Curso de Sistemas Digitales.

Instructor: Dr.Ing. Sergio A. Abreo C.

Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones

Universidad Industrial de Santander

Semana: 2

Connectivity and Signal Processing Research Group.
info@cps.uis.edu.co http://cps.uis.edu.co/index.php

Agenda

Introducción.

Discusión

- ¿Por qué estudiar Algebra de Boole?

Introducción.

Un poco de historia

- El álgebra de Boole se inventó en el año de 1854, por el matemático inglés George Boole.
- Primero declaró la idea del álgebra de Boole en su libro "Una investigación de las leyes del pensamiento".
- A fines del siglo XIX, los científicos Jevons, Schroder y Huntington utilizaron este concepto para términos modernizados.
- En la década de 1940, un científico llamado Claude Shannon desarrolló un nuevo método de álgebra en su trabajo de maestría utilizando los conceptos de álgebra de Boole, para estudiar los circuitos de conmutación.

Introducción.

Un poco de historia

- El álgebra de Boole se inventó en el año de 1854, por el matemático inglés George Boole.
- Primero declaró la idea del álgebra de Boole en su libro "Una investigación de las leyes del pensamiento".
- A fines del siglo XIX, los científicos Jevons, Schroder y Huntington utilizaron este concepto para términos modernizados.
- En la década de 1940, un científico llamado Claude Shannon desarrolló un nuevo método de álgebra en su trabajo de maestría utilizando los conceptos de álgebra de Boole, para estudiar los circuitos de conmutación.

Introducción.

Un poco de historia

- El álgebra de Boole se inventó en el año de 1854, por el matemático inglés George Boole.
- Primero declaró la idea del álgebra de Boole en su libro "Una investigación de las leyes del pensamiento".
- A fines del siglo XIX, los científicos Jevons, Schroder y Huntington utilizaron este concepto para términos modernizados.
- En la década de 1940, un científico llamado Claude Shannon desarrolló un nuevo método de álgebra en su trabajo de maestría utilizando los conceptos de álgebra de Boole, para estudiar los circuitos de conmutación.

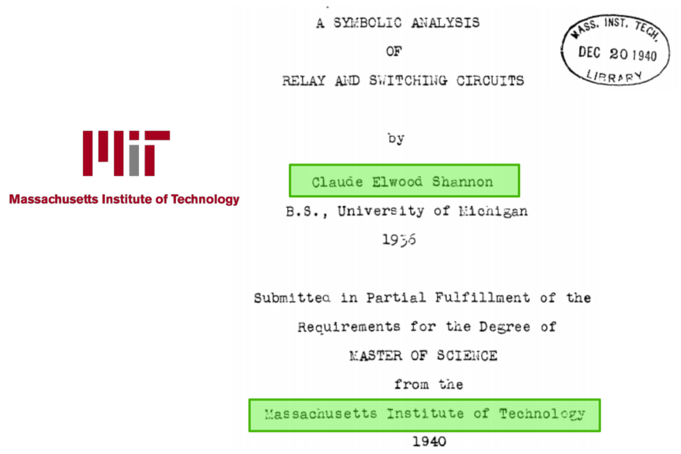
Introducción.

Un poco de historia

- El álgebra de Boole se inventó en el año de 1854, por el matemático inglés George Boole.
- Primero declaró la idea del álgebra de Boole en su libro “Una investigación de las leyes del pensamiento”.
- A fines del siglo XIX, los científicos Jevons, Schroder y Huntington utilizaron este concepto para términos modernizados.
- En la década de 1940, un científico llamado Claude Shannon desarrolló un nuevo método de álgebra en su trabajo de maestría utilizando los conceptos de álgebra de Boole, para estudiar los circuitos de conmutación.

Introducción.

Algebra de Boole



Massachusetts Institute of Technology

A SYMBOLIC ANALYSIS

OF

RELAY AND SWITCHING CIRCUITS

by

Claude Elwood Shannon

B.S., University of Michigan

1936

Submitted in Partial Fulfillment of the

Requirements for the Degree of

MASTER OF SCIENCE

from the

Massachusetts Institute of Technology

1940

Introducción.

Aclaración

- **No** se requiere ser un experto en **TODOS** los conceptos del Algebra de Boole.
- Algunos conceptos básicos **son suficientes** para ser un buen diseñador digital.

Algebra de Boole.

Operaciones

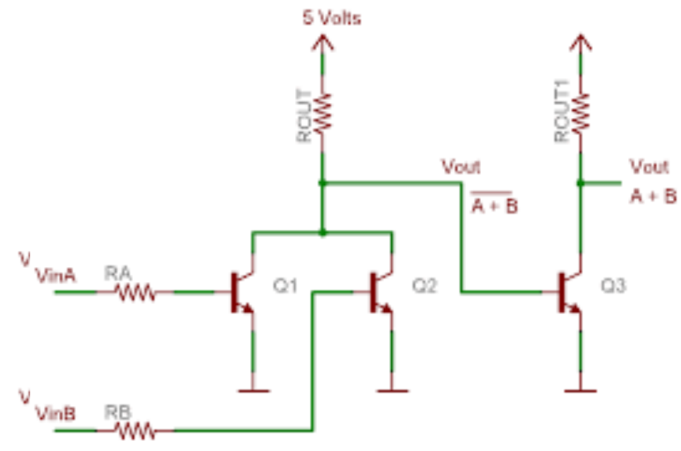
- Suma Boolena (+). O lógica: OR.
- Multiplicación Boolena (x). Y lógica: AND.
- Negación: NOT.

Variables

- 0
- 1

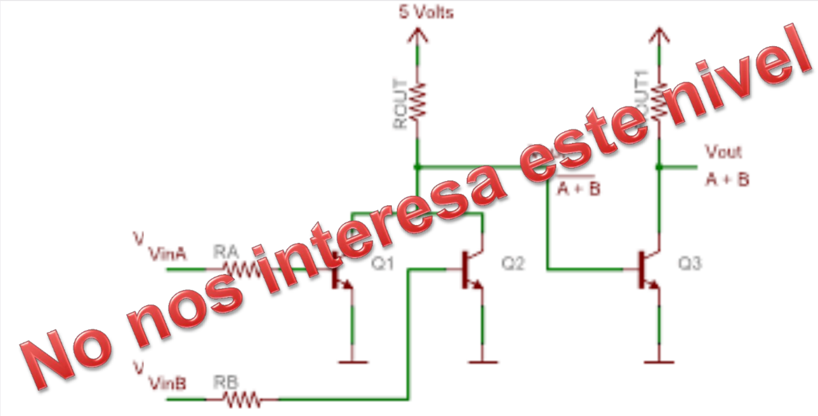
Algebra de Boole.

Compuerta OR



Algebra de Boole.

Compuerta OR



Algebra de Boole.

Compuerta OR

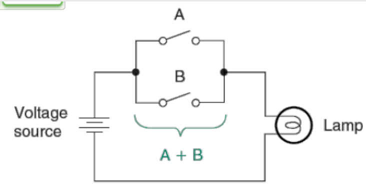
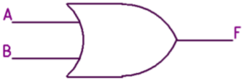
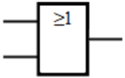


TABLA DE VERDAD

A	B	F
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**1**

SÍMBOLOS





EXPRESIÓN LÓGICA

$$F = A + B$$

Algebra de Boole.

Compuerta AND

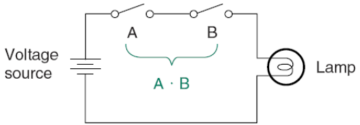
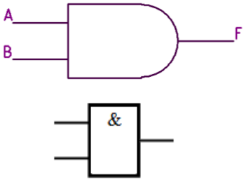


TABLA DE VERDAD

A	B	F
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

SÍMBOLOS



EXPRESIÓN LÓGICA

$$F = A \cdot B$$

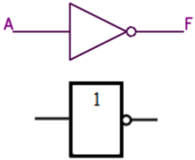
Algebra de Boole.

Compuerta NOT

TABLA DE VERDAD

A	F
0	1
1	0

SÍMBOLOS



EXPRESIÓN LÓGICA

$$F = A' = \overline{A}$$

Algebra de Boole.

Compuertas Universales

NAND: *not-and*

$$F = \overline{A \cdot B}$$

A	B	F
0	0	**1**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

NOR: *not-or*

$$\mathrm{F} = \overline{\mathrm{A} + \mathrm{B}}$$

A	B	F
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**0**

Algebra de Boole.

Compuertas Exclusivas

XOR: *exclusive-or*

$F = A \oplus B$

A	B	F
0	0	**0**
0	1	**1**
1	0	**1**
1	1	**0**

$$F = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$$

$$F = \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \cdot (A + B)$$

XNOR: *exclusive-nor*

$F = \overline{A \oplus B}$

A	B	F
0	0	**1**
0	1	**0**
1	0	**0**
1	1	**1**

$$F = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$$

$$F = \left(A + \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A} + B\right)$$

Algebra de Boole.

Propiedades

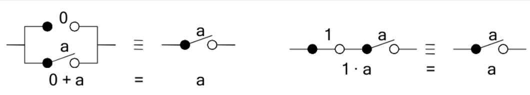
Elemento Neutro	$A + 0 = A$ $A \cdot 1 = A$
Conmutación	$A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$
Complemento - Elemento inverso	$A + A' = 1$ $A \cdot A' = 0$
Distribución	$A \cdot (B+C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$ $A + (B \cdot C) = (A+B) \cdot (A+C)$

Principio de Dualidad

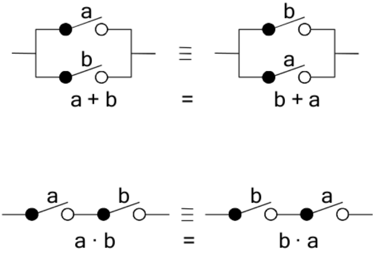
Si se intercambian "0" por "1" y "+" por "·" se obtiene una identidad igualmente válida.

Algebra de Boole: Propiedades.

Elemento Neutro

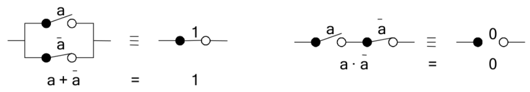


Conmutación

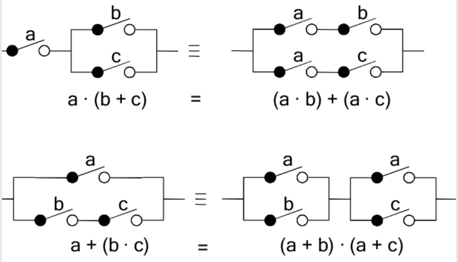


Algebra de Boole: Propiedades.

Complemento



Distribución



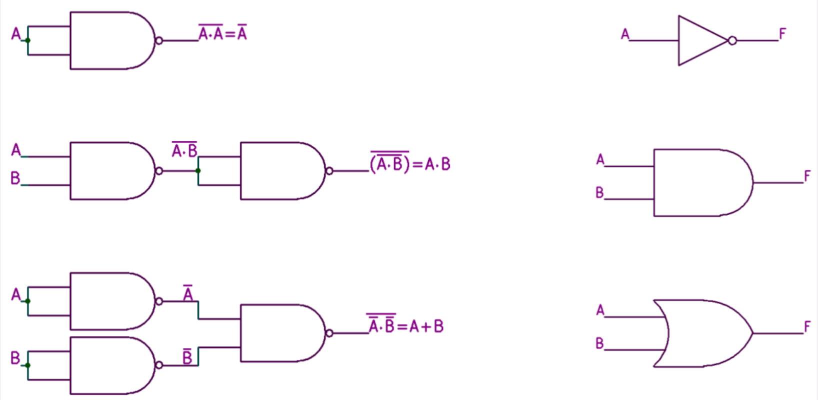
Algebra de Boole

Teoremas

Involución	$(A')' = A$	
Elemento Nulo	$A + 1 = 1$	$A \cdot 0 = 0$
Idempotencia	$A + A = A$	$A \cdot A = A$
Asociativa	$(A+B)+C = A+(B+C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Absorción	$A + A \cdot B = A$ $A \cdot B + A \cdot B' = A$ $A + A' \cdot B = A + B$	$A \cdot (A + B) = A$ $(A+B) \cdot (A+B') = A$ $A \cdot (A' + B) = A \cdot B$
Teorema de DeMorgan	$\overline{A + B + C} = A' \cdot B' \cdot C'$	$\overline{A \cdot B \cdot C} = A' + B' + C'$

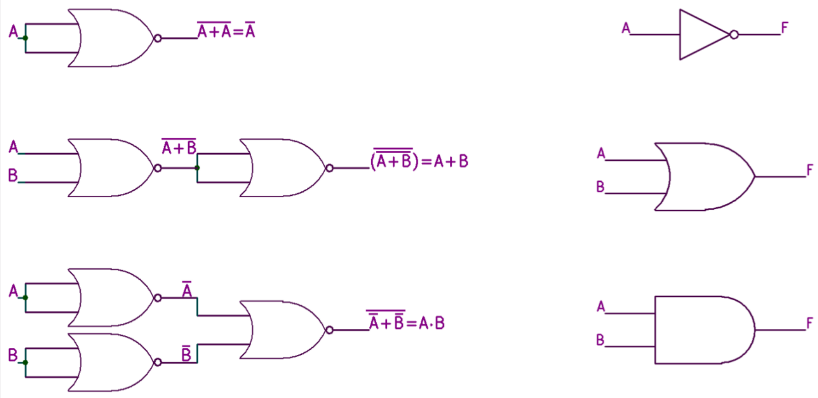
Algebra de Boole

Compuertas Universales: NAND



Algebra de Boole

Compuertas Universales: NOR



Algebra de Boole

Funciones Lógicas

- Expresiones booleanas formadas a partir de variables y operadores lógicos.
- También pueden ser representadas con una tabla de verdad.
- Se lista el valor de la función para cada combinación de valores de sus variables de entrada.

Min-término

Término producto normal.

Max-término

Término suma normal.

Definiciones

Literal

Variable o complemento de una variable.

Término Producto

Literal o producto lógico de 2 o más literales. Igual a '1' para una combinación, '0' el resto.

Término Suma

Literal o suma lógica de 2 o más literales. Igual a '0' para una combinación, '1' el resto.

Término Normal

Término en el cual están presentes todas las variables de la función sin repetirse.

Algebra de Boole

Min-términos y Max-términos

Con "n" variables se tendrán 2^n productos o sumas normales.

Entradas ABC	F(A,B,C)	Min-término	m_i	Max-término	M_i
000	F(0,0,0)	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	m_0	$A+B+C$	M_0
001	F(0,0,1)	$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C$	m_1	$A+B+\overline{C}$	M_1
010	F(0,1,0)	$\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}$	m_2	$A+\overline{B}+C$	M_2
011	F(0,1,1)	$\overline{A}\cdot B\cdot C$	m_3	$A+\overline{B}+\overline{C}$	M_3
100	F(1,0,0)	$A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}$	m_4	$\overline{A}+B+C$	M_4
101	F(1,0,1)	$A\cdot\overline{B}\cdot C$	m_5	$\overline{A}+B+\overline{C}$	M_5
110	F(1,1,0)	$A\cdot B\cdot\overline{C}$	m_6	$\overline{A}+\overline{B}+C$	M_6
111	F(1,1,1)	$A\cdot B\cdot C$	m_7	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	M_7

Min-términos y Max-términos de una función de tres variables.

Formas Estándar SOP y POS

Suma de productos (SOP)

Suma lógica de términos producto. Serie de productos (AND) conectados por la suma (OR).

$$F = \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{C} + B \tag{1}$$

Producto de sumas (POS)

Producto lógico de términos suma. Serie de sumas (OR) conectadas por la multiplicación (AND).

$$F = (A + \bar{B} + C) \cdot (B + \bar{C}) \cdot A \tag{2}$$

Definiciones

Min-término

- Corresponden a las combinaciones de entrada para las cuales la función es igual a 1.
- Cada min-término representa una compuerta AND de todas las entradas y la función es la operación OR de las salidas de las compuertas AND.

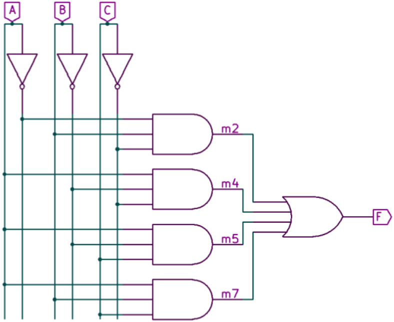
Max-término

- Corresponden a las combinaciones de entrada para las cuales la función es igual a '0'.
- Cada Max-término representa una compuerta OR de todas las entradas y la función es la operación AND de las salidas de las compuertas OR.

Ejemplo SOP

$$F = \sum_{A,B,C}(2,4,5,7) = \overline{A}\cdot B\cdot \overline{C} + A\cdot \overline{B}\cdot \overline{C} + A\cdot \overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot C$$

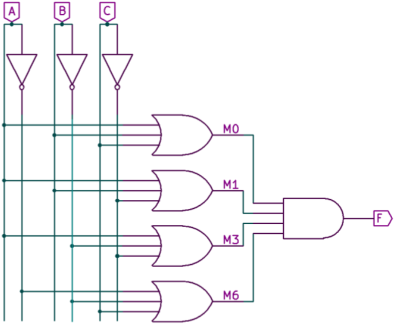
	A	B	C	F
	0	0	0	0
	0	0	1	0
m2	0	1	0	1
	0	1	1	0
m4	1	0	0	1
m5	1	0	1	1
	1	1	0	0
m7	1	1	1	1



Ejemplo POS

$$F = \prod_{A,B,C}(0,1,3,6) = (A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+C)$$

	A	B	C	F
M0	0	0	0	0
M1	0	0	1	0
	0	1	0	1
M3	0	1	1	0
	1	0	0	1
	1	0	1	1
M6	1	1	0	0
	1	1	1	1



¿Donde Puedo Aprender Más?

Textos de Referencia.

- [Tocci and Widmer, 2003].
- [Harris and Harris, 2010].

Agradecimientos

Grupo CPS: Línea Sistemas Digitales.

La información presentada en estas diapositivas intenta recopilar los elementos pedagógicos desarrollados por los profesores Carlos Fajardo y Carlos Angulo en sus cursos de Sistemas Digitales I durante los últimos años de trabajo en esta línea.

Referencias I

Harris, D. and Harris, S. (2010).
Digital design and computer architecture.
Morgan Kaufmann.

Tocci, R. J. and Widmer, N. S. (2003).
Sistemas digitales: principios y aplicaciones.
Pearson Educación.