ELEC-1370 Circuits & Mesures

Synthèse

Damien Deprez

5 août 2015

Table des matières

Chapitre 1 - Concepts de base

Le courant est défini comme étant le flux de charge passant à travers un matériau. Il se note I.

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

où q représente la charge.

Chapitre 2 - Circuit Résistif

2.1 Loi d'Ohm

La loi d'Ohm dit : *La tension au borne d'une résistance est directement proportionnel au courant qui la traverse.* Sous forme mathématique cela donne.

$$v(t) = Ri(t)[\,\Omega] \tag{2.1}$$

La puissance dissipée dans un résistance est donné par $p(t) = v(t)i(t)$.
On défini aussi la conductance noté $G[\,\mathrm{S}]$. C'est l'inverse de la résistance $G = \dfrac{1}{R}$.

2.2 Loi de Kirchhoff

2.2.1 Loi des nœuds (KCL)

La loi des nœuds dit *en chaque nœud, la somme des courant doit être nulle.* De manière mathématique

$$\sum_{j=1}^{N} i_j(t) = 0 \tag{2.2}$$

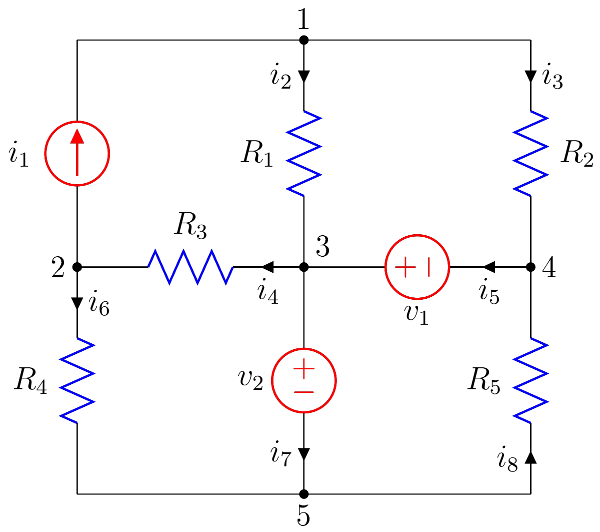

FIGURE 2.1 – Exemple 1 : Application de KCL

En appliquant la loi des nœuds, on obtient comme système d'équation

$$\left\{\begin{array}{rcl} i_1 - i_2 - i_3 & = & 0 \\ i_4 - i_1 - i_6 & = & 0 \\ i_2 - i_4 + i_5 - i_7 & = & 0 \\ i_3 + i_8 - i_5 & = & 0 \\ i_6 - i_7 - i_8 & = & 0 \end{array}\right.$$

2.2.2 Loi des mailles (KVL)

La loi des mailles dit *La somme des tensions dans une boucle fermée doit être nulle.* De manière mathématique

$$\sum_{j=1}^{N} v_j(t) = 0 \tag{2.3}$$

2.3 Montage de plusieurs résistances

2.3.1 montage série

Dans un montage série, le courant passant à travers chaque élément est le même. On peut remplacer ce montage par une seule résistance dont la valeur vaut la somme des résistances mise en série

$$R_p = \sum_{j=1}^{N} R_j \tag{2.4}$$

2.3.2 montage parallèle

Dans un montage parallèle, la tension est la même aux bornes de chaque élément. On peut remplacer ce montage par une seule résistance R_p dont la valeur vaut l'inverse de la somme des inverses des résistances montées en parallèle.

$$R_p = \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{R_j}} \tag{2.5}$$

2.3.3 montage triangle-étoile

La figure 2.2 montre le montage en triangle sur la gauche et le montage ne étoile sur la droite. Pour passer

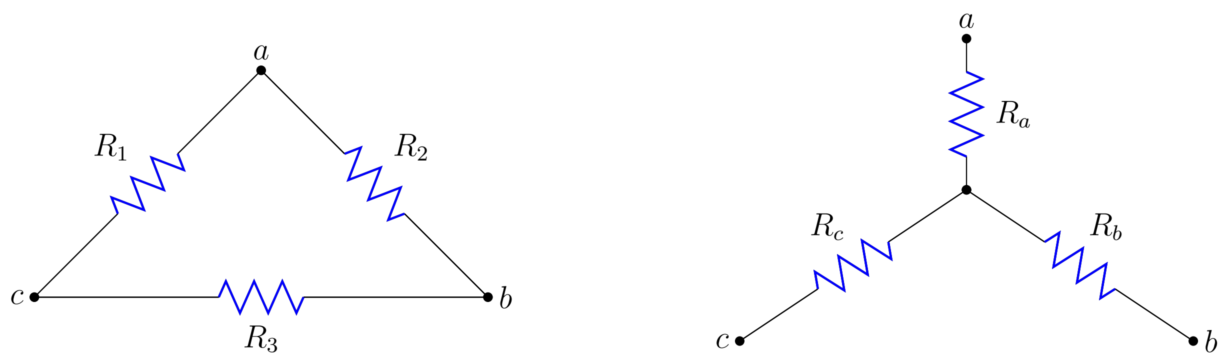

FIGURE 2.2 – Montage en triangle à gauche et montage en étoile à droite

du montage triangle au montage en étoile, on utilise les formules suivantes

$$R_a = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_b = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Pour passer du montage en étoile au montage en triangle, on utilise les formules suivantes

$$R_1 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_b}$$

$$R_2 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b + R_b R_c + R_a R_c}{R_a}$$

2.4 Dipôle équivalent

2.4.1 Équivalent de Thévenin

Le circuit équivalent de Thévenin est montré sur la figure 2.3 où la tension de Thévenin vaut la tension en circuit ouvert (v_{oc}).

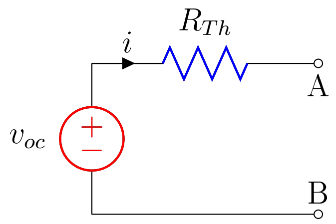

FIGURE 2.3 – Circuit équivalent de Thévenin

2.4.2 Circuit équivalent de Norton

Le circuit équivalent de Norton est montré sur la figure 2.4 où le courant de Norton vaut le courant en court-circuit (i_{sc}).

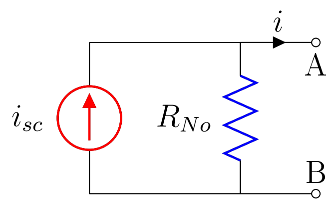

FIGURE 2.4 – Circuit équivalent de Norton

2.4.3 Relation entre les équivalents de Norton et Thévenin

La relation qui existe entre les équivalents de Norton et de Thévenin est la suivante

$$v_{oc} = i_{sc} R_{Th} \tag{2.6}$$

Chapitre 3 - Quadripôle à deux accès

Tout comme pour les dipôles équivalents pour les circuits à deux bornes, il existes des quadripôles équivalents pour les circuits à quatre bornes. Les conventions des accès à un quadripôles sont repris sur la figure 3.1. Un quadripôle ne doit pas contenir de source de tension ou de courant indépendante.

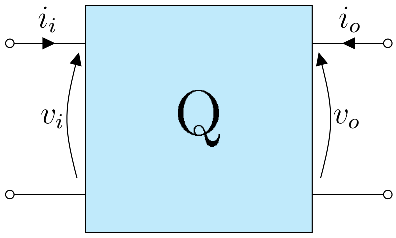

FIGURE 3.1 – Entrée et sortie d'un quadripôle

3.1 Représentations

Il existe plusieurs manière de représenter un quadripôle sous forme de réseaux de Kirchhoff. Dans le cadre du cours, quatre représentation on été vue. Il s'agit des représentations

- Y : Trans-admittances
- Z : Trans-impédances
- G : Gain en tension
- H : Gain en courant

3.1.1 Représentation sous-circuit

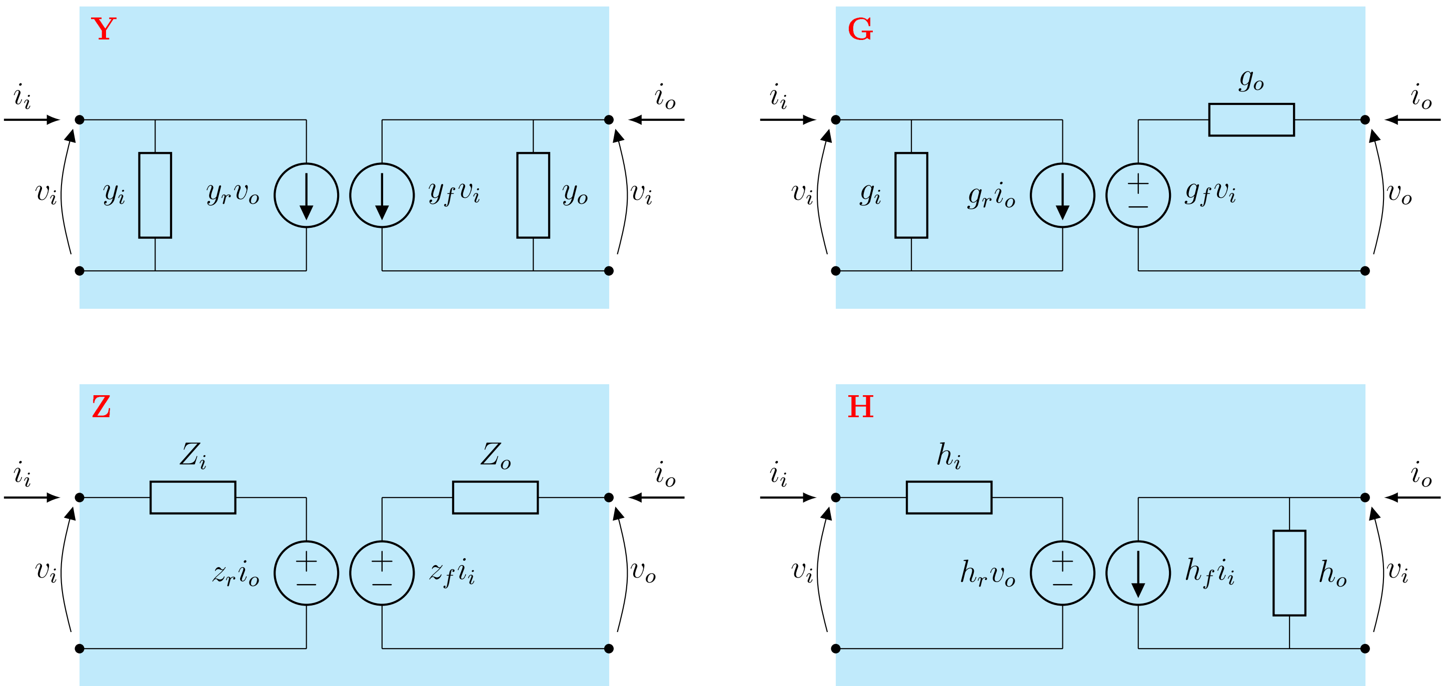

FIGURE 3.2 – Représentation Y,Z, G et H sous forme de réseaux de Kirchhoff

3.1.2 Représentation matricielle

Représentation Y

- y_i : admittance d'entrée
- y_r : trans-admittance inverse (reverse)
- y_f : trans-admittance directe (forward)
- y_o : admittance de sortie

$$\begin{bmatrix} i_i \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i & y_r \\ y_f & y_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_o \end{bmatrix}$$

Représentation G

- g_i : admittance d'entrée
- g_r : gain en courant
- g_f : gain en tension
- g_o : impédance de sortie

$$\begin{bmatrix} i_i \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_i & g_r \\ g_f & g_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ i_o \end{bmatrix}$$

Représentation Z

- z_i : impédance d'entrée
- z_r : trans-impédance inverse (reverse)
- z_f : trans-impédance directe (forward)
- z_o : impédance de sortie

$$\begin{bmatrix} v_i \\ v_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_i & z_r \\ z_f & z_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_i \\ i_o \end{bmatrix}$$

Représentation H

- h_i : impédance d'entrée
- h_r : gain en tension
- h_f : gain en courant
- h_o : admittance de sortie

$$\begin{bmatrix} v_i \\ i_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_i \\ v_o \end{bmatrix}$$

Chapitre 4 - Circuit en régime sinusoïdale

4.1 Régime sinusoïdale

Lorsqu'un circuit est alimenté par une source sinusoïdale, la réponse du circuit est donné par l'équation différentielle suivante

$$\sum_{i=n}^{1} a_i \frac{d^i}{dt^i} f(t) + a_0 f(t) = b_s \cos(\omega t) \tag{4.1}$$

où b_s est la source de tension ou de courant indépendante et f la tension d'un nœud ou le courant d'une branche du circuit. Pour un circuit *stable*, la solution est de la forme

$$f(t) = kb_s \left[T(s) + \cos(\omega t + \phi)\right] \tag{4.2}$$

Lorsque t est grand ($t \to \infty$), la solution est de la forme

$$f(t) = kb_s \cos(\omega t + \phi) \tag{4.3}$$

Cette solution est dite la solution en régime.

4.2 Représentation avec des phaseurs

En régime sinusoïdale, on peu aussi représenter une tension ou un courant sous forme complexe. Cela se fait à l'aide des phaseurs.

$$v(t) = V_M e^{j\phi} = V_M \angle\phi \text{ et } i(t) = I_M e^{j\phi} = I_M \angle\phi \tag{4.4}$$

4.2.1 Équation constitutives des différents éléments en terme de phaseurs

Élément	*Source de tension*	*Source de courant*	*Résistance*	*Inductance*	*Condensateur*
Paramètre	V_0	I_0	R	L	C
Impédance (Z)			$Z = R$	$Z = j\omega L$	$Z = \frac{1}{J\omega C}$
Admittance (Y)			$Y = \frac{1}{R}$	$Y = \frac{1}{j\omega L}$	$Y = j\omega C$
Équation constitutive	$V = V_0 e^{j/phi}$	$I = I_0 e^{j/phi}$	$V = ZI$ $I = YV$		

Impédance & Admittance

Impédance d'un dipôle L'impédance d'un dipôle se note $\mathbf{Z}$. Elle est définie comme le rapport du phaseur de tension sur le phaseur de courant.

$$\mathbf{Z}[\Omega] = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{V}{I} e^{j(\psi_V - \psi_I)} = \frac{V}{I} e^{j\phi} \tag{4.5}$$

avec comme convention que ϕ est la phase de la tension par rapport à la phase du courant. L'impédance peut se noter sous forme polaire ou cartésienne

$$\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| e^{j \arg(\mathbf{Z})} = Z e^{j\phi} = R + jX$$

avec R la résistance et X la réactance.

Admittance d'un dipôle L'admittance notée $\mathbf{Y}$ est définie comme le rapport du phaseur de courant sur le phaseur de tension.

$$\mathbf{Y}[\mathrm{S}] = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{I}{V}e^{-j\phi} \tag{4.6}$$

L'admittance peut se noter sous forme polaire ou cartésienne

$$\mathbf{Y} = |\mathbf{Y}|e^{j\arg(\mathbf{Y})} = Ye^{-j\phi} = G + jB$$

avec G la conductance et B la susceptance.

Remarque Dans le domaine phasoriel, les lois de Kirchhoff, la loi d'Ohm, les dipôles équivalents restent valable.

Chapitre 5 - Comportement des circuits dans le domaine fréquentiel

5.1 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est utilisé pour visualiser et communiquer de l'information sur la réponse en fréquence d'un système. Il est constitué de deux diagrammes :

— le diagramme en amplitude
— le diagramme des phases

Sur le diagramme en amplitude, on mesure l'amplitude en dB. Les dB sont défini à partir des gains de puissance.

$$\mathrm{dB}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \tag{5.1}$$

On peut aussi définir les dB à partir des gains en tension ou en courant.

$$\mathrm{dB}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{v_2^2}{v_1^2}\right) = 20log_{10}\left(\frac{v_2}{v_1}\right) \tag{5.2}$$

Sur le diagramme en amplitude, on affiche

$$\mathrm{dB}\left(|H|\right) \tag{5.3}$$

où $|H|$ est le module de H.
L'équation générale de $H(\omega)$ est :

$$H(j\omega) = A(j\omega)^{\pm N}\frac{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_1}\right)\left(1+2j\xi_a\frac{\omega}{\omega_a}-\left[\frac{\omega}{\omega_a}\right]^2\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_2}\right)\left(1+2j\xi_b\frac{\omega}{\omega_b}-\left[\frac{\omega}{\omega_b}\right]^2\right)} \tag{5.4}$$

Sur le diagramme de phase, on affiche

$$\arg(H)\ [\mathrm{deg}] \tag{5.5}$$

Lorsque

$$H = 1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_0}-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right).\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

on a comme solution $\omega_{1,2} = \xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2-1}$

ce circuit est dit résonnant si $\xi < 1$. Dans ces circuits, on appelle Q le facteur de qualité qui vaut $\frac{1}{2\xi}$. Dès lors, on peut déterminer la bande passante : $\frac{\omega_0}{Q} = 2\xi\omega_0$

5.2 Non-idéalité des amplificateurs opérationnels

Un amplificateur opérationnels est vu comme une source de tension commandée en tension

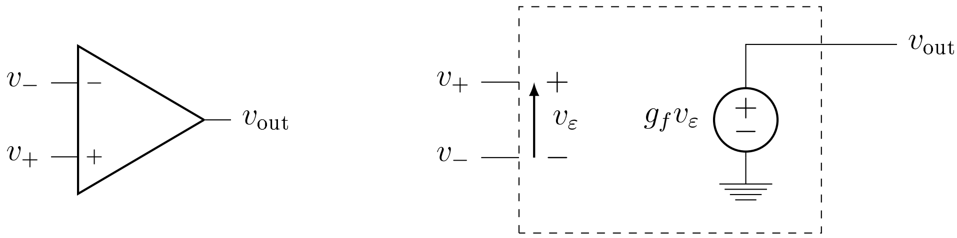

FIGURE 5.1 – Schéma d'un ampli op

La fonction de transfert d'un ampli op est donnée par

$$V_{\text{out}} = g_f v_\varepsilon \tag{5.6}$$

5.2.1 Saturation

La sortie d'un ampi-op est limitée par la tension d'alimentation V_{CC} et $-V_{EE}$:

$$-V_{EE} < V_{\text{Low}} < V_{\text{out}} < V_{\text{High}} < V_{CC}$$

La courbe de transfert d'un ampli op est données par la figure 5.2.

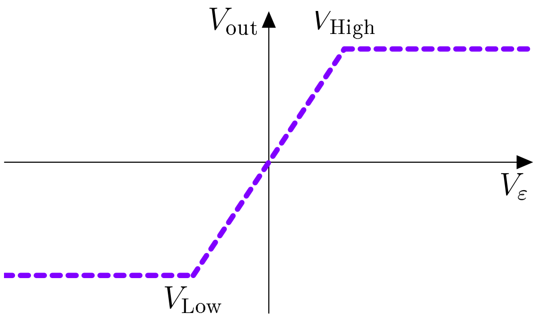

FIGURE 5.2 – Fonction de transfert d'un ampli op

5.2.2 Impédances internes

L'ampli op n'as pas une impédance infinie à l'entrée et nulle à la sortie. Si l'ampli op fonctionne en mode normal, il n'y a pas d'effet visible mais en mode saturé, cela a des effets sur le reste du circuit. Le nouveau schéma de l'ampli op est donné à la figure 5.3.

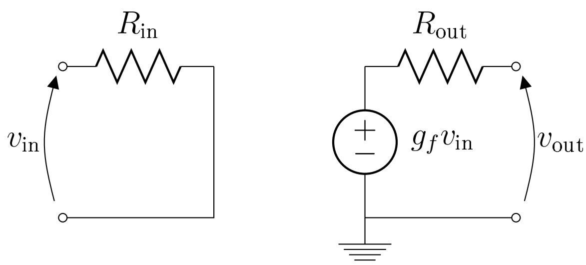

FIGURE 5.3 – Impédance interne d'un ampli-op

5.2.3 Limite du courant de sortie

Dans le cas idéal, l'ampli-op est une source de tension parfaite avec une puissance infinie. Dans la réalité, le courant de sortie est limité à $I_{\max}$. Tant que l'ampli-op, ne sature pas et que le courant de sortie reste inférieur à $I_{\max}$, le cas idéal est une bonne approximation. Par contre, dans le cas où l'ampli-op sature, cela créer des non-linéarité. C'est à cause de la limite du courant de sortie, que la résistance de charge ne peut pas être trop faible.

5.2.4 Réjection du mode commun

La tension d'entrée de l'ampli op est : V_+ et V_- On défini maintenant la tension différentielle : $V_{\text{diff}} = V_+ - V_-$ et la tension de mode commun : $V_{\text{comm}} = \dfrac{V_+ + V_-}{2}$
À la sortie de l'ampli op , nous avons pour une légère différence entre V_+ et V_- et un gain A_{vd}

$$V_{\text{out}} = A_{\text{vd}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) V_+ - A_{\text{vd}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < V_- = A_{\text{vd}}(V_{\text{diff}} + \varepsilon V_{\text{comm}}) \tag{5.7}$$

Chapitre 6 - Puissance

6.1 Puissance instantanée, moyenne et valeur efficace

6.1.1 Puissance instantanée

La puissance instantanée est le travail effectué par une charge q par unité de temps. Le travail de cette charge q est vu comme le déplacement d'une point A à un point B de la charge. On note ce travail comme $dW = dq\,(V_A - V_B)$. Avec l'expression du travail, la puissance s'exprime

$$p = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}\,(V_A - V_B) = iv \tag{6.1}$$

La puissance peut être dépendante du temps : $p(t) = v(t)i(t)$
Le dipôle absorbe de la puissance ($p > 0$) si le courant et la tension sont dans le même sens ($i > 0$ et $v > 0$ ou $i < 0$ et $v < 0$). Dans le cas contraire, le dipôle fourni de la puissance.

6.1.2 Puissance moyenne

Dans le cas d'un courant périodique de période T, passant dans une résistance R, la puissance instantanée vaut $p(t) = i^2(t)R$. La puissance moyenne est définie comme

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)dT \tag{6.2}$$

Dans le cas d'un courant imposé à travers une résistance, cela nous donne

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} Ri^2(t)dT$$

Dans le cas d'un courant sinusoïdale passant dans une résistance, nous avons comme puissance moyenne :

$$P_{\text{moy}} = \frac{RI_{\text{Max}}^2}{2} = R\left(\frac{I_{\text{Max}}}{\sqrt{2}}\right)^2$$

6.1.3 Valeur efficace

— Courant : c'est le courant continu tel que la puissance dissipée dans la résistance (RI_{eff}^2) est égal à la puissance moyenne.

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{P_{\text{moy}}}{R}} \tag{6.3}$$

— Tension : c'est la tension continue tel que la puissance dissipée dans la résistance (V_{eff}^2/R) est égale à la puissance moyenne.

$$V_{\text{eff}} = \sqrt{P_{\text{moy}}R} \tag{6.4}$$

Pour un courant sinusoïdale, nous avons comme valeur efficace de la tension et du courant

$$I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \text{ et } V_{\text{eff}} = \frac{V_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$$

6.1.4 Impédance quelconque

Dans le cas d'un courant et d'une tension sinusoïdale dans une impédance quelconque, nous avons comme expression de la tension et du courant
$v(t) = V_{\text{max}}\cos(\omega t + \psi_v)$
$i(t) = I_{\text{max}}\cos(\omega t + \psi_i)$

La puissance instantanée s'écrit :

$$p(t) = V_{\max} I_{\max} \cos(\omega t + \psi_v) \cos(\omega t + \psi_i) = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \left[\cos(\psi_v - \psi_i) + \cos(2\omega t + \psi_v + \psi_i)\right]$$

La puissance moyenne vaut

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} V_{\max} I_{\max} \cos(\psi_v - \psi_i) = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\psi_v - \psi_i)$$

6.2 Puissance active, réactive et apparente

La puissance active P [W] est définie comme la valeur moyenne de la puissance et traduit un échange unidirectionnel d'énergie entre la source et la charge.

$$P = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi) \tag{6.5}$$

La puissance apparente S [VoltAmpre] est définie comme l'amplitude de la composante fluctuante.

$$S = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \tag{6.6}$$

La puissance réactive Q [VoltAmpreRactif] traduit un échange bidirectionnel d'énergie entre la source et la charge.!!! Ce n'est valable qu'en régime sinusoïdale!!!

$$Q = V_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi) \tag{6.7}$$

Chapitre 7 - Circuit magnétique couplé

7.1 Inductance

Soit une bobine de N spire et traversée par un courant i. Alors un champ magnétique ($\vec{B}$) est généré. Au champ magnétique correspond un flux ϕ sur une spire. Il est donné par la relation

$$\phi = \int_{\mathrm{S}} \vec{B} d\vec{S} \tag{7.1}$$