

Tutorat 3: Transformée de Radon

contact: matthieu.labousse@espci.psl.eu

Le tutorat est à déposer la veille avant 18h en F314. Le sujet requiert une forme d'implication personnelle, je vous conseille donc de ne PAS le commencer la veille.

But de ce tutorat. Le but de ce tutorat est de comprendre le principe de la reconstruction de Radon. Une telle méthode trouve des applications en tomographie X, en astrophysique, en sismologie

1 Construction de la transformée de Radon

1. Consultez le site [http ://images.math.cnrs.fr/Le-theoreme-de-Radon.html](http://images.math.cnrs.fr/Le-theoreme-de-Radon.html) . Lors de la séance de tutorat, vous ferez une petite présentation orale où vous expliquerez sans équation le principe de la méthode de Radon (durée \approx une minute, présentation commune au binôme, pas de slides).

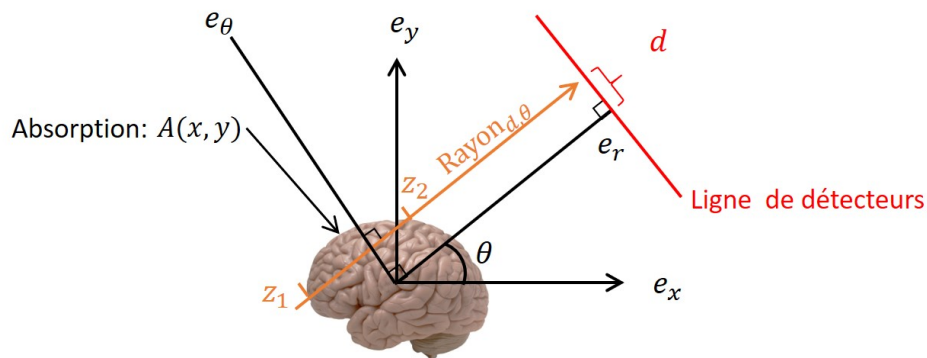


FIGURE 1 – Schéma d'une projection parallèle

On considère un organe humain traversé par un faisceau de rayons X parallèles et orientés suivant un angle θ (voir figure 1). La position d'un détecteur est repérée par une coordonnée locale $d \in \mathbb{R}$.

2. Donner l'équation cartésienne de la droite $L_{\theta,d}$ supportant le rayon paramétré par d et θ .
3. Montrez que la même droite admet une équation paramétrique

$$(x(z), y(z)) = (z \cos \theta - d \sin \theta, z \sin \theta + d \cos \theta) \quad (1)$$

Représentez graphique la situation $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

4. En supposant une loi d'absorption locale de type Beer-Lambert , montrer que $I(\theta, d) = I_0 e^{-p[A](\theta, d)}$ avec

$$p[A](\theta, d) = \iint_{(x,y) \in L_{\theta,d}} dx dy A(x, y) \quad (2)$$

où I_0 est l'intensité amont du rayon incident et $A(x, y)$ le taux d'absorption de l'objet en (x, y) . Le rayon atteint le détecteur pour $z = z_{d, \theta}$. $p[A]$ est appelée la transformée de Radon de A (ou fonction de détecteur).

5. Montrez que p est une application linéaire dont vous préciserez les espaces de départ et d'arrivée. $p[A]$ est-elle une application linéaire ou une fonction ? Préciser également ses espaces d'arrivée et de départ.
6. On note $L_{\theta, \ell}^\perp$ l'équation de la droite supportant la ligne de détecteurs et perpendiculaire à L . Que vaut l'équation cartésienne de $L_{\theta, d}^\perp$? En vous aidant des équations cartésiennes de $L_{\theta, d}$ et $L_{\theta, d}^\perp$, montrer que

$$p[A](\theta, d) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz A(z\mathbf{e}_r + d\mathbf{e}_\theta) \quad (3)$$

avec \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ les vecteurs de la base polaire usuelle.

7. Comment se comporte la transformée de Radon sous l'effet d'une translation de l'objet.
8. Comment se comporte la transformée de Radon sous l'effet d'une rotation de l'objet.

2 Quelques transformées de Radon simples

La représentation de la transformée de Radon dans l'espace (d, θ) s'appelle un sinogramme.

1. Que vaut la transformée de Radon d'un point en (x_0, y_0) . Tracer le sinogramme pour $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$ et $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Justifiez le nom de sinogramme.
2. On considère un disque de rayon R . L'absorption vaut $A = 1$ à l'intérieur du disque et 0 sinon. On se donne un angle θ^* . Pour cet angle donné et sans faire aucun calcul, tracer qualitativement $p[A](\theta^*, d)$ en fonction de d .
3. Montrez que $\forall \theta \in [0, 2\pi]$, $p[A](\theta, d) = 2\sqrt{R^2 - d^2}$ si $d < R$ et nul sinon.
4. Numérisez en png une de vos photos d'identité en niveau de gris (une photo par binôme, utilisez imageJ, convertissez l'image en 32 bits et enregistrez en png). Ouvrez là avec matlab (ou python). L'image devient donc un tableau dont chacun des éléments prend une valeur entre 0 et 255 codant pour toute la palette de gris du blanc au noir. Cela définit une fonction A_{perso} . Calculez numériquement votre sinogramme $p[A_{\text{perso}}](\theta, d)$. On pourra utiliser la fonction `radon` de matlab.

3 Reconstruction de $A(x, y)$?

Vous êtes ingénieur(e)s dans les années 70 et votre collègue vous apprend avec un enthousiasme débordant qu'il est capable de réaliser une machine à rayons X telle que schématisée sur la figure 1. Mieux il est capable de faire tourner la ligne de détecteurs autour du patient. C'est formidable mais il n'est pas très bon en mathématiques ! Comme il sait que vous avez de bons restes en la matière il vous demande si il est possible de recalculer $A(x, y)$ à partir de la mesure du sinogramme $p[A](\theta, d)$ (et donc d'avoir une image par contraste de l'intérieur de l'organe).

1. Vous arrivez le mercredi après midi avec la solution et vous lui exposez la démonstration mathématiques. Indications : Vous commencerez par vous renseigner sur le "Fourier slice theorem" en regardant par exemple <https://www.youtube.com/watch?v=YIvTpW3IevI>.

2. Vous voulez convaincre votre collègue avec une preuve de concept. A partir de votre sinogramme $p[A_{\text{perso}}](\theta, d)$ reconstruisez votre silhouette A_{perso} . Vous pouvez vous aider de la fonction `iradon` sous matlab. Discutez du rendu. Les basses et les hautes fréquences spatiales sont-elles reconstruites avec la même qualité. Sinon discutez pourquoi.

4 Un peu d'histoire

Allan MacLeod Cormack et Godfrey Newbold Hounsfield ont eu le prix Nobel de médecine pour le développement de la tomodesitométrie. Le théorème de Radon est quant à lui beaucoup plus vieux (1917) et est dû au mathématicien autrichien Johann Radon.