



INSTITUT POLYTECHNIQUE DES SCIENCES  
AVANCÉES

MA323 : MÉTHODE DES DIFFÉRENCES FINIES  
RAPPORT

---

Bureau d'Étude : Résolution de  
l'équation de la chaleur

---

*Élèves :*

Valentin TROSSELOT  
Damien MARTINS GOMES  
Valentin QUERCIA

*Enseignants :*

M. COUFFIGNIAL  
M. ELMAHBOUBY

18 février 2022

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>L'équation de la chaleur sur une barre (le retour)...</b>	<b>3</b>
2.1	Schéma numérique . . . . .	3
2.1.1	Caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles . . . . .	3
2.1.2	Étude de l'ordre du schéma en temps et en espace . . . . .	4
2.1.3	Étude de la Stabilité du Schéma Numérique (**) au sens de <i>Von Neumann-Fourier</i> . . . . .	5
2.1.4	Facteur d'amplification . . . . .	6
2.1.5	Convergence du schéma numérique (**) . . . . .	6
2.2	Écriture vectorielle du schéma numérique (**) . . . . .	7
2.3	Écriture matricielle du schéma numérique (**) . . . . .	8
2.4	Comparaison approche matricielle et vectorielle . . . . .	9
2.5	Programmation sur Python et interprétations . . . . .	9
2.5.1	Brève description du code . . . . .	9
2.5.2	Interprétations des résultats . . . . .	10
<b>3</b>	<b>L'équation de la chaleur sur une surface</b>	<b>11</b>
3.1	Étude de l'ordre du schéma en temps et en espace . . . . .	11
3.2	Écriture matricielle du schéma numérique précédent . . . . .	13
3.3	Interprétation des résultats . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>15</b>

# 1 Introduction

Le but de ce bureau d'étude est d'analyser l'équation aux dérivées partielles de la chaleur afin de pouvoir la résoudre numériquement selon plusieurs approches. Dans ce dossier vous allez trouver ce rapport qui illustre la théorie pour élaborer nos schéma numériques mais également des interprétations des sorties graphiques.

De plus, vous trouverez un code *BeMa323\_MARTINSGOMES\_TROSSELOT\_QUERCIA\_TS1* qui contient une classe **EqChaleur** avec plusieurs méthodes pour résoudre le problème qui sera présenté par la suite. Celui-ci permet de pouvoir résoudre l'équation de la chaleur en plusieurs dimensions et avec des conditions initiales différentes.

En mathématiques et en physique théorique, l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en 1807 par Joseph Fourier. En guise de présentation, voici une représentation en deux dimensions de l'équation de la chaleur.

Évolution de la température sur une plaque plane pour  $T=5$

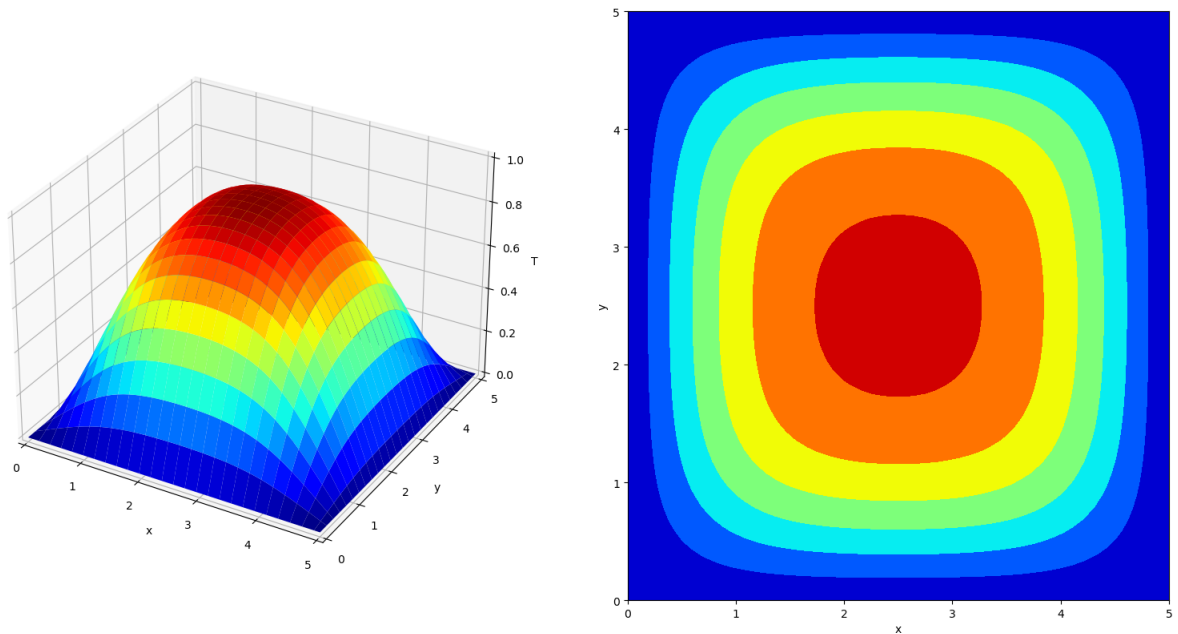


FIGURE 1 – Évolution de la température de la chaleur sur une plaque plane avec  $f = 0$  et  $u_0 = 1$

## 2 L'équation de la chaleur sur une barre (le retour)...

Le but de cet exercice est de modéliser le phénomène de conduction thermique dans une barre à partir d'une discrétisation de l'équation de la chaleur. Soient  $L$  et  $T$  deux réels strictement positifs. On fixe  $f \in C^\infty([0, L] \times [0, T], \mathbb{R})$ ,  $u_0 \in C^\infty([0, L], \mathbb{R})$  et  $\alpha, \beta \in C^\infty([0, L], \mathbb{R})$  et  $\gamma$  un réel fixe strictement positif.

On considère le problème aux limites suivant : trouver une fonction  $u = u(x, t)$  représentant la température au point  $(x, t)$  avec  $x \in [0, L]$  et  $t \in [0, T]$ , telle que :

$$(*) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{dans } [0, L] \times [0, T] \\ u(0, t) = \alpha(t) & \forall t \in [0, T] \\ u(L, t) = \beta(t) & \forall t \in [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in [0, L] \end{cases}$$

On fixe  $M$  et  $N$  deux entiers et on discrétise  $[0, L] \times [0, T]$  en introduisant les points  $x_j = j\Delta x$  pour  $j \in \llbracket 0 ; M+1 \rrbracket$  et les instants  $t^n = n\Delta t$  pour  $n \in \llbracket 0 ; N \rrbracket$ . On cherche alors  $u_j^n \approx u(x_j, t^n)$  pour tout  $(j, n) \in \llbracket 1 ; M \rrbracket \times \llbracket 1 ; N \rrbracket$ .

### 2.1 Schéma numérique

Nous allons appliquer le schéma numérique suivant :

$$\frac{1}{\Delta t} \times \left( \frac{3}{2}u_j^{n+1} - 2u_j^n + \frac{1}{2}u_j^{n-1} \right) - \frac{\gamma}{(\Delta x)^2} \times \left( u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} \right) = f_j^{n+1} \quad (**)$$

#### 2.1.1 Caractéristiques de cette équation aux dérivées partielles

On rappelle l'équation aux dérivées partielles en question :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad (1)$$

On reconnaît une équation aux dérivées partielles du second ordre non homogène.

##### — Étude de la linéarité

On pose  $L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , soient  $u, v \in C^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$L(\lambda u + v) = \frac{\partial(\lambda u + v)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2(\lambda u + v)}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$= \lambda \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} - \gamma \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (3)$$

$$= \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4)$$

$$= \lambda L(u) + L(v) \quad (5)$$

L'équation (1) est bien linéaire.

## — Type de l'équation

Cette équation est du type :

$$\sum_{i=1, j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f$$

Soit A la matrice formé par les coefficients  $a_{ij}$  :

$$A := \begin{bmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Or on sait que  $N = 2$ , et  $\det(A) = -\gamma \times 0 - 0 \times 0 = 0$

Par définition, l'équation (1) est **parabolique**.

### 2.1.2 Étude de l'ordre du schéma en temps et en espace

Soit  $u(x, t)$  une fonction de l'espace et du temps,

Par définition de la dérivée

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

Si  $\Delta t$  est petit, un développement de Taylor de  $u(x, t + \Delta t)$  au voisinage de  $t$  donne :

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2)$$

En tronquant la série au premier ordre en  $\Delta t$  et en approximant  $u_j^n \approx u(x_j, t^n)$  pour tout  $(j, n) \in \llbracket 1 ; M \rrbracket \times \llbracket 1 ; N \rrbracket$ , on obtient :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \partial_t u_j^n + O(\Delta t) \quad (6)$$

De même pour le développement de Taylor de  $u_j^{n-1}$  :

$$\frac{u_j^{n-1} - u_j^n}{\Delta t} = -\partial_t u_j^n + O(\Delta t) \quad (7)$$

En additionnant les équation (6) et (7) telle que :

$$\frac{3}{2} \times (6) + \frac{1}{2} \times (7)$$

On obtient une approximation de la dérivée première de  $u$  par rapport au temps de la forme :

$$\partial_t u_j^n = \frac{3u_j^{n+1} + u_j^{n-1} - 4u_j^n}{2\Delta t}$$

L'approximation de  $\partial_t u_j^n$  est d'ordre 1 indiquant que l'erreur de troncature  $O(\Delta t)$  tend vers 0 comme la puissance première de  $\Delta t$

On applique le même raisonnement pour approximer la dérivée partielle seconde de  $u$  par rapport à  $x$ .

Pour  $\Delta x$  petit, on a le développement de Taylor de  $u_{j+1}^{n+1}$  au voisinage de  $x$  donne :

$$\partial_{xx}^2 u_j^{n+1} + O((\Delta x)^2) = \frac{2}{(\Delta x)^2} \times (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} - \Delta x \partial_x u_j^{n+1}) \quad (8)$$

De même pour un  $\Delta x$  petit on a le développement de Taylor de  $u_{j-1}^{n+1}$  au voisinage de  $x$  donne :

$$\partial_{xx}^2 u_j^{n+1} + O((\Delta x)^2) = \frac{2}{(\Delta x)^2} \times (u_{j-1}^{n+1} - u_j^{n+1} + \Delta x \partial_x u_j^{n+1}) \quad (9)$$

En additionnant les équation (8) et (9), on obtient une approximation de la dérivée partielle seconde de  $u$  par rapport à  $x$  de la forme :

$$\partial_{xx}^2 u_j^{n+1} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

L'approximation de  $\partial_{xx}^2 u_j^{n+1}$  est d'ordre 2 indiquant que l'erreur de troncature de  $O((\Delta x)^2)$  tend vers zéro comme la puissance seconde de  $O(\Delta x)$

**Conclusion :** Le schéma numérique (\*\*) est d'ordre deux en espace et un en temps.

### 2.1.3 Étude de la Stabilité du Schéma Numérique (\*\*) au sens de *Von Neumann-Fourier*

Nous allons écrire le schéma numérique (\*\*) sous forme explicite avant d'appliquer le critère de stabilité de *Von Neumann-Fourier*.

On sait que :

$$\frac{1}{\Delta t} \times \left( \frac{3}{2} u_j^{n+1} - 2u_j^n + \frac{1}{2} u_j^{n-1} \right) - \frac{\gamma}{(\Delta x)^2} \times \left( u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} \right) = f_j^{n+1}$$

On a :

$$u_{j+1}^{n+1} \times (-\lambda) + u_j^{n+1} \times \left( \frac{3}{2} + 2\lambda \right) + u_{j-1}^{n+1} \times (-\lambda) = 2u_j^n - \frac{1}{2} u_j^{n-1} + \Delta t \times f_j^{n+1} \quad (10)$$

avec  $\lambda = \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta x)^2}$

On pose  $u_j^n = \xi^n e^{ik\pi j \Delta x}$  et  $f = 0$ . On injecte  $u_j^n$  dans l'équation (10) :

$$\xi^{n+1} e^{ik\pi j \Delta x} \times \left( \frac{3}{2} + 2\lambda - \lambda(e^{ik\pi \Delta x} + e^{-ik\pi \Delta x}) \right) = \xi^{n-1} e^{ik\pi j \Delta x} \times \left( 2\xi - \frac{1}{2} \right) \quad (11)$$

$$\xi^2 \left( \frac{3}{2} + 2\lambda - 2\lambda \cos(k\pi \Delta x) \right) = 2\xi - \frac{1}{2} \quad (12)$$

$$\xi^2 \left( \frac{3}{2} + 4\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi \Delta x}{2}\right) \right) - 2\xi + \frac{1}{2} = 0 \quad (13)$$

On reconnaît un polynôme du second ordre en  $\xi$ .  
On pose :

$$\begin{cases} a = \left(\frac{3}{2} + 4\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi\Delta x}{2}\right)\right) \\ b = -2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Or on sait que :

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{c}{a}$$

Soit que :

$$\xi_1 \xi_2 = \frac{1}{3 + 8\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi\Delta x}{2}\right)}$$

De plus, on calcul le déterminant du polynôme :

$$\Delta = b^2 - 4(ac) = 1 - 8\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi\Delta x}{2}\right)$$

On remarque que  $\Delta < 0$ . Donc le polynôme admet deux racines complexes conjuguées.

$$\xi_1 = \overline{\xi_2} \iff \|\xi_1\| = \|\xi_2\|$$

Finalement, on peut dire que :

$$\|\xi\| = \sqrt{\frac{1}{3 + 8\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi\Delta x}{2}\right)}} \leq 1$$

La condition de stabilité au sens de *Von Neumann-Fourier* est vérifiée. Le schéma numérique est inconditionnellement stable.

#### 2.1.4 Facteur d'amplification

On sait que d'après la question [2.1.3](#)  
On a :

$$\|\xi\| = \sqrt{\frac{1}{3 + 8\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi\Delta x}{2}\right)}}$$

Donc,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\xi\| \iff \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{3 + 8\lambda \sin^2\left(\frac{k\pi\Delta x}{2}\right)}} = 0$$

#### 2.1.5 Convergence du schéma numérique (\*\*)

On sait que le schéma (\*\*) est d'ordre deux en temps et un en espace c'est donc une bonne approximation du problème (\*). De plus nous avons montré dans la question [2.1.3](#) que le schéma numérique est inconditionnellement stable au sens de *Von Neumann-Fourier*. D'après le **Théorème de Lax** le schéma (\*) est convergent.

## 2.2 Écriture vectorielle du schéma numérique (\*\*)

On sait que :

$$u_{j+1}^{n+1} \times (-\lambda) + u_j^{n+1} \times \alpha + u_{j-1}^{n+1} \times (-\lambda) = 2u_j^n - \frac{1}{2}u_j^{n-1} + \Delta t \times f_j^{n+1}$$

avec  $\psi = \frac{3}{2} + 2\lambda$

$$\begin{bmatrix} \psi & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & \psi & -\lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_M^{n+1} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ \vdots \\ u_M^n \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1^{n-1} \\ u_2^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_M^{n-1} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} f_1^{n+1} \\ f_2^{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ f_M^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \alpha^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda \beta^{n+1} \end{bmatrix}$$

On pose :  $u^n = (u_1^n \ u_2^n \dots u_M^n)^T$  et  $F^n = (f_1^n \ f_2^n \dots f_M^n)^T$  et  $u_0 = (\lambda \alpha^{n+1} \ 0 \dots 0 \ \lambda \beta^{n+1})^T$

L'expression précédente s'écrit vectoriellement sous la forme :

$$Bu^{n+1} - 2u^n + \frac{1}{2}u^{n-1} = \Delta t F^{n+1} + u_0$$

Avec :  $B = \begin{bmatrix} \psi & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & \psi & -\lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & \psi \end{bmatrix}$

Pour déterminer  $u^1$  Nous allons grâce au problème (\*) exprimer  $u^1$  en fonction de  $u^0$ .  
D'après le développement de Taylor :

$$u_j^1 = u_j^0 + \Delta t \frac{\partial u_j^0}{\partial t} \quad (14)$$

$$= u_j^0 + \lambda u_{j+1}^1 - 2\lambda u_j^1 + \lambda u_{j-1}^1 + \Delta t f_j^1 \quad (15)$$

Or on sait que :

$$\frac{\partial u_j^0}{\partial t} = f_j^1 + \gamma \frac{\partial u_j^0}{\partial x^2} \quad (16)$$

$$= f_j^1 + \frac{\gamma}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^1 - 2u_j^1 + u_{j-1}^1) \quad (17)$$

Si nous réécrivons  $u_1$  sous forme matricielle nous obtenons la relation suivante :

$$Ku^1 = u^0 + \Delta t F^1 u^1 = K^{-1}u^0 + \Delta t K^{-1}F^1 \quad (18)$$

Avec  $K = \begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix}$



## 2.3 Écriture matricielle du schéma numérique (\*\*)

On pose u le vecteur colonne suivant :  $u = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^N \end{bmatrix}$

On sait que d'après la question 2.2 on a :

$$\begin{bmatrix} \psi & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & \psi & -\lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_M^{n+1} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_M^n \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1^{n-1} \\ u_2^{n-1} \\ \vdots \\ u_M^{n-1} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} f_1^{n+1} \\ f_2^{n+1} \\ \vdots \\ f_M^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \alpha^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda \beta^{n+1} \end{bmatrix}$$

En utilisant l'écriture matricielle par blocs on obtient :

$$\begin{bmatrix} -2I_N & B & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}I_N & -2I_N & B & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}I_N & -2I_N + BK^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u^N \end{bmatrix} = \Delta t \begin{bmatrix} f^2 + \lambda C^2 + \frac{1}{2}u^0 \\ f^3 + \lambda C^3 \\ \vdots \\ f^N + \lambda C^N \\ f^{N+1} + \lambda C^{N+1} + \Delta t K^{-1} f^{N+1} \end{bmatrix}$$

Avec  $C^n = \begin{bmatrix} \alpha^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta^n \end{bmatrix}$

Nous avons bien montré que le schéma numérique (\*\*) s'écrit matriciellement sous la forme :

$$Au = b$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -2I_M & B & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2}I_M & -2I_M & B & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}I_M & -2I_M + BK^{-1} \end{bmatrix} \text{ et } b = \begin{bmatrix} \Delta t f^2 + \lambda C^2 + \frac{1}{2}I_M u^0 \\ \Delta t f^3 + \lambda C^3 \\ \vdots \\ \Delta t f^N + \lambda C^N \\ \Delta t f^{N+1} + \lambda C^{N+1} - Bu^{N+1} \end{bmatrix}$$

Où  $A \in M_{(N \times N)^2}(\mathbb{R})$  et  $b \in \mathbb{R}^{M \times N}$

$$\text{Et avec } B = \begin{bmatrix} \psi & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & \psi & -\lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & \psi \end{bmatrix}$$

Pour déterminer  $u^{n+1}$  Nous allons grâce au problème (\*) exprimer  $u^{n+1}$  en fonction de  $u^n$ .

D'après le développement de Taylor :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u_j^n}{\partial t} \quad (19)$$

$$= u_j^n + \lambda u_{j+1}^{n+1} - 2\lambda u_j^{n+1} + \lambda u_{j-1}^{n+1} + \Delta t f_j^{n+1} \quad (20)$$

Or on sait que :

$$\frac{\partial u_j^n}{\partial t} = f_j^{n+1} + \gamma \frac{\partial u_j^n}{\partial x^2} \quad (21)$$

$$= f_j^{n+1} + \frac{\gamma}{(\Delta x)^2} (u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \quad (22)$$

Si nous réécrivons  $u_{n+1}$  sous forme matricielle nous obtenons la relation suivante :

$$Ku^{n+1} = u^n + \Delta t F^{n+1} u^{n+1} = K^{-1} u^n + \Delta t K^{-1} F^{n+1} \quad (23)$$

Avec  $K = \begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix}$

## 2.4 Comparaison approche matricielle et vectorielle

Nous pouvons remarquer que l'approche matricielle a une complexité en temps supérieur à la résolution vectorielle. En effet pour résoudre le même problème l'approche matricielle demande trois fois plus de temps que la résolution vectorielle.

De plus, cette méthode est moins précise car l'inversion de la matrice A engendre des erreurs de calcul.

Enfin, la complexité en mémoire est plus importante pour l'approche matricielle que pour l'approche vectorielle car la matrice A est conséquente et requière un grand espace de stockage.

## 2.5 Programmation sur Python et interprétations

### 2.5.1 Brève description du code

Pour la programmation du schéma numérique de l'équation de la chaleur sur une barre nous avons décider d'utiliser la programmation orientée objet afin d'avoir un code plus clair et plus optimal. Nous allons alors définir la classe **Eqchaleur** qui comprendra plusieurs méthode dont la résolution par voie matricielle et vectorielle pour le 1D et la résolution 2D. Nous avons ajouté un constructeur dans notre classe pour définir les paramètres de discrétisations.

### 2.5.2 Interprétations des résultats

Nous avons effectué plusieurs tests en choisissant des valeurs de  $f$  et  $\gamma$  différentes et nous avons remarqué plusieurs résultats intéressants qui nous ont permis de comprendre les rôles de  $\gamma$  et  $f$  sur le vecteur  $U$ . Le terme  $\gamma$  représente la diffusivité thermique qui est une grandeur physique qui caractérise la capacité d'un matériau à transférer la chaleur (énergie thermique) à travers ce matériau. Elle dépend de la capacité du matériau à conduire la chaleur (conductivité thermique) et de sa capacité à accumuler la chaleur (capacité thermique volumique). On peut remarquer que quand on augmente le terme  $\gamma$  la diffusion de la chaleur se fait beaucoup plus rapidement. En effet, la température se propage plus rapidement et plus facilement. Enfin, le terme  $f$  représente une perturbation.

### 3 L'équation de la chaleur sur une surface

Le but de cet exercice est de modéliser le phénomène de conduction thermique dans une surface carrée à partir d'une discrétisation de l'équation de la chaleur. On conservera les notations de l'exercice précédent. On considère le problème aux limites suivant : trouver une fonction  $u = u(x, y, t)$  représentant la température au point  $(x, y, t)$  avec  $(x, y) \in [0, L]^2$  et  $t \in [0, T]$ , telle que :

$$(\$) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f & \text{dans } [0, L]^2 \times [0, T] \\ u = 0 & \text{sur } \partial[0, L]^2 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & \forall (x, y) \in [0, L]^2 \end{cases}$$

On fixe  $M$  et  $N$  deux entiers et on discrétise  $[0, L]^2 \times [0, T]$  en introduisant les points  $x_i = i\Delta x$  et  $y_j = j\Delta y$  pour  $(i, j) \in \llbracket 0 ; M+1 \rrbracket^2$  et les instants  $t^n = n\Delta t$  pour  $n \in \llbracket 0 ; N \rrbracket$ . On cherche alors  $u_{ij}^n \approx u(x_i, y_j, t^n)$  pour tout  $(i, j, n) \in \llbracket 1 ; M \rrbracket^2 \times \llbracket 1 ; N \rrbracket$ . Nous allons appliquer le schéma suivant :

$$\frac{1}{\Delta t} \times \left( \frac{3}{2}u_j^{n+1} - 2u_j^n + \frac{1}{2}u_j^{n-1} \right) - \frac{\gamma}{(\Delta x)^2} \times (\partial_{xx}^2 u_{ij}^{n+1} + \partial_{yy}^2 u_{ij}^{n+1}) = f_{ij}^{n+1} \quad (\$ \$)$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \partial_{xx}^2 \phi_{ij}^n := \phi_{i+1j}^n - 2\phi_{ij}^n + \phi_{i-1j}^n \\ \partial_{yy}^2 \phi_{ij}^n := \phi_{ij+1}^n - 2\phi_{ij}^n + \phi_{ij-1}^n \end{cases}$$

#### 3.1 Étude de l'ordre du schéma en temps et en espace

Soit  $u(x, y, t)$  une fonction de l'espace et du temps,  
Par définition de la dérivée

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{\Delta t}$$

Si  $\Delta t$  est petit, un développement de Taylor de  $u(x, y, t + \Delta t)$  au voisinage de  $t$  donne :

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \Delta t \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} + O((\Delta t)^2)$$

En tronquant la série au premier ordre en  $\Delta t$  et en approximant  $u_{ij}^n \approx u(x_{ij}, t^n)$  pour tout  $(i, j, n) \in \llbracket 1 ; M \rrbracket^2 \times \llbracket 1 ; N \rrbracket$ , on obtient :

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t} = \partial_t u_{ij}^n + O(\Delta t) \quad (24)$$

De même pour le développement de Taylor de  $u_{ij}^{n-1}$  :

$$\frac{u_{ij}^{n-1} - u_{ij}^n}{\Delta t} = -\partial_t u_{ij}^n + O(\Delta t) \quad (25)$$

En additionnant les équation (24) et (25) telle que :

$$\frac{3}{2} \times (14) + \frac{1}{2} \times (15)$$

On obtient une approximation de la dérivée première de  $u$  par rapport au temps de la forme :

$$\partial_t u_{ij}^n = \frac{3u_{ij}^{n+1} + u_{ij}^{n-1} - 4u_{ij}^n}{2\Delta t}$$

L'approximation de  $\partial_t u_{ij}^n$  est d'ordre 1 indiquant que l'erreur de troncature  $O(\Delta t)$  tend vers 0 comme la puissance première de  $\Delta t$

On applique le même raisonnement pour approximer la dérivée partielle seconde de  $u$  par rapport à  $x$ .

Pour  $\Delta x$  petit on a le développement de Taylor de  $u_{i+1j}^{n+1}$  au voisinage de  $x$  donne :

$$\partial_{xx}^2 u_{i+1j}^{n+1} + O((\Delta x)^2) = \frac{2}{(\Delta x)^2} \times (u_{i+1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1} - \Delta x \partial_x u_{ij}^{n+1}) \quad (26)$$

De même pour un  $\Delta x$  petit on a le développement de Taylor de  $u_{i-1j}^{n+1}$  au voisinage de  $x$  donne :

$$\partial_{xx}^2 u_{i-1j}^{n+1} + O((\Delta x)^2) = \frac{2}{(\Delta x)^2} \times (u_{i-1j}^{n+1} - u_{ij}^{n+1} + \Delta x \partial_x u_{ij}^{n+1}) \quad (27)$$

En additionnant les équation (26) et (27), on obtient une approximation de la dérivée partielle seconde de  $u$  par rapport à  $x$  de la forme :

$$\partial_{xx}^2 u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i+1j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1j}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

L'approximation de  $\partial_{xx}^2 u_{ij}^{n+1}$  est d'ordre 2 indiquant que l'erreur de troncature de  $O((\Delta x)^2)$  tend vers zéro comme la puissance seconde de  $O(\Delta x)$

Enfin, de la même méthode, On peut approximer la dérivée partielle seconde de  $u$  par rapport à  $y$ .

Pour  $\Delta y$  petit on a le développement de Taylor de  $u_{ij+1}^{n+1}$  au voisinage de  $y$  donne :

$$\partial_y^2 u_{ij}^{n+1} + O((\Delta y)^2) = \frac{2}{(\Delta y)^2} \times (u_{ij+1}^{n+1} - u_{ij}^{n+1} - \Delta y \partial_y u_{ij}^{n+1}) \quad (28)$$

De même pour un  $\Delta y$  petit on a le développement de Taylor de  $u_{ij-1}^{n+1}$  au voisinage de  $y$  donne :

$$\partial_{yy}^2 u_{ij}^{n+1} + O((\Delta y)^2) = \frac{2}{(\Delta y)^2} \times (u_{ij-1}^{n+1} - u_{ij}^{n+1} + \Delta y \partial_y u_{ij}^{n+1}) \quad (29)$$

En additionnant les équation (28) et (29), on obtient une approximation de la dérivée partielle seconde de  $u$  par rapport à  $x$  de la forme :

$$\partial_y^2 u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}$$

L'approximation de  $\partial_{yy}^2 u_{ij}^{n+1}$  est d'ordre 2 indiquant que l'erreur de troncature de  $O((\Delta y)^2)$  tend vers zéro comme la puissance seconde de  $O(\Delta y)$

**Conclusion :** Le schéma numérique (§§) est d'ordre deux en espace et un en temps.

### 3.2 Écriture matricielle du schéma numérique précédent

On pose  $\lambda = \frac{\gamma \Delta t}{(\Delta x)^2}$  On réécrit le schéma (§§) tel que :

$$\frac{3}{2}u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + \frac{1}{2}u_{ij}^{n-1}\lambda(u_{i+1j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i-1j}^{n+1} + u_{ij+1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{ij-1}^{n+1}) = f_{ij}^{n+1}\Delta t$$

Sous forme explicite on a :

$$-\lambda u_{i+1j}^{n+1} - 2u_{ij}^n + \left(\frac{3}{2} + 4\lambda\right)u_{ij}^{n+1} - \lambda u_{i-1j}^{n+1} - \lambda u_{ij-1}^{n+1} = 2u_{ij}^n - \frac{1}{2}u_{ij}^{n+1} + f_{ij}^{n+1}\Delta t$$

On pose :  $u^n = (u_{11} \dots u_{1N} u_{21} \dots u_{2N} \dots u_{NN})^{nT}$

Afin de comprendre comment nous pouvons écrire le schéma (§§) sous forme matricielle, on pose  $i = 1$  et  $j = 1$ .

On a :

$$-\lambda u_{21}^{n+1} - 2u_{11}^n + \phi u_{11}^{n+1} - \lambda u_{01}^{n+1} - \lambda u_{10}^{n+1} = 2u_{11}^n - \frac{1}{2}u_{11}^{n+1} + f_{11}^{n+1}\Delta t$$

avec  $\phi = \left(\frac{3}{2} + 4\lambda\right)$

On a alors :

$$\begin{bmatrix} \phi & -\lambda & 0 & \dots & 0 & \dots & -\lambda & \dots & 0 \\ -\lambda & \phi & -\lambda & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\lambda & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -\lambda & \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & -\lambda I_N & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda I_N & B & -\lambda I_N & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda I_N \\ 0 & \dots & \dots & -\lambda I_N & B \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec } B = \begin{bmatrix} \phi & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & \phi & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & \dots & -\lambda & \phi \end{bmatrix}$$

Pour déterminer  $u^1$  Nous allons grâce au problème (§) exprimer  $u^1$  en fonction de  $u^0$ . D'après le développement de Taylor :

$$u_{ij}^1 = u_{ij}^0 + \Delta t \frac{\partial u_{ij}^0}{\partial t} \quad (30)$$

$$(31)$$

Or on sait que :

$$\frac{\partial u_{ij}^0}{\partial t} = f_{ij}^1 + \gamma \frac{\partial u_{ij}^0}{\partial x^2} \quad (32)$$

$$= f_{ij}^1 + \frac{\gamma}{(\Delta x)^2} (u_{i+1j}^1 - 2u_{ij}^1 + u_{i-1j}^1 + u_{ij+1}^1 - 2u_{ij}^1 + u_{ij-1}^1) \quad (33)$$

Si nous réécrivons  $u_1$  sous forme matricielle nous obtenons la relation suivante :

$$u^1 = W^{-1}u^0 + \Delta t W^{-1}F^1 \quad (34)$$

$$\text{Avec } W = \begin{bmatrix} Z & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & Z & -\lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & Z \end{bmatrix}$$

$$\text{et } Z = \begin{bmatrix} 1+4\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+4\lambda & -\lambda & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1+4\lambda \end{bmatrix}$$

### 3.3 Interprétation des résultats

L'équation de chaleur d'une surface dépend de deux paramètres principaux : une fonction  $f$  et une condition initiale  $u_0$  (plus les multiples paramètres de discrétisations). Après avoir effectué de multiples tests, dont vous pouvez voir les vidéos dans le dossier, nous avons observé que  $f$  apporte une perturbation suivant le temps ou la position. De plus,  $u_0$  représente la position à l'instant  $t = 0$ .

Concernant les paramètres de discrétisations, le gamma représente la diffusivité thermique. C'est-à-dire la capacité d'un matériau à transmettre la chaleur plutôt que l'absorber. Par conséquent, plus  $\gamma$  est élevé, plus l'échange de chaleur s'effectue rapidement.

## 4 Conclusion

Pour conclure ce bureau d'étude, nous avons pu analyser théoriquement le problème puis avec un schéma numérique nous avons représenté l'équation de la chaleur en une et deux dimensions. Nous avons utilisé la méthode des différences finies avec un schéma qui est stable, consistant et convergent que nous avons, préalablement rigoureusement démontré.