

Identyfikacja procesów technologicznych

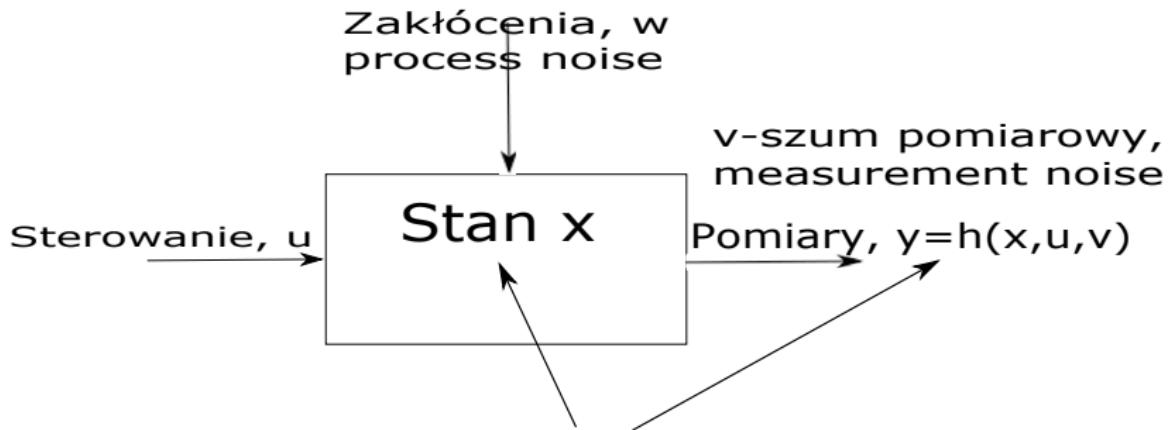
dr hab. inż. Piotr Bania, pba@agh.edu.pl, B1, p. 303

9 października 2020

- 1. Wprowadzenie do identyfikacji, podstawowe modele, proste przykłady, literatura.
- 2. Identyfikacja układów liniowych deterministycznych.
- 3. Teoria estymacji, metody konstrukcji estymatorów, oszacowania błędów, testy.
- 4. Identyfikacja modelu ARMAX metodami LS, RLS, PEM, RPEM.
- 5. Identyfikacja układów nieliniowych metodami ML oraz LS.

- 6. Przykłady, identyfikacja układu zbiorników z wodą, układów elektromechanicznych, modelu helikoptera, systemu ogrzewania.
- 7. Dobór sygnałów pobudzających.
- 8. Jednoczesna estymacja stanu i parametrów w układach liniowych stochastycznych, estymacja kowariancji szumów, strojenie filtru Kalmana.
- 9. Algorytmy numerycznego rozwiązywania zadań identyfikacji, przykład implementacji.
- 10. Test z wykładu i laboratorium.

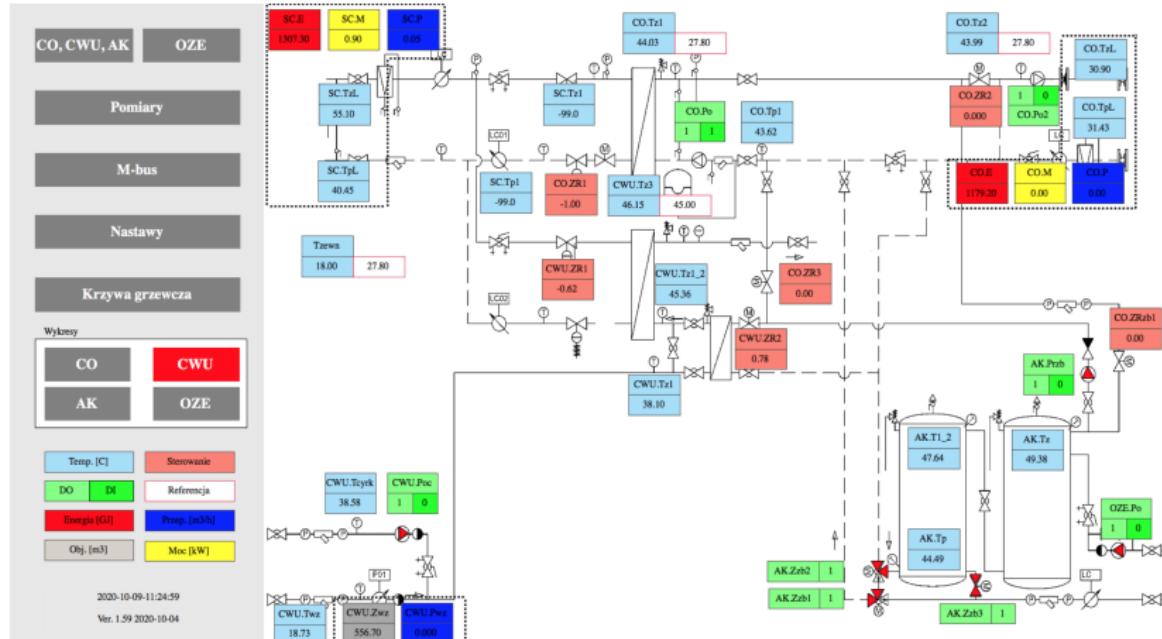
- ① Eykhoff P. Identyfikacja w układach dynamicznych. PWN, W-wa, 1980,
- ② Soderstrom T., Stoica P. Identyfikacja systemów, PWN, W-wa, 1997,
- ③ Abramowicz H. Jak analizować wyniki pomiarów. PWN, W-wa, 1992.
- ④ Kozłowski E. Analiza i identyfikacja szeregów czasowych. Politechnika Lubelska, Lublin, 2015.
- ⑤ Krzyśko M. Podstawy wielowymiarowego wnioskowania statystycznego. Wyd. Uniwersytetu A. Mickiewicza. Poznań, 2009.
- ⑥ Lehman E. L. Teoria estymacji punktowej. PWN, W-wa, 1991.
- ⑦ Sarkka S. Bayesian Filtering and Smoothing. Cambridge University Press. 2013.



Parametry: modelu,
modelu szumów, inne

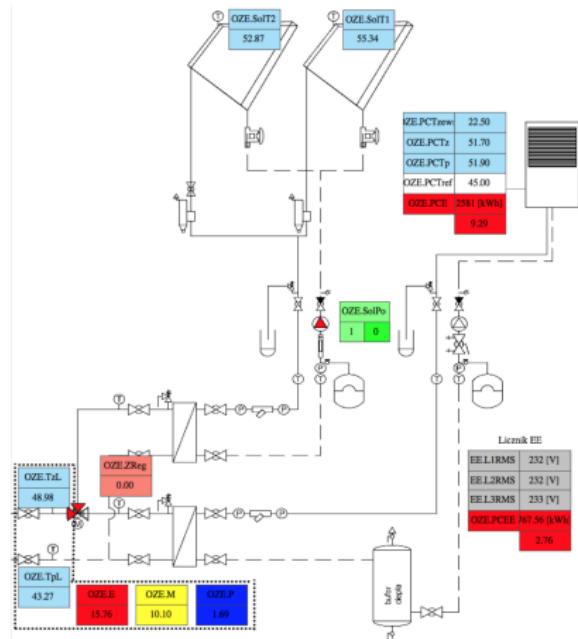
Rysunek: Model procesu.

Przykład, węzeł cieplny



Rysunek: Schemat węzła cieplnego.

Przykład, węzeł cieplny, OZE



Rysunek: Schemat węzła cieplnego, część OZE.

Uproszczony model cieplny budynku

Model pomieszczenia jest opisany następującym układem równań różniczkowych

$$\dot{T} = \frac{T_{zewn} - T}{\tau_p} + a_p \frac{T_s - T}{\tau_p} + k_f \frac{T_z - T}{\tau_p} + P_{wewn}, \quad (1)$$

$$\dot{T}_s = \frac{T_{zewn} - T_s}{\tau_s} + a_s \frac{T - T_s}{\tau_s} + P_{zewn}. \quad (2)$$

Temperatura wody powrotnej w obiegu CO

$$T_p = a(F) T_z + (1 - a(F)) T, \quad (3)$$

gdzie F oznacza przepływ,

$$a(F) = e^{-\frac{\gamma}{F}}, \quad (4)$$

opisuje wymianę ciepła w kaloryferze oraz γ jest parametrem.

Pomiary: T, T_{zewn}, F, T_z, T_p obarczone błędami.

Model wymiennika ciepła

Model wymiennika ciepła typu *cross-convection* ma postać

$$\tau \dot{T}_{pm} = -T_{pm} + (1 - \lambda_1(F_m, F)) T_{zm} + \lambda_1(F_m, F_{co}) T_p, \quad (5)$$

$$\tau \dot{T}_z = -T_z + (1 - \lambda_2(F_m, F)) T_{zm} + \lambda_2(F_m, F_{co}) T_p, \quad (6)$$

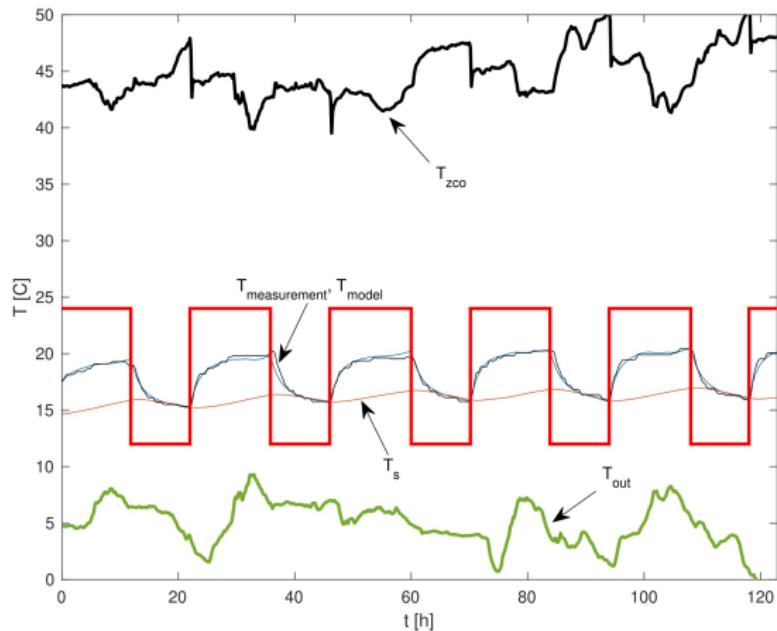
gdzie funkcje $\lambda_i(F_m, F) \in (0, 1)$ opisują wymianę ciepła.

Temperatura zasilania z sieci miejskiej

$$T_{z,m} = \varphi(T_{zewn}(t - \tau)) + v_{z,m}(t), \quad (7)$$

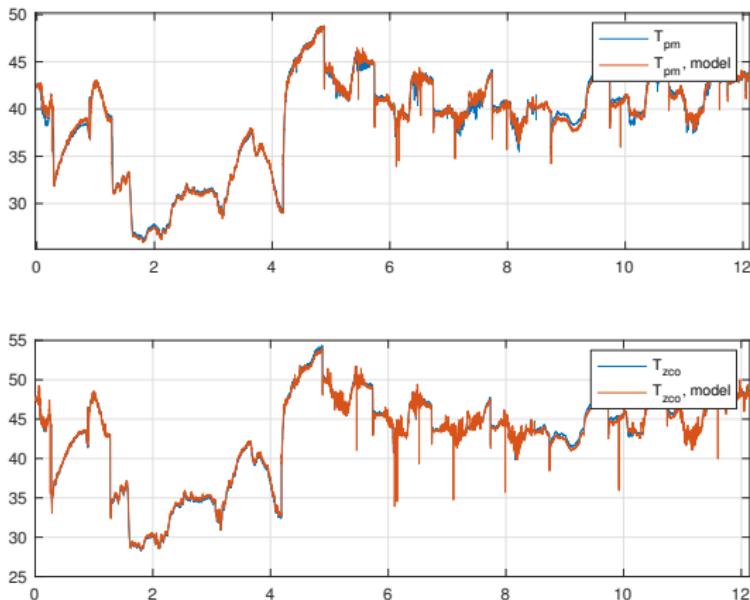
gdzie φ , oznacza znaną funkcję dostarczaną przez MPEC, τ jest opóźnieniem oraz $v_{z,m}$ jest zakłóceniem. Zmienną sterującą jest F_m . Przepływ F jest stały.

Identyfikacja modelu budynku



Rysunek: Wynik identyfikacji, porównanie pomiarów (czarny) i temperatury otrzymanej z modelu (niebieski), T_s oznacza temperaturę ścian estymowaną z modelu.

Identyfikacja wymiennika



Rysunek: Wynik identyfikacji wymiennika. Temperatura powrotna do sieci miejskiej (u góry) oraz temperatura zasilania obiegu CO (u dołu).

Etapy procesu modelowania/identyfikacji

Równania modelu \Rightarrow Projektowanie eksperymentu \Rightarrow Eksperyment
 \Rightarrow Dane \Rightarrow Metoda estymacji \Rightarrow Parametry \Rightarrow Weryfikacja modelu
 \Rightarrow Jeżeli dobrze, to STOP. W przeciwnym przypadku, analizujemy przyczyny niepowodzenia, modyfikujemy model lub eksperiment i powtarzamy wszystko od początku.

Ideałem jest estymacja rekursywna z automatycznym planowaniem eksperymentu i strojeniem modelu!

Modele procesów

Modele statyczne,

$$y_k = h(x_k, \theta) + v_k. \quad (8)$$

Modele dynamiczne z czasem dyskretnym

$$x_{k+1} = f(k, x_k, w_k, \theta), \quad (9)$$

$$y_k = h(k, x_k, v_k, \theta), \quad (10)$$

lub z czasem ciągłym

$$dx(t) = f(t, x(t), \theta) + g(t, x(t), \theta)dw(t), \quad (11)$$

$$y_k = h(x(t_k), v_k, \theta), \quad (12)$$

gdzie t_k jest (niemalejącym) ciągiem chwil próbkowania.

Zakłócenia w_k, v_k są scharakteryzowane przez ich rozkłady prawdopodobieństwa $p_w(k, w_k, \theta), p_v(k, v_k, \theta)$. Proces w jest zwykle standardowym, wektorowym procesem Wienera. Wektor parametrów θ jest nieznany.

Modele (1-5) wynikają z fizyki, z praw zachowania lub z innych ogólnych praw opisujących dany proces. Prawa te nie definiują konkretnego, modelowanego procesu, a jedynie pewną klasę procesów, zależną od nieznanego parametru θ . Aby znaleźć model procesu należy, na podstawie obserwacji wyznaczyć θ .

- Zmienne v_k nazywamy szumem pomiarowym (*measurement noise*).
- Zmienne w_k, w nazywamy szumem procesowym (*process noise*).
- Modele deterministyczne - brak elementów losowych w (1-5). Przypadek rzadki, ale łatwy do analizy.
- Jeżeli występują elementy losowe to mówimy o modelach stochastycznych (losowych). Przypadek częsty, ale trudny do analizy, gdy występuje szum procesowy w

Cele identyfikacji

Teoria i praktyka identyfikacji zajmuje się tworzeniem i wdrażaniem metod oraz algorytmów poszukiwania nieznanych parametrów θ . Algorytmy te wykorzystują dane tj. pomiary y_0, \dots, y_k . Ponadto w teorii identyfikacji rozważa się również optymalne warunki prowadzenia eksperymentu. Oznacza to m.in odpowiedni dobór sygnałów pobudzających, warunków początkowych oraz czasu i sposobu wykonywania pomiarów. W wyniku zastosowania odpowiedniej procedury otrzymuje się estymator $\hat{\theta}(y_0, \dots, y_k)$, nieznanego parametru θ . Estymatory mogą być wsadowe (łatwiejsze do znalezienia) lub rekursywne (co jest pożądane, ale na ogólnie trudne). Oprócz tego istnieją metody nieparametryczne (np. analiza widmowa), które też zaliczamy do metod identyfikacji. A zatem teoria identyfikacji, korzysta intensywnie z wyników statystyki oraz teorii estymacji.

Prosty przykład

$$y_k = \theta + v_k, \quad (13)$$

gdzie $v_k \sim N(0, \sigma)$ są niezależne oraz σ jest znane. Wykonano n pomiarów. Należy oszacować parametr θ . Korzystając z z niezależności v_k , otrzymamy

$$p(v_1, \dots, v_n) = N(y_1, \theta, \sigma) \dots N(y_n, \theta, \sigma). \quad (14)$$

Aby otrzymać estymator, zgodnie z metodą największej wiarygodności, możemy wybrać θ , które maksymalizuje wyrażenie (7).

Prosty rachunek daje estymator

$$\hat{\theta}(y_1, \dots, y_n) = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}. \quad (15)$$

Wartość oczekiwana tego estymatora

$$E(\hat{\theta}) = \frac{Ey_1 + \dots + Ey_n}{n} = \frac{n\theta}{n} = \theta. \quad (16)$$

Wariancja estymatora

$$var(\hat{\theta}) = \frac{var(y_1) + \dots + var(y_n)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (17)$$

Otrzymaliśmy zatem estymator, którego wartość oczekiwana jest równa prawdziwej wartości parametru oraz, którego odchylenie standardowe (średni błąd) zmierza do zera jak $1/\sqrt{n}$.

Przykład deterministyczny

Rozważmy proces opisany równaniem

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = x_0, a > 0 \quad (18)$$

oraz niech obserwacja ma postać

$$y_k = x(kT_s), \quad (19)$$

$k = 0, 1, \dots, n$, $T_s > 0$ jest okresem próbkowania. Niech
 $\theta = (a, b, x_0)$ oraz $u(t) = u_0 = \text{const.}$ Należy tak dobrać parametry
 θ aby $x(kT_s) = y_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Rozwiążanie równania (11) ma postać

$$x(t) = e^{-at}x_0 + \frac{bu_0}{a}(1 - e^{-at}). \quad (20)$$

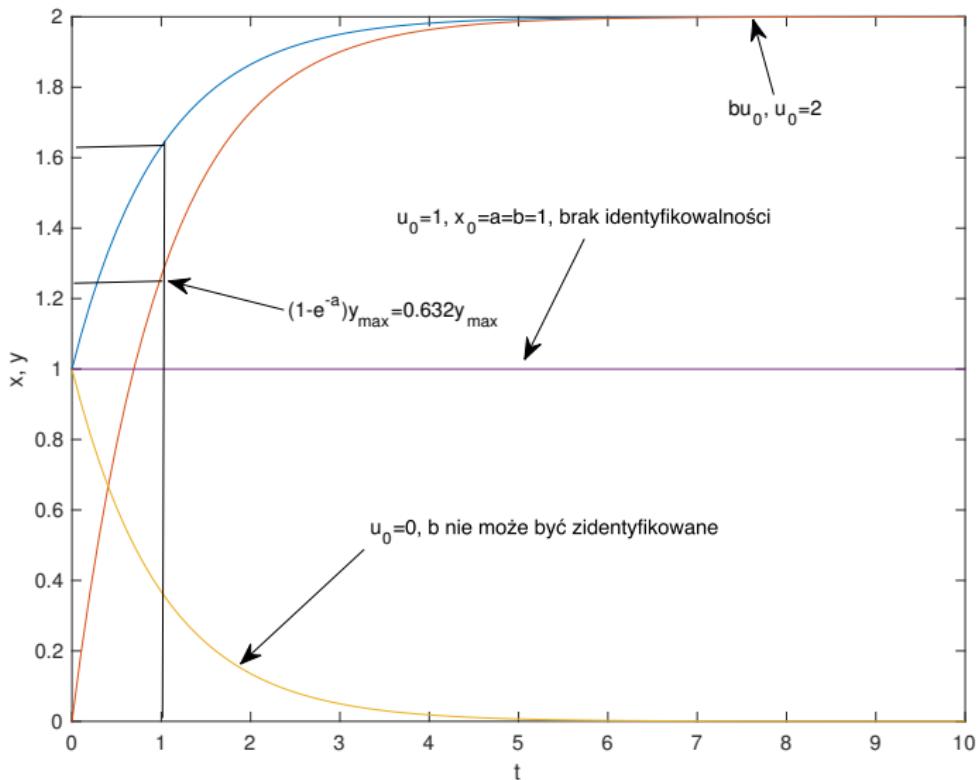
A zatem poszukiwane parametry spełniają układ równań

$$e^{-akT_s}x_0 + \frac{bu_0}{a}(1 - e^{-akT_s}) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (21)$$

W zależności od wyboru x_0, u_0 układ równań może mieć dokładnie jedno lub nieskończenie wiele rozwiązań. Jeżeli

$$ax_0 = bu_0, \quad (22)$$

to $y_k = \frac{bu_0}{a} = \text{const}$ i istnieje wówczas nieskończenie wiele liczb a, b spełniających (14). Jeżeli $u_0 = 0$, to y_k nie zawiera informacji o parametrze b i w konsekwencji istnieje nieskończenie wiele wartości parametru b spełniających (14). Jeżeli jeden z powyższych warunków będzie spełniony w przybliżeniu, to układ (14) będzie źle uwarunkowany i jego numeryczne rozwiązanie będzie niestabilne, obarczone dużymi błędami lub nie możliwe do uzyskania.



Rysunek: Ilustracja braku identyfikowalności oraz sposobu identyfikacji

Powyższy przykład dobrze ilustruje kilka typowych problemów przy identyfikacji

- Złe pobudzenie lub jego brak uniemożliwiają identyfikację.
- Pewne warunki początkowe powodują brak identyfikowalności.
- Może wystąpić złe uwarunkowanie zadania.
- Parametry powinny być a priori ograniczone do zbioru dopuszczalnego.
- Na ogół istnieje nieskończenie wiele minimów lokalnych.

Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów

Rozważamy prosty model ARMAX

$$y_k = -ay_{k-1} + bu_{k-1} + e_k, e_k \sim N(0, \sigma^2) \quad (23)$$

Minimalizacja wyrażenia

$$Q(a, b) = \sum_{k=1}^n e_k^2 = \sum_{k=1}^n (y_k + ay_{k-1} - bu_{k-1})^2, \quad (24)$$

prowadzi do układu równań liniowych

$$\phi^T \phi \theta = \phi^T Y \quad (25)$$

gdzie $\theta = (a, b)$ oraz

$$\phi = \begin{bmatrix} -y_0 & u_0 \\ -y_1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ -y_{n-1} & u_{n-1} \end{bmatrix}_{(n \times 2)}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Jeżeli $\phi^T \phi > 0$, to estymator parametrów jest dany wzorem

$$\hat{\theta}(Y) = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y. \quad (27)$$

Jeżeli $u_k = 0$, to oczywiście $\text{rank}(\phi) < 2$ i układ równań nie ma jednoznacznego rozwiązania. A zatem sygnał wejściowy nie może mieć zbyt małej amplitudy. Gdy tak jest, to macierz $\phi^T \phi$ będzie co prawda dodatnio określona, ale na ogół będzie źle uwarunkowana i praktycznie niemożliwa do odwrócenia.

Wpływ sprzężenia zwrotnego

Przypuśćmy, że w naszym układzie działa regulator stabilizujący

$$u_k = gy_k. \quad (28)$$

Rejestrujemy wartości sterowań u_k oraz wyjścia y_k . Macierz

$$\phi = \begin{bmatrix} -y_0 & gy_0 \\ -y_1 & gy_1 \\ \vdots & \vdots \\ -y_{n-1} & gy_{n-1} \end{bmatrix}_{(nx2)}, \quad (29)$$

ma kolumny liniowo zależne, a zatem rząd co najwyżej równy 1 i nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie układu (25). Stąd wniosek, że sprzężenie zwrotne może całkowicie zmienić wynik identyfikacji lub ją uniemożliwić.

Wpływ szumu procesowego

Rozważmy ponownie układ (23), ale z innym modelem szumu

$$y_k = -ay_{k-1} + bu_{k-1} + e_k - e_{k-1} + 2e_{k-2}, e_k \sim N(0, \sigma^2), \quad (30)$$

który możemy zapisać jako

$$y_k = -ay_{k-1} + bu_{k-1} + v_k, \quad (31)$$

lub w postaci wektorowej

$$Y = \phi\theta + V, \quad (32)$$

gdzie $V = \text{col}(v_0, \dots, v_{n-1})$. Proces v_k nie jest już białym szumem i na ogół korelacja $\text{cor}(y_{k-i}, v_k) \neq 0$. A zatem poszczególne składniki sumy we wzorze (24) są od siebie zależne oraz wcześniejsze dane y_{k-i} są skorelowane z szumem v_k . Oznacza to, że wartość oczekiwana

$$E\phi^T V \neq 0. \quad (33)$$

Oznaczmy prawdziwą wartość parametru przez θ i rozważmy błąd estymatora najmniejszych kwadratów

$$\begin{aligned}\hat{\theta} - \theta &= (\phi^T \phi)^{-1}(\phi^T Y - \phi^T \phi \theta) \\ &= (\phi^T \phi)^{-1}(\phi^T Y - \phi^T(Y - V)) = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T V.\end{aligned}\tag{34}$$

Przy czym skorzystaliśmy z (25). Jeżeli warunki prowadzenia eksperymentu nie są zdegenerowane, to na ogół $(\phi^T \phi) > 0$, ale z (33) wynika, że $E\phi^T V \neq 0$. Stąd

$$E(\hat{\theta} - \theta) = E(\phi^T \phi)^{-1} \phi^T V \neq 0.\tag{35}$$

A zatem szum procesowy powoduje, że estymator najmniejszych kwadratów jest obciążony! (Szczegóły zob. Stoica & Soderstrom 1997, s. 223-225).

Nadmierne dopasowanie (*Overfitting*)

Niech model ma postać

$$y_k = f(t_k, \theta) + v_k, v_k \sim N(0, \sigma), \quad (36)$$

gdzie $\sigma > 0$ jest znane oraz wykonano $n = 10^6$ pomiarów.
Stosujemy metodę najmniejszych kwadratów

$$Q(\theta) = \frac{1}{2n\sigma^2} \sum_{k=1}^n (y_k - f(t_k, \theta))^2 \rightarrow \min \quad (37)$$

Przypuśćmy, że $Q^* = Q(\theta^*) < 0.1$. Z założenia wiemy, że

$$EQ(\theta_{true}) = E \frac{1}{2n\sigma^2} \sum_{k=1}^n (y_k - f(t_k, \theta_{true}))^2 = E \frac{1}{2n\sigma^2} \sum_{k=1}^n v_k^2 = 1 \quad (38)$$

oraz $Q(\theta_{true})$, ma dla dużych n , rozkład $N(1, \sqrt{2/n})$. Dla $n = 10^6$, mamy $P(Q(\theta_{true}) < 0.9) < 10^{-10}$. Stąd wniosek, że model jest zbyt dokładny. Przypadek częsty u naiwnych wielbicieli sieci neuronowych!

Jaki sygnał jest dobry dla identyfikacji?

$$dx = (A_\theta x + B_\theta u)dt + G_\theta dw, \quad (39)$$

where $\theta \in \{1, 2, 3\}$, $x(t) \in R^\theta$, $x(0) = 0$, $u(t), w(t) \in R$, w is a standard Wiener process and

$$A_1 = -1, B_1 = 1, G_1 = 0.05, \quad (40)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3.5 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.05 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

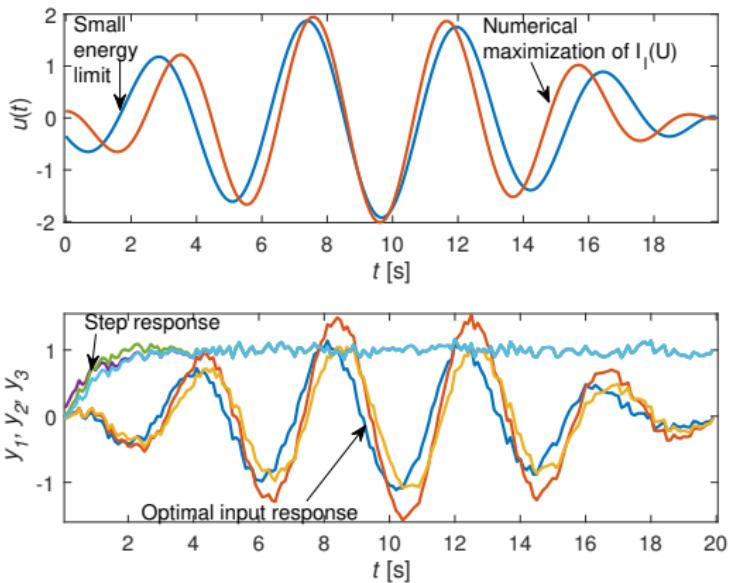
The observation equation has the form

$$y_k = x_1(t_k) + 0.05v_k, k = 1, 2, \dots, N, \quad (43)$$

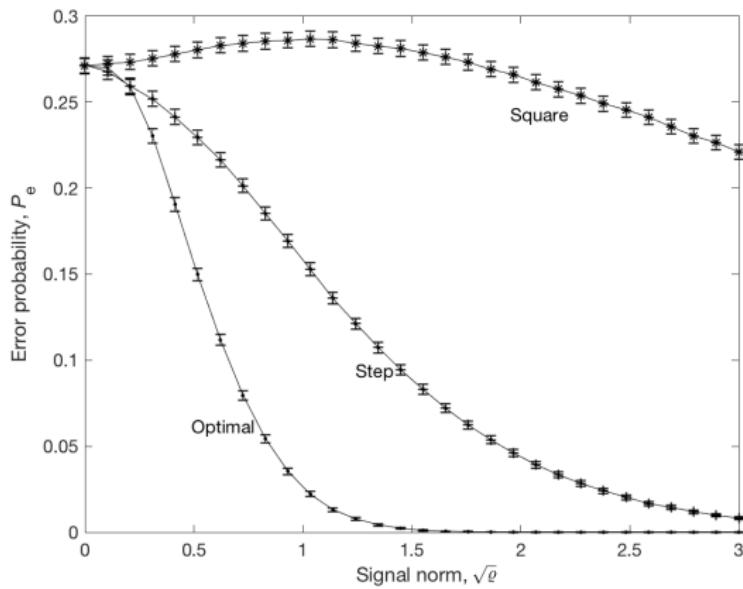
where $v_k \sim N(0, 1)$, $t_k = kT_0$, $T_0 = 0.1$ and x_1 is the first component of $x(t)$.

Jaki sygnał jest dobry dla identyfikacji?

The step responses of these models are similar and they are difficult to experimentally distinguish from each other, if the noise level is significant.



Rysunek: Top. The optimal signal. Bottom. Step responses and optimal responses of all systems.



Rysunek: Error probability of the MAP estimator for optimal signal (.), step signal (+), and square (x) signal with period 3.

Let us observe, that in contrast to the step signal, the optimal signal clearly distinguishes the systems although the energy of all input signals was the same.

Strojenie filtru Kalmana, jako zadanie estymacji

Filtr Kalmana dla układu

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k, \quad (44)$$

$$y_k = Cx_k + v_k \quad (45)$$

wymaga znajomości macierzy kowariancji $S_w = E(w_k w_k^T)$ oraz $S_v = E(v_k v_k^T)$. Macierze te można estymować z danych. W wykładzie 8 omówiona zostanie jednocześnie estymacja stanu i parametrów w układach liniowych stochastycznych, estymacja kowariancji szumów oraz strojenie filtru Kalmana.

Rozpatrzmy system

$$\xi_{k+1} = f_\xi(\xi_k, u_k, w_k, \theta_k), \quad (46)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k, \quad (47)$$

$$y_k = h(\xi_k, \theta_k, u_k, v_k), \quad (48)$$

w którym parametry θ można potraktować jako składowe stanu $x_k = (\xi_k, \theta_k)$ i zapisać formalnie, jako

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k), \quad (49)$$

$$y_k = h(x_k, u_k, v_k), \quad (50)$$

Dla takiego systemu można stosować różnego rodzaju estymatory stanu, w szczególności może to być rozszerzony filtr Kalmana lub też UKF, Particle Filter i wiele innych. Zadanie to jest na ogół źle postawione i prowadzi do braku zbieżności estymat, nawet w bardzo prostych przypadkach. Szczegóły w wykładzie 8.

Specyfika zadań identyfikacji pociąga za sobą konieczność odpowiedniego doboru algorytmów obliczeniowych, w szczególności algorytmów minimalizacji odpowiednich funkcji strat. Funkcje te mają często strukturę, którą można wykorzystać do uproszczenia obliczeń. W wykładzie 9 zostaną omówione algorytmy dedykowane do rozwiązywania zadań identyfikacji parametrów. W szczególności będą to algorytmy Levenberga- Marquardta, Gaussa-Newtona' a oraz metody numerycznego całkowania równań dynamicznych i kalkulacji gradientu wraz z przykładem implementacji.

Dziękuję za uwagę

Identyfikacja procesów technologicznych, wykład 2. Identyfikacja układów liniowych deterministycznych.

dr hab. inż. Piotr Bania, pba@agh.edu.pl, B1, p. 303

16 grudnia 2020

Transmitancja

$$G(s) = \frac{ke^{-sT_o}}{Ts + 1}. \quad (1)$$

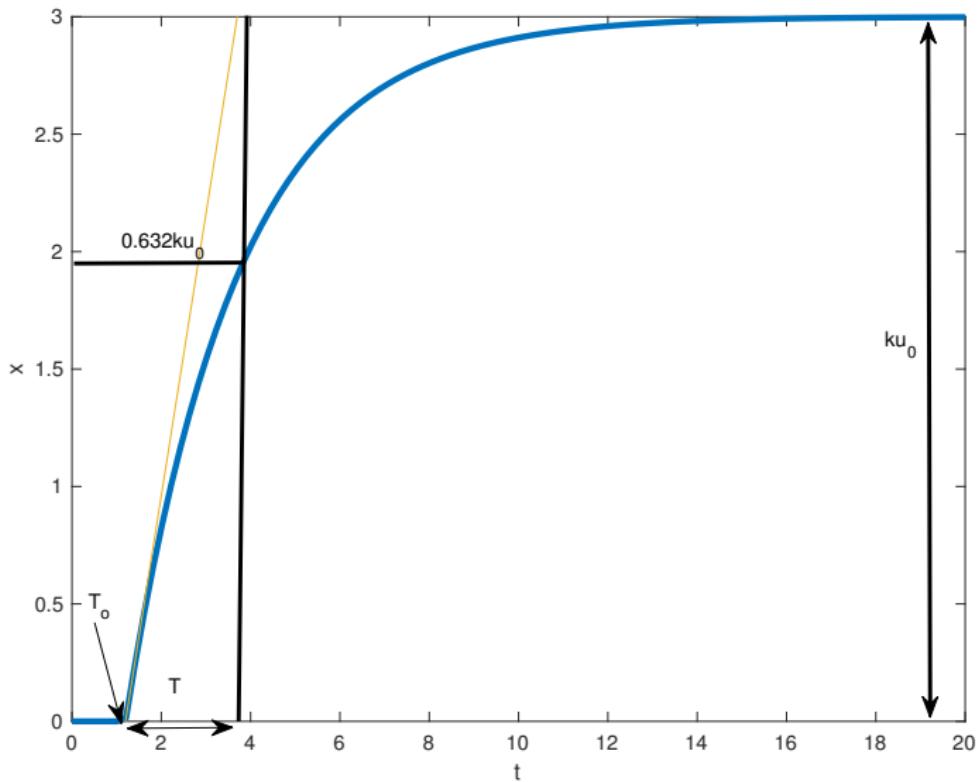
Równanie różniczkowe

$$T\dot{x}(t) = -x(t) + ku(t - T_o), x(0) = 0. \quad (2)$$

Odpowiedź skokowa, $u(t) = u_0 \mathbf{1}(t)$

$$h(t) = 0, t \in [0, T_o], \quad (3)$$

$$h(t) = ku_0(1 - e^{-\frac{t-T_o}{T}}), t > T_o. \quad (4)$$



Rysunek: Identyfikacja układu pierwszego rzędu.

Transmitancja

$$G(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}. \quad (5)$$

Równanie różniczkowe

$$T\ddot{x} + \dot{x} = ku. \quad (6)$$

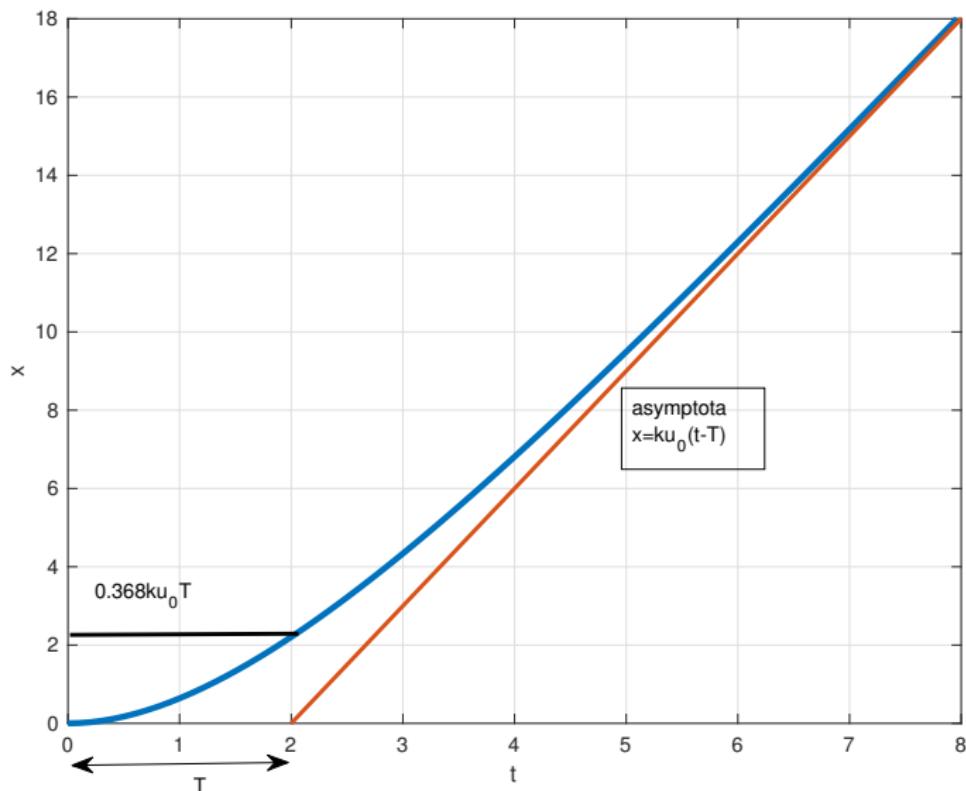
Odpowiedź skokowa

$$h(t) = ku_0(t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}})). \quad (7)$$

Asymptota

$$x(t) = ku_0(t - T). \quad (8)$$

$$h(T) = ku_0 Te^{-1} \approx 0.368ku_0 T. \quad (9)$$



Rysunek: Identyfikacja transmitancji (5).

Transmitancja

$$G(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, T_2 > T_1 \quad (10)$$

Równanie różniczkowe

$$T_1 T_2 \ddot{x} + (T_1 + T_2) \dot{x} + x = k u. \quad (11)$$

Odpowiedź skokowa

$$h(t) = k u_0 \left(1 + \frac{T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_2 - T_1} \right). \quad (12)$$

Odpowiedź impulsowa

$$g(t) = k u_0 \frac{e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_1}}}{T_2 - T_1} \quad (13)$$

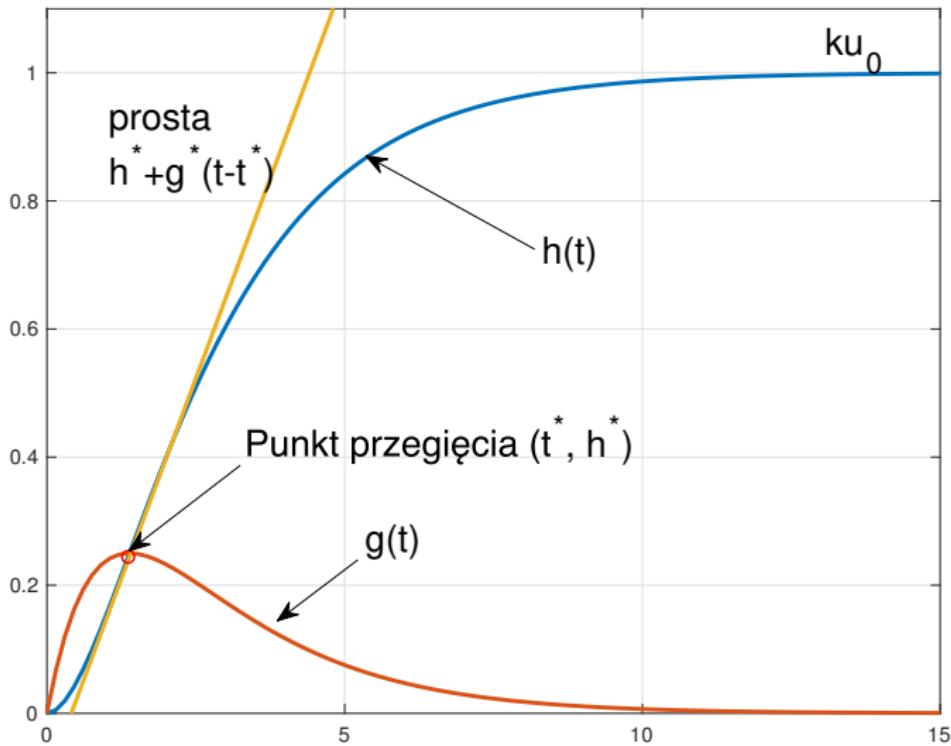
Punkt przegięcia $h(t)$

$$t^* = \frac{T_1 T_2 \ln \frac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1} \quad (14)$$

Prosta przechodząca przez punkt przegięcia

$$x = h(t^*) + g(t^*)(t - t^*). \quad (15)$$

Punkt t^* , $h(t^*)$, nachylenie $g(t^*)$ oraz $k u_0$ odczytujemy z wykresu.



Rysunek: Identyfikacja transmitancji (10).

Z równania

$$ku_0 \left(1 + \frac{T_1 e^{-\frac{t^*}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t^*}{T_2}}}{T_2 - T_1} \right) = h(t^*), \quad (16)$$

można wyznaczyć T_1 i T_2 . Aby to zrobić oznaczamy $\alpha = \frac{T_2}{T_1} > 1$ i wówczas ze wzoru (14)

$$\frac{t^*}{T_1} = \frac{\ln \alpha}{1 - \alpha^{-1}}, \quad \frac{t^*}{T_2} = \frac{\ln \alpha}{\alpha - 1}. \quad (17)$$

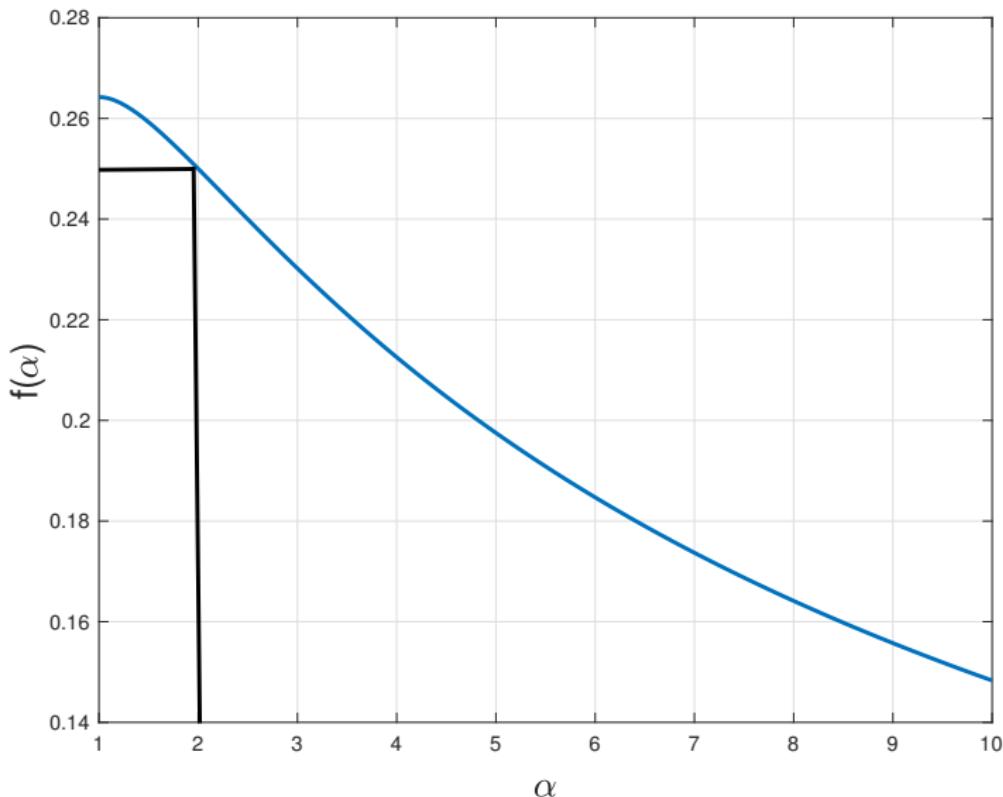
Podstawiając (17) do (16) otrzymamy równanie dla α

$$f(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha - 1} \left(\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \alpha^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}} \right) = \frac{h(t^*)}{ku_0}. \quad (18)$$

Równanie to można rozwiązać ze względu na α . Znając α i t^* , wartości stałych T_1, T_2 znajdujemy ze wzorów (17)

$$T_1 = \frac{t^*(1 - \alpha^{-1})}{\ln \alpha}, \quad T_2 = \frac{t^*(\alpha - 1)}{\ln \alpha}. \quad (19)$$

wykres funkcji f , znajdującej się po lewej stronie wzoru (18) pokazano poniżej. Z wykresu tego wynika, że iloraz $\frac{h(t^*)}{ku_0} \leq 0.2643$. W przykładzie powyżej mamy $t^* = 1.3863$, $h(t^*) = 0.25$, $ku_0 = 1$ oraz $u_0 = 1$. Korzystając z wykresu poniżej



Rysunek: Identyfikacja transmitancji (10).

otrzymujemy

$$\alpha = \frac{T_2}{T_1} = 2 \quad (20)$$

oraz

$$T_1 = \frac{t^*(1 - \alpha^{-1})}{\ln \alpha} = \frac{1.3863(1 - 1/2)}{\ln 2} = 1, \quad (21)$$

$$T_2 = \frac{t^*(\alpha - 1)}{\ln \alpha} = \frac{1.3863(2 - 1)}{\ln 2} = 2. \quad (22)$$

Jeżeli $\alpha = 1$, to obie stałe czasowe są równe i wówczas transmitancja (10) ma postać

$$G(s) = \frac{k}{(Ts + 1)^2}. \quad (23)$$

Przychodząc do granicy $\alpha \rightarrow 1^+$, ze wzorów (21) lub (22) otrzymujemy

$$T = t^*. \quad (24)$$

A zatem stała czasowa jest wyznaczona przez punkt przegięcia odpowiedzi skokowej.

Układ oscylacyjny z tłumieniem

Transmitancja

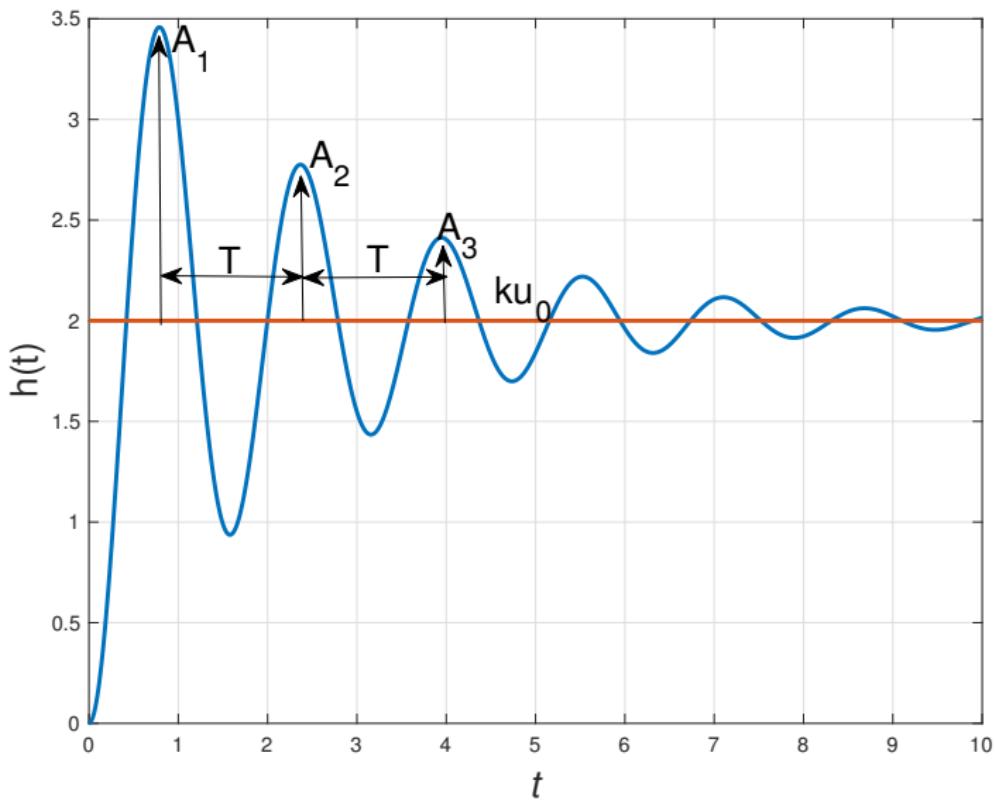
$$G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}, \xi \in (0, 1) \quad (25)$$

Równanie różniczkowe

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = k\omega_0^2u. \quad (26)$$

Odpowiedź skokowa

$$h(t) = ku_0 \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t + \varphi) \right), \varphi = \arccos \xi. \quad (27)$$



Rysunek: Identyfikacja transmitancji (25).

Z wykresu odczytujemy stan ustalony $ku_0 = h(\infty)$, stąd współczynnik wzmocnienia

$$k = \frac{h(\infty)}{u_0}. \quad (28)$$

Następnie odczytujemy okres ruchu T oraz dwie amplitudy (maksima lub minima) A_k, A_{k+n} , oddalone od siebie o $n \geq 1$ okresów.

Bezpośrednio ze wzoru (27) mamy

$$\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (29)$$

oraz

$$e^{\xi \omega_0 n T} = \frac{A_k}{A_{k+n}}. \quad (30)$$

Z ostatniego równania

$$\xi \omega_0 = \frac{\ln \frac{A_k}{A_{k+n}}}{n T}. \quad (31)$$

Dzieląc (29) przez (31) mamy

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} = \frac{2\pi n}{\ln \frac{A_k}{A_{k+n}}}. \quad (32)$$

Stąd

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi n}{\ln \frac{A_k}{A_{k+n}}} \right)^2}}, \quad (33)$$

lub alternatywnie

$$\xi = \cos \alpha = \cos \left(\arctan \left(\frac{2\pi n}{\ln \frac{A_k}{A_{k+n}}} \right) \right). \quad (34)$$

Korzystając z równania (29) bądź (31) otrzymujemy

$$\omega_0 = \frac{\ln \frac{A_k}{A_{k+n}}}{nT\xi} = \frac{\ln \frac{A_k}{A_{k+n}}}{nT} \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi n}{\ln \frac{A_k}{A_{k+n}}} \right)^2}. \quad (35)$$

Z przykładowego wykresu mamy $u_0 = 1$, skąd $k = 2$ oraz $A_1/A_3 \approx 3$, $T \approx 1.6$. Podstawiając do wzorów (34) i (35) otrzymamy $\xi \approx 0.09$ oraz $\omega_0 \approx 3.94$. Prawdziwe wartości użyte do wygenerowania przykładu były odpowiednio równe 0.1 oraz 4.

Rozważamy transmitancję

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{1 + a_1 s + \dots + a_n s^n}, \quad n \geq m. \quad (36)$$

Zakładamy, że wielomian A ma zera w lewej półpłaszczyźnie. Stąd odpowiedź impulsowa

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} G(s), \quad (37)$$

spełnia warunek

$$|g(t)| \leq M e^{-\beta t}, \quad (38)$$

dla pewnych $\beta > 0, M \geq 0$.

Z definicji transmitancji G mamy

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt. \quad (39)$$

rozwijając funkcję wykładniczą w szereg otrzymamy

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \int_0^{\infty} g(t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^k t^k}{k!} dt. \quad (40)$$

Oznaczając k -ty moment przez

$$m_k = \int_0^{\infty} t^k g(t) dt, \quad (41)$$

z równania (40) dostajemy

$$(1+a_1s+\dots+a_ns^n) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} m_k s^k \right) - (b_0+b_1s+\dots+b_ms^m) = 0, \forall s \quad (42)$$

Po wykonaniu działań otrzymuje się wielomian, którego współczynniki zależą od poszukiwanych parametrów. Ponieważ wielomian ten musi zniknąć dla każdego s , to przyrównując do zera jego współczynniki otrzymujemy układ równań na poszukiwane parametry $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$.

Przykład 1

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}, g(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (43)$$

Momenty są równe

$$m_0 = \frac{k}{T} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}} dt = k, m_1 = \frac{k}{T} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t}{T}} dt = kT. \quad (44)$$

Z równania (42) mamy

$$(1 + a_1 s)(m_0 - m_1 s) - b_0 + \dots = 0. \quad (45)$$

Przekształcając otrzymujemy

$$m_0 - b_0 + (m_0 a_1 - m_1)s + \dots = 0, \quad (46)$$

a stąd, po przyrównaniu współczynników do zera

$$b_0 = m_0 = k, a_1 = \frac{m_1}{m_0} = \frac{kT}{k} = T. \quad (47)$$

Przykład 2

Dla transmitancji

$$G(s) = \frac{b_0}{1 + a_1 s + a_2 s^2}, \quad (48)$$

z równania (42) mamy

$$(1 + a_1 s + a_2 s^2)(m_0 - m_1 s + \frac{1}{2}m_2 s^2) - b_0 + \dots = 0. \quad (49)$$

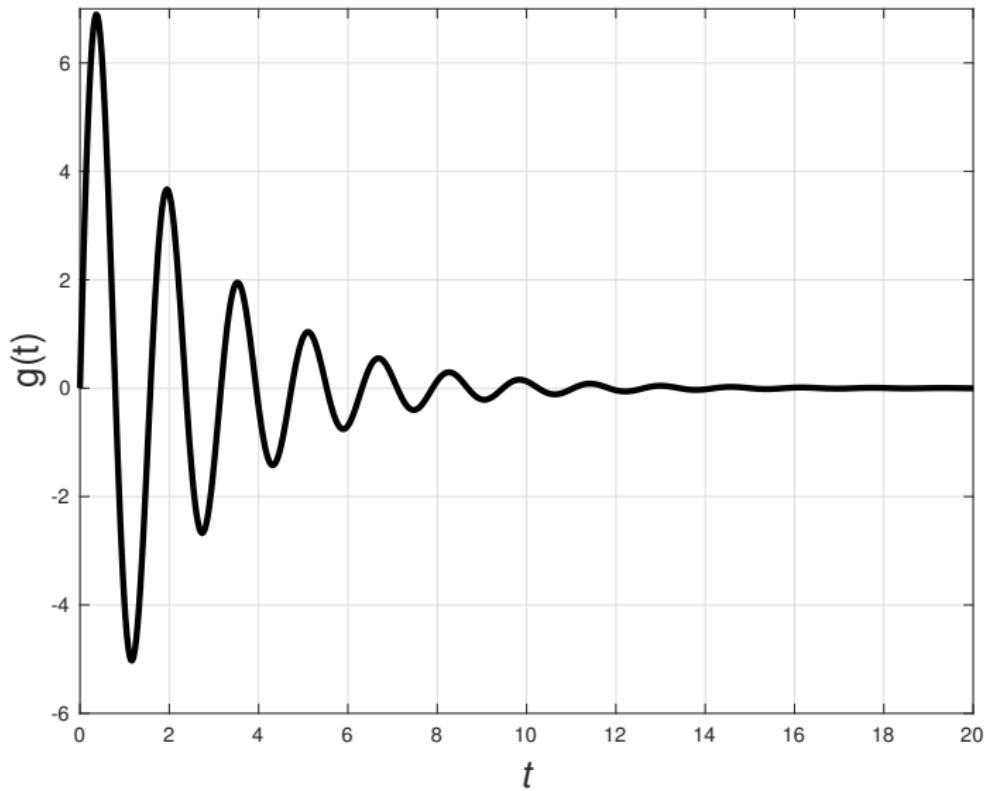
Po uporządkowaniu otrzymujemy

$$m_0 - b_0 + (m_0 a_1 - m_1)s + (\frac{1}{2}m_2 - m_1 a_1 + m_0 a_2)s^2 + \dots = 0, \quad (50)$$

a stąd

$$b_0 = m_0, a_1 = \frac{m_1}{m_0}, a_2 = \frac{m_1^2}{m_0^2} - \frac{m_2}{2m_0}. \quad (51)$$

Odpowiedź impulsową układu oscylacyjnego (25), przedstawiono poniżej



Rysunek: Identyfikacja transmitancji (25).

Numeryczne obliczenie momentów przy kroku 0.03, daje

$$m_0 \approx 2, m_1 \approx 0.0996, m_2 \approx -0.2511. \quad (52)$$

Ze wzorów (51) oraz z (25) otrzymujemy

$$k = 2, \xi = 0.0981, \omega_0 = 3.92 \quad (53)$$

co jest bliskie prawdziwym wartościom $k = 2, \xi = 0.1, \omega_0 = 4$.
Błędy wynikają z błędów całkowania numerycznego.

Pewna modyfikacja metody momentów

Jeżeli transmitancja G (36), jest wykładniczo stabilna, to metodę momentów można również zastosować do funkcji

$$e(t) = h_\infty - h(t), \quad (54)$$

gdzie h jest odpowiedzią skokową przy $u(t) = u_0 \mathbf{1}(t)$ oraz $h_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$. Odpowiedni układ równań dla współczynników a_i, b_i otrzymuje się wówczas z równości

$$h_\infty - G(s)u_0 = s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \mu_k s^k, \quad (55)$$

gdzie

$$\mu_k = \int_0^{\infty} t^k e(t) dt, \quad (56)$$

oznacza momenty funkcji e .

Metody częstotliwościowe

Do wyznaczenia parametrów a_i, b_i transmitancji G , można użyć charakterystyk częstotliwościowych. Przy założeniu wykładniczej stabilności, podając na wejście sygnał

$$u(t) = u_0 \sin(\omega t), \quad (57)$$

po zaniku stanów przejściowych, na wyjściu zarejestrujemy sygnał

$$y(t) = A(\omega)u_0 \sin(\omega t + \varphi(\omega)), \quad (58)$$

gdzie

$$A(\omega) = |G(j\omega)| \quad (59)$$

oraz

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega). \quad (60)$$

Funkcje $A(\omega), \varphi(\omega)$ zależą od parametrów a_i, b_i , które możemy dobrać tak, aby spełnić warunki zadane równaniami (59) i (60).

Przykład

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad (61)$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad (62)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega T). \quad (63)$$

Ze wzoru (62) otrzymujemy

$$k = A(0). \quad (64)$$

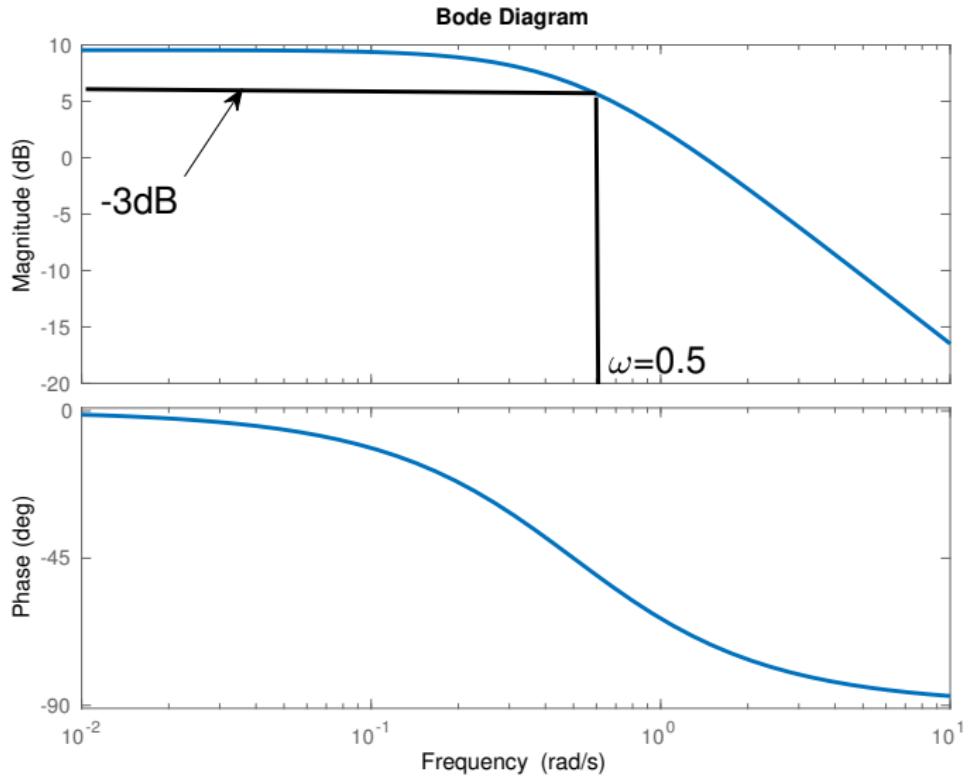
Jeżeli wybierzemy ω , takie że $\omega T = 1$, to

$$A(\omega) = \frac{A(0)}{\sqrt{2}} \quad (65)$$

i wówczas

$$T = \frac{1}{\omega}. \quad (66)$$

Ch-ki częstotliwościowe rysuje się zwykle w skali logarytmicznej $\log_{10}(\omega)$, $20 \log_{10} A(\omega)$. Spadkowi amplitudy o $\frac{1}{\sqrt{2}}$, odpowiada wówczas ok. 3dB. Na rys. poniżej przedstawiono ch-ki częstotliwościowe transmitancji (61). Spadkowi amplitudy o 3dB odpowiada $\omega = 0.5$, stąd $T = 2$. Dla $\omega = 0$ mamy $20 \log_{10}(A(0)) = 9.54$, co daje $A(0) = 3$ oraz $k = 3$.



Rysunek: Ch-ka częstotliwościowa, wykres Bodego dla transmitancji (61),

Dla transmitancji

$$G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}, \xi \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2}), \quad (67)$$

ch-ka amplitudowa ma postać

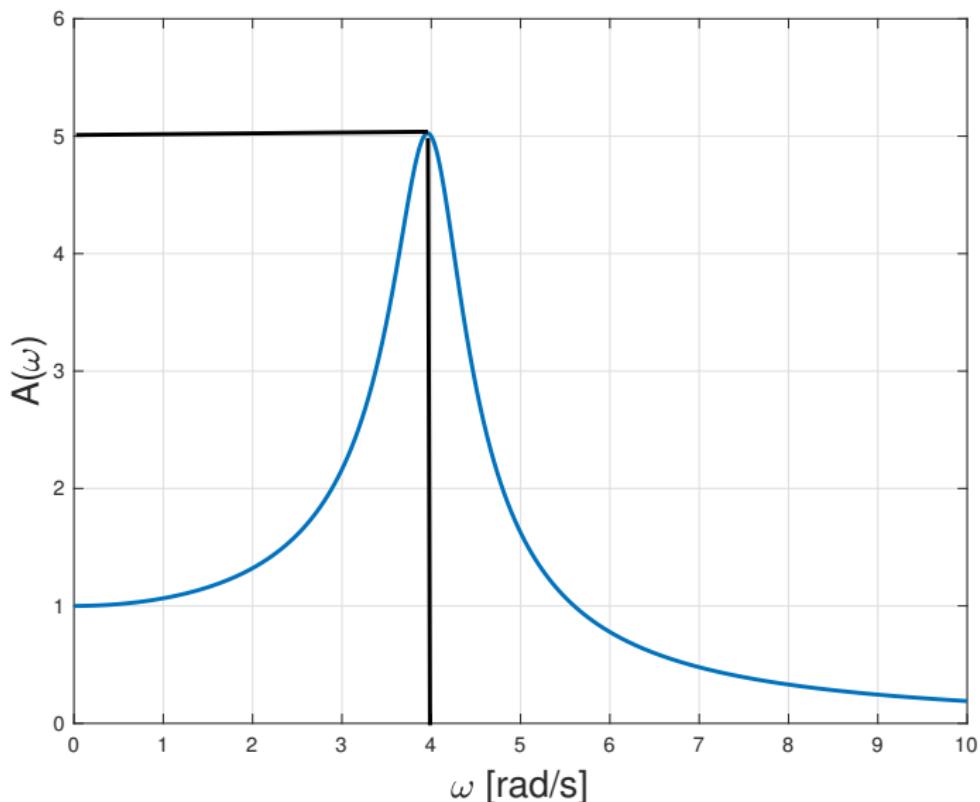
$$A(\omega) = \frac{k\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2}}. \quad (68)$$

Z równości $A(0) = k$, znajdujemy wzmacnienie. Maksymalna amplituda występuje w punkcie $\omega_{max} = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$ i wynosi

$$A_{max} = \frac{k}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (69)$$

Znając już k , z powyższego równania obliczamy ξ . Wartość ω_0 wyznaczamy ze wzoru

$$\omega_0 = \frac{\omega_{max}}{\sqrt{1 - 2\xi^2}}. \quad (70)$$



Rysunek: Ch-ka amplitudowa, dla transmitancji (67).

Z rysunku odczytujemy

$$\omega_{max} = 3.96, A_{max} = 5.02, A(0) = 1 \quad (71)$$

oraz wiemy, że $u_0 = 1$. A zatem $k = 1$ oraz ze wzoru (69) znajdujemy, że

$$\xi = \sqrt{z}, \quad (72)$$

gdzie z jest pierwiastkiem równania

$$z^2 - z + \frac{k^2}{4A_{max}^2} = 0. \quad (73)$$

Stąd otrzymujemy $\xi \approx 0.1$ oraz ze wzoru (70) $\omega_0 \approx 4$.

Metody widmowe, pobudzenia stochastyczne

Jeżeli na wejście układu liniowego opisanego stabilną transmitancją $G(s)$ podamy sygnał, którego gęstość widmowa mocy jest $S_x(\omega)$ to na wyjściu uzyskamy sygnał y , którego gęstość widmowa mocy jest dana wzorem

$$S_y(\tau) = |G(j\omega)|^2 S_u(\tau). \quad (74)$$

Jeżeli sygnał u jest białym szumem o intensywności σ^2 , to $S_u(\omega) = \sigma^2$ i wówczas

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{S_y(\omega)}{\sigma^2}. \quad (75)$$

Gęstość mocy S_y można estymować bezpośrednio z pomiarów, jako transformatę Fouriera funkcji korelacyjnej sygnału y

$$S_y(\omega) = \mathcal{F}\{R_y(\tau)\}. \quad (76)$$

Z kolei funkcję korelacyjną można łatwo obliczyć na podstawie samego sygnału

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)y(t - \tau)dt. \quad (77)$$

W praktyce do wyznaczenia gęstości mocy stosuje się specjalnie skonstruowane estymatory, zapewniające lepszą niż wzory (76), (77) dokładność, takie jak funkcje *periodogram*, metoda Welsha (funkcja *pwelsh* Matlaba) lub metoda Yule-Walkera (funkcja *pyulear*, Matlaba).

Dziękuję za uwagę

Identyfikacja procesów technologicznych, wykład 3. Modele układów sterowania.

dr hab. inż. Piotr Bania, pba@agh.edu.pl, B1, p. 303

31 października 2021

Zasady zachowania.

- ① Energii. W układzie izolowanym całkowita energia $E(t) = \text{const.}$
- ② Pędu. W układzie izolowanym $\sum p_i(t) = \text{const.}$
- ③ Momentu pędu. W układzie izolowanym $\sum J_i(t) = \text{const.}$
- ④ Masy. Całkowita masa układu izolowanego nie ulega zmianie.

Pojedyncza masa

$$m\ddot{r} = \sum F_i. \quad (1)$$

W ruchu obrotowym wokół ustalonej osi

$$I\ddot{\varphi} = \sum M_i. \quad (2)$$

Środek masy

$$r_{sm} = \frac{\sum r_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\frac{1}{\Omega} \int r \rho(r) dr^3}{\frac{1}{\Omega} \int \rho(r) dr^3}. \quad (3)$$

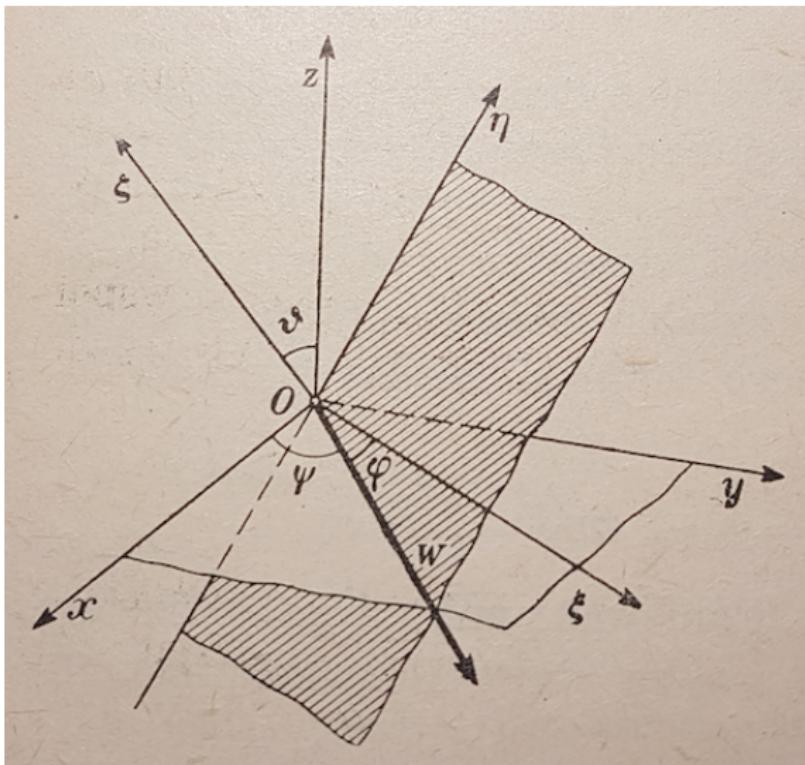
Ruch środka masy wyznaczamy z równań (1). Aby wyznaczyć prędkość kątową obieramy dwa układy współrzędnych. Jeden stały $Oxyz$ oraz drugi $O\xi\eta\zeta$, związany z ciałem, którego osie pokrywają się z głównymi osiami bezwładności. Momenty bezwładności względem osi $\xi\eta\zeta$, oznaczamy przez I_1, I_2, I_3 . Prędkość kątową w układzie $O\xi\eta\zeta$, wyznaczamy z równań Eulera

$$I_1 \dot{\omega}_\xi + (I_3 - I_2) \omega_\eta \omega_\zeta = M_\xi, \quad (4)$$

$$I_2 \dot{\omega}_\eta + (I_1 - I_3) \omega_\zeta \omega_\xi = M_\eta, \quad (5)$$

$$I_3 \dot{\omega}_\zeta + (I_2 - I_1) \omega_\xi \omega_\eta = M_\zeta. \quad (6)$$

Kąty Eulera, Yaw, Pitch, Roll



Rysunek: Kąty Eulera.

Kąty Eulera wyznaczamy z równań

$$\dot{\vartheta} = \omega_\xi \cos \varphi - \omega_\eta \sin \varphi, \quad (7)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_\xi \sin \varphi + \omega_\eta \cos \varphi}{\sin \vartheta}, \quad (8)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_\zeta - \frac{\omega_\xi \sin \varphi + \omega_\eta \cos \varphi}{\tan \vartheta}. \quad (9)$$

Równania te mają osobliwość dla $\vartheta = 0$. Aby uniknąć osobliwości często stosujemy opis obrotu za pomocą kwaternionów.

Kwaterniony

Definiujemy wektor $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T$, $|q| = 1$ oraz macierz

$$G(q) = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Wówczas wektor q , spełnia układ równań

$$\dot{q} = \frac{1}{2} G(q) \omega, \quad (11)$$

gdzie $\omega = (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)^T$, obliczamy z równań Eulera (4-6). Macierz rotacji, określająca orientację bryły, jest dana wzorem

$$R(q) = E(q)G(q), \quad (12)$$

gdzie

$$E(q) = \begin{bmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Znając macierz rotacji, położenie dowolnego punktu p , należącego do bryły, obliczamy ze wzoru

$$r = R(q)p. \quad (14)$$

W nawigacji inercyjnej, możliwy jest bezpośredni pomiar $\omega = (\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)^T$, za pomocą żyroskopów. Wówczas, znając orientację początkową, z równań (11) można wyznaczyć orientację bryły. W praktyce pomiary uzupełnia się danymi z rozmaitych czujników położenia (np. magnetometr, czujnik słońca, GPS) i do estymacji wektora q oraz eliminacji dryftu żyroskopów, używa się filtrów nielinowych (np. EKF).

Równania Lagrange'a

Do wyprowadzania równań modeli (głównie elektromechanicznych), wygodnie jest używać równań Lagrange'a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i, \quad (15)$$

gdzie Lagranżjan (funkcja Lagrange'a)

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = K(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - U(q_1, \dots, q_n), \quad (16)$$

jest różnicą energii kinetycznej K i potencjalnej U oraz Q ; jest tzw. siłą uogólnioną. Funkcja \mathcal{L} koduje całą informację niezbędną do wyznaczenia ruchu układu. Aby znaleźć równanie ruchu szukamy ekstremum funkcjonału działania

$$J = \int_0^t \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt. \quad (17)$$

stąd równania (15).

Przykład

Punkt materialny o masie m , porusza się w polu grawitacyjnym, po krzywej o równaniu $z = f(x)$. Wyznaczyć równanie ruchu. Energia kinetyczna

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + f'(x)^2\dot{x}^2) = \frac{1}{2}m(1 + f'(x)^2)\dot{x}^2. \quad (18)$$

Energia potencjalna

$$U = mgz = mgf(x). \quad (19)$$

Lagranżjan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(1 + f'(x)^2)\dot{x}^2 - mgf(x). \quad (20)$$

Różniczkowanie względem \dot{x} , daje

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m(1 + f'(x)^2)\dot{x}. \quad (21)$$

Pochodna (21) względem czasu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}(1 + f'(x)^2) + 2mf'(x)f''(x)\dot{x}^2. \quad (22)$$

Pochodna Lagranżjanu względem x , wynosi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = m\dot{x}^2f'(x)f''(x) - mgf'(x). \quad (23)$$

Ze wzoru (15) otrzymujemy równanie ruchu

$$(1 + f'(x)^2)\ddot{x} + f'(x)f''(x)\dot{x}^2 + gf'(x) = 0. \quad (24)$$

Jeżeli funkcja f jest stała, to $\ddot{x} = 0$. Jeżeli $f(x) = ax$, to

$$\ddot{x} = -\frac{ga}{1 + a^2}, \quad (25)$$

czyli zaobserwujemy ruch w lewo i w dół, ze stałym przyspieszeniem. Jeżeli $f(x) = \frac{1}{2}ax^2$, to

$$(1 + a^2x^2)\ddot{x} + a^2x\dot{x}^2 + gax = 0. \quad (26)$$

Dla małych x oraz \dot{x} otrzymamy równanie oscylatora

$$\ddot{x} + gax = 0, \quad (27)$$

którego okres drgań $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag}}$.

Do funkcji Lagrange'a, można dodać składnik opisujący dyssypację energii (Rayleigh dissipation function). Składnik ten jest w postaci

$$D = \sum_{i=1}^n \int_0^t d_i \dot{x}_i^2 dt. \quad (28)$$

Wówczas różniczkowanie spowoduje pojawienie się czynników

$$D_i = d_i \dot{x}_i, \quad (29)$$

opisujących rozpraszanie energii.

Równania Hamiltona

Hamiltonian

$$H(p, q) = K(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) + U(q_1, \dots, q_n), \quad (30)$$

jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej, przy czym p_i , jest pędem (impulsem) uogólnionym, zdefiniowanym równością

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (31)$$

Równania ruchu Hamiltona mają postać

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad (32)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (33)$$

Hamiltonian i Lagranżjan

Pomiędzy funkcjami Hamiltona i Lagrange'a zachodzi związek.

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}), \quad (34)$$

gdzie

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (35)$$

Z równości (35), można wyznaczyć \dot{q}_i , jako funkcje p_i i wstawić do równania (34).

Przykład

Rozważmy wahadło o długości l i masie m oraz kącie wychylenia q . Energia kinetyczna i potencjalna

$$K = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2, U = mgl(1 - \cos q). \quad (36)$$

Pęd uogólniony

$$p = ml^2\dot{q}. \quad (37)$$

Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos q). \quad (38)$$

Równania ruchu

$$\dot{q} = \frac{p}{ml^2}, \dot{p} = -mgl \sin q. \quad (39)$$

Stąd oraz z (37)

$$ml^2\ddot{q} + mgl \sin q = 0. \quad (40)$$

Energia w układach elektrycznych

Kondensator (analogia mechaniczna - sprężyna)

$$E = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{q^2}{2C}. \quad (41)$$

Cewka (analogia mechaniczna - masa)

$$E = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{\phi^2}{2L}. \quad (42)$$

Rozpraszanie na rezistorze

$$\Delta E = \int_0^t Ri^2 dt. \quad (43)$$

Prąd płynący przez kondensator oraz napięcie na cewce

$$i = C \frac{du_c}{dt}, u_L = L \frac{di_L}{dt}. \quad (44)$$

Przykład, obwód szeregowy RLC

Funkcja Lagrange'a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Li^2 - \frac{1}{2}Cu^2 + \int_0^t Ri^2 dt = \frac{1}{2}LC^2\dot{u}^2 - \frac{1}{2}Cu^2 + \int_0^t RC^2\dot{u}^2 dt = K - U + D. \quad (45)$$

Zastosowanie formalizmu Lagrange'a daje

$$\ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{1}{LC}u = \frac{e}{LC}, \quad (46)$$

gdzie e , jest napięciem przyłożonym do obwodu.

Silnik prądu stałego/serwomechanizm

Równanie mechaniczne

$$I\dot{\omega} = k_m i - f(\omega), \quad (47)$$

gdzie i jest prądem, k_m , jest stałą mechaniczną oraz f modeluje tarcie i wszystkie pozostałe opory ruchu i obciążenie silnika.

Wielkość $M_m = k_m i$, jest momentem siły generowanym przez silnik.
Równanie elektryczne (pomijamy indukcyjność)

$$u = Ri + k_e \omega, \quad (48)$$

gdzie k_e , oznacza stałą elektryczną. Obliczając prąd i wstawiając do poprzedniego równania, otrzymamy

$$\dot{\omega} = K(u - H(\omega)), \quad (49)$$

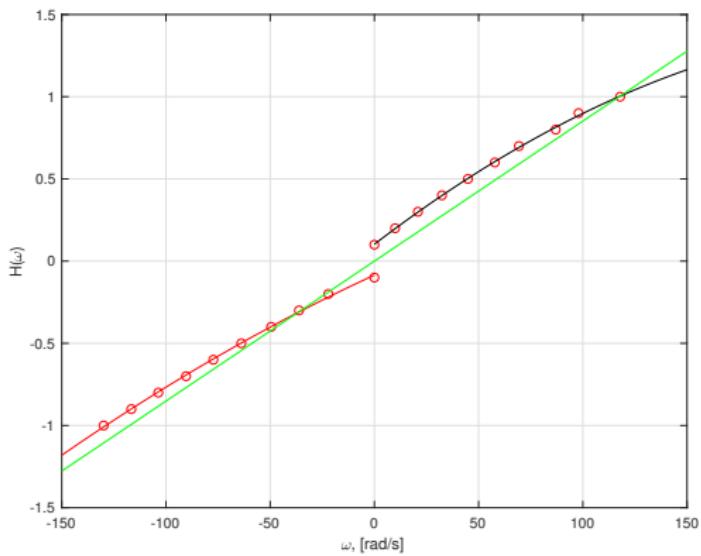
gdzie $K = \frac{k_m}{IR}$ oraz

$$H(\omega) = k_e \omega + \frac{R}{k_m} f(\omega). \quad (50)$$

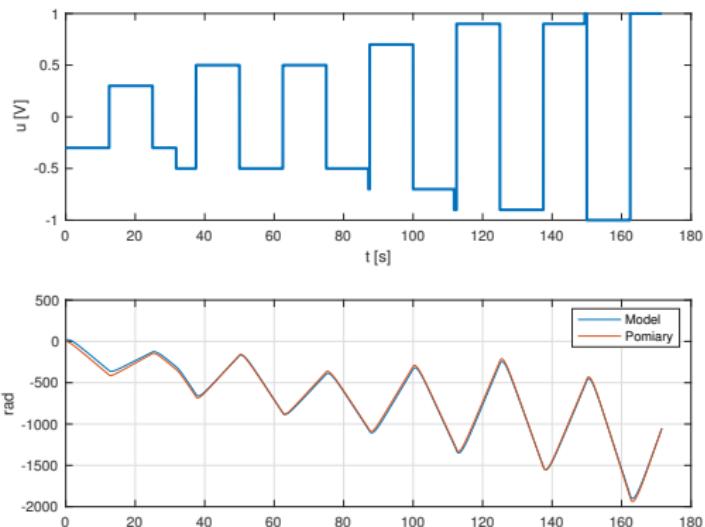
Wykonując pomiary prędkości w stanie ustalonym, można wyznaczyć funkcję H . Następnie, podając na silnik napięcie o przebiegu prostokątnym, można tak dobrać stałą K , aby różnica pomiędzy pomiarami prędkości bądź położenia i odpowiedzią modelu była możliwie mała. A zatem minimalizujemy funkcję

$$q(K) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\varphi(iT_s, K) - y_i)^2, \quad (51)$$

gdzie $\varphi(iT_s, K)$, jest kątem obrotu serwomechanizmu obliczonym na podstawie modelu, oraz y_i jest kątem zmierzonym w chwili iT_s .

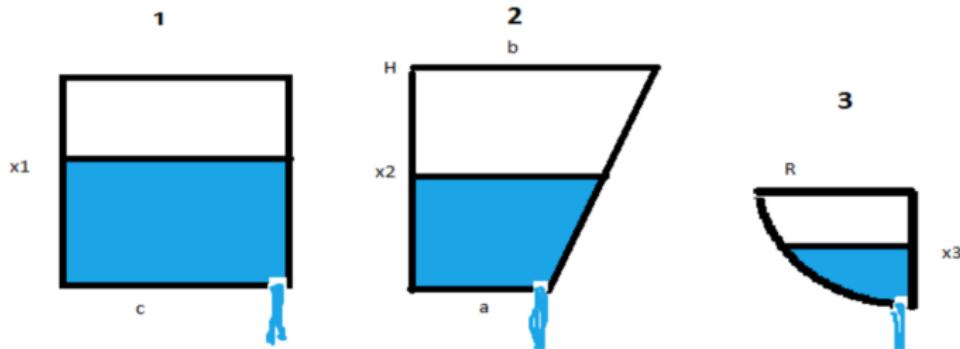


Rysunek: Ch-ka statyczna serwomechanizmu.



Rysunek: Identyfikacja stałej K , porównanie pomiarów z modelem.

Układ zbiorników



Rys.1.

Zgodnie z prawem Torricellego równania opisujące wypływanie wody ze zbiorników są następujące

$$\dot{x}_1 = -\frac{c_1 \sqrt{x_1}}{S_1}, \quad \dot{x}_2 = -\frac{c_2 \sqrt{x_2}}{S_2(x_2)}, \quad \dot{x}_3 = -\frac{c_3 \sqrt{x_3}}{S_3(x_3)}, \quad x_i(0) = x_{0,i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$S_1 = cw, \quad S_2(x_2) = w\left(\frac{b-a}{H}x_2 + a\right), \quad S_3(x_3) = w\sqrt{2Rx_3 - x_3^2},$$

$$a = 10\text{cm}, \quad b = 44.5\text{cm}, \quad c = 25, \quad w = 3.5\text{cm}, \quad H = 35\text{cm}, \quad R = 36.4\text{cm}.$$

Wykonano pomiary poziomu cieczy przy wypływie swobodnym dla każdego ze zbiorników. Wyniki pomiarów (czas w s, poziomy w cm) znajdują się pod adresem http://home.agh.edu.pl/~pba/stud/Ident/Lab_05/data_01.mat. Okres próbkowania wynosił $T_0 = 0.01\text{s}$.

Przez h oznaczamy wysokość słupa cieczy w zbiorniku. Symbol $S(h)$ oznacza powierzchnię lustra cieczy przy wysokości h . Bilans masy

$$\Delta m = \rho \Delta V = -\rho ch^\alpha \Delta t, \alpha \in (0, 1). \quad (52)$$

Zmiana objętości

$$\Delta V = S(h) \Delta h \quad (53)$$

Wstawiając (53) do (52) i przechodząc do granicy $\Delta t \rightarrow 0$, otrzymamy równanie opisujące wypływ cieczy ze zbiornika

$$\dot{h} = -\frac{ch^\alpha}{S(h)}, h(0) = h_0. \quad (54)$$

Równania stanu

Charakterystykę pompy oznaczamy przez $q(u)$ [ml/s]. Zbiorniki połączone są szeregowo. Do pierwszego zbiornika wpływa q [ml/s] cieczy i wypływa z niego $c_1 x_1^{\alpha_1}$ [ml/s]. Strumień wypływający ze zbiornika 1, jest równy strumieniowi wpływającemu do zbiornika 2. Podobnie, strumień wypływający ze zbiornika 2, jest równy strumieniowi wpływającemu do zbiornika 3. Modyfikując odpowiednio wzór (54), otrzymujemy następujące równania stanu.

$$\dot{x}_1 = \frac{q(u) - c_1 x_1^{\alpha_1}}{S_1(x_1)}, \quad (55)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{c_1 x_1^{\alpha_1} - c_2 x_2^{\alpha_2}}{S_2(x_2)}, \quad (56)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{c_2 x_2^{\alpha_2} - c_3 x_3^{\alpha_3}}{S_3(x_3)}, \quad (57)$$

W stanie ustalonym wszystkie strumienie są równe, stąd

$$q(u) = c_1 x_1^{\alpha_1} = c_2 x_2^{\alpha_2} = c_3 x_3^{\alpha_3}. \quad (58)$$

Rejestrujemy wypływ swobodny ze zbiornika (bez wlewania do niego cieczy). Pomiary oznaczamy y_j . Następnie rozwiązujeśmy równanie

$$\dot{x}_i = -\frac{c_i x_i^{\alpha_i}}{S_i(x_i)}, x_i(0) = h_{i,0}, i = 1, 2, 3. \quad (59)$$

Rozwiązanie $x_i(t, c_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$, zależy od nieznanych parametrów c_i, α_i . Parametry dobieramy tak, aby funkcja

$$q(c_i, \alpha_i) = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n (x(t_j, c_i, \alpha_i) - y_j)^2, i = 1, 2, 3, \quad (60)$$

osiągnęła minimum. Równanie (59) można rozwiązać analitycznie lub numerycznie.

Rozwiązańe równania (59)

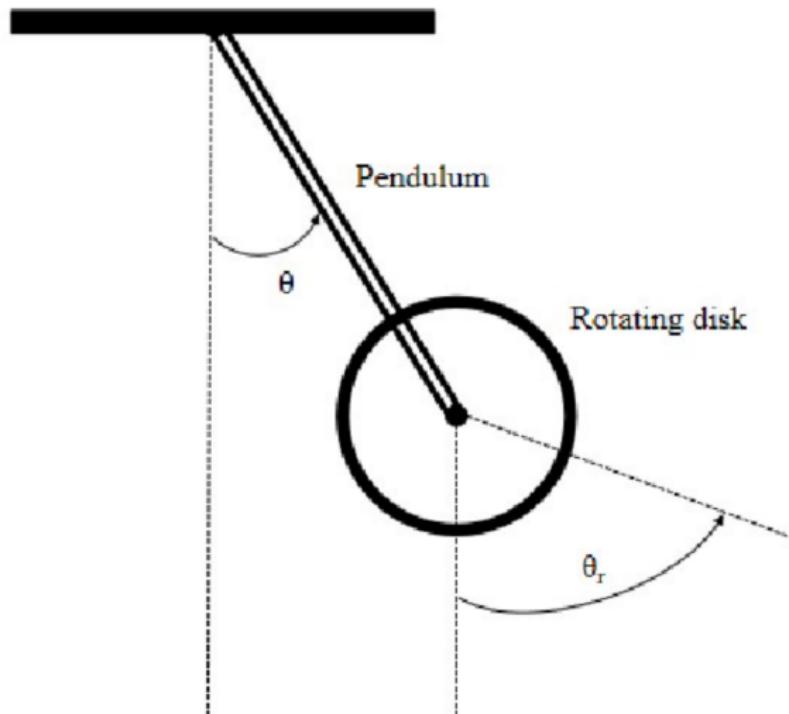
Równanie (59), jest równaniem o zmiennych rozdzielonych.

Rozwiązańe tego równania można uzyskać posługując się wzorem

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{S(\xi)}{\xi^\alpha} d\xi = -ct. \quad (61)$$

We wszystkich przypadkach, całkę po lewej stronie można obliczyć dokładnie.

Wahadło reakcyjne



Rysunek: Schemat wahadła.

Równania ruchu

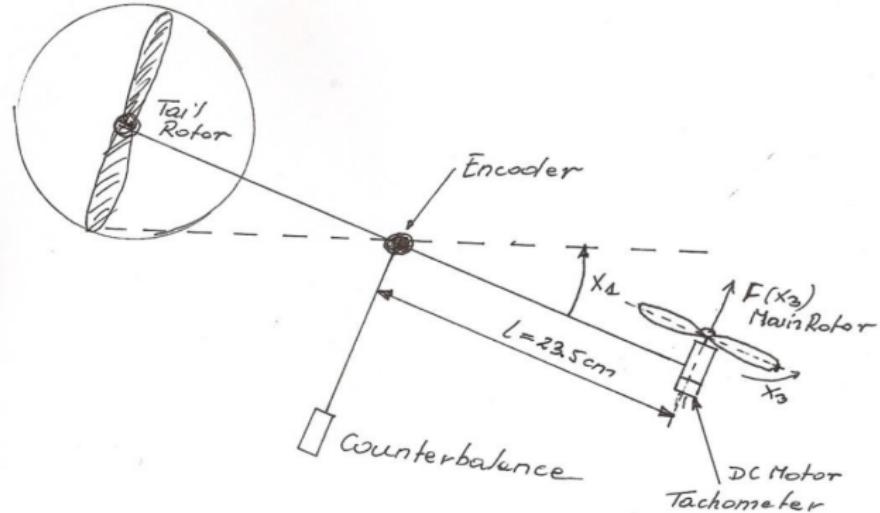
$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_0\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = k_p(u - H(\omega)), \quad (62)$$

$$\dot{\omega} = K(u - H(\omega)). \quad (63)$$

Funkcja $H(\omega)$ jest charakterystyką statyczną silnika DC.

Współczynniki ξ, ω_0 identyfikujemy z wahań swobodnych przy zerowym sterowaniu u . Stałe k_p oraz K należy wyznaczyć z eksperymentów dynamicznych.

Helikopter



Rys. 2. Schemat urządzenia dla ruchu w płaszczyźnie pionowej.

Równania ruchu w płaszczyźnie pionowej.

Równanie dla wychylenia

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (64)$$

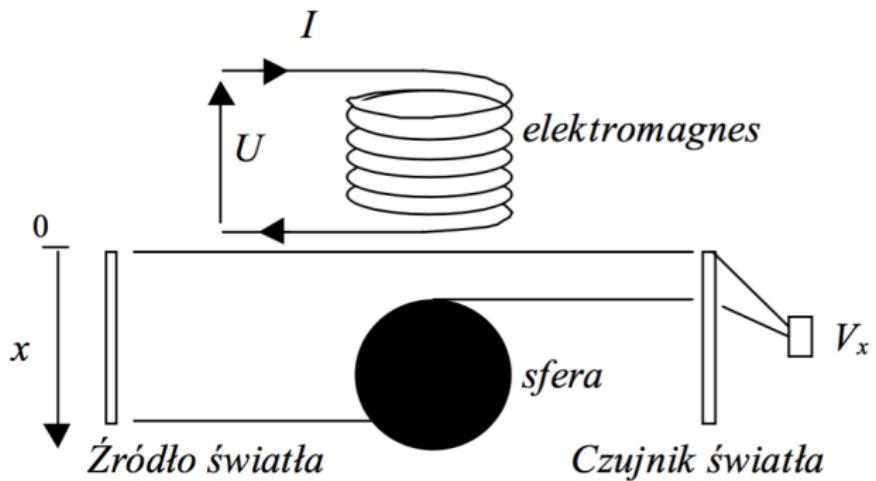
$$\dot{x}_2 = -2\xi\omega_0(1 + c|x_3|)x_2 - \omega_0^2 \sin(x_1 + \alpha_0) + k_p F(x_3). \quad (65)$$

Równanie silnika wraz ze śmigłem

$$\dot{x}_3 = K(u - H(x_3)). \quad (66)$$

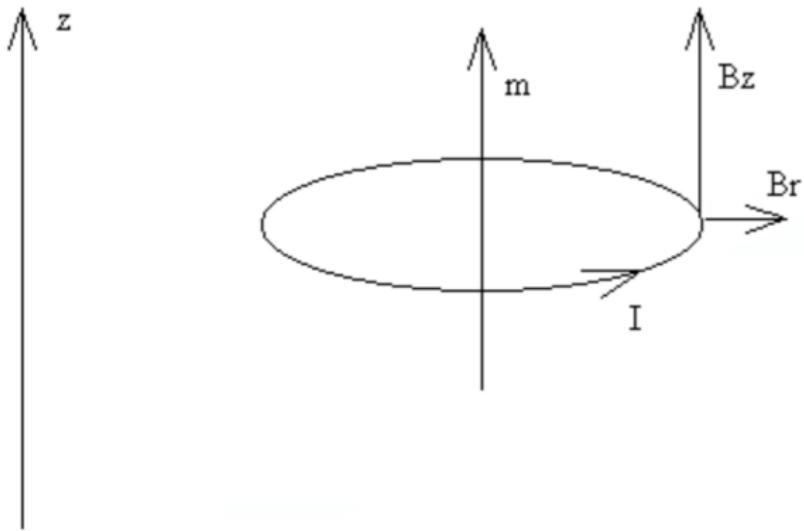
Funkcja F opisuje ciąg śmigła. Funkcja H jest charakterystyką statyczną silnika wraz ze śmigłem.

Lewitacja magnetyczna



Rys. 3.2. Uproszczony schemat systemu służący do wyprowadzenia równań stanu.

Materiały ferromagnetyczne, moment magnetyczny



Rys. 3.1. Obwód z prądem w polu magnetycznym

Mechanizm fizyczny

Na obwód z prądem znajdujący się w polu magnetycznym działa siła

$$F_z = m \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad (67)$$

gdzie m , oznacza moment magnetyczny obwodu z prądem. W ferromagnetykach, rolę mikro-obwodów z prądem pełnią atomy. W obecności zewnętrznego pola momenty magnetyczne ustawiają się wzdłuż pola. Ilość atomów, których momenty magnetyczne są ustawione w kierunku pola, jest proporcjonalna do natężenia pola. A zatem siła będzie proporcjonalna do iloczynu indukcji B i gradientu $\frac{\partial B_z}{\partial z}$, stąd

$$F_z \sim B_z \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (68)$$

Indukcja oraz gradient pola są proporcjonalne do prądu w cewce.

Możemy się zatem spodziewać, że

$$F_z = f(x) i^2, \quad (69)$$

gdzie f , zależy od własności materiałowych i geometrii układu.

Równania stanu systemu.

Do wyprowadzenia równań stanu zastosujemy metodę Lagrange'a. Funkcja Lagrange'a ma postać

$$\mathcal{L}(x, q, \dot{x}, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L(x)\dot{q}^2 + \frac{1}{2}R \int_0^t \dot{q}^2 dt + mgx + qu, \quad (70)$$

gdzie q oznacza ładunek przepływający przez cewkę elektromagnesu. Prąd $i = \dot{q}$. Zastosowanie formalizmu Lagrange'a, daje następujące równania

$$\ddot{x} = \frac{1}{2m}L'(x)i^2 + g, \quad (71)$$

$$\dot{i} = \frac{1}{L}(u - Ri - L'(x)\dot{x}i). \quad (72)$$

Siła przyciągania elektromagnesu jest dana wzorem

$$F_z = \frac{1}{2} L'(x) i^2. \quad (73)$$

Ze względu na obecność wzmacniacza mocy, który pracuje jako źródło prądowe, drugie równanie przyjmuje postać

$$\dot{i} = \frac{1}{\tau} (ku + i_0 - i), \quad (74)$$

gdzie τ jest stałą czasową, k oznacza współczynnik wzmocnienia oraz i_0 jest stałym prądem płynącym przy $u = 0$. Indukcyjność cewki może być aproksymowana wzorem

$$L(x) = L_\infty + L_0 \exp\left(-\frac{x}{a}\right), \quad L_0, L_\infty, a > 0. \quad (75)$$

gdzie L_0 , jest indukcyjnością cewki dla $x = 0$ oraz L_∞ , jest indukcyjnością dla $x \rightarrow \infty$.

Stan ustalony

Z równań (71), (74) i (75) wynika, że w stanie ustalonym

$$i = i_0 + ku \quad (76)$$

oraz

$$\exp\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{L_0(i_0 + ku)^2}{2mga}. \quad (77)$$

Stąd równanie dla punktów równowagi odpowiadających ustalonemu sterowaniu u

$$x = a \ln\left(\frac{L_0(i_0 + ku)^2}{2mga}\right). \quad (78)$$

Każdy punkt równowagi jest niestabilny i w wyniku działania zakłóceń, kulka albo spadnie albo zostanie przyciągnięta do elektromagnesu.

Identyfikacja

Identyfikacja układu polega na znalezieniu parametrów τ, k, i_0, m , co jest zadaniem łatwym, bo prąd jest mierzony, oraz na znalezieniu parametrów L_0 oraz a , co jest nieco trudniejsze. Aby znaleźć te ostatnie, można albo zmierzyć indukcyjność cewki w funkcji odległości x , albo wykorzystać dowolny regulator stabilizujący (np. PID) i wyznaczyć L_0 oraz a , z równości (78). Przekształcając równość (78), można pokazać, że

$$x = cz + d, \quad (79)$$

gdzie

$$z = \ln(ku + i_0) \quad (80)$$

oraz

$$c = 2a, d = a \ln \left(\frac{L_0}{2mga} \right). \quad (81)$$

Parametry c, d , znajdujemy metodą regresji liniowej.

Dziękuję za uwagę.

Identyfikacja procesów technologicznych, wykład 4.

Teoria estymacji

dr hab. inż. Piotr Bania, pba@agh.edu.pl, B1, p. 303

21 stycznia 2022

- Teoria estymacji zajmuje się poszukiwaniem nieznanych parametrów modeli matematycznych (statystycznych) na podstawie obserwacji
- Poszukiwanie wartości parametru nazywamy estymacją punktową.
- Poszukiwanie przedziału, w którym leży dany parametr nazywamy estymacją przedziałową.

Estymator

- Estymatorem parametru θ rozkładu $p(y, \theta)$ nazywamy statystykę $\hat{\theta}(y)$. A zatem estymator jest funkcją obserwacji czyli zmienną losową.
- Wartość statystyki $\hat{\theta}$ jest oszacowaniem nieznanego parametru θ .

Niech $y \sim N(\theta, \sigma)$, wówczas średnia

$$\hat{\theta} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}, \quad (1)$$

jest estymatorem parametru θ oraz

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(y_1 - \hat{\theta})^2 + \dots + (y_n - \hat{\theta})^2}{n}, \quad (2)$$

jest estymatorem parametru σ^2 , ale $\hat{\sigma}$ jest obciążony tj. $E\hat{\sigma} \neq \sigma$.

Jakie cechy estymatora są pożądane?

Brak obciążenia oznacza, że

$$E(\hat{\theta}(y)) = \theta. \quad (3)$$

Jeżeli tak jest, to wielokrotne stosowanie estymatora daje wartość parametru zbliżoną do prawdziwej. Wariancja estymatora

$$E(\hat{\theta}(y) - \theta)^2, \quad (4)$$

powinna być możliwie mała. Wówczas rozrzut wokół wartości oczekiwanej będzie mały. W przypadku wektorowym, równanie (4) ma postać

$$\text{tr} \text{Cov}(\hat{\theta}) = \text{tr} E(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T. \quad (5)$$

Estymator nieobciążony może nie istnieć, podobnie jak estymator nieobciążony o minimalnej wariancji może nie istnieć. Czasem warto zdecydować się na obciążenie estymatora i zyskać prostotę obliczeń.

Zbieżność zmiennych losowych

Ciąg zmiennych losowych X_n zmierza do zmiennej losowej X **według rozkładu**, jeżeli dla każdego x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x). \quad (6)$$

Ciąg zmiennych losowych X_n zmierza do zmiennej losowej X **według prawdopodobieństwa**, jeżeli dla wszystkich $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0. \quad (7)$$

Ciąg X_n zmierza do zmiennej losowej X **prawie na pewno**, jeżeli

$$P(\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1. \quad (8)$$

Ciąg X_n zmierza do zmiennej losowej X **średnio-kwadratowo**, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|X_n - X|^2 = 0. \quad (9)$$

Zbieżność średnio-kwadratowa \Rightarrow zbieżność według prawdopodobieństwa \Rightarrow zbieżność według rozkładu.

Zbieżność prawie na pewno \Rightarrow zbieżność według prawdopodobieństwa \Rightarrow zbieżność według rozkładu.

Estymator $\hat{\theta}(y_1, \dots, y_n)$ jest zgodny jeżeli zbiega według prawdopodobieństwa do prawdziwej wartości parametru, gdy liczba obserwacji $n \rightarrow \infty$. Dla wszystkich $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}(y_1, \dots, y_n) - \theta| > \epsilon) = 0. \quad (10)$$

Statystyka dostateczna

Statystykę $T(y)$ nazywamy dostateczną, jeżeli

$$p(y|T(y) = t) = g(y). \quad (11)$$

Czyli rozkład warunkowy y nie zależy od parametru θ . Statystyka dostateczna zawiera tyle samo informacji co dane. Statystyka dostateczna redukuje dane. Niech $\theta = \mu$ oraz $p(y, \theta) = N(y, \mu, \sigma)$, σ znane. Statystyka

$$T(y) = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}, \quad (12)$$

jest dostateczna dla $\theta = \mu$. Statystyka trywialna $T(y) = (y_1, \dots, y_n)$ jest zawsze dostateczna. Definicja Bayesowska

$$p(\theta|y) = p(\theta|T(y)). \quad (13)$$

Kryterium faktoryzacji (Fisher-Neyman). Statystyka $T(y)$ jest dostateczna wtedy i tylko wtedy gdy

$$p(y, \theta) = h(y)g(T(y), \theta). \quad (14)$$

Dla rozkładu $p(y, \theta) = N(y, \mu, \sigma^2)$, σ znane, mamy

$$g(T(y), \theta) = \exp\left(-\frac{(\theta - \bar{y})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (15)$$

$$h(y) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2\right) \quad (16)$$

oraz

$$p(\theta|y) = h(y)g(T(y), \theta). \quad (17)$$

Twierdzenie Rao-Blackwella. Jeżeli $\hat{\theta}_0(y)$ jest nieobciążonym estymatorem θ oraz $T(y)$ jest statystyką dostateczną dla θ , to estymator

$$\hat{\theta}(y) = E(\hat{\theta}_0|T(y)) \quad (18)$$

ma wariancję nie większą niż $\hat{\theta}_0$. Innymi słowy

$$E(\hat{\theta}(y) - \theta)^2 \leq E(\hat{\theta}_0(y) - \theta)^2. \quad (19)$$

Jeżeli warunek $Eh(T(y)) = 0$ pociąga za sobą $h \equiv 0$, to powiemy, że statystyka jest $T(y)$ jest zupełna. Wówczas nie istnieje żadna nietrywialna funkcja h , statystyki T , której wartość oczekiwana nie zależy od θ . Jeżeli $T(y)$ jest dostateczna i zupełna, to twierdzenie Lehmanna-Sheffego gwarantuje, że estymator

$$\hat{\theta}(y) = E(\hat{\theta}_0|T(y)), \quad (20)$$

jest nieobciążony o minimalnej wariancji. Ponadto, jeżeli estymator $\hat{\theta}(y) = \varphi(T(y))$ jest nieobciążony oraz $T(y)$ jest dostateczna i zupełna, to $\hat{\theta}(y)$ ma minimalną wariancję.

Podsumowując, jeżeli uda się znaleźć estymator nieobciążony $\hat{\theta}_0(y)$, to estymator nieobciążony o minimalnej wariancji ma postać

$$\hat{\theta}(y) = E(\hat{\theta}_0|T(y)), \quad (21)$$

gdzie T jest statystyką dostateczną zupełną. Kłopot polega na tym, że statystyki dostateczne i zupełne są trudne do znalezienia, zaś sam estymator nieobciążony o minimalnej wariancji może nie istnieć albo może być całkowicie bezużyteczny. Dlatego w praktyce do konstrukcji estymatorów używamy metody największej wiarygodności lub metod Bayesowskich. Rezygnacja z braku obciążenia i zastąpienie tego warunku np. przez warunek asymptotycznej nieobciążoności często daje dobre wyniki. We wzorze (21) zamiast statystyki dostatecznej $T(y)$ można użyć statystyki trywialnej $T(y) = y$, która też jest statystyką dostateczną, ale nie redukuje danych i nie musi być zupełna.

Prosty przykład

Niech $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Statystyka

$$T(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad (22)$$

jest zupełna i dostateczna dla σ^2 , ale estymator $\hat{\theta}_0(y) = T(y)$ jest obciążony, bo

$$\begin{aligned} E\hat{\theta}_0(y) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E(y_i - m)^2 - 2E(y_i - m)(\bar{y} - m) + E(\bar{y} - m)^2) = \\ &= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n} \neq \sigma^2. \end{aligned}$$

Estymator

$$\hat{\theta}(y) = \frac{n}{n-1} T(y), \quad (23)$$

jest nieobciążony oraz jest funkcją statystyki dostatecznej i zupełnej, a zatem, na mocy twierdzenia Lehmanna-Sheffego, $\hat{\theta}(y)$, jest estymatorem nieobciążonym o minimalnej wariancji.

Wykładnicza rodzina rozkładów

Zakładamy, że $x \in \mathbb{R}^n$. Powiemy, że gęstość f należy do wykładniczej rodziny rozkładów, jeżeli można ją przedstawić w postaci

$$f(x, \theta) = h(x) \exp \left(\sum_{i=1}^s \eta_i(\theta) T_i(x) - A(\theta) \right), \theta \in \Theta. \quad (24)$$

Wówczas $T(x) = (T_1(x), \dots, T_s(x))$ jest statystyką dostateczną dla θ . Jeżeli zbiór $M = \{\xi \in \mathbb{R}^s : \xi_1 = \eta_1(\theta), \dots, \xi_s = \eta_s(\theta), \theta \in \Theta\}$ zawiera otwarty obszar prostokątny

$R = \{(u_1, \dots, u_s) : a_i < u_i < b_i, i = 1, \dots, s\}$, to statystyka $T(x)$ jest zupełną statystyką dostateczną i wówczas estymator nieobciążony o minimalnej wariancji jest funkcją statystyki T . Większość typowych rozkładów należy do rodziny wykładniczej, ale nie należą do niej mieszaniny rozkładów (np. *gaussian mixture model, GMM*), i nie mogą być one przedstawione w postaci (24).

Liczba

$$I_1(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln f(y, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 f(y, \theta) dy \quad (25)$$

nazywamy informacją Fishera. Liczba I_1 ma interpretację informacji, jaką pojedyncza obserwacja y , niesie o parametrze θ . Założymy, że wykonaliśmy y_1, \dots, y_n obserwacji. Wariancja estymatora nieobciążonego $\hat{\theta}$ spełnia nierówność Rao-Cramera

$$E(\hat{\theta}(y_1, \dots, y_n) - \theta)^2 \geq \frac{1}{n I_1(\theta)}. \quad (26)$$

Uwaga. Nierówność (26) dotyczy estymatorów nieobciążonych, estymator obciążony może mieć mniejszą wariancję.

Liczbę

$$e_n = \frac{1}{nl_1(\theta)Var(\hat{\theta}(y_1, \dots, y_n))} \leq 1 \quad (27)$$

nazywamy efektywnością estymatora $\hat{\theta}(y_1, \dots, y_n)$. Estymator najefektywniejszy ma $e_n = 1$. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 1$ to estymator $\hat{\theta}$ jest asymptotycznie najefektywniejszy. Dla rozkładu $N(\mu, \sigma^2)$ informacja Fishera $I_1(\sigma^2) = \frac{1}{2\sigma^4}$. Ponieważ wiemy z (23), że estymator wariancji

$$\hat{\sigma}^2(y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad (28)$$

ma minimalną wariancję i jest nieobciążony, to z nierówności Cramera-Rao mamy

$$Var(\hat{\sigma}^2(y)) = \frac{2\sigma^4}{n} \quad (29)$$

oraz efektywność $e_n = 1$ dla każdego $n > 1$.

Metoda największej wiarygodności

Funkcja wiarygodności, zmienne dyskretne, $P(Y = y_i) = p_i(\theta)$, próba prosta,

$$L(\theta, y) = p_1(\theta) \dots p_n(\theta), \quad (30)$$

Funkcja L jest prawdopodobieństwem otrzymania próby y_1, \dots, y_n . Należy znaleźć taki parametr θ aby prawdopodobieństwo zaobserwowania próby y_1, \dots, y_n było maksymalne. Funkcja wiarygodności, zmienne ciągłe

$$L(\theta, y) = p(y_1, \theta)p(y_2, \theta) \dots p(y_n, \theta). \quad (31)$$

Wówczas rozważamy element prawdopodobieństwa $L(y)dy_1 \dots dy_n$ i szukamy parametru który maksymalizuje gęstość (31).

Metoda największej wiarygodności

Z przyczyn praktycznych zamiast maksymalizować L , minimalizujemy

$$\mathcal{L}(\theta, y) = -\ln L(\theta, y). \quad (32)$$

Niech $p(y_i, \theta) = \theta e^{-\theta y_i}$. Funkcja wiarygodności ma postać

$$L(\theta, y) = \theta e^{-\theta y_1} \theta e^{-\theta y_2} \dots \theta e^{-\theta y_n}. \quad (33)$$

Stąd oraz z (32)

$$\mathcal{L}(\theta, y) = -n \ln \theta + \theta \sum_{k=1}^n y_k. \quad (34)$$

Przyrównując do zera pochodną funkcji \mathcal{L} otrzymamy

$$\hat{\theta}(y) = \frac{1}{\underline{y_1+\dots+y_n}}. \quad (35)$$

Ponieważ $Ey_i = \theta^{-1}$, to otrzymaliśmy całkiem sensowny estymator, którego wariancja zmierza do zera gdy $n \rightarrow \infty$.

Niech $p(y_i, \theta) = N(y_i, \mu, \sigma)$ oraz niech $\theta = (\mu, \sigma)$. Funkcja wiarygodności

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma, y) = \frac{n}{2} \ln 2\pi + n \ln \sigma + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2. \quad (36)$$

Różniczkowanie względem μ, σ i przerównanie gradientu do zera daje

$$\hat{m}(y) = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}, \quad (37)$$

$$\hat{\sigma}(y)^2 = \frac{(y_1 - \hat{m}(y)) + \dots + (y_n - \hat{m}(y))}{n}. \quad (38)$$

Jak wiadomo, estymator (37) jest nieobciążonym estymatorem μ ale (38) jest obciążony. Jednakże dla $n \rightarrow \infty$ obciążenie znika oraz wariancja $\hat{\sigma}(y)$ zmierza do zera.

Estymacja parametru rozkładu Poissona

Niech $P(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Pobieramy próbę $y_1 = k_1, \dots, y_n = k_n$.
Funkcja wiarygodności

$$\mathcal{L}(\lambda, k_1, \dots, k_n) = n\lambda - (k_1 + \dots + k_n) \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln k_i!. \quad (39)$$

Przyrównując pochodną względem λ do zera otrzymujemy estymator

$$\hat{\lambda}(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i. \quad (40)$$

Estymator największej wiarygodności otrzymujemy poprzez minimalizację funkcji wiarygodności, co prowadzi do rozwiązania układu tzw. równań normalnych

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta, y)}{\partial \theta_i} = 0, i = 1, \dots, p. \quad (41)$$

Jeżeli dla każdego n istnieje jednoznaczne rozwiązanie równań (41), to ciąg estymatorów $\hat{\theta}_n(y_1, \dots, y_n)$ jest asymptotycznie normalny oraz

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(y) - \theta) \rightarrow N(0, I_1^{-1}(\theta)), \quad (42)$$

według prawdopodobieństwa, przy czym $I_1^{-1}(\theta)$ jest odwrotnością macierzy informacyjnej Fishera. A zatem estymatory NW są asymptotycznie nieobciążone, zgodne oraz z nierówności Cramera-Rao, asymptotycznie efektywne.

Metoda najmniejszych kwadratów

Niech $e_i \sim N(0, \sigma^2 I)$, oraz założmy, że model ma postać

$$y_i = f(t_i, \theta) + e_i, i = 1, 2, \dots, n, \quad (43)$$

gdzie $t_{i+1} > t_i$, $t_i \in \mathbb{R}$. Funkcja wiarygodności ma postać

$$\mathcal{L}(\theta, y) = c_n + n \ln \sigma + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n e_i(\theta, y_i)^T e_i(\theta, y_i). \quad (44)$$

gdzie $e_i(\theta) = y_i - f(t_i, \theta)$. Aby znaleźć θ minimalizujemy sumę kwadratów błędów

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n \|e_i(\theta, y_i)\|^2. \quad (45)$$

Po znalezieniu minimum, otrzymamy estymator najmniejszych kwadratów $\hat{\theta}(y)$ i możemy wówczas oszacować wariancję szumu

$$\hat{\sigma}^2(y) = \frac{Q(\hat{\theta}(y))}{n}. \quad (46)$$

Aby oszacować błąd estymacji parametru zauważmy, że rozkład warunkowy $p(\theta|y)$ można w otoczeniu punktu $\hat{\theta}$ przedstawić w postaci

$$p(\theta|y) = C_n \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}(\theta - \hat{\theta})^T Q_{\theta,\theta}(\hat{\theta})(\theta - \hat{\theta})\right), \quad (47)$$

gdzie $Q_{\theta,\theta}(\hat{\theta})$ oznacza hesjan funkcji Q w punkcie $\hat{\theta}$. Ze względu na asymptotyczną normalność estymatora wnioskujemy, że macierz

$$C_\theta = \hat{\sigma}^2 Q_{\theta,\theta}^{-1}(\hat{\theta}) \quad (48)$$

można traktować, jako przybliżenie macierzy kowariancji parametru θ . A zatem błędy parametrów możemy oszacować, jako

$$\delta\theta_i = 3\sqrt{C_{\theta,i,i}}. \quad (49)$$

Większość procedur minimalizacji funkcji typu (45), w tym procedura Levenberga-Marquardta oraz typowe algorytmy optymalizacji gradientowej (np. procedura *trust region reflective*) zwraca hesjan minimalizowanej funkcji.

Estymacja parametrów modeli dynamicznych, przykład

Metoda najmniejszych kwadratów może służyć do identyfikacji parametrów modeli dynamicznych (równań różniczkowych) w postaci

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t), \eta), x(0) = x_0, \quad (50)$$

gdzie model obserwacji jest dany równaniem

$$y_k = h(x(t_k)) + e_k, e_k \sim N(0, \sigma^2). \quad (51)$$

Jeżeli prawa strona (50), jest odpowiednio regularna, to rozwiązanie $x(t, \eta, x_0)$ jest gładką funkcją parametru η oraz warunku początkowego x_0 , który jest nieznany. Niech $\theta = (x_0, \eta)$. Wówczas

$$y_k = h(x(t_k, \theta)) + e_k = f(t_k, \theta) + e_k, \quad (52)$$

co jest dokładnie takie samo, jak model metody najmniejszych kwadratów (43).

Aby znaleźć parametry η oraz warunek początkowy x_0 , minimalizujemy

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^n ||y_k - h(x(t_k, \theta))||^2. \quad (53)$$

Gradient oraz ewentualnie hesjan najczęściej aproksymujemy numerycznie. Można stosować metodę Levenberga-Marquardta. Oszacowanie błędów konstruujemy według wzorów (47-49). Układ równań różniczkowych (50), rozwiązujemy numerycznie metodą Runego-Kutty lub inną, odpowiednią dla danego zadania metodą numeryczną.

Przykład - estymacja parametrów układu oscylacyjnego

Rozważamy zadanie identyfikacji parametrów $a, b, c, \alpha, \dot{x}(0), x(0)$ równania

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx^3 + c \sin(x - \alpha) = 0, \quad (54)$$

opisującego drgania swobodne nieliniowego wahadła. Równanie zapiszemy jako układ równań

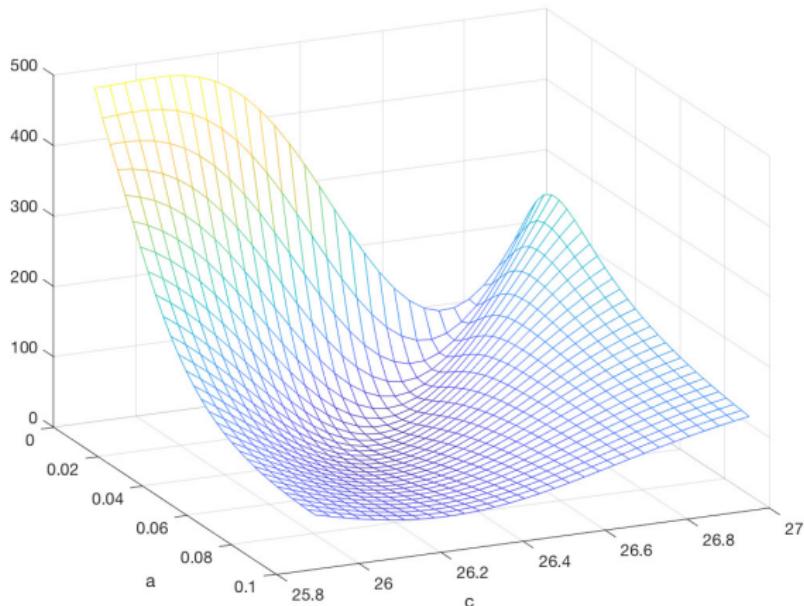
$$\dot{x}_1 = x_2, x_1(0) = x_{10} \quad (55)$$

$$\dot{x}_2 = -ax_2 - bx_2^3 - c \sin(x_1 - \alpha), x_2(0) = x_{20}. \quad (56)$$

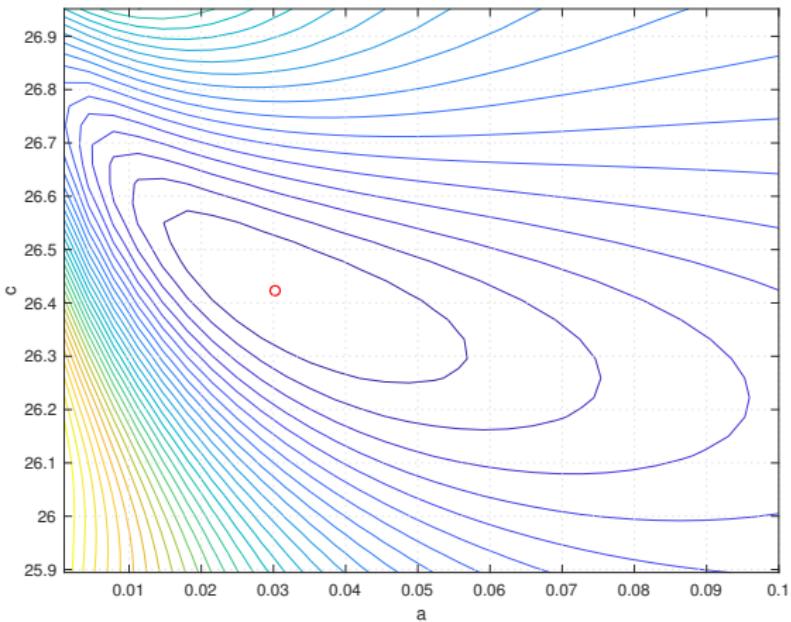
Równanie (55-56) rozwiązuje my metodą RK4. Model pomiarów ma postać

$$y_k = x_1(t_k) + e_k, \quad (57)$$

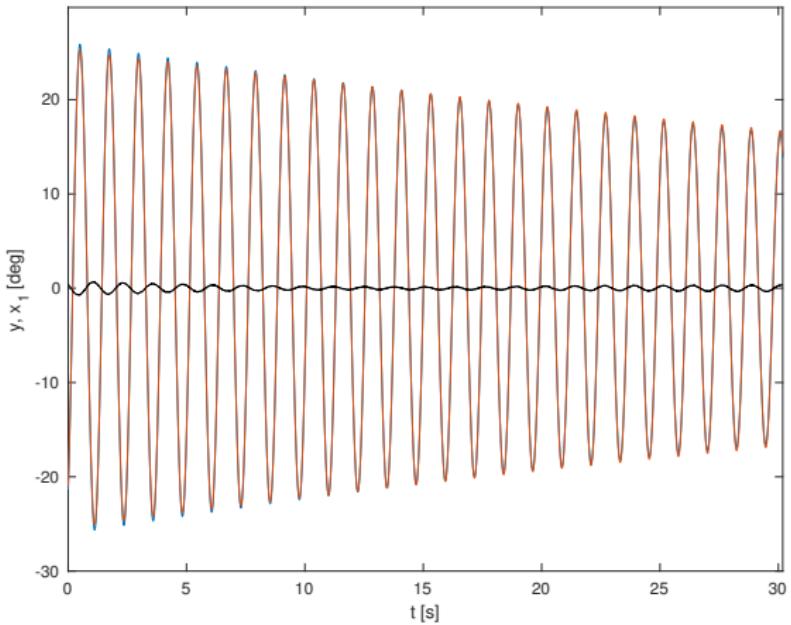
gdzie $e_k \sim N(0, \sigma^2)$ oraz $t_k = kT_0$, $T_0 = 0.01s$.



Rysunek: Wykres funkcji wiarygodności \mathcal{L} , przy zmianach parametrów a i c w otoczeniu punktu optymalnego.



Rysunek: Wykres poziomyczny funkcji wiarygodności \mathcal{L} , przy zmianach parametrów a i c w otoczeniu punktu optymalnego.



Rysunek: Porównanie modelu z danymi oraz błąd e_k .

Model liniowy Gaussa-Markowa

Niech $e_i \sim N(0, \sigma^2)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ oraz niech model będzie dany równaniem

$$Y = \phi\theta + e, \quad (58)$$

gdzie macierz ϕ jest znana. Pojedyncza obserwacja ma zatem postać $y_i = \phi_{i,1}\theta_1 + \dots + \phi_{i,p}\theta_p + e_i$. Stosując metodę najmniejszych kwadratów znajdujemy, że estymator parametru θ otrzymuje się poprzez rozwiązywanie układu równań

$$(\phi^T \phi) \hat{\theta}(Y) = \phi^T Y. \quad (59)$$

Układ równań (59) ma zawsze rozwiązanie, ale macierz $\phi^T \phi$ nie musi być dodatnio określona i wówczas znajdujemy macierz pseudo-odwrotną. Jeżeli $\phi^T \phi > 0$, to układ rozwiązujemy metodą QR lub dokonując faktoryzacji Choleskiego. Należy unikać bezpośredniego odwracania macierzy $\phi^T \phi$.

Macierz kowariancji estymatora $\hat{\theta}(Y)$ ma postać

$$C_{\theta} = Cov(\hat{\theta}|Y) = \hat{\sigma}^2(Y)(\phi^T \phi)^{-1}, \quad (60)$$

gdzie oszacowanie wariancji szumu

$$\hat{\sigma}^2(Y) = \frac{1}{n} \|Y - \phi \hat{\theta}(Y)\|^2. \quad (61)$$

Aproksymacja funkcji

Model

$$y_i = \sum_{j=1}^m \theta_j \varphi_j(t_i) + e_i, i = 1, \dots, n, \quad (62)$$

zapisujemy, jako $Y = \phi\theta + e$, gdzie $Y = \text{col}(y_1, \dots, y_n)$ oraz

$$\phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) & \cdots & \varphi_m(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \cdots & \varphi_m(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(t_n) & \cdots & \varphi_m(t_n) \end{bmatrix}_{(n \times m)}. \quad (63)$$

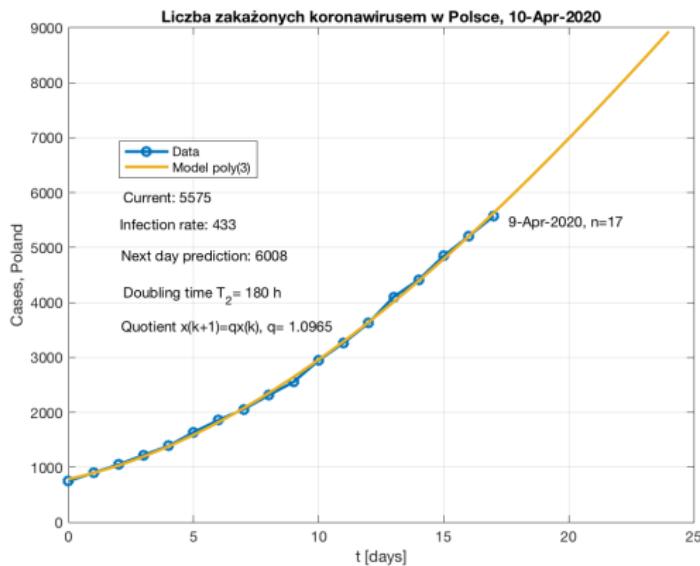
Jeżeli $\phi^T \phi > 0$, to estymator parametrów jest dany wzorem

$$\hat{\theta}(Y) = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y. \quad (64)$$

Odpowiedni kod Matlaba ma postać `th=(phi'*phi)\(phi'*Y)`.

Przykład - dopasowanie wielomianu

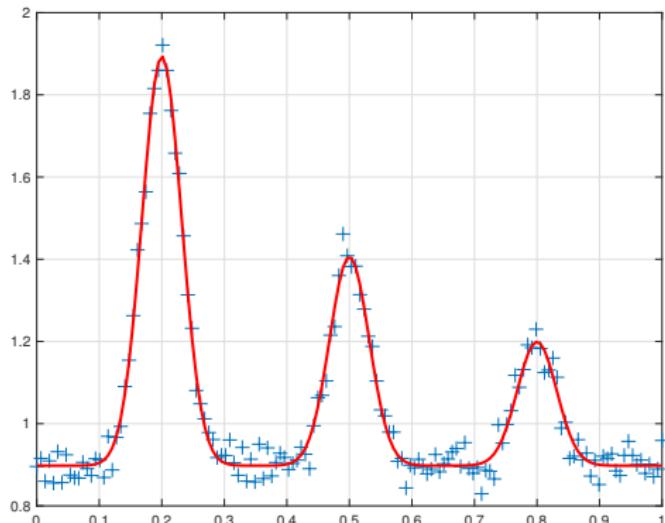
Jeżeli $\varphi_j(t) = t^{j-1}$, to zadanie polega na dopasowaniu do danych y_i , wielomianu stopnia $m - 1$.



Rysunek: Dopasowanie wielomianu 3-go stopnia do danych, $\hat{\sigma} = 7.73$.

Przykład - aproksymacja funkcjami Gaussa

Jeżeli $\varphi_j(t) = \exp(-a_j(t - \tau_j)^2)$, to zadanie polega na dopasowaniu do danych y_i , kombinacji liniowej funkcji gaussowskich, przy czym a_j, τ_j są ustalone.



Rysunek: Dopasowanie funkcji Gaussa

Przykład - estymacja parametrów modelu ARMA

Rozważamy model z czasem dyskretnym

$$y_k = -\theta_1 y_{k-1} - \theta_2 y_{k-2} + \theta_3 u_{k-1} + e_k, k = 3, 4, \dots \quad (65)$$

gdzie $e_k \sim N(0, \sigma^2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Równania (65) zapisujemy w postaci

$$y_3 = -\theta_1 y_2 - \theta_2 y_1 + \theta_3 u_2 + e_3, \quad (66)$$

$$y_4 = -\theta_1 y_3 - \theta_2 y_2 + \theta_3 u_3 + e_4, \quad (67)$$

$$\vdots, \quad (68)$$

$$y_{n+2} = -\theta_1 y_{n+1} - \theta_2 y_n + \theta_3 u_{n+1} + e_{n+2}. \quad (69)$$

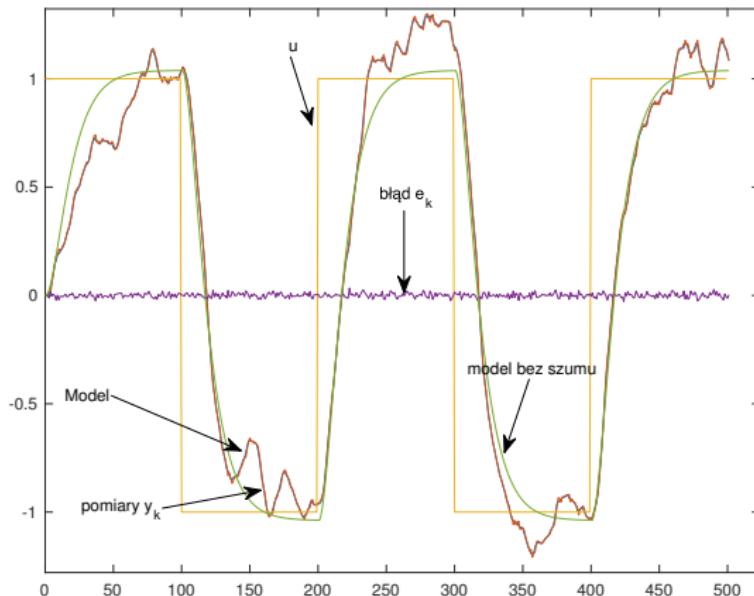
Oznaczamy $Y = \text{col}(y_3, y_4, \dots, y_{n+2})$, $e = \text{col}(e_3, e_4, \dots, e_{n+2})$ oraz

$$\phi = \begin{bmatrix} -y_2 & -y_1 & u_2 \\ -y_3 & -y_2 & u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{n+2} & -y_{n+1} & u_{n+1} \end{bmatrix}_{(n \times 3)} . \quad (70)$$

Jeżeli $\phi^T \phi > 0$, to estymator parametrów jest dany wzorem

$$\hat{\theta}(Y) = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y. \quad (71)$$

Prawdziwe wartości parametrów wynosiły $\theta_1 = -1.8$, $\theta_2 = 0.81$, $\theta_3 = 0.01$, $\sigma = 0.01$. W wyniku estymacji otrzymano $\theta_1 = -1.8038 \pm 0.06$, $\theta_2 = 0.8131 \pm 0.06$, $\theta_3 = 0.0097 \pm 0.0031$, $\sigma = 0.0104$. Błędy oszacowano ze wzoru (49), jako $\delta\theta_i = 3\sqrt{C_{\theta,i,i}}$.



Rysunek: Wyniki estymacji, predykcja jedno-krokowa, błędy e_k oraz odpowiedź modelu przy zerowym szumie.

Podstawowy wniosek płynący z powyższych przykładów jest taki, że szumu na wejściach układu nie można bezkarnie pomijać i ma on duży wpływ na wyniki estymacji parametrów. Szum w pomiarach jest relatywnie łatwo uwzględnić.

Testy dla współczynników modelu liniowego Gaussa-Markowa

Niech $\theta \in \mathbb{R}^p$ oraz C niech będzie macierzą wymiaru $r \times p$ i rzędu r .
Przy założeniu, że hipoteza $H_0 : C\theta = 0$, jest prawdziwa, statystyka

$$F = \left(\frac{n-p}{rn\hat{\sigma}^2} \right) \hat{\theta}^T C^T (C(\phi^T \phi)^{-1} C^T) C \hat{\theta}, \quad (72)$$

ma rozkład $F_{r,n-p}$. A zatem hipotezę H_0 odrzucamy, gdy F przyjmuje duże wartości. W szczególności, jeżeli

$$F > F_{r,n-p}(1 - \alpha/2), \quad (73)$$

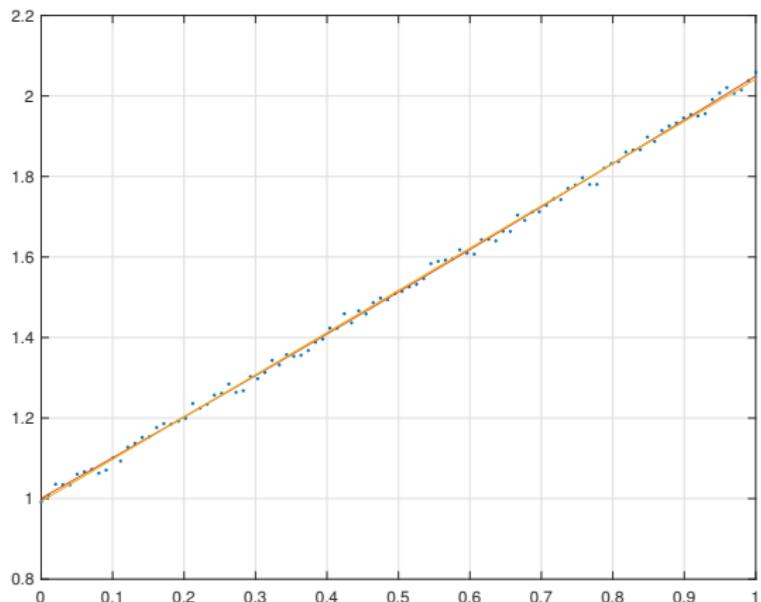
gdzie $F_{r,n-p}(1 - \alpha/2)$, jest kwantylem rzędu $1 - \alpha/2$ rozkładu F -Snedecora, to H_0 należy odrzucić. Testu używamy do stwierdzenia, czy współczynniki θ_i modelu (58) są istotnie różne od zera. Aby np. stwierdzić czy $\theta_1 \neq 0$, należy przyjąć $C = (1, 0, \dots, 0, 0)$. Jeżeli nie ma podstaw do odrzucenia H_0 , podstawiamy w modelu $\theta_1 = 0$.

Przykład

Dopasowanie współczynników wielomianu

$$y = \theta_1 + \theta_2 x + \theta_3 x^2 \quad (74)$$

wykonano metodą najmniejszych kwadratów. Otrzymano wartości $\theta_1 = 1.000553$, $\theta_2 = 1.00202$, $\theta_3 = 0.046844$. Wyniki dopasowania modelu kwadratowego oraz liniowego pokazano poniżej. Ilość pomiarów $n = 100$. Czy współczynnik θ_3 jest istotnie różny od zera?



Rysunek: Wyniki dopasowania wielomianu (74) do danych oraz wyniki dopasowania funkcji liniowej, tj. model (74) dla $\theta_3 = 0$.

Czy współczynnik θ_3 jest istotnie różny od zera?

Testujemy hipotezę $H_0 : \theta_3 = 0$.

Mamy $C = [0 \ 0 \ 1]$, $n = 100$, $r = 1$, $p = 3$.

Wartość krytyczna dla $\alpha = 0.01$, to $F_{kr} = F_{r,n-p}(1 - \alpha/2) \approx 8.25$.

Wartość statystyki F obliczona ze wzoru (72) wynosiła $F \approx 31.42$, co wielokrotnie przekracza wartość krytyczną. A zatem należy odrzucić H_0 i przyjąć, że współczynnik θ_3 jest istotnie różny od zera, pomimo, że wizualnie nie jesteśmy w stanie tego stwierdzić.

Funkcja straty

$$L : \Theta \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{R}, \quad (75)$$

gdzie \mathcal{A} jest zbiorem decyzji (action) oraz Θ jest zbiorem parametrów. Wartość funkcji $L(\theta, a)$ interpretujemy jako stratę poniesioną gdy została podjęta decyzja a . Typowe funkcje straty

$$L_2(\theta, y) = \frac{1}{2}(\theta - a)^2, \quad (76)$$

$$L_1(\theta, y) = \frac{1}{2}|\theta - a|^2, \quad (77)$$

$$L_0(\theta, y) = 1, \text{ gdy } \theta \neq a, \text{ oraz } L_0 = 0 \text{ w przeciwnym przypadku.} \quad (78)$$

Reguła decyzyjna

$$\delta : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{A} \quad (79)$$

przypisuje obserwacji $y \in \mathcal{Y}$ decyzję $a = \delta(y)$. Reguła decyzyjna może być losowa i mówimy wówczas że jest regułą randomizowaną.

Funkcja ryzyka

$$R(\theta, \delta) = E_{\theta} L(\theta, \delta(y)) = \int p(y, \theta) L(\theta, \delta(y)) dy \quad (80)$$

Teoria decyzji zajmuje się konstruowaniem reguł decyzyjnych, które są najlepsze ze względu na minimalizację ryzyka. Regułę minimalizującą ryzyko nazywamy dopuszczalną. Jeżeli T jest statystyką dostateczną, to reguła

$$\delta_1(y) = E(\delta(y) | T = t), \quad (81)$$

jest nie gorsza niż δ .

Wielkość

$$r(p_a, \delta) = \int R(\theta, \delta)p_a(\theta)d\theta, \quad (82)$$

nazywamy ryzykiem bayesowskim przy rozkładzie parametru a priori p_a . Regułę Bayesowską przy rozkładzie a priori p_a nazywamy regułę która minimalizuje ryzyko bayesowskie (82). Stąd oraz z (80) mamy

$$r(p_a, \delta) = \int p(y) \int (p(\theta|y)L(\theta, \delta(y))p_a(\theta)) d\theta dy. \quad (83)$$

Aby otrzymać regułę decyzyjną minimalizujemy wyrażenie w nawiasie.

Aby obliczyć rozkład (gęstość) $p(\theta|y)$ stosujemy oczywiście wzór Bayesa

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p_a(\theta)}{p(y)}, \quad (84)$$

gdzie mianownik jest równy

$$p(y) \int p(y|\theta)p_a(\theta)d\theta. \quad (85)$$

Przykład, estymator o minimalnym błędzie średnio-kwadratowym, warunkowa wartość oczekiwana

$$\begin{aligned} E \frac{1}{2}(\hat{\theta} - \theta)^2 &= \frac{1}{2} \int p(y, \theta) (\hat{\theta}(y) - \theta)^2 d\theta dy = \\ &= \frac{1}{2} \int p(\theta|y) p(y) (\hat{\theta}(y)^2 - 2\hat{\theta}(y)\theta + \theta^2) d\theta dy \rightarrow \min. \end{aligned} \tag{86}$$

Stąd, różniczkując względem $\hat{\theta}$ i przyrównując pochodną do zera

$$\int p(y) \left(\int p(\theta|y) (\hat{\theta}(y) - \theta) d\theta \right) dy = 0. \tag{87}$$

A zatem estymator o minimalnej wariancji jest dany wzorem

$$\hat{\theta}(y) = \int \theta p(\theta|y) d\theta = E(\theta|y). \tag{88}$$

Estymator ten może być obciążony.

Rozumowanie powyższe można łatwo przenieść na przypadek wielowymiarowy. Wówczas jeżeli $\theta \in \mathbb{R}^P$ oraz $y_i \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, to

$$\hat{\theta} = E(\theta|y) = \int \theta p(\theta|y) d\theta \quad (89)$$

jest estymatorem parametru θ , o minimalnej wariancji. Gęstość $p(\theta|y)$ można wyznaczyć z twierdzenia Bayesa

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)}{p(y)} \pi(\theta). \quad (90)$$

Przykład - estymacja parametrów w modelu liniowym

Poszukujemy parametrów θ w modelu liniowym

$$y = C\theta + \nu, \quad (91)$$

gdzie $\nu \sim N(0, V)$ oraz rozkład a priori ma postać

$$p_a(\theta) = N(\theta, m, S). \quad (92)$$

Rozkład obserwacji y , przy ustalonym θ , jest dany wzorem

$$p(y|\theta) = N(y, C\theta, V). \quad (93)$$

Obliczamy, rozkład a posteriori

$$p(\theta|y) = \frac{p(y|\theta)p_a(\theta)}{p(y)} = \frac{N(y, C\theta, V)N(\theta, m, S)}{\int N(y, C\theta, V)N(\theta, m, S)d\theta}. \quad (94)$$

Lemat 1. Zachodzi wzór

$$(S^{-1} + C^T V^{-1} C)^{-1} = S - SC^T(V + CSC^T)^{-1}CS. \quad (95)$$

Dowód. *On Deriving the Inverse of a Sum of Matrices.* H. V. Henderson and S. R. Searle. SIAM Review, Vol. 23, No. 1, (Jan., 1981), pp. 53-60, formula (17).

Lemat 2. Zachodzi tożsamość

$$N(y, C\theta, V)N(\theta, m, S) = N(y, Cm, V + CSC^T)N(\theta, \mu(y), \Sigma) \quad (96)$$

gdzie kowariancja i średnia a posteriori są dane wzorami

$$\Sigma = S - SC^T(V + CSC^T)^{-1}CS, \quad (97)$$

$$\mu(y) = m + \Sigma C^T V^{-1}(y - Cm). \quad (98)$$

Dowód. Field Kalman Filter and its approximation. P. Bania, J. Baranowski. 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC), 2875 - 2880.

Podstawiając (96) do (94) otrzymujemy rozkład a posteriori

$$p(\theta|y) = N(\theta, \mu(y), \Sigma). \quad (99)$$

Korzystając z (89) widzimy, że estymator o minimalnej wariancji dla parametru θ jest dany wzorem

$$\hat{\theta}(y) = E(\theta|y) = \int \theta N(\theta, \mu(y), \Sigma) d\theta = \mu(y), \quad (100)$$

gdzie

$$\mu(y) = m + \Sigma C^T V^{-1}(y - Cm). \quad (101)$$

Macierz kowariancji tego estymatora $cov(\hat{\theta}) = \Sigma$, gdzie macierz Σ jest dana wzorem (97).

Dziękuję za uwagę

Identyfikacja procesów technologicznych, wykład 5.

Identyfikacja modelu ARMAX

dr hab. inż. Piotr Bania, pba@agh.edu.pl, B1, p. 303

21 stycznia 2022

Model ARMAX

Model ARMAX (*Auto Regressive Moving Average with eXogenous input*)

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - \dots - a_{n_A} y_{k-n_A} + b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_{n_B} y_{k-n_B} + e_k + c_1 e_{k-1} + \dots + c_{n_C} e_{k-n_C}, \quad (1)$$

gdzie $e_k \sim N(0, \sigma)$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych.
Równaniu (1) odpowiada transmitancja

$$y_k = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A}} u_k + \frac{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{n_C} z^{-l}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A}} e_k \quad (2)$$

lub w skróconym zapisie

$$y_k = G(z^{-1}) u_k + H(z^{-1}) e_k. \quad (3)$$

Wektor parametrów $\theta = (a_1, \dots, a_{n_A}, b_0, \dots, b_{n_B}, c_1, \dots, c_{n_C})^T \in \mathbb{R}^p$.

Przykład

Układ z czasem ciągłym

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \frac{k_p}{T}u, \quad (4)$$

dyskretyzujemy z okresem T_0 , przy założeniu, że

$u(t) = u_k, t \in [kT_0, (k+1)T_0]$, stąd $x_k = x(kT_0)$ spełnia równanie

$$x_{k+1} = qx_k + k_p(1-q)u_k, q = e^{-T_0/T}. \quad (5)$$

biorąc transformację z obu stron otrzymamy

$$zx_k = qx_k + k_p(1-q)u_k \quad (6)$$

oraz

$$G(z^{-1}) = \frac{k_p(1-q)z^{-1}}{1-qz^{-1}}. \quad (7)$$

Jeżeli $u(t) = u_k \in \mathbb{R}$, $t \in [kT_0, (k+1)T_0)$ oraz w jest standardowym procesem Wienera, to model stochastyczny

$$dx = (A_c x + B_c u)dt + G_c dw, \quad (8)$$

z obserwacją

$$y_k = Cx(kT_0) + v_k \in \mathbb{R}, v_k \sim N(0, \sigma_v), \quad (9)$$

gdzie w i v_k niezależne, można zapisać w postaci z czasem dyskretnym

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k, y_k = Cx_k + v_k, \quad (10)$$

gdzie

$$A = e^{A_c T_0}, B = \int_0^{T_0} e^{A_c \tau} B_c d\tau, G = \sqrt{D}, D = \int_0^{T_0} e^{A_c \tau} G_c G_c^T e^{A_c^T \tau} d\tau. \quad (11)$$

Aby przejść na postać transmitancyjną stosujemy metodę faktoryzacji spektralnej i zależności (Soderstrom & Stoica, 1997, s. 193-194):

$$G(z^{-1}) = C(zI - A)^{-1}B, \quad (12)$$

$$H(z^{-1}) = 1 + C(zI - A)^{-1}K, \quad (13)$$

gdzie

$$K = ASC^T(CSC^T + \sigma_v^2)^{-1}, \quad (14)$$

oraz macierz S jest symetrycznym i dodatnio określonym rozwiązaniem równania Riccatiego

$$S = ASA^T + GG^T - ASC^T(CSC^T + \sigma_v^2)^{-1}CSA^T. \quad (15)$$

Równanie (15) można rozwiązać w Matlabie za pomocą funkcji *dare* lub *dlqe*.

Metoda najmniejszych kwadratów LS, *Least Square*

Zakładamy, że model ma postać

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - \dots - a_n y_{k-n} + b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m} + v_k, \quad (16)$$

gdzie $k = 1, 2, \dots, N$, $N > \max(n, m)$. Traktując $v_k \sim N(0, \sigma^2)$, jako błąd, minimalizujemy sumę kwadratów

$$Q_N(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1+\max(n,m)}^{N+\max(n,m)} v_k^2 \rightarrow \min. \quad (17)$$

Oznaczając $\varphi_k^T = (y_{k-1}, \dots, y_{k-n}, u_k, \dots, u_{k-m})$, model (16) możemy zapisać w postaci

$$y_k = \varphi_k^T \theta + v_k \quad (18)$$

Podstawiając (18) do (17) otrzymamy

$$Q_N(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1+\max(n,m)}^{N+\max(n,m)} (y_k - \varphi_k^T \theta)^2 \rightarrow \min. \quad (19)$$

Przyrównując gradient do zera otrzymamy układ równań

$$\phi^T \phi \theta = \phi^T Y, \quad (20)$$

gdzie $Y = (y_{1+\max(n,m)}, \dots, y_{N+\max(n,m)})^T$ oraz

$$\phi = (\varphi_{1+\max(n,m)}, \dots, \varphi_{N+\max(n,m)})^T. \quad (21)$$

Jeżeli $\text{rank}(\phi) = \text{rank}(\phi^T \phi) = p$, to estymator najmniejszych kwadratów ma postać

$$\hat{\theta} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y. \quad (22)$$

Estymatorem wariancji szumu ν_k jest wyrażenie

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2Q_N(\hat{\theta})}{N} = \frac{(Y - \phi\hat{\theta})^T(Y - \phi\hat{\theta})}{N}. \quad (23)$$

Macierz kowariancji ma postać

$$S_\theta = \text{cov}(\hat{\theta}) = \hat{\sigma}^2(\phi^T\phi)^{-1}. \quad (24)$$

Stąd błąd oszacowania parametru θ_i

$$\delta\theta_i = 3\sqrt{S_{\theta,i,i}}. \quad (25)$$

Równanie (22) można zapisać, jako

$$\hat{\theta}_N = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_k \varphi_k^T \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi_k y_k \right) \quad (26)$$

W granicy, gdy $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{\infty} &= \left(E \varphi_k \varphi_k^T \right)^{-1} E(\varphi_k y_k) = \left(E \varphi_k \varphi_k^T \right)^{-1} E(\varphi_k (\varphi_k^T \theta + v_k)) = \\ &= \left(E \varphi_k \varphi_k^T \right)^{-1} \left((E \varphi_k \varphi_k^T) \theta + E(\varphi_k v_k) \right) = \\ &= \theta + E(\varphi_k v_k) = \theta, \end{aligned} \quad (27)$$

bo $\varphi_k^T = (y_{k-1}, \dots, y_{k-n}, u_k, \dots, u_{k-m})$ nie zależy od v_k . A zatem estymator jest nieobciążony, pod warunkiem, że v_k jest białym szumem.

Ponadto, $\hat{\theta} \sim N(\theta, S_\theta)$ oraz istnieje stała $c > 0$, taka że

$$\text{tr } S_\theta \leq \frac{c}{N}, \quad (28)$$

skąd wynika, że błędy oszacowania parametrów spełniają warunek

$$\delta\theta_i \leq \frac{c_i}{\sqrt{N}}, \quad (29)$$

dla pewnych liczb $c_i > 0$. A zatem estymator LS jest nieobciążony, zgodny i można pokazać, że ma minimalną wariancję.

Ze wzoru (27) wynika, że estymator LS działa dobrze o ile macierz

$$E\varphi_k \varphi_k^T > 0. \quad (30)$$

Macierz, ta zależy od pobudzenia u_k , które musi być odpowiednio dobrane. Jeżeli u_k jest przez długi czas stałe, to macierz (30) będzie bliska macierzy osobliwej i estymator wybuchnie. Jeżeli v_k nie jest białym szumem lub równoważnie, jeżeli w modelu (1) wielomian C jest nietrywialny, to korelacja

$$E(\varphi_k v_k) \neq 0. \quad (31)$$

Dla przykładu, jeżeli $v_k = e_k + c_1 e_{k-1}$, to

$Ey_{k-1}v_k = Ev_kv_{k-1} = c_1\sigma^2 > 0$ i estymator LS będzie obciążony! A zatem, nawet przy wielkiej liczbie danych uzyskamy błędny wynik.

Rekurencyjna metoda najmniejszych kwadratów, RLS

Współczynnik zapominania $\alpha \in (0, 1]$, typowo $\alpha = 0.95 - 0.99$.

Funkcja celu

$$Q(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} (y - \varphi_k^T \theta)^2. \quad (32)$$

Minimum

$$\left(\sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} \varphi_k \varphi_k^T \right) \hat{\theta}_n = \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} \varphi_k y_k. \quad (33)$$

$$P_n^{-1} = \sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} \varphi_k \varphi_k^T = \alpha P_{n-1}^{-1} + \varphi_n \varphi_n^T. \quad (34)$$

$$\hat{\theta}_n = P_n \left(\sum_{k=1}^n \alpha^{n-k} \varphi_k y_k \right) = P_n (\alpha P_{n-1}^{-1} \hat{\theta}_{n-1} + \varphi_n y_n). \quad (35)$$

Korzystając z (34), mamy $\alpha P_{n-1}^{-1} = P_n^{-1} - \varphi_n \varphi_n^T$. Stąd oraz z (35)

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + P_n \varphi_n (y_n - \varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1}). \quad (36)$$

Ze wzoru (wykład 3, wzór (95))

$$(S^{-1} + C^T V^{-1} C)^{-1} = S - SC^T(V + CSC^T)^{-1}CS \quad (37)$$

oraz z równości (34), mamy

$$\begin{aligned} P_n &= \left(\alpha P_{n-1}^{-1} + \varphi_n \varphi_n^T \right)^{-1} = \\ &= \alpha^{-1} \left(P_{n-1} - \frac{P_{n-1} \varphi_n \varphi_n^T P_{n-1}}{\alpha + \varphi_n^T P_{n-1} \varphi_n} \right). \end{aligned} \quad (38)$$

A zatem algorytm RLS ma postać

$$P_n = \alpha^{-1} \left(P_{n-1} - \frac{P_{n-1} \varphi_n \varphi_n^T P_{n-1}}{\alpha + \varphi_n^T P_{n-1} \varphi_n} \right), \quad (39)$$

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + P_n \varphi_n (y_n - \varphi_n^T \hat{\theta}_{n-1}), \quad (40)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1]$, jest współczynnikiem zapominania oraz
 $\varphi_n = (y_{k-1}, \dots, y_{k-n_A}, u_k, \dots, u_{k-n_B})^T$. Jako wartości początkowe
przyjmuje się

$$\hat{\theta}_0 = 0, P_0 = \rho I, \quad (41)$$

gdzie $\rho > 0$, jest odpowiednio dużą liczbą.

Przykład

$$y_k = ay_{k-1} + bu_{k-1} + v_k, v_k \sim N(0, \sigma) \quad (42)$$

Prawdziwe wartości $a = 0.95$, $b = 0.05$, $\sigma = 0.1$. Oznaczamy $Y = \text{col}(y_2, y_3, \dots, y_{n+1})$ oraz

$$\phi = \begin{bmatrix} -y_1 & u_1 \\ -y_2 & u_2 \\ \vdots & \vdots \\ -y_n & u_n \end{bmatrix}_{(n \times 2)} . \quad (43)$$

Jeżeli $u_k = 0$, lub $u_k = Ky_k$, to $\phi^T \phi$ nie ma odwrotności. Jeżeli $u_k = 1$, to dla dużych n macierz $\phi^T \phi$ będzie źle uwarunkowana. Jeżeli u_k jest sygnałem prostokątnym, to otrzymuje się oceny parametrów zmierzające do prawdziwych wartości.

Przykład z szumem

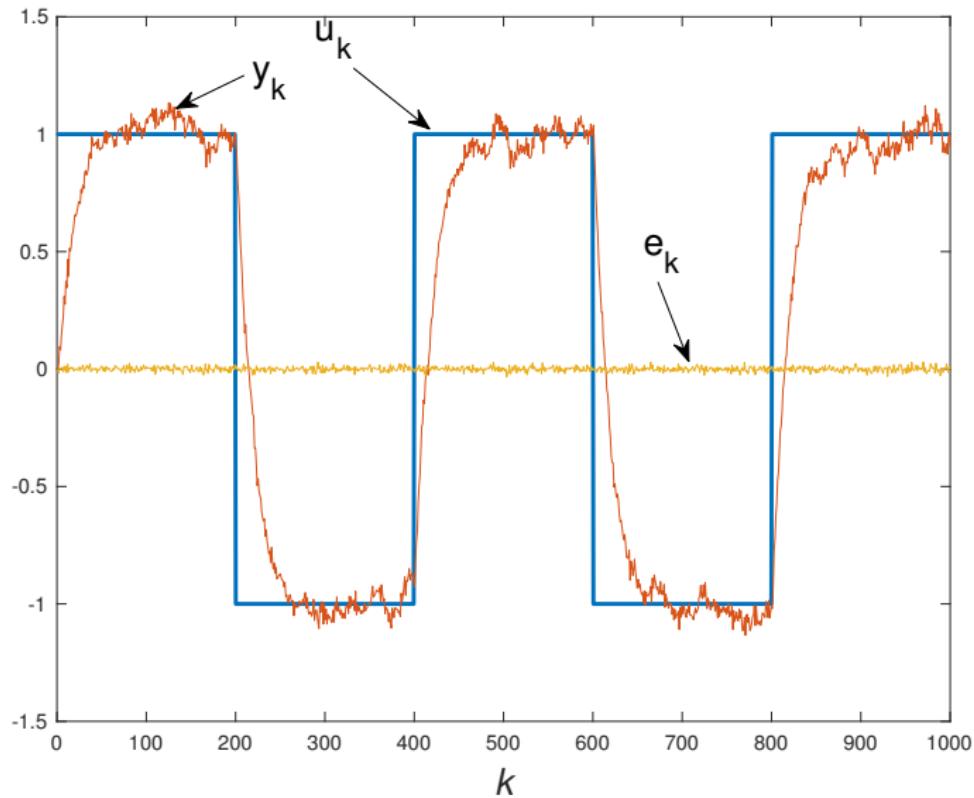
$$y_k = ay_{k-1} + bu_{k-1} + c_0e_k + c_1e_{k-1} + c_2e_{k-2}, e_k \sim N(0, \sigma) \quad (44)$$

Prawdziwe wartości

$a = 0.95, b = 0.05, c_0 = 1, c_1 = -2, c_2 = 3, \sigma = 0.1$. Zakładamy fałszywie, że

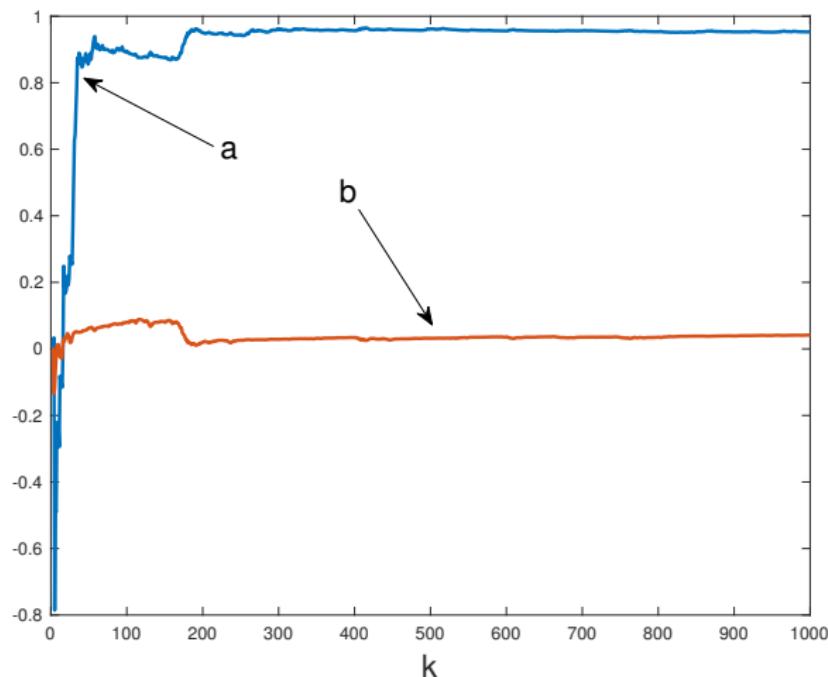
$$v_k = c_0e_k + c_1e_{k-1} + c_2e_{k-2}, \quad (45)$$

jest białym szumem. Wartość oczekiwana estymatora najmniejszych kwadratów oszacowana na postawie 10^6 prób wynosiła $\hat{a} = 0.85$ oraz $\hat{b} = 0.13$, co jest dość dużym błędem

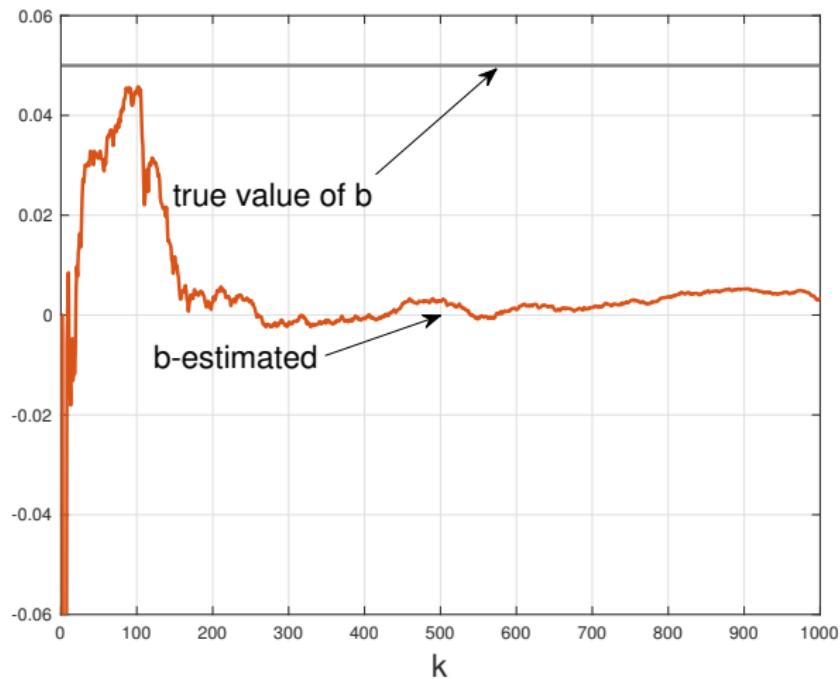


Rysunek: Pobudzenie u_k , wyjście y_k oraz szum e_k , dla układu (44).

Algorytm RLS



Rysunek: Zbieżność algorytmu RLS dla układu (44) zakłócanego białym szumem.



Rysunek: Brak zbieżności algorytmu RLS spowodowany brakiem pobudzenia.

Metoda błędu predykcji

Jeżeli zakłócenie v_k nie jest białym szumem, to metoda LS daje estymator obciążony. Jak należy zmodyfikować metodę LS, aby uzyskać estymator nieobciążony? Dla modelu

$$y_k = Gu_k + He_k, \quad (46)$$

możemy napisać

$$y_k = Gu_k + (H-1)e_k + e_k = Gu_k + (H-1)H^{-1}(y_k - Gu_k) + e_k, \quad (47)$$

$$y_k = [H^{-1}Gu_k + (1-H)y_k] + e_k = z_k + e_k. \quad (48)$$

Składniki z_k oraz e_k są nieskorelowane. Sygnał z_k jest optymalnym predyktorem średniokwadratowym dla y_k .

A zatem najlepsza prognoza dla y_k jest dana wzorem

$$\hat{y}_k = H^{-1}Gu_k + (1 - H)y_k. \quad (49)$$

Błąd predykcji (prognozy) wynosi

$$\epsilon_k = y_k - \hat{y}_k = H^{-1}(y_k - Gu_k). \quad (50)$$

Zauważmy, że wyrażenie (50) zależy tylko od danych i nie zawiera szumu. Dla modelu ARMAX mamy $G = \frac{B}{A}$, $H = \frac{C}{A}$ stąd równanie dla błędu predykcji

$$C\epsilon_k = Ay_k - Bu_k. \quad (51)$$

Przechodząc na postać czasową, otrzymamy

$$\begin{aligned} \epsilon_k + c_1\epsilon_{k-1} + \dots + c_{n_C}\epsilon_{k-n_C} &= \\ y_k + a_1y_{k-1} + \dots + a_{n_A}y_{k-n_A} - (b_0u_k + b_1u_{k-1} + \dots + b_{n_B}u_{k-n_B}). \end{aligned} \quad (52)$$

Aby znaleźć parametry, minimalizujemy sumę kwadratów błędów

$$V(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \epsilon_k(\theta)^2 \rightarrow \min. \quad (53)$$

Estymator

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} V(\theta) \quad (54)$$

jest nieobciążonym estymatorem parametru

$\theta = (c_1, c_2, \dots, c_{n_C}, b_0, b_1, \dots, b_{n_B}, a_1, \dots, a_{n_A})^T$. Estymator $\hat{\theta}$ ma rozkład asymptotycznie normalny $N(\theta, \frac{P}{n})$ oraz jest zgodny.

Minimum funkcji celu (53) znajdujemy metodami numerycznymi, najczęściej stosując algorytmy Newtona-Raphsona lub Gaussa-Newtona.

Przykład

Model

$$y_k = ay_{k-1} + bu_{k-1} + e_k + c_1e_{k-1} + c_2e_{k-2}, e_k \sim N(0, \sigma), \quad (55)$$

Równanie (52), daje rekurencję dla błędu

$$\epsilon_k + c_1\epsilon_{k-1} + c_2\epsilon_{k-2} = y_k - ay_{k-1} - bu_{k-1}. \quad (56)$$

Minimalizacja (53) za pomocą algorytmu Newtone'a-Raphsona lub Gauss-Newton. W Matlabie funkcja armax(dat, [na nb nc nk]),
dat = iddata(y,u,1); sys=armax(dat,[1 1 2 1]).

Testowanie reszt modelu

Zgodnie z założeniami, zarówno w metodzie LS, jak i w metodzie PEM, reszty modelu (ciąg e_k) powinny być białym szumem gaussowskim. Istnieją dwa powszechnie używane testy dla białego szumu. Test autokorelacji oraz test zmian znaków. W metodzie autokorelacji testujemy wartości estymowanej funkcji korelacyjnej

$$\hat{r}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} e_{i+k} e_i}{\sum_{i=1}^n e_i^2}, k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (57)$$

Dla dużych n , estymator \hat{r}_k ma rozkład asymptotycznie normalny

$$\sqrt{n}\hat{r}_k \sim N(0, 1). \quad (58)$$

A zatem możemy przyjąć, że ciąg e_k jest białym szumem, o ile

$$\sqrt{n}|\hat{r}_k| \leq 3, k = 1, \dots, m \leq n-1. \quad (59)$$

Test zmian znaków

Zliczamy ilość zmian znaków w ciągu $e_i, i = 1, \dots, n$. Zmianę znaku $- \rightarrow +$ oznaczamy liczbą $\delta_i = 1$ oraz zmianę $+ \rightarrow -$, oznaczamy $\delta_i = 0$, lub bardziej formalnie $\delta_i = \frac{1}{2}(\text{sgn}(e_i e_{i+1}) + 1)$. Dla dużych n , zmienna losowa

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i, \quad (60)$$

ma rozkład $N\left(\frac{n}{2}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$. Stąd możemy przyjąć, że ciąg e_i jest białym szumem, o ile spełniony jest warunek

$$\frac{|2\bar{x}_n - n|}{\sqrt{n}} \leq 3. \quad (61)$$

Dziękuję za uwagę

Identyfikacja procesów technologicznych, wykład 6.

Identyfikacja układów nielinowych.

dr hab. inż. Piotr Bania, pba@agh.edu.pl, B1, p. 303

21 stycznia 2022

Ogólny model nieliniowy

Równanie stanu

$$dx = f(t, x, u, \theta)dt + g(t, x, u, \theta)dw \quad (1)$$

Równanie obserwacji

$$y_k = h(t_k, x(t_k), u(t_k), v_k). \quad (2)$$

Proces w , jest standardowym wektorowym procesem Wienera oraz v_k , jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych $v_k = p_v(v_k, \theta)$. Warunek początkowy $x_0 \sim p_{x_0}(x_0)$ jest znany. Dla układów z czasem dyskretnym, zamiast (1) mamy

$$x_{k+1} = f(k, x_k, u_k, w_k).$$

Cel identyfikacji

Celem jest znalezienie rozkładu warunkowego

$$p(\theta|Y_k), \quad (3)$$

gdzie $Y_k = \text{col}(y_0, \dots, y_k)$ oznacza wszystkie obserwacje wykonane do chwili k . Znając rozkład (gęstość) (3), estymator parametru θ można wyznaczyć na co najmniej dwa sposoby:

$$\hat{\theta}_{MSE} = \int_{\Omega} \theta p(\theta|Y_k) d\theta, \quad (4)$$

lub

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \min_{\theta \in \Omega} p(\theta|Y_k), \quad (5)$$

przy czym Ω jest zbiorem dopuszczalnych wartości parametru θ .

Rozważamy proces Markowa $x(t)$, $t \in \mathbb{T} \subset \mathbb{R}$. Niech $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_k, \dots$, $x_k = x(t_k)$. W chwilach t_k , $k = 1, 2, \dots$, dokonujemy obserwacji y_k , przy czym

$$p(y_k | x_k, \dots, x_0, y_{k-1}, \dots, y_1) = p(y_k | x_k). \quad (6)$$

A zatem obserwacja y_k , zależy tylko od x_k i nie zależy od wcześniejszych wartości procesu x , ani od wcześniejszych obserwacji. Dla ustalenia uwagi można założyć, że $y_k = h(x_k, v_k)$, gdzie zmienne losowe v_k , o znanym rozkładzie, są wzajemnie niezależne i niezależne od procesu x oraz funkcja h modeluje pomiary. Zbiór wszystkich obserwacji wykonanych do chwili k , oznaczamy przez $Y_k = \text{col}(y_1, \dots, y_k)$.

Zadanie filtracji

Zadanie filtracji polega na znalezieniu gęstości, bądź rozkładu warunkowego $p(x(t)|Y_k)$, $t \geq t_k$, najczęściej w formie rekursywnej

$$p(x(t)|Y_k) = F_k(y_k, p(x_{k-1}|Y_{k-1})), t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (7)$$

Znajomość $p(x(t)|Y_k)$, pozwala zwykle wyznaczyć *dobry* estymator nieobserwowanej zmiennej losowej $x(t)$. Jeżeli (7) daje się zapisać za pomocą skończonej ilości równań, to mówimy, że filtr (7), jest skończenie wymiarowy.

Aby znaleźć filtr, będziemy przekształcać rozkład $p(x_k, Y)$.

$$\begin{aligned} p(x_k, Y_k) &= \int p(x_k, x_{k-1}, Y_k) dx_{k-1} = \\ &= \int p(y_k | x_k, x_{k-1}, Y_{k-1}) p(x_k, x_{k-1}, Y_{k-1}) dx_{k-1} = \\ &= \int p(y_k | x_k, x_{k-1}, Y_{k-1}) p(x_k | x_{k-1}, Y_{k-1}) p(x_{k-1} | Y_{k-1}) p(Y_{k-1}) dx_{k-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Z założenia, zmienna y_k , zależy tylko od x_k . Ze względu na własność Markowa zmienna x_k , zależy tylko od x_{k-1} . A zatem równanie (8) przyjmuje postać

$$p(x_k, Y_k) = p(y_k | x_k) \left(\int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | Y_{k-1}) dx_{k-1} \right) p(Y_{k-1}). \tag{9}$$

Funkcja $p(x_k | x_{k-1})$, jest gęstością (lub prawdopodobieństwem) przejścia procesu x , ze stanu x_{k-1} , w chwili t_{k-1} , do stanu x_k , w chwili t_k .

Oznaczmy

$$p(x_k | Y_{k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | Y_{k-1}) dx_{k-1}. \quad (10)$$

Wówczas (9) można zapisać, jako

$$p(x_k, Y_k) = p(y_k | x_k) p(x_k | Y_{k-1}) p(Y_{k-1}). \quad (11)$$

Całkowanie względem x_k daje

$$p(Y_k) = \int p(y_k | x_k) p(x_k | Y_{k-1}) p(Y_{k-1}) dx_k. \quad (12)$$

Z definicji rozkładu warunkowego otrzymujemy

$$p(x_k | Y_k) = \frac{p(x_k, Y_k)}{p(Y_k)} = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | Y_{k-1})}{\int p(y_k | x_k) p(x_k | Y_{k-1}) dx_k}. \quad (13)$$

A zatem algorytm filtracji składa się z dwóch kroków. Predykcja (10),

$$p(x_k | Y_{k-1}) = \int p(x_k | x_{k-1}) p(x_{k-1} | Y_{k-1}) dx_{k-1}, \quad (14)$$

generuje rozkład przewidywany na chwilę t_k , przy warunku Y_{k-1} . Korekcja (8),

$$p(x_k | Y_k) = \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | Y_{k-1})}{\int p(y_k | x_k) p(x_k | Y_{k-1}) dx_k}, \quad (15)$$

opisuje rozkład tuż po nowym pomiarze y_k . Zauważmy, że algorytm ten ma pożądaną postać rekursywną daną wzorem (7).

Filtracja procesów z czasem ciągłym

Ponieważ chwile t_k są dowolne, to algorytm może być stosowany dla procesów z czasem ciągłym i z dyskretnymi w czasie pomiarami. Poszukiwany rozkład warunkowy oznaczamy przez $p(t, x|Y_k)$. W przedziale czasu $t \in [t_{k-1}, t_k]$, rozkład $p(t, x|Y_{k-1})$, jest dany wzorem

$$p(t, x|Y_{k-1}) = \int p(t, x|t_{k-1}, \xi) p(t_{k-1}, \xi|Y_{k-1}) d\xi, \quad (16)$$

gdzie $p(t, x|s, \xi)$, jest funkcją przejścia procesu x . Krok korekcji ma postać

$$p(t_k, x|Y_k) = \frac{p(y_k|x)p(t_k^-, x|Y_{k-1})}{\int p(y_k|x)p(t_k^-, x|Y_{k-1}) dx}. \quad (17)$$

gdzie $p(t_k^-, x|Y_{k-1}) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} p(t, x|Y_{k-1})$.

Dla procesów dyfuzyjnych obowiązuje równanie Fokkera-Plancka-Kołmogorowa i krok predykcji sprowadza się wówczas do rozwiązania w przedziale $[t_{k-1}, t_k]$, równania FPK, z warunkiem początkowym $p(t_{k-1}, x | Y_{k-1})$. A zatem, dla procesów dyfuzyjnych algorytm filtracji ma następującą postać. W przedziale $[t_{k-1}, t_k]$, rozwiąż równanie FPK

$$\dot{p}(t, x) = \mathcal{L}p(t, x), p(t_{k-1}, x) = p(t_{k-1}, x | Y_{k-1}), \quad (18)$$

gdzie \mathcal{L} , jest operatorem FPK. Poszukiwana gęstość warunkowa $p(t, x | Y_{k-1}) = p(t, x)$. Następnie, po wykonaniu nowego pomiaru, oblicz korektę gęstości

$$p(t_k, x | Y_k) = \frac{p(y_k | x)p(t_k^-, x)}{\int p(y_k | x)p(t_k^-, x)dx}. \quad (19)$$

Zauważmy, że funkcja gęstości ma na ogół nieciągłość w chwili pomiaru, spowodowaną skokowym przyrostem informacji o stanie procesu.

Wybór estymatora

Aby uzyskać estymatę stanu, można obliczyć warunkową wartość oczekiwana

$$\hat{x}_{MSE}(t) = E(x(t)|Y_k) = \int xp(x(t)|Y_k)dx(t), \quad (20)$$

lub zastosować estymator *maximum a posteriori*, (MAP), czyli znaleźć maksimum gęstości warunkowej

$$\hat{x}_{MAP}(t) = \max_{x(t)} p(x(t)|Y_k). \quad (21)$$

Te dwie metody estymacji prowadzą na ogół do różnych wyników. Estymator MSE ma minimalną wariancję, ale może być obciążony. Estymator MAP, może być niejednoznaczny. W przypadku rozkładu Gaussa, oba estymatory dają ten sam wynik.

Filtracja w układach liniowych

Będziemy analizować układy stochastyczne, opisane równaniem Ito w postaci

$$dx(t) = (A_c x(t) + B_c u(t))dt + G_c dw, \quad (22)$$

gdzie $t \in \mathbb{R}_+$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$, macierze A_c, B_c, G_c są dane oraz funkcja u , jest względem t przedziałami ciągła i może mieć co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości w każdym przedziale skończonym. Proces w , jest wektorowym procesem Wienera o jednostkowej macierzy kowariancji. Różniczka dw , modeluje losowe zakłócenia na wejściach systemu (*process noise*). Warunek początkowy dla równania (17), jest dany równością

$p(x(0)) = N(x(0), m_0, S_0)$, $S_0 > 0$. Rozwiązaniem równania (22), jest proces Gaussa-Markowa, którego gęstość spełnia równanie FPK

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \mathcal{L}p, \quad (23)$$

gdzie operator \mathcal{L} ma postać

$$\mathcal{L}p(t, x) = -\nabla \cdot ((A_c x + B_c u)p(t, x)) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (D_{c,i,j} p(t, x)), \quad (24)$$

$D_c = G_c G_c^T$, $\nabla \cdot [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}$, jest operatorem dywergencji. Jeżeli warunek początkowy jest dany wzorem $p(t_{k-1}, x) = N(x, m_{k-1}, S_{k-1})$, to rozwiązaniem równania (23), jest gęstość gaussowska

$$p(t, x) = N(x, m(t), S(t)), t \geq t_{k-1} \quad (25)$$

gdzie wartość oczekiwana $m(t)$, oraz kowarianca $S(t)$, spełniają równania

$$\dot{m} = A_c m(t) + B_c u(t), m(t_{k-1}) = m_{k-1}, \quad (26)$$

$$\dot{S} = A_c S(t) A_c^T + D_c, S(t_{k-1}) = S_{k-1}. \quad (27)$$

Rozwiązanie równań (26) i (27), w chwili t_k , oznaczamy przez m_k^-, S_k^- .

Niech $T_0 > 0$, oznacza okres próbkowania oraz niech $t_k = kT_0, k = 1, 2, \dots$, oznacza chwile próbkowania. W chwilach t_k dokonujemy obserwacji

$$y_k = Cx(t_k) + v_k, \quad (28)$$

gdzie C jest ustaloną macierzą oraz $v_k \sim N(0, S_v)$, $S_v > 0$, jest ciągiem wzajemnie niezależnych oraz niezależnych od x_0 i procesu w , zmiennych losowych Gaussa. Zmienne v_k , modelują błędy pomiarów (*measurement noise*). Bezpośrednio ze wzoru (28) wynika, że

$$p(y_k | x(t_k)) = N(y_k, Cx(t_k), S_v). \quad (29)$$

Aby wyznaczyć korektę rozkładu po pomiarze, wykorzystamy następującą tożsamość.

$$N(y, Cx, S_v)N(x, \mu, \Sigma) = N(y, Cm, S_v + C\Sigma C^T)N(x, m, S), \quad (30)$$

$$S = \Sigma - \Sigma C^T (S_v + C\Sigma C^T)^{-1} \Sigma C^T, \quad (31)$$

$$m = \mu + SC^T S_v^{-1} (y - C\mu). \quad (32)$$

Dowód polega na przeliczeniu i wykorzystaniu wzorów na odwrotność sumy macierzy (Sherman-Morrison-Woodbury formula). Całkowanie (30) względem x , daje

$$p(y) = \int N(y, Cx, S_v)N(x, \mu, \Sigma)dx = N(y, Cm, S_v + C\Sigma C^T). \quad (33)$$

Ze wzoru (19) mamy

$$p(t_k, x | Y_k) = \frac{N(y_k, Cx, S_v) N(x, m_k^-), S_k^-)}{\int N(y_k, Cx, S_v) N(x, m_k^-, S_k^-) dx}. \quad (34)$$

Zastosowanie (30-32) oraz wzoru (33), daje

$$p(t_k, x | Y_k) = \frac{N(y_k, Cm_k^-, S_v + CS_k^- C^T) N(x, m_k, S_k^-)}{N(y_k, Cm_k^-, S_v + CS_k^- C^T)}. \quad (35)$$

Stąd

$$p(t_k, x | Y_k) = N(x, m_k, Sk), \quad (36)$$

gdzie

$$S_k = S_k^- - S_k^- C^T (S_v + CS_k^- C^T)^{-1} S_k^- C^T, \quad (37)$$

$$m_k = m_k^- + S_k C^T S_v^{-1} (y - Cm_k^-). \quad (38)$$

Filtr Kalmana dla układów z czasem ciągłym i z dyskretnymi w czasie pomiarami

Z powyższego wynika, że algorytm filtracji jest następujący.
Pomiędzy chwilami pomiarów, należy rozwiązywać równania predykcji

$$\dot{m} = A_c m(t) + B_c u(t), m(t_{k-1}) = m_{k-1}, \quad (39)$$

$$\dot{S} = A_c S(t) + S(t)A_c^T + D_c, S(t_{k-1}) = S_{k-1}, t \in [t_{k-1}, t_k]. \quad (40)$$

Tuż po wykonaniu pomiaru, w chwili t_k , wykonuje się korektę

$$S_k = S_k^- - S_k^- C^T (S_v + CS_k^- C^T)^{-1} S_k^- C^T, \quad (41)$$

$$m_k = m_k^- + S_k C^T S_v^{-1} (y - Cm_k^-). \quad (42)$$

gdzie $m_k^- = \lim_{t \rightarrow t_k^-} m(t)$, $S_k^- = \lim_{t \rightarrow t_k^-} S(t)$. Poszukiwany rozkład warunkowy ma postać $p(t, x | Y_{k-1}) = N(x, m(t), S(t))$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$.

W analogiczny sposób, możemy wyznaczyć równania filtracji dla układów z czasem dyskretnym

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k, \quad (43)$$

$$y_k = Cx_k + v_k, \quad (44)$$

Równania filtru mają postać:

$$m_k^- = Am_{k-1} + Bu_{k-1}, \quad (45)$$

$$S_k^- = AS_{k-1}A^T + D, \quad (46)$$

$$m_k = m_k^- + S_k C^T S_v^{-1} (y_k - Cm_k^-), \quad (47)$$

$$S_k = S_k^- - S_k^- C^T (S_v + CS_k^- C^T)^{-1} CS_k^-, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (48)$$

przy czym $p(x_k | Y_k) = N(x_k, m_k, S_k)$, oraz $x_0 \sim N(m_0, S_0)$.

Jeżeli rząd macierzy obserwowałości

$$\mathcal{O} = [C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T]^T, \quad (49)$$

jest równy n , to system (43-44), jest obserwowałny i ciąg S_k , ma dla $k \rightarrow \infty$, granicę S . Stąd macierz $L_k = S_k C^T S_v^{-1}$, zwana macierzą wzmocnień Kalmana (*Kalman gain*), ma skończoną granicę L . Graniczną macierz L , można obliczyć korzystając z funkcji *dlqe* Matlaba. Odpowiednie wywołanie ma postać $L = \text{dlqe}(A, G, C, I_n, S_v)$, gdzie I_n jest macierzą jednostkową wymiaru n . W zastosowaniach, pomija się zwykle równanie (48), a w równaniu (47), zamiast $L_k = S_k C^T S_v^{-1}$, podstawią się L . W konsekwencji otrzymuje się prosty do implementacji oraz stabilny numerycznie filtr Kalmana w postaci

$$m_k^- = Am_{k-1} + Bu_{k-1}, \quad (50)$$

$$m_k = m_k^- + L(y_k - Cm_k^-). \quad (51)$$

W ogólnym przypadku, odwracanie macierzy $(S_v + CS_k^- C^T)^{-1}$, występującej we wzorach (41) i (48), może być uciążliwe. Zamiast obliczania odwrotności, łatwiej jest najpierw rozwiązać układ równań

$$(S_v + CS_k^- C^T)z_k = CS_k^- \quad (52)$$

a następnie obliczyć S_k , ze wzoru

$$S_k = S_k^- - S_k^- C^T z_k. \quad (53)$$

Ponieważ macierz $S_v + CS_k^- C^T$, jest zawsze dodatnio określona, to stosując rozkład Choleskiego, metodę QR lub rozkład SVD, układ równań (53), można efektywnie rozwiązać, nawet przy dużym wymiarze. Warto również zauważyć, że przy spełnieniu warunków obserwowałości, filtr Kalmana pozwala odtwarzać nieobserwowane składowe stanu, co jest istotne w wielu zastosowaniach.

Omówiony powyżej schemat filtracji, można łatwo uogólnić na systemy quasi-liniowe, opisane równaniem

$$dx = (A_c(t, u(t))x + B_c(t, u(t)))dt + G_c(t, u(t))dw.$$

Założenie stałości okresu próbkowania można osłabić przyjmując, że chwile obserwacji tworzą ciąg rosnący tj. $t_{k-1} < t_k, k = 1, 2, \dots$.

Dla systemów z czasem dyskretnym, zamiast równania (43) można rozważać równanie

$$x_{k+1} = A(k, u_k)x_k + B(k, u_k) + G(k, u_k)w_k.$$

Rozumując analogicznie jak powyżej, otrzymuje się ponownie wzory (39-42) i (45-48), z tą różnicą, że odpowiednie macierze zależą teraz od czasu i sterowania.

Przykład, Filtracja procesu Wienera

Rozważamy układ w postaci

$$dx = \sigma dw, x(0) = 0, \quad (54)$$

$$y_k = x(t_k) + v_k, v_k \sim N(0, \sigma_v). \quad (55)$$

Rozwiązaniem równania (454), jest proces Wienera, którego gęstość jest dana wzorem

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma^2 t}}. \quad (56)$$

W chwilach t_k , dokonujemy obserwacji y_k . Mamy $A_c = B_c = 0$, $G_c = \sigma$, $C = 1$, $S_v = \sigma_v^2$. Ponieważ warunek początkowy jest deterministyczny, przyjmujemy, $m_0 = 0$, $S_0 = 0$.

Ze wzorów (39-42), otrzymujemy

$$m(t) = m_{k-1}, \quad (57)$$

$$S(t) = S_{k-1} + \sigma^2(t - t_{k-1}), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad (58)$$

$$m_k = m_{k-1} + \frac{S_k}{\sigma_v^2}(y_k - m_{k-1}), \quad (59)$$

$$S_k = \frac{(S_{k-1} + \sigma^2 T_0)\sigma_v^2}{S_{k-1} + \sigma^2 T_0 + \sigma_v^2}. \quad (60)$$

Granicę ciągu S_k , można obliczyć podstawiając w (55),

$S_{k-1} = S_k = S$. Stąd S jest dodatnim pierwiastkiem równania

$$S^2 + \sigma^2 T_0 S - \sigma^2 \sigma_v^2 T_0 = 0. \quad (61)$$

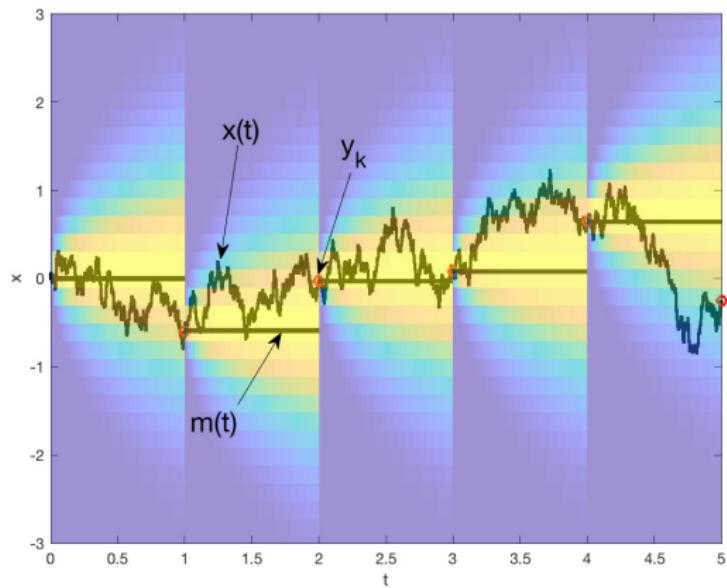
Dla $\sigma_v = 0.1, \sigma = T_0 = 1$ otrzymujemy $S \approx 0.009901951359278$

oraz graniczną postać filtru

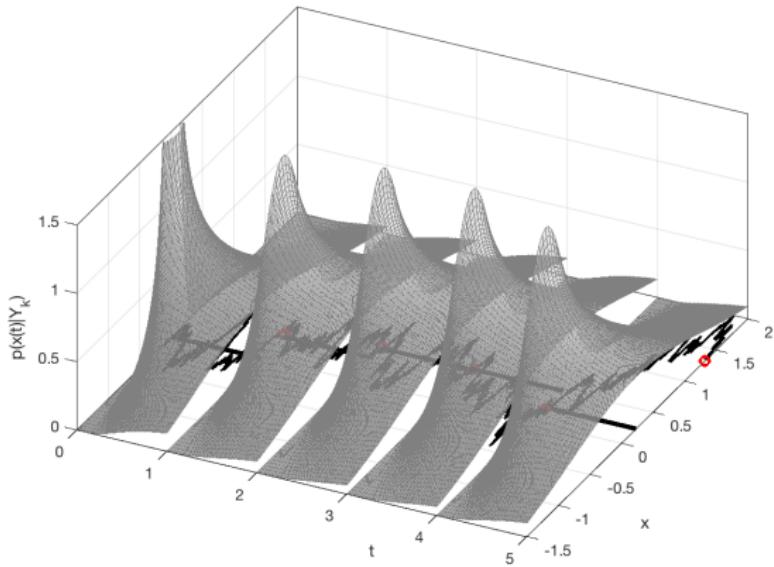
$$m(t) = m_{k-1}, \quad (62)$$

$$S(t) = S + t - (k - 1), \quad t \in [k - 1, k], \quad (63)$$

$$m_k = m_{k-1} + 100S(y_k - m_{k-1}). \quad (64)$$



Rysunek: Przykład działania filtru (62-64). Ewolucja rozkładu warunkowego, proces $x(t)$, estymata stanu $m(t)$ oraz obserwacje y_k .



Rysunek: Przykład działania filtru (62-64). Ewolucja rozkładu warunkowego, proces $x(t)$, estymata stanu $m(t)$ oraz obserwacje y_k . Widok przestrzenny. W chwilach próbkowania widoczne są skokowe zmiany gęstości warunkowej.

Przykład, Filtracja układu oscylacyjnego

Rozważmy układ (22), (28), z macierzami

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\xi\omega_0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], S_V = 0.1, \quad (65)$$

gdzie $\omega_0 = 3, \xi = 0.1$ oraz $T_0 = 0.02$.

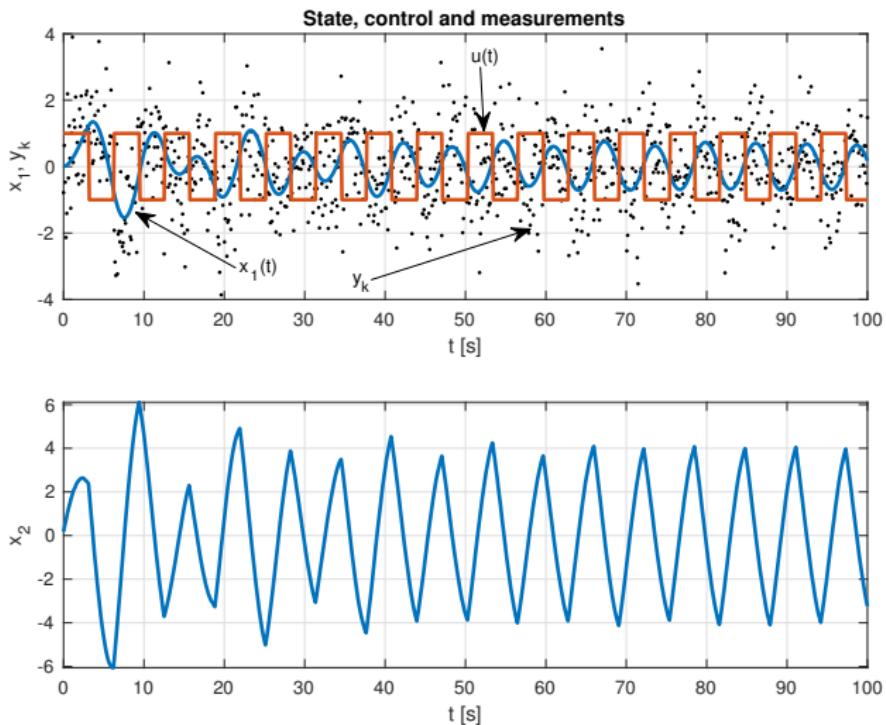
Macierze układu z czasem dyskretnym, otrzymane z równań

$$A = e^{A_c T_0}, B = \int_0^{T_0} e^{A_c \tau} B_c d\tau, D = \int_0^{T_0} e^{A_c \tau} D_c e^{A_c^T \tau} d\tau, G = \sqrt{D}, \quad (66)$$

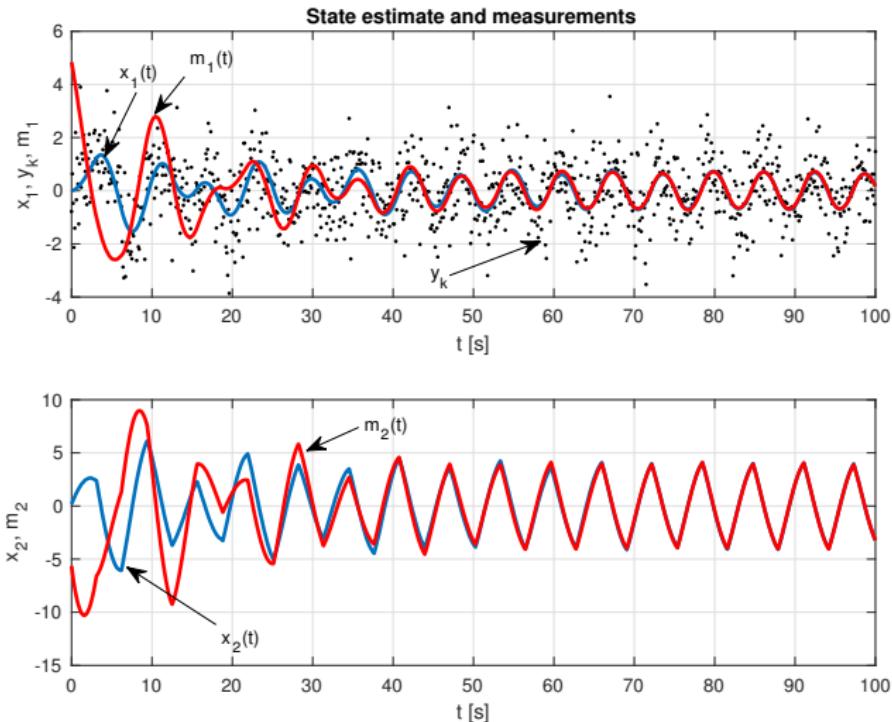
mają postać

$$A \approx \begin{bmatrix} 0.9982 & 0.0199 \\ -0.1788 & 0.9863 \end{bmatrix}, B \approx \begin{bmatrix} 0.0018 \\ 0.1788 \end{bmatrix}, G \approx 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.0831 & 0.1397 \\ 0.1397 & 14.0486 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

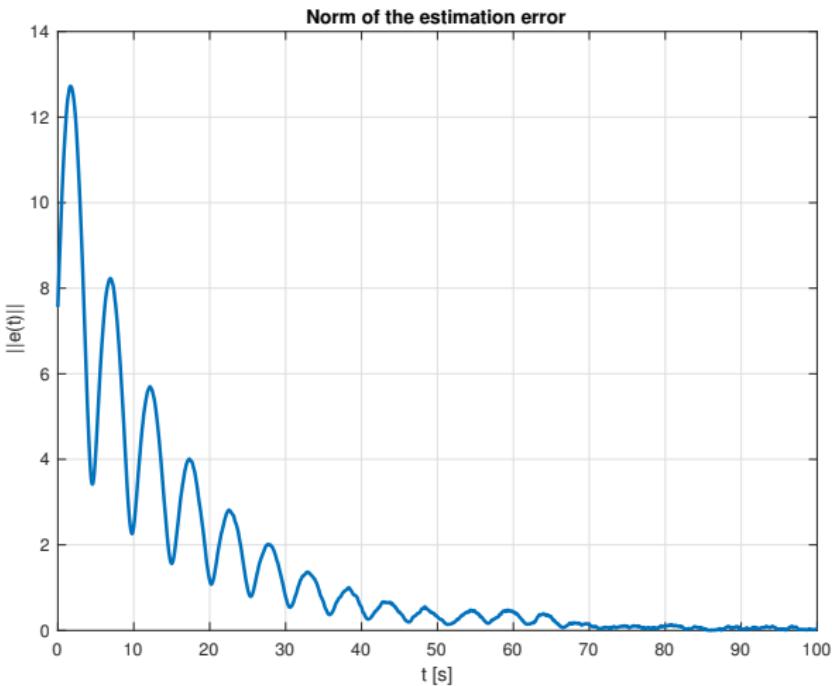
Działanie filtru zarówno w wersji dyskretnej, jak i ciągłej zobrazowano poniżej. Ze względu na krótki okres próbkowania, różnice w działaniu obu filtrów oraz nieciągłości, nie są widoczne na rysunkach.



Rysunek: Stan systemu, sterowanie oraz pomiary.

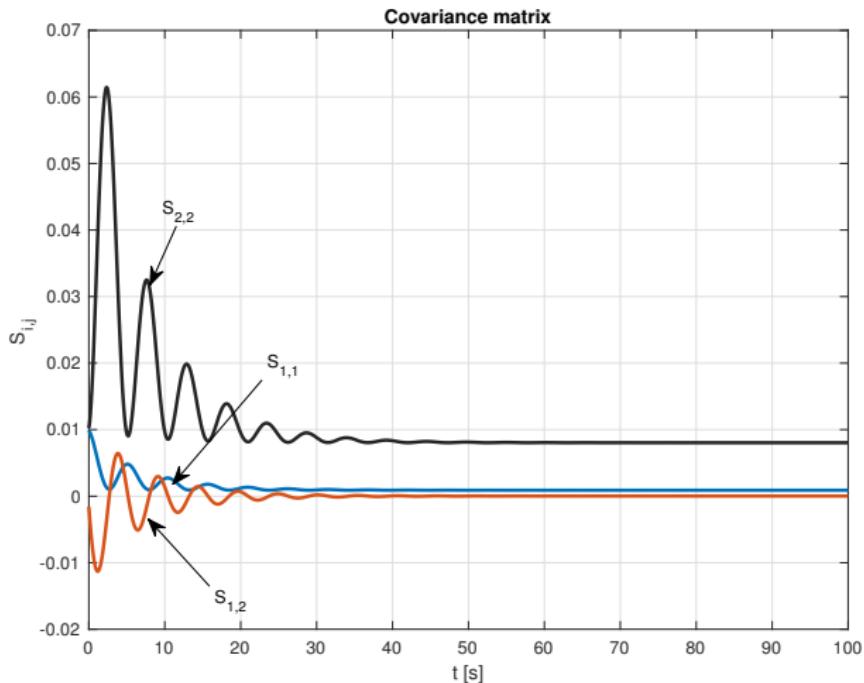


Rysunek: Stan systemu, pomiary oraz estymata stanu, otrzymana z filtru Kalmana. Druga, nieobserwowana składowa stanu, jest odtwarzana na podstawie obserwacji y_1, \dots, y_k .

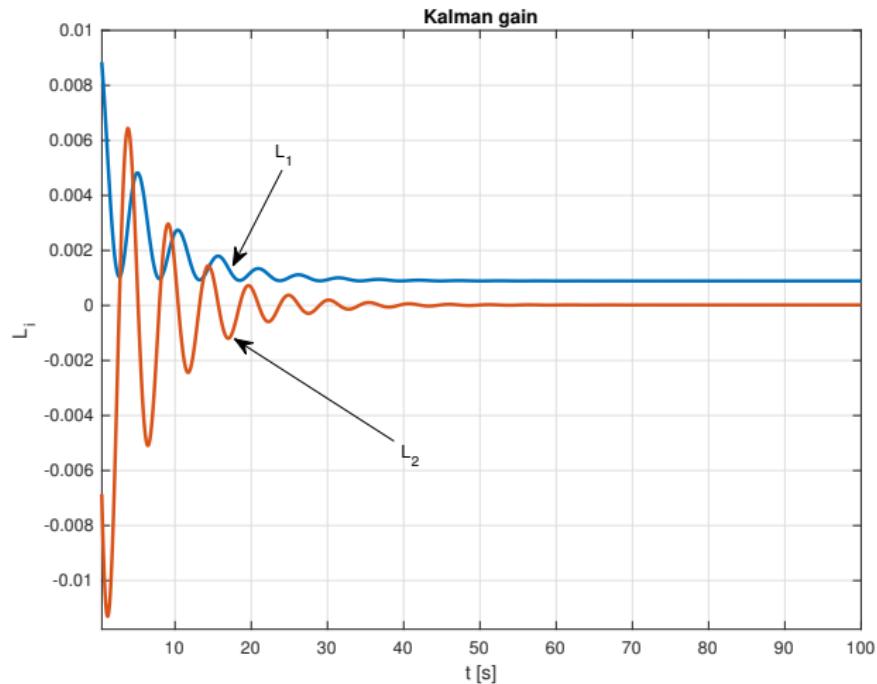


Rysunek: Norma błędu estymacji

$$\|e(t)\| = \sqrt{(x_1(t) - m_1(t))^2 + (x_2(t) - m_2(t))^2}.$$



Rysunek: Elementy macierzy kowariancji.



Rysunek: Elementy macierzy wzmocnień Kalmana.

Strojenie filtru Kalmana

Filtr Kalmana wymaga podania macierzy kowariancji szumu procesowego tj. macierzy $D = GG^T$, oraz macierzy S_v , kowariancji szumu pomiarowego. Jeżeli macierze te nie są poprawnie dobrane, to filtr działa wadliwie, opierając się w zbyt dużym stopniu albo na modelu, albo na pomiarach. W prostych przypadkach, kowariancje szumów można oszacować na podstawie doświadczenia, jednakże nie zawsze jest to możliwe.

Istnieją dwie metody estymacji kowariancji. Metoda Autocovariance Least Squares (ALS), [?] oraz Bayesowska metoda jednoczesnej estymacji stanu, parametrów i kowariancji szumów, znana pod nazwą Field Kalman Filter (FKF), [?], [?]. Porównanie działania obu metod dla konkretnych zadań wydaje się wskazywać na przewagę metody FKF.

Trudności przy wyznaczaniu równań filtracji

Prostota algorytmu filtracji jest pozorna. Wyznaczenie predykcji stanu procesu oraz korekcji rozkładu wymaga obliczenia wielowymiarowych całek. Samo zapamiętanie rozkładu, w przypadku wielowymiarowym ($n > 3$), jest zadaniem trudnym, wymagającym ogromnych zasobów pamięci i nakładu obliczeń. W przypadku procesów dyfuzyjnych, obliczenie ewolucji gęstości warunkowej wymaga rozwiązania równania FPK. Równanie to, dla większości przypadków, nie ma analitycznych rozwiązań. Stąd dokładne rozwiązanie zadania filtracji wymaga zwykle rozwiązania nieskończonej ilości równań różniczkowych zwyczajnych. Z powyższych względów, w układach nieliniowych, stosuje się rozmaite skończenie wymiarowe przybliżenia, takie jak Extended Kalman Filter (EKF), Unscented Kalman Filter (UKF), lub algorytmy oparte na metodach Monte Carlo, takie jak Particle Filter. Istnieje też wiele metod dopasowanych do konkretnych problemów. Szczegóły można znaleźć w [?], [?], [?], [?]

Korzystając z wyników teorii filtracji oraz definiując stan rozszerzony jako (x_k, θ) , krok predykcji, określony równaniem (14), ma postać

$$p(x_k, \theta | Y_{k-1}) = \int \pi(x_k | x_{k-1}, \theta) p(x_{k-1}, \theta | Y_{k-1}) dx_{k-1}, \quad (68)$$

gdzie $\pi(x_k | x_{k-1}, \theta)$ jest gęstością przejścia procesu x ze stanu x_{k-1} w chwili t_{k-1} do stanu x_k w chwili t_k , przy ustalonym parametrze θ . Po wykonaniu nowego pomiaru y_k , krok korekcji ma postać

$$p(x_k, \theta | Y_k) = \frac{p(y_k | x_k, \theta) p(x_k, \theta | Y_{k-1})}{\int p(y_k | x_k, \theta) p(x_k, \theta | Y_{k-1}) dx_k d\theta}. \quad (69)$$

Zauważmy, że wzory (73) i (74) są analogiczne do (14) i (15). Jedyna różnica, to krok predykcji, który nie zmienia rozkładu parametru, bo nie ma żadnej nowej informacji. A zatem krok predykcji wykonujemy tak, jakby parametr θ w równaniu stanu był ustalony.

Estymatę parametru θ obliczamy całkując (69) względem x_k

$$p(\theta|Y_k) = \frac{\int p(y_k|x_k, \theta)p(x_k, \theta|Y_{k-1})dx_k}{\int p(y_k|x_k, \theta)p(x_k, \theta|Y_{k-1})dx_k d\theta}. \quad (70)$$

Praktyczna implementacja równań (68-70) jest trudna. Trudności są takie same jak przy wyznaczaniu równań filtracji. Dlatego stosuje się rozmaite założenia upraszczające.

- ① Liniowy Gaussowski model pomiaru
 $y_k = Cx_k + v_k, v_k \sim N(0, S_v(\theta))$
- ② Pominięcie szumu procesowego w równaniu stanu \rightarrow metoda LS.
- ③ Przybliżenie równania stanu i obserwacji równaniem liniowym \rightarrow EKF (częsty brak zbieżności).
- ④ Przybliżenie UKF.

Automatyczne strojenie filtru Kalmana

Dla układu z czasem dyskretnym

$$x_{k+1} = A(\theta)x_k + B(\theta)u_k, y_k = Cx_k + v_k, v_k \sim N(0, S_v(\theta)), \quad (71)$$

krok predykcji ma postać

$$p(x_k, \theta | Y_{k-1}) = N(x_k, m_k^-(\theta), S_k^-(\theta))p(\theta | Y_{k-1}) \quad (72)$$

Krok korekcji jest dany przez

$$p(x_k, \theta | Y_k) = \frac{N(y_k, Cx_k, S_v(\theta))N(x_k, m_k^-(\theta), S_k^-(\theta))p(\theta | Y_{k-1})}{\int N(y_k, Cx_k, S_v(\theta))N(x_k, m_k^-(\theta), S_k^-(\theta))p(\theta | Y_{k-1})dx_k d\theta}. \quad (73)$$

gdzie

$$m_k^-(\theta) = A(\theta)m_{k-1}(\theta) + B(\theta)u_{k-1}, \quad (74)$$

$$S_k^-(\theta) = A(\theta)S_{k-1}(\theta)A(\theta)^T + D(\theta). \quad (75)$$

Zastosowanie tożsamości (38) oraz wzoru (70), prowadzi do następującego algorytmu

$$p(\theta | Y_k) = \frac{N(y_k, Cm_k^-, W_k(\theta)) p(\theta | Y_{k-1})}{\int N(y_k, Cm_k^-, W_k(\theta)) p(\theta | Y_{k-1}) d\theta}, \quad (76)$$

gdzie

$$m_k^-(\theta) = A(\theta)m_{k-1}(\theta) + B(\theta)u_{k-1}, \quad (77)$$

$$S_k^-(\theta) = A(\theta)S_{k-1}(\theta)A(\theta)^T + D(\theta), \quad (78)$$

$$S_k(\theta) = S_k^-(\theta) - S_k^-(\theta)C^T(S_v(\theta) + CS_k^-(\theta)C^T)^{-1}S_k^-(\theta)C^T, \quad (79)$$

$$m_k(\theta) = m_k^-(\theta) + S_k(\theta)C^T S_v^{-1}(\theta)(y_k - Cm_k^-(\theta)), \quad (80)$$

$$W_k(\theta) = S_v(\theta) + CS_k^-(\theta)C^T. \quad (81)$$

Zakładając, że $p(\theta|Y_{-1}) = p_a(\theta)$, gdzie $p_a(\theta)$ jest rozkładem a priori, ze wzoru (76) otrzymujemy

$$p(\theta|Y_k) = \frac{p_a(\theta) \prod_{j=0}^k N(y_j, Cm_j^-(\theta), W_j(\theta))}{\int p_a(\theta) \prod_{j=0}^k N(y_j, Cm_j^-(\theta), W_j(\theta)) d\theta}. \quad (82)$$

Biorąc minus logarytm obu stron dostajemy

$$\mathcal{L}(\theta, Y_k) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k (|y_j - Cm_j^-(\theta)|_{W_j(\theta)^{-1}}^2 + \ln |W_j(\theta)|) - \ln p_a(\theta) + \gamma_k, \quad (83)$$

gdzie γ_k nie zależy od θ . Minimalizacja (83) daje oszacowanie $\hat{\theta}_k$.

Aby znaleźć błąd oszacowania, rozwijamy (83) w szereg, w otoczeniu punktu $\hat{\theta}_k$, stąd

$$\mathcal{L}(\theta, Y_k) = \mathcal{L}(\hat{\theta}_k, Y_k) + \frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta}_k)^T H_k (\theta - \hat{\theta}_k) + \dots, \quad (84)$$

gdzie

$$H_k = \nabla_{\theta}^2 \mathcal{L}(\hat{\theta}_k, Y_k), \quad (85)$$

oznacza hesjan funkcji $\mathcal{L}(\theta, Y_k)$ obliczony w punkcie $\hat{\theta}_k$.

Bezpośrednio ze wzorów (82) i (83) wynika, że

$$p(\theta | Y_k) = c_k e^{-\frac{1}{2}(\theta - \hat{\theta}_k)^T H_k (\theta - \hat{\theta}_k) + \dots} \approx N(\theta, \hat{\theta}_k, H_k^{-1}), \quad (86)$$

gdzie c_k jest stałą normalizacyjną. A zatem, jako przybliżenie macierzy kowariancji estymatora $\hat{\theta}_k$, możemy przyjąć

$$\hat{S}_{\theta} \approx H_k^{-1}. \quad (87)$$

W praktyce parametry θ nie są stałe, ale wykazują często pewną zmienność. Aby tę zmienność uwzględnić, do wzoru (83) można wprowadzić współczynnik zapominania $\alpha \in (0, 1]$

$$\mathcal{L}(\theta, Y_k) = -\alpha^k \ln p_a(\theta) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \alpha^{k-j} (|y_j - Cm_j^-(\theta)|_{W_j(\theta)^{-1}}^2 + \ln |W_j(\theta)|), \quad (88)$$

przy czym pominęliśmy nieistotny czynnik γ_k . Wówczas *stare* dane wchodzą do sumy z wagą α^{k-j} tym mniejszą im wcześniejsza była obserwacja y_j . W praktyce $\alpha \approx 0.99$. Jeżeli parametr θ zmienia się powoli, to estymator $\hat{\theta}_k$, będzie nadążał za zmianami θ .

Liczba danych koniecznych do zapamiętania w (88), rośnie proporcjonalnie do liczby kroków czasowych. Aby uniknąć pamiętania dużej liczby danych, zamiast (88) można przyjąć

$$\begin{aligned} L_k(\theta, Y_k) &= \alpha^{N\frac{1}{2}} (\theta - \hat{\theta}_{k-N})^T H_{k-N} (\theta - \hat{\theta}_{k-N}) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=k-N+1}^k \alpha^{k-j} (|y_j - Cm_j^-(\theta)|_{W_j(\theta)^{-1}}^2 + \ln |W_j(\theta)|), \quad k > N, \end{aligned} \tag{89}$$

gdzie $N > 0$ oznacza liczbę pamiętanych obserwacji oraz

$$H_{k-N} = \nabla_{\theta}^2 L_{k-N}(\hat{\theta}_{k-N}, Y_{k-N}). \tag{90}$$

Dla $k \leq N$, przyjmujemy $L_k(\theta, Y_k) = \mathcal{L}(\theta, Y_k)$. Pierwszy wyraz w (89), koduje wpływ starych danych. Dla dostatecznie dużych N estymator oparty na (89) zachowuje się podobnie do (88).

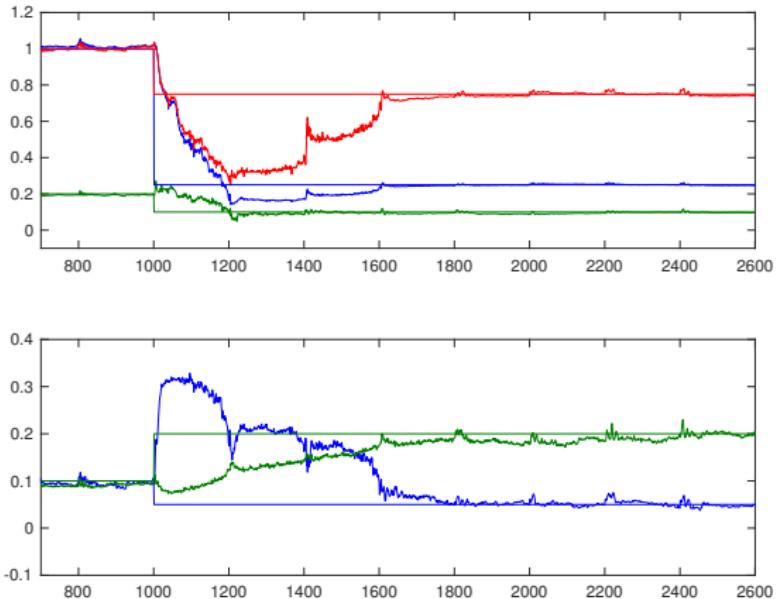
Przykład śledzenia parametrów

Estymacja parametrów oscylatora

$$dx_1 = x_2 dt, \quad (91)$$

$$dx_2 = (-\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 u)dt + \theta_4 dw, \quad (92)$$

$$y_k = x_1(t_k) + v_k, v_k \sim N(0, \theta_5^2). \quad (93)$$



Rysunek: Przykład działania estymatora parametrów. Górný wykres $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Dolny wykres wariancje zakłóceń θ_4, θ_5 , $N = 200, \alpha = 0.98$.

-  Särkä S. (2013). Bayesian Filtering and Smoothing. *Cambridge University Press*.
-  Bania P., Baranowski J. (2017). Approximation of optimal filter for Ornstein-Uhlenbeck process with quantised discrete-time observation. *International Journal of Control*, Vol. 91, Issue 2, pp. 411-419.
-  Baranowski J., Bania P., Prasad I., Cong T. (2017). Bayesian fault detection and isolation using Field Kalman Filter. *EURASIP J. on Advances in Signal Processing* 2017:79.
-  Bania P., Baranowski J. (2016). Field Kalman Filter and its approximation. *Proc. of 55th IEEE Conf. on Decision and Control December 12-14, Las Vegas, USA*, pp. 2875-2880.
-  B. J. Odelson, M. R. Rajamani, and J. B. Rawlings (2016). A new autocovariance least-squares method for estimating noise covariances, *Automatica*, vol. 42, no. 2, pp. 303 – 308.

Dziękuję za uwagę

Identyfikacja procesów technologicznych, wykład 7.

Identyfikacja układów nielinowych metodą najmniejszych kwadratów.

dr hab. inż. Piotr Bania, pba@agh.edu.pl, B1, p. 303

21 stycznia 2022

W wykładzie 5 wyprowadzono równania estymatora stanu i parametrów. Krok predykcji jest dany przez

$$p(x_k, \theta | Y_{k-1}) = \int \pi(x_k | x_{k-1}, \theta) p(x_{k-1}, \theta | Y_{k-1}) dx_{k-1}, \quad (1)$$

gdzie $\pi(x_k | x_{k-1}, \theta)$ jest gęstością przejścia procesu x ze stanu x_{k-1} w chwili t_{k-1} do stanu x_k w chwili t_k , przy ustalonym parametrze θ . Po wykonaniu nowego pomiaru y_k , krok korekcji ma postać

$$p(x_k, \theta | Y_k) = \frac{p(y_k | x_k, \theta) p(x_k, \theta | Y_{k-1})}{\int p(y_k | x_k, \theta) p(x_k, \theta | Y_{k-1}) dx_k d\theta}. \quad (2)$$

Krok predykcji nie zmienia rozkładu parametru, bo nie ma żadnej nowej informacji. A zatem krok predykcji wykonujemy tak, jakby parametr θ w równaniu stanu był ustalony.

Estymatę parametru θ obliczamy całkując (2) względem x_k

$$p(\theta|Y_k) = \frac{\int p(y_k|x_k, \theta)p(x_k, \theta|Y_{k-1})dx_k}{\int p(y_k|x_k, \theta)p(x_k, \theta|Y_{k-1})dx_k d\theta}. \quad (3)$$

Praktyczna implementacja równań (1-3) jest trudna. Trudności są takie same jak przy wyznaczaniu równań filtracji. Dlatego stosuje się rozmaite założenia upraszczające.

- ① Gaussowski addytywny model pomiaru
 $y_k = h(x_k, \theta) + v_k, v_k \sim N(0, S_v(\theta))$
- ② Pominięcie szumu procesowego w równaniu stanu oraz deterministyczny warunek początkowy \Rightarrow metoda LS.
- ③ Przybliżenie równania stanu i obserwacji równaniem liniowym
 \Rightarrow EKF (częsty brak zbieżności).
- ④ Przybliżenie UKF.

Identyfikacja metodą najmniejszych kwadratów

Pominięcie szumu procesowego, deterministyczny warunek początkowy oraz gaussowski, addytywny model pomiaru, znaczco upraszczają zadanie. Równanie stanu, staje się wówczas równaniem różniczkowym zwyczajnym w postaci

$$\dot{x} = f(t, x, u, \theta), x(0) = x_0. \quad (4)$$

W dalszym ciągu wektor x_0 łączymy do wektora parametrów θ . Jeżeli funkcje f oraz u są odpowiednio regularne, to rozwiązanie równania (4) (funkcja $x(t, u, \theta)$), jest klasy C^2 względem θ . W dyskretnych chwilach czasu t_k , dokonujemy obserwacji

$$y_k = h(x_k(\theta), \theta) + v_k, v_k \sim N(0, \sigma^2 I_m), \quad (5)$$

gdzie $x_k(\theta) = x(t_k, u, \theta)$ oraz I_m jest macierzą jednostkową wymiaru m . Funkcja wiarygodności ma postać

$$L(\theta, Y_k) = \prod_{k=1}^N N(y_k, h(x_k(\theta), \theta), \sigma^2 I_m). \quad (6)$$

Minus logarytm obu stron daje

$$\mathcal{L}(\theta, Y_k) = Nm \ln \sigma + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N |y_k - h(x_k(\theta), \theta)|^2 + c_k, \quad (7)$$

gdzie c_k nie zależy od θ, σ . Stąd, estymator najmniejszych kwadratów

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Omega} \mathcal{L}(\theta, Y_k), \quad (8)$$

przy czym Ω jest zbiorem dopuszczalnych wartości parametru θ .

Rozwiązywanie równania stanu

Aby obliczyć (7), należy rozwiązać równanie stanu (4). Równanie to jest nieliniowe i na ogół nie ma analitycznych rozwiązań. Stąd, równanie stanu (4), rozwiązuje my numerycznie posługując się schematem Rungego-Kutty lub innym odpowiednim dla danego typu zadania. W najprostszym przypadku, gdy sterowanie u jest funkcją przedziałami stałą, schemat RK4, dla równania (4) ma postać

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (9)$$

$$k_1 = f(t, x_k, u_k, \theta), \quad (10)$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{1}{2}h, x_k + \frac{1}{2}hk_1, u_k, \theta\right), \quad (11)$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{1}{2}h, x_k + \frac{1}{2}hk_2, u_k, \theta\right), \quad (12)$$

$$k_4 = f(t + h, x_k + hk_3, u_k, \theta). \quad (13)$$

Implementacja RK4 w Matlab

```
function [t,x]=rk4(x0,u,tf,th)
% nt-number of time steps, nu-number of control variables
% size(u)=ntxnu, size(x)=nx1, tf- final time,
% th - parameters, size(th)=nthx1.
nt=size(u,1);n=length(x0);
h=tf/nt;% constant step
x=zeros(nt+1,n);t=zeros(nt+1,1);%solution and time
tmp=zeros(n,1);xtmp=x0;x(1,:)=x0';tt=0;
dx1=zeros(n,1);dx2=zeros(n,1);dx3=zeros(n,1);dx4=zeros(n,1);
h_2=h/2; h_6=h/6; h_26=2*h_6;
for i=1:nt
    dx1=rhs(tt,xtmp,u(i,:)',th);tmp=xtmp+h_2*dx1;tt=tt+h_2;
    dx2=rhs(tt,tmp,u(i,:)',th);tmp=xtmp+h_2*dx2;
    dx3=rhs(tt,tmp,u(i,:)',th);tmp=xtmp+h*dx3;tt=tt+h_2;
    dx4=rhs(tt,tmp,u(i,:)',th);
    xtmp=xtmp+h_6*(dx1+dx4)+h_26*(dx2+dx3);
    x(i+1,:)=xtmp';t(i+1)=tt;
end
```

Right hand side example

Równanie

$$\ddot{x} + \theta_2 \dot{x} + \theta_1^2 x = \theta_3(u(t) + \sin 3t), \quad (14)$$

jest równoważne układowi równań ($x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$),

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (15)$$

$$\dot{x}_2 = -\theta_1^2 x_1 - \theta_2 x_2 + \theta_3(u + \sin 3t). \quad (16)$$

```
function dx=rhs(t,x,u,th)
% Right hand side example for pendulum controlled by
% the force F(t)=u(t)+sin(3*t), x(1)-angle, x(2)-angular
    velocity,
% th(1)-characteristic frequency, th(2)-friction
    coefficient, th(3)-gain
dx=zeros(2,1);
dx(1)=x(2);
dx(2)=-th(1)^2*sin(x(1))-th(2)*x(2)+th(3)*(u+sin(3*t));
```

Znając rozwiązanie równania stanu możemy łatwo obliczyć funkcję celu

$$Q(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N |y_k - h(x_k(\theta), \theta)|^2. \quad (17)$$

Minimum w (17), oznaczamy przez $\hat{\theta}$. Minimalizacja (7) ze względu na σ , daje estymator wariancji szumu

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2Q(\hat{\theta})}{Nm}, \quad (18)$$

gdzie m jest wymiarem wektora y_k . Postępując podobnie jak w wykładzie 5, na podstawie wzorów (6) i (7) wnioskujemy, że estymatorem kowariancji parametrów jest

$$\hat{S}_\theta = \hat{\sigma}^2 H^{-1}, \quad (19)$$

gdzie

$$H = \nabla_\theta^2 Q(\hat{\theta}), \quad (20)$$

jest hesjanem funkcji Q w punkcie $\hat{\theta}$.

Przykład - identyfikacja silnika prądu stałego

Prosty model silnika prądu stałego ma postać

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (21)$$

$$\dot{x}_2 = \theta(u - h(x_2)), \quad (22)$$

gdzie funkcja h jest charakterystyką statyczną i może być wyznaczona z pomiarów stanu ustalonego. Zmienną obserwowaną jest położenie kątowe

$$y_k = x_1(kT_0) + v_k. \quad (23)$$

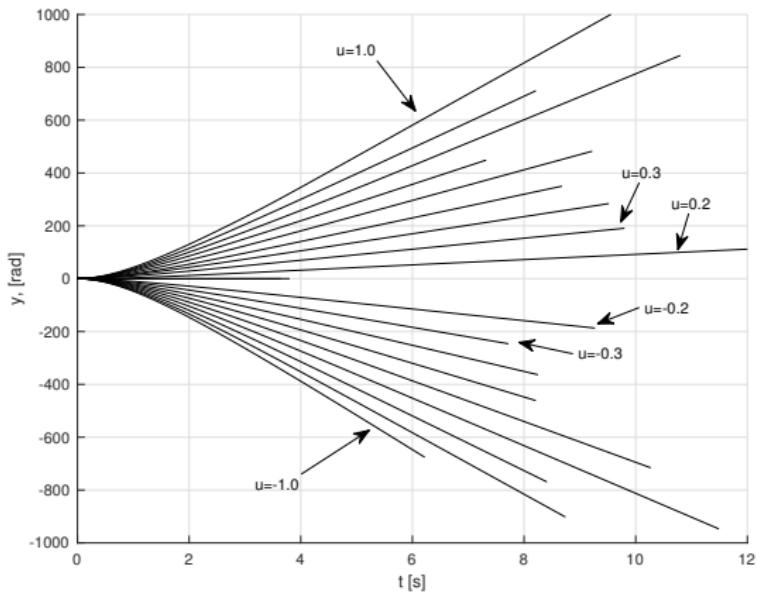
Przy stałym napięciu zasilania u , silnik osiąga ustaloną prędkość

$$\omega = h^{-1}(u). \quad (24)$$

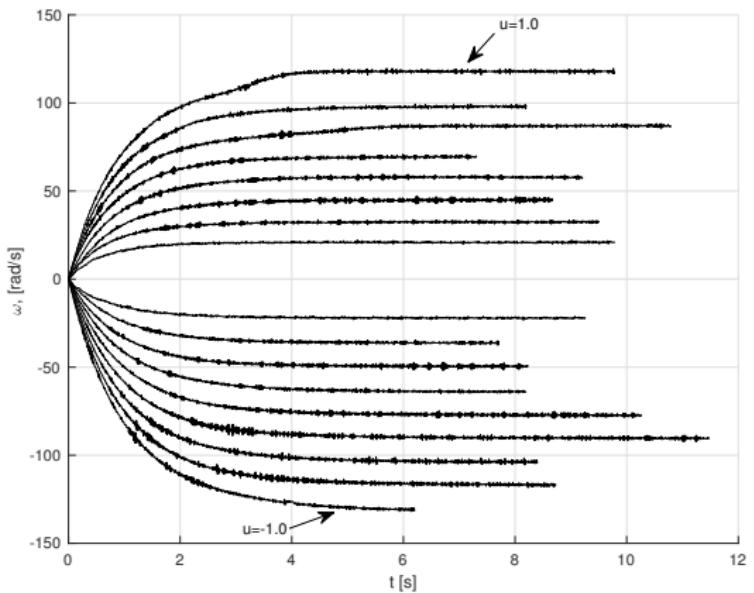
Położenie kątowe zmienia się wówczas liniowo z czasem

$$y_k = kT_0\omega + v_k + c. \quad (25)$$

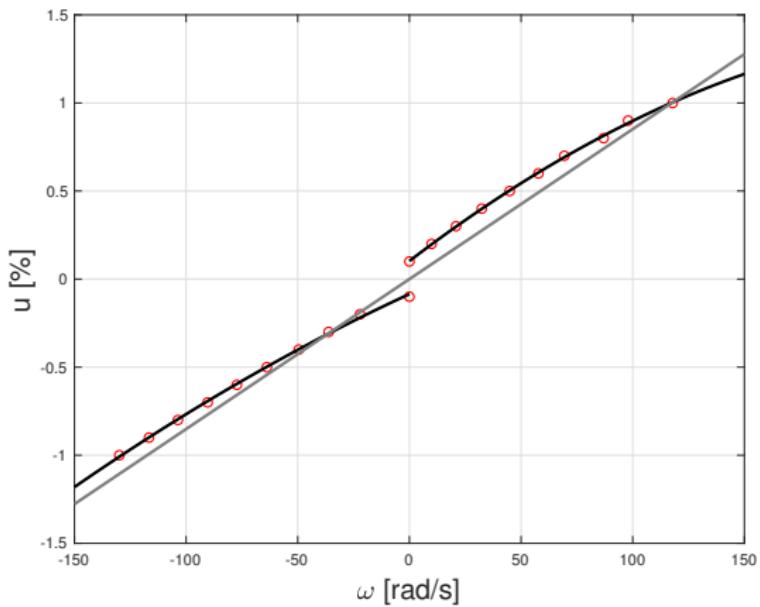
Znając y_k można, z równania (25), wyznaczyć prędkość kątową ω , w stanie ustalonym. Przeprowadzając ten eksperyment dla wielu wartości $u \in [-1, 1]$, otrzymujemy punkty pozwalające wyznaczyć charakterystykę statyczną daną równaniem (24).



Rysunek: Położenie kątowe przy stałym u .



Rysunek: Prędkość kątowa przy stałym u , otrzymana z ilorazu różnicowego.



Rysunek: Charakterystyka statyczna i jej przybliżenie wielomianami drugiego stopnia, dla obrotów dodatnich i ujemnych.

Korzystając z metody najmniejszych kwadratów (funkcja *polyfit*, Matlaba), wyznaczono wielomiany

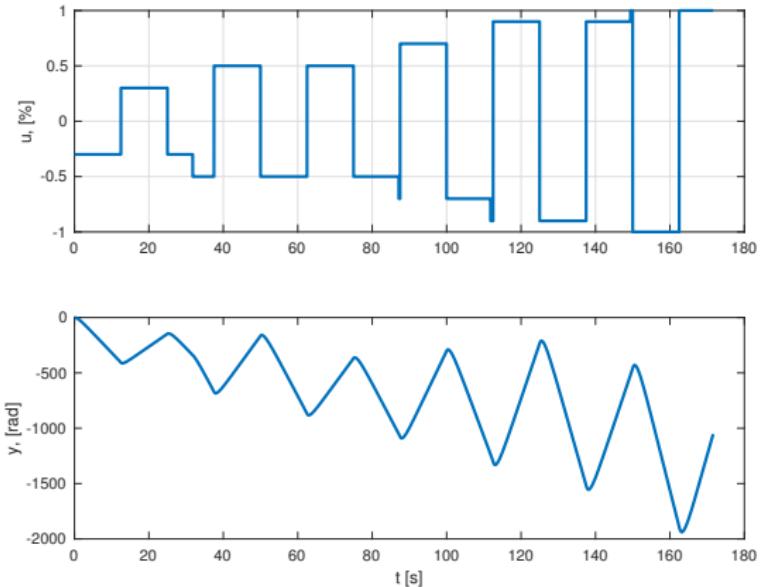
$$u = a_p \omega^2 + b_p \omega + c_p, \omega > 0 \quad (26)$$

oraz

$$u = a_m \omega^2 + b_m \omega + c_m, \omega < 0, \quad (27)$$

opisujące charakterystykę statyczną. W punkcie $u = 0$, funkcja h , ma nieciągłość wynikającą z istnienia tarcia statycznego.

Aby wyznaczyć parametr θ , występujący w równaniu (22), wykonano eksperiment polegający na pobudzaniu silnika sygnałem prostokątnym.



Rysunek: Odpowiedź silnika (położenie kątowe, u dołu), na pobudzenie sygnałem prostokątnym (u góry).

Prawa strona równania stanu:

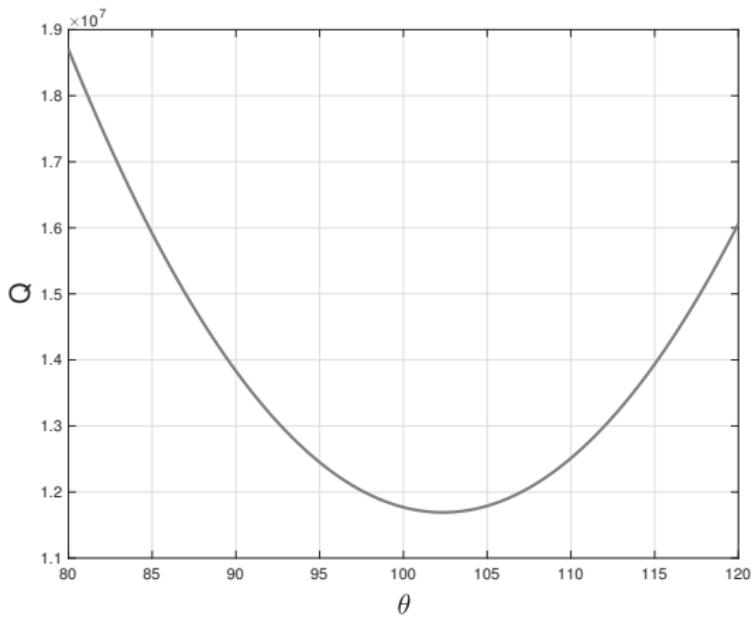
```
function dx=rhs_01(t,x,u,th)
% Prawa strona rownan stanu
%Ch-ka statyczna
ap= ;bp= ;cp= ;am= ;bm= ; cm= ;
if x(2)<-1e-3 % funkcja H dla ujemnych predkosci
    H=am*x(2)^2+bm*x(2)+cm;
elseif x(2)>1e-3 % funkcja H dla dodatnich predkosci
    H=ap*x(2)^2+bp*x(2)+cp;
else %zero wstawiamy ze wzgledow numerycznych
    H=0;
end
dx=[0;0];
dx(1)=x(2);
dx(2)=th*(u-H);
```

Parametry $a_p, a_m\dots$, są znane z ch-ki stanu ustalonego. Położenie i prędkość początkowa były równe zeru.

W rozważanym zadaniu, funkcja celu

$$Q(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (y_k - x_1(t_k, \theta))^2, \quad (28)$$

zależy od jednej zmiennej θ , którą należy dobrać tak, aby Q przyjęła wartość najmniejszą.



Rysunek: Funkcja celu (28).

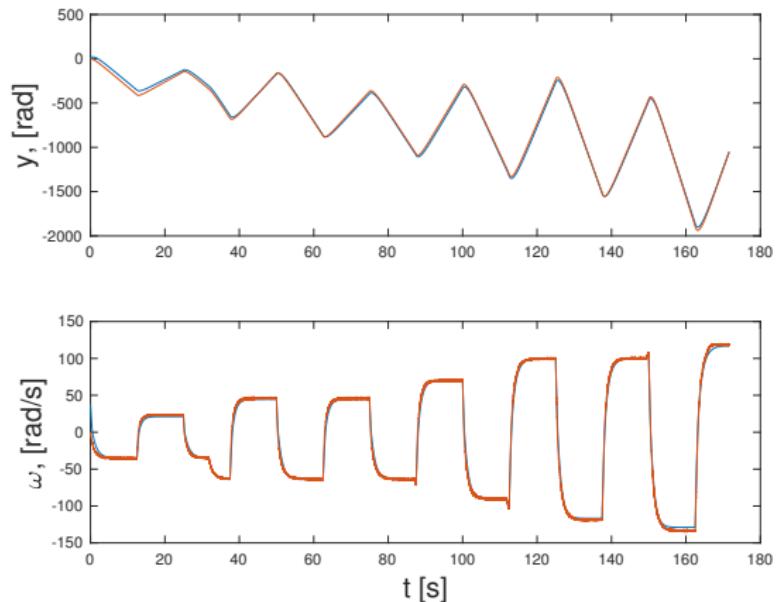
Minimum funkcji celu znajduje się w punkcie $\hat{\theta} \approx 102.3$ oraz $Q(\hat{\theta}) = 1.1796 \cdot 10^7$. Hesjan (druga pochodna) w tym punkcie $H = 28053$. Liczba obserwacji $N = 17162$. Ze wzoru (19), otrzymujemy

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2Q(\hat{\theta})}{N} = 1374.7. \quad (29)$$

Ze wzoru (19)

$$\hat{S}_\theta = \hat{\sigma}^2 H^{-1} = 0.098. \quad (30)$$

A zatem $\theta = 102.3 \pm 0.3$ z prawdopodobieństwem większym niż 0.99. Uwaga. Wynik (29) sugeruje, że błąd pomiaru położenia jest rzędu 37 rad, co jest raczej niemożliwe w przypadku enkodera. Tak duża wariancja szumu pomiarowego wynika z niedokładności modelu, a zatem oszacowanie (30) jest także mało wiarygodne. Jest to przypadek częsty w realnych zadaniach.



Rysunek: Porównanie odpowiedzi modelu i pomiarów.

Dziękuję za uwagę

Identyfikacja procesów technologicznych, wykład 8. Planowanie eksperymentu.

dr hab. inż. Piotr Bania, pba@agh.edu.pl, B1, p. 303

21 stycznia 2022

Planowanie eksperymentu

Przez planowanie eksperymentu identyfikacyjnego rozumiemy dobór sygnałów pobudzających, okresu próbkowania, pomiarów i wszelkich innych warunków mających wpływ na dokładność oszacowania parametrów modelu

Przykład deterministyczny

Rozważmy proces opisany równaniem

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = x_0, a > 0 \quad (1)$$

oraz niech obserwacja ma postać

$$y_k = x(kT_s), \quad (2)$$

$k = 0, 1, \dots, n$, $T_s > 0$ jest okresem próbkowania. Niech $\theta = (a, b, x_0)$ oraz $u(t) = u_0 = \text{const.}$ Zadanie identyfikacji polega na doborze parametrów θ , tak aby $x(kT_s) = y_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Rozwiążanie równania (1) ma postać

$$x(t) = e^{-at}x_0 + \frac{bu_0}{a}(1 - e^{-at}). \quad (3)$$

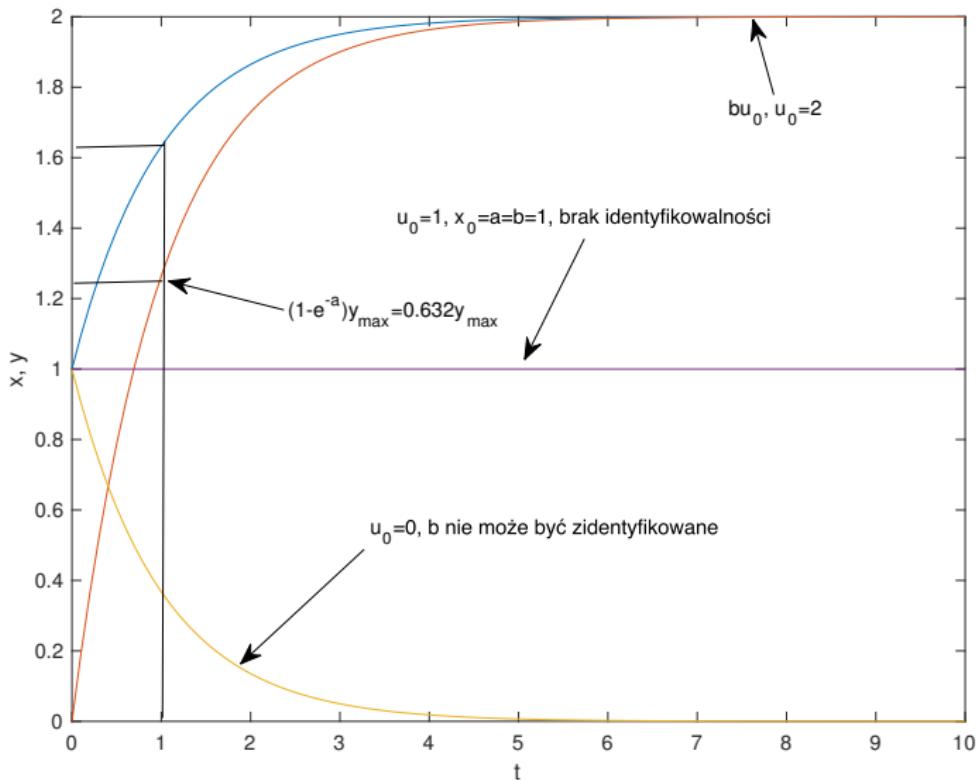
A zatem poszukiwane parametry spełniają układ równań

$$e^{-akT_s}x_0 + \frac{bu_0}{a}(1 - e^{-akT_s}) = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

W zależności od wyboru x_0, u_0 układ równań może mieć dokładnie jedno lub nieskończenie wiele rozwiązań. Jeżeli

$$ax_0 = bu_0, \quad (5)$$

to $y_k = \frac{bu_0}{a} = \text{const}$ i istnieje wówczas nieskończenie wiele liczb a, b spełniających (4). Jeżeli $u_0 = 0$, to y_k nie zawiera informacji o parametrze b i w konsekwencji istnieje nieskończenie wiele wartości parametru b spełniających (4). Jeżeli jeden z powyższych warunków będzie spełniony w przybliżeniu, to układ (4) będzie źle uwarunkowany i jego numeryczne rozwiązanie będzie niestabilne, obarczone dużymi błędami lub nie możliwe do uzyskania.



Rysunek: Ilustracja braku identyfikowalności oraz sposobu identyfikacji

Powyższy przykład dobrze ilustruje kilka typowych problemów przy identyfikacji

- Złe pobudzenie lub jego brak uniemożliwiają identyfikację.
- Pewne warunki początkowe powodują brak identyfikowalności.
- Może wystąpić złe uwarunkowanie zadania.
- Parametry powinny być a priori ograniczone do zbioru dopuszczalnego.
- Na ogół istnieje nieskończenie wiele minimów lokalnych.

Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów

Rozważamy prosty model ARMAX

$$y_k = -ay_{k-1} + bu_{k-1} + e_k, e_k \sim N(0, \sigma^2) \quad (6)$$

Minimalizacja wyrażenia

$$Q(a, b) = \sum_{k=1}^n e_k^2 = \sum_{k=1}^n (y_k + ay_{k-1} - bu_{k-1})^2, \quad (7)$$

prowadzi do układu równań liniowych

$$\phi^T \phi \theta = \phi^T Y \quad (8)$$

gdzie $\theta = (a, b)$ oraz

$$\phi = \begin{bmatrix} -y_0 & u_0 \\ -y_1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ -y_{n-1} & u_{n-1} \end{bmatrix}_{(n \times 2)}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Jeżeli $\phi^T \phi > 0$, to estymator parametrów jest dany wzorem

$$\hat{\theta}(Y) = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T Y. \quad (10)$$

Jeżeli $u_k = 0$, to oczywiście $\text{rank}(\phi) < 2$ i układ równań nie ma jednoznacznego rozwiązania. A zatem sygnał wejściowy nie może mieć zbyt małej amplitudy. Gdy tak jest, to macierz $\phi^T \phi$ będzie co prawda dodatnio określona, ale na ogół będzie źle uwarunkowana i praktycznie niemożliwa do odwrócenia.

Wpływ sprzężenia zwrotnego

Przypuśćmy, że w naszym układzie działa regulator stabilizujący

$$u_k = gy_k. \quad (11)$$

Rejestrujemy wartości sterowań u_k oraz wyjścia y_k . Macierz

$$\phi = \begin{bmatrix} -y_0 & gy_0 \\ -y_1 & gy_1 \\ \vdots & \vdots \\ -y_{n-1} & gy_{n-1} \end{bmatrix}_{(nx2)}, \quad (12)$$

ma kolumny liniowo zależne, a zatem rząd co najwyżej równy 1 i nie istnieje jednoznaczne rozwiązanie układu (15). Stąd wniosek, że sprzężenie zwrotne może całkowicie zmienić wynik identyfikacji lub ją uniemożliwić.

Rozważmy ponownie układ (1), (2), przy $u(t) = \sin \omega t$, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$.
Rozwiążanie równania

$$\dot{x} = -ax + bu, x(0) = A(\omega) \cos \phi(\omega), \quad (13)$$

jest funkcja

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)), \quad (14)$$

$$A(\omega) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}, \phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (15)$$

Ponieważ rozwiązanie to jest okresowe z okresem $T = \frac{2\pi}{\omega} = T_0$, to
pomiary $y_k = x(kT_0)$, przyjmuję tylko jedną wartość
 $A(\omega) \cos(\phi(\omega) + 2k\pi)$, co nie pozwala wyznaczyć parametrów a i b .

Tych kilka prostych przykładów pokazuje, że warunki prowadzenia eksperymentu mają istotny wpływ na wynik identyfikacji.

- ① Okres próbkowania na tyle krótki, aby uchwycić dynamikę systemu (łatwe do spełnienia)
- ② Sygnał pobudzający musi być odpowiednio dobrany - jak?

- Szerokie pasmo
- Dużo niskich częstotliwości
- Odpowiednio duża amplituda
- Sygnał trwale pobudzający, bogaty w informację, PRBS, suma sinusoid o różnych częstotliwościach, biały szum filtrowany dolno-przepustowo

Metody wykorzystujące informację Fishera, plany D-optymalne

Niech $\theta \in \mathbb{R}^p$, $U = \text{col}(u_0, \dots, u_N)$, $Y(U, \theta) = \text{col}(y_1, \dots, y_N)$.
Definiujemy macierze

$$J(U, \theta) = \nabla_{\theta} Y(U, \theta)^T, \quad (16)$$

$$D(U, \theta) = \frac{1}{N} J(U, \theta) J(U, \theta)^T. \quad (17)$$

Macierz J jest macierzą wrażliwości wyjść względem zmian parametrów θ , a macierz D , wymiaru $p \times p$, można uważać, za macierz informacyjną Fishera.

Jednym ze sposobów znalezienia sygnału gwarantującego dużą ilość informacji o parametrach, jest maksymalizacja wyznacznika macierzy D

$$U^* = \arg \max_{U \in U_d} |D(U, \theta)|. \quad (18)$$

Kłopot z wyrażeniem (18) polega na jego zależności od nieznanego parametru θ . Dlatego, aby uzyskać rozsądne kryterium, zamiast (18) stosuje się kryterium uśrednione

$$U^* = \arg \max_{U \in U_d} \int p_a(\theta) |D(U, \theta)| d\theta. \quad (19)$$

Metody wykorzystujące teorię informacji Shannona

Niech $x \sim p(x)$. Entropią zmiennej losowej x nazywamy liczbę

$$H(x) = - \int p(x) \ln p(x) dx \quad (20)$$

Niech $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, mają łączny rozkład $p(x, y)$. Entropię warunkową $H(x|y)$ definiujemy, jako

$$H(x|y) = - \int p(y) \left(\int p(x|y) \ln p(x|y) dx \right) dy. \quad (21)$$

Informacją wzajemną pomiędzy zmiennymi x oraz y , nazywamy liczbę

$$I(x; y) = \int p(x, y) \ln \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy = H(x) - H(x|y) \geq 0, \quad (22)$$

przy czym $I(x; y) = I(y; x)$ oraz $I(x; f(y)) \leq I(x; y)$, dla dowolnej funkcji f . Ostatnia nierówność znana jest, jako *garbage in garbage out* i mówi, że żadne przekształcenie danych nie może zwiększyć ilości informacji zawartej w danych.

Dla zmiennych losowych dyskretnych będziemy pisać
 $p(x = k) = p(k)$, $p(x = k, y = l) = p(k, l)$,
 $p(x = k|y = l) = p(k|l)$. Entropia oraz entropia warunkowa są
zdefiniowane jako

$$H(x) = - \sum_{k=1}^n p(k) \log_2 p(k), \quad (23)$$

$$H(x|y) = - \sum_{k,l=1}^n p(k, l) \log_2 p(k|l). \quad (24)$$

Informacją wzajemną pomiędzy zmiennymi x oraz y , nazywamy liczbę

$$I(x; y) = \sum_{k,l=1}^n p(k, l) \log_2 \frac{p(k, l)}{p(k)p(l)} = H(x) - H(x|y) \geq 0. \quad (25)$$

W szczególności dla $n = 2$, $p(1) = p(2) = 0.5$ mamy

$$H(x) = -0.5 \log_2(0.5) - 0.5 \log_2(0.5) = 1\text{bit}. \quad (26)$$

Istotą metod opartych na teorii informacji (Bayesowskich), jest maksymalizacja informacji wzajemnej pomiędzy parametrem θ oraz obserwacjami Y .

$$I(\theta; Y|U) \rightarrow \max. \quad (27)$$

Dla układu liniowego,

$$x_{k+1} = A(\theta)x_k + B(\theta)u_k + G(\theta)w_k, \quad (28)$$

$$y_k = C(\theta)x_k + D(\theta)v_k, \quad (29)$$

można podać dość dokładne i łatwe do obliczenia [?], oszacowanie dolne, takie, że

$$I_l(U) \leq I(\theta; Y|U) \leq H(\theta), \quad (30)$$

przy czym funkcja I_l , nie zależy od θ . Maksymalizacja I_l , przy warunku

$$U^T U \leq \rho, \quad (31)$$

daje poszukiwany sygnał, który jest bogaty w informację o parametrze θ .

Można pokazać [?], że dla prawie każdego sygnału U , takiego że $\|U\| = 1$, zachodzi równość

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} I_l(\rho U) = H(\theta). \quad (32)$$

A zatem, prawie każdy sygnał o odpowiednio dużej amplitudzie jest dobry dla identyfikacji, ale istnieją sygnały szczególnie dobre, które przy niewielkiej amplitudzie (normie) dają dużo informacji i mały błąd estymatora.

Przykład. Który model jest lepszy? Problem dyskryminacji.

$$dx = (A_\theta x + B_\theta u)dt + G_\theta dw, \quad (33)$$

where $\theta \in \{1, 2, 3\}$, $x(t) \in R^\theta$, $x(0) = 0$, $u(t), w(t) \in R$, w is a standard Wiener process, and

$$A_1 = -1, B_1 = 1, G_1 = 0.05, \quad (34)$$

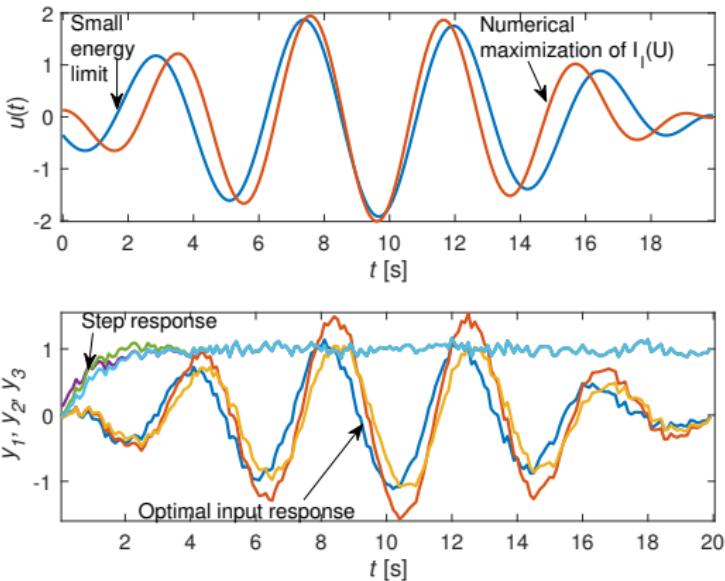
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3.5 & 1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.05 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

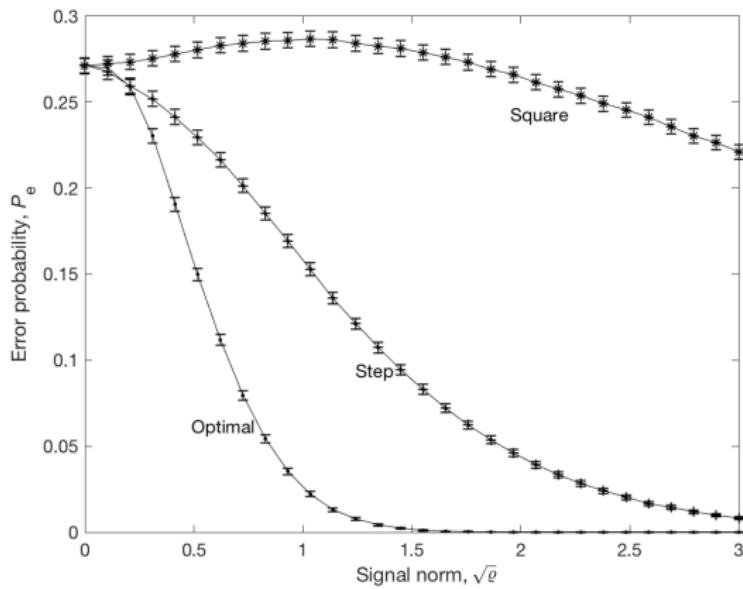
The observation equation has the form

$$y_k = x_1(t_k) + 0.05v_k, k = 1, 2, \dots, N, \quad (37)$$

where $v_k \sim N(0, 1)$, $t_k = kT_0$, $T_0 = 0.1$, and x_1 is the first component of $x(t)$, [?].



Rysunek: (**Top**) The optimal signal and the small energy approximation, for $\varrho = N = 200$. (**Bottom**) Step responses and optimal responses of all systems.



Rysunek: Error probability of the MAP estimator for the optimal signal (.), step signal (+), and square (*) signal with period of three. The number of steps is $N = 50$. The error probability has been estimated by a Monte Carlo method with 10^6 trials. Standard error bars were multiplied by factor of 10 for better visibility.

Porównanie z metodami D-optimalnymi, wykorzystującymi informację Fishera

The Bayesian design, described above, will be compared with the average D-optimal design. To that end, let us consider a finite family of linear models

$$y_k = \frac{b_\theta z^{-1}}{1 - a_\theta z^{-1}} u_k + \sigma_v v_k, \quad (38)$$

where $\theta \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a_\theta = 0.6 + 0.1(\theta - 1)$, $b_\theta = 1 - a_\theta$, $\sigma_v = 0.1$, and $v_k \sim N(0, 1)$. The prior distribution of θ is uniform (i.e., $p_{0,\theta} = 0.25$). The state space representation has the form

$$x_{k+1} = a_\theta x_k + b_\theta u_k, \quad (39)$$

$$y_k = x_k + \sigma_v v_k, \quad (40)$$

which is consistent with (28) and (29).

The Fisher information matrix is given by

$$M_F(\theta, U) = \frac{1}{N\sigma_v^2} \sum_{k=1}^N d_k d_k^T, \quad (41)$$

where $d_k = (\xi_k, \eta_k)^T$ and $\xi_k = \frac{\partial y_k}{\partial a_\theta}$, $\eta_k = \frac{\partial y_k}{\partial b_\theta}$, denote the sensitivity of y_k to changes in a and b . The derivatives ξ_k and η_k fulfills the sensitivity equations

$$\xi_k = 2a_\theta \xi_{k-1} - a_\theta^2 \xi_{k-2} + b_\theta u_{k-2}, \quad (42)$$

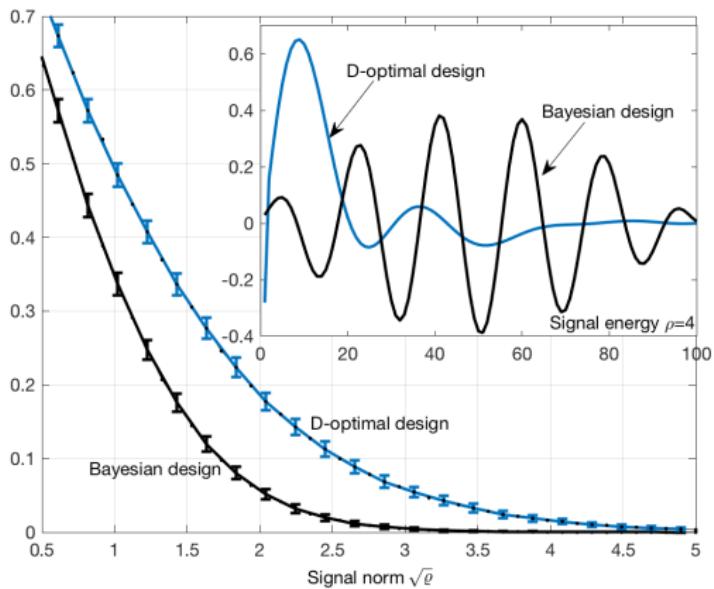
$$\eta_k = a_\theta \eta_{k-1} + u_{k-1}, k = 1, 2, \dots, N, \quad (43)$$

with zero initial conditions.

The average D-optimal design consists in finding a signal U that maximizes

$$J(U) = \sum_{\theta=1}^4 p_{0,\theta} |M_F(\theta, U)|, \quad (44)$$

with the energy constraints given by (31). Maximization of (44) has been performed for various signal energies and the error probability of the MAP estimator was estimated by Monte Carlo with 10^5 trials. The same procedure was repeated using Bayesian design for (39) and (40). The results are shown below. The error rate of Bayesian method is significantly smaller when compared to D-optimal design, at least in this example. In particular, the signal shown in the upper-right part gives an error probability approximately three times smaller than that of D-optimal signal, although the energy of both signals was the same.



Rysunek: Error probability of the MAP estimator, as a function of signal norm and the exemplary input signals (top right) generated by D-optimal and Bayesian methods. The error probability was calculated by a Monte Carlo method with 10^5 trials. Standard error bars were multiplied by a factor of 10 for better visibility.

Powyższe wyniki, można łatwo przenieść na przypadek modeli nieliniowych oraz ciągłej przestrzeni parametrów, co zostało to pokazane w artykule autora

-  Bania P. (2019). Bayesian Input Design for Linear Dynamical Model Discrimination. *Entropy* 2019, 21, 351;
doi:10.3390/e21040351.

Dziękuję za uwagę