PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Docente: Nidia Quintero Peña

2-2020

Taller 12.TEORÍA DE PROBABILIDAD.

DOS VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

1.Demuestre que la siguiente función satisface las propiedades de una función de masa de probabilidad conjunta.

x	y	F_{XY} (x,y)
1.5	2	1/8
1.5	3	1/4
2.5	4	1/2
3	5	1/8

A . $f\text{xy}\ (x, y) \geq 0$

Todos los valores de Fxy(x,y) son mayores a 0.

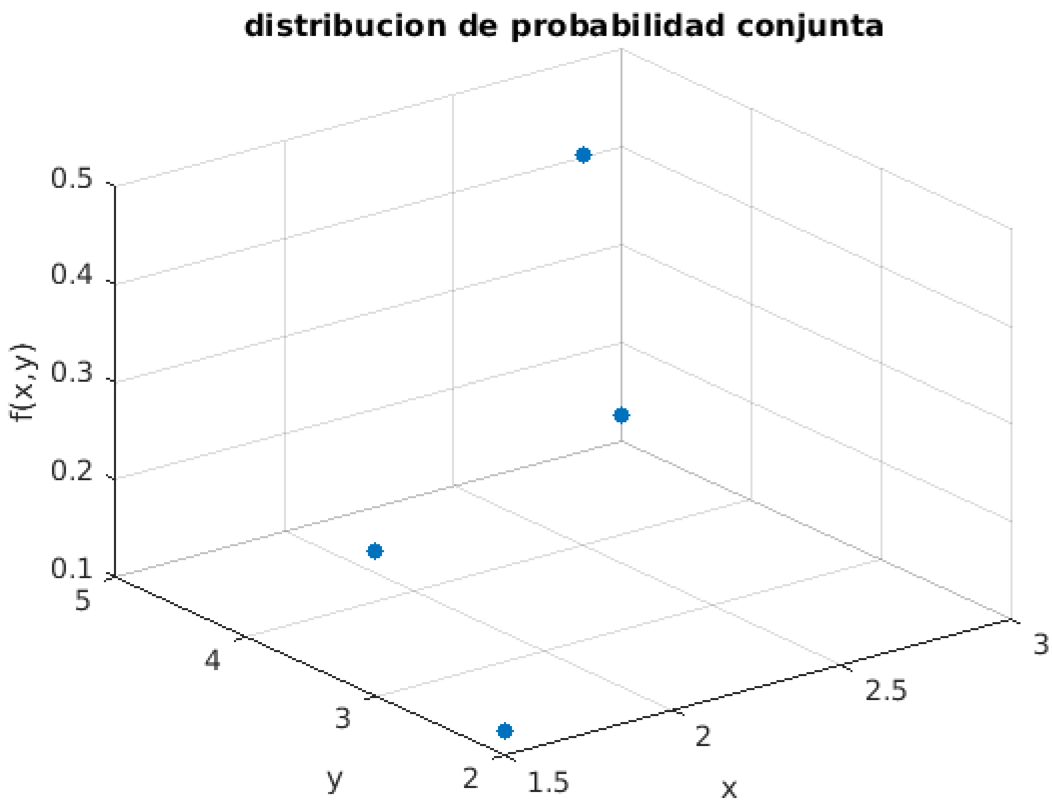
B. $\sum x \sum y\ fxy(\ x, y)\ =\ 1$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ =1

C. $f\text{xy}\ (x, y) = P(X = x, Y = y)$

2. Con los datos del ejercicio 1 resolver:

a. Grafica de la función de masa de probabilidad conjunta.



b. Calcule P(X < 2.5, Y < 3)

$$P(X < 2.5, Y < 3) = P(1.5\,,2) = \frac{1}{8}$$

c. Calcule P(X < 2.5)

$$P(X < 2.5) = P(1.5\,,2) + P(1.5\,,3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

d. Calcule P(1 < X < 3, Y = 5)

$$\mathrm{P}(1 < \mathrm{X} \ < 3\,, \mathrm{Y} = 5) = \mathrm{P}(1.5\,, 5) + \mathrm{P}(2.5\,, 5) = 0$$

e. Calcule P(X > 1.8, Y > 4.7)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \ > \ 1.8, \mathrm{Y} \ > \ 4.7) = \mathrm{P}(3\,, 5) = \frac{1}{8}$$

f. Determine E(X) y E(Y)

$$\mathrm{E(x)} = \sum x \sum y \ Xfxy\ (x, y) = 1.5 * \frac{1}{8} + 1.5 * \frac{1}{4} + 2.5 * \frac{1}{2} + 3 * \frac{1}{8} = 2.1875$$

$$\mathrm{E(y)} = \sum x \sum y \ Yfxy\ (x, y) = 2 * \frac{1}{8} + 3 * \frac{1}{4} + 4 * \frac{1}{2} + 5 * \frac{1}{8} = 3.625$$

g. Determine la distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria X y de la variable aleatoria Y.

para x:

$$(\mathrm{x} = 1.5\,) : \ \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

$$(\mathrm{x} = 2.5\,) : \ \frac{1}{2}$$

$$(\mathrm{x} = 3\,) : \ \frac{1}{8}$$

$$f(\mathrm{x}\,) = \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$$

para y:

$$(\mathrm{y} = 2\,) : \frac{1}{8}$$

$$(\mathrm{y} = 3\,) : \frac{1}{4}$$

$$(\mathrm{y} = 4\,) : \frac{1}{2}$$

$$(\mathrm{y} = 5) : \frac{1}{8}$$

$$f(\mathrm{y}\,) = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$$

h. Determine la distribución de probabilidad condicional de Y dado que X = 1.5.

$$f(\mathrm{y} \mid \mathrm{x}) = \frac{f(x,y)}{f(x)}$$

$$f(\mathrm{y} = 2 \mid 1.5) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

$$f(\mathrm{y} = 3 \mid 1.5) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

i. Determine la distribución de probabilidad condicional de X dado que Y = 2.

$$f(\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

$$f(\mathrm{x} = 1.5 \mid 2) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}} = 1$$

j. Determine la media condicional de Y dado que X = 1.5.

$$E(\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = \sum y\, Y f(y|x) = 2 * 0.33333 + 3 * 0.66666 = 2.6666$$

k. Determine la media condicional de X dado que Y = 2.

$$E(\mathrm{x} \mid \mathrm{y}) = \sum x\, X f(x|y) = 1.5 * 1 = 1.5$$

l. Determine si las variables aleatorias X, Y son independientes.

Probar que :

$$f(x, y) = f(x) * f(y)$$

f(x,y)	f(x)	f(y)	f(x)*f(y)
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{64}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{32}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$

Ya que

$$f(x, y) \neq f(x) * f(y)$$

Se dice que las variables aleatorias no son independientes

m. Determine la media de la variable g(X,Y) = 3X+2Y.

$$E\big(g(x, y)\big) = \sum x \sum y \;\; g(x, y) * f(x, y)$$

$$E\big(g(x, y)\big) = 8.5 * \frac{1}{8} + 10.5 * \frac{1}{4} + 15.5 * \frac{1}{2} + 19 * \frac{1}{8} = 13.8125$$

3. Se tiene la función de masa de probabilidad conjunta fxy(x,y)= c x2 y ; con x = 1, 2, 3; y = 3, 4. Determine el valor de c para que fxy(x,y) cumpla las propiedades de probabilidad conjunta.

x	y	f(x,y)
1	3	C*3
1	4	C*4
2	3	C*12
2	4	C*16
3	3	C*27
3	4	C*36

Primera propiedad:

$$\sum x \sum y \; fxy(\,x, y) \;=\; 1$$

$$C * (3 + 4 + 12 + 16 + 27 + 36) = \; 1 \quad \therefore \quad \mathrm{C} * 96 = 1 \quad \therefore \quad \mathrm{c} = \frac{1}{98}$$

Segunda propiedad

$$\mathrm{fxy}\ (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \;\geq\; 0$$

x	y	f(x,y)
1	3	0.0306
1	4	0.0408
2	3	0.1224
2	4	0.1632
3	3	0.2755
3	4	0.3673