SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

MÉTODOS NUMÉRICOS - MÓDULO 2

Encontrar raíces

Muchos problemas en ingeniería se expresan como:

Dada una función continua $f(x)$,

encontrar el valor r tal que $f(r) = 0$

Estos problemas se conocen como *"Encontrar las raíces"*.

Raíces de Ecuaciones

Un número ***r*** que satisface una ecuación se denomina ***raíz de la ecuación***

La ecuación $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x = -18$

tiene cuatro raíces: $-2, 3, 3,$ y $-1.$

$\rightarrow x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = (x+2)(x-3)^2(x+1)$

La ecuación tiene dos raíces sencillas (*-1* y *-2*) y una raíz repetida (*3*) con multiplicidad = *2*.

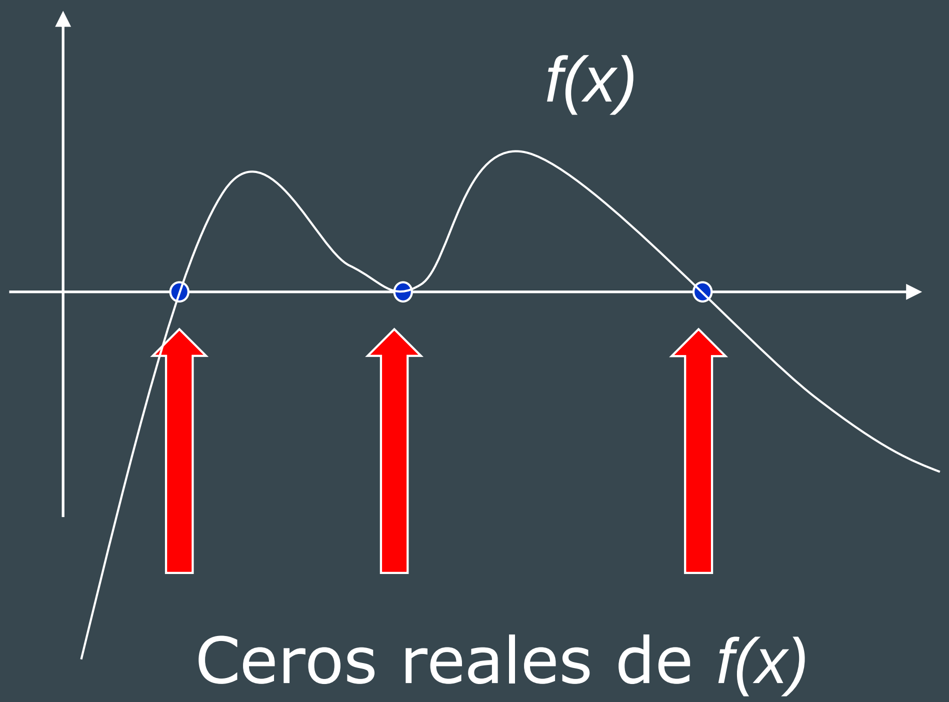
Ceros de una función

Sea $f(x)$ una función de real de una variable real. Cualquier número z para el cual $f(z)=0$ se denomina cero de una función.

Ejemplo:

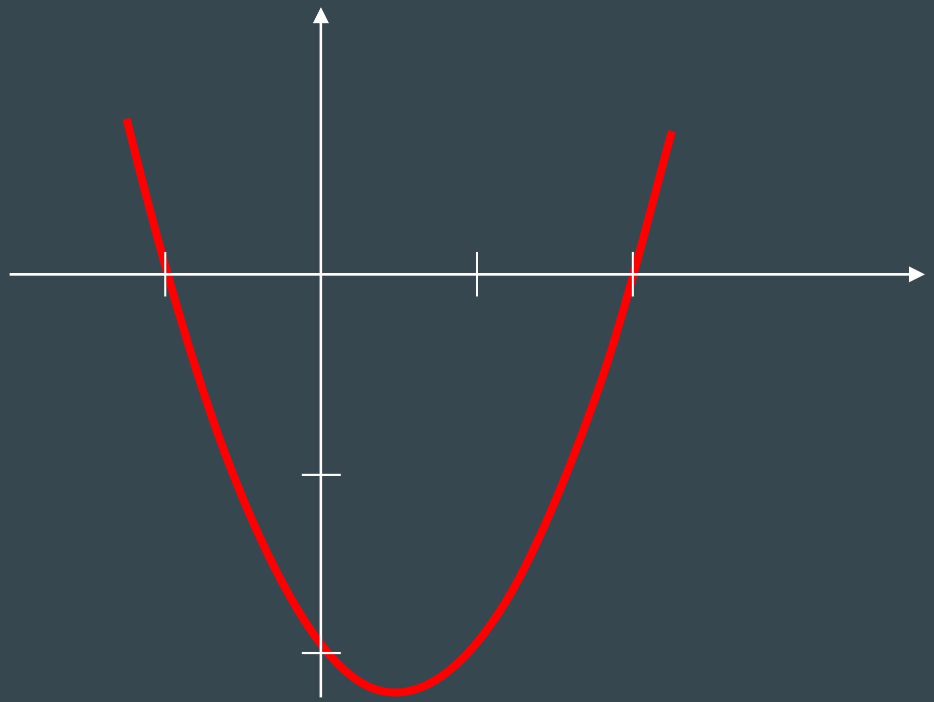
2 y 3 son ceros de la función $f(x)=(x-2)(x-3)$.

Interpretación gráfica de los ceros



Los ceros reales de una función $f(x)$ son los valores de x para los cuales la gráfica de la función cruza (o toca) el eje x.

Ceros sencillos



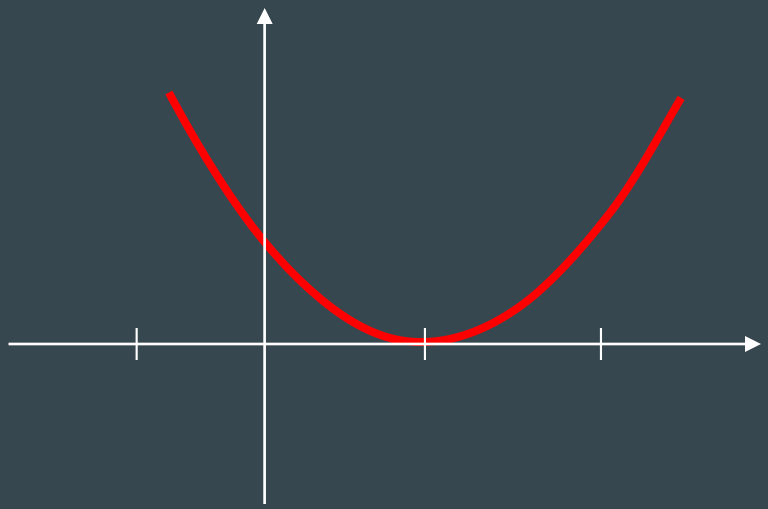
$$f(x) = (x+1)(x-2)$$

$$f(x) = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$$

tiene dos ceros sencillos (uno en $x = 2$ y uno en $x = -1$)

Ceros múltiples

$$f(x) = (x-1)^2$$

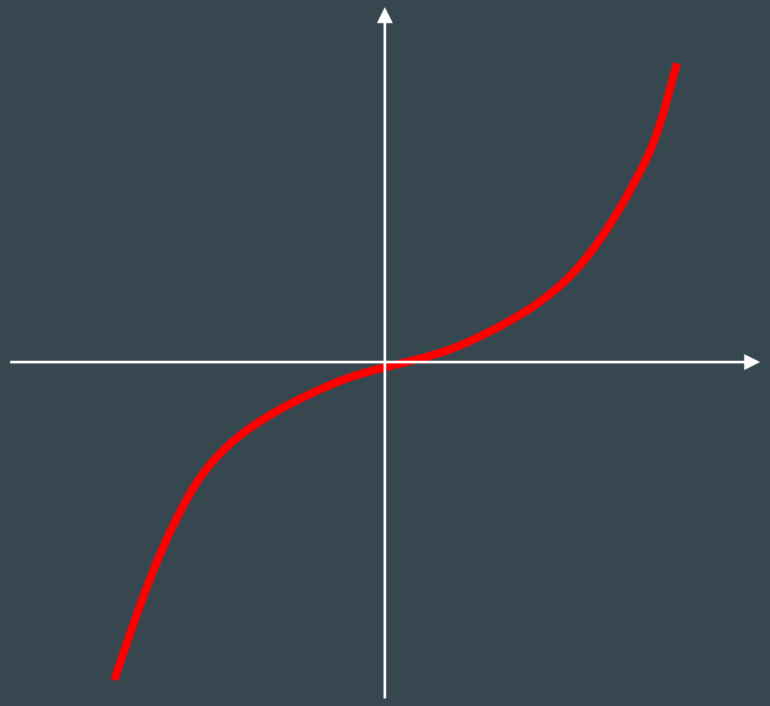


$$f(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

tiene ceros dobles $\left(\text{ceros con multiplicidad } = 2 \text{ en } x = 1\right)$

Ceros múltiples

$$f(x) = x^3$$



$$f(x) = x^3, tiene\ un\ cero\ con\ multiplicidad = 3\ en\ x = 0$$

Datos

- Cualquier polinomio de orden n tiene exactamente n ceros (incluyendo ceros reales y complejos con sus multiplicidades).
- Cualquier polinomio de orden impar tiene, al menos, un cero real.
- Si una función tiene un cero en $x=r$ con multiplicidad m, entonces la función y sus primeras $(m-1)$ derivadas serán cero en $x=r$. La m-ésima derivada es diferente de cero en $x=r$.

- $f(x) = x^3$, Tiene un cero en $x = 0$, con multiplicidad $m = 3$
- $f'(x) = 0 = 3x^2, f'(0) = 0$
- $f''(x) = 0 = 6x, f''(0) = 0$
- $f'''(x) \neq 0, f'''(x) = 6$

Raíces de ecuaciones y ceros de funciones

Dada la ecuación:

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x = -18$$

Moviendo todos los términos a la izquierda

$$x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 0$$

Se define la función:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18$$

Los ceros de *f(x)* son las mismas raíces de la ecuación *f(x)=0*, es decir *(-2,3,3,-1)*.

Métodos de solución

Hay varias posibilidades para resolver ecuaciones no lineales, entre las que se incluyen:

- Soluciones analíticas:
  - Posible solamente para ecuaciones especiales.
- Soluciones gráficas:
  - Útil para proporcionar información inicial para otros métodos.
- Soluciones numéricas:
  - Métodos abiertos.
  - Métodos cerrados.

Métodos analíticos

Las soluciones analíticas sólo son viables en ecuaciones especiales:

$$\text{Solución analítica de: } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{raíces} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{No hay solución para: } x - e^{-x} = 0$$

Métodos gráficos

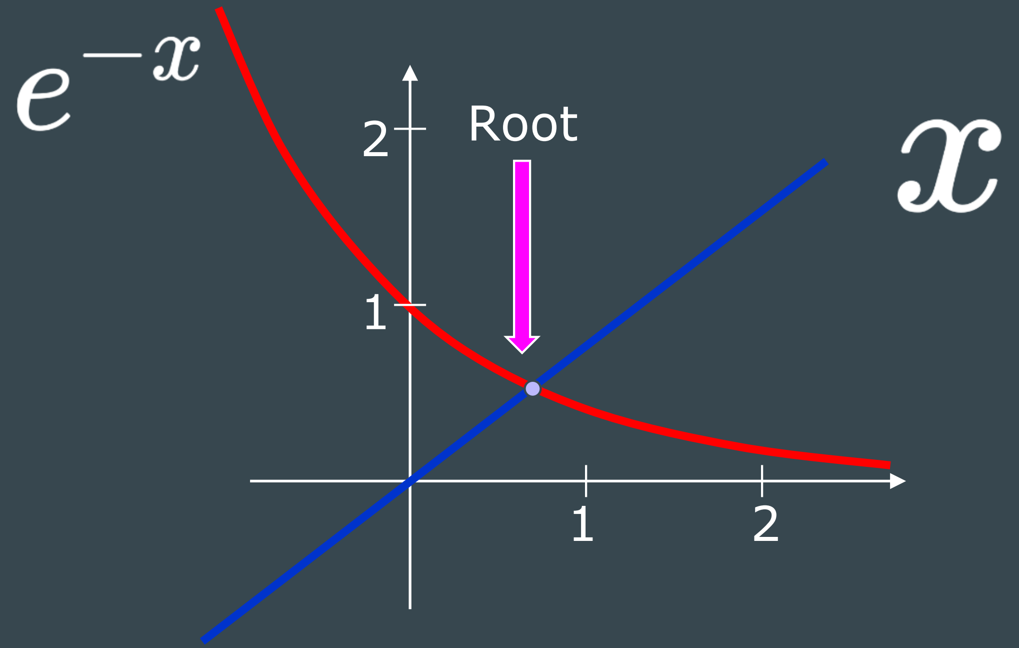
Los métodos gráficos son útiles para proveer aproximaciones iniciales a otros métodos.

Solución:

$x = e^{-x}$

La raíz $\in [0, 1]$

raíz $\cong 0.6$



Métodos numéricos

Existen varios métodos disponibles para resolver ecuaciones no lineales:

- Método de bisección.
- Método de Newton.
- Método de Horner
- Método del punto fijo
- Método de la secante.
- Método de falsa posición
- ...

Métodos cerrados

- En los métodos cerrados, se parte de un intervalo que contiene la raíz y se utiliza un procedimiento para reducir el tamaño del intervalo y que siga conteniendo la raíz.

- Ejemplo:
  - Método de bisección

Métodos abiertos

- En los métodos abiertos, se parte de uno o más puntos iniciales. En cada iteración, se obtiene una nueva suposición de la raíz.
- Los métodos abiertos suelen ser más eficientes que los métodos cerrados.
- Sin embargo, es posible que no converjan a una raíz.

Notación de convergencia

Una secuencia x_1, x_2, ..., x_n, … converge a x si, para $\varepsilon > 0$, existe N tal que:

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \forall n > N$$

Notación de convergencia

Una serie x_1, x_2, ... converge así:

Convergencia lineal: $$\frac{|x_{n+1}-x|}{|x_n-x|} \leq C$$

Convergencia cuadrática: $$\frac{|x_{n+1}-x|}{|x_n-x|^2} \leq C$$

Convergencia de orden P: $$\frac{|x_{n+1}-x|}{|x_n-x|^P} \leq C$$

Velocidad de convergencia

- Dos métodos se pueden comparar en términos de su tasa de convergencia.
- La **convergencia cuadrática** es más rápida que la **convergencia lineal.**
- En general, un método con convergencia de orden p converge más rápido que un método con convergencia de orden q si $p>q$.
- A los métodos con convergencia de orden $p>1$ se les dice que tienen **convergencia superlineal.**

Método de la bisección

Método de bisección

- El **método de bisección** es uno de los métodos más simples para encontrar un cero de una función no lineal.
- Para usar el método de Bisección, se necesita un intervalo inicial que se sabe que contiene un cero de la función.
- El método reduce sistemáticamente el intervalo. Para ello, **divide** el intervalo en **dos partes** iguales, realiza una prueba simple y, en función del resultado de la prueba, se desecha la mitad del intervalo.
- El procedimiento se repite hasta obtener el tamaño de intervalo deseado.

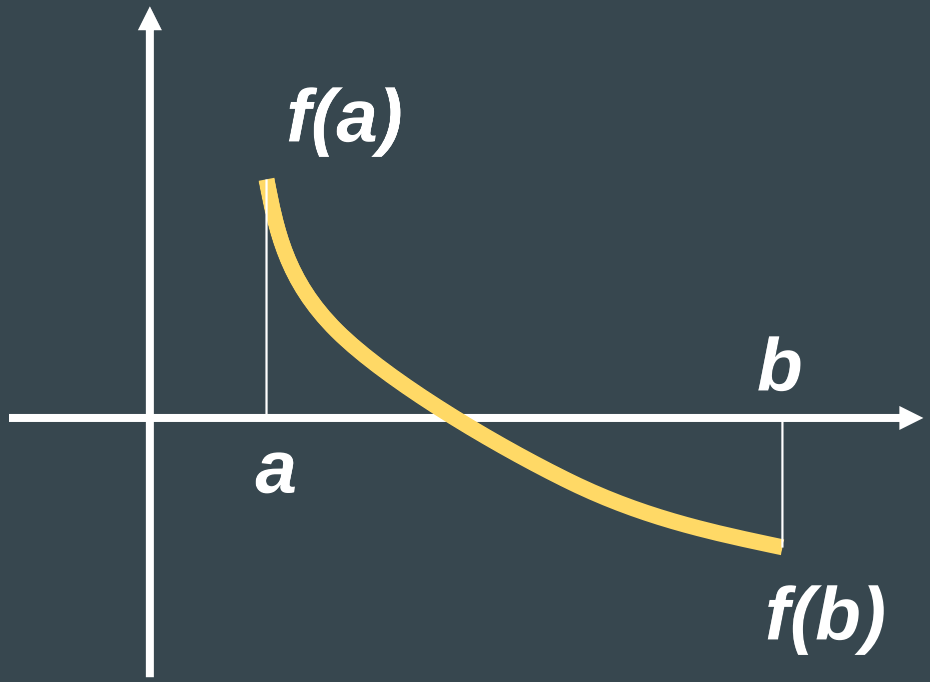
- Intervalo inicial: [0,1]. f(0) y f(1)
    - Dos partes iguales ~~[0,0.5]~~ y [0.5, 1]
    - f(0.5) = + o -
- Intervalo iteración 2: [0.5,1]

Teorema del valor intermedio

Sea *f(x)* una función definida en el intervalo *[a,b]*.

Teorema del valor intermedio

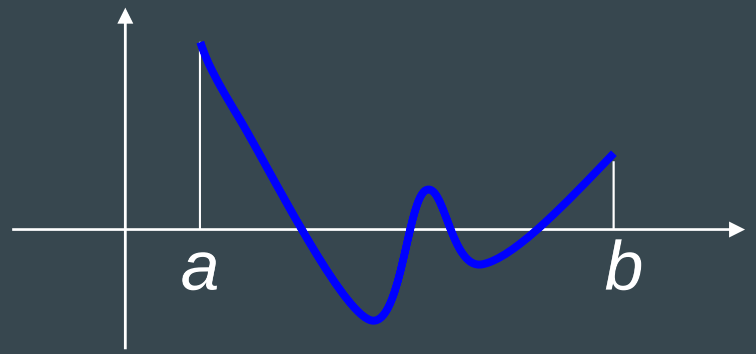
Si una función es continua y *f(a)* y *f(b)* tienen signos diferentes, entonces *f(x)* tiene, al menos, un cero en el intervalo *[a,b]*.



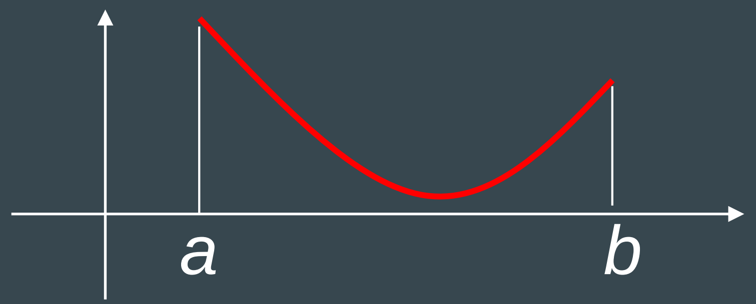
Ejemplos

- Si *f(a)* y *f(b)* tienen el mismo signo, la función puede tener un número par de ceros reales o ningún cero real en el intervalo *[a, b]*.

- El método de bisección no se puede utilizar en estos casos.



La función tiene cuatro ceros reales.

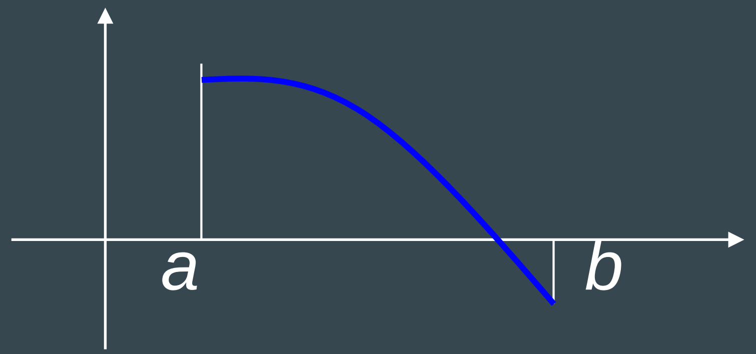


La función no tiene ceros reales.

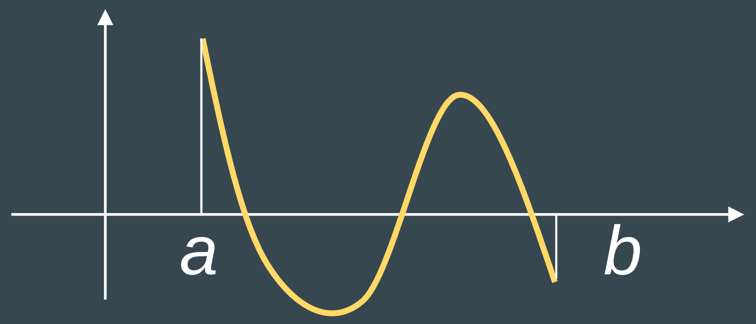
Dos ejemplos más

- Si *f(a)* y *f(b)* tienen diferentes signos, la función tiene, al menos, un cero real en el intervalo *[a, b]*.

- Se puede utilizar el método de bisección para hallar uno de esos ceros.



La función tiene un cero real.



La función tiene tres ceros reales.

Método de bisección

- Si la función es continua en *[a,b]* y *f(a)* y *f(b)* tienen signos diferentes, el método de bisección obtiene un nuevo intervalo que es de la mitad del tamaño del intervalo actual y los signos de la función, evaluada en los puntos finales del intervalo, son diferentes.

- Esto permite repetir el procedimiento de Bisección para reducir aún más el tamaño del intervalo.

Método de bisección

Condiciones:

Dado un intervalo ***[a,b].***

f(*x*) continua en el intervalo ***[a,b].***

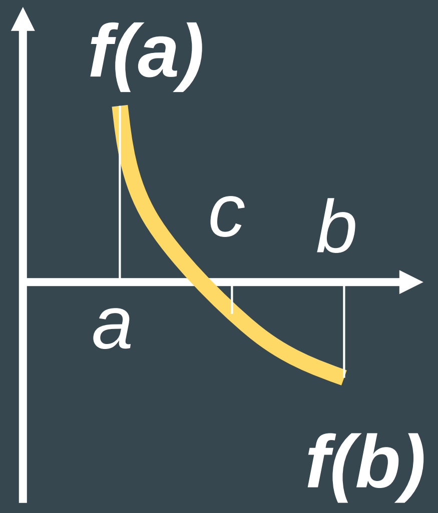
f(a) y ***f(b)*** tienen signos opuestos.

Estas condiciones aseguran la existencia de al menos un cero en el intervalo ***[a, b]*** y que el método de bisección pueda usarse para obtener un intervalo más pequeño que contenga el cero.

Algoritmo de bisección

Condiciones:

- $f(x)$ continua en el intervalo $[a,b]$.
- $f(a)*f(b)<0$ tienen signos opuestos.



Algoritmo:

loop

1. Computar el punto medio $c=(a+b)/2$.
2. Evaluar $f(c)$.
3. Si $f(a)*f(c)<0$, entonces el nuevo intervalo es $[a, c]$; b=c;
   Si $f(a)*f(c)>0$, entonces el nuevo intervalo es $[c, b]$; a=c;

end loop

Algoritmo de bisección

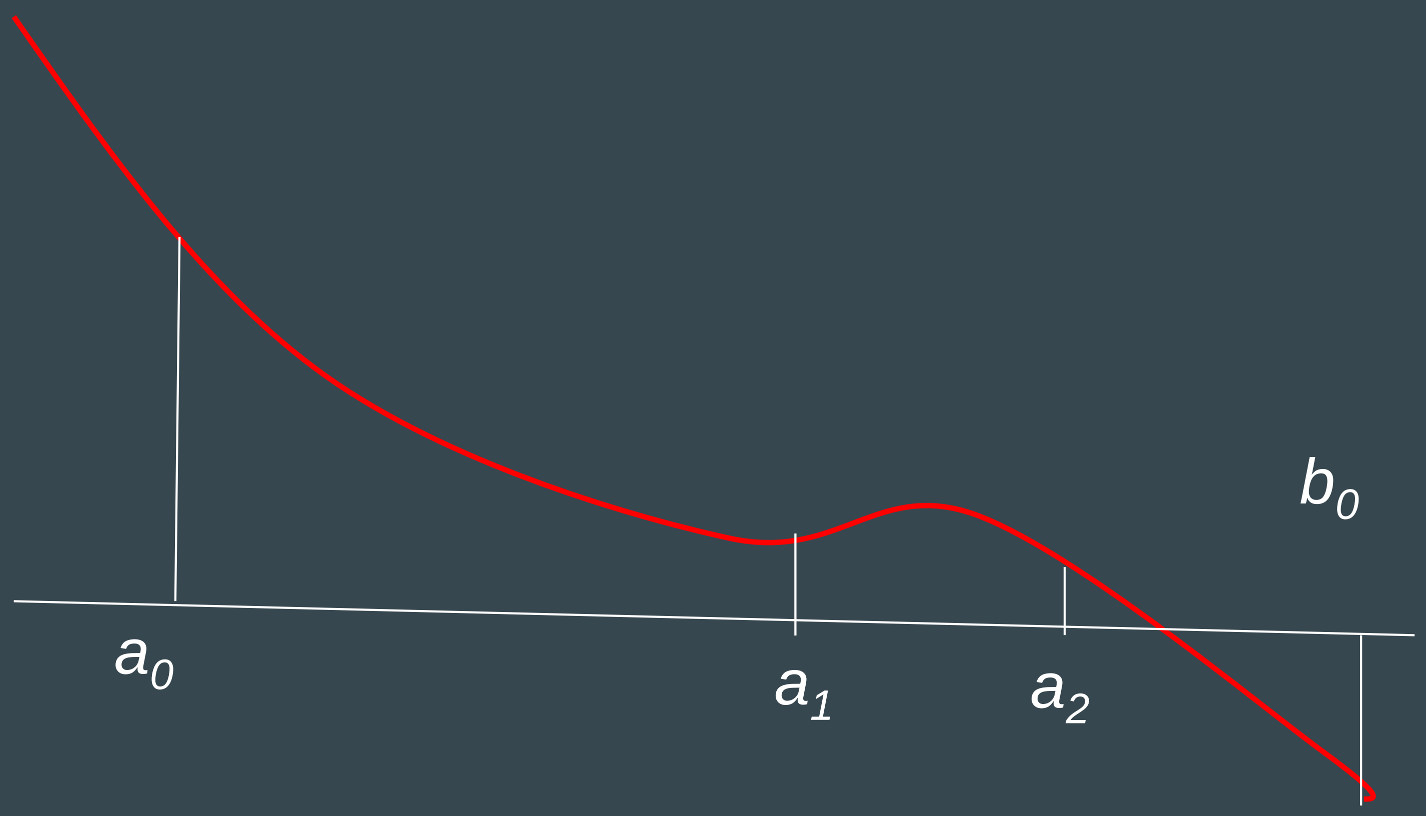
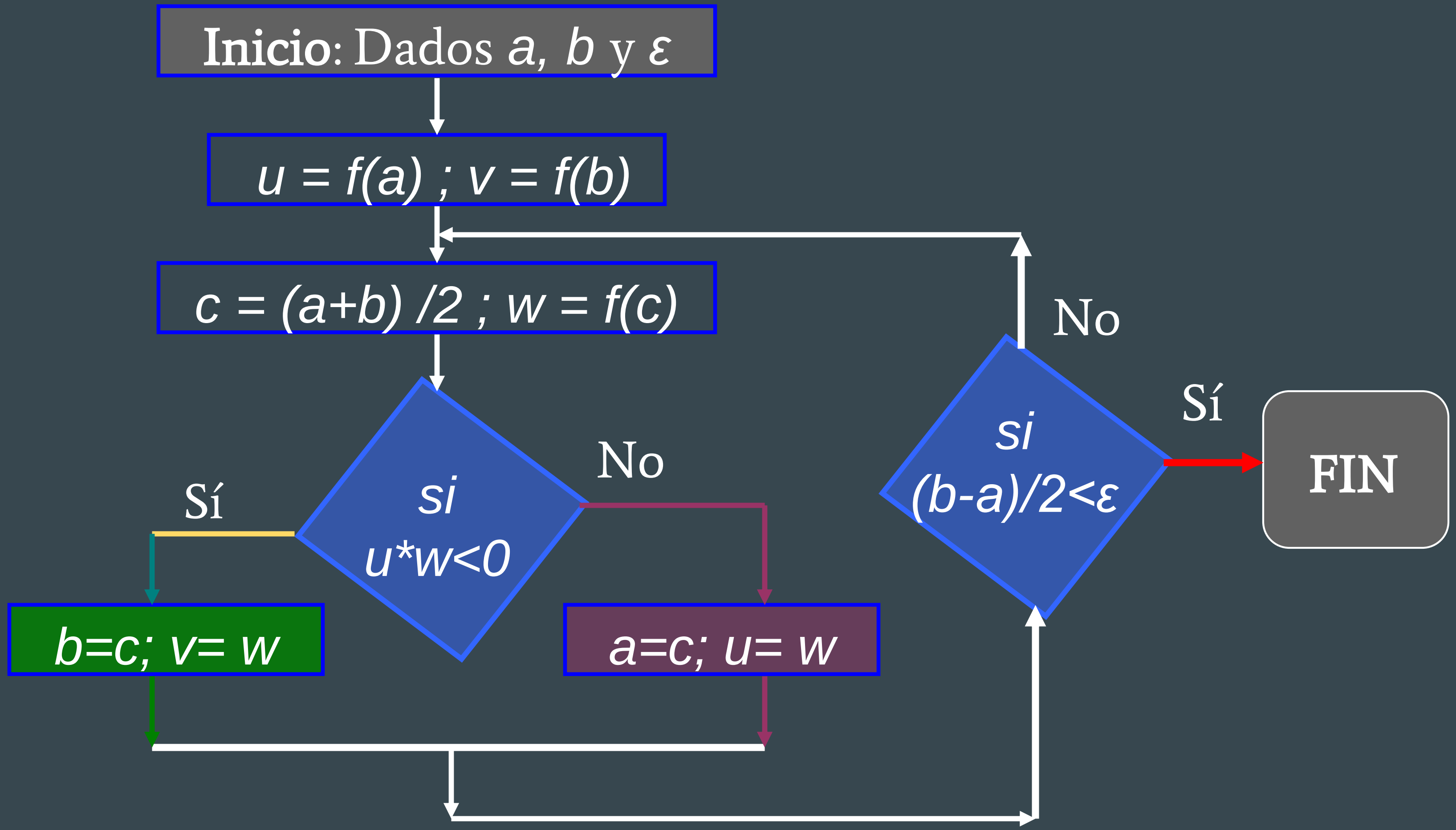


Diagrama de flujo del método de bisección



Ejemplo

¿Se puede usar el método de bisección para encontrar un cero de: $f(x)=x^3-3x+1$ en el intervalo $[0,2]$?

Respuesta:

- $f(x)$ es continua sobre $[0,2]$. (OK)
- $f(0)*f(2)=1*3=3>0$. (NO)

Las condiciones no se satisfacen.

No se puede usar el método de bisección.

Ejemplo

¿Se puede usar el método de bisección para encontrar un cero de: $f(x)=x^3-3x+1$ en el intervalo $[0,1]$?

Respuesta:

- $f(x)$ es continua sobre $[0,1]$. (OK)
- $f(0)*f(1)=1*(-1)=-1<0$. (OK)

Las condiciones se satisfacen.

Se puede usar el método de bisección.

Mejor estimación y nivel de error

El método de bisección obtiene un intervalo en el que se garantiza que contiene un cero de la función.

Preguntas:

- ¿Cuál es la mejor estimación del cero de $f(x)$?
- ¿Cuál es el nivel de error en la estimación obtenida?

Mejor estimación y nivel de error

La mejor estimación del cero de la función ***f(x)*** después de la primera iteración del método de Bisección es el punto medio del intervalo inicial:

$$\text{Estimación del cero: } c = \frac{b+a}{2}$$

$$\text{Error} \leq \frac{|b-a|}{2}$$

$$\text{Error}_{max} = \left|\frac{a+b}{2} - b\right| = \frac{|a+b-2b|}{2} = \frac{|a-b|}{2} = \frac{|b-a|}{2}$$

Criterio de parada

Dos criterios comunes de detención:

- Detenerse después de un número fijo de iteraciones.
- Detenerse cuando el error absoluto sea inferior a un valor especificado.

¿Cómo se relacionan estos criterios?

Criterio de parada

c_n:
- Es el punto medio del intervalo en la n-ésima iteración.
- Usualmente se utiliza como estimación del cero

r: Es el cero de la función.

$$|error| = |r - c_n| \leq E_n = \frac{b-a}{2^n} = \frac{\Delta x_0}{2^n}$$

$$E_n = \frac{|b-a|}{2^n}$$

$$\varepsilon \geq \frac{|b-a|}{2^n}$$

$$2^n \geq \frac{|b-a|}{\varepsilon}$$

$$n \geq \log_2 \frac{|b-a|}{\varepsilon}$$

Criterio de parada

Dados *f(x)*, *a*, *b*, y *ε*
¿Cuántas iteraciones se necesitan para que: $|x-r| \leq \varepsilon$
donde r es el cero de *f(x)* y x es la bisección estimada (i.e., $x=ck$)?

$$n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) = \log_2(b-a) - \log_2(\varepsilon) = \frac{\log(b-a)-\log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Ejemplo

a=6, b=7, ε=0.0005

¿Cuántas iteraciones se necesitan para que: $|x-r| \leq \varepsilon$?

$$n \geq \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) = \log_2\left(\frac{7-6}{0.0005}\right) = 10.9658$$

$$\rightarrow n \geq 11$$

Ejemplo

Usar el método de bisección para encontrar una raíz de la ecuación $x=\cos(x)$ con un error absoluto < 0.02. Asuma el intervalo inicial como $[0.5, 0.9]$.

Pregunta 1: ¿Quién es $f(x)$?
Pregunta 2: ¿Se cumplen los condiciones?
Pregunta 3: ¿Cuántas iteraciones se necesitan?
Pregunta 4: ¿Cómo calcular la nueva estimación?

Ejemplo

Usar el método de bisección para encontrar una raíz de la ecuación $x=cos(x)$ con un error absoluto < *0.02*. Asuma el intervalo inicial como *[0.5, 0.9]*.

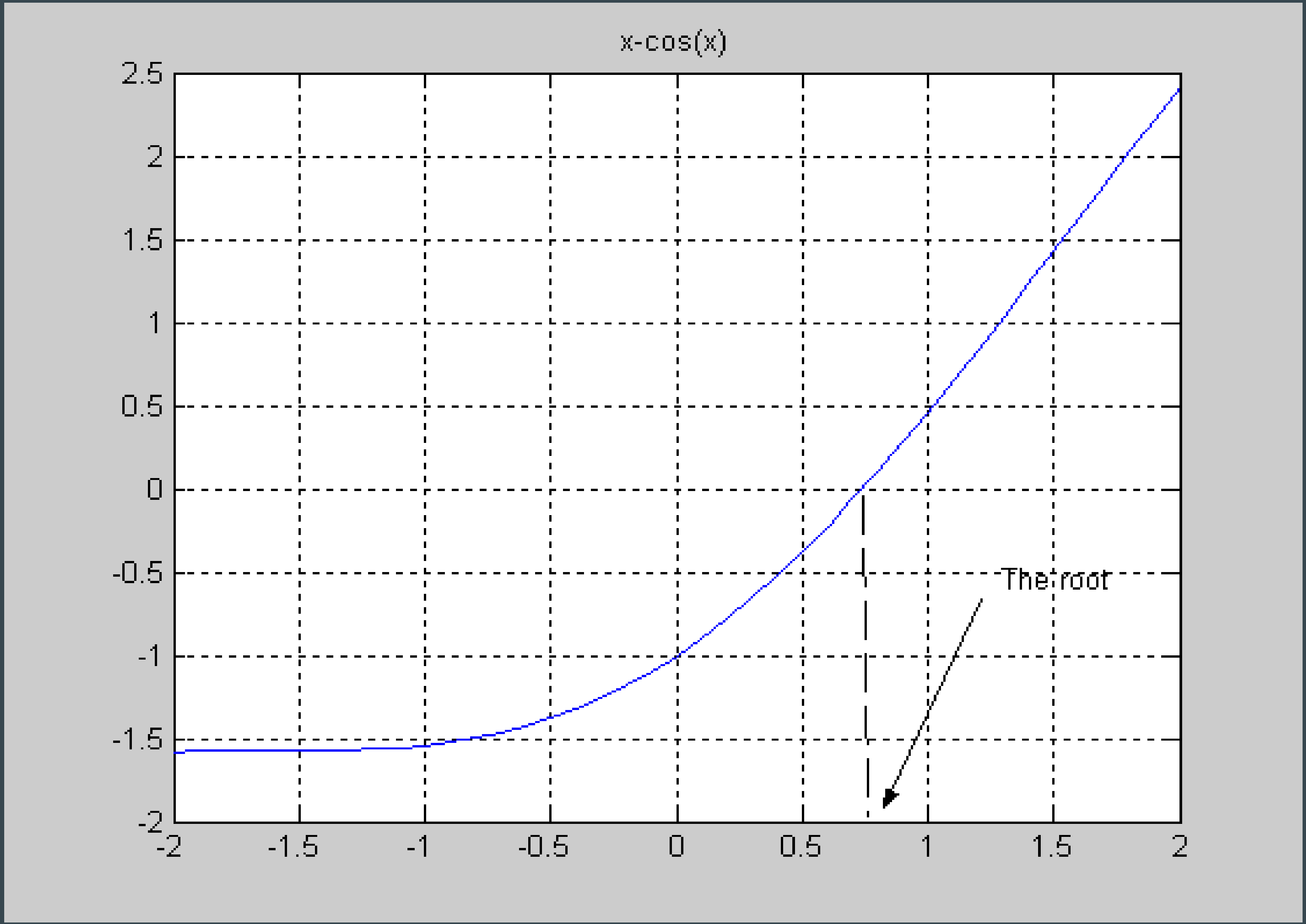
Respuesta 1: $f(x)=x-cos(x)$

Pregunta 2: ¿Se cumplen los condiciones?

Pregunta 3: ¿Cuántas iteraciones se necesitan?

Pregunta 4: ¿Cómo calcular la nueva estimación?

Ejemplo



Ejemplo

Usar el método de bisección para encontrar una raíz de la ecuación *x=cos(x)* con un error absoluto < *0.02*. Asuma el intervalo inicial como *[0.5, 0.9]*.

Respuesta 1: *f(x)=x-cos(x)*
Respuesta 2: Continua; *f(0.5)=-0.3776; f(0.9)=0.2784*
Pregunta 3: ¿Cuántas iteraciones se necesitan?
Pregunta 4: ¿Cómo calcular la nueva estimación?

Ejemplo

Usar el método de bisección para encontrar una raíz de la ecuación $x=cos(x)$ con un error absoluto < 0.02. Asuma el intervalo inicial como $[0.5, 0.9]$.

Respuesta 1: $f(x)=x-cos(x)$
Respuesta 2: Continua; $f(0.5)=-0.3776$; $f(0.9)=0.2784$
Respuesta 3: $n=log_2(0.4/0.02)=4.3219 \Rightarrow n=5$
Pregunta 4: ¿Cómo calcular la nueva estimación?

Ejemplo

Usar el método de bisección para encontrar una raíz de la ecuación $x=\cos(x)$ con un error absoluto < 0.02. Asuma el intervalo inicial como $[0.5, 0.9]$.

Respuesta 1: $f(x)=x-\cos(x)$

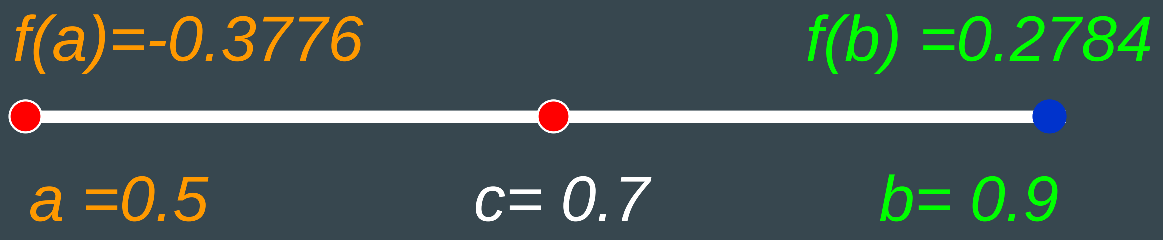
Respuesta 2: Continua; $f(0.5)=-0.3776$; $f(0.9)=0.2784$

Respuesta 3: $n=\log_2(0.4/0.02)=4.3219 \Rightarrow n=5$

Respuesta 4: Algoritmo de bisección.

Método de Bisección

Intervalo inicial



Error < 0.2

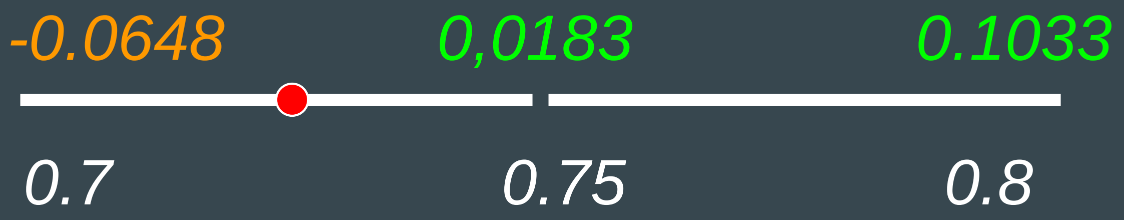
$$\text{Error} < \frac{|b-a|}{2}$$

Método de Bisección

Error < 0.1

Error < 0.05

Método de Bisección



Error < 0.025

Resumen

- Intervalo inicial que contiene la raíz: *[0.5,0.9]*

- Después de 5 iteraciones:
  - Intervalo que contiene la raíz: *[0.725, 0.75]*
  - La mejor estimación de la raíz es *0.7375*
  - $|Error| < 0.0125$

- Veámoslo en MATLAB

Ejemplo

Encontrar las raíces de:
$f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo de $[0,1]$.

- $f(x)$ es continua
- $f(0)=1$, $f(1)=-1 \Rightarrow f(a)*f(b)<0$
  => Se puede aplicar el método de bisección.

Ejemplo

#	a	b	f(a)	f(b)	c=(a+b)/2	f(c)	Err= (b-a)/2
1	0	1	1	-1	**0.5**	**-0.375**	0.5

Ejemplo

#	a	b	f(a)	f(b)	c=(a+b)/2	f(c)	Err= (b-a)/2
1	0	1	1	-1	0.5	-0.375	0.5
2	0	**0.5**	1	**-0.375**	**0.25**	**0.266**	0.25

Ejemplo

#	a	b	f(a)	f(b)	c=(a+b)/2	f(c)	Err=(b-a)/2
1	0	1	1	-1	0.5	-0.375	0.5
2	0	0.5	1	-0.375	0.25	0.266	0.25
3	**0.25**	0.5	**0.266**	-0.375	**0.375**	**-72.3e-3**	0.125

Ejemplo

#	a	b	f(a)	f(b)	c=(a+b)/2	f(c)	Err= (b-a)/2
1	0	1	1	-1	0.5	-0.375	0.5
2	0	0.5	1	-0.375	0.25	0.266	0.25
3	0.25	0.5	0.266	-0.375	0.375	-72.3e-3	0.125
4	0.25	**0.375**	0.266	**-72.3e-3**	**0.3125**	**93.0e-3**	0.0625

Ejemplo

#	a	b	f(a)	f(b)	c=(a+b)/2	f(c)	Err=(b-a)/2
1	0	1	1	-1	0.5	-0.375	0.5
2	0	0.5	1	-0.375	0.25	0.266	0.25
3	0.25	0.5	0.266	-0.375	0.375	-72.3e-3	0.125
4	0.25	0.375	0.266	-72.3e-3	0.3125	93.0e-3	0.0625
5	**0.3125**	0.375	**93.0e-3**	-72.266e-3	**0.34375**	**9.37e-3**	0.03125

Método de Bisección

Ventajas

- Simple y fácil de implementar
- Una evaluación de función por iteración
- El tamaño del intervalo que contiene el cero se reduce en un 50% después de cada iteración.
- El número de iteraciones se puede determinar a priori
- No se necesita conocimiento de la derivada
- La función no tiene que ser diferenciable

Método de Bisección

Desventajas

- Lento para converger
- Buenas aproximaciones intermedias pueden ser descartadas

Método de Newton Raphson

Método de Newton Raphson

También conocido como ***Método de Newton.***

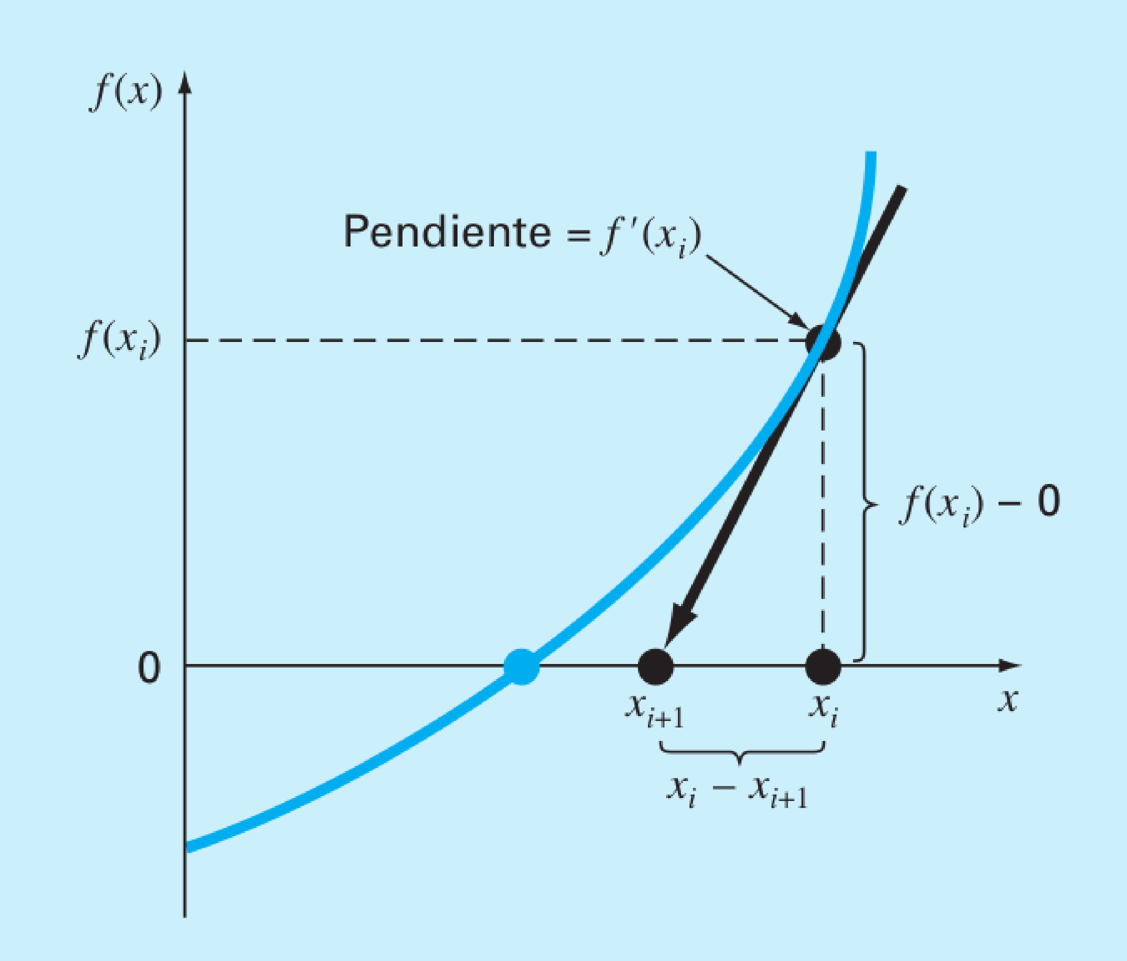
Dada una aproximación inicial de la raíz x_0, el método Newton-Raphson usa información sobre la función y su derivada en ese punto para encontrar una mejor aproximación de la raíz.

Condiciones:

- $f(x)$ es continua y se conoce la primera derivada
- Aproximación inicial x_0 tal que $f'(x_0) \neq 0$

Representación Gráfica

Si la aproximación inicial de la raíz es x_i, entonces se extrapola desde x_i una tangente a la función (que es $\boldsymbol{f'(x_i)}$)hacia el eje x para proporcionar una estimación de la raíz en x_{i+1}.



Derivación del método

Dado: x_i, una aproximación inicial de la raíz de $f(x)=0$.
Pregunta: ¿Cómo obtener una mejor estimación de x_{i+1}?

Teorema de Taylor: $f(x+h) \simeq f(x)+f'(x)h$
Encontrar un valor de h tal que $f(x+h)=0$

$$\Rightarrow h \cong -\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Una nueva estimación de la raíz:

Fórmula del método:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Algoritmo del método de Newton

Condiciones:

- Dados: $f(x)$, $f'(x)$, x_0.
- Sea: $f'(x_0) \neq 0$

Algoritmo:

loop ($i=0:n$)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

end loop

Ejemplo

Encuentre un cero de la función: $f(x)=x^3-2x^2+x-3$, $x_0=4$.

Ejemplo

Encuentre un cero de la función: $f(x)=x^3-2x^2+x-3$, $x_0=4$.

=> $f'(x)=3x^2-4x+1$

Ejemplo

Encuentre un cero de la función: $f(x)=x^3-2x^2+x-3$, $x_0=4$.

=> $f'(x)=3x^2-4x+1$

Iteración 1: $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{33}{33} = 3$$

Ejemplo

Encuentre un cero de la función: $f(x)=x^3-2x^2+x-3$, $x_0=4$.

=> $f'(x)=3x^2-4x+1$

Iteración 1: $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{33}{33} = 3$$

Iteración 2: $$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3 - \frac{9}{16} = 2.4375$$

Ejemplo

Encuentre un cero de la función: *f(x)=x³-2x²+x-3, x₀=4.*

=> *f'(x)=3x²-4x+1*

Iteración 1: $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 4 - \frac{33}{33} = 3$$

Iteración 2: $$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3 - \frac{9}{16} = 2.4375$$

Iteración 3: $$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2.4375 - \frac{2.0369}{9.0742} = 2.2130$$

Análisis de convergencia

Teorema:

Sea *f(x)*, *f'(x)* y *f''(x)* continuas en $x \simeq r$, donde $f(r)=0$. Si $f'(r) \neq 0$ entonces existe $\delta>0$, tal que:

$$|x_0 - r| \leq \delta \Rightarrow \frac{|x_{k+1} - r|}{|x_k - r|^2} \leq C$$

La convergencia es **cuadrática**

Observaciones

- Cuando la aproximación está lo suficientemente cerca de una raíz simple de la función, se garantiza que el método de Newton converge cuadráticamente.

- La convergencia cuadrática significa que el número de dígitos correctos se duplica (aproximadamente) en cada iteración.

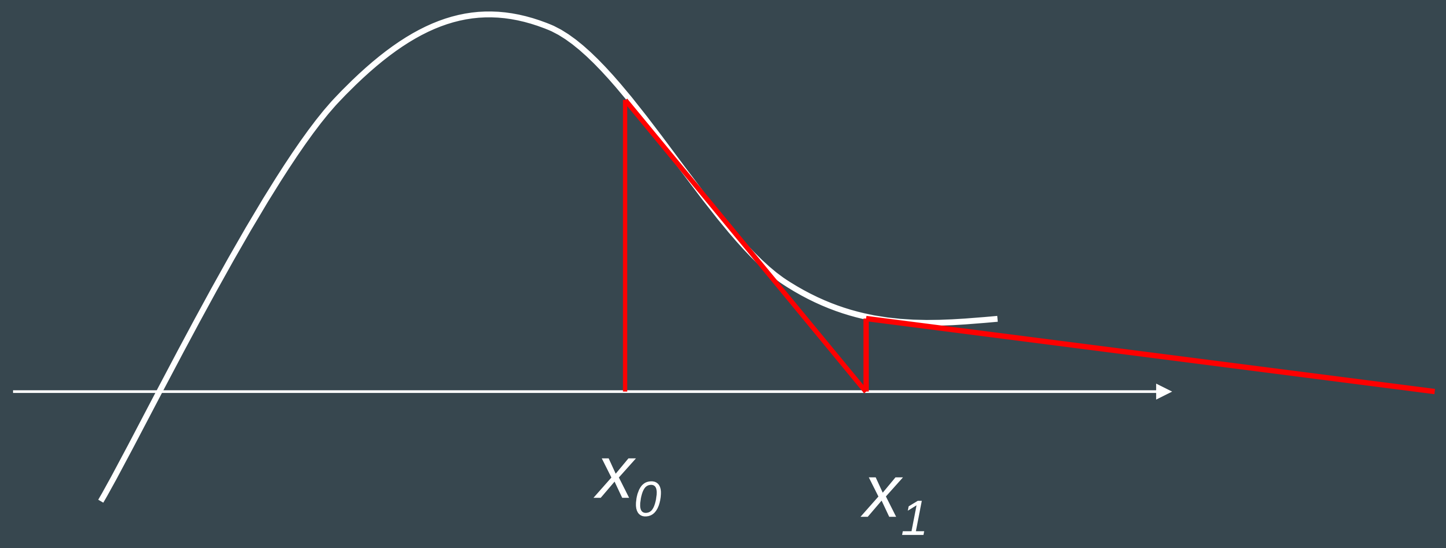
Problemas con el Método de Newton

- Si la aproximación inicial de la raíz está lejos de la raíz verdadera, el método puede no converger.

- El método de Newton converge linealmente cerca de múltiples ceros *{f(r)=f'(r)=0}*. En estos casos, se pueden usar algoritmos modificados para recuperar la convergencia cuadrática

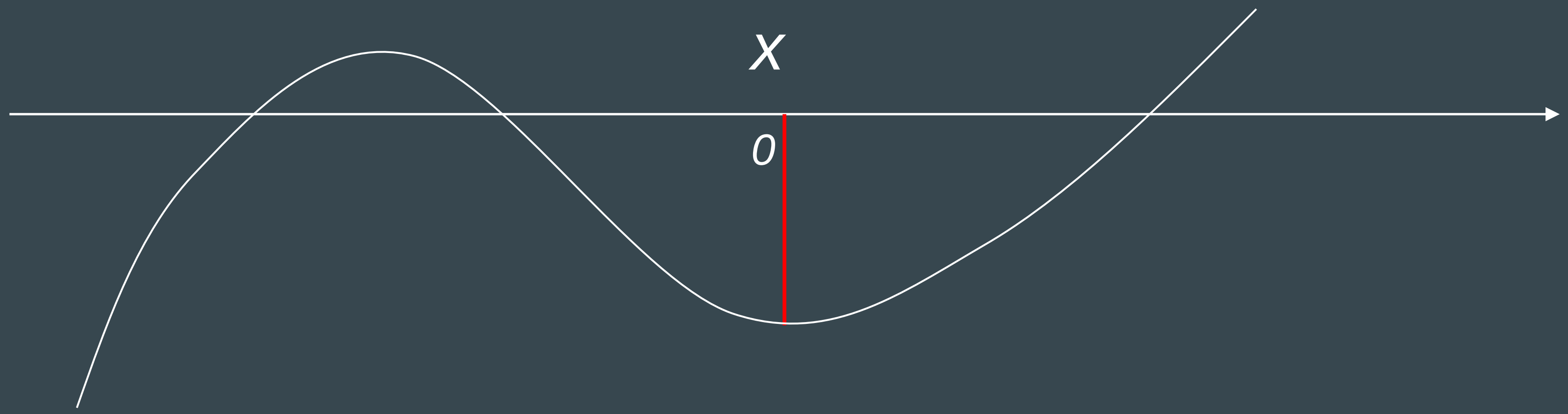
Fuga

Las estimaciones de la raíz se alejan de la raíz.



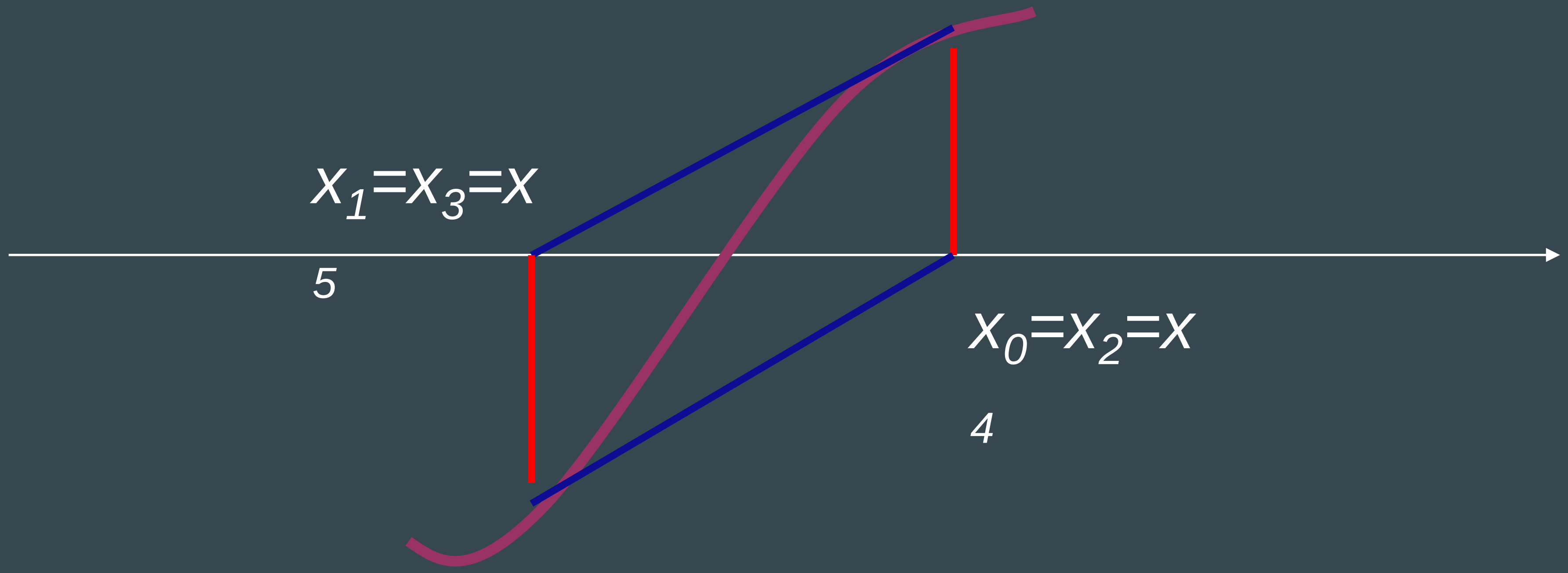
Punto plano

- Si el valor de $f'(x)$ es cero, el algoritmo falla.
- Si $f'(x)$ es muy pequeño, entonces x_1 estará muy lejos de x_0.



Ciclo

El algoritmo alterna entre dos valores x_0 y x_1.



Método de Newton para Sistemas de Ecuaciones

Dado: X_0, una aproximación inicial de la raíz de $F(X)=0$.

Iteración de Newton:

$X_{k+1}=X_k - [F'(X)]^{-1}F(X)$

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad F'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$y+x^2-0.5-x=0$

$x^2-5xy-y=0$

Aproximación inicial $x=1$, $y=0$.

$$F=\begin{bmatrix} y+x^2-0.5-x \\ x^2-5xy-y \end{bmatrix}, F'=\begin{bmatrix} 2x-1 & 1 \\ 2x-5y & -5x-1 \end{bmatrix}, X_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución utilizando el método de Newton

Iteración 1:

$$F = \begin{bmatrix} y + x^2 - 0.5 - x \\ x^2 - 5xy - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, F' = \begin{bmatrix} 2x - 1 & 1 \\ 2x - 5y & -5x - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

Solución utilizando el método de Newton

Iteración 2:

$$F = \begin{bmatrix} 0.0625 \\ -0.25 \end{bmatrix}, F' = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1.25 & -7.25 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 1.75 & -7.25 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.0625 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2332 \\ 0.2126 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$y+x^2-1-x=0$

$x^2-2y^2-y=0$

Aproximación inicial $x=0$, $y=0$.

$$F = \begin{bmatrix} y + x^2 - 1 - x \\ x^2 - 2y^2 - y \end{bmatrix}, F' = \begin{bmatrix} 2x - 1 & 1 \\ 2x & -4y - 1 \end{bmatrix}, X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Iteration	0	1	2	3	4	5
X_k	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5287 \\ 0.1969 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5257 \\ 0.1980 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5257 \\ 0.1980 \end{bmatrix}$

Método de la secante

Resumen del Método de Newton

Condiciones:

- Dados: $f(x)$, $f'(x)$, x_0.
- Sea: $f'(x_0) \neq 0$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Problema:

$f'(x_i)$ no existe o no se puede hallar fácilmente.

Método de la secante

Partiendo de la aproximación:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Si x_i y x_{i-1} son dos puntos iniciales:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{(x-x_i)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i-f(x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}} = x_i - f(x_i)\frac{(x_i-x_{i-1})}{f(x_i)-f(x_{i-1})}$$

Método de la secante

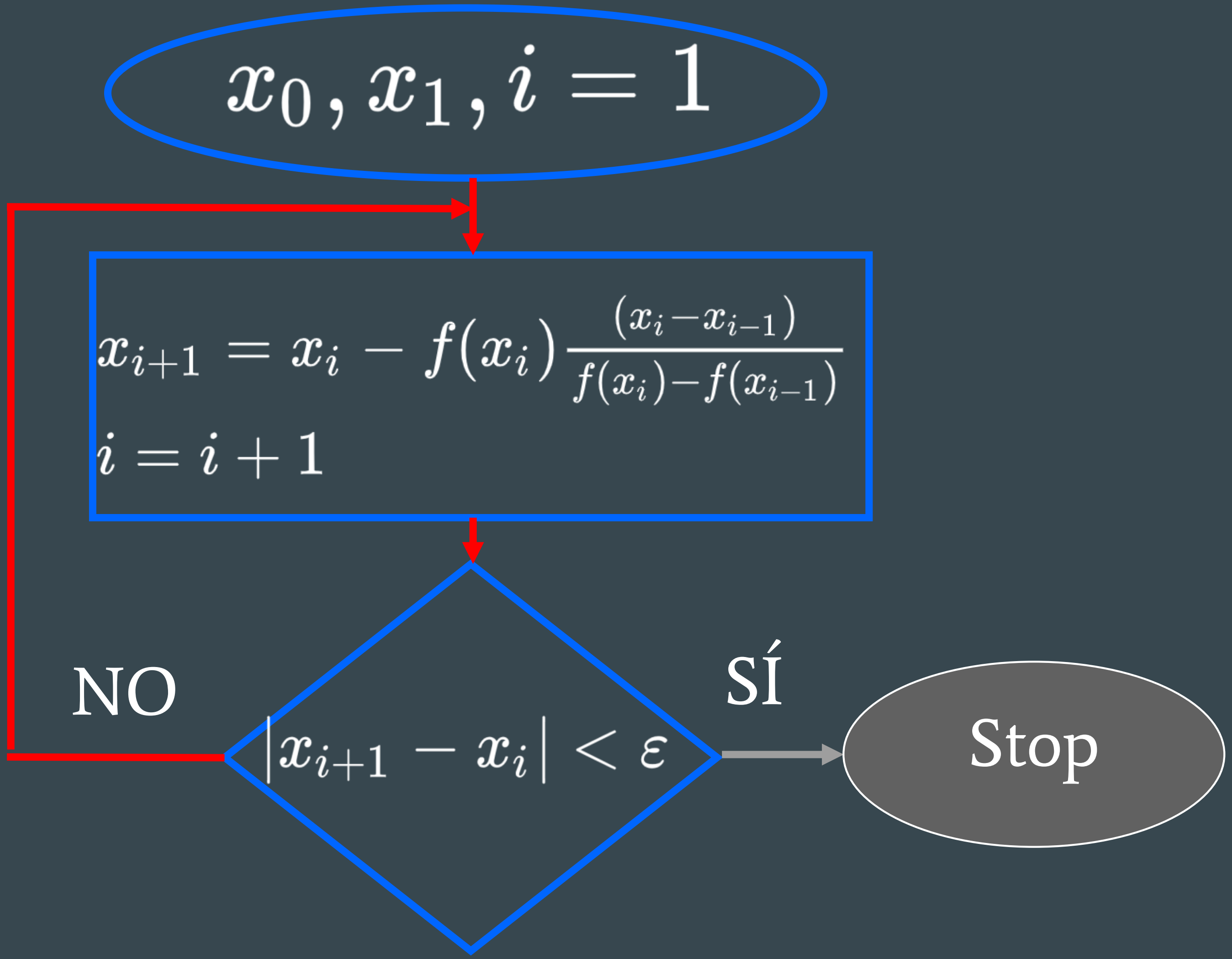
Condiciones:

- Dos puntos iniciales: x_i y x_{i-1}
- Tales que: $f(x_i) \neq f(x_{i-1})$

La nueva aproximación con el **método de la secante** es:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Diagrama de flujo

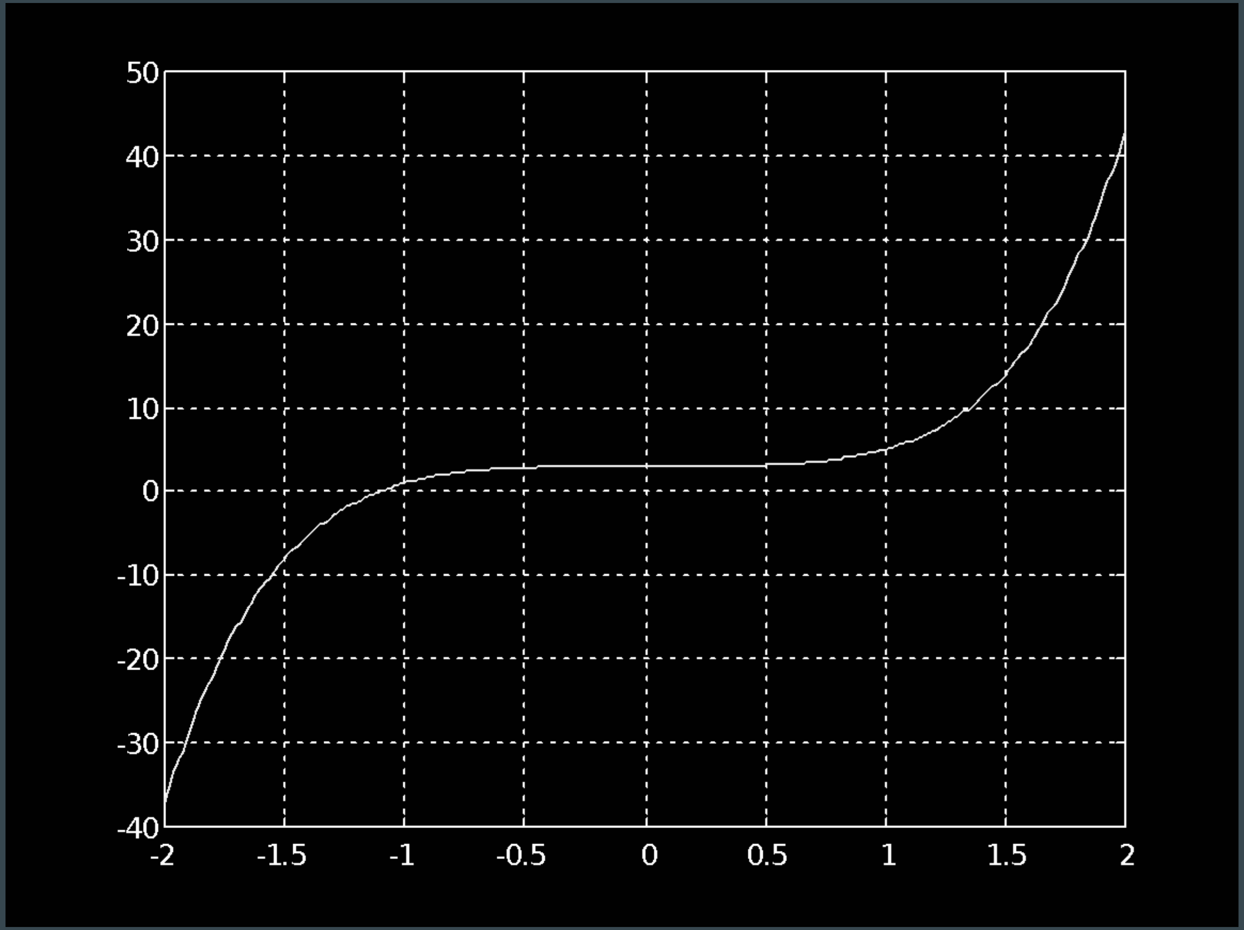


Ejemplo

Encontrar una raíz de: $f(x)=x^5+x^3+3$

Puntos iniciales: $x_0=-1$, $x_1=-1.1$

Con error <0.001



Ejemplo

x_i	$f(x_i)$	x_{i+1}	$\|x_{i+1}-x_i\|$
-1.0000	1.0000	-1.1000	0.1000

Ejemplo

x_i	$f(x_i)$	x_{i+1}	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert$
-1.0000	1.0000	-1.1000	0.1000
-1.1000	0.0585	-1.1062	0. 0062

Ejemplo

x_i	$f(x_i)$	x_{i+1}	$\|x_{i+1}-x_i\|$
-1.0000	1.0000	-1.1000	0.1000
-1.1000	0.0585	-1.1062	0. 0062
-1.1062	0.0102	-1.1052	0.0009

Ejemplo

x_i	$f(x_i)$	x_{i+1}	$\|x_{i+1}-x_i\|$
-1.0000	1.0000	-1.1000	0.1000
-1.1000	0.0585	-1.1062	0. 0062
-1.1062	0.0102	-1.1052	0.0009
-1.1052	0.0001	-1.1052	0.0000

Método modificado de la secante

En este método modificado de la secante, solo se necesita una aproximación inicial:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i)+\delta x_i}{\delta x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i+\delta x_i)-f(x_i)}{\delta x_i}} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i+\delta x_i)-f(x_i)}$$

Problema: ¿Cómo seleccionar δ apropiadamente para evitar divergencia?

Análisis de Convergencia

La tasa de convergencia del método de la Secante es superlineal:

$$\frac{|x_{i+1} - r|}{|x_i - r|^{\alpha}} \leq C, \quad \alpha \approx 1.62$$

$$r : \text{raíz} \qquad x_i : \text{estimación de la raíz en la iteración } i$$

Es mejor que el método de bisección, pero no tan bueno como el método de Newton.

Comparación entre métodos

Resumen

Método	Pros	Contras
Bisección	- Fácil, confiable, convergente - Una evaluación de función por iteración - No se necesita conocimiento de derivadas.	- Lento - Necesita un intervalo *[a,b]* que contenga la raíz, es decir, $f(a)f(b)<0$
Newton	- Rápido (si está cerca de la raíz) - Dos evaluaciones de funciones por iteración	- Puede divergir - Necesita derivada y una suposición inicial x_0 tal que $f\,'(x_0)$ no es cero
Secante	- Rápido (más lento que Newton) - Una evaluación de función por iteración - No se necesita conocimiento de derivadas	- Puede divergir - Necesita dos puntos iniciales para adivinar x_0, x_1 de modo que $f\,(x_0)$ - $f\,(x_0)$ no es cero

Ejemplo

Usar el método de la secante para encontrar una raíz de:
$f(x)=x^6-x-1$

Dos puntos iniciales en: $x_0=1$ y $x_1=1.5$.

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)\frac{(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Solución

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0000	-1.0000
1	1.5000	8.8906

Solución

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0000	-1.0000
1	1.5000	8.8906
2	1.0506	-0.7062

Solución

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0000	-1.0000
1	1.5000	8.8906
2	1.0506	-0.7062
3	1.0836	-0.4645

Solución

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0000	-1.0000
1	1.5000	8.8906
2	1.0506	-0.7062
3	1.0836	-0.4645
4	1.1472	0.1321

Solución

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0000	-1.0000
1	1.5000	8.8906
2	1.0506	-0.7062
3	1.0836	-0.4645
4	1.1472	0.1321
5	1.1331	-0.0165

Solución

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0000	-1.0000
1	1.5000	8.8906
2	1.0506	-0.7062
3	1.0836	-0.4645
4	1.1472	0.1321
5	1.1331	-0.0165
6	1.1347	-0.0005

Ejemplo

Usar el método de Newton para encontrar una raíz de:
$f(x)=x^3-x-1$.

Usar el punto inicial: $x_0=1$.
Detenerse después de tres iteraciones, o
si $|x_{k+1}-x_k|<0.001$, o
si $|f(x_k)|<0.0001$.

Ejemplo

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\|x_{k+1}-x_k\|$
0	1.0000	-1.0000	2.0000	1.5000	0.5000

Ejemplo

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$
0	1.0000	-1.0000	2.0000	1.5000	0.5000
1	1.5000	0.8750	5.7500	1.3478	0.1522

Ejemplo

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$
0	1.0000	-1.0000	2.0000	1.5000	0.5000
1	1.5000	0.8750	5.7500	1.3478	0.1522
2	1.3478	0.1007	4.4499	1.3252	0.0226

Ejemplo

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\|x_{k+1}-x_k\|$
0	1.0000	-1.0000	2.0000	1.5000	0.5000
1	1.5000	0.8750	5.7500	1.3478	0.1522
2	1.3478	0.1007	4.4499	1.3252	0.0226
3	1.3252	0.0021	4.2685	1.3247	**0.0005**

Ejemplo

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert x_{k+1}-x_k \rvert$
0	1.0000	-1.0000	2.0000	1.5000	0.5000
1	1.5000	0.8750	5.7500	1.3478	0.1522
2	1.3478	0.1007	4.4499	1.3252	0.0226
3	1.3252	0.0021	4.2685	1.3247	0.0005
4	1.3247	**0.0000**	4.2646	1.3247	0.0000

Ejemplo

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	x_{k+1}	$\|x_{k+1}-x_k\|$
0	1.0000	-1.0000	2.0000	1.5000	0.5000
1	1.5000	0.8750	5.7500	1.3478	0.1522
2	1.3478	0.1007	4.4499	1.3252	0.0226
3	1.3252	0.0021	4.2685	1.3247	0.0005
4	1.3247	0.0000	4.2646	1.3247	0.0000
5	1.3247	0.0000	4.2646	1.3247	0.0000