INSA de Strasbourg

Projet Mathématique

Problème isopérimétrique

Auteurs
Abrini Mouad
Cartier Millon Damien

Encadrant
M. Jean Romain Heu

16 novembre 2019

Table des matières

Première partie

Fonctions de plusieurs variables

Cas 1

Cas du triangle

1.1 Question 1

Comme indiqué sur la question, on peut utiliser la formule de Héron pour calculer l'aire d'un triangle. Pour ce faire, il suffit d'avoir le périmètre du triangle.

Soit $f : R^3 \longrightarrow$ R une fonction de classe C^1 , $g : R^3 \longrightarrow$R une fonction de classe C^1 et soit $G = \{(x_1, ..., x_n)|g(x_1, ..., x_n) = 0\}$.

Soit P le périmètre et A l'aire d'un triangle dont les côtés ont pour mesures a, b et c. Posons alors

$$g_1(a, b, c) = a + b + c - P \tag{1.1}$$

La fonction g_1 représente la première contrainte qui est unique dans notre cas.
Posons $s = \frac{P}{2}$ le demi-périmètre qui sera fixé.

La formule de Héron nous affirme que :

$$f(a, b, c) = A(a, b, c) = \sqrt[2]{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1.2}$$

Nous cherchons à maximiser cette fonction f qui est associée à l'aire de notre triangle.

1.2 Question 2

Nous devons ainsi calculer le gradient de g et f.

$$\overrightarrow{\nabla} f(a,b,c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} \\ \\ \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial b} \\ \\ \frac{\partial f(a,b,c)}{\partial c} \\ \\ \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\nabla} g_1(a,b,c) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(a,b,c)}{\partial a} \\ \\ \frac{\partial g_1(a,b,c)}{\partial b} \\ \\ \frac{\partial g_1(a,b,c)}{\partial c} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne (en utilisant une fonction Python) :

$$\overrightarrow{\nabla} f(a,b,c) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-a+s)} \\ \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-b+s)} \\ \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-c+s)} \\ \\ \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\nabla} g_1(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Question 3

L'équation (**??**) nous donne que $g_1(a,b,c) = 0$. Ce qui veut dire que le triplet (a,b,c) appartient à G : Le théorème des extremas liées s'applique.
On a donc

$$\exists \lambda \in R^{+*} \qquad \overrightarrow{\nabla} f = \lambda \overrightarrow{\nabla} g_1 \tag{1.3}$$

En utilisant (**??**), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-a+s)} = \lambda \quad (1) \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-b+s)} = \lambda \quad (2) \\ -\frac{\sqrt{s(-a+s)(-b+s)(-c+s)}}{2(-c+s)} = \lambda \quad (3) \end{cases} \tag{1.4}$$

On a alors directement en utilisant l'équation (1) et (2) $\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a} = \frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}$
Qui se simplifie en $(s-a)^2 = (s-b)^2$. Or on sait que le demi-périmètre est

toujours plus grand que chaque coté du triangle. Donc a = b. on faisant de même avec (2) et (3), on retrouve finalement que a = b = c.
Ainsi, en utilisant (**??**), on obtient que

$$\boxed{a = b = c = \frac{P}{3}} \tag{1.5}$$

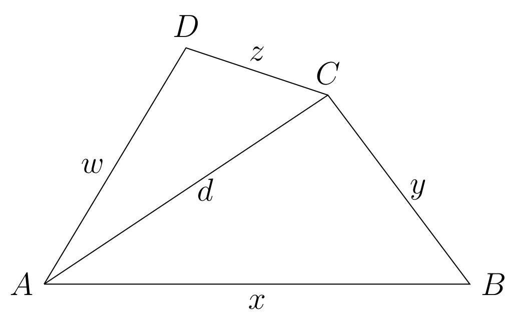
Ce qui correspond à un triangle **équilatéral**.

Cas 2

Cas d'un quadrilatère

2.1 Question 1

Pour simplifier les calculs, on va utiliser le **théorème isopérimétrique** pour un quadrilatère, qui affirme que pour l'aire d'un quadrilatère à périmètre fixé soit maximale, il faut qu'il soit régulier. Nous éviterons ainsi le cas des quadrilatères concaves et croisés.
Soit Q un quadrilatère régulier comme représenté sur la figure



On a ainsi $P = x + y + z + w$.

Soit $f : R^4 \longrightarrow$ R une fonction de classe C^1 , $g : R^4 \longrightarrow$R une fonction de classe C^1 et soit $G = \{(x_1, ..., x_n)|g(x_1, ..., x_n) = 0\}$.

Posons alors

$$g_1(x, y, z, w, d) = x + y + z + w - P \tag{2.1}$$

g_1 représente notre première contrainte.
Il est clairement remarquable que ce quadrilatère peut se diviser en deux

triangle ABC et ADC. Ce qui nous permet pour avoir l'aire totale de Q qui est la somme des aires des deux triangles. On notera s le demi-périmètre de ABC et t celui de ADC.
On aura ainsi en utilisant la formule d'Héron :

$$f(x,y,z,w,d) = \sqrt{s(s-x)(s-w)(s-d)} + \sqrt{t(t-y)(t-x)(t-d)} \tag{2.2}$$

On cherche à maximiser cette fonction qui est associée à l'aire de notre quadrilatère.
Calculons alors le gradient de f et de g_1. On obtient

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z,w,d) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{s(-d+s)(s-w)(s-x)}}{2(s-x)} \\ -\frac{\sqrt{t(-d+t)(t-y)(t-z)}}{2(t-y)} \\ -\frac{\sqrt{t(-d+t)(t-y)(t-z)}}{2(t-z)} \\ -\frac{\sqrt{s(-d+s)(s-w)(s-x)}}{2(s-w)} \\ -\frac{\sqrt{s(-d+s)(s-w)(s-x)}}{2(-d+s)} - \frac{\sqrt{t(-d+t)(t-y)(t-z)}}{2(-d+t)} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\nabla} g_1(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

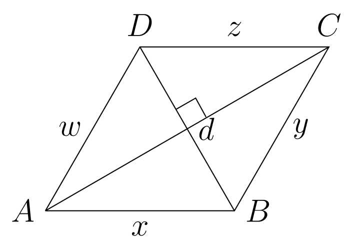
l'équation (**??**) nous affirme que $g_1(x,y,z,w,d) = 0$. Donc le théorème des extremas liées s'applique. On a ainsi :

$$\exists \lambda \in R^{+*} \qquad \overrightarrow{\nabla} f = \lambda \overrightarrow{\nabla} g_1 \tag{2.3}$$

En utilisant (**??**), nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{s(-d+s)(s-w)(s-x)}}{2(s-x)} = \lambda \\ -\frac{\sqrt{t(-d+t)(t-y)(t-z)}}{2(t-y)} = \lambda \\ -\frac{\sqrt{t(-d+t)(t-y)(t-z)}}{2(t-z)} = \lambda \\ -\frac{\sqrt{s(-d+s)(s-w)(s-x)}}{2(s-w)} = \lambda \\ -\frac{\sqrt{s(-d+s)(s-w)(s-x)}}{2(-d+s)} - \frac{\sqrt{t(-d+t)(t-y)(t-z)}}{2(-d+t)} = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

En combinant les équations 1 et 4, on trouve que $x = w$ et en combinant les équations 2 et 3, on trouve que $y = z$.Finalement il suffit de remplacer ce résultat dans l'équation 5 pour trouver que $x = y = w = z$.
Nous avons ainsi trouvé que les 4 cotés doivent être égaux. Or pour, un quadrilatère régulier une telle figure pourrait être soit un losange, soit un carré. Ce résultat qui n'est pas unique est peut être du aux théorème des extrêmes liée qui nous fournit soit une valeur minimale soit maximale de la fonction étudié (Ce qui assez compréhensible dans le cas d'un losange).
Cependant, le choix n'est pas difficile. Regardons ce losange ($x = y = z = w$) :



Pour calculer sa surface, il suffit de le diviser en deux triangles DAB et DCB qui ont la même surface. L'aire totale est donc $S = \frac{1}{2}.2.x^2 sin(\widehat{DAB}) = x^2 sin(\widehat{DAB})$.
Il est facile de remarque que la valeur maximale de ce losange est telle que $sin(\widehat{DAB}) = 1$. Ce qui veut dire que $\widehat{DAB} = \frac{\pi}{2}$.
Nous pouvant ainsi en déduire que le quadrilatère qui, à un périmètre fixé, a une surface maximale est un **carré** dont les cotés sont égaux à $\frac{P}{4}$.

Cas 3

Un cas moins trivial

3.1 Question 1

Afin d'éviter quelques hypothèses faites dans la partie précédente (raisonnement sur les angles), on peut utiliser le fait que tout quadrilatère à périmètre fixé et qui a une surface maximale, est nécessairement cyclique. C'est à dire que ses sommets appartiennent au même cercle.
Ainsi, on pourra utiliser **la formule de Brahmagupta** :

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{3.1}$$

Avec K l'aire du quadrilatère et a, b, c et d ses cotés. s représente le demi-périmètre qui est égal à $\frac{a+b+c+d}{2}$.

Soit $f : R^4 \longrightarrow$ R une fonction de classe C^1 , $g : R^4 \longrightarrow$R une fonction de classe C^1 et soit $G = \{(x_1, ..., x_n)|g(x_1, ..., x_n) = 0\}$.

Posons

$$f(x, y, z, d) = \sqrt{(s-x)(s-y)(s-z)(s-1)} \tag{3.2}$$

Dans ce cas la, on a deux contraintes à savoir que le périmètre doit être fixé et un coté du quadrilatère doit être égal à 1.

Soit $g_1$la première telle que :

$$g_1(x, y, z, d) = x + y + z + 1 - 2s,$$

On cherche à maximiser f associé à l'aire de notre quadrilatère. Comme dans les cas précédents, toutes les conditions sont satisfaites pour appliquer

le théorème des extrema liées.
Calculons alors le gradient de f et de g_1.

$$\overrightarrow{\nabla} f(x,y,z,w,d) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{(s-1)(s-x)(s-y)(s-z)}}{2(s-x)} \\ \\ -\frac{\sqrt{(s-1)(s-x)(s-y)(s-z)}}{2(s-y)} \\ \\ -\frac{\sqrt{(s-1)(s-x)(s-y)(s-z)}}{2(s-z)} \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\nabla} g_1(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

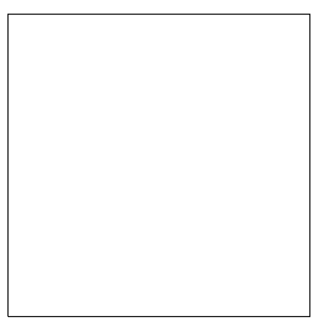
En appliquant le théorème on obtient le système :

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{(s-1)(s-x)(s-y)(s-z)}}{2(s-x)} = \lambda \\ -\frac{\sqrt{(s-1)(s-x)(s-y)(s-z)}}{2(s-y)} = \lambda \\ -\frac{\sqrt{(s-1)(s-x)(s-y)(s-z)}}{2(s-z)} = \lambda \end{cases} \tag{3.3}$$

On trouve directement que $x = y = z$. Donc le quadrilatère possède un coté égal à 1 et 3 cotés qui sont égaux.
Son périmètre devient alors avec $P > 1$:

$$P = 3x + 1 \Leftrightarrow x = \frac{P-1}{3}$$

Cas 1 (P=4) : On obtient x = y = z = 1.   notre quadrilatère est un carré (d'après la 2ème question).

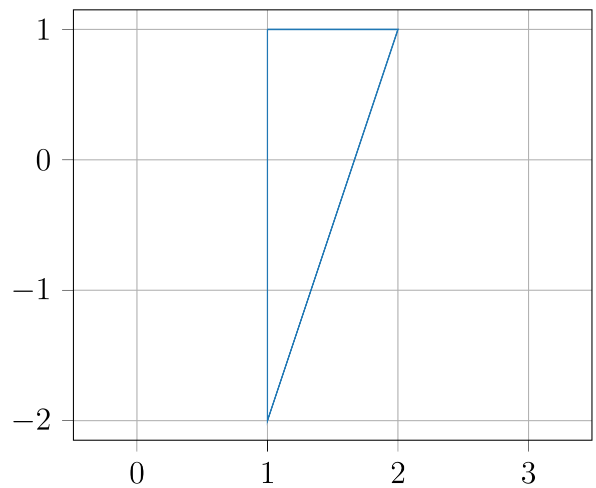


Cas 1 ($P \neq 4$) : Posons $P_a = a$ avec $a \neq 4$. Dans ce cas la, la figure obtenue n'est pas assez évidente. En effet, on obtient une figure différente pour chaque valeur de a.

Pour pouvoir tracer le quadrilatère de surface maximale, on va procéder comme suit :

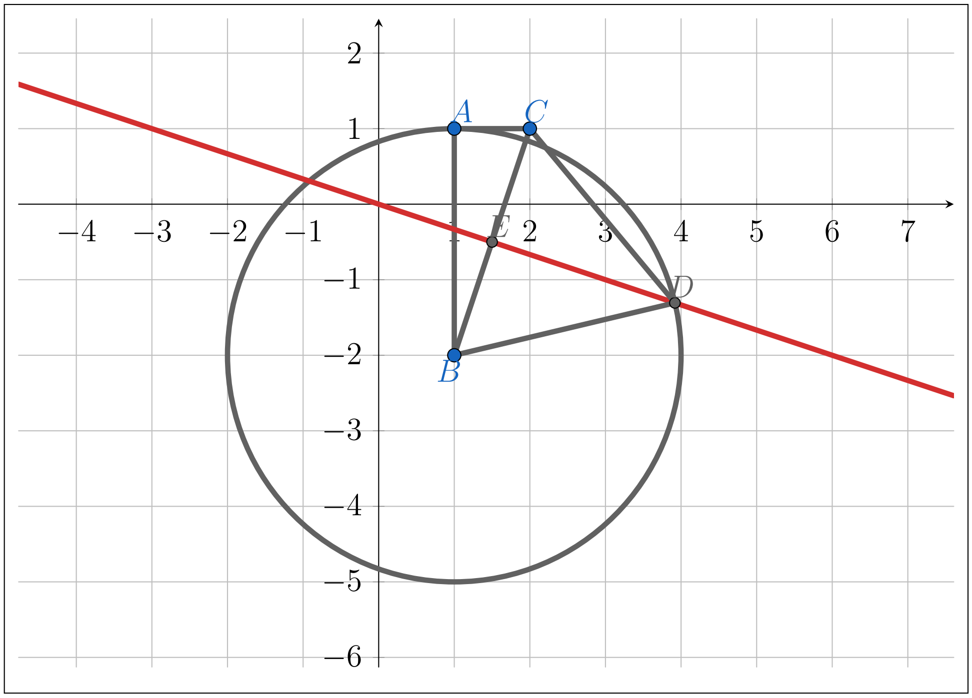
• On commence par tracer le triangle qui possède une surface maximale. Un des cotés de ce triangle doit être égale à 1. La formule de l'aire d'un triangle nous oblige donc à choisir un triangle rectangle pour avoir une surface maximale.

A titre d'exemple, pour $a = 10$ (donc x=3) on obtient le triangle suivant :



• Ensuite, puisque les deux autres cotés sont égales à 3 , il faut tracer le triangle équilatéral à partir des points C(2,1) et B(1,-2). Afin de pouvoir coder cela sur Python et ainsi le simuler pour différentes valeurs du périmètre, il faudra trouver une méthode de construction adéquate.

On commence d'abord par tracer la médiatrice de [AB] et puis le cercle de centre B et de rayon $R_a = 3$ et aussi le segment reliant B et le point d'intersection entre le cercle et la médiatrice. on obtient cela :



• La prochaine étape consiste à trouver les coordonnées du point D analytiquement. Pour ce faire, on va utiliser le fait que $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{ED} = 0$. On sait que $\overrightarrow{EB} = (\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2})$ et que $\overrightarrow{ED} = (x_D - \frac{3}{2}, y_D + \frac{1}{2})$. Donc

$$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}\right) . \left(x_D - \frac{3}{2}, y_D + \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x_D = -3y_D \tag{3.4}$$

Or, on sait que le point D appartient au cercle (B,3). Donc :

$$(x_D - 1)^2 + (y_D + 2)^2 = 9 \tag{3.5}$$

En utilisant (3.4) et (3.5), on obtient directement (en résolvant une équation de degré 2) que les coordonnées de D seront (3.3,-1.1).

Deuxième partie

En dimension infinie