el valor verdadero,

$$\varepsilon_a = |f(x) - f_n(x)|$$

- Si no se conoce el valor real, se puede utilizar un punto $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ adicional,

$$\varepsilon_a \approx |f[x_{n+1}, x_n, \ldots, x_0](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)|$$

Interpolación de Lagrange

El problema de interpolación

Dado un conjunto de $n+1$ puntos,

$$\big(x_0, f(x_0)\big), \big(x_0, f(x_0)\big), \dots, (x_n, f(x_n))$$

Encontrar un polinomio $f_n(x)$ de $n - ésimo$ orden que pasa por todos los puntos, de forma que:

$$\boxed{f_n(x_i) = f(x_i) \quad para\ i = 0,1,2,\dots,n}$$

Interpolación de Lagrange

Problema:

Dados

x_i	x_0	x_1	....	x_n
y_i	y_0	y_1	....	y_n

Encontrar el polinomio $f_n(x)$ de mínimo orden, tal que:

$$f_n(x_i) = f(x_i) \quad para\; i = 0,1,\ldots,n$$

Fórmula de interpolación de Lagrange:

$$\boxed{\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \\ L_i(x) &= \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \end{aligned}}$$

Ejemplo de interpolación de Lagrange

x	1/3	1/4	1
y	2	-1	7

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \frac{(x - x_2)}{(x_0 - x_2)} = \frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)} \frac{(x - 1)}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)} = -18\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)} \frac{(x - 1)}{\left(\frac{1}{4} - 1\right)} = 16\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$$

Ejemplo de interpolación de Lagrange

x	1/3	1/4	1
y	2	-1	7

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_2 - x_0)}\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = 2\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$P_2(x) = 2\left\{-18\left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 1)\right\} - 1\left\{16\left(\mathrm{x} - \frac{1}{3}\right)(\mathrm{x} - 1)\right\}$$
$$+7\left\{2\left(\mathrm{x} - \frac{1}{3}\right)\left(\mathrm{x} - \frac{1}{4}\right)\right\}$$

Ejemplo

Encuentre un polinomio para interpolar:

Tanto el método de interpolación de Newton como el método de interpolación de Lagrange deben dar la misma respuesta.

x	y
0	1
1	3
2	2
3	5
4	4

Método de interpolación de Newton

x_i	y_i	*DD1*	*DD2*	*DD3*	*DD4*
0	*1*	*2*	*-3/2*	*7/6*	*-5/8*
1	*3*	*-1*	*2*	*-4/3*	
2	*2*	*3*	*-2*		
3	*5*	*-1*			
4	*4*				

Interpolación polinómica

$$f_4(x) = 1 + 2(x) - \tfrac{3}{2}x(x-1) + \tfrac{7}{6}x(x-1)(x-2)$$
$$- \tfrac{5}{8}x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$f_4(x) = 1 + \frac{115}{12}x - \frac{95}{8}x^2 + \frac{59}{12}x^3 - \frac{5}{8}x^4$$

Interpolación con Pol. de Lagrange

$$f_4(x) = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)L_i = L_0 + 3L_1 + 2L_2 + 5L_3 + 4L_4$$

$$L_0 = \frac{(x-1)}{(0-1)}\frac{(x-2)}{(0-2)}\frac{(x-3)}{(0-3)}\frac{(x-4)}{(0-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{24}$$

$$L_1 = \frac{(x-0)}{(1-0)}\frac{(x-2)}{(1-2)}\frac{(x-3)}{(1-3)}\frac{(x-4)}{(1-4)} = \frac{x(x-2)(x-3)(x-4)}{-6}$$

$$L_2 = \frac{(x-0)}{(2-0)}\frac{(x-1)}{(2-1)}\frac{(x-3)}{(2-3)}\frac{(x-4)}{(2-4)} = \frac{x(x-1)(x-3)(x-4)}{4}$$

$$L_3 = \frac{(x-0)}{(3-0)}\frac{(x-1)}{(3-1)}\frac{(x-2)}{(3-2)}\frac{(x-4)}{(3-4)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-4)}{-6}$$

$$L_4 = \frac{(x-0)}{(4-0)}\frac{(x-1)}{(4-1)}\frac{(x-2)}{(4-2)}\frac{(x-3)}{(4-3)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

Interpolación Inversa

Interpolación inversa

Problema: Dada una tabla de valores, encontrar el valor de x tal que: $f(x) = yk$, donde y_k es conocido.

$\boldsymbol{x_i}$	x_0	x_1	....	x_n
$\boldsymbol{y_i}$	y_0	y_1	....	y_n

<u>Enfoque:</u> Use la interpolación polinómica para obtener $f_n(x)$ para interpolar los datos, luego use el método de **Newton** para encontrar una solución para x.

$$f_n(x) = y_k$$

Interpolación inversa

Interpolación inversa:

1. Intercambiar los roles de x, y.
2. Realizar la interpolación polinomial sobre la nueva tabla.
3. Evaluar.

x_i	x_0	x_1	....	x_n
y_i	y_0	y_1	....	y_n

y_i	y_0	y_1	....	y_n
x_i	x_0	x_1	....	x_n

$$x = f_n(y_k)$$

Interpolación inversa

Pregunta:

¿Qué limitaciones tiene la interpolación inversa?

- La función original debe tener una inversa.
- $y_1, y_2, \ldots, y_n$ deben ser distintos.

Ejemplo

Problema: Dada la tabla, encuentre x de tal manera que $f(x) = 2.5$.

x	*1*	*2*	*3*
y	*3.2*	*2.0*	*1.6*

Ejemplo

Problema: Dada la tabla, encuentre x de tal manera que $f(x) = 2.5$.

x	*1*	*2*	*3*
y	*3.2*	*2.0*	*1.6*

3.2	*1*		
2.0	*2*		
1.6	*3*		

Ejemplo

Problema: Dada la tabla, encuentre x de tal manera que $f(x) = 2.5$.

x	*1*	*2*	*3*
y	*3.2*	*2.0*	*1.6*

3.2	*1*	*-0.8333*	*1.0417*
2.0	*2*	*-2.5*	
1.6	*3*		

Ejemplo

Problema: Dada la tabla, encuentre x de tal manera que $f(x) = 2.5$.

x	*1*	*2*	*3*
y	*3.2*	*2.0*	*1.6*

3.2	*1*	*-0.8333*	*1.0417*
2.0	*2*	*-2.5*	
1.6	*3*		

$$x = f_2(y) = 1 - 0.8333(y - 3.2) + 1.0417(y - 3.2)(y - 2)$$
$$x = f_2(2.5) = 1 - 0.8333(-0.7) + 1.0417(-0.7)(0.5) = 1.2187$$

Algoritmos para el polinomio de interpolación

Algoritmo para la interpolación de Newton (Pseudocódigo)

```
(yint, Ea) = NewtInt (x, y, n, xint)
LOCAL fdd_{n,n}
DOFOR i = 0, n
    fdd_{i,i} = y_i ;
END DO
DOFOR j = 1, n
    DOFOR i = 0, n – j
        fdd_{i,j} = (fdd_{i+1,j–1} – fdd_{i,j–1})/(x_{i+j} – x_i);
    END DO
END DO
xterm = 1;
yint_0 = fdd_{0,0} ;

DOFOR order = 1, n
    xterm=xterm*(x_int – x_{order–1})
    yint2 = yint_{order–1} + fdd_{0,order}*xterm
    Ea_{order–1} = yint2 – yint_{order–1}
    yint order = yint2
END DO
```

Ejemplo

Utilice el algoritmo computacional de la diapositiva anterior y la siguiente información para evaluar $f(x) = \ln x$ en $x = 2$:

x	1	4	6	5	3	1.5	2.5	3.5
$f(x)=\ln x$	0	1.3862944	1.7917595	1.6094379	1.0986123	0.4054651	0.9162907	1.2527630

Algoritmo para la interpolación de Lagrange (Pseudocódigo)

```
Lagrng = Lagrng (x, y, n, xint)
sum = 0
DOFOR i = 0, n
    product = y_i
    DOFOR j = 0, n
        IF i ≠ j THEN
            product = product*(xint – x_j)/(x_i – x_j )
        END IF
    END DO
    sum = sum + product
END DO
Lagrng = sum
```

Ejemplo

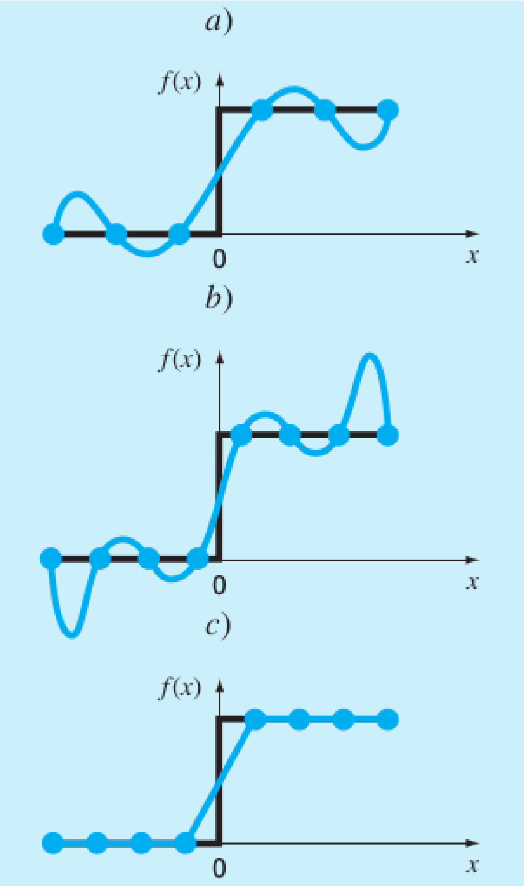
Utilice el algoritmo computacional de la diapositiva anterior y la siguiente información para evaluar $f(x) = \ln x$ en $x = 2$:

x	1	4	6	5	3	1.5	2.5	3.5
$f(x)=\ln x$	0	1.3862944	1.7917595	1.6094379	1.0986123	0.4054651	0.9162907	1.2527630

Interpolación mediante trazadores (Splines)

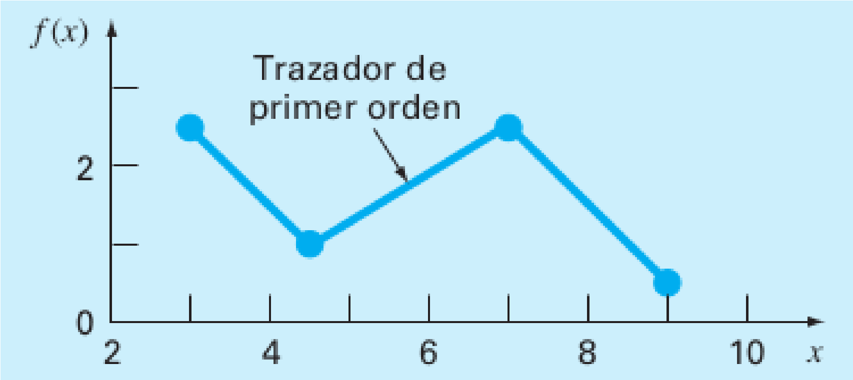
Trazadores

- En lugar de buscar un polinomio de grado n que una n+1 puntos, se buscan varios polinomios de grado inferior para subconjuntos de datos.
- El objetivo es proporcionar una mejor aproximación al comportamiento de las funciones que tienen cambios locales y abruptos.



Trazadores Lineales

La unión más simple entre dos puntos es una línea recta. Se define el conjunto de funciones lineales:



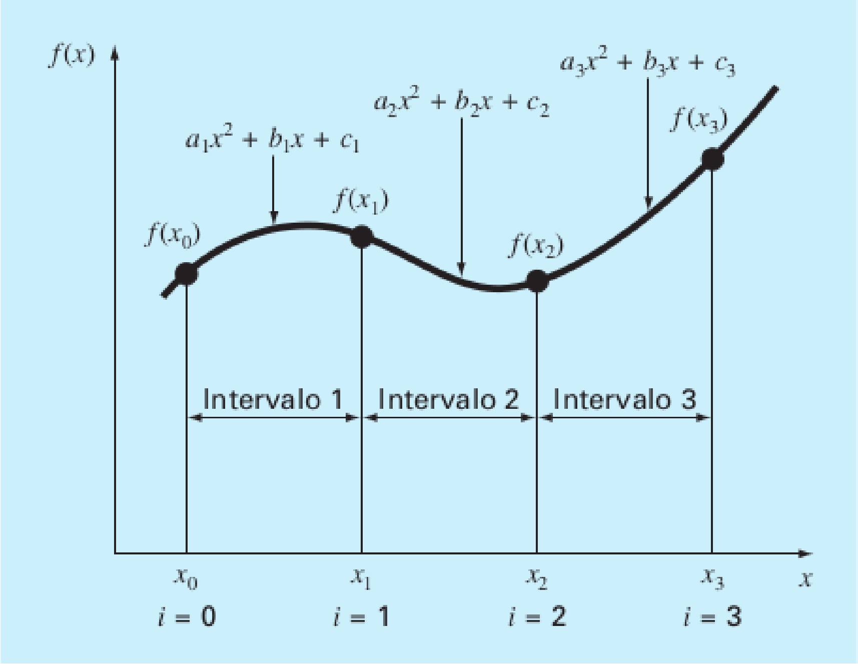
$$
\begin{array}{ll}
f(x) = f(x_0) + m_0(x - x_0) & x_0 \leq x \leq x_1 \\
f(x) = f(x_1) + m_1(x - x_1) & x_1 \leq x \leq x_2 \\
\vdots & \vdots \\
f(x) = f(x_{n-1}) + m_{n-1}(x - x_{n-1}) & x_{n-1} \leq x \leq x_n
\end{array}
$$

Donde $m_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

Trazadores Cuadráticos

- El objetivo de los trazadores cuadráticos es obtener un polinomio de segundo grado para cada intervalo entre los datos.
- El polinomio de cada intervalo se representa así:

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$



Trazadores cuadráticos

Hay n intervalos, por lo tanto hay n ecuaciones cuadráticas y $3n$ incógnitas (a,b,c). Para establecerlas se debe cumplir:

1. Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores.
2. La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos.
3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.
4. La segunda derivada es cero en el primer punto.

Trazadores cuadráticos

- Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores.

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$
$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1}) \qquad para\ i = 2, \dots, n$$

- La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos.

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$
$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

Trazadores cuadráticos

- Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

$$2a_{i-1}x_{i-1} + b_{i-1} = 2a_i x_{i-1} + b_i \qquad para\ i = 2, \dots, n$$

- La segunda derivada es cero en el primer punto.

$$2a_1 = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

Ejemplo

Ajuste trazadores cuadráticos a los siguientes datos. Con los resultados estime el valor en $x = 5$.

x	$f(x)$
3.0	2.5
4.5	1.0
7.0	2.5
9.0	0.5

Ejemplo

- Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores. (4 ecuaciones)

$$
\begin{aligned}
20.5a_1 + 4.5b_1 + c_1 &= 1.0 \\
20.5a_2 + 4.5b_2 + c_2 &= 1.0 \\
49.0a_2 + 7.0b_2 + c_2 &= 2.5 \\
49.0a_3 + 7.0b_3 + c_3 &= 2.5
\end{aligned}
$$

- La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos.

$$
\begin{aligned}
9.0a_1 + 3.0b_1 + c_1 &= 2.5 \\
81.0a_n + 9.0b_n + c_n &= 0.5
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.

$$9.0a_1 + b_1 = 9.0a_2 + b_2$$
$$14.0a_2 + b_2 = 14.0a_3 + b_3$$

- La segunda derivada es cero en el primer punto.

$$2a_1 = 0 \rightarrow a_1 = 0$$

Ejemplo

El problema se reduce a la solución de ocho ecuaciones con ocho incógnitas

$$\begin{bmatrix} 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20.25 & 4.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 49 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -9 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & 0 & -14 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo

Las soluciones al sistema de ecuaciones son:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0 & b_1 &= -1 & c_1 &= 5.5 \\
a_2 &= 0.64 & b_2 &= -6.76 & c_2 &= 18.46 \\
a_3 &= -1.6 & b_3 &= 24.6 & c_3 &= -91.3
\end{aligned}
$$

El resultado de la interpolación es:

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= -x + 5.5 & 3.0 \leq x \leq 4.5 \\
f_2(x) &= 0.64x^2 - 6.76x + 18.46 & 4.5 \leq x \leq 7.0 \\
f_3(x) &= -1.6x^2 + 24.6x - 91.3 & 7.0 \leq x \leq 9.0
\end{aligned}
$$

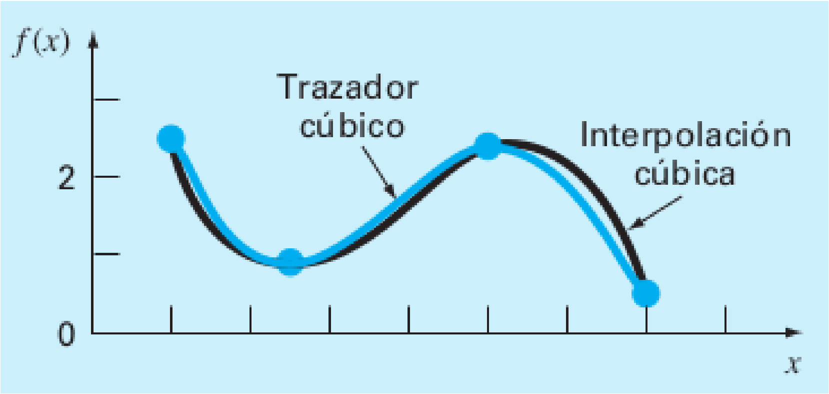
Ejemplo

Se usa $f_2(x)$ para estimar el valor de la función en $x=5$:

$$f_2(x) = 0.64(5)^2 - 6.76(5) + 18.46 = 0.66$$

Trazadores cúbicos

- El trazador cúbico es la versión más común y útil en la práctica de la ingeniería.
- Garantiza que la primera y segunda derivadas sean continuas.
- Su objetivo es obtener un polinomio de tercer grado para cada intervalo entre los datos, así:



$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

Trazadores cúbicos

Hay n intervalos, por lo tanto hay n ecuaciones cuadráticas y $4n$ incógnitas (a,b,c,d). Para establecerlas se debe cumplir:

1. Los valores de la función de polinomios adyacentes deben ser iguales en los nodos interiores.
2. La primera y la última función deben pasar a través de los puntos extremos.
3. Las primeras derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.
4. Las segundas derivadas en los nodos interiores deben ser iguales.
5. La segunda derivada en los nodos externos son cero.

Trazadores cúbicos

Aplicando las condiciones de continuidad de la interpolación su primera y segunda derivadas, es posible encontrar la expresión analítica de cada trazador:

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}(x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3$$
$$+ \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x_i - x)$$
$$+ \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6}\right](x - x_{i-1}) +$$

Trazadores cúbicos

Las incógnitas se evalúan aplicando la siguiente ecuación:

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1})$$
$$= \frac{6}{x_{i+1} - x_i}[f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}}[f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

Si se escribe esta ecuación para todos los nodos interiores, resultan n – 1 ecuaciones simultáneas con n – 1 incógnitas. (Las segundas derivadas en los nodos extremos son cero.)

Trazadores Cúbicos

El sistema de ecuaciones resultantes es:

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-1} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

donde:

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}) - \frac{h_{i-1}^2}{u_{i-1}}$$

$$b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

$$v_i = b_i - b_{i-1} - \frac{h_{i-1} v_{i-1}}{u_{i-1}}$$

Algoritmo para trazadores cúbicos (Pseudocódigo)

Input (n, x, y)

DOFOR $i = 0, n-1$

  $h_i = x_{i+1} - x_i$

  $b_i = 6\,(x_{i+1} - y_i)/h_i$

END DO

$u_1 = 2\,(h_0 - h_1)$

$v_1 = b_1 - b_0$

DOFOR $i = 2, n-1$

  $u_i = 2(h_i + h_{i-1}) - (h_{i-1})^2/u_{i-1}$;

  $v_i = b_i - b_{i-1} - h_{i-1}\, v_{i-1} / u_{i-1}$

END DO

$z_n = 0; z_0 = 0$

DOFOR $i = n-1, 1$

  $z_i = (v_i - h_i\, z_{i+1})/u_i$

END DO

Output (z)

Ejemplo

Utilice el algoritmo computacional de la diapositiva anterior y la siguiente información para evaluar $f(x) = \ln x$ en $x = 2$:

Algoritmo para Trazadores cúbicos (Matlab)

Sean $\{x_i, y_i\}$ *n puntos:*

DOFOR $i = 1, n-1$

$h_i = (x_{i+1} - x_i)$

END DO

DOFOR $i = 1, n-2$

$u_i = 2(x_{i+2} - x_i)$

END DO

DOFOR $i = 1, n-2$

$v_i = (6/h_{i+1})(y_{i+2} - y_{i+1}) + (6/h_i)(y_i - y_{i-1})$

END DO

DOFOR $i = 1, n-2$

$A_{i,i} = u_i$

END DO

DOFOR $i = 1, n-3$

$A_{i,i+1} = h_i$

END DO

DOFOR $i = 2, n-2$

$A_{i,i-1} = h_{i-1}$

END DO

Resolver: [A][z] =[v]

Segunda derivada extremos:

Z=[0;z;0]

DOFOR $i = 1, n-1$

Ecuación de cada intervalo

END DO

Continuación Algoritmo para Trazadores cúbicos (Matlab)

- *Resolver: [A][z] =[v]*
- *Agregar ceros correspondientes a la segunda derivada: Z=[0;z;0]*
- *Resolver la interpolación correspondiente.*

DOFOR i = 1, n-1

Ecuación de cada intervalo

END DO

DOFOR i = 1, n-2

$A_{i,i} = u_i$

END DO

DOFOR i = 1, n-3

$A_{i,i+1} = h_i$

END DO

DOFOR i = 2, n-2

$A_{i,i-1} = h_{i-1}$

END DO

Resolver: [A][z] =[v]