Problème isopérimétrique

Le but de ce projet est de déterminer, dans plusieurs cas, les figures qui pour un périmètre fixé ont une aire intérieure maximale. Un tel problème est appelé problème isopérimétrique.

Mathématiquement, il s'agit d'un problème d'extrema liés : on cherche le maximum d'une fonction (l'aire), mais en restriction sur un ensemble défini par une certaine contrainte (le périmètre est fixé).

Plus précisément, notons E l'ensemble des figures considérées et A le sous-ensemble de E des figures dont le périmètre est égal à la valeur fixée. Notons $f : E \mapsto \mathbf{R}$ la fonction qui à chaque figure associe son aire intérieure. L'objectif est alors de déterminer la valeur maximale de f sur l'ensemble A.

Comme il s'agit d'un problème d'extremum, on pourrait penser qu'il suffit de regarder les points d'annulation de la différentielle de f. Mais il n'y a pas de raison a priori que cette différentielle s'annule sur A. Le théorème des extrema liés permet de déterminer les extrema de f en restriction à A.

La méthode que nous allons employer est une méthode classique permettant de résoudre un grand nombre de problèmes d'optimisation sous contrainte.

Fonctions Maple utiles : *diff, Gradient, display, solve, fsolve, dsolve, plot avec l'option coords*

1 Fonctions de plusieurs variables

Soit $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1. La différentielle de f est peut alors se définir à l'aide du gradient de f noté $\mathrm{grad}(f)$.

Soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid g(x_1, \ldots, x_n) = 0\} \subset \mathbf{R}^n$.

Le théorème des extrema liés affirme que si f, en restriction à A, admet un extremum local en un point $(x_1, \ldots, x_n) \in A$, alors les vecteurs $\mathrm{grad}(f)(x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathrm{grad}(g)(x_1, \ldots, x_n)$ sont colinéaires.

Ce théorème fournit un bon critère pour déterminer les éventuels extrema de f sur A.

Cas du triangle

Soit $P > 0$. On cherche le triangle de périmètre P fixé ayant l'aire la plus grande.

1. Définir les fonctions f et g définies sur $\mathbf{R}^3$ permettant de calculer l'aire et le périmètre d'un triangle. *Pour l'aire, on peut utiliser la formule de Héron.*
2. Déterminer les gradients de ces deux applications.
3. En utilisant la méthode des extrema liés, déterminer le triangle de périmètre P d'aire maximale.

Cas du quadrilatère

Déterminer, à périmètre fixé, le quadrilatère d'aire maximale.

Connaître les longueurs des côtés d'un quadrilatère ne suffit pas à le définir ; il faut ajouter la longueur d'une de ses diagonales pour le caractériser de manière unique.

Un cas moins trivial

Les résultats précédents ne sont pas très surprenants. Ajoutons une contrainte : on cherche désormais un quadrilatère de périmètre fixé, d'aire maximale mais on impose que l'un de ses côtés soit de longueur 1.

Appliquer la méthode puis représenter, pour différentes valeurs du périmètre, le quadrilatère obtenu.

2 En dimension infinie

Si nous ne travaillons plus dans $\mathbf{R}^n$, on ne peut plus parler de gradient pour définir la différentielle d'une application. Reprenons la définition générale vue dans le cours d'analyse 5.

Soit $f : E \mapsto \mathbf{R}$ une fonction différentiable sur le $\mathbf{R}$-espace normé E. Soit $g : E \mapsto \mathbf{R}$ une autre fonction différentiable et soit $A = \{x \in E \mid g(x) = 0\}$.

Le théorème des extrema liés affirme alors que si f, en restriction à A, a un extremum local en $x_0 \in A$, alors les différentielles df_{x_0} et dg_{x_0} sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $df_{x_0}(x) = \lambda dg_{x_0}(x)$.

Nous allons utiliser ce critère pour résoudre le problème isopérimétrique dans un cas plus général.

Fonction optimale

Notons $C = (-1, 0)$ et $B = (1, 0)$. On considère la courbe formée par le segment $[CB]$ et le graphe d'une fonction f passant par C et B. On cherche la fonction f définie sur $[-1, 1]$ telle que la longueur totale de la courbe soit égale à P et l'aire délimitée par f soit maximale.

1. Définir des fonctions F et G qui à une fonction f associent la longueur et l'aire correspondantes.
2. Proposer des exemples : représenter les courbes, calculer les longueurs et les aires correspondantes.
3. Déterminer les différentielles des fonctions longueur et aire sous forme intégrale.
   La différentielle de F a déjà été déterminée en TP.
4. Résoudre l'équation de colinéarité.
   Pour avoir $\forall f, dF_{f_0}(f) = \lambda dG_{f_0}(f)$, il suffit que le rapport des deux intégrandes soit constant.
5. Représenter l'allure de la solution du problème pour plusieurs valeurs de P (on distinguera notamment les cas $P \leqslant \pi$ et $P > \pi$).
   Les courbes obtenues sont-elles toujours les courbes qui, contenant le segment $[CB]$, maximisent l'aire intérieure ?

Courbe fermée optimale

Nous allons maintenant résoudre le problème isopérimétrique le plus général. On cherche la courbe fermée de longueur P fixée qui délimite l'aire maximale. Nous nous restreindrons aux courbes de classe C^1 qui peuvent se paramétrer sous la forme $(r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, où r est une fonction positive de classe C^1 telle que $r(0) = r(2\pi)$ et $r'(0) = r'(2\pi)$.

La longueur d'une telle courbe paramétrée est donnée par $L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2} dt$ et l'aire délimitée par cette courbe est donnée par $A(r) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)dt$.

1. Définir les fonctions L et A qui à une fonction r associent la longueur et l'aire de la courbe correspondante.
2. On considère les fonctions $r(t) = a$, $r(t) = b(2 + cos(t))$, $r(t) = c(2 + cos(5t))$, $r(t) = d(1 + t^2(2\pi - t)^2)$. Déterminer (éventuellement numériquement) a, b, c et d de manière à ce que ces courbes soient de longueur 1. Les représenter et calculer leurs aires.
3. Déterminer les différentielles des applications L et A et résoudre le problème isopérimétrique.
   Pour l'application L, il faudra utiliser une intégration par partie pour réexprimer une partie de l'expression de sa différentielle.