

Étude spectrale d'opérateurs de Sturm-Liouville et applications à la contrôlabilité de problèmes paraboliques discrets et continus

Damien Allonsius (I2M)

I2M, Aix-Marseille Université

Mercredi 26 Septembre 2018

Thèse de doctorat

- 1 Présentation des problèmes et méthode de résolution
- 2 Systèmes paraboliques semi-discrétisés en espace (1D)
- 3 Systèmes paraboliques tensorisés multi-dimensionnels semi-discrétisés en espace
- 4 Temps minimal de contrôle à zéro d'une équation parabolique dégénérée
- 5 Perspectives

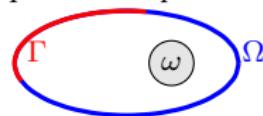
- 1 Présentation des problèmes et méthode de résolution
- 2 Systèmes paraboliques semi-discrétisés en espace (1D)
- 3 Systèmes paraboliques tensorisés multi-dimensionnels semi-discrétisés en espace
- 4 Temps minimal de contrôle à zéro d'une équation parabolique dégénérée
- 5 Perspectives

Présentation du problème

Système contrôlé à zéro

$$\begin{cases} \partial_t y(t) + \mathcal{A}_p y(t) + Cy(t) = \mathcal{D}_\omega u_i(t), & t > 0, \\ y(0) = y_0, \\ y(t) = \mathcal{B}_\Gamma u_b(t), & \text{sur } \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

- \mathcal{A}_p : opérateur elliptique dépendant d'un paramètre $p \in \mathcal{P}$.
- \mathcal{D}_ω : opérateur de contrôle interne.
- \mathcal{B}_Γ : opérateur de contrôle au bord.
- u_i : contrôle interne ou u_b : contrôle au bord, y_0 : condition initiale.

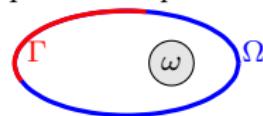


Présentation du problème

Système contrôlé à zéro

$$\begin{cases} \partial_t y(t) + \mathcal{A}_{\textcolor{red}{p}} y(t) + Cy(t) = \mathcal{D}_\omega u_i(t), & t > 0, \\ y(0) = y_0, \\ y(t) = \mathcal{B}_\Gamma u_b(t), \text{ sur } \partial\Omega, & t > 0. \end{cases}$$

- \mathcal{A}_p : opérateur elliptique dépendant d'un paramètre $p \in \mathcal{P}$.
- \mathcal{D}_ω : opérateur de contrôle interne.
- \mathcal{B}_Γ : opérateur de contrôle au bord.
- u_i : contrôle interne ou u_b : contrôle au bord, y_0 : condition initiale.
→ tous dépendent de $\textcolor{red}{p}$.

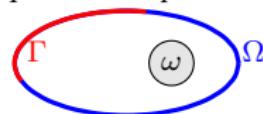


Présentation du problème

Système contrôlé à zéro

$$\begin{cases} \partial_t y(t) + \mathcal{A}_{\textcolor{red}{p}} y(t) + Cy(t) = \mathcal{D}_\omega u_i(t), & t > 0, \\ y(0) = y_0, \\ y(t) = \mathcal{B}_\Gamma u_b(t), & \text{sur } \partial\Omega, t > 0. \end{cases}$$

- \mathcal{A}_p : opérateur elliptique dépendant d'un paramètre $p \in \mathcal{P}$.
- \mathcal{D}_ω : opérateur de contrôle interne.
- \mathcal{B}_Γ : opérateur de contrôle au bord.
- u_i : contrôle interne ou u_b : contrôle au bord, y_0 : condition initiale.
→ tous dépendent de $\textcolor{red}{p}$.



Objectifs

Soit $T > 0$. Trouver u_i (ou u_b) tels que

1) $y(T) = 0$,

2) $\exists C > 0, \forall p \in \mathcal{P}, \begin{cases} \|u_i\|_{L^2(0,T;\Omega)} \leq C\|y_0\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u_b\|_{L^2(0,T;\partial\Omega)} \leq C\|y_0\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$

→ Contrôle à zéro uniforme.

Exemples d'opérateurs elliptiques auto-adjoints \mathcal{A}_p

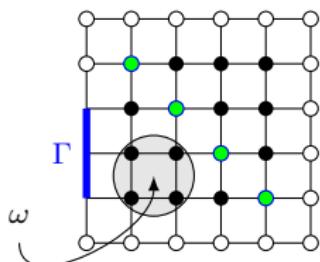
Système semi-discrétisé en espace

$$\partial_t Y^{\textcolor{red}{h}}(t) - \Delta^{\textcolor{red}{h}} Y^{\textcolor{red}{h}}(t) = \mathcal{D}_{\omega}^{\textcolor{red}{h}} U_i^{\textcolor{red}{h}}(t) + \mathcal{B}_{\Gamma}^{\textcolor{red}{h}} U_b^{\textcolor{red}{h}}(t)$$

$$\mathcal{A}_{\textcolor{red}{h}} = -\Delta^{\textcolor{red}{h}}$$

p : paramètre de discrétisation h
 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^+$

Non contrôlabilité à zéro si $n > 1$
 (contre-exemple de O. Kavian)



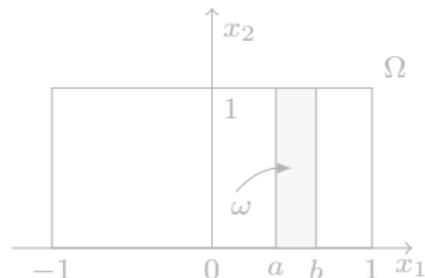
Équation avec un paramètre

$$\partial_t y - \partial_{x_1}^2 y - x_1^2 \partial_{x_2}^2 y = \mathcal{D}_{\omega} u_i$$

$$\mathcal{A}_{\textcolor{red}{n}} = -\partial_{x_1}^2 + \textcolor{red}{n} x_1^2$$

p : entier $\textcolor{red}{n}$
 $\mathcal{P} = \mathbb{N}^*$

Temps minimal de contrôle à zéro
 (Article de K. Beauchard et al.)



Exemples d'opérateurs elliptiques auto-adjoints \mathcal{A}_p

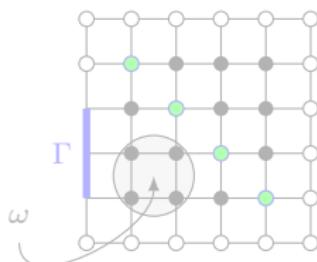
Système semi-discrétisé en espace

$$\partial_t Y^{\textcolor{red}{h}}(t) - \Delta^{\textcolor{red}{h}} Y^{\textcolor{red}{h}}(t) = \mathcal{D}_{\omega}^{\textcolor{red}{h}} U_i^{\textcolor{red}{h}}(t) + \mathcal{B}_{\Gamma}^{\textcolor{red}{h}} U_b^{\textcolor{red}{h}}(t)$$

$$\mathcal{A}_{\textcolor{red}{h}} = -\Delta^{\textcolor{red}{h}}$$

p : paramètre de discrétisation h
 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^+$

Non contrôlabilité à zéro si $n > 1$
 (contre-exemple de O. Kavian)



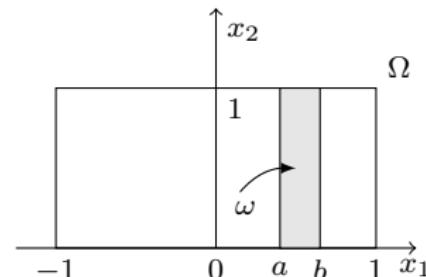
Équation avec un paramètre

$$\partial_t y - \partial_{x_1}^2 y - x_1^2 \partial_{x_2}^2 y = \mathcal{D}_{\omega} u_i$$

$$\mathcal{A}_{\textcolor{red}{n}} = -\partial_{x_1}^2 + \textcolor{red}{n} x_1^2$$

p : entier $\textcolor{red}{n}$
 $\mathcal{P} = \mathbb{N}^*$

Temps minimal de contrôle à zéro
 (Article de K. Beauchard et al.)



Exemples d'opérateurs elliptiques auto-adjoints \mathcal{A}_p

Système semi-discrétisé en espace

$$\partial_t Y^{\textcolor{red}{h}}(t) - \Delta^{\textcolor{red}{h}} Y^{\textcolor{red}{h}}(t) = \mathcal{D}_{\omega}^{\textcolor{red}{h}} U_i^{\textcolor{red}{h}}(t) + \mathcal{B}_{\Gamma}^{\textcolor{red}{h}} U_b^{\textcolor{red}{h}}(t)$$

$$\mathcal{A}_{\textcolor{red}{h}} = -\Delta^{\textcolor{red}{h}}$$

p : paramètre de discrétisation h
 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^+$

Non contrôlabilité à zéro si $n > 1$
(contre-exemple de O. Kavian)

Équation avec un paramètre

$$\partial_t y - \partial_{x_1}^2 y - x_1^2 \partial_{x_2}^2 y = \mathcal{D}_{\omega} u_i$$

$$\mathcal{A}_{\textcolor{red}{n}} = -\partial_{x_1}^2 + \textcolor{red}{n} x_1^2$$

p : entier $\textcolor{red}{n}$
 $\mathcal{P} = \mathbb{N}^*$

Temps minimal de contrôle à zéro
(Article de K. Beauchard et al.)

Notations

Spectres des opérateurs \mathcal{A}_p : $\forall p \in \mathcal{P}, \Lambda_p := (\lambda_{k,p})_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Fonctions propres associées (normalisées pour la norme L^2) : $\forall p \in \mathcal{P}, (\phi_{k,p})_{k \in \mathbb{N}^*}$.

Remarquer que $\forall p \in \mathcal{P}$, les fonctions

$$t \mapsto e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \phi_{k,p}, \forall k \in \mathbb{N}^*$$

sont solutions du système adjoint (non contrôlé)

$$\begin{cases} -\partial_t z + \mathcal{A}_p z = 0, \\ z(T) = \phi_{k,p}. \end{cases}$$

Principe de la méthode des moments ($\mathcal{D}_\omega = 1_\omega$ et $\mathcal{B}_\Gamma = 0$)

Multiplier l'équation par une solution du système adjoint

$$\int_0^T \int_{\Omega} e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \phi_{k,p} \times (\partial_t y + \mathcal{A}_p y) = \int_0^T \int_{\Omega} e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \phi_{k,p} \times (\mathcal{D}_\omega u_i),$$

et intégrer par parties.

Principe de la méthode des moments ($\mathcal{D}_\omega = 1_\omega$ et $\mathcal{B}_\Gamma = 0$)

Multiplier l'équation par une solution du système adjoint

$$\int_0^T \int_{\Omega} e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \phi_{k,p} \times (\partial_t y + \mathcal{A}_{\textcolor{red}{p}} y) = \int_0^T \int_{\Omega} e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \phi_{k,p} \times (\mathcal{D}_\omega u_i),$$

et intégrer par parties.

$$\begin{aligned} y(T) &= 0 \\ &\Updownarrow \\ (\star) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad -e^{-\lambda_{k,p} T} \int_{\Omega} \phi_{k,p} y_0 &= \int_0^T \int_{\Omega} \left(e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \mathcal{D}_\omega \phi_{k,p} \right) \times u_i \end{aligned}$$

Principe de la méthode des moments ($\mathcal{D}_\omega = 1_\omega$ et $\mathcal{B}_\Gamma = 0$)

Multiplier l'équation par une solution du système adjoint

$$\int_0^T \int_{\Omega} e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \phi_{k,p} \times (\partial_t y + \mathcal{A}_{\textcolor{red}{p}} y) = \int_0^T \int_{\Omega} e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \phi_{k,p} \times (\mathcal{D}_\omega u_i),$$

et intégrer par parties.

$$\begin{aligned} y(T) &= 0 \\ &\Updownarrow \\ (\star) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, -e^{-\lambda_{k,p} T} \int_{\Omega} \phi_{k,p} y_0 &= \int_0^T \int_{\Omega} \left(e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \mathcal{D}_\omega \phi_{k,p} \right) \times u_i \end{aligned}$$

Idée : construire u_i avec une *famille biorthogonale* ad hoc.

Définition : Famille biorthogonale

Soit $\Sigma := (\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$. Une famille biorthogonale $(q_j^\Sigma)_{j \in \mathbb{N}^*} \subset (L^2(0, T))^{\mathbb{N}^*}$ à $(t \mapsto e^{-\sigma_k(T-t)})_{k \in \mathbb{N}^*}$ vérifie

$$\forall k, j \geq 1, q_j \in L^2(0, T), \quad \int_0^T e^{-\sigma_k(T-t)} q_j(t) dt = \delta_{k,j}.$$

Principe de la méthode des moments ($\mathcal{D}_\omega = 1_\omega$ et $\mathcal{B}_\Gamma = 0$)

$$(\star) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, -e^{-\lambda_{k,p} T} \int_{\Omega} \phi_{k,p} y_0 = \int_0^T \int_{\Omega} \left(e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \mathcal{D}_\omega \phi_{k,p} \right) \times u_i$$

On cherche u_i sous la forme

$$(\Lambda_p = \text{Spec}(\mathcal{A}_p))$$

$$u_i(t, \cdot) := \sum_{k \geq 1} \alpha_{k,p} \times \left(q_k^{\Lambda_p}(t) \phi_{k,p} \right)$$

Principe de la méthode des moments ($\mathcal{D}_\omega = 1_\omega$ et $\mathcal{B}_\Gamma = 0$)

$$(\star) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, -e^{-\lambda_{k,p} T} \int_{\Omega} \phi_{k,p} y_0 = \int_0^T \int_{\Omega} \left(e^{-\lambda_{k,p}(T-t)} \mathcal{D}_\omega \phi_{k,p} \right) \times u_i$$

On cherche u_i sous la forme $(\Lambda_p = \text{Spec}(\mathcal{A}_p))$

$$u_i(t, \cdot) := \sum_{k \geq 1} \alpha_{k,p} \times \left(q_k^{\Lambda_p}(t) \phi_{k,p} \right)$$

$$(\star) \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, -e^{-\lambda_{k,p} T} \int_{\Omega} \phi_{k,p} y_0 = \alpha_{k,p} \int_{\omega} \phi_{k,p}^2$$

$$u_i(t, \cdot) = - \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_{k,p} T} \int_{\Omega} \phi_{k,p} y_0}{\int_{\omega} \phi_{k,p}^2} \times \left(q_k^{\Lambda_p}(t) \phi_{k,p} \right).$$

De la même façon, pour le contrôle au bord,

$$u_b(t, \cdot) = \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_{k,p} T} \int_{\Omega} \phi_{k,p} y_0}{\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \phi_{k,p}}{\partial n} \right|^2} \times \left(q_k^{\Lambda_p}(t) \frac{\partial \phi_{k,p}}{\partial n} \right).$$

Il faut vérifier les points suivants

- 1) Existence de $(q_j^{\Lambda p})_{j \in \mathbb{N}^*}$ et majoration 'uniforme' par rapport à p
- 2) Convergence des séries u_i et u_b et coût du contrôle uniforme par rapport à p

Il faut vérifier les points suivants

- 1) Existence de $(q_j^{\Lambda p})_{j \in \mathbb{N}^*}$ et majoration 'uniforme' par rapport à p
 - 2) Convergence des séries u_i et u_b et coût du contrôle uniforme par rapport à p
- Fattorini, Russel, Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations, 1974.

Définition : Ensemble $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{N})$

Soit $\rho > 0$ et $\mathcal{N} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{N})$ est constitué des suites positives $\Sigma = (\sigma_k)_{k \geq 1}$ telles que

$$(\text{condition de gap}) \quad \forall k \geq 1, \sigma_{k+1} - \sigma_k \geq \rho \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \sum_{k=\mathcal{N}(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} \leq \varepsilon.$$

Théorème [Fattorini, Russel, 1974]

$\forall \varepsilon > 0, \exists K_{\varepsilon, \rho, \mathcal{N}} > 0$ telle que pour toute suite $\Sigma \in \mathcal{L}(\rho, \mathcal{N})$ il existe une famille biorthogonale $(q_k^\Sigma(t))_{k \geq 1}$ pour $(t \mapsto e^{-\sigma_k(T-t)})_{k \geq 1}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \|q_k^\Sigma\|_{L^2} \leq K_{\varepsilon, \rho, \mathcal{N}} \exp(\varepsilon \sigma_k).$$

Il faut vérifier les points suivants

- 1) Existence de $(q_j^{\Lambda p})_{j \in \mathbb{N}^*} \Leftarrow \exists \rho > 0, \forall p \in \mathcal{P}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \lambda_{k+1,p} - \lambda_{k,p} > \rho.$
- 2) Convergence des séries u_i et u_b et coût du contrôle uniforme par rapport à p

- Fattorini, Russel, Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations, 1974.

Définition : Ensemble $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{N})$

Soit $\rho > 0$ et $\mathcal{N} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N}$. L'ensemble $\mathcal{L}(\rho, \mathcal{N})$ est constitué des suites positives $\Sigma = (\sigma_k)_{k \geq 1}$ telles que

$$(\text{condition de gap}) \quad \forall k \geq 1, \sigma_{k+1} - \sigma_k \geq \rho \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \sum_{k=\mathcal{N}(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} \leq \varepsilon.$$

Théorème [Fattorini, Russel, 1974]

$\forall \varepsilon > 0, \exists K_{\varepsilon, \rho, \mathcal{N}} > 0$ telle que pour toute suite $\Sigma \in \mathcal{L}(\rho, \mathcal{N})$ il existe une famille biorthogonale $(q_k^\Sigma(t))_{k \geq 1}$ pour $(t \mapsto e^{-\sigma_k(T-t)})_{k \geq 1}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \|q_k^\Sigma\|_{L^2} \leq K_{\varepsilon, \rho, \mathcal{N}} \exp(\varepsilon \sigma_k).$$

Il faut vérifier les points suivants

- 1) Existence de $(q_j^{\Lambda_p})_{j \in \mathbb{N}^*} \Leftarrow \exists \rho > 0, \forall p \in \mathcal{P}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \lambda_{k+1,p} - \lambda_{k,p} > \rho.$
- 2) Convergence des séries u_i et u_b **et coût du contrôle uniforme par rapport à p**

On souhaite

$$\exists c_1, c_2 > 0, \forall p \in \mathcal{P}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \|\phi_{k,p}\|_{L^2(\omega)} \geq c_1 e^{-\lambda_{k,p}(T-c_2)} \\ \left\| \frac{\partial}{\partial n} \phi_{k,p} \right\|_{L^2(\Gamma)} \geq c_1 e^{-\lambda_{k,p}(T-c_2)} \end{cases}$$

Expression des contrôles

$$\begin{cases} u_i(t, \cdot) = - \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_{k,p} T} \int_{\Omega} \phi_{k,p} y_0}{\int_{\omega} \phi_{k,p}^2} \times \left(q_k^{\Lambda_p}(t) \phi_{k,p} \right) \\ u_b(t, \cdot) = \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_{k,p} T} \int_{\Omega} \phi_{k,p} y_0}{\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial \phi_{k,p}}{\partial n} \right|^2} \times \left(q_k^{\Lambda_p}(t) \frac{\partial \phi_{k,p}}{\partial n} \right). \end{cases}$$

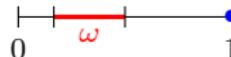
- 1 Présentation des problèmes et méthode de résolution
- 2 Systèmes paraboliques semi-discrétisés en espace (1D)
- 3 Systèmes paraboliques tensorisés multi-dimensionnels semi-discrétisés en espace
- 4 Temps minimal de contrôle à zéro d'une équation parabolique dégénérée
- 5 Perspectives

Opérateur de Sturm-Liouville en 1D sur $\Omega = (0, 1)$.

$$\mathcal{A} = -\partial_x(\gamma(x)\partial_x \bullet) + q(x)\bullet,$$

avec q et γ réguliers.

Zone de contrôle : $\omega \subset \Omega$ ou $\{1\}$



Discrétisation de \mathcal{A} (exemple maillage uniforme $h := \frac{1}{N+1}$)

$$(\mathcal{A}^h U)_j := -\frac{1}{h} \left(\gamma_{j+1/2} \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - \gamma_{j-1/2} \frac{u_j - u_{j-1}}{h} \right) + q_j u_j.$$

Valeurs propres, vecteurs propres : $(\lambda_k^h)_{k=1}^N$ et $(\phi_k^h)_{k=1}^N$.

Équation parabolique semi-discrétisée associée

$$\begin{cases} \partial_t y^h(t) + \mathcal{A}^h y^h(t) = 1_\omega U_i^h(t), & \text{sur } (0, T), \\ y^h(0) = y^{h,0} \in \mathbb{R}^N, \\ y_0^h(t) = 0 \text{ et } y_{N+1}^h(t) = U_b^h(t), & \text{sur } (0, T). \end{cases}$$

Équation parabolique semi-discrétisée

$$\begin{cases} \partial_t y^h(t) + \mathcal{A}^h y^h(t) = 1_\omega U_i^h(t), \text{ sur } (0, T), \\ y^h(0) = y^{h,0} \in \mathbb{R}^N, \\ y_0^h(t) = 0 \text{ et } y_{N+1}^h(t) = U_b^h(t), \text{ sur } (0, T). \end{cases}$$

Contrôlabilité à zéro uniforme : la méthode ne fonctionne pas dans certains cas.
→ Affaiblir la notion de contrôlabilité.

Définition : $\phi(h)$ contrôlabilité à zéro

Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que $\phi(h) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} 0$.

L'équation est $\phi(h)$ -contrôlable à zéro si :

- 1) $\forall h > 0$, $\|y^h(T)\|^2 \leq \phi(h) \|y^{h,0}\|^2$.
- 2) $\forall h > 0$, $\|U_i^h\| \leq C \|y^{h,0}\|$, (ou $\|U_b^h\| \leq C \|y^{h,0}\|$).

Objectifs : Rappel

Trouver $U_i^h \in L^2(0, T; \mathbb{R}^N)$ ou $U_b^h \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ tels que

- $y^h(T) = 0$ ou $\|y^h(T)\|^2 \leq \phi(h) \|y_0^h\|^2$.
- Coût du contrôle uniformément borné par rapport à h .

Résultats existants

López, Zuazua, 1998

- $\mathcal{A}^h = -\Delta^h$ ($\gamma = 1$ et $q = 0$),
- Contrôle à zéro uniforme au bord,
- $\Omega = (0, 1)$, maillage uniforme.

Labbé, Trélat 2006

- \mathcal{A} : génère une famille de semi-groupes uniformément analytiques,
- Méthode de Galerkin, Méthode spectrale, différences finies
- $\phi(h)$ contrôlabilité à zéro avec $\phi(h) = h^\beta$, la constante β est imposée par les paramètres.

Boyer, Hubert, Le Rousseau, 2010

- \mathcal{A}^h : Discrétisation (par différences finies) d'un opérateur de Sturm-Liouville général,
- Contrôle à zéro distribué uniquement,
- Maillages cartésien non uniformes,
- Ω de dimension $d \geq 1$,
- $\phi(h)$ contrôlabilité à zéro avec $\phi(h) = e^{-C/h^2}$.

Objectifs : Rappel

Trouver $U_i^h \in L^2(0, T; \mathbb{R}^N)$ ou $U_b^h \in L^2(0, T; \mathbb{R})$ tels que

- $y^h(T) = 0$ ou $\|y^h(T)\|^2 \leq \phi(h) \|y_0^h\|^2$.
- Coût du contrôle uniformément borné par rapport à h .

Nouveaux résultats

A., Boyer, Morancey, 2018

- $\Omega = (0, 1)$,
- \mathcal{A}^h : Opérateur de Sturm-Liouville général,
- Contrôle à zéro distribué et au bord,
- Maillages quasi-uniformes,
- Systèmes d'EDPs couplés sous forme cascade avec un 1 seul contrôle.

On souhaite obtenir

1) $\exists \rho > 0, \forall h > 0, \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \lambda_{k+1}^h - \lambda_k^h \geq \rho.$

2) Minorations de ϕ_k^h (minoration $L^2(\omega)$ ou dérivée discrète au bord).

Exemple de López, Zuazua : $\mathcal{A}^h = -\Delta^h$

Pour $k \leq N$: $\lambda_k^h = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi h k}{2}\right)$

$(\phi_k^h)_j = \sqrt{2} \sin(jhk\pi)$ et (par calcul explicite) $\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\begin{cases} \left| \frac{0 - (\phi_k^h)_N}{h} \right| \geq 2\sqrt{2}, \\ \|\phi_k^h\|_{L^2(\omega^h)} \geq C. \end{cases}$

Conclusion

L'équation de la chaleur semi-discrétisée en espace est contrôlable à zéro uniformément par rapport à h .

Qu'en est-il pour

- Un opérateur de diffusion plus général $\mathcal{A} = -\partial_x(\gamma(x)\partial_x \bullet) + q(x)\bullet$?
- Des maillages plus généraux ?
- Pour des systèmes d'équations ?

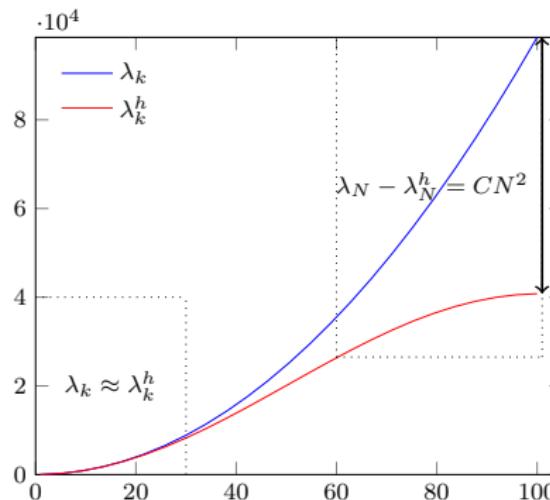
Cas général

On souhaite obtenir

- 1) $\exists \rho > 0, \forall h > 0, \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, \lambda_{k+1}^h - \lambda_k^h \geq \rho.$
- 2) Minorations de ϕ_k^h (minoration $L^2(\omega)$ ou dérivée discrète au bord)

Cas général

1. Asymptotiquement $\lambda_k \sim k^2\pi^2$, mais



Inégalité de gap (dans le cas $q = 0$)

Cas continu

$$\begin{cases} \mathcal{A}\phi_k := -\partial_x(\gamma(x)\partial_x\phi_k) = \lambda_k\phi_k \\ \phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

Inégalité de gap (dans le cas $q = 0$)

Cas continu

$$\begin{cases} \mathcal{A}\phi_k := -\partial_x(\gamma(x)\partial_x\phi_k) = \lambda_k\phi_k \\ \phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v(x) = \phi'_k(1)\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\phi'_{k+1}(1)$$

$$\mathcal{A}v(x) = \lambda_{k+1}v(x) + \underline{\phi'_{k+1}(1)\phi_k(x)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}$$

Inégalité de gap (dans le cas $q = 0$)

Cas continu

$$\begin{cases} \mathcal{A}\phi_k := -\partial_x(\gamma(x)\partial_x\phi_k) = \lambda_k\phi_k \\ \phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v(x) = \phi'_k(1)\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\phi'_{k+1}(1)$$

$$\mathcal{A}v(x) = \lambda_{k+1}v(x) + \underline{\phi'_{k+1}(1)\phi_k(x)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}$$

$$\text{Posons } V(x) = {}^t \left(v(x), \sqrt{\frac{\gamma(x)}{\lambda_{k+1}}} v'(x) \right)$$

$$V'(x) = M(x)V(x) - \phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} F(x)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} \\ -\sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} & 0 \end{pmatrix}$$

Inégalité de gap (dans le cas $q = 0$)

Cas continu

$$\begin{cases} \mathcal{A}\phi_k := -\partial_x(\gamma(x)\partial_x\phi_k) = \lambda_k\phi_k \\ \phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v(x) = \phi'_k(1)\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\phi'_{k+1}(1)$$

$$\mathcal{A}v(x) = \lambda_{k+1}v(x) + \underline{\phi'_{k+1}(1)\phi_k(x)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}$$

$$\text{Posons } V(x) = {}^t \left(v(x), \sqrt{\frac{\gamma(x)}{\lambda_{k+1}}} v'(x) \right)$$

$$V'(x) = M(x)V(x) - \phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} F(x)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} \\ -\sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(y, x) := \exp \left(\int_x^y M(s) ds \right), \quad \|\mathcal{S}(y, x)\| = 1$$

$$V(y) = S(y, x)V(x) + \int_x^y S(y, s)F(s)\phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

Inégalité de gap (dans le cas $q = 0$)

Cas continu

$$\begin{cases} \mathcal{A}\phi_k := -\partial_x(\gamma(x)\partial_x\phi_k) = \lambda_k\phi_k \\ \phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v(x) = \phi'_k(1)\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\phi'_{k+1}(1)$$

$$\mathcal{A}v(x) = \lambda_{k+1}v(x) + \underline{\phi'_{k+1}(1)\phi_k(x)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}$$

$$\text{Posons } V(x) = {}^t \left(v(x), \sqrt{\frac{\gamma(x)}{\lambda_{k+1}}} v'(x) \right)$$

$$V'(x) = M(x)V(x) - \phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} F(x)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} \\ -\sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(y, x) := \exp \left(\int_x^y M(s) ds \right), \quad \|\mathcal{S}(y, x)\| = 1$$

$$V(y) = S(y, x)V(x) + \int_x^y S(y, s)F(s)\phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

$$C\|V(y)\| \leq \|\mathcal{V}(1)\| + |\phi'_{k+1}(1)| \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq C\sqrt{\lambda_{k+1}}.$$

Inégalité de gap (dans le cas $q = 0$)

Cas continu

$$\begin{cases} \mathcal{A}\phi_k := -\partial_x(\gamma(x)\partial_x\phi_k) = \lambda_k\phi_k \\ \phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v(x) = \phi'_k(1)\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\phi'_{k+1}(1)$$

$$\mathcal{A}v(x) = \lambda_{k+1}v(x) + \underline{\phi'_{k+1}(1)\phi_k(x)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}$$

$$\text{Posons } V(x) = {}^t \left(v(x), \sqrt{\frac{\gamma(x)}{\lambda_{k+1}}} v'(x) \right)$$

$$V'(x) = M(x)V(x) - \phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} F(x)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} \\ -\sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(y, x) := \exp \left(\int_x^y M(s) ds \right), \quad \|\mathcal{S}(y, x)\| = 1$$

$$V(y) = S(y, x)V(x) + \int_x^y S(y, s)F(s)\phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

$$C\|V(y)\| \leq \|\mathcal{V}(1)\| + |\phi'_{k+1}(1)| \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq C\sqrt{\lambda_{k+1}}.$$

Cas discret

$$\begin{cases} \mathcal{A}^h\phi_k^h = \lambda_k^h\phi_k^h \\ (\phi_k^h)_0 = (\phi_k^h)_{N+1} = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

Inégalité de gap (dans le cas $q = 0$)

Cas continu

$$\begin{cases} \mathcal{A}\phi_k := -\partial_x(\gamma(x)\partial_x\phi_k) = \lambda_k\phi_k \\ \phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v(x) = \phi'_k(1)\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\phi'_{k+1}(1)$$

$$\mathcal{A}v(x) = \lambda_{k+1}v(x) + \underline{\phi'_{k+1}(1)\phi_k(x)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}$$

Posons $V(x) = {}^t \begin{pmatrix} v(x), \sqrt{\frac{\gamma(x)}{\lambda_{k+1}}}v'(x) \end{pmatrix}$

$$V'(x) = M(x)V(x) - \phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} F(x)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} \\ -\sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(y, x) := \exp \left(\int_x^y M(s) ds \right), \quad \|\mathcal{S}(y, x)\| = 1$$

$$V(y) = S(y, x)V(x) + \int_x^y S(y, s)F(s)\phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

$$C\|V(y)\| \leq \|\mathcal{V}(1)\| + |\phi'_{k+1}(1)| \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq C\sqrt{\lambda_{k+1}}.$$

Cas discret

$$\begin{cases} \mathcal{A}^h\phi_k^h = \lambda_k^h\phi_k^h \\ (\phi_k^h)_0 = (\phi_k^h)_{N+1} = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v^h = (\partial_r\phi_k^h) \phi_{k+1}^h - (\partial_r\phi_{k+1}^h) \phi_k^h$$

$$\mathcal{A}^h v^h = \lambda_{k+1}^h v^h + \underline{\partial_r\phi_{k+1}^h \phi_k^h (\lambda_{k+1}^h - \lambda_k^h)}$$

Inégalité de gap (dans le cas $q = 0$)

Cas continu

$$\begin{cases} \mathcal{A}\phi_k := -\partial_x(\gamma(x)\partial_x\phi_k) = \lambda_k\phi_k \\ \phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v(x) = \phi'_k(1)\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\phi'_{k+1}(1)$$

$$\mathcal{A}v(x) = \lambda_{k+1}v(x) + \underline{\phi'_{k+1}(1)\phi_k(x)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}$$

Posons $V(x) = {}^t \left(v(x), \sqrt{\frac{\gamma(x)}{\lambda_{k+1}}} v'(x) \right)$

$$V'(x) = M(x)V(x) - \phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} F(x)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} \\ -\sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(y, x) := \exp \left(\int_x^y M(s) ds \right), \quad \|\mathbf{S}(y, x)\| = 1$$

$$V(y) = S(y, x)V(x) + \int_x^y S(y, s)F(s)\phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} ds$$

$$C\|V(y)\| \leq \|\mathbf{V}(1)\| + |\phi'_{k+1}(1)| \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq C\sqrt{\lambda_{k+1}}.$$

Cas discret

$$\begin{cases} \mathcal{A}^h\phi_k^h = \lambda_k^h\phi_k^h \\ (\phi_k^h)_0 = (\phi_k^h)_{N+1} = 0, \text{ et } \|\phi_k^h\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v^h = (\partial_r\phi_k^h) \phi_{k+1}^h - (\partial_r\phi_{k+1}^h) \phi_k^h$$

$$\mathcal{A}^h v^h = \lambda_{k+1}^h v^h + \underline{\partial_r\phi_{k+1}^h \phi_k^h (\lambda_{k+1}^h - \lambda_k^h)}$$

Posons $V_j^h = {}^t \left(v_j^h, \sqrt{\frac{\gamma_{j-1/2}}{\lambda_{k+1}^h}} \frac{v_{j+1}^h - v_j^h}{h} \right)$

$$V_{j+1}^h = (I + hM_j^h) V_j^h - h\partial_r\phi_{k+1}^h \frac{\lambda_{k+1}^h - \lambda_k^h}{\sqrt{\lambda_{k+1}^h}} F_j^h$$

$$M_j^h = \begin{pmatrix} -h \frac{\lambda_{k+1}^h}{\gamma_{j+1/2}} & \sqrt{\frac{\lambda_{k+1}^h}{\gamma_{j+1/2}}} \\ -\sqrt{\frac{\lambda_{k+1}^h}{\gamma_{j+1/2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

Inégalité de gap (dans le cas $q = 0$)

Cas continu

$$\begin{cases} \mathcal{A}\phi_k := -\partial_x(\gamma(x)\partial_x\phi_k) = \lambda_k\phi_k \\ \phi_k(0) = \phi_k(1) = 0, \text{ et } \|\phi_k\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v(x) = \phi'_k(1)\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)\phi'_{k+1}(1)$$

$$\mathcal{A}v(x) = \lambda_{k+1}v(x) + \underline{\phi'_{k+1}(1)\phi_k(x)(\lambda_{k+1} - \lambda_k)}$$

Posons $V(x) = {}^t \left(v(x), \sqrt{\frac{\gamma(x)}{\lambda_{k+1}}} v'(x) \right)$

$$V'(x) = M(x)V(x) - \phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} F(x)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} \\ -\sqrt{\frac{\lambda_{k+1}}{\gamma(x)}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S(y, x) := \exp \left(\int_x^y M(s) ds \right), \quad \|\mathcal{S}(y, x)\| = 1$$

$$V(y) = S(y, x)V(x) + \int_x^y S(y, s)F(s)\phi'_{k+1}(1) \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}} ds$$

$$C\|V(y)\| \leq \cancel{\|V(1)\|} + |\phi'_{k+1}(1)| \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\sqrt{\lambda_{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1} - \lambda_k \geq C\sqrt{\lambda_{k+1}}.$$

Cas discret

$$\begin{cases} \mathcal{A}^h\phi_k^h = \lambda_k^h\phi_k^h \\ (\phi_k^h)_0 = (\phi_k^h)_{N+1} = 0, \text{ et } \|\phi_k^h\|_{L^2(0,1)} = 1. \end{cases}$$

$$v^h = (\partial_r\phi_k^h) \phi_{k+1}^h - (\partial_r\phi_{k+1}^h) \phi_k^h$$

$$\mathcal{A}^h v^h = \lambda_{k+1}^h v^h + \underline{\partial_r\phi_{k+1}^h \phi_k^h (\lambda_{k+1}^h - \lambda_k^h)}$$

Posons $V_j^h = {}^t \left(v_j^h, \sqrt{\frac{\gamma_{j-1/2}}{\lambda_{k+1}^h}} \frac{v_{j+1}^h - v_j^h}{h} \right)$

$$V_{j+1}^h = (I + hM_j^h) V_j^h - h\partial_r\phi_{k+1}^h \frac{\lambda_{k+1}^h - \lambda_k^h}{\sqrt{\lambda_{k+1}^h}} F_j^h$$

$$M_j^h = \begin{pmatrix} -h \frac{\lambda_{k+1}^h}{\gamma_{j+1/2}} & \sqrt{\frac{\lambda_{k+1}^h}{\gamma_{j+1/2}}} \\ -\sqrt{\frac{\lambda_{k+1}^h}{\gamma_{j+1/2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

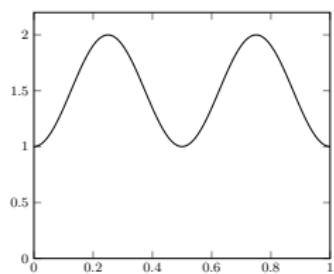
$$S_{i \leftarrow j}^h = (I + hM_{i-1}^h) \dots (I + hM_j^h)$$

Maillage uniforme et $\gamma = 1 \Rightarrow \|S_{i \leftarrow j}^h\| \leq C$.

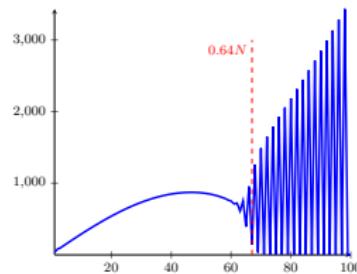
Cas général $k \leq \alpha N \Rightarrow \|S_{i \leftarrow j}^h\| \leq C$.

On conclut de la même façon.

Inégalité de gap, cas général



(a) Coefficient de diffusion γ



(b) $k \mapsto |\lambda_{k+1}^h - \lambda_k^h|$

FIGURE – Le gap avec $N = 100$, $\gamma = 2 - \cos(2\pi x)^2$ et $q = 0$.

- Problème en hautes fréquences.
- Mais on sait estimer l'indice critique (de la forme αN).

Stratégie

- Annuler les modes propres jusqu'à l'indice critique.
- Puis laisser le système dissiper.

→ On obtient un résultat de $\phi(h)$ contrôlabilité à zéro

Équation parabolique semi-discrétisée - Cas scalaire

$$\begin{cases} \partial_t y^h(t) + \mathcal{A}^h y^h(t) = 1_\omega U_i^h(t), \text{ sur } (0, T), \\ y^h(0) = y^{h,0} \in \mathbb{R}^N, \\ y_0^h(t) = 0 \text{ et } y_{N+1}^h(t) = U_b^h(t), \text{ sur } (0, T). \end{cases} \quad (1)$$

Théorème [A., Boyer, Morancey, 2018 - Numerische Mathematik]

Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\phi(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} C_1 \exp\left(\frac{-C_2 T}{h^2}\right).$$

Alors, sur maillage uniforme l'équation (1) est $\phi(h)$ -contrôlable à zéro, c'est-à-dire

$$\forall h > 0, \|y^h(T)\|^2 \leq \phi(h) \|y^{h,0}\|^2.$$

Équation parabolique semi-discrétisée - Cas cascade

$$\left\{ \begin{array}{l} (y^h)'(t) + \begin{pmatrix} \mathcal{A}^h & 0 \\ \textcolor{red}{1} & \mathcal{A}^h \end{pmatrix} y^h(t) = \begin{pmatrix} 1_\omega U_i^h \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_b^h(t) \mathbf{e}_N \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ sur } (0, T), \\ y^h(0) = y^{h,0} \in (\mathbb{R}^N)^2 \\ y_0^h(t) = 0, \text{ sur } (0, T). \end{array} \right. \quad (2)$$

La seconde équation est contrôlée par la solution de la première équation (elle-même contrôlée par U_i^h ou U_b^h).

Contrôlabilité d'un système parabolique en cascade

Équation parabolique semi-discrétisée - Cas cascade

$$\begin{cases} (y^h)'(t) + \begin{pmatrix} \mathcal{A}^h & 0 \\ 1 & \mathcal{A}^h \end{pmatrix} y^h(t) = \begin{pmatrix} 1_\omega U_i^h \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_b^h(t) \mathbf{e}_N \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ sur } (0, T), \\ y^h(0) = y^{h,0} \in (\mathbb{R}^N)^2 \\ y_0^h(t) = 0, \text{ sur } (0, T). \end{cases} \quad (2)$$

Théorème [A., Boyer, Morancey, 2018 - Numerische Mathematik]

Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\phi(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} C_1 \exp\left(\frac{-C_2 T}{h^2}\right).$$

Alors, sur un maillage uniforme l'équation (2) est $\phi(h)$ -contrôlable à zéro.

Les techniques de Carleman de l'article

- ▶ Boyer, Hubert, Le Rousseau, Discrete Carleman Estimates for Elliptic Operators in Arbitrary Dimension and Applications, 2010.

ne peuvent être utilisées sur un tel système contrôlé par le bord.

- ▶ Ammar-Khodja, Benabdallah, González-Burgos, Teresa, Recent results on the controllability of linear coupled parabolic problems : A survey, 2011.

Équation parabolique semi-discrétisée - Cas cascade

$$\left\{ \begin{array}{l} (y^h)'(t) + \begin{pmatrix} \mathcal{A}^h & 0 \\ 1 & \mathcal{A}^h \end{pmatrix} y^h(t) = \begin{pmatrix} 1_\omega U_i^h \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_b^h(t) \mathbf{e}_N \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ sur } (0, T), \\ y^h(0) = y^{h,0} \in (\mathbb{R}^N)^2 \\ y_0^h(t) = 0, \text{ sur } (0, T). \end{array} \right. \quad (2)$$

Différences principales avec le cas scalaire :

- l'opérateur $\begin{pmatrix} \mathcal{A}^h & 0 \\ 1 & \mathcal{A}^h \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable \Rightarrow on utilise une forme de Jordan.
- Existence et estimées d'une famille biorthogonale pour

$$\left\{ e^{-\lambda_k^h(T-t)} \right\}_{k \geq 1} \cup \left\{ (T-t)e^{-\lambda_k^h(T-t)} \right\}_{k \geq 1}$$

Nous prouvons des résultats similaires pour des maillages quasi-uniformes.

Équation avec un mode instable

$$\begin{cases} \partial_t y(t, x) - \partial_{xx} y(t, x) - 1.1\pi^2 y(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ y(0, x) = y^0(x), & \text{sur } (0, 1), \\ y(t, 0) = 0, & \text{sur } (0, T), \\ y(t, 1) = 0, & \text{sur } (0, T). \end{cases}$$

Équation avec un mode instable

$$\begin{cases} \partial_t y(t, x) - \partial_{xx} y(t, x) - 1.1\pi^2 y(t, x) = 0, & (t, x) \in (0, T) \times (0, 1), \\ y(0, x) = y^0(x), & \text{sur } (0, 1), \\ y(t, 0) = 0, & \text{sur } (0, T), \\ y(t, 1) = \color{red}U_b(t)\color{black}, & \text{sur } (0, T). \end{cases}$$

Un exemple de système d'équations paraboliques couplés

On considère l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t y - \partial_x^2 y = Cy + \mathbf{1}_\omega BU_d, & \text{sur } (0, T) \times \Omega, \\ y(0, x) = y^0(x), & \text{sur } \Omega, \\ y(t, 0) = B_g U_b^g, \\ y(t, 1) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

avec le jeu de données :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & -3/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème [Olive, 2013]

Le système (3) est

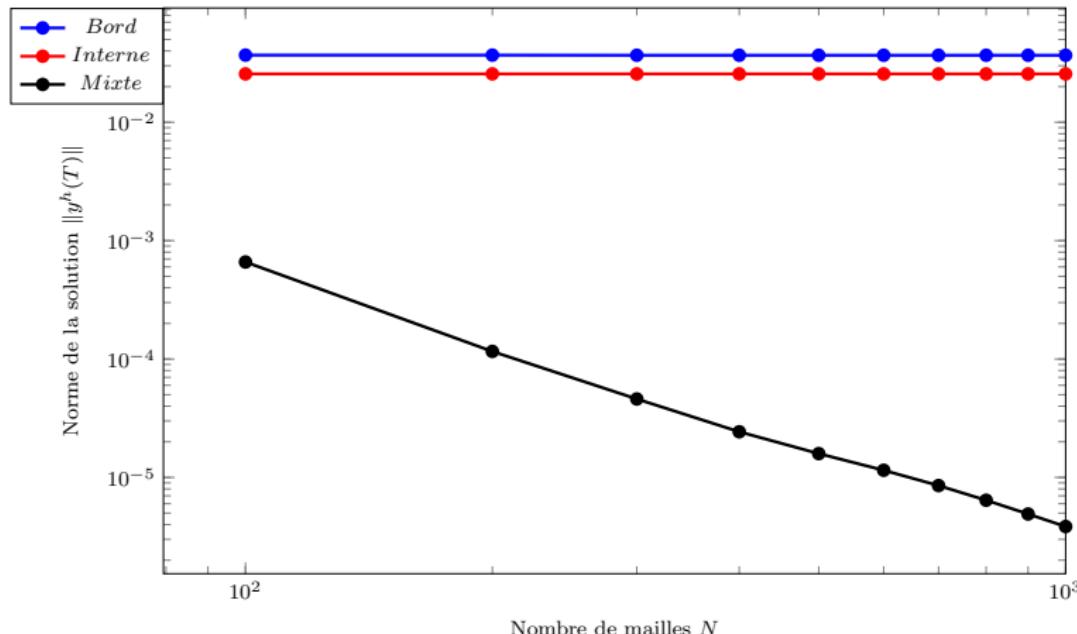
- Non contrôlable à zéro avec seulement un contrôle au bord.
- Non contrôlable à zéro avec seulement un contrôle interne.
- Contrôlable à zéro avec un contrôle au bord et un contrôle interne.

Avec uniquement un contrôle interne $\omega = (0.3, 0.8)$

Illustrations numériques

Avec un contrôle mixte : $\omega = (0.3, 0.8)$ et $\Gamma = \{0\}$, $T = 0.1$

Comparaison des normes des solutions



- 1 Présentation des problèmes et méthode de résolution
- 2 Systèmes paraboliques semi-discrétisés en espace (1D)
- 3 **Systèmes paraboliques tensorisés multi-dimensionnels semi-discrétisés en espace**
- 4 Temps minimal de contrôle à zéro d'une équation parabolique dégénérée
- 5 Perspectives

Contrôlabilité à zéro uniforme au bord de systèmes discréétisés en cascade avec Ω de dimension > 1

- ✗ Techniques de Carleman discrètes inefficaces.
- ✗ Asymptotique de Weyl \rightarrow méthode des moments : inefficace.

- ✗ Contre-exemple de O. Kavian en dimension $n = 2$.
- ✓ Nouvelle approche sur des systèmes tensorisés
 - ▶ Benabdallah, Boyer, Gonzalez-Burgos, Olive, Sharp estimates of the one-dimensional boundary control cost for parabolic systems and application to the n -dimensional boundary null controllability in cylindrical domains, 2014.

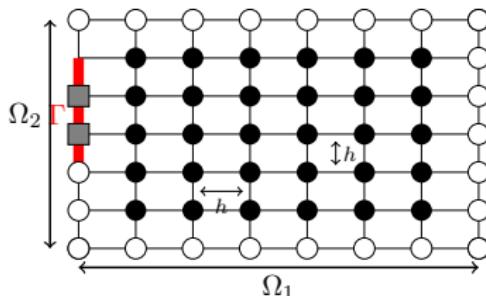
En deux dimensions

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \alpha + (\mathcal{A}_1 \alpha) + (\mathcal{A}_2 \alpha) = 0, \\ \partial_t \beta + (\mathcal{A}_1 \beta) + (\mathcal{A}_2 \beta) + \alpha = 0, \\ \beta = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \\ \alpha = U_b 1_\Gamma, \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Opérateurs

- $\mathcal{A}_1 = -\partial_{x_1}(\gamma_1(x_1) \bullet)$
- $\mathcal{A}_2 = -\partial_{x_2}(\gamma_2(x_2) \bullet)$

Contrôlabilité à zéro uniforme au bord de systèmes discréétisés en cascade avec Ω de dimension > 1



$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \alpha_{i,j} + (\mathcal{A}_1^h \alpha)_{i,j} + (\mathcal{A}_2^h \alpha)_{i,j} = 0, \\ \partial_t \beta_{i,j} + (\mathcal{A}_1^h \beta)_{i,j} + (\mathcal{A}_2^h \beta)_{i,j} + \alpha_{i,j} = 0, \\ \beta_{i,0} = \beta_{i,N+1} = \beta_{0,j} = \beta_{N+1,j} = 0, \\ \alpha_{0,j} = (U_b^h)_j 1_\Gamma(jh), \\ \alpha_{N+1,j} = \alpha_{i,N+1} = \alpha_{i,0} = 0. \end{array} \right.$$

Opérateur discréétisé

$$(\mathcal{A}_1^h \alpha)_{i,j} + (\mathcal{A}_2^h \beta)_{i,j} = - \frac{\gamma_{1,i+1/2} \frac{\alpha_{i+1,j} - \alpha_{i,j}}{h} - \gamma_{1,i-1/2} \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{i-1,j}}{h}}{h} - \frac{\gamma_{2,j+1/2} \frac{\beta_{i,j+1} - \beta_{i,j}}{h} - \gamma_{2,j-1/2} \frac{\beta_{i,j} - \beta_{i,j-1}}{h}}{h}$$

Contrôle à zéro sur le bord, version continue

Système sur Ω_1

$$\begin{cases} \partial_t \alpha^1 + \mathcal{A}_1 \alpha^1 = 0, & \text{sur } (0, T) \times \Omega_1 \\ \partial_t \beta^1 + \mathcal{A}_1 \beta^1 + \alpha^1 = 0, & \text{sur } (0, T) \times \Omega_1 \\ \alpha^1 = 1_{\{0\}} U_b, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega_1 \\ \beta^1 = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega_1 \end{cases} \quad (4)$$

Théorème [Benabdallah, Boyer, Gonzalez-Burgos, Olive, 2014]

On suppose que

- Le système (4) est contrôlable à zéro pour tout $T > 0$ et que le coût du contrôle $C_T^{\Omega_1}$ vérifie :

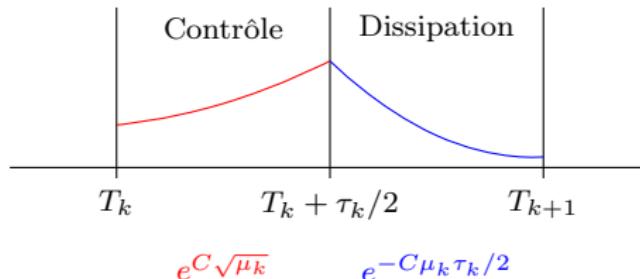
$$C_T^{\Omega_1} \leq C e^{C/T}, \forall T > 0.$$

- L'opérateur \mathcal{A}_2 vérifie une inégalité spectrale de type Lebeau-Robbiano, relativement à ω_2 .

Alors pour tout $T > 0$, le système complet posé sur Ω est contrôlable à zéro sur $\Gamma = \{0\} \times \omega_2$.

Notation

- Spectre de $\mathcal{A}_i : (\lambda_j^{\Omega_i})_{j \geq 1}$, fonctions propres associés : $(\phi_j^{\Omega_i})_{j \geq 1}$.
- Espace $E_\mu := \left\{ \sum_{\lambda_j^{\Omega_2} \leq \mu} z_j(x_1) \phi_j^{\Omega_2}(x_2) \mid z_j \in H_0^1(\Omega_1) \right\}$.



Partie contrôle de T_k à $T_k + \tau_k/2$

- Inégalité d'observabilité 1D. Soit $z(t, x_1, x_2) = \sum_{\lambda_j^{\Omega_2} \leq \mu_k} z_j^1(t, x_1) \phi_1^{\Omega_2}(x_2)$.

$$\|z_j^1(0)\|_{H_0^1(\Omega_1)}^2 \leq C e^{C/\tau} \int_0^\tau \left| \frac{\partial z_j^1}{\partial n_1} \right|^2(t, 0) dt$$

- Inégalité spectrale de Lebeau Robbiano

$$\|z(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C e^{C/\tau + C\sqrt{\mu_k}} \int_0^\tau \int_{\omega_2} \left| \frac{\partial z}{\partial n_1} \right|^2(t, 0, x_2) dx_2 dt.$$

- Dualité

$$P_{E_{\mu_k}} y(T_k + \frac{\tau_k}{2}) = 0 \text{ et } \|u_k\|_{L^2((T_k, T_k + \frac{\tau_k}{2}) \times \partial\Omega)} \leq C e^{C/\tau_k + C\sqrt{\mu_k}} \|y(T_k)\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

- Dépendance continue de la solution par rapport aux données

$$\begin{aligned} \|y\left(T_k + \frac{\tau_k}{2}\right)\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq C \left(\|y(T_k)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_k\|_{L^2((T_k, T_k + \frac{\tau_k}{2}) \times \partial\Omega)} \right) \\ \|y\left(T_k + \frac{\tau_k}{2}\right)\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq C e^{2C/\tau_k + C\sqrt{\mu_k}} \|y(T_k)\|_{H^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Partie dissipation de $T_k + \tau_k/2$ à T_{k+1}

$$\|y(T_{k+1})\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C e^{2C/\tau_k + C\sqrt{\mu_k} - C\mu_k\tau_k/2} \|y(T_k)\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Choisir μ_k et τ_k convenablement.

En discret

- Sur le système 1D, on a uniquement la $\phi(h)$ contrôlabilité à zéro (Section 2).
A chaque étape, on ne met pas à zéro les basses fréquences.
- 1. Estimation du contrôle en $Ce^{\frac{C}{T}}$.
2. Inégalité de Lebeau-Robbiano discrète sur une partie du spectre.
 - ▶ Boyer, Hubert, Le Rousseau, Discrete Carleman Estimates for Elliptic Operators in Arbitrary Dimension and Applications, 2010.
→ inégalité d'observabilité relaxée.
- La dépendance continue de la solution par rapport aux données exige des normes de Sobolev discrètes ad hoc.

- Inégalité d'observabilité relaxée 1D

$$\|z_j^1(0)\|_{1,\mathcal{A}_1^h}^2 \leq e^{C/\tau} \int_0^\tau |\partial_r z_j^1(t)|^2 dt + \underline{e^{M/\tau - C\mu_k \tau} \|z_j^1(\tau)\|_{1,\mathcal{A}_1^h}^2}$$

- Inégalité spectrale de Lebeau Robbiano

$$\|z(0)\|_{1,\mathcal{A}^h}^2 \leq e^{C/\tau + C\sqrt{\mu_k}} \int_0^\tau \|z(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + e^{M/\tau - C\mu_k \tau} \|z(\tau)\|_{1,\mathcal{A}^h}^2$$

- Dualité

$$\begin{cases} \|u_k\| \leq e^{2C/\tau_k + C\sqrt{\mu_k}} \|y(T_k)\|_{-1,\mathcal{A}^h}, \\ \|P_{\mu_k} y(T_k + \tau_k/2)\|_{-1,\mathcal{A}^h} \leq e^{2M/\tau_k - C\mu_k \tau_k/2} \|y(T_k)\|_{-1,\mathcal{A}^h}. \end{cases}$$

- Dissipation entre $T_k + \tau_k/2$ et T_{k+1} puis dépendance continue

$$\begin{aligned} \|P_{\mu_k}^\perp y(T_{k+1})\|_{-1,\mathcal{A}^h} &\leq e^{-C\mu_k \tau_k/2} \|P_{\mu_k}^\perp y(T_k + \tau_k/2)\|_{-1,\mathcal{A}^h} \\ &\leq e^{-C\mu_k \tau_k/2} \left(1 + e^{2C/\tau_k + C\sqrt{\mu_k}}\right) \|y(T_k)\|_{-1,\mathcal{A}^h}. \end{aligned}$$

- Sommons $y(T_{k+1}) = P_{\mu_k} y(T_{k+1}) + P_{\mu_k}^\perp y(T_{k+1})$,

$$\|y(T_{k+1})\|_{-1,\mathcal{A}^h} \leq e^{C(1+\frac{1}{\tau_k} + \tau_k)} e^{-C\mu_k \tau_k/2 + C\sqrt{\mu_k}} \|y(T_k)\|_{-1,\mathcal{A}^h}.$$

- La procédure continue tant que $\mu_k \leq \max(\frac{C_{\Omega_1}}{h^2}, \frac{C_{LR}}{h^2})$.

- Inégalité d'observabilité relaxée 1D

$$\|z_j^1(0)\|_{1,\mathcal{A}_1^h}^2 \leq e^{C/\tau} \int_0^\tau |\partial_r z_j^1(t)|^2 dt + \underline{e^{M/\tau - C\mu_k \tau} \|z_j^1(\tau)\|_{1,\mathcal{A}_1^h}^2}$$

- Inégalité spectrale de Lebeau Robbiano

$$\|z(0)\|_{1,\mathcal{A}^h}^2 \leq e^{C/\tau + C\sqrt{\mu_k}} \int_0^\tau \|z(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + e^{M/\tau - C\mu_k \tau} \|z(\tau)\|_{1,\mathcal{A}^h}^2$$

- Dualité

$$\begin{cases} \|u_k\| \leq e^{2C/\tau_k + C\sqrt{\mu_k}} \|y(T_k)\|_{-1,\mathcal{A}^h}, \\ \|P_{\mu_k} y(T_{k+1})\|_{-1,\mathcal{A}^h} \leq e^{C\tau_k/2} e^{2M/\tau_k - C\mu_k \tau_k/2} \|y(T_k)\|_{-1,\mathcal{A}^h}. \end{cases}$$

- Dissipation entre $T_k + \tau_k/2$ et T_{k+1} puis dépendance continue

$$\begin{aligned} \|P_{\mu_k}^\perp y(T_{k+1})\|_{-1,\mathcal{A}^h} &\leq e^{-C\mu_k \tau_k/2} \|P_{\mu_k}^\perp y(T_k + \tau_k/2)\|_{-1,\mathcal{A}^h} \\ &\leq e^{-C\mu_k \tau_k/2} \left(1 + e^{2C/\tau_k + C\sqrt{\mu_k}}\right) \|y(T_k)\|_{-1,\mathcal{A}^h}. \end{aligned}$$

- Sommons $y(T_{k+1}) = P_{\mu_k} y(T_{k+1}) + P_{\mu_k}^\perp y(T_{k+1})$,

$$\|y(T_{k+1})\|_{-1,\mathcal{A}^h} \leq e^{C(1+\frac{1}{\tau_k} + \tau_k)} e^{-C\mu_k \tau_k/2 + C\sqrt{\mu_k}} \|y(T_k)\|_{-1,\mathcal{A}^h}.$$

- La procédure continue tant que $\mu_k \leq \max(\frac{C_{\Omega_1}}{h^2}, \frac{C_{LR}}{h^2})$.

Théorème [A., Boyer, 2018]

Hypothèses sur Ω_1 (Contrôlabilité relaxée)

$$\begin{cases} \|U_b\|_{L^2(0,T)} \leq e^{C(1+\frac{1}{T})} \|y^0\|_{-s,\mathcal{A}_1} \\ \|y(T)\|_{-s,\mathcal{A}_1} \leq e^{C(1+\frac{1}{T})} e^{-\mu_{E_1} T} \|y^0\|_{-s,\mathcal{A}_1} \end{cases}$$

Hypothèses sur Ω_2 (Inégalité de Lebeau-Robbiano partielle)

$$\|\Psi\|_0 \leq e^{C\sqrt{\mu}} \|1_{\omega_2} \Psi\|_0, \forall \Psi \in E_\mu, \text{ avec } \mu < \mu_{E_2}$$

Conclusion

$$\|y(T)\|_{-s,\mathcal{A}} \leq e^{C'(1+\frac{1}{T}+T)} e^{-C \min(\mu_{E_1}, \mu_{E_2}) T} \|y^0\|_{-s,\mathcal{A}}$$

et la dépendance en temps du coût du contrôle est de la forme $e^{C(T+1/T)}$.

- On obtient la $\phi(h)$ contrôlabilité à zéro pour des systèmes d'EDPs discrétisées sous forme cascade dans le cylindre Ω , contrôlés par le bord.
- Ce Théorème s'applique aussi sur des problèmes continus.
- On retrouve le résultat principal de
 - ▶ Benabdallah, Boyer, Gonzalez-Burgos, Olive, Sharp estimates of the 1D boundary control cost for parabolic systems and application to the n -dimensional boundary null controllability in cylindrical domains, 2014.

En deux dimensions scalaire

$$\begin{cases} \partial_t y(t) - \Delta y(t) = 0, \text{ avec } (t) \in (0, T), \\ y(0, x_1, x_2) = \sin^2(\pi x_1) \times \sin^2(\pi x_2), \text{ avec } (x_1, x_2) \in \Omega, \\ y(t, x_1, x_2) = 1_{\Gamma} U_b(t, x_1, x_2), \text{ avec } (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

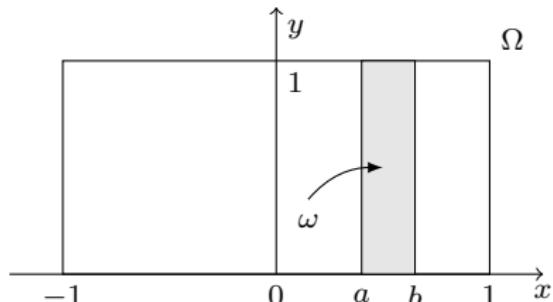
En deux dimensions système

$$\begin{cases} \partial_t y_1 - \Delta y_1 = 0, \\ \partial_t y_2 - \Delta y_2 + y_1 = 0, \\ y_1(0, x_1, x_2) = 0, \text{ avec } (x_1, x_2) \in \Omega, \\ y_2(0, x_1, x_2) = \sin^2(\pi x_1) \times \sin^2(\pi x_2), \text{ avec } (x_1, x_2) \in \Omega, \\ y_1(t, x_1, x_2) = 1_\Gamma U_b(t, x_1, x_2), \text{ avec } (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \\ y_2(t, x_1, x_2) = 0, \text{ avec } (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

- 1 Présentation des problèmes et méthode de résolution
- 2 Systèmes paraboliques semi-discrétisés en espace (1D)
- 3 Systèmes paraboliques tensorisés multi-dimensionnels semi-discrétisés en espace
- 4 Temps minimal de contrôle à zéro d'une équation parabolique dégénérée
- 5 Perspectives

L'équation de Grushin

Opérateur elliptique dégénéré : $\mathcal{A} := -\partial_{xx} - |x|^2 \partial_{yy}$



$$(G) \begin{cases} \partial_t f + \mathcal{A}f = \mathbf{1}_\omega u \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ f(0) = f_0 \in L^2(\Omega) \text{ dans } \Omega \\ f = 0 \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

- ▶ Beauchard, Cannarsa, Guglielmi, Null controllability of Grushin-type operators in dimension two, 2014.

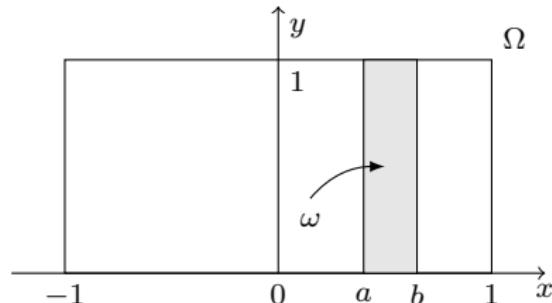
Théorème [Beauchard, Cannarsa, Guglielmi, 2014]

Il existe $T^* \geq \frac{a^2}{2}$ tel que (G) est :

- non contrôlable à zéro si $T < T^*$,
- contrôlable à zéro si $T > T^*$.

L'équation de Grushin

Opérateur elliptique dégénéré : $\mathcal{A} := -\partial_{xx} - |x|^2 \partial_{yy}$



$$(G) \begin{cases} \partial_t f + \mathcal{A}f = \mathbf{1}_\omega u \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ f(0) = f_0 \in L^2(\Omega) \text{ dans } \Omega \\ f = 0 \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

- ▶ Beauchard, Cannarsa, Guglielmi, Null controllability of Grushin-type operators in dimension two, 2014.

Objectif - Travail en cours

Montrer que $T^* = \frac{a^2}{2}$.

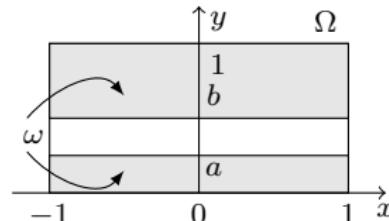
→ Outil : méthode des moments.

→ Etude du spectre d'une infinité d'opérateurs de Sturm-Liouville.

Bibliographie

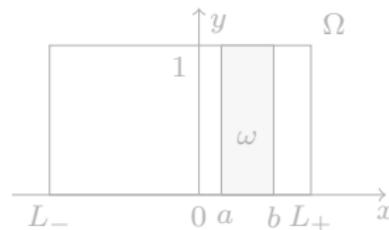
Koenig, 2017

- Équation de Grushin sur un rectangle,
- Non contrôlable à zéro sur ω si $(-1, 1) \times [a, b] \cap \omega = \emptyset$.



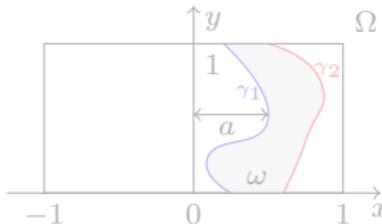
Beauchard, Dardé, Ervedoza 2018

- Équation de Grushin sur $(-L_-, L_+) \times (0, \pi)$,
- Opérateur général : $-\partial_{xx} - (q(x))^2 \partial_{yy}$,
- Temps minimal
 $T^* = \frac{1}{q'(0)} \int_0^a q(s) ds.$



Duprez, Koenig, 2018

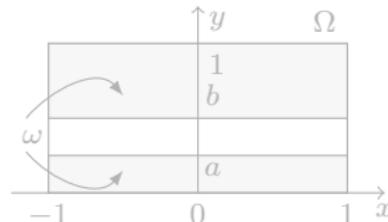
- Équation de Grushin sur un rectangle,
- Zone de contrôle, par exemple définies par deux chemins γ_1 et γ_2 ,
- Temps minimal $T^* = \frac{a^2}{2}$, avec $a = \max(\sup \gamma_2^-, \sup \gamma_1^+)$.



Bibliographie

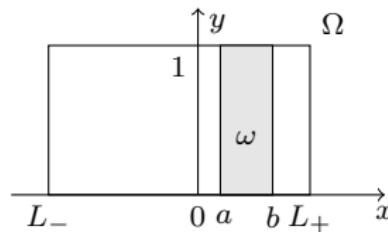
Koenig, 2017

- Équation de Grushin sur un rectangle,
- Non contrôlable à zéro sur ω si $(-1, 1) \times [a, b] \cap \omega = \emptyset$.



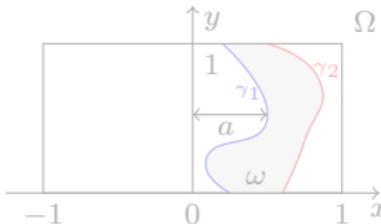
Beauchard, Dardé, Ervedoza 2018

- Équation de Grushin sur $(-L_-, L_+) \times (0, \pi)$,
- Opérateur général : $-\partial_{xx} - (q(x))^2 \partial_{yy}$,
- Temps minimal
 $T^* = \frac{1}{q'(0)} \int_0^a q(s) ds$.



Duprez, Koenig, 2018

- Équation de Grushin sur un rectangle,
- Zone de contrôle, par exemple définies par deux chemins γ_1 et γ_2 ,
- Temps minimal $T^* = \frac{a^2}{2}$, avec $a = \max(\sup \gamma_2^-, \sup \gamma_1^+)$.



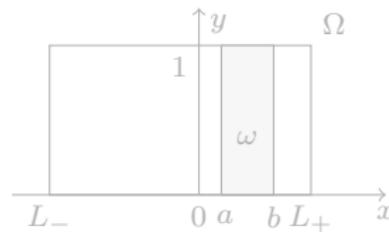
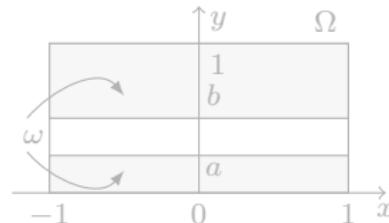
Bibliographie

Koenig, 2017

- Équation de Grushin sur un rectangle,
- Non contrôlable à zéro sur ω si $(-1, 1) \times [a, b] \cap \omega = \emptyset$.

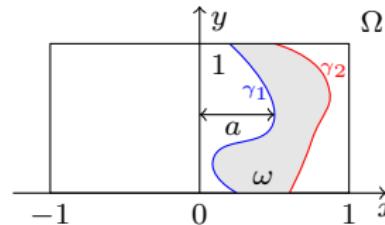
Beauchard, Dardé, Ervedoza 2018

- Équation de Grushin sur $(-L_-, L_+) \times (0, \pi)$,
- Opérateur général :
$$-\partial_{xx} - (q(x))^2 \partial_{yy},$$
- Temps minimal
$$T^* = \frac{1}{q'(0)} \int_0^a q(s) ds.$$



Duprez, Koenig, 2018

- Équation de Grushin sur un rectangle,
- Zone de contrôle, par exemple définies par deux chemins γ_1 et γ_2 ,
- Temps minimal $T^* = \frac{a^2}{2}$, avec $a = \max(\sup \gamma_2^-, \sup \gamma_1^+)$.



$$(G) \begin{cases} \partial_t f - \partial_{xx} f + |x|^2 \partial_{yy} f = \mathbf{1}_\omega u \text{ dans } (0, T) \times \Omega \\ f(0) = f_0 \in L^2(\Omega) \text{ dans } \Omega \\ f = 0 \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega. \end{cases}$$

Décomposition en série de Fourier

- Posons $\varphi_n := \sqrt{2} \sin(n\pi y)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
 - Décomposons la solution : $f(t, x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(t, x) \varphi_n(y)$,
 - Décomposons le contrôle : $u(t, x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n(t, x) \varphi_n(y)$.
- ▶ Beauchard, Miller, Morancey, 2D Grushin-type equations : minimal time and null controllable data, 2015.

Les fonctions f_n sont solutions de

$$\begin{cases} \partial_t f_n - \partial_{xx} f_n + (n\pi x)^2 f_n = u_n(t, x) \mathbf{1}_{(a, b)}(x), & (t, x) \in (0, T) \times (-1, 1), \\ f_n(t, \pm 1) = 0, & t \in (0, T), \\ f_n(0, x) f_{0,n}(x) := \int_0^1 f_0(x, y) \varphi_n(y) dy, & x \in (-1, 1). \end{cases} \quad (5)$$

\rightarrow contrôle à zéro uniforme par rapport à n , pour tout $T > \frac{a^2}{2}$.

Application de la méthode des moments

$(\lambda_{k,n}, \phi_{k,n})_{k \in \mathbb{N}^*}$: valeurs propres et fonctions propres normalisées de l'opérateur

$$\mathcal{A}_n := -\partial_{xx} + (n\pi x)^2, \text{ avec conditions au bord de Dirichlet homogène.}$$

On souhaite vérifier

- 1) $\exists \rho > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \lambda_{k+1,n} - \lambda_{k,n} \geq \rho.$
- 2) $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \|\phi_{k,n}\|_{L^2(\omega)} \geq C e^{-\lambda_{k,n} \frac{a^2}{2}}.$

Rappelons l'expression du contrôle,

$$u_n(t, x) = - \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_{k,n} T} \int_{-1}^1 \phi_{k,n} f_{0,n}}{\|\phi_{k,n}\|_{L^2(\omega)}^2} \times (\phi_{k,n}(x) q_k^{\Lambda_n}(t)).$$

- 2) fournit la contrôlabilité uniforme pour tout $T > \frac{a^2}{2}$,

$$\|u_n\|_{L^2((0,T) \times \omega)} \leq K_{\varepsilon, \rho, \mathcal{N}} \|f_{0,n}\|_{L^2(-1,1)} \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_{k,n} (T - \frac{a^2}{2} - \varepsilon)}.$$

Intérêt de la méthode des moments

Appliquer ces travaux à des systèmes d'équations dégénérées en cascade.

Application de la méthode des moments

$(\lambda_{k,n}, \phi_{k,n})_{k \in \mathbb{N}^*}$: valeurs propres et fonctions propres normalisées de l'opérateur

$\mathcal{A}_n := -\partial_{xx} + (n\pi x)^2$, avec conditions au bord de Dirichlet homogène.

On souhaite vérifier

- 1) $\exists \rho > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \lambda_{k+1,n} - \lambda_{k,n} \geq \rho$.
- 2) $\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \|\phi_{k,n}\|_{L^2(\omega)} \geq C e^{-\lambda_{k,n} \frac{a^2}{2}}$.

Rappelons l'expression du contrôle,

$$u_n(t, x) = - \sum_{k \geq 1} \frac{e^{-\lambda_{k,n} T} \int_{-1}^1 \phi_{k,n} f_{0,n}}{\|\phi_{k,n}\|_{L^2(\omega)}^2} \times (\phi_{k,n}(x) q_k^{\Lambda_n}(t)).$$

- 2) fournit la contrôlabilité uniforme pour tout $T > \frac{a^2}{2}$,

$$\|u_n\|_{L^2((0,T) \times \omega)} \leq K_{\varepsilon, \rho, \mathcal{N}} \|f_{0,n}\|_{L^2(-1,1)} \sum_{k \geq 1} e^{-\lambda_{k,n} (T - \frac{a^2}{2} - \varepsilon)}.$$

Intérêt de la méthode des moments

Appliquer ces travaux à des systèmes d'équations dégénérées en cascade.

Condition de gap : approximation par l'oscillateur harmonique quantique

Posons $g_{k,n}(x) := \frac{\phi_{k,n}\left(\frac{x}{\sqrt{n\pi}}\right)}{(n\pi)^{1/4}}$, $\begin{cases} \mathcal{A}g_{k,n} = \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} g_{k,n}, \text{ sur } \Omega_n, \\ g_{k,n}(\pm\sqrt{n\pi}) = 0, \|g_{k,n}\|_{L^2(\Omega_n)} = 1, \end{cases}$

avec $\Omega_n = (-\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi})$ et $\mathcal{A}g_{k,n} := -\partial_{xx}g_{k,n} + x^2g_{k,n}$

Idée : Équation proche de

$$\begin{cases} -\partial_{xx}G_k + x^2G_k = \mu_k G_k, \text{ sur } \mathbb{R}, \\ \|G_k\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1. \end{cases}$$

- Valeurs propres connues : $\mu_k = (2k - 1)$ (noter que $\mu_{k+1} - \mu_k = 2$).
- Fonctions propres connues : G_k fonctions de Hermite.

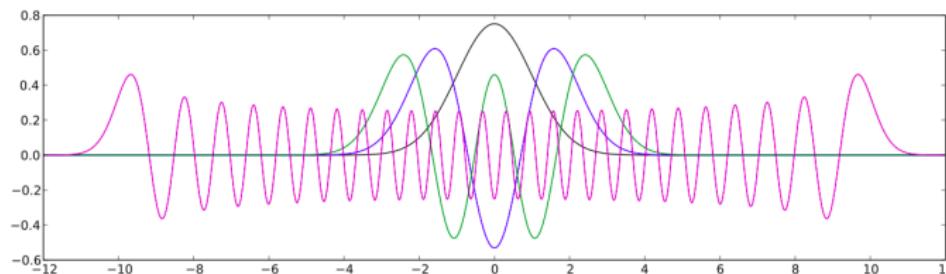


FIGURE – Graphique de G_1, G_2, G_3 et G_{50} .

Condition de gap : approximation par l'oscillateur harmonique quantique

Posons $g_{k,n}(x) := \frac{\phi_{k,n}\left(\frac{x}{\sqrt{n\pi}}\right)}{(n\pi)^{1/4}}$, $\begin{cases} \mathcal{A}g_{k,n} = \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} g_{k,n}, \text{ sur } \Omega_n, \\ g_{k,n}(\pm\sqrt{n\pi}) = 0, \|g_{k,n}\|_{L^2(\Omega_n)} = 1, \end{cases}$

avec $\Omega_n = (-\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi})$ et $\mathcal{A}g_{k,n} := -\partial_{xx}g_{k,n} + x^2g_{k,n}$

Idée : Équation proche de

$$\begin{cases} -\partial_{xx}G_k + x^2G_k = \mu_k G_k, \text{ sur } \mathbb{R}, \\ \|G_k\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1. \end{cases}$$

- Valeurs propres connues : $\mu_k = (2k - 1)$ (noter que $\mu_{k+1} - \mu_k = 2$).
- Fonctions propres connues : G_k fonctions de Hermite.

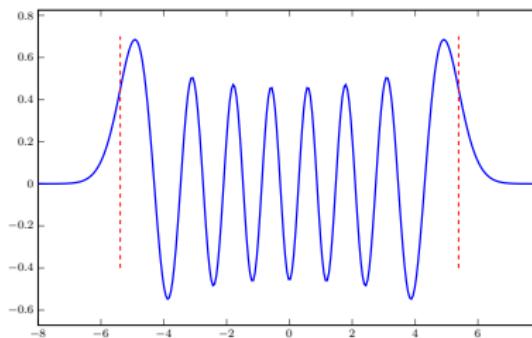


FIGURE – Graphique de G_{15} . Les pointillés verticaux sont en $x = \pm\sqrt{\mu_{15}}$.

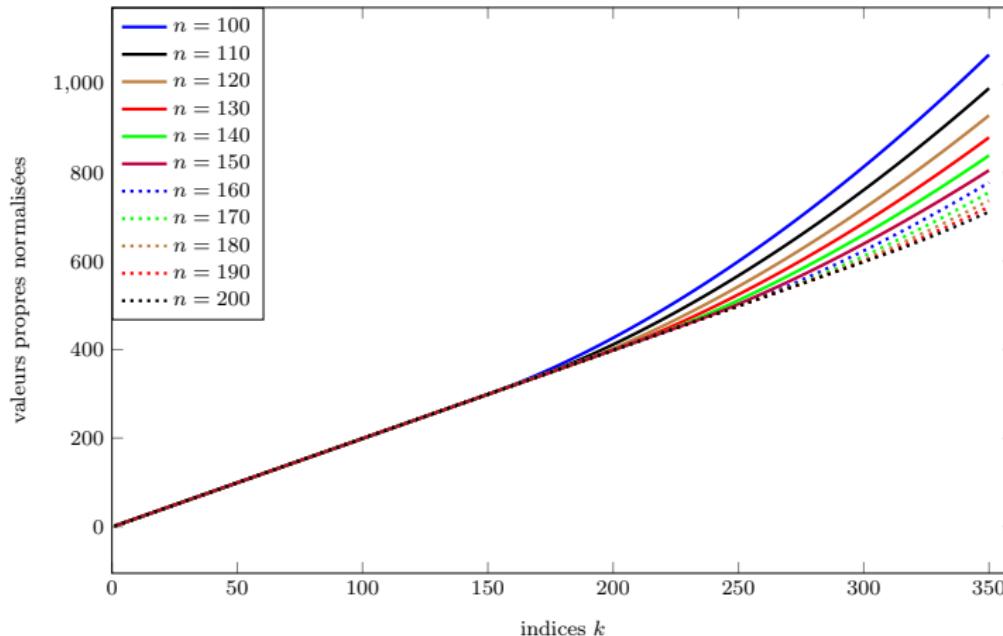


FIGURE – Valeurs propres normalisées $\frac{\lambda_{k,n}}{n\pi}$ en fonction de l'indice k pour différents indices n de potentiel

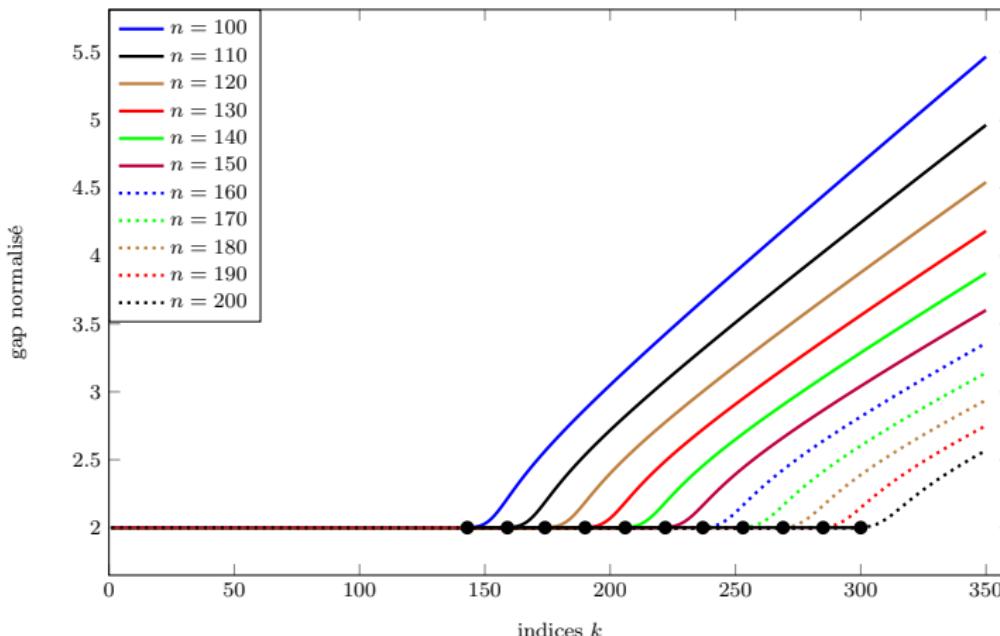


FIGURE – Gap normalisé $\frac{\lambda_{k+1,n}}{n\pi} - \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi}$ en fonction de l'indice k pour différents indices de potentiel.

Condition de gap : approximation par l'oscillateur harmonique quantique

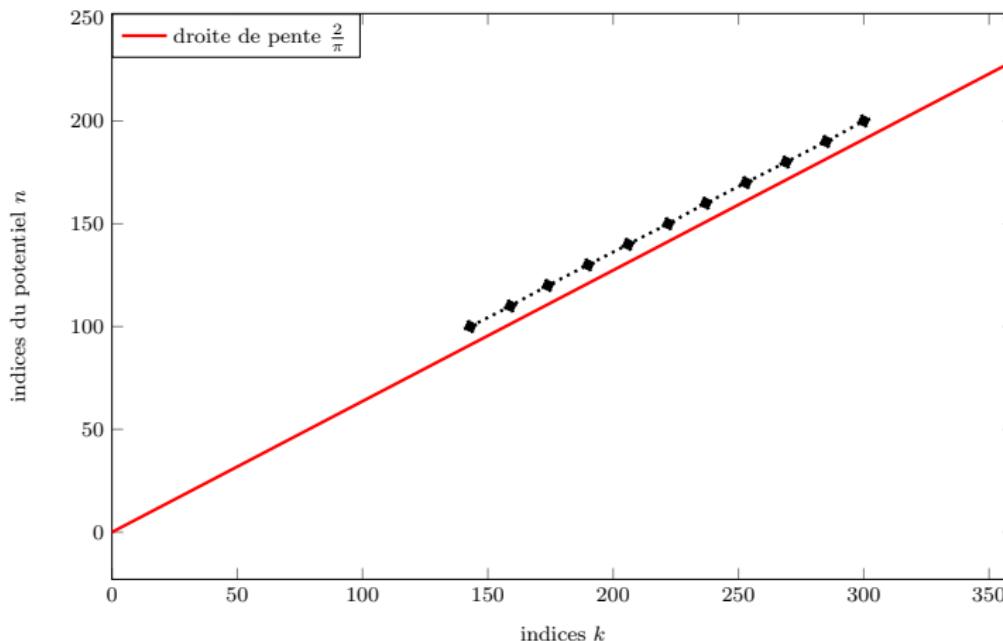
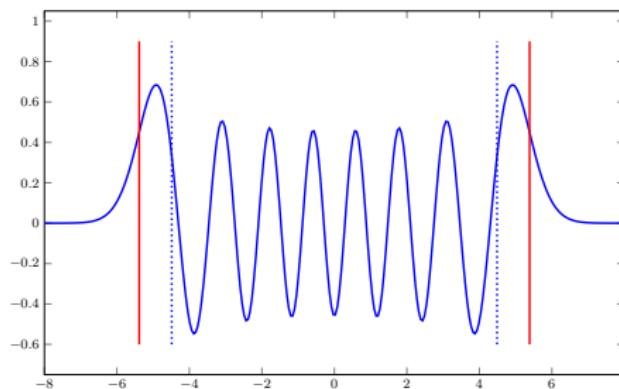


FIGURE – Indices du potentiel n en fonction des indices où les valeurs propres changent de comportement.

Propriété de Gap en dehors d'une fine bande

- ✓ $\forall \tau \in (0, 1), \exists \rho > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, k \leq \tau \frac{\pi}{2} n, \lambda_{k+1,n} - \lambda_{k,n} \geq \rho.$
- ✓ $\forall \varepsilon \in (0, 1), \exists \rho > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, k \geq \frac{\pi}{2} n + \varepsilon, \lambda_{k+1,n} - \lambda_{k,n} \geq \rho.$
- ✗ Reste à prouver l'inégalité pour $k \in (\tau \frac{\pi}{2} n, \frac{\pi}{2} n + \varepsilon).$



$$-\sqrt{n\pi} < -\sqrt{\frac{\mu_k}{\tau}}$$

$$[-\sqrt{n\pi}, \sqrt{n\pi}] \subset [-\sqrt{\mu_k}, \sqrt{\mu_k}]$$

$$\sqrt{n\pi} > \sqrt{\frac{\mu_k}{\tau}}$$

FIGURE – Graphique de G_{15} . Les traits verticaux rouges sont en $x = \pm \sqrt{\mu_{15}}$.

Théorème [A, Morancey]

Soit $\tau \in (0, 1)$. Il existe, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, tous ne dépendant que de τ , tels que $\forall n \geq n_0$ et $k \leq \tau \frac{\pi}{2} n$,

$$\mu_k \leq \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$$

1) $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$, $\mu_k \leq \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi}$.

Idée principale : Principe du Max Min.

- 2) ► Beauchard, Cannarsa, Guglielmi, Null controllability of Grushin-type operators in dimension two, 2014.

Condition de gap : basses fréquences $\lambda_{k,n} < \tau(\pi n)^2$

Théorème [A, Morancey]

Soit $\tau \in (0, 1)$. Il existe, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, tous ne dépendant que de τ , tels que $\forall n \geq n_0$ et $k \leq \tau \frac{\pi}{2} n$,

$$\mu_k \leq \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \leq \tau \frac{\pi}{2} n, \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$

Théorème [A, Morancey]

Soit $\tau \in (0, 1)$. Il existe, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, tous ne dépendant que de τ , tels que $\forall n \geq n_0$ et $k \leq \tau \frac{\pi}{2} n$,

$$\mu_k \leq \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \leq \tau \frac{\pi}{2} n, \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$

- On souhaiterait appliquer le principe du Max Min dans l'autre sens.

Théorème [A, Morancey]

Soit $\tau \in (0, 1)$. Il existe, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, tous ne dépendant que de τ , tels que $\forall n \geq n_0$ et $k \leq \tau \frac{\pi}{2} n$,

$$\mu_k \leq \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \leq \tau \frac{\pi}{2} n, \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$

- On souhaiterait appliquer le principe du Max Min dans l'autre sens.
- Il faudrait alors plonger $\text{span}\{G_1, G_2, \dots, G_{k-1}\}$ dans

$$H_0^1(\Omega_n) \cap \text{span}\{g_{1,n}, g_{2,n}, \dots, g_{k-1,n}\}^{\perp_{L^2(\Omega_n)}}.$$

Théorème [A, Morancey]

Soit $\tau \in (0, 1)$. Il existe, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, tous ne dépendant que de τ , tels que $\forall n \geq n_0$ et $k \leq \tau \frac{\pi}{2} n$,

$$\mu_k \leq \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \leq \tau \frac{\pi}{2} n, \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$

- On souhaiterait appliquer le principe du Max Min dans l'autre sens.
- Il faudrait alors plonger $\text{span}\{G_1, G_2, \dots, G_{k-1}\}$ dans

$$H_0^1(\Omega_n) \cap \text{span}\{g_{1,n}, g_{2,n}, \dots, g_{k-1,n}\}^{\perp_{L^2(\Omega_n)}}.$$

- Correction (k impair) :

$$\tilde{G}_k = (G_k - G_k(\sqrt{n\pi})) - \sum_{p=1}^{k-1} g_{p,n} (G_k - G_k(\sqrt{n\pi}), g_{p,n})_{L^2(\Omega_n)}$$

Condition de gap : basses fréquences $\lambda_{k,n} < \tau(\pi n)^2$

Théorème [A, Morancey]

Soit $\tau \in (0, 1)$. Il existe, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, tous ne dépendant que de τ , tels que $\forall n \geq n_0$ et $k \leq \tau \frac{\pi}{2} n$,

$$\mu_k \leq \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \leq \tau \frac{\pi}{2} n, \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$

- On souhaiterait appliquer le principe du Max Min dans l'autre sens.
- Il faudrait alors plonger $\text{span}\{G_1, G_2, \dots, G_{k-1}\}$ dans

$$H_0^1(\Omega_n) \cap \text{span}\{g_{1,n}, g_{2,n}, \dots, g_{k-1,n}\}^{\perp_{L^2(\Omega_n)}}.$$

- Correction (k impair) :

$$\tilde{G}_k = (G_k - G_k(\sqrt{n\pi})) - \sum_{p=1}^{k-1} g_{p,n} (G_k - G_k(\sqrt{n\pi}), g_{p,n})_{L^2(\Omega_n)}$$

•

$$\frac{(\mathcal{A}\tilde{G}_k, \tilde{G}_k)_{L^2(\Omega_n)}}{\|\tilde{G}_k\|_{L^2(\Omega_n)}^2} = \mu_k + G_k(\sqrt{n\pi}) \frac{\int_{\Omega_n} (\mu_k - x^2) \tilde{G}_k}{\int_{\Omega_n} \tilde{G}_k^2}$$

Condition de gap : basses fréquences $\lambda_{k,n} < \tau(\pi n)^2$

Théorème [A, Morancey]

Soit $\tau \in (0, 1)$. Il existe, $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$, tous ne dépendant que de τ , tels que $\forall n \geq n_0$ et $k \leq \tau \frac{\pi}{2} n$,

$$\mu_k \leq \frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}.$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \leq \tau \frac{\pi}{2} n$, $\frac{\lambda_{k,n}}{n\pi} \leq \mu_k + c_1 e^{-c_2 n}$.

- On souhaiterait appliquer le principe du Max Min dans l'autre sens.
- Il faudrait alors plonger $\text{span}\{G_1, G_2, \dots, G_{k-1}\}$ dans

$$H_0^1(\Omega_n) \cap \text{span}\{g_{1,n}, g_{2,n}, \dots, g_{k-1,n}\}^{\perp_{L^2(\Omega_n)}}.$$

- Correction (k impair) :

$$\tilde{G}_k = (G_k - G_k(\sqrt{n\pi})) - \sum_{p=1}^{k-1} g_{p,n} (G_k - G_k(\sqrt{n\pi}), g_{p,n})_{L^2(\Omega_n)}$$

•

$$\frac{(\mathcal{A}\tilde{G}_k, \tilde{G}_k)_{L^2(\Omega_n)}}{\|\tilde{G}_k\|_{L^2(\Omega_n)}^2} = \mu_k + G_k(\sqrt{n\pi}) \frac{\int_{\Omega_n} (\mu_k - x^2) \tilde{G}_k}{\int_{\Omega_n} \tilde{G}_k^2}$$

- Pour tout $x \geq \sqrt{n\pi}$, $k \leq \tau \frac{\pi}{2} n$, $G_k(x) \leq c_1 e^{-c_2 n}$.

Condition de gap : hautes fréquences $\lambda_{k,n} > n^2\pi^2$ (**Nouvelle version**)

Équation à paramètre

$$\begin{cases} -\partial_{xx}h_n(t,x) + n^2\pi^2x^2h_n(t,x) = t \times h_n(t,x) \\ h_n(t,-1) = 0, \\ \partial_x h_n(t,-1) \text{ tel que } \|h_n(t,\cdot)\|_{L^2(-1,1)} = 1. \end{cases}$$

$$h_n(t,1) = 0 \Leftrightarrow t \in (\lambda_{k,n})_{k \geq 1}.$$

Changement de variable de Prüfer

$$\begin{cases} h_n(t,x) = \rho_n(t,x) \cos(\theta_n(t,x)), \\ \partial_x h_n(t,x) = \rho_n(t,x) \sin(\theta_n(t,x)). \end{cases}$$

Propriété de l'équation

- $x \mapsto h_n(\lambda_{k,n}, x)$ s'annule $k+1$ fois sur $[-1, 1]$.
- Donc $\theta_n(\lambda_{k,n}, 1) = \frac{\pi}{2} - k\pi$.

Théorème [A, Morancey]

Soit $\varepsilon \in (0, 1)$. Si $\lambda_{k,n} \geq (n\pi)^2 + \varepsilon$, alors

$$\lambda_{k+1,n} - \lambda_{k,n} \geq \frac{\pi\varepsilon}{2}.$$

Théorème [A, Morancey]

Soit $\varepsilon \in (0, 1)$. Si $\lambda_{k,n} \geq (n\pi)^2 + \varepsilon$, alors

$$\lambda_{k+1,n} - \lambda_{k,n} \geq \frac{\pi\varepsilon}{2}.$$

$$-\pi = \theta_n(\lambda_{k+1,n}, 1) - \theta_n(\lambda_{k,n}, 1) = \int_{\lambda_{k,n}}^{\lambda_{k+1,n}} \partial_t \theta_n(t, 1) dt = \int_{\lambda_{k,n}}^{\lambda_{k+1,n}} \frac{-1}{\rho_n^2(t, 1)} dt$$

Condition de gap : hautes fréquences $\lambda_{k,n} > n^2\pi^2$

Théorème [A, Morancey]

Soit $\varepsilon \in (0, 1)$. Si $\lambda_{k,n} \geq (n\pi)^2 + \varepsilon$, alors

$$\lambda_{k+1,n} - \lambda_{k,n} \geq \frac{\pi\varepsilon}{2}.$$

$$-\pi = \theta_n(\lambda_{k+1,n}, 1) - \theta_n(\lambda_{k,n}, 1) = \int_{\lambda_{k,n}}^{\lambda_{k+1,n}} \partial_t \theta_n(t, 1) dt = \int_{\lambda_{k,n}}^{\lambda_{k+1,n}} \frac{-1}{\rho_n^2(t, 1)} dt$$

Rappel : $\rho_n^2(t, 1) = h_n^2(t, 1) + (\partial_x h_n)^2(t, 1)$.

La norme du vecteur $\begin{pmatrix} h_n(t, x) \\ \frac{\partial_x h_n(t, x)}{\sqrt{t-(n\pi x)^2}} \end{pmatrix}$ est croissante par rapport à x .

- Szegő, Orthogonal polynomials, 1975.

En utilisant l'hypothèse $\lambda_{k,n} \geq (n\pi)^2 + \varepsilon$,

$$\rho_n^2(t, 1) \geq \varepsilon/2.$$

On note $(\lambda_{k,n}, \phi_{k,n})_{k \in \mathbb{N}^*}$ les valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur

$$\mathcal{A}_n := -\partial_{xx} + n^2 \pi^2 x^2.$$

On souhaite maintenant montrer que

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \|\phi_{k,n}\|_{L^2(\omega)} \geq Ce^{-\lambda_{k,n} \frac{a^2}{2}}.$$

On note $(\lambda_{k,n}, \phi_{k,n})_{k \in \mathbb{N}^*}$ les valeurs propres et fonctions propres de l'opérateur

$$\mathcal{A}_n := -\partial_{xx} + n^2 \pi^2 x^2.$$

On souhaite maintenant montrer que

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \|\phi_{k,n}\|_{L^2(\omega)} \geq C e^{-\lambda_{k,n} \frac{(a+\varepsilon)^2}{2}}.$$

- ▶ Beauchard, Miller, Morancey, 2D Grushin-type equations : minimal time and null controllable data, 2015.

Une inégalité sur l'équation des ondes avec potentiel

Soient $L > 1$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $(w_0, w_1) \in H_0^1 \times L^2(-1, 1)$,

$$\|w_0\|_{H_0^1}^2 + \|w_1\|_{L^2}^2 \leq C n^2 \pi^2 e^{n\pi(a+\varepsilon)^2} \int_{-L}^L \int_{(-1,-a) \cup (a,1)} (w_s^2 + w^2)(s, x) dx ds,$$

où w est la solution de l'équation des ondes

$$\begin{cases} w_{ss} - w_{xx} + n^2 \pi^2 x^2 w = 0, & (s, x) \in (-L, L) \times (-1, 1), \\ w(s, \pm 1) = 0, & s \in (-L, L), \\ (w, w_s)(0, x) = (w_0, w_1)(x), & x \in (-1, 1). \end{cases}$$

Prenons $w_1 = \sqrt{\lambda_{k,n}} \phi_{k,n}$ et $w_0 = 0$. Alors la fonction w est :

$$w(s, x) = \sin \left(\sqrt{\lambda_{k,n}} s \right) \phi_{k,n}(x),$$

et nous obtenons la borne :

$$\frac{C e^{-n\pi(a+\varepsilon)^2}}{n^2 \pi^2} \leq \int_a^1 \phi_{k,n}^2(x) dx.$$

- 1 Présentation des problèmes et méthode de résolution
- 2 Systèmes paraboliques semi-discrétisés en espace (1D)
- 3 Systèmes paraboliques tensorisés multi-dimensionnels semi-discrétisés en espace
- 4 Temps minimal de contrôle à zéro d'une équation parabolique dégénérée
- 5 Perspectives

- ① Compléter l'étude du spectre de l'opérateur de Sturm-Liouville

$$\mathcal{A} = -\partial_{xx} + (n\pi x)^2$$

- ② Adapter les techniques spectrales développées dans la section 2 pour des opérateurs d'ordres supérieurs

- ▶ Micu, Rovența, Temereancă, Approximation of the controls for the linear beam equation, 2016.
- ▶ Cindea, Micu, Rovența, Boundary Controllability for Finite-Differences Semidiscretizations of a Clamped Beam Equation, 2017.

- ③ Étudier des systèmes d'équations paraboliques en cascade avec un terme de couplage dépendant de la variable d'espace x et élaborer une méthode numérique basée sur la méthode HUM afin de pouvoir évaluer le temps minimal d'une équation dégénérée ou d'un système d'équations paraboliques.

Merci de votre attention