Módulo 3

Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Factorización LU

Descomposición LU

- *Se busca reformular el paso de eliminación, de tal manera que involucre solo operaciones con la matriz de coeficientes [A].*

$$A_1X = B_1$$
$$A_1X = B_2$$

- *Además, la descomposición LU proporciona un medio eficiente para calcular la matriz inversa, que tiene muchas aplicaciones valiosas.*

Descomposición LU

Suponga un sistema de ecuaciones: $[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{X}\} - \{\boldsymbol{B}\} = \boldsymbol{0}$*, que se puede llevar a una representación* $[\boldsymbol{U}]\{\boldsymbol{X}\} - \{\boldsymbol{D}\} = \boldsymbol{0}$*, así:*

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

Descomposición LU

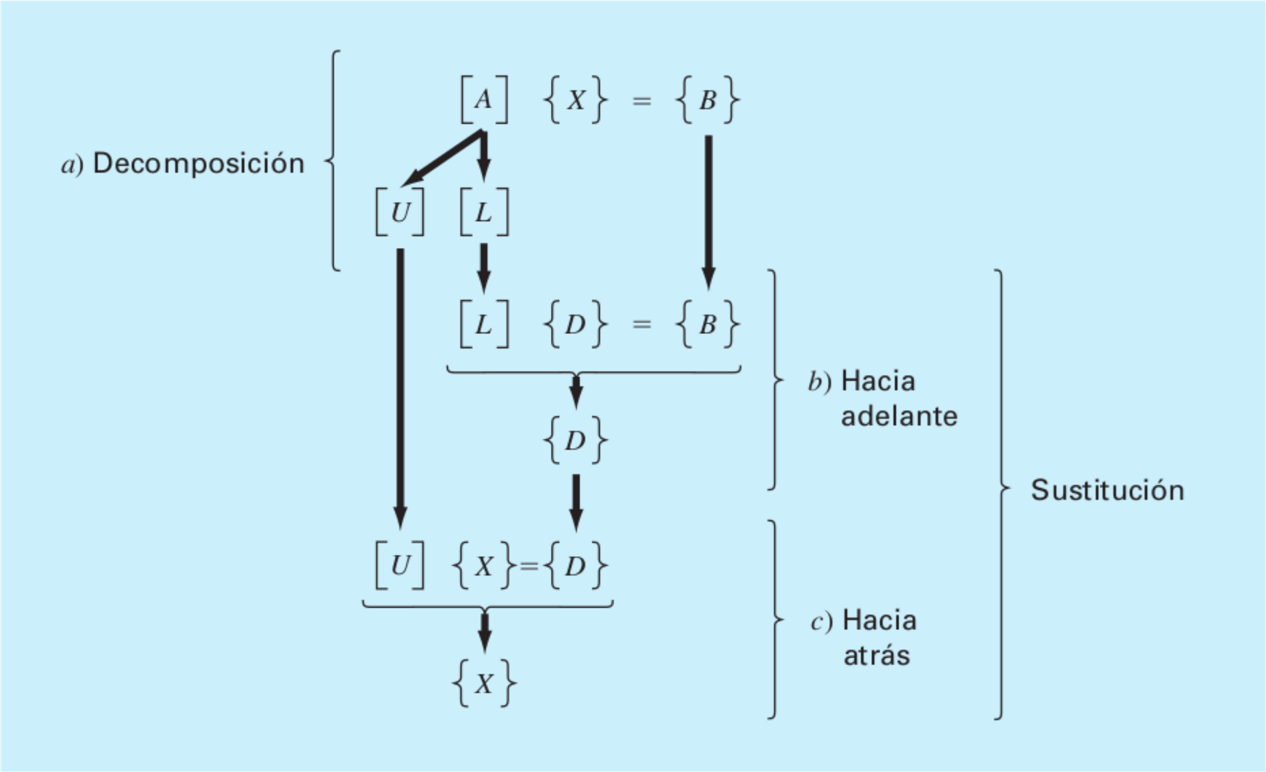
Ahora, suponga que existe una matriz $[\boldsymbol{L}]$*, triangular inferior con 1 en los elementos de la diagonal principal,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

que satisface $[\boldsymbol{L}] * \{[\boldsymbol{U}]\{\boldsymbol{X}\} - \{\boldsymbol{D}\}\} = [\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{X}\} - \{\boldsymbol{B}\}$*.*

De esta ecuación se obtiene: $[\boldsymbol{L}][\boldsymbol{U}] = [\boldsymbol{A}]$ *y* $[\boldsymbol{L}]\{\boldsymbol{D}\} = \{\boldsymbol{B}\}$

Estrategia de dos pasos:



Descomposición

*Una manera de obtener la descomposición **LU** de una matriz **A** es utilizar la eliminación Gaussiana.*

*Es fácil obtener **U**:*

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{bmatrix}$$

*¿De dónde obtenemos **L**?*

Descomposición

La matriz L se obtiene a partir de los factores que se utilizan para la eliminación gaussiana:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Obtener la factorización LU, mediante la eliminación gaussiana, de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & -0{,}2 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} Ec2 \leftarrow Ec2 - f_{21} Ec1; \\ Ec3 \leftarrow Ec3 - f_{31} Ec1; \end{matrix}$$

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0{,}1}{3}; f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0{,}3}{3}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} Ec2 \leftarrow Ec2 - f_{21} Ec1; \\ Ec3 \leftarrow Ec3 - f_{31} Ec1; \end{matrix}$$

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0,1}{3}; f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0,3}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,00333 & -0,293333 \\ 0 & -0,19 & 10,02 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 7{,}00333 & -0{,}293333 \\ 0 & -0{,}19 & 10{,}02 \end{bmatrix} Ec3 \leftarrow Ec3 - f_{32}Ec2;$$

$$f_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{-0{,}19}{7{,}00333}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 7{,}00333 & -0{,}293333 \\ 0 & -0{,}19 & 10{,}02 \end{bmatrix} Ec3 \leftarrow Ec3 - f_{32}Ec2;$$

$$f_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{-0{,}19}{7{,}00333}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & 7{,}00333 & -0{,}293333 \\ 0 & 0 & 10{,}0120 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0,1}{3} = 0,033333; \quad f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0,3}{3} = 0,1;$$

$$f_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{-0,19}{7,00333} = -0,027130$$

Ejemplo

$$f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{0,1}{3} = 0,033333; \quad f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{0,3}{3} = 0,1;$$

$$f_{32} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}} = \frac{-0,19}{7,00333} = -0,027130$$

Así, la matriz triangular inferior es:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,033333 & 1 & 0 \\ 0,1 & -0,027130 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

En consecuencia, la descomposición LU es: ***A=LU:***

$$[L][U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,033333 & 1 & 0 \\ 0,1 & -0,027130 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0 & 7,00333 & -0,293333 \\ 0 & 0 & 10,0120 \end{bmatrix}$$

$$[L][U] = \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,09999 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 9,99996 \end{bmatrix}$$

Sustitución

Se realiza en dos pasos:

- *Sustitución hacia adelante para:* $[L]\{D\} = \{B\}$

$$d_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} d_j \quad \text{para } i = 2, 3, \ldots, n$$

- *Sustitución hacia atrás para:* $[U]\{X\} = \{D\}$

$$x_n = d_n / u_{nm}$$

$$x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j}{u_{ii}} \quad \text{para } i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Ejemplo

Continuar con el ejemplo anterior si el sistema completo es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

*La matriz **L***

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}$$

*Se cumple la ecuación **LD=B***

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Después de la sustitución hacia adelante

$$D = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{bmatrix}$$

Se reemplaza este resultado en la ecuación $[U]\{X\} = \{D\}$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.85 \\ -19.5617 \\ 70.0843 \end{bmatrix}$$

Después de la sustitución hacia atrás

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 7.00003 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Matriz Inversa

- *La inversa de una matriz se puede obtener utilizando la descomposición LU.*
- *Para ello, se obtienen los valores de las matrices L y U, y se utilizan vectores unitarios para obtener los valores de la matriz inversa (por columnas).*

Ejemplo

Continuando con la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

*Para obtener la primera columna de la matriz inversa, aplicamos la sustitución, a partir del vector **B:***

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \; LD = B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.03333 \\ -0.1009 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

*Se utiliza el vector **D** para despejar **X** de la ecuación:*

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.03333 \\ -0.1009 \end{bmatrix} \quad UX = D \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.03333 \\ -0.1009 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0.33249 \\ -0.00518 \\ -0.01008 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Vamos ajustando los valores de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0 & 0 \\ -0.00518 & 0 & 0 \\ -0.01008 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

*Para obtener la segunda columna de la matriz inversa, aplicamos la sustitución, a partir del vector **B:***

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; LD = B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$UX = D \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0.004944 \\ 0.142903 \\ 0.00271 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Vamos ajustando los valores de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & 0 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0 \\ -0.01008 & 0.00271 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Para obtener la tercera columna de la matriz inversa, aplicamos la sustitución, a partir del vector ***B:***

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; LD = B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.1 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$UX = D \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0.006798 \\ 0.004183 \\ 0.09988 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Vamos ajustando los valores de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & 0.006798 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0.004183 \\ -0.01008 & 0.00271 & 0.09988 \end{bmatrix}$$

Descomposición de Cholesky

Descomposición de Cholesky

Este algoritmo se basa en el hecho de que una matriz simétrica se descompone así:

$$A = LL^T$$

Es decir, los factores triangulares resultantes son la transpuesta uno de otro. Para el k-ésimo renglón:

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, k-1$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

Ejemplo

Aplique la descomposición de Cholesky para la siguiente matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 525 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Para el primer renglón $(\boldsymbol{k} = \mathbf{1})$, *sólo se calcula* l_{11}**:**

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

Ejemplo

Para el primer renglón ***(k=1)****, sólo se calcula* $\boldsymbol{l_{11}}$***:***

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

Para el segundo renglón ***(k=2)****, se calculan* $\boldsymbol{l_{21}}$ *y* $\boldsymbol{l_{22}}$ *:*

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{15}{2.4495} = 6.1237$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{55 - (6.1237)^2} = 4.1833$$

Ejemplo

*Para el tercer renglón **(k=3)**, con **i=1:***

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{55}{2.4495} = 22.454$$

*Con **i=2**:*

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{21} l_{31}}{l_{22}} = \frac{225 - 6.1237(22.454)}{4.1833} = 20.916$$

Ejemplo

Y, finalmente:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{979 - (22.454)^2 - (20.916)^2} = 6.1106$$

De esta forma, la descomposición de Cholesky queda como:

$$L = \begin{bmatrix} 2.4495 & & \\ 6.1237 & 4.1833 & \\ 22.454 & 20.916 & 6.1106 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Con los valores de L y L^T,

$$L = \begin{bmatrix} 2.4495 & & \\ 6.1237 & 4.1833 & \\ 22.454 & 20.916 & 6.1106 \end{bmatrix} \quad L^T = \begin{bmatrix} 2.4495 & 6.1237 & 22.454 \\ & 4.1833 & 20.916 \\ & & 6.1106 \end{bmatrix}$$

el producto queda:

$$\tilde{A} = LL^T = \begin{bmatrix} 6.0001 & 15.0000 & 55.0011 \\ 15.0000 & 54.9997 & 224.9995 \\ 55.0011 & 224.9995 & 979.0006 \end{bmatrix}$$

Observaciones

- *La descomposición de Cholesky da error si en la evaluación de* $\boldsymbol{l_{kk}}$ *se obtiene la raíz cuadrada de un número negativo.*

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

- *Esto no ocurre si se garantiza que la matriz* ***A*** *es definida positiva. Es decir,*

$$X^T A X > 0$$

para todo vector ***X*** *diferente de cero.*

Solución de sistemas de ecuaciones con métodos iterativos

Métodos iterativos

- *Son similares a los usados para obtener las raíces de una sola ecuación.*
- *Consistían en suponer un valor y usar un método sistemático para obtener una aproximación mejorada de la raíz.*
- *Se esperaría que tales métodos aproximados fuesen útiles en el contexto de sistemas de **n** ecuaciones.*

Método de Gauss-Seidel

*Suponga un sistema **AX = B**, de tres ecuaciones. Si los elementos de la diagonal no son todos cero, la primera ecuación se puede resolver para* $\boldsymbol{x_1}$*, la segunda para* $\boldsymbol{x_2}$ *y la tercera para* $\boldsymbol{x_3}$*, obteniendo:*

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}}$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}}$$

Método de Gauss-Seidel

- *Se escogen valores iniciales para las x. (Ejemplo: suponer que todos son cero).*
- *Con estos valores se calcula un nuevo valor x_1.*
- *Se sustituye este nuevo valor de x_1, con el valor previo de x_3, y se calcula el nuevo valor de x 2 .*
- *Se repite el proceso para calcular un nuevo valor de x_3.*
- *Se regresa a la primera ecuación y se repite todo el proceso hasta cumplir un criterio de convergencia.*

Convergencia

La convergencia se verifica usando el criterio:

$$|\varepsilon_i| = \left| \frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j} \right| 100\% < \varepsilon_0$$

*para todas las **i**, donde **j** y **j–1** son las iteraciones actuales y previas, respectivamente.*

Ejemplo

Use el método de Gauss-Seidel para obtener la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

Ejemplo

Primero, despejamos la incógnita sobre la diagonal para cada una de las ecuaciones:

$$x_1 = \frac{7.85+0.1x_2+0.2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19.3-0.1x_1+0.3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71.4-0.3x_1+0.2x_2}{10}$$

Ejemplo

Suponiendo $x_2=0$, $x_3=0$:

$$x_1 = \frac{7.85+0+0}{3} = 2.616667$$

$$x_2 = \frac{-19.3-0.1(2.616667)+0}{7} = -2.794524$$

$$x_3 = \frac{71.4-0.3(2.616667)+0.2(-2.794524)}{10} = 7.005610$$

Ejemplo

Continuando con la segunda iteración:

$$x_1 = \frac{7,85 + 0,1(-2,794524) + 0,2(7,005610)}{3} = 2,990557$$

$$x_2 = \frac{-19,3 - 0,1(2,990557) + 0,3(7,005610)}{7} = -2,499625$$

$$x_3 = \frac{71,4 - 0,3(2,990557) + 0,2(-2,499625)}{10} = 7,000291$$

Ejemplo

Se calculan los valores de error. ***Ejemplo:***

$$|\varepsilon_1| = \left|\frac{2.990557 - 2.616667}{2.990557}\right| 100\% = 12.5\%$$