

TIPE : La reconstruction tomographique

Damien ROUCHOUSE

2021-2022

Introduction

La tomographie est un ensemble de techniques visant à reconstruire l'intérieur d'un objet sans y avoir accès. C'est notamment le principe utilisé par les scanners à rayons X. La tomographie discrète étudie le cas très particulier où le nombre d'axes de projection est limité et éventuellement où l'objet est une image discrète.

1 Transformée de Radon : Intérêt pratique

1.1 Définition de la transformée de Radon

Définition 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $v \in \mathbb{R} \mapsto f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta)$ est intégrable. On définit la transformée de Radon par rapport à la droite de paramètre (u, θ) par :

$$R[f](u, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta) dv$$

1.2 Intérêt pratique

La loi de Beer-Lambert nous assure que :

$$I(u, \theta) = I_0(u, \theta) \cdot \exp(-R[f](u, \theta))$$

ce qui fait le lien entre la transformée de Radon et l'imagerie médicale. On accède ainsi à la transformée de Radon $R[f]$ à partir de la mesure de I . Seulement, le but principal est d'accéder à f . Il faut alors expliciter une démarche pour passer de la transformée de Radon $R[f]$ à f : c'est le problème de la reconstruction tomographique.

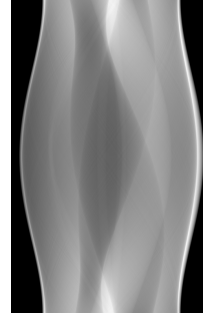
2 Reconstruction tomographique : Transformée de Radon inverse

2.1 Utilisation des sinogrammes

En pratique les machines à rayons X donnent accès aux valeurs de $R[f](u, \theta)$ par une représentation en niveau de gris dans le plan d'axes θ et u . On appelle cette représentation : sinogramme. Le but est de reconstruire l'objet à partir de son sinogramme. On donne ci-dessous un exemple de sinogramme :



(a) Objet à reconstruire



(b) Sinogramme de l'objet

2.2 Transformée de Fourier

Définition 2 (Transformée de Fourier). En dimension 1 : soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction intégrable, on définit la transformée de Fourier par :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{f}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi \nu t} dt$$

En dimension 2 : soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction intégrable, on définit la transformée de Fourier par :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \hat{f}(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-2i\pi (ux + vy)} dx dy$$

Théorème 1 (Théorème d'inversion de Fourier). *Sous certaines hypothèses supposées vérifiées dans le cadre de notre étude, on peut accéder à f par inversion de sa transformée de Fourier.*

En dimension 1 :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi \nu t} d\nu$$

En dimension 2 :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(u, v) e^{2i\pi (ux + vy)} du dv$$

Démonstration. admis. □

Remarque 1. Il est par exemple suffisant que f soit dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ($d \in \{1, 2\}$) où :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty : \forall (n, m) \in \mathbb{N}, x \mapsto x^n f^{(m)}(x) \text{ bornée}\}$$

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2) = \{f \in C^\infty : \forall (p, q, n, m) \in \mathbb{N}^4, (x, y) \mapsto x^p y^q \partial_x^n \partial_y^m f(x, y) \text{ bornée}\}$$

2.3 Inversion analytique

Nous allons voir dans cette section l'inversion théorique de la transformée de Radon pour retrouver l'objet à partir de son sinogramme.

Théorème 2 (Théorème de la coupe Centrale). *Soient $\theta \in [0, \pi[$ et $u \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de notre objet. En notant $p_\theta : t \in \mathbb{R} \mapsto R[f](t, \theta)$ on a :*

$$\hat{p}_\theta(u) = \hat{f}(u \cos \theta, u \sin \theta)$$

où $\hat{\cdot}$ est l'opérateur de transformée de Fourier.

Démonstration. On admettra le théorème de Fubini et le théorème de changement de variable pour les fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

$$\hat{p}_\theta(u) = \int_{\mathbb{R}} p_\theta(t) e^{-iut} dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t \cos \theta - v \sin \theta, t \sin \theta + v \cos \theta) dv \right) e^{-iut} dt$$

puis en utilisant le théorème de Fubini on peut changer l'ordre des intégrales :

$$\hat{p}_\theta(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(t \cos \theta - v \sin \theta, t \sin \theta + v \cos \theta) e^{-iut} dt dv$$

On effectue ensuite le changement de variable : $(x, y) = (t \cos \theta - v \sin \theta, t \sin \theta + v \cos \theta)$ ie $(t, v) = (x \cos \theta + y \sin \theta, y \cos \theta - x \sin \theta)$ dont le jacobien s'écrit : $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1$ qui donne :

$$\hat{p}_\theta(u) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) e^{-iu(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy = \hat{f}(u \cos \theta, u \sin \theta)$$

d'où le résultat. \square

Théorème 3 (Rétroprojection filtrée). *Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de notre objet. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note $p_\theta : t \in \mathbb{R} \mapsto R[f](t, \theta)$. On a alors :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \hat{p}_\theta(u) |u| e^{2i\pi u(x \cos \theta + y \sin \theta)} du d\theta$$

Démonstration. On utilise le théorème d'inversion de Fourier :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u, v) e^{2i\pi(xu + yv)} du dv$$

Puis on fait le changement de variable cartésien-polaire $(u, v) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ dont le jacobien vaut $|r|$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \hat{f}(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{2i\pi r(x \cos \theta + y \sin \theta)} |r| dr d\theta$$

Puis d'après le théorème de la coupe centrale ?? on a : $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, $\hat{p}_\theta(r) = \hat{f}(r \cos \theta, r \sin \theta)$
En conclusion :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \hat{p}_\theta(r) e^{2i\pi r(x \cos \theta + y \sin \theta)} |r| dr d\theta$$

\square

Remarque 2. Le terme $|r|$ sous l'intégrale est à l'origine de la notion de filtrage des projections par le filtre rampe.

La rétroprojection filtrée permet alors la reconstruction de l'objet à partir de ses projections. On décrit ci-dessous les différentes étapes de la rétroprojection filtrée.

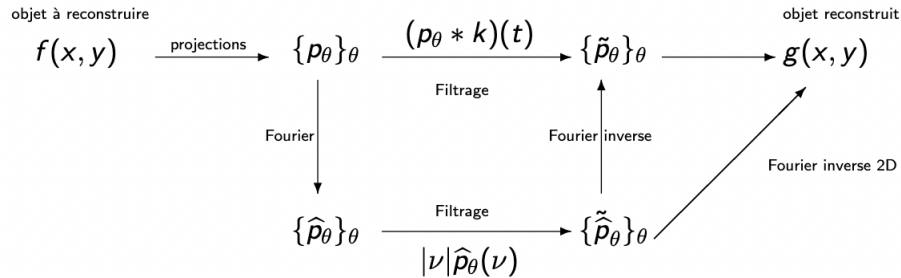


FIGURE 2 – Rétroprojection filtrée

3 Discrétisation des méthodes analytiques

En pratique il est impossible pour les machines de réaliser des projections p_θ pour tout $\theta \in [0, \pi]$. De plus, pour un angle θ donné les projections p_θ sont connues que sur un ensemble discret de points. On présente deux méthodes de discrétisation :

1. La première consiste à définir des opérateurs discrets analogues à ceux déjà étudiés (transformée de Radon, transformée de Fourier, rétroprojection...). Ensuite on appliquera les théorèmes démontrés dans le cas continu aux outils discrets.
2. La deuxième méthode (souvent appelée transformée de Mojette) est une méthode algébrique. L'équation de projection est directement discrétisée et fournit ainsi un système d'équations linéaires. On est alors ramené à un problème d'algèbre linéaire.

3.1 Présentation de la première méthode

Dans le but de donner l'équivalent discret du théorème de la coupe centrale ??, introduisons la transformée de Fourier discrète.

3.1.1 La transformée de Fourier discrète

Définition 3 (Transformée de Fourier discrète - 1D). Soit f une fonction estimée aux points (u_1, \dots, u_N) , on définit la transformée de Fourier discrète de f par la suite $(F(u_1), \dots, F(u_N))$ où :

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, F(u_k) = \sum_{l=1}^N f(u_l) \exp\left(\frac{-2i\pi kl}{N}\right)$$

Définition 4 (Transformée de Fourier discrète - 2D). Soit f une fonction estimée aux points $(u_1, \dots, u_N, v_1, \dots, v_M)$ on définit la transformée de Fourier discrète 2D de f par la suite double $(F(u_1, v_1), F(u_1, v_2), \dots, F(u_N, v_M))$ où :

$$\forall k, l \in \llbracket 1, N \rrbracket \times \llbracket 1, M \rrbracket, F(u_k, u_l) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M f(u_n, u_m) e^{\frac{-2i\pi kn}{N}} e^{\frac{-2i\pi lm}{M}}$$

La transformée de Fourier discrète 1D peut aussi s'écrire matriciellement :

$$\begin{pmatrix} F(u_1) \\ \vdots \\ F(u_N) \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} f(u_1) \\ \vdots \\ f(u_N) \end{pmatrix} \text{ avec } \Omega = (\omega^{kl})_{(k,l)} \text{ et } \omega = e^{\frac{-2i\pi}{N}}$$

Théorème 4. La matrice $\frac{\Omega}{\sqrt{N}}$ est unitaire.

Démonstration. Soient $k, l \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$[\Omega^* \Omega]_{k,l} = \sum_{d=1}^N [\overline{\Omega}]_{k,d} [\Omega]_{d,l} = \sum_{d=1}^N \omega^{-kd} \omega^{dl} = \sum_{d=1}^N \omega^{d(l-k)} = \delta_{k,l} N$$

Donc :

$$\left(\frac{\Omega}{\sqrt{N}}\right)^* \frac{\Omega}{\sqrt{N}} = I_N$$

□

Conséquences : Ω est inversible et s'inverse facilement.

Théorème 5 (Coupe centrale discret). Soient f la fonction caractéristique de notre objet, θ_k un angle échantillonné et $(u_l \cos(\theta_k), u_l \sin(\theta_k))$ un point d'une des droites d'échantillonnage. On a :

$$P_{\theta_k}(u_l) = F(u_l \cos \theta_k, u_l \sin \theta_k)$$

3.2 Présentation de la deuxième méthode

Nous définissons la matrice de projection : $P = (p_j)_j$ qui recense les valeurs des projections et la matrice de rétroprojection : $R = (R_{i,j})_{i,j}$ dont les valeurs sont expliquées sur le dessin. En notant F le vecteur (colonne) des valeurs de f sur les pixels, on a la relation matricielle : $P = RF$.

Reconstruction par la méthode ART

En pratique nous avons donc accès aux matrices P et R et nous souhaitons accéder à la matrice F . La méthode employée est appelée : méthode ART (*Algebraic Reconstruction Technique*) ou méthode de Kaczmarz. Le principe de cette méthode est de partir d'un vecteur F_0 et de la modifier à chaque itération en le projetant sur un hyperplan affine.

On cherche à résoudre le système linéaire $P = RF$ d'inconnue F . Notons L_1, \dots, L_N les lignes de la matrice R , et pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $N_i = {}^t L_i$. La résolution du système est basé sur la résultat suivant :

Théorème 6. Soit $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on définit \mathcal{H}_i l'hyperplan affine passant par $q_i = \frac{p_i}{\|N_i\|^2} N_i$ et dirigé par $\{N_i\}^\perp$. F est solution de $P = RF$ si et seulement si, $F \in \bigcap_{i=1}^N \mathcal{H}_i$.

Alors, partant d'un vecteur F_0 quelconque, définissons par récurrence la suite $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui aura pour but de converger vers la solution du système.

- on définit F_1 comme le projeté orthogonal de F_0 sur \mathcal{H}_1
- on définit F_2 comme le projeté orthogonal de F_1 sur \mathcal{H}_2
- ...
- on définit F_N comme le projeté orthogonal de F_{N-1} sur \mathcal{H}_N
- on recommence le processus à partir de F_N

On peut définir pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ l'opérateur de projection orthogonale sur $\{N_i\}^\perp$ par $T_i = I_N - \frac{N_i N_i^t}{\|N_i\|^2}$.

La suite $(F_k)_k$ est alors définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} F_0 \in M_{M,1}(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = F_n - \frac{\langle F_n - q_{r(n)+1}, N_{r(n)+1} \rangle}{\|N_{r(n)+1}\|^2} N_{r(n)+1} = T_{r(n)+1}(F_n) + q_{r(n)+1} \end{cases}$$

où $r(n)$ est le reste de la division euclidienne de n par N .

Condition suffisante de convergence

Ensuite montrons qu'une condition suffisante de convergence est que la matrice R est carrée inversible. Dans ce cas, l'intersection $\bigcap_{i=1}^N \mathcal{H}_i$ est composée d'un unique élément \bar{F} . Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = F_n - \bar{F}$ l'erreur au rang n . Montrons que la suite $(\varepsilon_n)_n$ converge vers 0.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\varepsilon_{n+1} = F_{n+1} - \bar{F} = T_{r(n)+1} F_n - \bar{F} = T_{r(n)+1} (F_n - \bar{F}) = T_{r(n)+1} \varepsilon_n$$

car $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\bar{F} \in \mathcal{H}_i$. De plus, $T_{r(n)+1}$ étant un opérateur de projection orthogonale on a d'après Pythagore $\forall x \in E$, $\|T_{r(n)+1}(x)\| \leq \|x\|$ on a alors : $\|\varepsilon_{n+1}\| \leq \|\varepsilon_n\|$.

Ainsi, la suite $(\|\varepsilon_n\|)_n$ est décroissante et minorée. Elle converge donc et sa limite est la même que la suite extraite $(\|\varepsilon_{nN+1}\|)_n$. Alors la suite $(\varepsilon_n)_n$ est bornée et il existe une boule fermée B qui contient cette suite. Posons $T = T_N T_{N-1} \dots T_1$. On a par récurrence immédiate : $\|\varepsilon_{nN+1}\| \leq \|T\|_B^n \|\varepsilon_0\|$.

Montrons ensuite que $\|T\|_B < 1$.

Soit $x \in B$:

- S'il existe $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $T_i \dots T_1 x \in \{N_{i+1}\}^\perp$ on a :

$$\|Tx\| \leq \|T_N\| \dots \|T_{i+2}\| \|T_{i+1} \dots T_1 x\| \leq \|T_{i+1} \dots T_1 x\| < \|T_i \dots T_1 x\| \leq \|x\| \text{ donc } \|Tx\| < \|x\|$$

- Sinon $\forall i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $T_i \dots T_1 x \in \{N_{i+1}\}^\perp$. Ainsi on a : $\forall i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $T_i \dots T_1 x = x$.

Alors on a : $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, \langle N_i, x \rangle = 0$ et (N_1, \dots, N_N) est une base de E car R est inversible.
Donc $x = 0$ si bien que $\forall x \in B - \{0\}, \|Tx\| < \|x\|$ et puisque B est compacte (dimension finie) on a en passant au sup $\|T\|_B < 1$. On peut alors conclure que $\varepsilon_{nN+1} \xrightarrow{n_\infty} 0$ donc $\varepsilon_n \xrightarrow{n_\infty} 0$ si bien que $(F_n)_n$ converge. \square

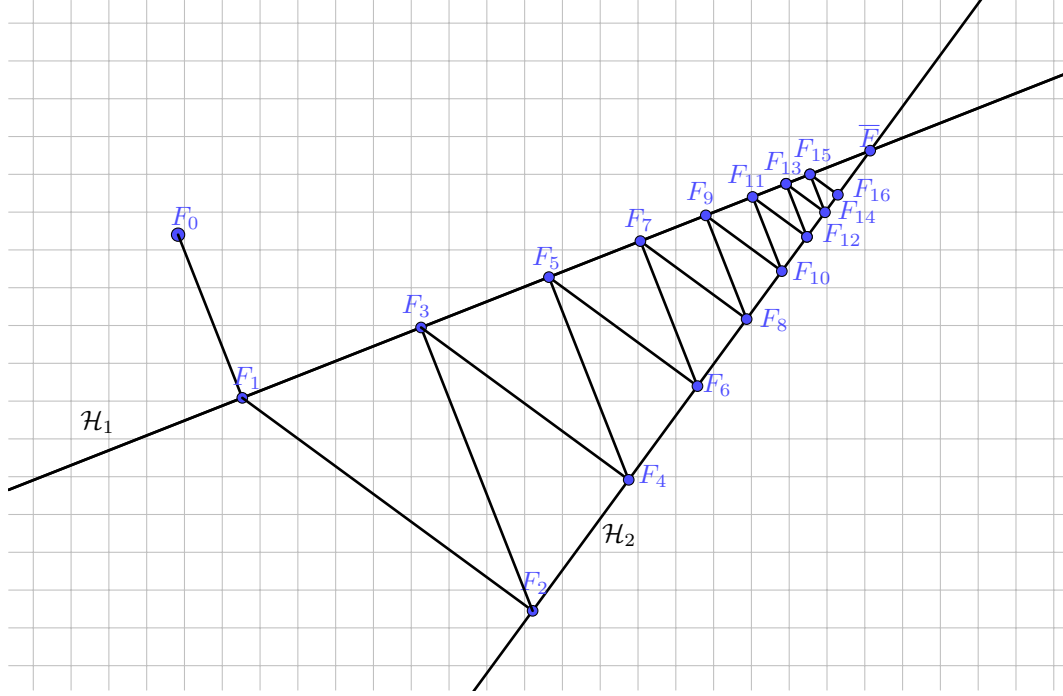


Illustration de la méthode en dimension 2