Handout

https://github.com/DamienFlury/geoalgebra-handout/blob/main/handout.pdf

Geometrische Algebra

Damien Flury

2025-04-28

OST - Ostschweizer Fachhochschule

Inhalt

Was ist die geometrische Algebra?

- Einheitliche Sprache für Vektorrechnung
- Konsistenz für alle Operatoren, Rotationen, Spiegelungen
- Keine “Pseudovektoren” $\rightarrow$ n-Vektoren

Wedge-Produkt

Axiome des Wedge-Produkts

- $e_i \wedge e_i = 0$
- $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$

Herleitung

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_1 e_1 + u_2 e_2) \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2)$$

Herleitung

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1 e_1 + u_2 e_2) \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= u_1 e_1 \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) + u_2 e_2 \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2)\end{aligned}$$

Herleitung

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1 e_1 + u_2 e_2) \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) \\
&= u_1 e_1 \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) + u_2 e_2 \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) \\
&= u_1 e_1 \wedge v_1 e_1 + u_1 e_1 \wedge v_2 e_2 + u_2 e_2 \wedge v_1 e_1 + u_2 e_2 \wedge v_2 e_2
\end{aligned}$$

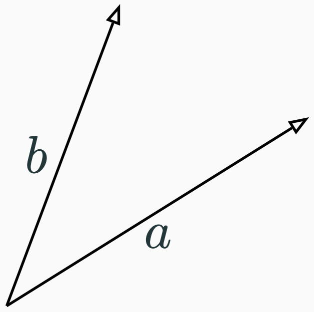
Herleitung

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1e_1 + u_2e_2) \wedge (v_1e_1 + v_2e_2) \\
&= u_1e_1 \wedge (v_1e_1 + v_2e_2) + u_2e_2 \wedge (v_1e_1 + v_2e_2) \\
&= u_1e_1 \wedge v_1e_1 + u_1e_1 \wedge v_2e_2 + u_2e_2 \wedge v_1e_1 + u_2e_2 \wedge v_2e_2 \\
&= u_1v_1e_1 \wedge e_1 + u_1v_2e_1 \wedge e_2 + u_2v_1e_2 \wedge e_1 + u_2v_2e_2 \wedge e_2 \\
&= (u_1v_2 - u_2v_1)e_1 \wedge e_2
\end{aligned}
$$

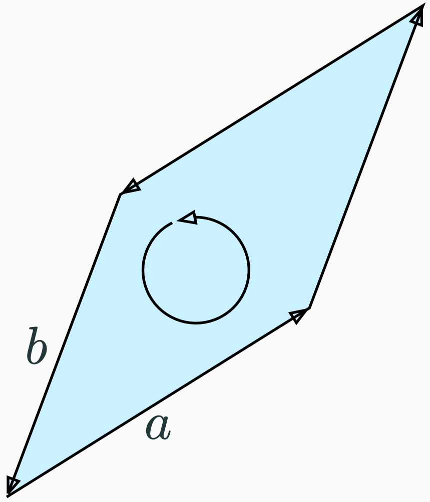
Oder als Determinante:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2$$

Visualisierung

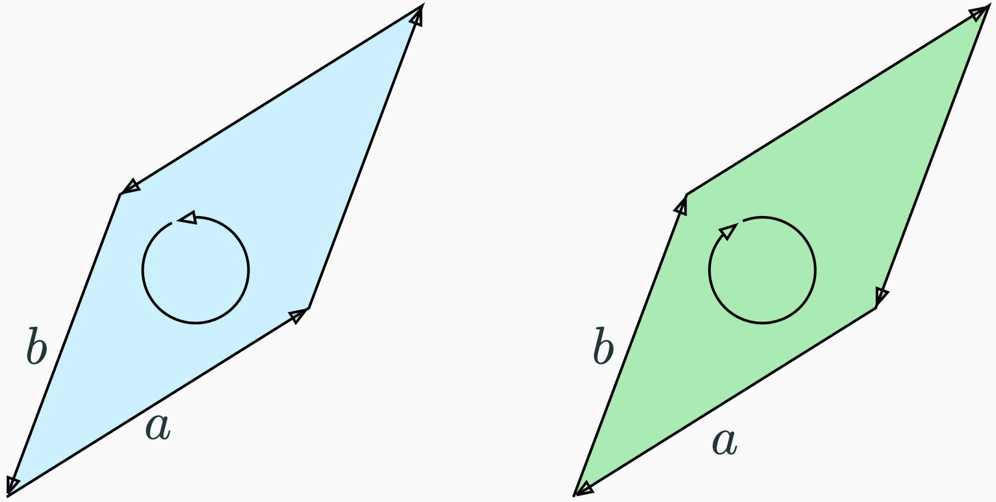


Visualisierung



$a \wedge b$

Visualisierung



$a \wedge b$ $\qquad$ $b \wedge a$

Fläche eines Parallelogrammes

Es gilt

$$|u|\ |v| \sin\varphi = |u_1 v_2 - u_2 v_1|$$

Somit ist $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$ die Fläche des Parallelogrammes.

Fläche eines Parallelogrammes

Der Term

$$u_1 v_2 - u_2 v_1$$

ist also die vorzeichenbehaftete Fläche des aufgespannten Parallelogrammes.

Rechenbeispiel

Rechenbeispiel

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + e_2$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2$$

Rechenbeispiel

$$a \wedge b = (3e_1 + e_2) \wedge (e_1 + 2e_2)$$

Rechenbeispiel

$$
\begin{aligned}
a \wedge b &= (3e_1 + e_2) \wedge (e_1 + 2e_2) \\
&= 3e_1 \wedge e_1 + 6e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 + 2e_2 \wedge e_2
\end{aligned}
$$

Rechenbeispiel

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (3e_1 + e_2) \wedge (e_1 + 2e_2) \\ &= 3e_1 \wedge e_1 + 6e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 + 2e_2 \wedge e_2 \\ &= 6e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 \end{aligned}$$

Rechenbeispiel

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (3e_1 + e_2) \wedge (e_1 + 2e_2) \\ &= 3e_1 \wedge e_1 + 6e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 + 2e_2 \wedge e_2 \\ &= 6e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 \\ &= 5e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

Rechenbeispiel

$$= 5e_1 \wedge e_2$$

Die Fläche des Parallelogramms ist 5

$\Rightarrow$ Gegenuhrzeigersinn

Rechenbeispiel

$$b \wedge a = -5e_1 \wedge e_2$$

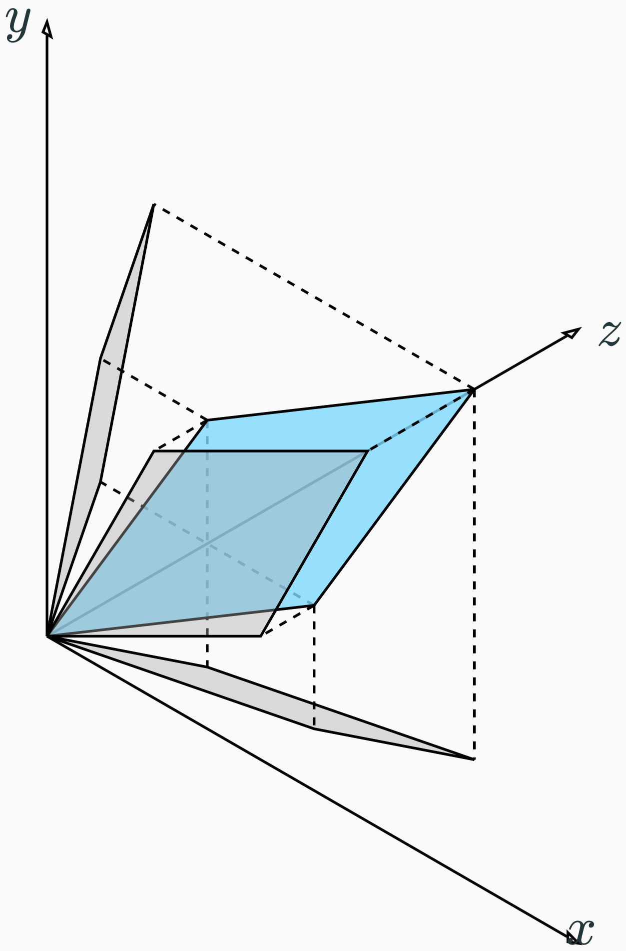
Fläche ist $-5 \Rightarrow$ Uhrzeigersinn

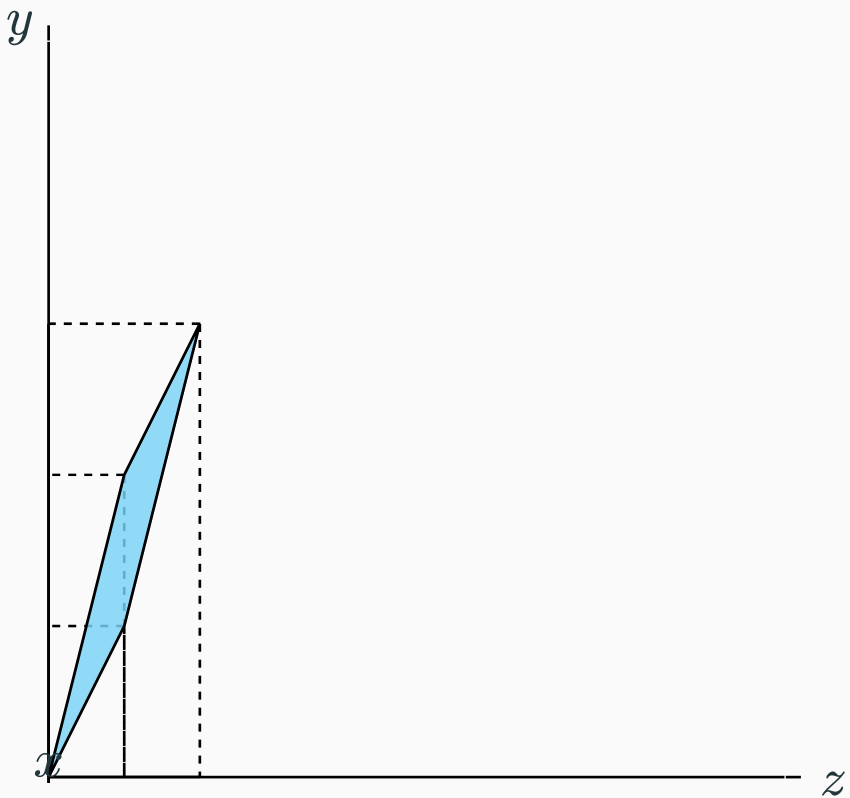
In 3D

In 3D

$$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3 \wedge e_1$$

In 3D





In 3D

$$a \wedge b = \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{\text{Projektion auf } e_1 \wedge e_2} e_1 \wedge e_2 + \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{\text{Projektion auf } e_2 \wedge e_3} e_2 \wedge e_3 + \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{\text{Projektion auf } e_3 \wedge e_1} e_3 \wedge e_1$$

bedeutet:

- $A_{12} = a_1 b_2 - a_2 b_1$: Fläche der Projektion auf $e_1 \wedge e_2$
- $A_{23} = a_2 b_3 - a_3 b_2$: Fläche der Projektion auf $e_2 \wedge e_3$
- $A_{31} = a_3 b_1 - a_1 b_3$: Fläche der Projektion auf $e_3 \wedge e_1$

In 3D

Und:

$$|a \wedge b|^2 = A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2$$
$$|a \wedge b| = \sqrt{A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2}$$

Also analog zum Betrag eines Vektors.

Implementation eines Bivektors (in Rust)

$$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3$$

```rust
struct Bivector3d {
  xy: f32,
  yz: f32,
  zx: f32,
}

fn wedge_product((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) -> Bivector3d {
  return Bivector3d {
    xy: a_1 * b_2 - a_2 * b_1,
    yz: a_2 * b_3 - a_3 * b_2,
    zx: a_3 * b_1 - a_1 * b_3,
  }
}
```

Implementation eines Bivektors (in Rust)

$$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3$$

```rust
struct Bivector3d {
  xy: f32,
  yz: f32,
  zx: f32,
}

fn wedge_product((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) -> Bivector3d {
  return Bivector3d {
    xy: a_1 * b_2 - a_2 * b_1,
    yz: a_2 * b_3 - a_3 * b_2,
    zx: a_3 * b_1 - a_1 * b_3,
  }
}
```

$\Rightarrow$ In 3D entsprechen die Komponenten eines Bivektors denen des Vektorprodukts $a \times b$.

In der Dimension N erhalten wir beim Wedge-Produkt von k Vektoren

$$\binom{N}{k}$$

Komponenten.

Beispiel

- In 3D: $a \wedge b$ resultiert in $\lambda_1 e_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_2 \wedge e_3 + \lambda_3 e_3 \wedge e_1$
- In 4D: $a \wedge b$ resultiert in $\lambda_1 e_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_1 \wedge e_3 + \lambda_3 e_1 \wedge e_4 + \lambda_4 e_2 \wedge e_3 + \lambda_5 e_2 \wedge e_4 + \lambda_6 e_3 \wedge e_4$

Das geometrische Produkt

Definition

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

Definition

$$ab = \underbrace{a \cdot b}_{\text{Skalar (0-Vektor)}} + \underbrace{a \wedge b}_{\text{Bivektor (2-Vektor)}}$$

Axiome

$$a^2 = a \cdot a + a \wedge a$$

$$a^2 = |a|^2$$

Axiome

$$a^2 = a \cdot a + a \wedge a$$
$$a^2 = |a|^2$$

Beispiel

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$|a|^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}^{\,2} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

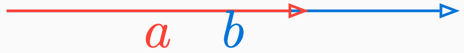
und $a \wedge a = 0$ (Axiom).

Axiome

Und

$$e_i^2 = 1$$

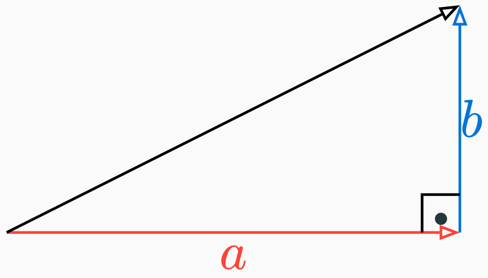
Verhalten bei parallelen Vektoren



$$ab = ba \text{ (Kommutativ)}$$

$$ab = a \cdot b + \cancel{a \wedge b}$$

Verhalten bei orthogonalen Vektoren



$$ab = -ba \text{ (Antikommutativ)}$$

$$ab = \cancel{a \cdot b} + a \wedge b$$

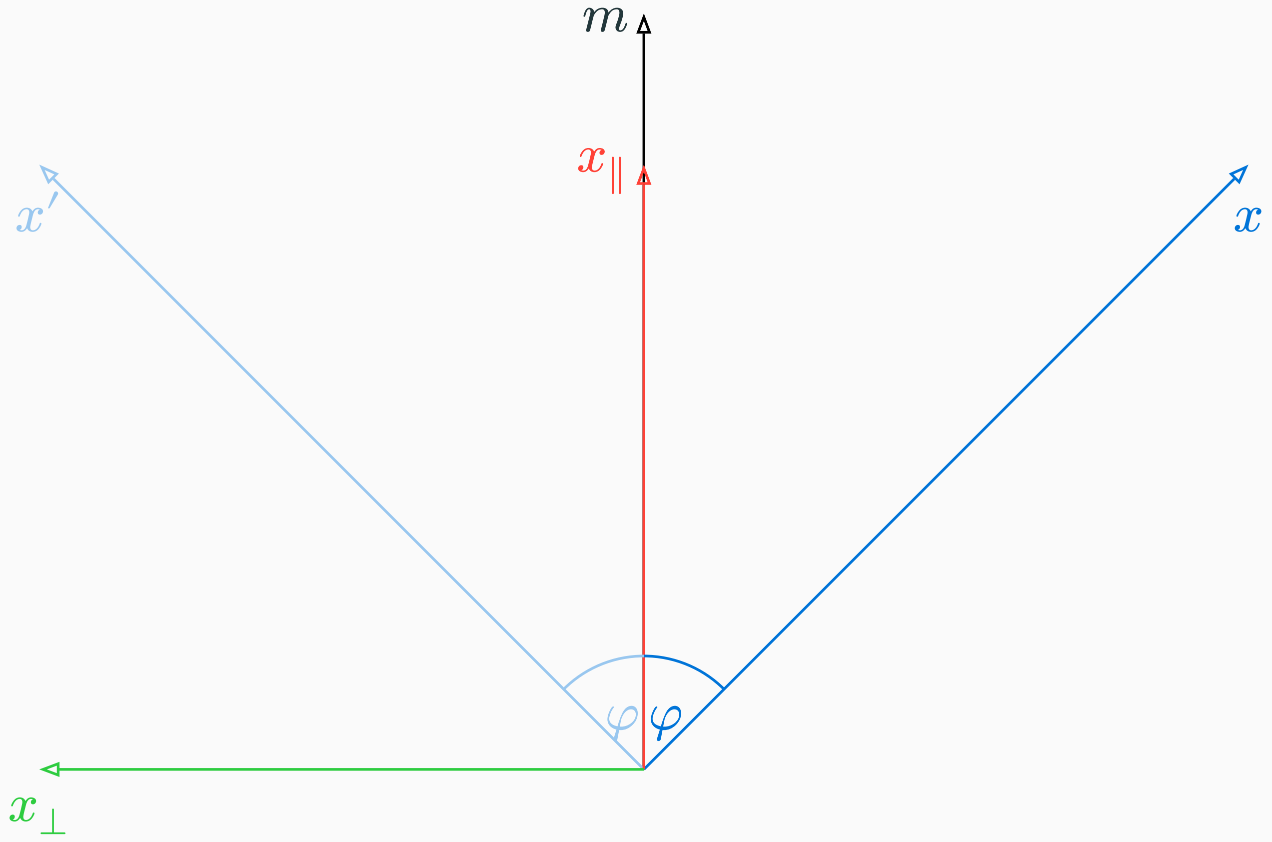
Im Allgemeinen

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

für beliebige Vektoren a und b.

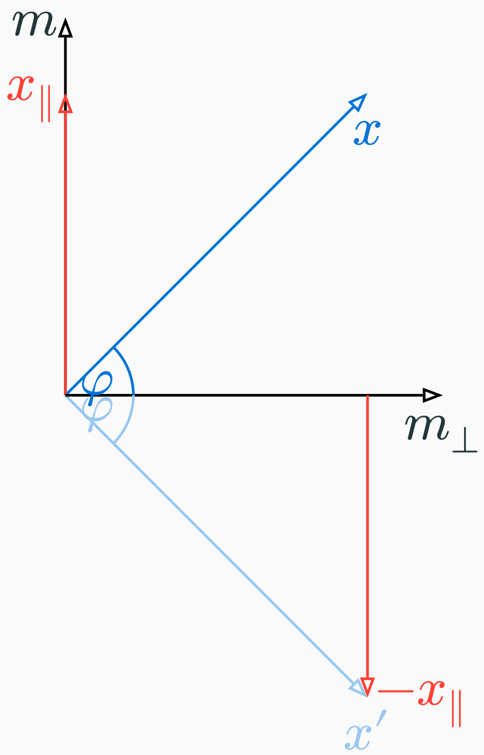
Reflexionen & Rotationen

Reflexion



- $x_\parallel = (m \cdot x)m$
- $x_\perp = (m \wedge x)m$

$$\begin{aligned} x' &= x_\parallel + x_\perp \\ &= (m \cdot x)m + (m \wedge x)m \\ &= (m \cdot x + m \wedge x)m \\ &= x' = mxm \end{aligned}$$



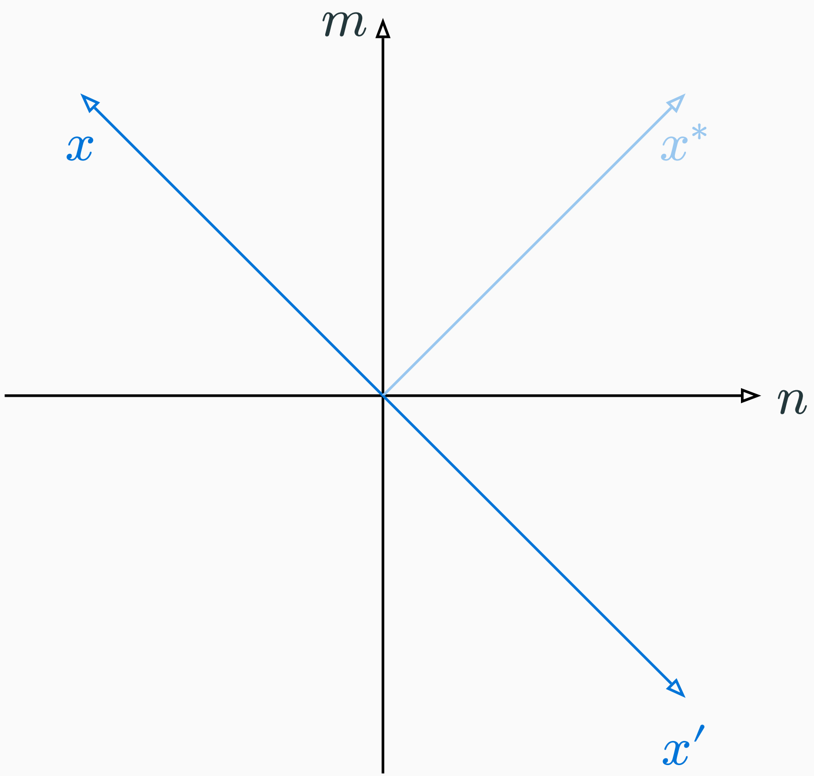
- $x_{\parallel} = (m \cdot x)m$
- $x_{\perp} = -(m \wedge x)m$

$$
\begin{aligned}
x' &= -x_{\parallel} x_{\perp} \\
&= -(m \cdot x)m - (m \wedge x)m \\
&= x' = -mxm
\end{aligned}
$$

Nach dem gleichen System lassen sich Vektoren, Bivektoren, Trivektoren an Ebenen spiegeln.

Rotationen

Rotationen sind nichts anderes als zwei aufeinanderfolgende Reflexionen.



$$
\begin{aligned}
x^* &= mxm \\
x' &= nx^*n \\
&= nmxmn
\end{aligned}
$$

Fragen?