INSA de Strasbourg

Projet Mathématique

Problème isopérimétrique

Auteurs
Abrini Mouad Cartier
Millon Damien

Encadrant
M. Jean Romain Heu

18 octobre 2019

Table des matières

Première partie

Fonctions de plusieurs variables

Cas 1

Cas du triangle

1.1 Question 1

Comme indiqué sur la question, on peut utiliser la formule de Héron pour calculer l'aire d'un triangle. Pour ce faire, il suffit d'avoir le périmètre du triangle.

Soit $f : R^3 \longrightarrow$ R une fonction de classe C^1 , $g : R^3 \longrightarrow$R une fonction de classe C^1 et soit $G = \{(x_1, ..., x_n|g(x_1, ..., x_n) = 0\}$.

Soit P le périmètre et A l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour mesures a, b et c. Posons alors

$$g_1(a, b, c) = a + b + c - P \tag{1.1}$$

La fonction g_1 représente la première contrainte qui est unique dans notre cas.
Posons $s = \frac{P}{2}$ le demi-périmètre qui sera fixé.

La formule de Héron nous affirme que :

$$f(a, b, c) = A(a, b, c) = \sqrt[2]{s(s - a)(s - b)(s - c)} \tag{1.2}$$

Nous cherchons à maximiser cette fonction f qui est associée à l'aire de notre triangle.

L'équation (1.1) nous donne que $g_1(a, b, c) = 0$. Ce qui veut dire que le triplet (a,b,c) appartient à G : Le théorème des extremas liées s'applique.
On a donc

$$\exists\lambda \in R^{+*} \qquad \overrightarrow{\nabla} f = \lambda \overrightarrow{\nabla} g_1 \tag{1.3}$$

1.2 Question 2

Nous devons ainsi calculer le gradient de g et f.

$$\vec{\vec{\nabla}} f(a,b,c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \\ \\ \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial b} \\ \\ \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial c} \\ \end{pmatrix}, \quad \vec{\vec{\nabla}} g_1(a,b,c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(a,b,c)}{\partial a} \\ \\ \frac{\partial g_1(a,b,c)}{\partial b} \\ \\ \frac{\partial g_1(a,b,c)}{\partial c} \\ \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne (en utilisant une fonction Python) :

$$\vec{\vec{\nabla}} f(a,b,c) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-a+s)} \\ \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-b+s)} \\ \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-c+s)} \\ \end{pmatrix}, \quad \vec{\vec{\nabla}} g_1(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant (1.3), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-a+s)} = \lambda \quad (1) \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-b+s)} = \lambda \quad (2) \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-c+s)} = \lambda \quad (3) \end{cases} \tag{1.4}$$

On a alors directement en utilisant l'équation (1) et (2) $\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a} = \frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}$
Qui se simplifie en $(s-a)^2 = (s-b)^2$. Or on sait que le demi-périmètre est toujours plus grand que chaque coté du triangle. Donc a = b. on faisant de même avec (2) et (3), on retrouve finalement que a = b = c.
Ainsi, en utilisant (1.1), on obtient que

$$\boxed{a = b = c = \frac{P}{3}} \tag{1.5}$$

Ce qui correspond à un triangle **équilatéral**.

Deuxième partie

En dimension infinie