

Imagerie Biomédicale :

visite guidée des problématiques de traitement
de signal et d'images à travers des applications

Philippe CIUCIU[†]

[†] SHFJ/CEA, Orsay, ciuciu@shfj.cea.fr

<http://www.madic.org/people/ciuciu>

ESIEA, Paris — 28 novembre 2005

Principaux contributeurs à ce cours

■ Par ordre d'importance décroissante

- Irène Buvat, (CR CNRS INSERM U678, CHU Pitié Salpêtrière)
buvat@imed.jussieu.fr
- Marc Allain, (MCF Insitut Fresnel, Univ. Provence III)
marc.allain@fresnel.fr
- Claude Comtat, (SHFJ/CEA) comtat@shfj.cea.fr
- Vincent Lebon, (SHFJ/CEA) lebon@shfj.cea.fr
- Charles Soussen, (MCF CRAN Nancy)
charles.soussen@cran.uhp-nancy.fr

Plan du cours

- Cours 1. Introduction : imagerie morphologique vs fonctionnelle
- Cours 2. Visite guidée en imagerie fonctionnelle nucléaire (ionisante)
- Cours 3. Reconstruction 3D en PET/SPECT
- Cours 4. Quantification en PET/SPECT
- Cours 5. Reconstruction 2D/3D en tomographie à rayons X (CT, scanner)
- Cours 6. Principes et applications en Imagerie par résonance magnétique (IRM)
- Cours 7. Recalage d'images monomodale, multimodales, ...
- Cours 8. Analyse statistique des données d'IRM fonctionnelle

Philippe CIUCIU

Cours III.

3

Cours III. Reconstruction en scanner et tomographie à rayons X

Philippe CIUCIU

Cours II. Reconstruction en tomographie à rayons X

A. Tomographie à rayons X pour résoudre un problème de santé publique

B. Tomographie à rayon X : principe physique, procédé de mesures

C. Méthodes reconstruction en tomographie axiale

C.1. Méthodes analytiques

C.2. Méthodes algébriques

C.3. Approches pénalisées

D. Tomodensitométrie 3D

D.1 Tomographie axiale « 2,5D »

D.2 Tomographie hélicoïdale 3D

Ouvrages majeurs [HERMAN 1980, KAK et SLANEY 1987, 2001]

Articles [NATTERER 1999]

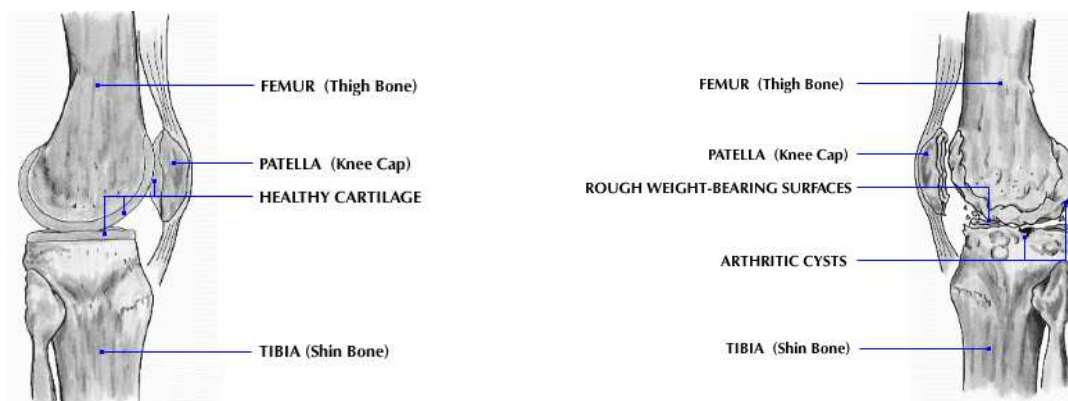
Thèses utilisées [SOUSSEN 2000, ALLAIN 2002] (remerciements chaleureux !)

I. Projet de prothèse personnalisée du genou

1

A. Arthrite Rhumatoïde / Arthrose

Problème de santé publique : + 16 millions de cas aux États-Unis.



Une solution possible : la pose d'une prothèse articulaire...

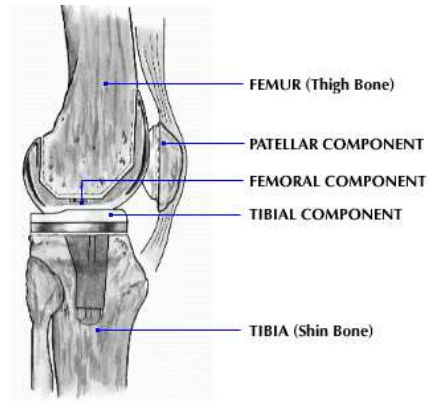
La prothèse standard

+ 200 000 implantations par année aux États-Unis...



Partie fémorale

- Chirurgie lourde
- viabilité < 15 ans,
- au + une révision.



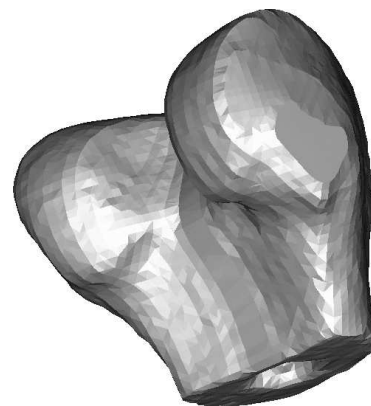
Prothèse implantée.

Philippe CIUCIU

La prothèse personnalisée



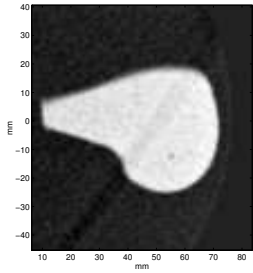
- chirurgie mineure,
- demi-prothèse,
- révisions multiples.



MAIS...
nécessite de connaître la surface du fémur avec précision
(≤ 1 mm).

Philippe CIUCIU

B. Tomographie à rayon X : motivation et principe physique



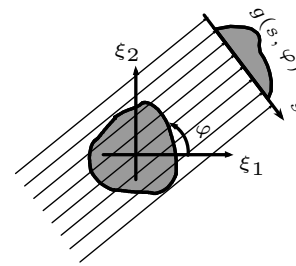
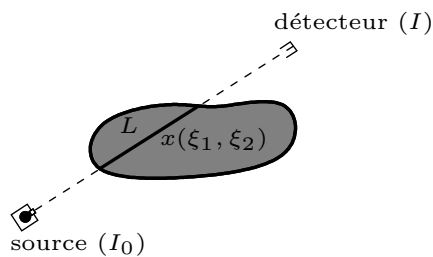
Coupe axiale

- imagerie 2D (coupes) et 3D,
- large disponibilité clinique,
- fort contraste os / tissus mous.



Volume

Utilise les rayons X pour produire des « projections » de l'objet.



- Faisceau de rayons X tournant autour du patient

Philippe CIUCIU

Principe physique

■ Faisceau à rayons X pour la tomographie clinique ($\approx 120\text{keV}$)

- Diffraction/Diffusion (effet Compton)
- Absorption (effet photoélectrique)

\Rightarrow décroissance exponentielle du faisceau X (source supposée monochromatique)

■ Modélisation par la Loi de Beer-Lambert :

$$N_D = N_0 \exp \left(- \int_{\xi \in \mathcal{L}} f(\xi_1, \xi_2) d\xi \right)$$

\mathcal{L} : rayon de projection,

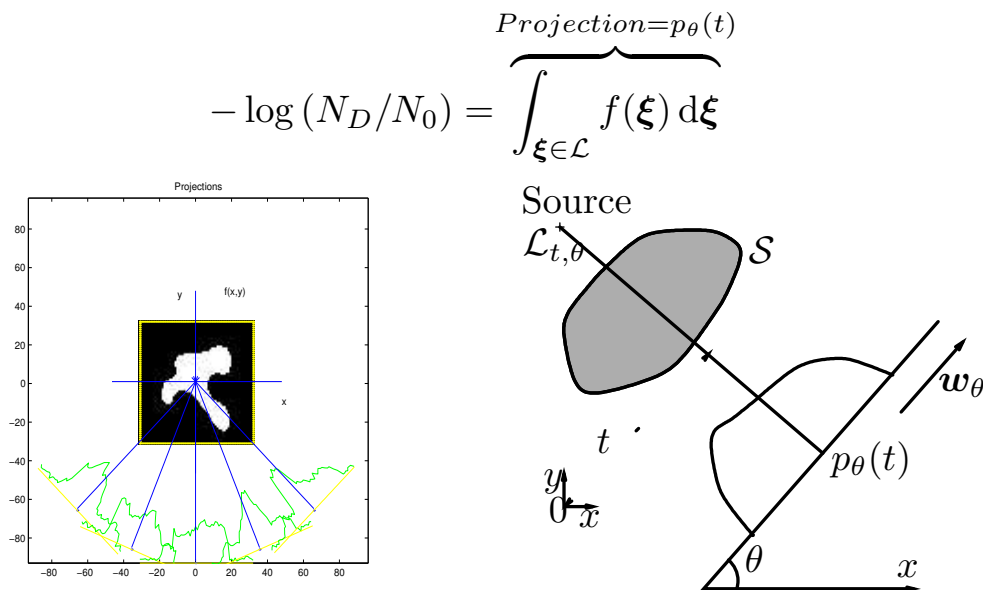
$f(\xi)$: distribution d'atténuation des photons X,

N_0 : intensité de la source émettrice (ou nombre de photons émis/sec. par la source)

N_D : nombre de photons reçus par le détecteur

Procédé de mesure en tomographie axiale

■ **Principe** : « illuminer » une section infiniment mince de l'objet sous un angle d'incidence θ :

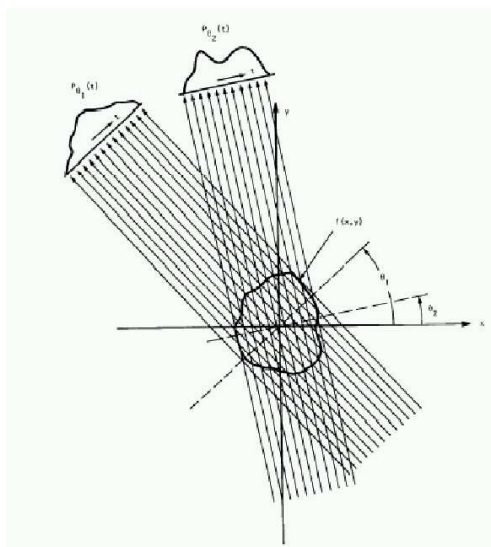


Philippe CIUCIU

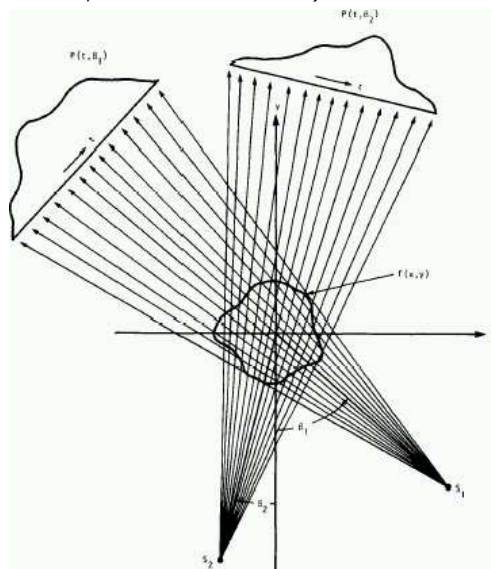
Configurations de projections

■ **Projections coniques** : $p(\alpha, \beta)$

$t = r \sin \alpha$, $\theta = \beta + \alpha - \frac{\pi}{2}$, (r =distance source/centre repère)



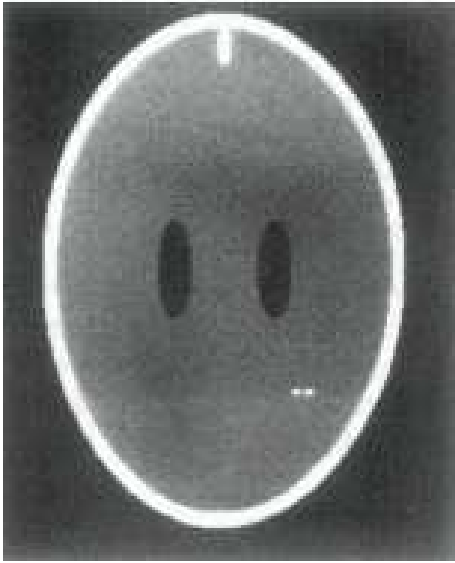
Mode parallèle



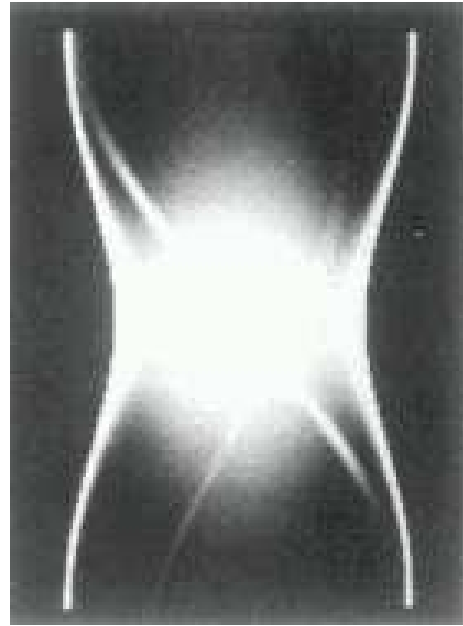
Mode conique (*fan beam*)

Philippe CIUCIU

Visualisation des données radiographiques : *sinogramme*



Objet réel

Projections suivant le repère (t, θ)

B.2 Principe de la tomographie axiale

9

Transformée de Radon (TR) ou à rayons X :

Soit \mathcal{S} la sphère unité dans \mathbb{R}^2 . $\forall \phi = [\cos \theta, \sin \theta]^t \in \mathcal{S}$, on introduit Φ^\perp la direction orthogonale à ϕ , décrite par $\phi^\perp = [-\sin \theta, \cos \theta]$. Pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable, la transformée de Radon $g : \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière équivalente :

$$\begin{aligned}
 g(t, \phi) &= \int_{\Phi^\perp} f(\xi + t\phi) \, d\xi, \\
 &= \int \int_{\mathbb{R}^2} \delta(t - \overbrace{\xi_1 \cos \theta + \xi_2 \sin \theta}^{=\langle \xi, \phi \rangle}) f(\xi) \, d\xi \\
 &= \int_{\mathcal{L}_{t, \theta}} f(\xi_1, \xi_2) \, dl = p_\theta(t)
 \end{aligned}$$

- Formulation fonctionnelle : $g = \mathcal{R}f$

■ **Remarque** : cette définition s'étend aux fonctions $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce cas la TR se définit en intégrant selon tous les hyperplans de dimension $N - 1$.

Transformées de Fourier

■ Version 2D

Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sa TF notée $\mathring{f}(\nu_1, \nu_2)$ est en général à valeurs complexe et définie par :

$$\mathring{f}(\boldsymbol{\nu}) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} f(\boldsymbol{\xi}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu} \rangle} d\boldsymbol{\xi}, \quad \text{ou } \boldsymbol{\nu} = [\nu_1, \nu_2]^t \in \mathbb{R}^2$$

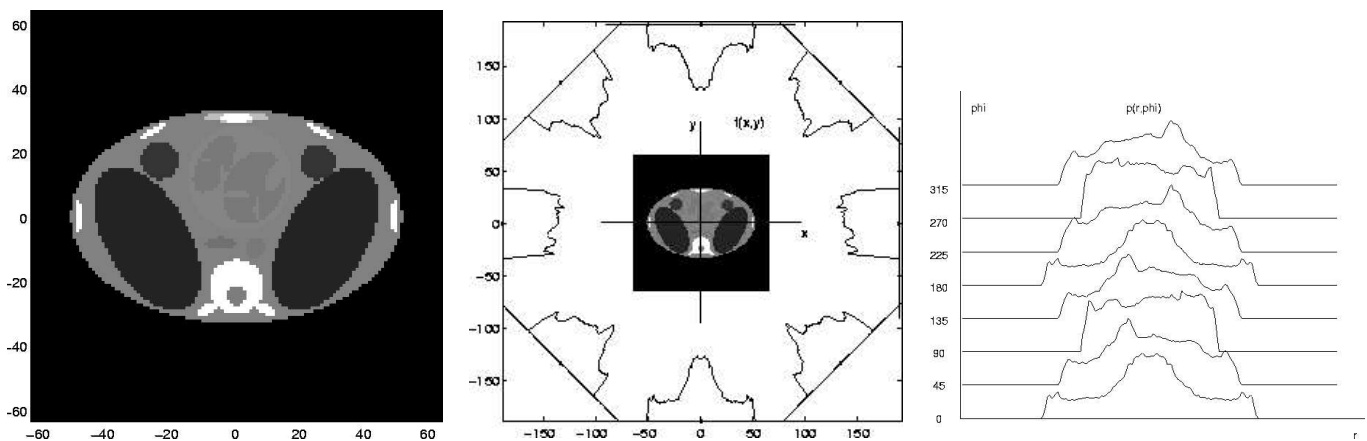
Sous forme fonctionnelle, on notera $\mathring{f} = \mathcal{F}_2 f$, avec \mathcal{F}_2 opérateur de Fourier 2D.

■ Version utile pour la TR $p : \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathring{g}(\omega, \phi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} g(t, \phi) e^{-it\omega} dt, \quad \text{avec } \omega, t \in \mathbb{R}, \phi \in \mathcal{S} \\ \iff \mathring{p}_\theta(\omega) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} p_\theta(t) e^{-it\omega} dt, \quad \text{avec } \omega, t \in \mathbb{R}, \theta \in [0, 2\pi], \\ &= [\mathcal{F}_1 p_\theta](\omega). \end{aligned}$$

Philippe CIUCIU

Problème de reconstruction 2D



(a) Objet réel

(b) Géométrie de projection

(c) 8 projections

■ **Problème** : Reconstruire (a) à partir de (c) c'est-à-dire d'un *nombre fini* K d'angles de projection, chaque projection étant elle-même échantillonnée sur $M = 2L - 1$ points :

$$p_{\theta_k}(t_l) = [\mathcal{R}f](t_l, \theta_k) \quad \text{avec } l = -L - 1, \dots, L, \quad k = 1 : K,$$

où $\theta_k = k\pi/K$, $t_l = l\rho/L$

C. Méthodes de reconstruction en tomographie axiale 2D

■ Questions :

Comment reconstruire $f(\xi_1, \xi_2)$ à partir de $p_{\theta_k}(t_l)$?

Comment construire une approximation « pertinente » de $f(\xi_1, \xi_2)$ à partir des projection $p_{\theta_k}(t_l)$?

C.1 Approches analytiques

- ② Synthèse de Fourier
- ② Rétroprojection convoluée ou filtrée

C.2 Discrétisation de la Transformée de Radon

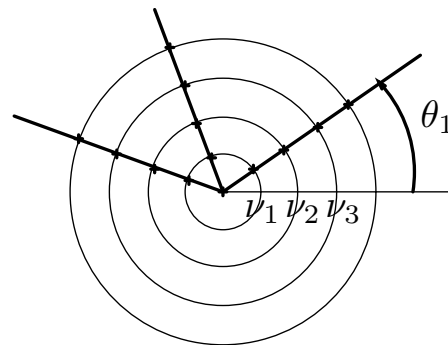
- ③ Solution inverse généralisée
- ④ Approches algébriques itératives (ART, BICAV, ...)

C.3 Approches pénalisées

Synthèse de Fourier

Théorème coupe projection : $\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall \nu \geq 0,$

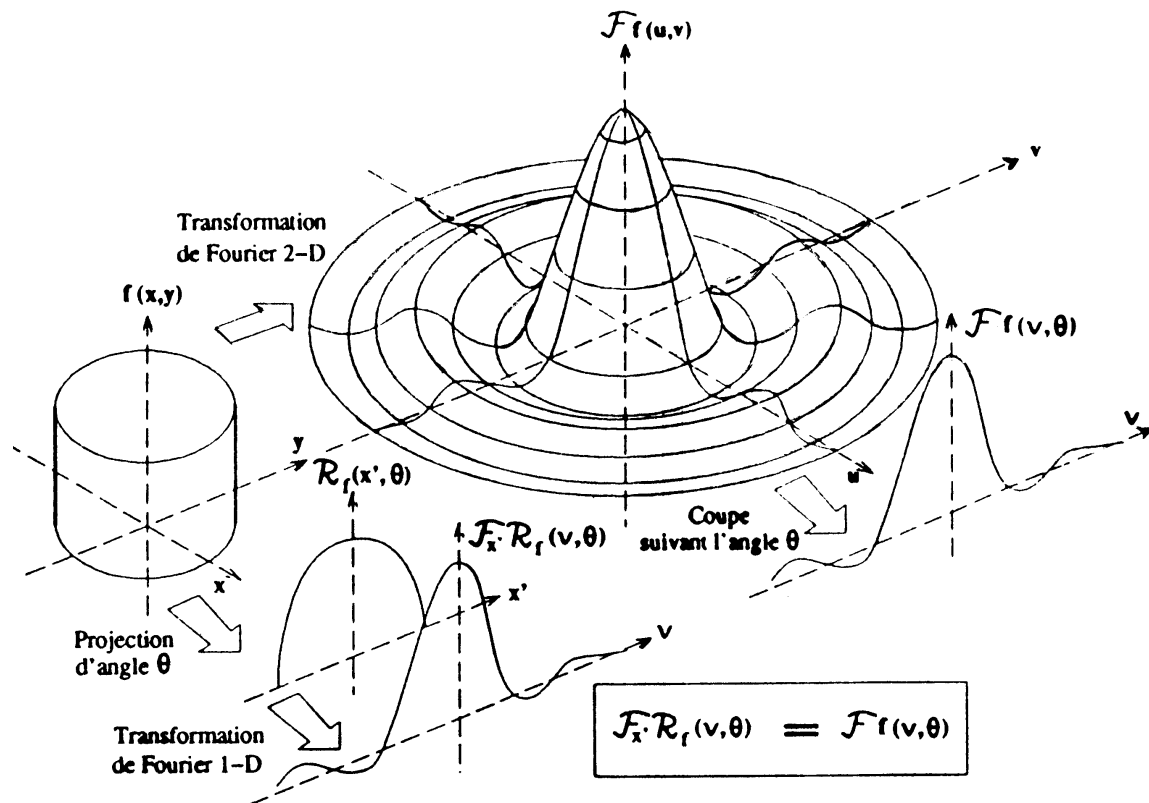
$$\hat{p}_\theta(\nu) = \hat{f}(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta) \iff [\mathcal{F}_1 p_\theta](\nu) = [\mathcal{F}_2 f](\nu \cos \theta, \nu \sin \theta)$$



Remplissage du domaine de Fourier :

Synthèse de Fourier : estimation de $f(\xi)$ à partir de l'observation partielle de sa TF.

$$\hat{f}(\nu_i \cos \theta_k, \nu_i \sin \theta_k), 1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq K \Rightarrow \hat{f}(\xi), \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$



Synthèse de Fourier

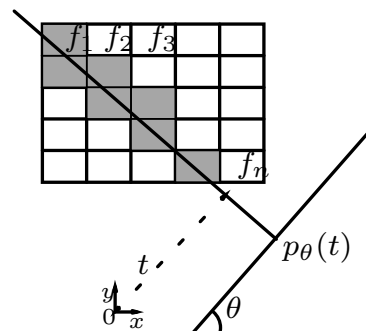
Algorithme coupe projection : $\forall \theta \in [0, 2\pi], \forall \nu \geq 0, \hat{p}_\theta(\nu) = \hat{f}(\nu \cos \theta, \nu \sin \theta)$

1. Fixer N fréquences $\nu_i \geq 0$;
2. $\forall k$, calculer la TF 1D $\hat{p}_{\theta_k}(\nu_i)$ de la k -ème projection en les fréquences ν_i ;
3. Dédire les estimées $\hat{f}(\xi)$ des valeurs de $f(\xi)$.

\Rightarrow Problème d'interpolation fréquentielle (erreurs d'interpolation de \hat{f})

— Répartition non uniforme des fréquences dans le plan de Fourier

\Rightarrow Estimation $\hat{f}(\xi)$ sur une grille discrète



Synthèse de Fourier

Hypothèse : $f(\xi)$ est une fonction de support compact.

1. Ω : bande passante définissant la résolution de la reconstruction
2. Fréquence d'échantillonnage $\nu_e = 2\pi L/\rho$ vérifiant Shannon : $\nu_e \geq 2\Omega$
3. TFD fournit L points fréquentiels distincts par projection. En posant $\nu_r = r\nu_e/2L$

$$\check{p}_{\theta_p}(\nu_r) = (2\pi)^{-1/2} \frac{\rho}{L} \sum_{l=1-L}^L p_{\theta_p}(t_l) e^{-i2\pi l \nu_r / \nu_e}, \quad r = 0, \dots, L-1.$$

4. Théorème coupe-projection $\{\check{p}_{\theta_p}(\nu_r)\}_{p=1}^P$ fournit $2L \times P$ valeurs $\{\check{f}(\nu_r \phi_p)\}_{r,p}$ qui échantillonnent radialement le domaine de Fourier
5. Interpolation sur une grille cartésienne :
 $\{\check{f}(\nu_r \phi_p)\}_{r,p} \rightsquigarrow \{\hat{f}(j, k)\}_{(j,k) \in I}$ avec $I = \{(u, v) \in \mathbb{Z}^2 : \max(|u|, |v|) \leq L\}$
6. Calcul d'une approximation de f sur une grille cartésienne par TF2D inverse (\mathcal{F}_2^{-1}) :

$$f(\xi_1, \xi_2) \approx \frac{\pi}{2\rho} \sum_{(j,k) \in I} \hat{f}(j, k) e^{i\pi(ju + kv)/L}$$

Approche analytique : difficultés méthodologiques

■ Inversion analytique de la transformée de Radon

[Joan Radon, 1917]

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{1}{t - \xi_1 \cos \theta - \xi_2 \sin \theta} \frac{\partial p_\theta(t)}{\partial t} dt d\theta$$

■ Problème mal posé [NATTERER 1986, NASHED 1981] :

- Unicité de f n'est pas garantie pour tout nombre fini de projections
 $\text{Ker} [\mathcal{R}] = \mathcal{F}^{-1} \{ \Omega^c = \{ \nu \in \mathbb{R}^2 : |\nu| > K/\rho \} \} \neq \{0\}!$
- Stabilité de f n'est pas garantie face aux perturbations sur g

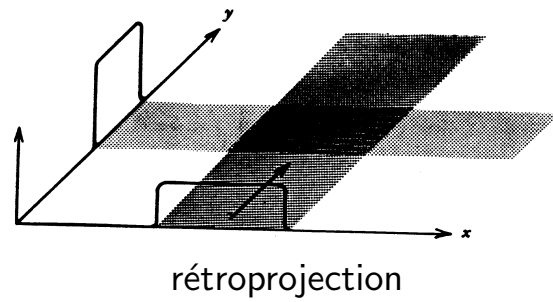
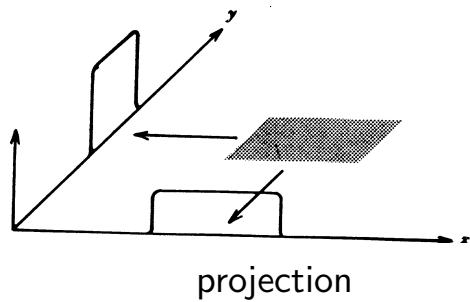
■ Méthodes de type *rétroprojections filtrées* (solutions non régularisées)

Opérateur de *rétroprojection*

Opérateur de projection : $p = \mathcal{R} f$.

Opérateur de *rétroprojection* : $g = \mathcal{R}^\# p$: intégration angulaire des projections.

$$\forall M \in \mathbb{R}^2, [\mathcal{R}^\# p](M) = \int_0^{2\pi} p_\theta(\mathbf{w}_\theta^t \mathbf{O} M) d\theta.$$



Inversion de la transformée de Radon

Formule d'inversion analytique : écriture convolutive

$$f = \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}^\# (\mathcal{I} \star \mathcal{R} f) \text{ avec } \dot{\mathcal{I}}(\nu) = |\nu|$$

⇒ Algorithme de *rétroprojection filtrée*.

1. Calculer les TF 1D des données, soit $\hat{p}_{\theta_1}(\nu), \dots, \hat{p}_{\theta_K}(\nu)$ avec $\hat{p}_{\theta_k}(\nu) = [\mathcal{F}_1 \mathcal{R}_{\theta_k} f](\nu)$;
2. Calculer $\mathcal{F}_1^{-1}(|\nu| \hat{p}_{\theta_1}(\nu)), \dots, \mathcal{F}_1^{-1}(|\nu| \hat{p}_{\theta_K}(\nu))$;
3. Rétroprojeter l'estimée de $\mathcal{I} \star \mathcal{R} f$.

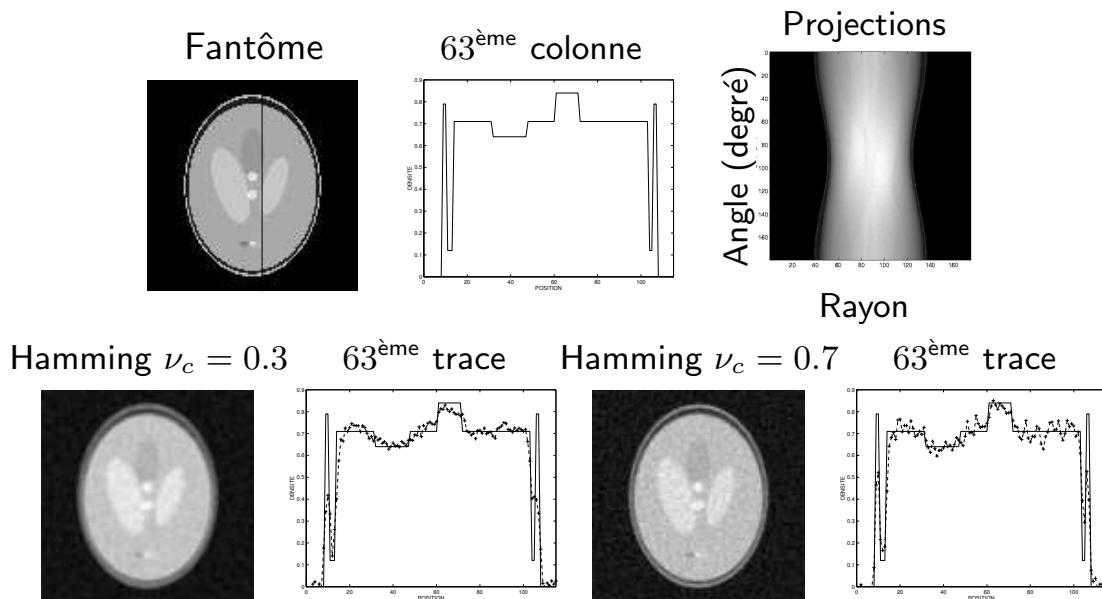
■ Remarques :

- Pas d'interpolation fréquentielle.
- Mise en œuvre en temps réel : traitement séquentiel des données, suivant l'ordre d'acquisition aux angles $\theta_1, \dots, \theta_K$.

Réglage du compromis biais-variance de la RPF

■ Fantôme de Shepp et Logan : 151 projections, 175 rayons

Bruit blanc gaussien $\sigma=0,008$; ν_c : fréquence de coupure du filtre dans la RPC



Discretisation de la transformée de Radon

■ Expansion en série [HERMAN 1980]

$$f(\xi) \approx f_N(\xi) = \sum_{n=1}^N f_n b_n(\xi), \forall n = 1 : N, b_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

■ Résolution d'un problème d'inversion numérique

$$\forall (l, k) \in \{-L+1, \dots, L\} \times \{1, \dots, K\},$$

$$p_{\theta_k}(t_l) = \int_{\mathbb{R}^2} \delta(t_l - \langle \xi, \theta_p \rangle) f_N(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^N f_n \int_{\mathbb{R}^2} \delta(t_l - \langle \xi, \theta_p \rangle) b_n(\xi) d\xi$$

$$\mathbf{f} = [f_1, \dots, f_N]^t \in \mathbb{R}^N$$

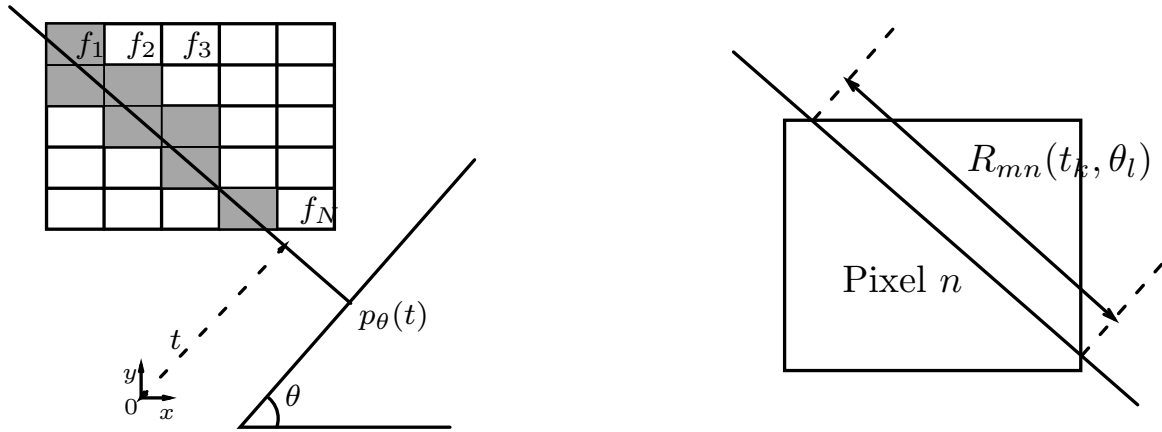
$$\mathbf{p} = [p_{\theta_1}(t_{-L+1}), \dots, p_{\theta_1}(t_L), p_{\theta_2}(t_{-L+1}), \dots, p_{\theta_K}(t_L)] \in \mathbb{R}^M, M = 2L \times K$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{f}}$$

$$\text{Posons } m = 2L(p-1) + l + L, \text{ alors : } \mathbf{R}_{mn} = \int_{\mathbb{R}^2} \delta(t_l - \langle \xi, \theta_p \rangle) b_n(\xi) d\xi$$

\Rightarrow Contribution de b_n dans rayon l de la projection p

Modélisation discrète des mesures



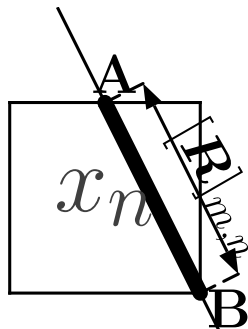
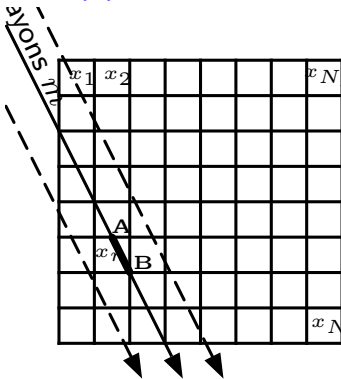
■ **Discrétisation** du domaine en N pixels f_1, \dots, f_N .

■ **Opérateur de projection continu** $p_\theta(t) = \int_{\mathcal{L}_{t,\theta}} f(\xi_1, \xi_2) dl$.

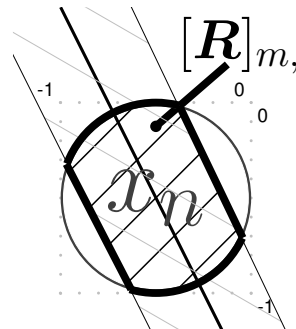
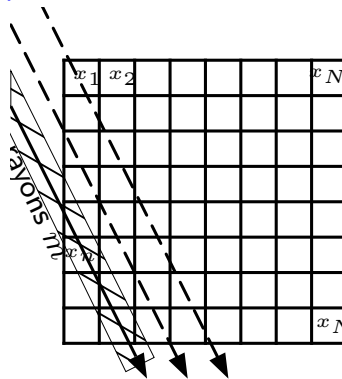
■ **Opérateur de projection discret** $\forall (l, k) \in \{-L+1, \dots, L\} \times \{1, \dots, K\}$,

$$m = 2L(p-1) + l + L, \quad p_{\theta_k}(t_l) = p_m = \sum_{1 \leq n \leq N} R_{mn}(t_l, \theta_k) f_n.$$

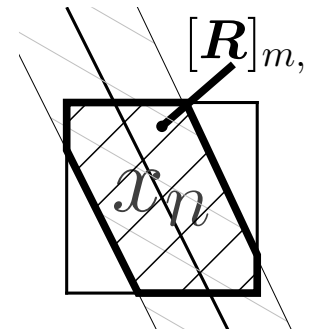
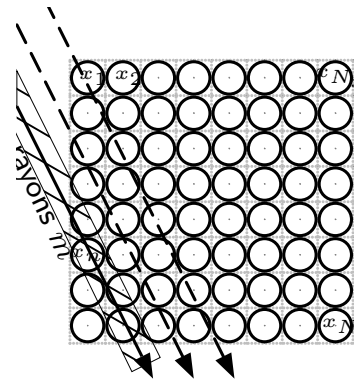
(a) Pixel carré



(b) Faisceau « carré bande »



(c) Faisceau « cylindrique bande »



Modèles (b)-(c) à fonction de faisceau ψ : $R_{mn} = \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t_l - \langle \xi, \theta_p \rangle) b_n(\xi) d\xi$

Projection et rétroprojection discrètes

■ Une projection : $p_{\theta_k}(t_l) = p_m = \sum_{1 \leq n \leq N} R_{mn}(t_l, \theta_k) f_n.$

Opérateur de projection : $\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{f}$, $\mathbf{R} = \{R_{mn}\}$, $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$.

■ Une rétroprojection : $\tilde{g}_n = \sum_{1 \leq m \leq M} R_{mn}(t_l, \theta_k) p_m.$

Opérateur de rétroprojection : $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{R}^t \mathbf{p}.$

■ *Remarques :*

— K images projection de taille $2L$ ($M = 2L \times K$) $\Rightarrow \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \dots \\ \mathbf{R}_K \end{bmatrix}.$

— \mathbf{R} est une matrice creuse.

Méthodes algébriques de reconstruction

■ Modélisation des données radiographiques :

$$\mathbf{y} = \mathbf{p} + \varepsilon = \mathbf{R}\mathbf{f} + \varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_b^2 \mathbf{I}_M)$$

ε : erreurs de modélisation, de discrétisation, et bruit d'instrumentation

■ Deux types d'approches

- Solutions réalisables du système $\mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{f}$

$$\text{Ens. convexe des solutions : } S = \{\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N \mid \mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{0}\}$$

\Rightarrow Méthode numérique type POCS (*Projected on Convex Subsets*)

En pratique, $\mathbf{y} \notin \text{Im}[\mathbf{R}] \Rightarrow S = \emptyset!$ (système inconsistant)

- Inversion au sens des moindres carrés : résoudre $\min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{f}\|^2$

\Rightarrow Solution inverse généralisée

Schémas itératif type POCS

■ **Algebraic Reconstruction Technique (ART)** [GORDON et coll. 1970]

- Principe : trouver \mathbf{f} tel que $\mathbf{R}\mathbf{f} = \mathbf{y}$ par projections successives

$$\mathbf{f}^{(k;m)} = \mathbf{f}^{(k;m-1)} + \lambda^{(k)} \frac{y_m - \mathbf{r}_m^t \mathbf{f}^{(k;m)}}{\|\mathbf{r}_m\|^2} \mathbf{r}_m,$$

avec \mathbf{r}_m^t : $m^{\text{ième}}$ ligne de \mathbf{R} , $m = 1 : M$, $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k,M)}$ et $\lambda^{(k)} \rightarrow 1$

■ **Component Averaging (CAV)** [CENSOR et coll. 2001]

Remise à jour simultanée : $\mathbf{f}^{(k)} = \mathbf{f}^{(k-1)} + \lambda^{(k)} \mathbf{R}^t \mathbf{W} (\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{f}^{(k-1)})$

\Rightarrow Algorithme du gradient à pas $\lambda^{(k)}$ appliqué à

$$J(\mathbf{f}) = \left\| \mathbf{W}^{-1/2} (\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{f}) \right\|^2, \quad \mathbf{W} : \text{matrice diagonale carrée}$$

Block Iterative Component Averaging (BICAV)

[CENSOR et coll. 2001, CENSOR et ELFVING 2001]

- Partitions des données (projections bruitées)

$$j = 1 : J, B_j \subset \mathbb{N}_M^* = \{1, \dots, M\} \text{ de cardinal } \text{Card}[B_j] = M_j \text{ tels que}$$

$$\forall m \in \mathbb{N}_M^*, \exists j_0 \in \mathbb{N}_J^*, m \in B_{j_0} \implies \mathbf{R}_j^t = \left(\mathbf{r}_j^1 \mid \dots \mid \mathbf{r}_j^{M_j} \right) \in \mathbb{R}^{N \times M_j}$$

- Mise à jour complète des inconnues en utilisant cycliquement J blocs de données

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{f}^{(k;0)} = \mathbf{f}^{(k-1)}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}_J^*, \quad \mathbf{f}^{(k;j)} = \mathbf{f}^{(k;j-1)} + \lambda^{(k)} \mathbf{R}_j^t \mathbf{W}_j^{-1} \left(\mathbf{y}_j - \mathbf{R}_j \mathbf{f}^{(k;j-1)} \right)$$

$$\mathbf{W}_j = \text{diag} \left[\left\| \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{a}_m^1 \right\|^2, \dots, \left\| \mathbf{S}^{1/2} \mathbf{a}_m^{M_j} \right\|^2 \right] \in \mathbb{R}^{M_j \times M_j}, \quad \mathbf{S} = \text{diag}_{n=1:N} \left[\sum_{l=1}^N \mathbf{1}_{(\mathbf{R}_j)_n^t \neq 0} \right]$$

- Itération complète : $k \rightarrow k+1$ après J mises à jour : $\mathbf{f}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k,J)}$

Analyse de convergence

■ **Cas consistant** : convergence assurée pour BICAV et ART [CENSOR et coll. 2001]

$$\text{si } \forall k, 0 < \epsilon_1 < \lambda^{(k)} < \epsilon_2 < 2$$

- Vitesse de convergence fonction
 - du choix de $\lambda^{(k)}$ pour toute méthode
 - du choix de l'ordre des projections dans BICAV

■ **Cas inconsistant** [CENSOR et coll. 2001]

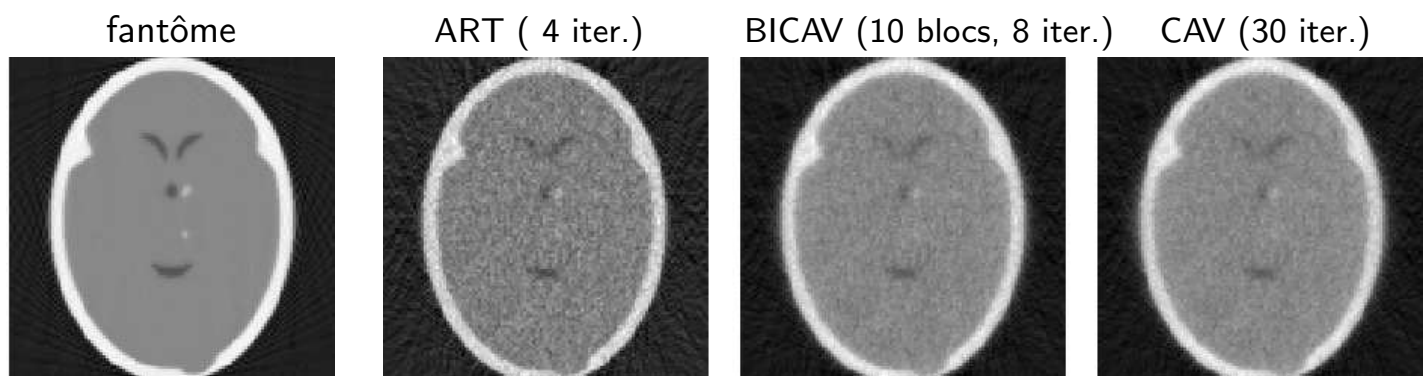
- comportement asymptotique cyclique pour ART
- CAV comme gradient à pas fixe : cv si $\mathbf{f}^{(0)} \in \text{Ker} [\mathbf{R}]^\perp$

■ **Coût d'implantation**

- \mathbf{R} très creuse (<1% des éléments $R_{mn} \neq 0$!)
- Coût part itération comparable à une RPC

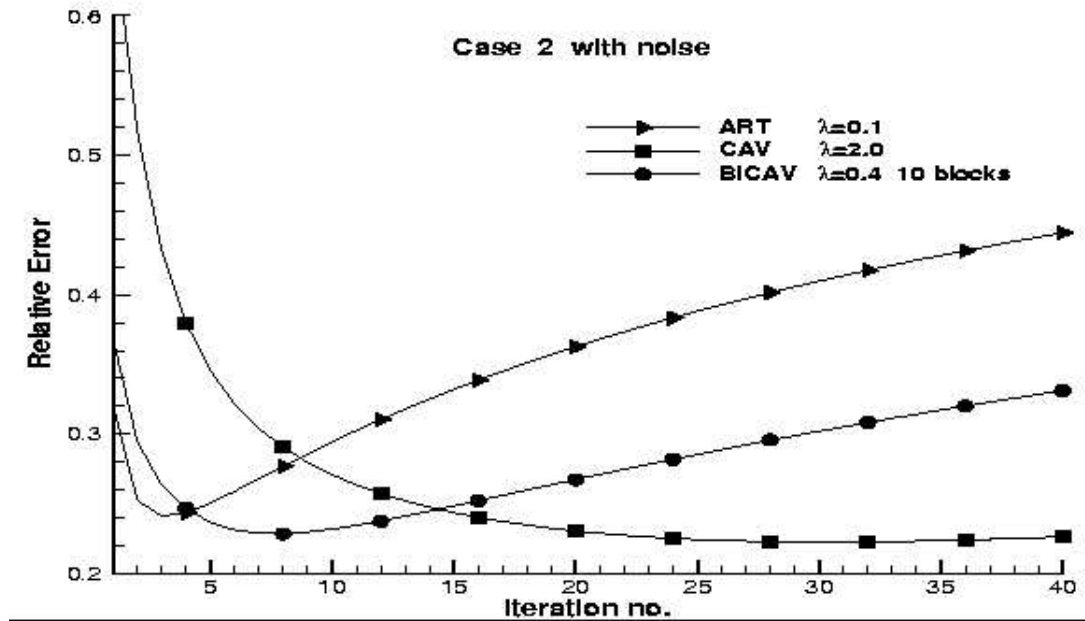
Comparaison des solutions algébriques

■ **Données synthétiques bruitées**



Comparaison des solutions algébriques

Mesure de l'erreur relative



Inversion au sens des « moindres carrés »

Recherche d'une solution au sein de $S_{MC} = \{f \in \mathbb{R}^N, \min_f \|y - Rf\|^2\}$

- En dimension finie, S_{MC} est fermé, convexe [ROCKAFELLAR 1970] :

$$\hat{f} \in S_{MC} \iff R^t y = R^t R \hat{f}$$

$$\text{Ker}[R] \neq \{0\} \implies \text{Im}[R^t R] = r < N$$

- Grand nombre de pixels $N \implies$ problème sous déterminé.

Unicité de la solution de norme minimale : $\exists! f^\dagger \in \mathbb{R}^N \mid f^\dagger = \arg \min_{f \in S_{MC}} \|f\|^2$

- $f^\dagger \in \text{Ker}[R]^\perp$ et s'écrit à l'aide de la décomposition en valeurs singulières (SVD)
- $\{u_n\}_{n=1}^M, \{v_n\}_{n=1}^N$ bases orthonormées de $\mathbb{R}^M, \mathbb{R}^N, \{\sigma_j > 0 \searrow\}_{j=1}^r$:

$$Rv_j = \sigma_j u_j \quad R^t u_j = \sigma_j v_j \quad \Rightarrow \quad R^t R v_j = \sigma_j^2 v_j, \quad R R^t u_j = \sigma_j^2 u_j$$

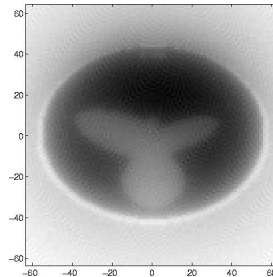
Comparaisons de solutions inverses généralisées

Peu de projections, angles limités \Rightarrow Mauvais conditionnement de \mathbf{R} .
 \Rightarrow Solution \mathbf{f}^\dagger instable numériquement.

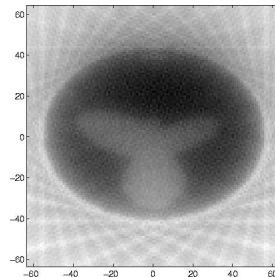
(a) Objet réel



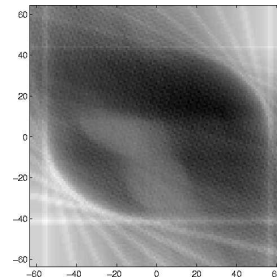
(b) 64 projections



(c) 16 projections
sur $[0, \pi]$



(d) 8 projections
sur $[0, \pi/2]$



Interprétation des approches algébriques

■ Solutions **non régularisées**

■ Extensions pénalisées possibles [HERMAN et LENT 1976]

- Approche « spatiale » : minimiser $\|\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{f}\|^2 + \lambda\mathcal{P}(\mathbf{f})$
- Approche « fréquentielle » : minimiser $\|\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{f}}\|^2 + \lambda\mathcal{P}(\hat{\mathbf{f}})$

Approche pénalisée : formulation générique

Moindres carrés pénalisés :

définir $J(\mathbf{f}; \lambda) = \|\mathcal{H}(\mathbf{f}) - \mathbf{y}\|^2 + \lambda \mathcal{P}(\mathbf{f})$

rechercher $\hat{\mathbf{f}}_\lambda \in \{\mathbf{f} \in X : \min J(\mathbf{f}; \lambda)\}$

\mathcal{H} : modèle physique (opérateur de projection, flou, etc);

\mathcal{P} : fonction de pénalisation (régularisation);

$\hat{\mathbf{f}}_\lambda$, \mathbf{y} et λ : image reconstruite, observations, et paramètres libres;

X : contraintes séparables (ex. $X = \{0, \dots, 255\}$, \mathbb{R}^N , ou \mathbb{R}_+^N).

Construction de $\mathcal{H}(\cdot)$?

Choix de $\mathcal{P}(\cdot)$?



Taille du problème numérique, convexité, (hyper)paramètres.

Philippe CIUCIU

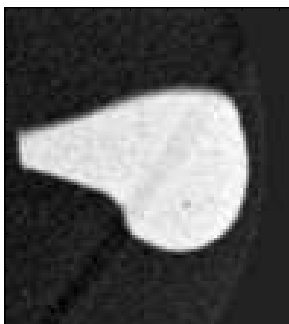
Pénalisation par modèle « $\ell_2\ell_1$ » (i/ii)

Objectif

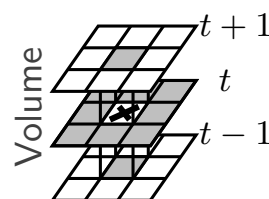
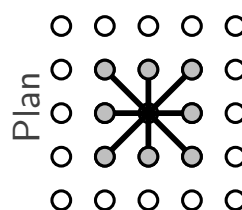
- rendre l'inversion robuste,
- favoriser certains comportements dans l'image.

En imagerie médicale, on souhaiterait

« favoriser les images localement douces + bords francs ».



Pénaliser les \neq entre pixels voisins



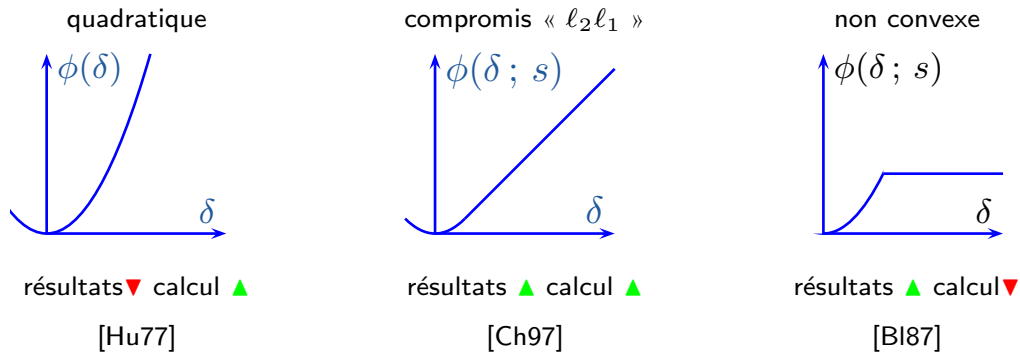
Philippe CIUCIU

Pénalisation par modèle « $\ell_2\ell_1$ » (ii/ii)

$$\mathcal{P}(\mathbf{f}; s) = \sum_{c \in \mathcal{C}} \phi(\delta_c; s), \quad \delta_c = \mathbf{d}_c^t \mathbf{f}$$

\mathbf{d}_c : différence entre elts $c^{\text{ème}}$ paire pixels voisins

Compromis efficacité / complexité pb. optimisation

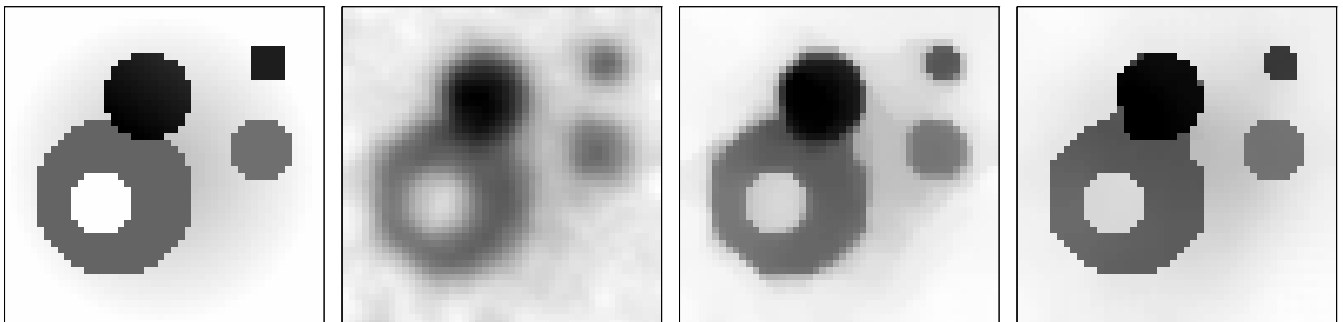


Philippe CIUCIU

Reconstructions 2D par approche pénalisée

■ Comparaison des fonctions potentielles

$$\mathcal{J}(\mathbf{f}; \lambda) = \|\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{f}\|^2 + \lambda \sum_{i \sim j} \phi(f_i - f_j),$$



Objet réel f^*

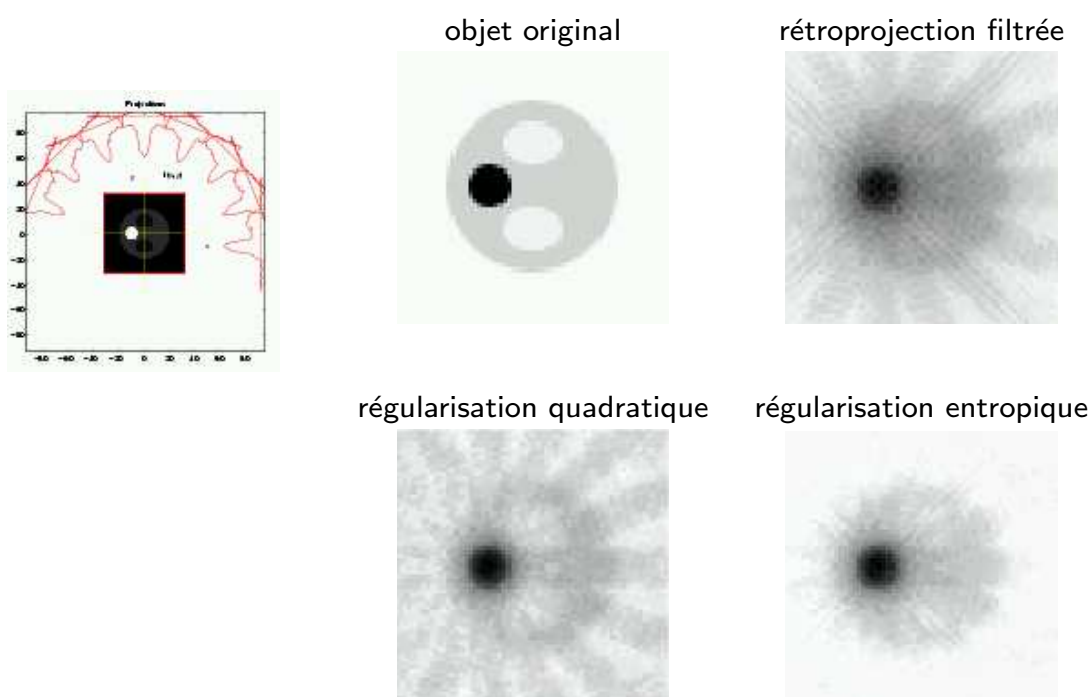
\hat{f}_2

\hat{f}_{21}

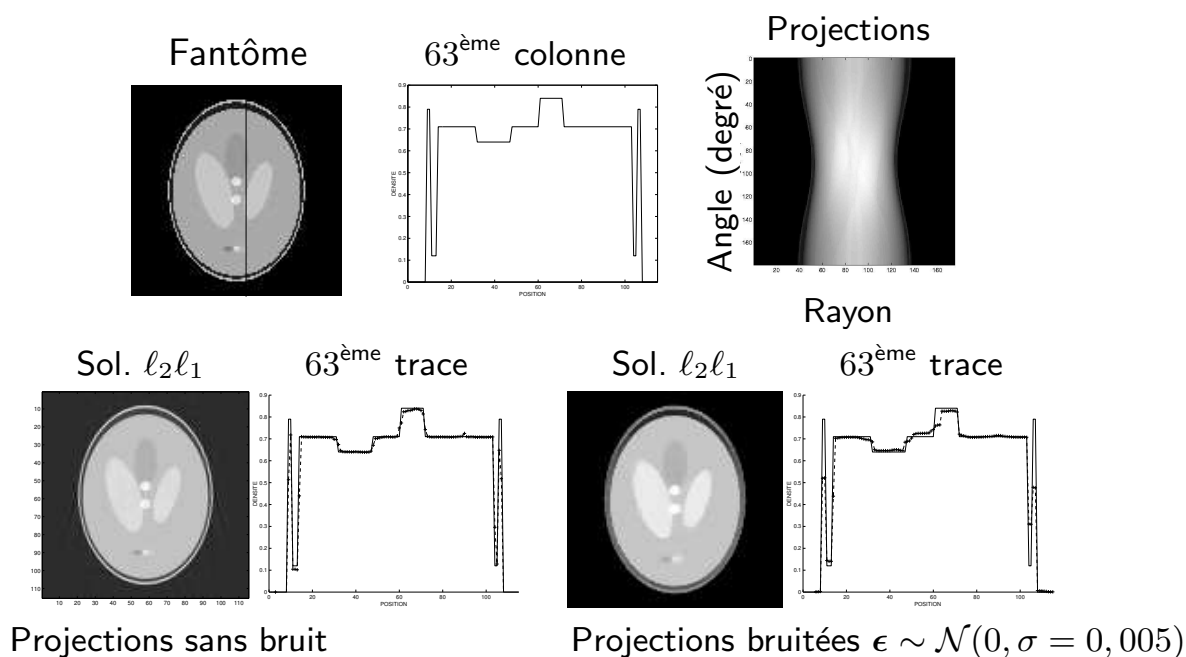
\hat{f}_{20}

$$\phi_2(t) = t^2, \quad \phi_{21}(t) = \sqrt{x^2 + T^2} - T, \quad \phi_{20}(t) = \min(t^2, T^2)$$

Reconstructions 2D par différentes méthodes



Philippe CIUCIU

Comparaisons de solutions pénalisées $\ell_2\ell_1$ ■ **Fantôme de Shepp et Logan** : 151 projections, 175 rayons

Effet d'une excursion angulaire incomplète

■ angle de projection $\theta \in [0, 5\pi/6]$; $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma = 0,001)$

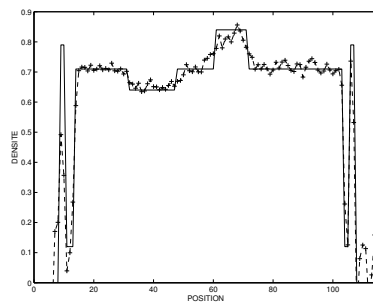
RPC $\nu_c = 0,8$



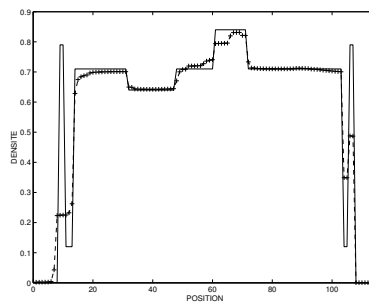
Sol. $\ell_2\ell_1$



63^{ème} trace



63^{ème} trace



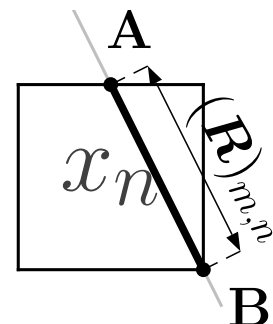
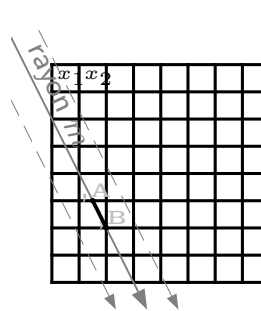
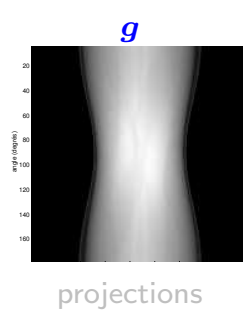
III. Vers une approche pénalisée en tomographie

41

Synthèse : Un modèle d'observation axial [Ka87]



\leadsto

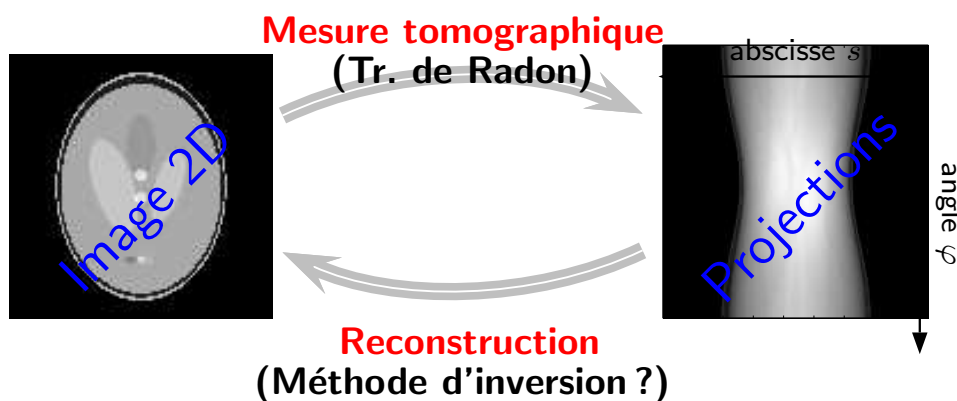


$$p = Rf$$

Opérateur R : *T. de Radon d'une distribution « pixelisé »*

- linéaire, creux, de grande taille, mal conditionné ;
- prise en compte de l'épaisseur, rayons divergents...

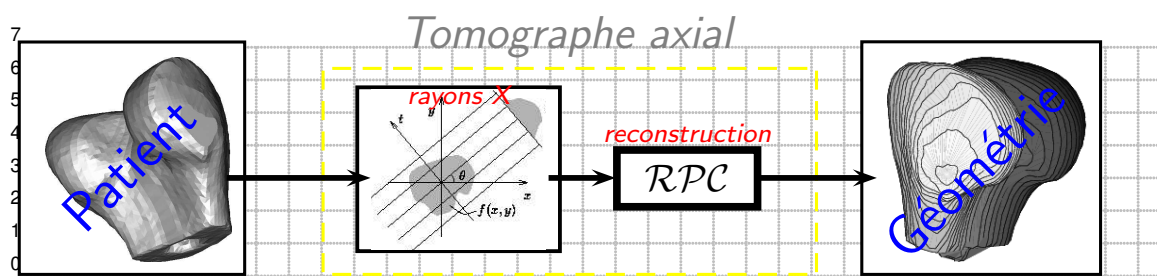
Inversion en tomographie axiale (i/ii)



✎ **Reconstruction = problème inverse *mal posé***
 Information additionnelle nécessaire pour
 déterminer une solution **unique** et **robuste**

Philippe CIUCIU

Inversion en tomographie axiale (ii)



Efficacité de la RPC ?

- Sensible au contexte de mise en œuvre,
- Régularisation par suppression des HF.,

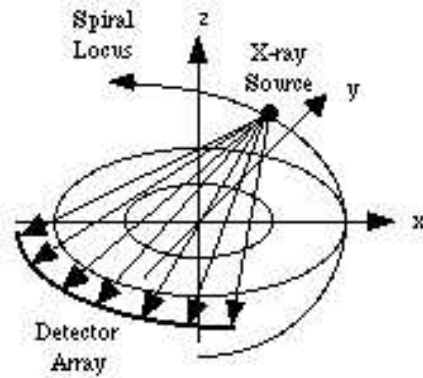
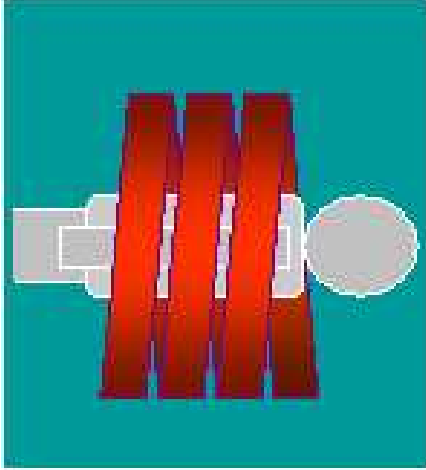
▲ **Clinique** (cadre favorable \leadsto dose élevée !!)

▼ **Métrologique** (suppression des hautes fréquences !!)

Philippe CIUCIU

D. Tomodensitométrie 3D

- Coupe par coupe, scanners multi-barettes ($512 \times 512 \times 800$ voxels).
- Coupe par coupe + interpolation (continuité inter-coupe).
- Reconstruction 3D directe (Imagerie médicale & CND).
- Modalité : tomographie hélicoïdale.



D.1 Reconstruction « 2,5D »

- **Acquisition de radiographies 2D suivant les plans** ($z = z_1$), \dots , ($z = z_T$).
- T reconstructions 2D de $f(x, y, z_1)$, \dots , $f(x, y, z_T)$:

$$\hat{f}_t = \arg \min \left\{ \|y_t - R_t f_t\|^2 + \lambda \sum_{i \sim j} \phi(f_{i,t} - f_{j,t}) \right\}.$$

- **Continuité inter-coupes : reconstruction simultanée de** $f(x, y, z_1)$, \dots , $f(x, y, z_T)$

$$\hat{f} = \arg \min \left\{ \sum_{t=1}^T \|y_t - R_t f_t\|^2 + \lambda \sum_{i \sim j} \phi(f_{i,t} - f_{j,t}) + \lambda \sum_i \phi(f_{i,t+1} - f_{i,t}) \right\}.$$

Algorithme par blocs, estimations successives de $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_T$.

D.2 Tomographie hélicoïdale

■ Intérêts d'un échantillonnage hélicoïdal (milieu années 80)

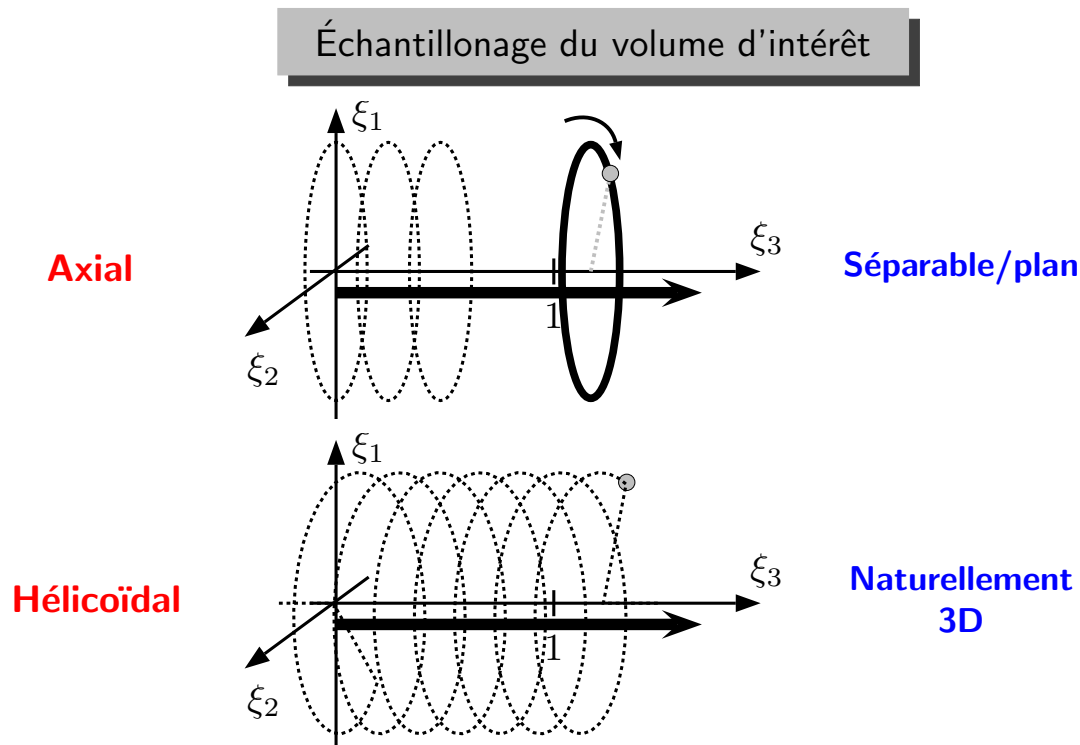
- Mouvement continu de la table d'examen : suppression des « stop » & « go »
- Réduction du temps d'acquisition \Rightarrow diminution de la dose de rayons X
- Imager des structures dynamiques : coeur, thorax
- Réduction des artéfacts de mouvement
- Distribution de dose administrée au patient plus uniforme

\Rightarrow Examen moins invasif/ionisant

■ Inconvénients

- Diminution du Rapport Signal sur Bruit (RSB)
- Artéfacts de reconstruction : perte de séparabilité

\Rightarrow Reconstruction d'un volume 3D \neq suite de reconstructions 2D



$$\bar{\varphi} = \omega t, \text{ pas d'hélice : } P \Rightarrow \xi_3 = \frac{\bar{\varphi}}{2\pi} P, \varphi = \bar{\varphi} [2\pi]$$

Discrétisation du volume d'intérêt \Rightarrow angles de projection $\{\bar{\varphi}^i\}_{i=1}^T$ fixés (T plans)

Technique de reconstruction standard

■ Création d'un jeu de données consistantes [CRAWFORD et KING 1990]

- Définition d'une série de plans axiaux de reconstruction (PR)
 - Pour chaque PR, création d'un nouveau jeu de projection par interpolation
- ⇒ Emploi d'une **fonction d'interpolation et de la RPC**

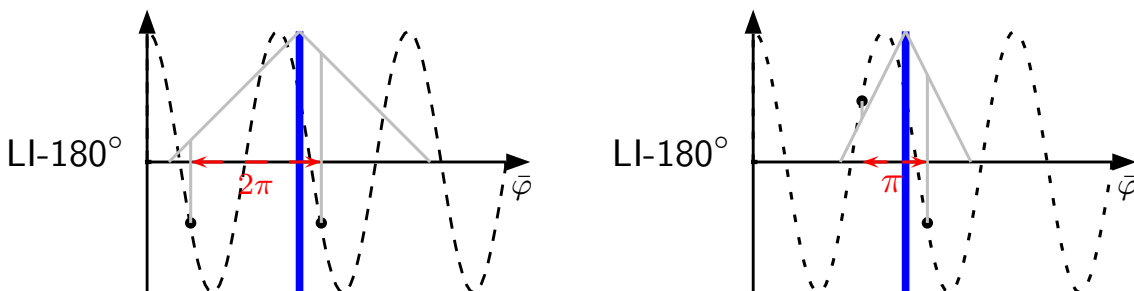
■ Choix de la fonction interpolatrice

- Interpolation *linéaire full-scan* (LI-360°)
 - ♣ Projection du PR = *somme pondérée* de 2 vues distantes de 2π
- Interpolation *linéaire half-scan* (LI-180°)
 - ♣ Projections d'angles opposés (différence de π) **identiques**
- Autres choix pour filtrer le volume reconstruit [HU et SHEN 1998]

Procédé usuel d'interpolation

■ Objectif : recréer un jeu « axial consistant » de projections

- Pseudo-projection axiale d'angle $\varphi = \bar{\varphi} [2\pi]$: $\tilde{p}_\varphi = \gamma p_{\varphi_1} + \bar{\gamma} p_{\varphi_2}$, $\bar{\gamma} = 1 - \gamma$.
- Interpolation LI-360° : $\varphi_1 = \bar{\varphi}_0 + \Delta\varphi$, $\varphi_2 = \varphi_1 - 2\pi$, $\Delta\varphi = \bar{\varphi} - \varphi$
- Interpolation LI-180° : $\varphi_1 = \bar{\varphi}_0 + \Delta\varphi$, $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi$



Technique de reconstruction standard

■ Modélisation paramétrique 3D

$$f(\xi) = f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \approx \sum_{n=1}^N f_n b_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

- Choix des b_n : indicatrice de voxels rectangulaires ou cylindriques
- Reconstruction 3D : Estimation de $\mathbf{f} = \{\mathbf{f}_t \in \mathbb{R}^L\}_{t=1}^T$

■ Minimisation d'un critère pénalisé 3D

Recherche d'une solution $\mathbf{f}_\lambda \in \{\mathbf{f} \in X \subset \mathbb{R}^N : \min Jc(\mathbf{f}; \lambda)\}$

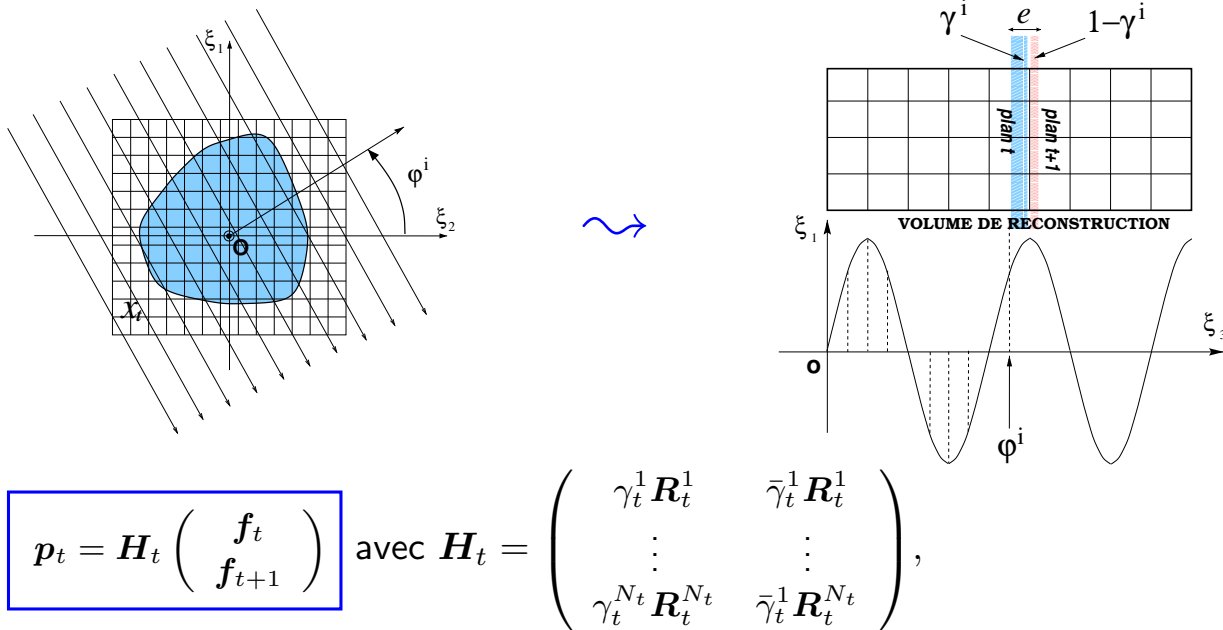
$$\mathcal{J}(\mathbf{f}; \lambda) = \|\mathcal{H}(\mathbf{f}) - \mathbf{y}_h\|^2 + \alpha \mathcal{P}(\mathbf{f}; s)$$

avec $\lambda = (\alpha \geq 0, s)$, $\mathbf{y}_h = \mathbf{p}_h + \epsilon = \mathcal{H}(\mathbf{f}) + \epsilon$

$\mathbf{p}_h \in \mathbb{R}^M$: projections acquises en mode hélicoïdal

⇒ Nécessité de spécifier un modèle pour l'opérateur de projection \mathcal{H}

Construction d'un modèle d'observation hélicoïdale



γ_t^j : proportion faisceau dans plan de voxels \mathbf{f}_t lors de la projection d'angle φ_t^j ,

\mathbf{R}_t^j : opérateur de projection *axial* d'angle φ_t^j

Modèle global d'observation hélicoïdale

$$\mathbf{p}_h = \mathcal{H}(\mathbf{f}) = \mathbf{H}\mathbf{f} \quad \mathbf{p}_h = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{H}_T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{M \times N}$$

■ Remarques

- Modèle intrinsèquement 3D (recouvrement entre blocs contigus)
- \mathbf{H}_t sans structure paramétrique particulière
- Stockage de \mathbf{H} rapidement délicat ($\approx 10^{15}$ éléments non nuls)

Forme paramétrée du modèle \mathbf{H}

Inversion par MCP \Rightarrow Accès aux éléments de \mathbf{H}
Couramment 10^{15} éléments!!

■ **Hypothèse** : pas de l'hélice $P = Ke$ (e : épaisseur d'un plan de voxel)

\mathbf{H} — échantillonnage qq.

\mathbf{H} — « P invariante »

$$\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{H}_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{H}_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{H}_Q} \end{bmatrix}$$

- Creuse.

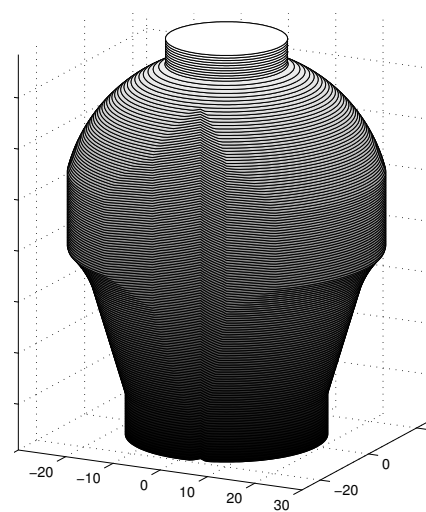
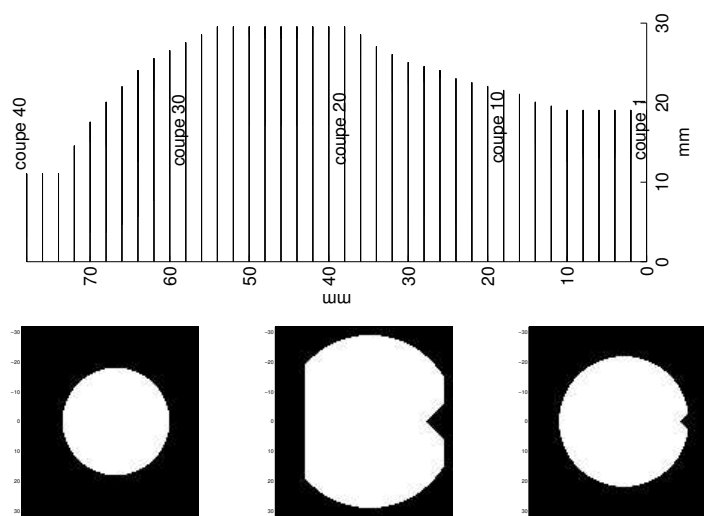
$$\begin{bmatrix} \boxed{\widetilde{\mathbf{H}}_r} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{\mathbf{H}_r} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \cdots & \mathbf{0} & \boxed{\widetilde{\mathbf{H}}_r} \end{bmatrix}$$

- Creuse et quasi bloc-circulante.

\mathbf{H}_r regroupe K matrices $\{\mathbf{H}_t\}_{t=1}^K$ définissant la projection sur un tour

- « P invariance »
- \mathbf{H} décrit par un ensemble réduit de paramètres,
 - nécessite simplement d'ajuster le volume d'intérêt.

Tests sur données synthétiques (i/iii)

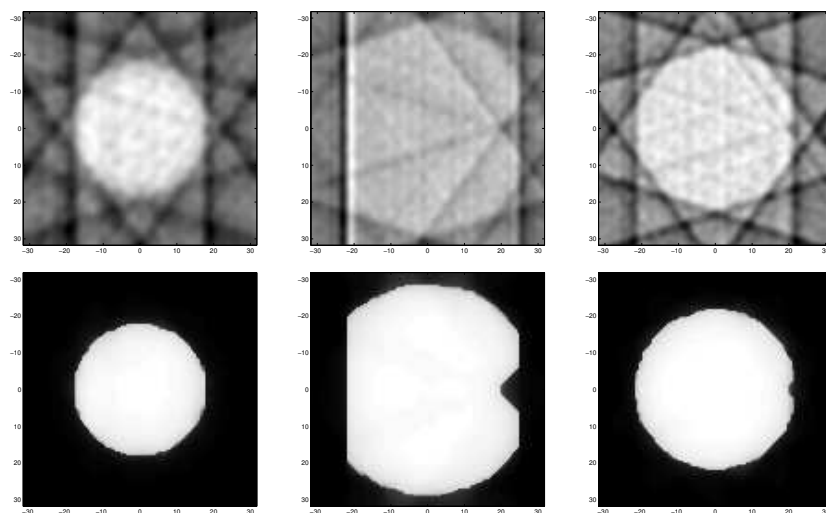


fantôme de 40 coupes de 127×127 pixels (> 640000 variables)

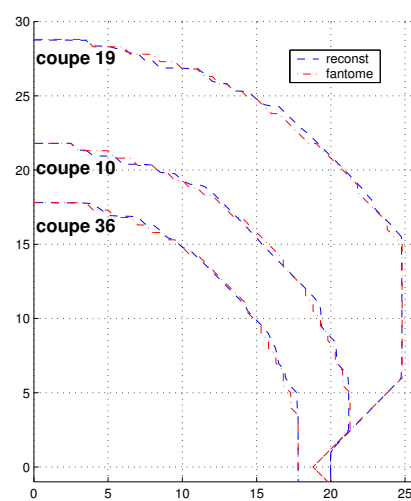
Tests sur données synthétiques (ii/iii)

Projections bruitées (additif gaussien centré, $RSB \approx 30\text{dB}$)

$RPC + LI - 180^\circ$



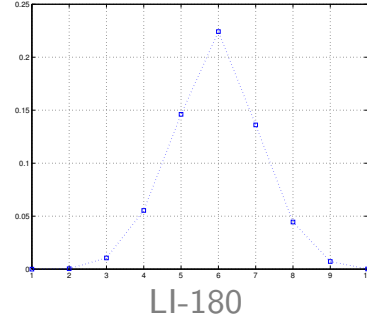
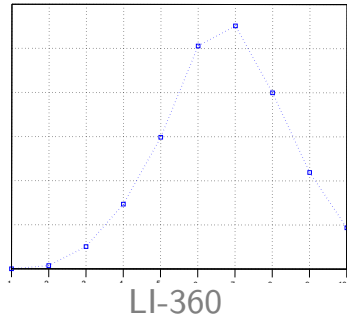
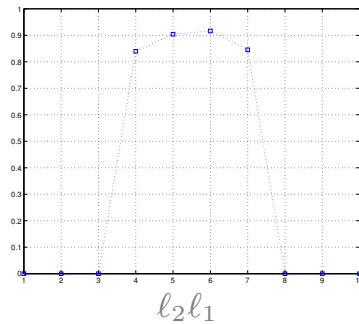
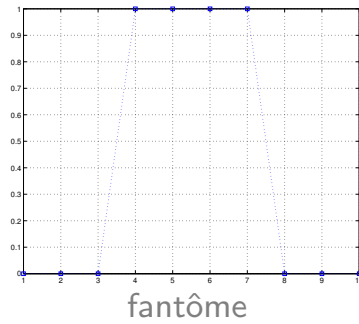
approche pénalisée ($\ell_2\ell_1$)



temps de reconst. ≈ 160 s

Tests sur données synthétiques (iii/iii)

« SSP » : ↗ résolution dans l'axe du tomographe.



III. Vers une approche pénalisée en tomographie

57

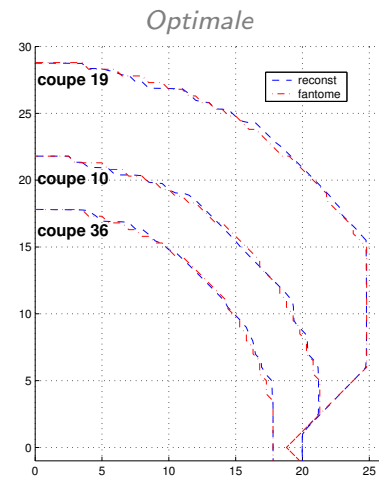
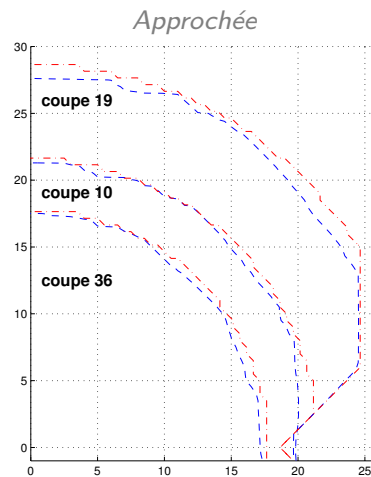
Approximation du modèle d'observation

Objectif : réduire le coût des reconstructions hélicoïdales pénalisées.

Moyen : estimer approximativement les T plans successifs.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{t-1} \\ y_t \end{bmatrix}}_{\underline{y}_t} \approx \underline{H}_t \underbrace{\begin{bmatrix} x_{t-1} \\ x_t \\ x_{t+1} \end{bmatrix}}_{\underline{x}_t},$$

\underline{H}_t regroupe $\{H_{t-1}, H_t\}$.



Obtenu en minimisant $J_t(\underline{x}_t) = \|\underline{y}_t - \underline{H}_t \underline{x}_t\|^2 + \alpha \mathcal{P}(\underline{x}_t)$.

En résumé...

■ Approche pénalisée en tomographie hélicoïdale

- Construction d'un modèle d'observation
- Utilisation d'une forme paramétrée
- Conception d'une version « rapide » (diagnostic)

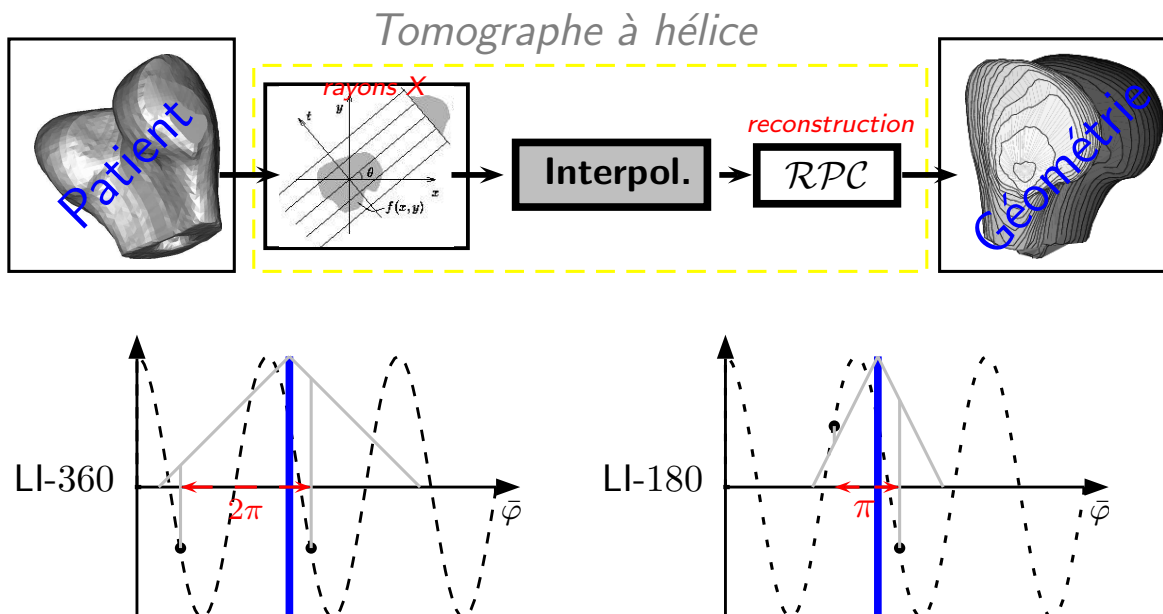
(▲) Performances sur données synthétiques

- Amélioration significative de qualité
(robustesse, diminution des artefacts, gain de résolution)
- Bons résultats pour la version « rapide »
- ↘ dose administrée au patient (diagnostic)

(▶) Coût d'implantation élevé

Philippe CIUCIU

Inversion en tomographie hélicoïdale (i/ii)

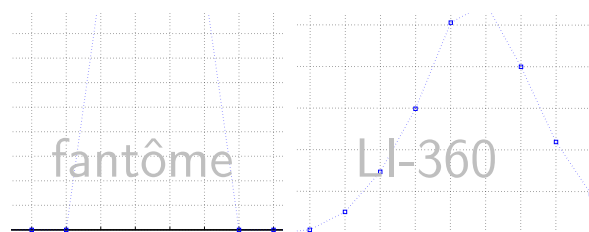


Inversion en tomographie hélicoïdale (ii/ii)

Interpolation + RPC \Rightarrow ▼ précision...

- problème 2D séparable (▲ mise en œuvre),
- interpolation \Rightarrow *a priori* continuité spatiale,
- sensibilité vis-à-vis de la *RPC* (angles limités).

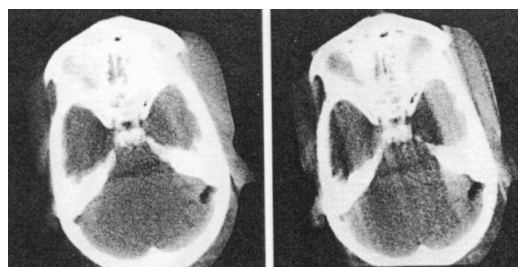
« Slice Sensibility Profile »



▼ perte de résolution

axial

hélice



▼ artefacts

- [ALLAIN 2002] M. ALLAIN (2002), *Approche pénalisée en tomographie hélicoïdale. Application à la conception d'une prothèse personnalisée du genou*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay.
- [CENSOR et ELFVING 2001] Y. CENSOR et T. ELFVING (2001), « Block-Iterative Algorithms with Diagonally Scaled Oblique Projections for the Linear Feasibility », *Accepté dans SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*.
- [CENSOR et coll. 2001] Y. CENSOR, D. GORDON et R. GORDON (2001), « BICAV : a block-iterative parallel algorithm for sparse systems with pixel-related weighting », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **20**, pages 1050–1060.
- [CRAWFORD et KING 1990] C. R. CRAWFORD et K. F. KING (1990), « Computed tomography scanning with simultaneous patient translation », *Med. Phys.*, **17**, 6, pages 967–982.
- [GORDON et coll. 1970] R. GORDON, R. BENDER et G. T. HERMAN (1970), « Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography », *Journal of Theoretical Biology*, **29**, pages 471–481.
- [HERMAN 1980] G. T. HERMAN (1980), *Image reconstruction from projections. The fundamentals of computerized tomography*, Academic Press, New York, ny, USA.
- [HERMAN et LENT 1976] G. T. HERMAN et A. LENT (1976), « A Computer Implementation of a Bayesian Analysis of Image Reconstruction », *Information and Control*, **31**, pages 364–384.
- [HU et SHEN 1998] H. HU et Y. SHEN (1998), « Helical CT Reconstruction with Longitudinal Filtration », **25**, 11, pages 2130–2138.
- [2001] J. IDIER, éditeur (2001), *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*, Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès, Paris.
- [KAK et SLANEY 1987] A. C. KAK et M. SLANEY (1987), *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press, New York, ny, USA.
- [NASHED 1981] M. Z. NASHED (1981), « Operator-theoretic and computational approaches to ill-posed problems with applications to antenna theory », *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **29**, pages 220–231.
- [NATTERER 1986] F. NATTERER (1986), *The mathematics of computerized tomography*, John Wiley.
- [NATTERER 1999] F. NATTERER (1999), « Numerical Methods in Tomography », dans *Acta Numerica*, volume 8, Cambridge University Press.
- [ROCKAFELLAR 1970] R. T. ROCKAFELLAR (1970), *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press.
- [SOUSSEN 2000] C. SOUSSEN (2000), *Reconstruction 3D d'un objet compact en tomographie*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay.