24964 ROUCHOUSE Damien

La reconstruction tomographique : application à l'imagerie médicale

Lors d'un stage effectué au sein de l'entreprise General Electric healthcare j'ai découvert toutes les machines utiles aux médecins. Je me suis alors intéressé plus en profondeuraux mathématiques se cachant derrières ces appareils.
La tomographie a été un outil essentiel au développement de la médecine. Elle permet aujourd'hui aux médecins d'observer l'intérieur du corps des patients par l'intermédiaire d'engins à rayons X.

Positionnement thématique (ETAPE 1)

MATHEMATIQUES (Analyse), INFORMATIQUE (Informatique pratique), MATHEMATIQUES (Algèbre).

Mots-clés (ETAPE 1)

Mots-Clés (en français)	**Mots-Clés** (en anglais)
Tomographie	*Tomography*
Reconstruction d'images	*Image reconstruction*
Transformée de Radon	*Radon transform*
Transformée de Mojette	*Mojette Transform*
Traitement d'images	*Digital image processing*

Bibliographie commentée

La tomographie est un ensemble de techniques visant à reconstruire l'intérieur d'un objet sans y avoir accès. C'est notamment le principe utilisé par les scanners à rayons X. La tomographie discrète étudie le cas très particulier où le nombre d'axes de projection est limité et où l'objet est une image discrète. Le champ d'action de la tomographie discrète est cependant important, car elle sert là où les scanners traditionnels sont inopérants. Ma démarche a donc été de m'intéresser aux résultats généraux de la tomographie, puis particulièrement à la tomographie discrète afin d'implémenter informatiquement mes recherches grâce au langage de programmation Python.

Dans un premier temps, je me suis concentré sur un préambule physique me permettant de comprendre la nature intrinsèque de la tomographie à rayons X et notamment de l'importance de la loi de Beer-Lambert qui lie l'atténuation d'un faisceau de lumière, les propriétés du milieu qu'il traverse et l'épaisseur traversée. Cette loi a été découverte en partie par le physicien français Pierre Bourger en 1729. La forme qu'on rencontre le plus courrament a été énoncée plus tard par le physicien Allemand August Beer en 1852.

On remarque dans [1] et [2] que l'application de cette loi permet de réaliser des projections d'objets. C'est d'ailleurs ce même principe qui est utilisé par les scanners à rayons. Dans le cas de ces machines, le nombre de projections est important car le scanner tourne autour de sa cible ce qui permet de réaliser un grand nombre de projections. [3] explique en profondeur le fonctionnement de ces engins.

Par suite des mesures réalisées avec le scanner à rayons X, nous obtenons un ensemble de projections de notre objet selon plusieurs directions. L'enjeu majeur de mon TIPE est de retrouver l'objet initial à partir de cet ensemble de projections. On doit alors introduire une nouvelle transformation intégrale appelée transformation de Radon. Notons que cette transformation a été introduite par le mathématicien Johann Radon en 1917 bien avant l'invention des scanners à rayons X en 1972.

L'inversion de Radon va être particulièrement pertinente pour reconstruire l'objet initial. Dans [4] on retrouve un certain nombre de théorèmes concernant la transformation de Radon et son inversion. On y fait notamment référence au théorème de la coupe centrale (en anglais : Projection-slice theorem) qui est au cœur de l'inversion [5]. Ce théorème établit une relation entre l'inversion de Radon et le théorème d'inversion de Fourier.

En pratique, les scanners ne donnent accès qu'à un nombre fini de projections. La solution obtenue après reconstruction n'est alors pas unique et peut présenter des zones floues. Pour obtenir une représentation fidèle de l'objet, nous aurons recours à la rétroprojection filtrée. [6] présente l'utilisation de filtres, l'application d'un filtre se traduisant mathématiquement par un produit de convolution plutôt difficile à calculer. Pour pallier la complexité des calculs, nous pouvons encore une fois nous aider de la transformée de Fourier [7]. L'application du filtre peut alors se réduire à un produit simple.

On s'intéresse ensuite à la discrétisation de la transformée de Radon appelée encore transformée de Mojette [8]. Cette transformation a été développée dans les années 90, soit bien après la transformée de Radon. Pour discrétiser les méthodes analytiques, nous pouvons adopter plusieurs méthodes. L'une consiste à discrétiser les formules d'inversion continues, notamment par l'utilisation de sommes de Riemann. L'autre est une méthode algébrique et fait appel à la notion de matrice de projection présentée dans [2].

Enfin, ces méthodes discrètes nous permettent de réaliser un programme Python permettant de réaliser le sinogramme d'un objet (ensemble de projection selon des directions données) et inversement de reconstituer l'objet à partir de son sinogramme. Bien que la tomographie soit couramment utilisée sur des objets à trois dimensions, nous nous limiterons ici à deux dimensions, simplifiant ainsi le problème et accélérant par là même la vitesse d'exécution des codes. L'implémentation de la transformation de Fourier en Python est présentée dans [9].

Problématique retenue

Comment reconstruire la géométrie d'un objet à partir de ses projections selon un nombre fini de directions ?

Objectifs du TIPE

- Étudier d'un point de vue physique la reconstruction tomographique
- S'approprier les outils mathématiques nécessaires à la transformée de Radon et à son inversion
- Étudier la transformée de Radon, et particulièrement son inversion
- Étudier les méthodes de discrétisation de la transformée de Radon
- Réaliser une implémentation la transformée de Radon (version discrète) et de son inversion en Python

Références bibliographiques (ETAPE 1)

[1] PHILIPPE CIUCIU : Imagerie Biomédicale : visite guidée des problématiques de traitement de signal et d'images à travers des applications : *ESIEA*

[2] ISABELLE BLOCH : Reconstruction d'images de tomographie : *Laboratoire de Traitement de Communication de l'Information, Telecom Paris*

[3] FABIEN HYAFIL : UE2 biophysique

[4] FRANK NATTERER : The Mathematics of Computerized Tomography : *Society for Industrial and Applied Mathematics*

[5] LECOMTE JEAN FRANÇOIS : Reconstruction d'images : solution générale : *http://jflecomt.free.fr/manuscrit/node35.html*

[6] JULIE BENECH : Spécificité de la mise en oeuvre de la tomographie dans le domaine de l'arc électrique – validité en imagerie médicale : *Université Toulouse III – Paul Sabatier*

[7] LÉO MORIN : Transformation de Fourier, applications, et utilisation dans les leçons d'analyse : *ENS Rennes*

[8] MYRIAM SERVIÈRES : Reconstruction Tomographique Mojette. Géométrie algorithmique : *Université de Nantes ; Ecole Centrale de Nantes*

[9] Transformation de Fourier, FFT et DFT : *https://courspython.com/fft-introduction.html*