PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

TERCER PARCIAL

Docente: NIDIA QUINTERO PEÑA

Grupo: D1

PROBLEMA 1

La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo [1, 3] y la variable aleatoria Y tiene distribución uniforme en el intervalo [2, 5]. Si se conoce que las variables X y Y son independientes. Se desea calcular:

a) La función de densidad de probabilidad conjunta fxy(x,y)

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$f(y) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}$$

Por independencia:

$$f(x,y) = f(x) * f(y) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

b) P(X > 1.5, 2 < Y < 3.5)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 1.5, 2 < \mathrm{Y} < 3.5) = \int_{2}^{3.5} \int_{1.5}^{3} \frac{1}{6} dxdy = 0.375$$

c) P(X > 2)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 2) = \int_{2}^{5} \int_{2}^{3} \frac{1}{6} dxdy = 0.5$$

d) P(Y > 2.5)

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} > 2.5 = \int_{2.5}^{5} \int_{1}^{3} \frac{1}{6} dxdy = 0.833$$

e) P(X > 2 | Y = 3)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 2 \,|\, \mathrm{Y} = 3) = \int \frac{f(x,y)}{f(Y)} dx = \int_{2}^{3} \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{2}$$

f) P(Y < 4 | X = 2)

$$P(Y < 4 \mid X = 2) = \int \frac{f(x,y)}{f(x)} dx = \int_{2}^{4} \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}$$

g) E(X), E(Y).

$$E(x) = \int x * f(x) dx = \int_{1}^{3} x * \frac{1}{2} dx = 2$$

$$E(y) = \int y * f(y) dy = \int_{2}^{5} y * \frac{1}{3} dy = \frac{7}{2}$$

h) V(X), V(Y).

$$V(x) = \int (x - E(x))^2 * f(x) dx = \int_{1}^{3} (x-2)^2 * \frac{1}{2} dx = \frac{1}{3}$$

$$V(y) = \int (y - E(y))^2 * f(y) dy = \int_{2}^{5} (y - \frac{7}{2})^2 * \frac{1}{3} dy = \frac{3}{4}$$

Se define una variable aleatoria Z como: Z = 2Y – X, calcular:

i) E(Z).

$$E(z) = \int \int z * f(x,y) dxdy = \int_{2}^{5} \int_{1}^{3} (2y - x) * \frac{1}{6} dxdy = 5$$

j) V(Z).

$$V(z) = \int \int (z - E(z))^2 * f(x,y) = \int_{2}^{5} \int_{1}^{3} ((2y - x) - 5)^2 * \frac{1}{6} dxdy = \frac{10}{3}$$

PROBLEMA 2

Suponga que cada rueda trasera de un avión experimental se llena a una presión de 40 psi. Sea X la presión real del aire para la rueda derecha y Y la presión real del aire para la rueda izquierda. Suponga que la relación entre las variables aleatorias X y Y es la función de densidad conjunta:

$f$xy(x, y) = k(x 2 + y 2), 30 ≤ x < 50, 30 ≤ y < 50

$f$xy(x, y) = 0 en otro caso

Calcular:

a) k para que fxy(x,y) cumpla con las propiedades de una función de densidad de probabilidad conjunta.

$$k * \int_{30}^{50}\int_{30}^{50}(x^2+y^2)dxdy = 1$$

$$k * \frac{3920000}{3} = 1 \qquad \therefore \quad \mathrm{k} = \frac{3}{3920000}$$

b) P(30 < X < 40, 40 < Y < 50).

$$\mathrm{P}(30 < \mathrm{X} < 40, 40 < \mathrm{Y} < 50) = \frac{3}{3920000}\int_{40}^{50}\int_{30}^{40}(x^2+y^2)dxdy = \frac{1}{4}$$

c) La probabilidad de que ambas ruedas no contengan la suficiente cantidad de aire.

$$\mathrm{P}(30 < \mathrm{X} < 40, 30 < \mathrm{Y} < 40) = \frac{3}{3920000}\int_{30}^{40}\int_{30}^{40}(x^2+y^2)dxdy = \frac{37}{196}$$

d) $P(35 < X < 45 \mid Y = 40)$

$$f(y) = \int f(x,y)dx = \frac{3}{3920000}\int_{30}^{50}(x^2+y^2)dx = \frac{3y^2+4900}{196000}$$

$$\mathrm{P}(35 < \mathrm{X} < 45 \mid \mathrm{Y} = 40) = \int \frac{f(x,y)}{f(y)}dx = \int_{35}^{45}\frac{\frac{3}{3920000}(x^2+40^2)}{\frac{3*40^2+4900}{196000}}dx = \frac{385}{776}$$

e) P(35 < Y < 45 | X = 40)

$$f(x) = \int f(x,y)dy = \frac{3}{3920000}\int_{30}^{50}(x^2+y^2)dy = \frac{3x^2+4900}{196000}$$

$$\mathrm{P}(35 < \mathrm{Y} < 45 \,|\, \mathrm{X} = 40) = \int \frac{f(x,y)}{f(x)}dy = \int_{35}^{45} \frac{\frac{3}{3920000}(40^2+y^2)}{\frac{3*40^2+4900}{196000}}dx = \frac{385}{776}$$

f) P(30 < X < 40)

$$\mathrm{P}(30 < \mathrm{X} < 40) = \frac{3}{3920000}\int_{30}^{50}\int_{30}^{40}(x^2+y^2)dxdy = \frac{43}{98}$$

g) P(30 < Y < 40)

$$\mathrm{P}(30 < \mathrm{Y} < 40) = \frac{3}{3920000}\int_{30}^{40}\int_{30}^{50}(x^2+y^2)dxdy = \frac{43}{98}$$

h) La covarianza y la correlación entre la presión real del aire de la rueda derecha y de la rueda izquierda.

$$E(x) = \int_{30}^{50} x*(\frac{3x^2+4900}{196000})dx = \frac{2000}{49}$$

$$E(y) = \int_{30}^{50} y*(\frac{3y^2+4900}{196000})dy = \frac{2000}{49}$$

$$E(x,y) = \int\int xyf(x,y)dxdy = \int_{30}^{50}\int_{30}^{50} xy(x^2+y^2)dxdy = \frac{81600}{49}$$

Covarianza:

$$Cov = E(x,y) - E(x)E(y) = \frac{81600}{49} - \left(\frac{2000}{49}\right)^2 = -0.639$$

$$V(x) = \int_{30}^{50}(x-\frac{2000}{49})^2 * \frac{3x^2+4900}{196000}dx = 32.939$$

$$V(y) = \int_{30}^{50} (y - \frac{2000}{49})^2 * \frac{3y^2 + 4900}{196000} dy = 32.939$$

Correlación:

$$Pxy = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{V(x)V(y)}} = \frac{-0.639}{\sqrt{32.939^2}} = \frac{-0.639}{32.939} = -0.019$$

PROBLEMA 3

Sea X el número de veces que fallará cierta máquina de control numérico: 1, 2 o3 veces en un día dado. Y sea Y el número de veces que se llama a un técnico para una emergencia, su distribución de probabilidad conjunta está dada como se muestra en la tabla:

$f(x,y)$		x = 1	2	3
y	1	0.05	0.05	0.10
	3	0.05	0.10	0.35
	5	0.00	0.20	0.10

Calcular:

a) P(X > 1.5, 2 < Y < 4)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 1.5, 2 < \mathrm{Y} < 4) = 0.1 + 0.35 = 0.45$$

b) P(X > 1)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 1) = 0.05 + 0.1 + 0.2 + 0.35 + 0.1 = 0.9$$

c) P(Y > 1)

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} > 1) = 0.05 + 0 + 0.1 + 0.2 + 0.35 + 0.1 = 0.8$$

d) P(X | Y = 3)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \mid \mathrm{Y} = 3) = 0.05 + 0.1 + 0.35 = 0.5$$

e) P(Y | X = 2)

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} \mid \mathrm{X} = 2) = 0.05 + 0.1 + 0.2 = 0.35$$

f) E(X), E(Y).

$$E(x) = \sum x \sum y \quad x * f(x,y)$$
$$= 1 * (0.05 + 0.05 + 0) + 2 * (0.05 + 0.1 + 0.2) + 3 * (0.1 + 0.35 + 0.1)$$
$$= 2.45$$

$$E(x) = \sum x \sum y \quad y * f(x,y)$$

$$= 1 * (0.05 + 0.05 + 0.1) + 3 * (0.05 + 0.1 + 0.35) + 5 * (0 + 0.2 + 0.1)$$

$$= 3.2$$

g) V(X), V(Y).

$$V(x) = \sum x \sum y \ \left(x - E(x)\right)^2 * f(x,y)$$

$$= 2.1025(0.1) + 0.2025(0.35) + 0.3025(0.55) = 0.4475$$

$$V(y) = \sum x \sum y \ \left(y - E(y)\right)^2 * f(x,y)$$

$$= 4.84(0.2) + 0.04(0.5) + 3.24(0.3) = 1.96$$

h) La covarianza y la correlación de X, Y.

$$E(x,y) = \sum x \sum y \ \ xyf(x,y) =$$

$$1 * 1 * 0.05 + 1 * 3 * 0.05 + 1 * 5 * 0 + 2 * 1 * 0.05 + 2 * 3 * 0.1 + 2 * 5 * 0.2 + 3 * 1 * 0.1$$

$$+3 * 3 * 0.35 + 3 * 5 * 0.1 = 7.85$$

$$Cov = 7.85 - 2.45 * 3.2 = 0.01$$

$$Pxy = \frac{0.01}{\sqrt{0.4475 * 1.96}} = 0.0106$$

PROBLEMA 4

Suponga que se tienen tres variables aleatorias independientes con las siguiente características: X es N(μ = 1, σ = 1), Y es N(μ = 3, σ = 2) y Z es N(μ = 4, σ = 3). Calcular:

a) La función de densidad de probabilidad conjunta fxyz(x,y,z)

distribución normal :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Los intervalos se determinan : $\mu \pm \frac{\sigma^2}{2}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-1)^2}{2}} \quad para \;\; x \; entre \; \{0.5; 1.5\}$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * 2} e^{\frac{-(x-3)^2}{8}} \; para \; y \; entre \; \{-1; 7\}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} * 3} e^{\frac{-(x-4)^2}{18}} para \; z \; entre \; \{-5; 13\}$$

Por independencia

$$f(x, y, z) = f(x)f(y)f(z)$$

$$f(x, y, z) = 0.01058 * e^{\frac{-36x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 72x + 54y + 32z - 181}{72}}$$

b) P(X > 1, Y < 2, Z > 3)

$$\mathrm{P} = \int_3^{13} \int_{-1}^{2} \int_1^{1.5} 0.01058 * e^{\frac{-36x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 72x + 54y + 32z - 181}{72}} dxdydz = 0.0344$$

c) P(X > 2)

la probabilidad es de 0 ya que x va de 0.5 a 1.5 .

d) P(Y > 4)

$$\mathrm{P} = \int_{-5}^{13} \int_4^{7} \int_{0.5}^{1.5} 0.01058 * e^{\frac{-36x^2 - 9y^2 - 4z^2 + 72x + 54y + 32z - 181}{72}} dxdydz = 0.1093$$

e) P(0 < X < 2 , 1 < Y < 5| Z = 5)

$$P = \int_0^2 f(x)dx * \int_1^5 f(y)dy * Pz(z = 5) = 0.0820$$

f) P(1 < X < 3 | Y = 4, Z = 6)

$$P = \int_1^3 f(x)dx * Py(y = 4) * Pz(z = 6) = 0.0102$$

Se define una variable aleatoria W como: W = 2X + Y + 3Z, calcular:

g) E(W).

$$\mathrm{E(w)} = \int_{-5}^{13}\int_{-1}^{7}\int_{0.5}^{1.5}(2x+y+3z) * 0.01058 * e^{\frac{-36x^2-9y^2-4z^2+72x+54y+32z-181}{72}}\,dxdydz$$

$$E(w) = 6.1954$$

h) V(W).

$$\mathrm{V(w)} = \int_{-5}^{13}\int_{-1}^{7}\int_{0.5}^{1.5}((2x+y+3z)-6.1954)^2 * 0.01058 * e^{\frac{-36x^2-9y^2-4z^2+72x+54y+32z-181}{72}}\,dxdydz$$

$$V(w) = 72.5218$$