PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Docente: Nidia Quintero Peña

2-2020

Taller 14.

TEORÍA DE PROBABILIDAD.

DISTRIBUCIONES DE MUESTREO

1. Dada la población uniforme discreta,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = 2, 4, 6, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

a. Calcule la probabilidad de que una muestra aleatoria de tamaño 54, seleccionada con reemplazo, produzca una media muestral mayor que 4.1 pero menor que 4.4.

Media :

$$E(x) = 2 * f(2) + 4 * f(4) + 6 * f(6) = 2 * \frac{1}{3} + 4 * \frac{1}{3} + 6 * \frac{1}{3} = \frac{2+4+6}{3} = 4$$

Varianza:

$$S(x) = \frac{1}{3} * ((2-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2) = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3} = \frac{2+4+6}{3} = \frac{8}{3}$$

Desviacion estándar

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{S(x)}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{3}}{54}} = \frac{2}{9}$$

Se calcula la probabilidad:

$$P(4.1 < X < 4.4) = P(\frac{4.1 - E(x)}{\sigma(x)} < \frac{X - E(x)}{\sigma(x)} < \frac{4.4 - E(x)}{\sigma(x)})$$

$$= P(\frac{4.1 - 4}{\frac{2}{9}} < Z < \frac{4.4 - 4}{\frac{2}{9}})$$

$$= P(0.45 < Z < 1.8)$$

$$= P(Z < 1.8) - P(Z \leq 0.45)$$

$$= 0.9641 - 0.6736$$

$$= 0.2905$$

b. Si el tamaño de la muestra se reduce a 20, qué valor de probabilidad produce una media muestral mayor que 3.8 y menor que 4.2.

Desviacion estándar

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{S(x)}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{8}{3}}{20}} = \frac{\sqrt{30}}{15}$$

Se calcula la probabilidad:

$$P(3.8 < X < 4.2) = P(\frac{3.8 - E(x)}{\sigma(x)} < \frac{X - E(x)}{\sigma(x)} < \frac{4.2 - E(x)}{\sigma(x)})$$

$$= P(\frac{3.8 - 4}{\frac{\sqrt{30}}{15}} < Z < \frac{4.2 - 4}{\frac{\sqrt{30}}{15}})$$

$$= P(-0.54 < Z < 0.54)$$

$$= 0.1449$$

2.La cantidad de tiempo que le toma al cajero de un banco con servicio en el automóvil atender a un cliente es una variable aleatoria con una media de 3.2 minutos y una desviación estándar de 1.6 minutos. Si se observa una muestra aleatoria de 64 clientes, calcule la probabilidad de que el tiempo medio que el cliente pasa en la ventanilla del cajero sea:

E(x)=3.2

$$\sigma(x) = \frac{1.6}{\sqrt{64}} = \frac{1.6}{8}$$

a. A lo sumo 2.7 minutos.

$$P\left(Z \leq \frac{2.7-3.2}{\frac{1.6}{8}}\right) = P(Z \leq -2.5) = 0.0062 = 0.62\%$$

b. Más de 3.5 minutos.

$$P\left(Z > \frac{3.5-3.2}{\frac{1.6}{8}}\right) = P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668 = 6.68\%$$

c. Entre 2.8 minutos y 3.4 minutos.

$$P\left(\frac{3.2-3.2}{\frac{1.6}{8}} \leq Z \leq \frac{3.4-3.2}{\frac{1.6}{8}}\right) = P(0 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq 0) = 0.8413 - 0.5$$

$$= 0.3413$$

3. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 25 de una población normal que tiene una media de 80 y una desviación estándar de 5. Una segunda muestra aleatoria de tamaño 36 se toma de una población normal diferente que tiene una media de 75 y una desviación estándar de 3. Calcule la probabilidad de que la media muestral calculada de las 25 mediciones exceda la media muestral calculada de las 36 mediciones por lo menos 3.4 pero menos de 5.9.

Primera muestra:

E(x1)=80 n1=25 σ1=5

$$\sigma 1(x) = \frac{\sigma 1}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$$

Segunda muestra:

E(x2)=75 n2=36 σ2=3

$$\sigma 2(x) = \frac{\sigma 2}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{1}{2}$$

Conjuntas

E(x1x2)=80-75=5

$$\sigma(x1x2) = \sqrt{\frac{25}{25} + \frac{9}{36}} = 1.118$$

$$P(3.4 \leq (X1 - X2) \leq 5.9) = P\left(\frac{3.4 - 5}{1.118} \leq Z \leq \frac{5.9 - 5}{1.118}\right) = P(-1.431 \leq Z \leq 0.805)$$

$$= P(Z \leq 0.805) - P(Z \leq -1.431) = 0.7896 - 0.0762 = 0.7134$$

4. Suponga que las varianzas muestrales son mediciones continuas. Calcule la probabilidad de que una muestra aleatoria de 25 observaciones, de una población normal con varianza 6, tenga una varianza muestral:

a. Mayor que 9.1

$$X^2 = \frac{(n-1) * s^2}{\sigma^2} = \frac{(25-1) * (9.1)}{6} = \frac{218.4}{6} = 36.4$$

$$X^2 = 36.4 \quad cuando\ v = 24 \quad \therefore \quad \mathrm{P} = 0.05$$

b. Entre 3.462 y 10.745

$$X^2 = \frac{(n-1) * s^2}{\sigma^2} = \frac{(25-1) * (3.462)}{6} = \frac{83.088}{6} = 13.848$$

$$X^2 = 13.848 \quad cuando\ v = 24 \quad \therefore \quad \mathrm{P} = 0.95$$

$$X^2 = \frac{(n-1) * s^2}{\sigma^2} = \frac{(25-1) * (10.745)}{6} = \frac{257.88}{6} = 42.98$$

$$X^2 = 42.98 \quad cuando\ v = 24 \quad \therefore \quad \mathrm{P} = 0.01$$

$$P(3.462 \leq s^2 \leq 10.745) = 0.95 - 0.01 = 0.94$$

5. Una empresa que fabrica juguetes electrónicos afirma que las baterías que utiliza en sus productos duran un promedio de 30 horas. Para mantener este promedio se prueban 16 baterías cada mes. Si el valor t calculado cae entre -t0.025 y t0.025, la empresa queda satisfecha con su afirmación. ¿Qué conclusiones debería sacar la empresa a partir de una muestra que tiene una media de $\bar{x}$ = 27.5 horas y una desviación estándar de s = 5 horas? Suponga que la distribución de las duraciones de las baterías es aproximadamente normal.

E=30 N=16 Xm=27.5 S=5

La empresa queda satisfecha si un amuestra de 16 baterias rinde un valor t entre -2.131 y 2.131.

$$T = \frac{Xm - E}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{27.5 - 30}{\frac{5}{\sqrt{16}}} = -2$$

La conclusión es que la afirmación de la empresa es satisfactoria ya que el resultado esta entre el parámetro establecido para decir que las baterías promedian las 30 horas de duración.