PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Docente: Nidia Quintero Peña

2-2020

Taller 13. TEORÍA DE PROBABILIDAD.

DOS VARIABLES ALEATORIAS CONTINUAS

1. Determine el valor de c, tal que la función fxy(x,y) = c(x2+3y) para 0 < x < 10, 5 < y < 15 satisfaga las propiedades de una función de densidad de probabilidad conjunta.

$$C * \int_5^{15} \int_0^{10} x^2 + 3y \; dxdy = C * \frac{19000}{3} = 1 \qquad \therefore \qquad \mathrm{C} = \frac{3}{19000}$$

2. Con los datos del ejercicio anterior calcule.

a. P(X < 5, Y < 10)

$$\frac{3}{19000} * \int_5^{10} \int_0^{5} x^2 + 3y \; dxdy = \frac{37}{304} = 0.1217$$

b. P(2 < X < 7)

$$\frac{3}{19000} * \int_5^{15} \int_2^{7} x^2 + 3y \; dxdy = \frac{157}{380} = 0.413$$

c. P(6 < Y < 12)

$$\frac{3}{19000} * \int_6^{12} \int_0^{10} x^2 + 3y \; dxdy = \frac{543}{450} = 0.5715$$

d. P(X > 4, 7 < Y < 13)

$$\frac{3}{19000} * \int_7^{13} \int_0^{4} x^2 + 3y \; dxdy = \frac{318}{2375} = 0.1338$$

e. E(X)

$$E(X) = \frac{3}{19000} * \int_0^{10} \int_5^{15} x * (x^2 + 3y) \; dydx = \frac{120}{19} = 6.3157$$

f. E(Y)

$$E(Y) = \frac{3}{19000} * \int_{5}^{15} \int_{0}^{10} y * (x^2 + 3y)\, dxdy = \frac{395}{38} = 10.394$$

g. La distribución de probabilidad marginal de la variable aleatoria X y de la variable aleatoria Y.

$$f(X) = \frac{3}{19000} * \int_{5}^{15} x^2 + 3y \ \ dy = \frac{3}{1900} * (x^2 + 30)$$

$$f(Y) = \frac{3}{19000} * \int_{0}^{10} x^2 + 3y \ \ dx = \frac{100 + 9y}{1900}$$

h. La distribución de probabilidad condicional de Y dado que X = 5.

$$f(Y|5) = \frac{fxy(5, y)}{fx(5)} = \frac{\frac{3}{19000}(5^2 + 3y)}{\frac{3}{1900}(5^2 + 30)} = \frac{25 + 3y}{550}$$

i. La distribución de probabilidad condicional de X dado que Y = 10.

$$f(x|10) = \frac{fxy(x, 10)}{fx(10)} = \frac{\frac{3}{19000}(x^2 + 30)}{\frac{100 + 90}{1900}} = \frac{3}{1900} * (x^2 + 30)$$

j. La media condicional de Y dado que X = 5.

$$E(y|5) = \int_{5}^{15} y * (\frac{25 + 3y}{550})\, dy = \frac{115}{11} = 10.4545$$

k. La media condicional de X dado que Y = 10.

$$E(x|10) = \int_{0}^{10} x * (\frac{3}{1900} * (x^2 + 30))\, dx = \frac{120}{19} = 6.3157$$

l. Muestre si las variables aleatorias son independientes.

$$f(x|y) = fx(x) = \frac{3}{1900} * (x^2 + 30)$$

m. Si las variables son independientes, calcule la covarianza y la correlación.

$$Cov(x, y) = E(xy) - E(x) * E(y) = 65.1315 - 6.3157 * 10.394 = -0.51388$$

$$Pxy = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{V(x) * V(y)}} = \frac{-0.51388}{\sqrt{7.47922 * 8.17751}} = -0.0657$$

3. El tiempo entre los problemas de terminado superficial en un proceso de galvanización tiene una distribución exponencial con una media de 40 horas. En una planta operan tres líneas de galvanizado cuyo funcionamiento se supone independiente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no se experimenten problemas de terminado superficial en ninguna de las líneas en 40 horas de operación?

Probabilidad de que ocurra:

$$P = \int_{0}^{40} \frac{1}{40} e^{-\frac{1}{40}x}\, dx * \int_{0}^{40} \frac{1}{40} e^{-\frac{1}{40}y} dy * \int_{0}^{40} \frac{1}{40} e^{-\frac{1}{40}z} dz = 0.2525$$

Probabilidad de que no ocurra:

$$1 - 0.2525 = 0.7475$$

b. ¿Cuál es la probabilidad de que en las tres líneas se experimente un problema de terminado superficial dentro de 20 y 40 horas de operación?

$$p = \int_{20}^{40} \frac{1}{40} e^{-\frac{1}{40}x}\, dx * \int_{20}^{40} \frac{1}{40} e^{-\frac{1}{40}y} dy * \int_{20}^{40} \frac{1}{40} e^{-\frac{1}{40}z} dz = 0.01359$$