INSA de Strasbourg

Projet Mathématique

Problème isopérimétrique

Auteurs
ABRINI Mouad
CARTIER MILLON Damien

Encadrant
M. Jean Romain HEU

18 octobre 2019

Table des matières

Première partie

Fonctions de plusieurs variables

Cas 1

Cas du triangle

1.1 Question 1

Comme indiqué sur la question, on peut utiliser la formule de Héron pour calculer l'aire d'un triangle. Pour ce faire, il suffit d'avoir le périmètre du triangle.

Soit P le périmètre et A l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour mesures a, b et c. Posons alors

$$g(a,b,c) = a + b + c - P \tag{1.1}$$

Posons $s = \frac{P}{2}$ le demi-périmètre qui sera fixé.

La formule de Héron nous affirme que :

$$f(a,b,c) = A(a,b,c) = \sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1.2}$$

1.2 Question 2

Nous devons ainsi calculer le gradient de g et f.

$$\overrightarrow{\nabla} f(a,b,c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \\ \\ \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial b} \\ \\ \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial c} \\ \end{pmatrix} , \quad \overrightarrow{\nabla} g(a,b,c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g(a,b,c)}{\partial a} \\ \\ \frac{\partial g(a,b,c)}{\partial b} \\ \\ \frac{\partial g(a,b,c)}{\partial c} \\ \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne (en utilisant une fonction Python) :

$$\overrightarrow{\nabla} f(a,b,c) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-a+s)} \\ \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-b+s)} \\ \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-c+s)} \\ \end{pmatrix} , \quad \overrightarrow{\nabla} g(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le théorème des extremas liées nous affirme que :

$$\overrightarrow{\nabla} f = \lambda \overrightarrow{\nabla} g \tag{1.3}$$

Ce qui nous donne un système : $\begin{cases} -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-a+s)} = \lambda \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-b+s)} = \lambda \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-c+s)} = \lambda \end{cases}$

Deuxième partie

En dimension infinie