



[https://github.com/DamienFlury/
geoalgebra-handout/blob/main/handout.
pdf](https://github.com/DamienFlury/geoalgebra-handout/blob/main/handout.pdf)

Geometrische Algebra

Damien Flury

2025-04-28

OST - Ostschweizer Fachhochschule

Was ist die geometrische Algebra?

- Einheitliche Sprache für Vektorrechnung
- Konsistenz für alle Operatoren, Rotationen, Spiegelungen
- Keine “Pseudovektoren” \rightarrow n-Vektoren

Wedge-Produkt

Axiome des Wedge-Produkts

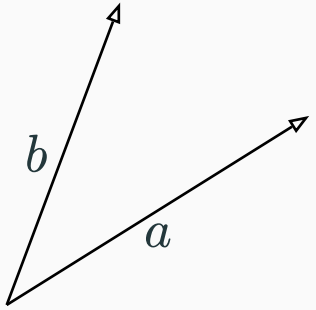
- $e_i \wedge e_i = 0$
- $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$

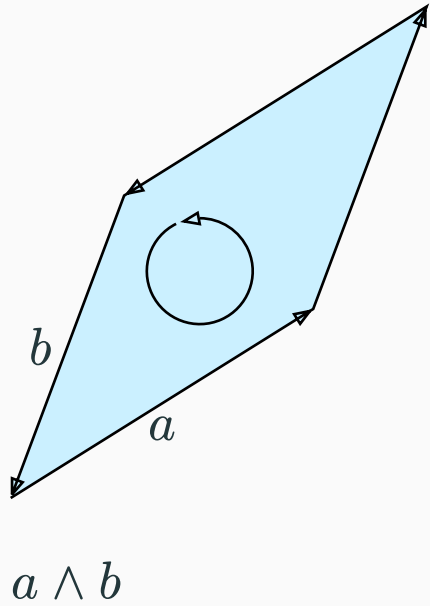
$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1 e_1 + u_2 e_2) \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= u_1 e_1 \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) + u_2 e_2 \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= u_1 e_1 \wedge v_1 e_1 + u_1 e_1 \wedge v_2 e_2 + u_2 e_2 \wedge v_1 e_1 + u_2 e_2 \wedge v_2 e_2\end{aligned}$$

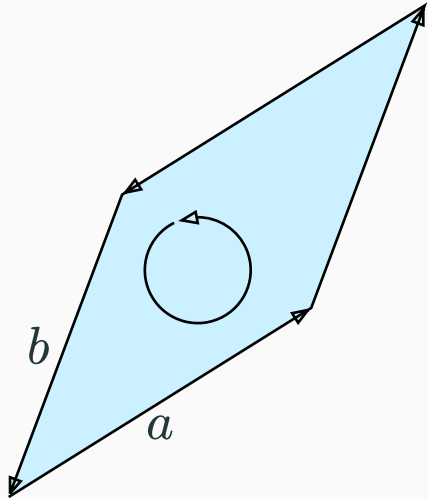
$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= u_1 v_1 e_1 \wedge e_1 + u_1 v_2 e_1 \wedge e_2 + u_2 v_1 e_2 \wedge e_1 + u_2 v_2 e_2 \wedge e_2 \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_1 \wedge e_2\end{aligned}$$

Oder als Determinante:

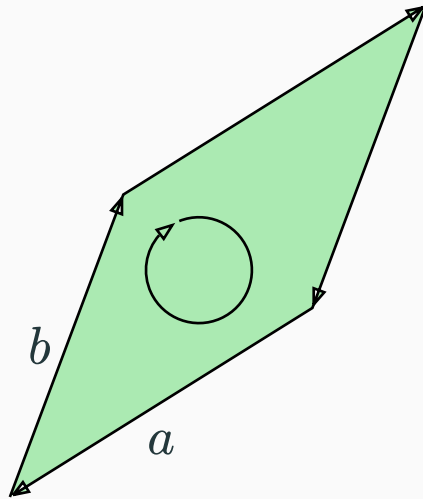
$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2$$







$a \wedge b$



$b \wedge a$

Fläche eines Parallelogrammes

Es gilt

$$|u| |v| \sin \varphi = |u_1 v_2 - u_2 v_1|$$

Somit ist $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$ die Fläche des Parallelogrammes.

Fläche eines Parallelogrammes

Der Term

$$u_1 v_2 - u_2 v_1$$

ist also die vorzeichenbehaftete Fläche des aufgespannten Parallelogrammes.

Rechenbeispiel

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + e_2$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2$$

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (3e_1 + e_2) \wedge (e_1 + 2e_2) \\ &= 3e_1 \wedge e_1 + 6e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 + 2e_2 \wedge e_2 \\ &= 6e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 \\ &= 5e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

$$= 5e_1 \wedge e_2$$

Die Fläche des Parallelogramms ist 5

\Rightarrow Gegenuhrzeigersinn

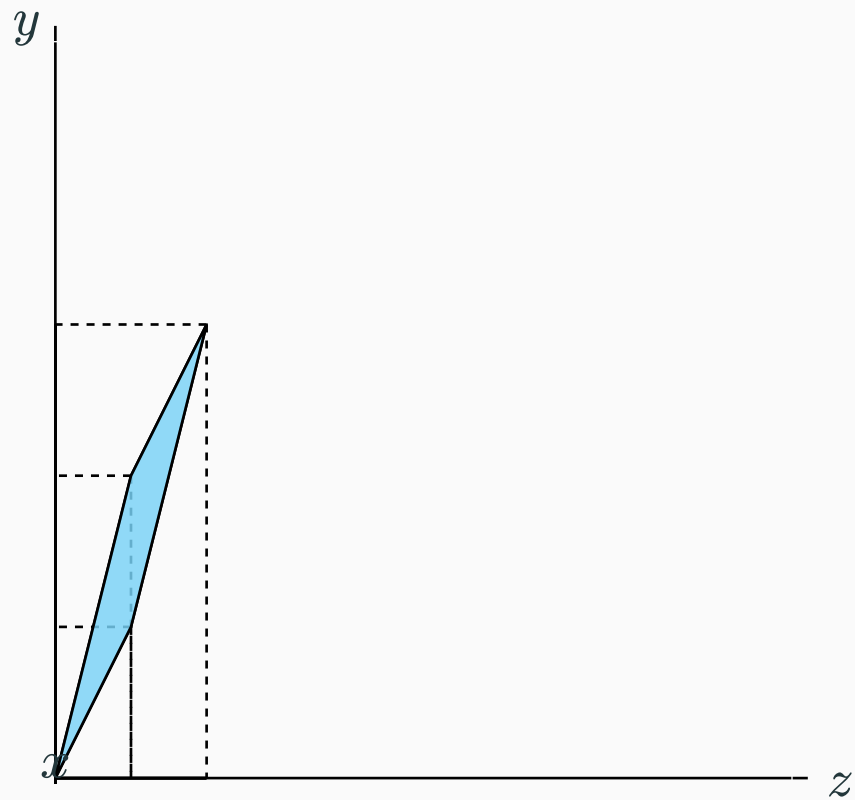
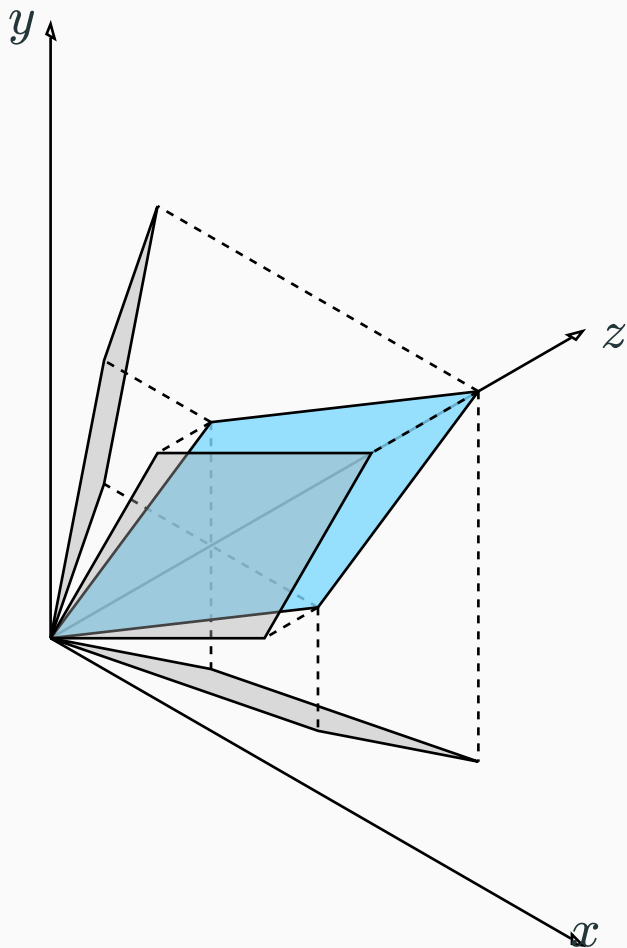
$$b \wedge a = -5e_1 \wedge e_2$$

Fläche ist $-5 \Rightarrow$ Uhrzeigersinn

In 3D



$$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3 \wedge e_1$$



$$a \wedge b = \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{\text{Projektion auf } e_1 \wedge e_2} e_1 \wedge e_2 + \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{\text{Projektion auf } e_2 \wedge e_3} e_2 \wedge e_3 + \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{\text{Projektion auf } e_3 \wedge e_1} e_3 \wedge e_1$$

bedeutet:

- $A_{12} = a_1 b_2 - a_2 b_1$: Fläche der Projektion auf $e_1 \wedge e_2$
- $A_{23} = a_2 b_3 - a_3 b_2$: Fläche der Projektion auf $e_2 \wedge e_3$
- $A_{31} = a_3 b_1 - a_1 b_3$: Fläche der Projektion auf $e_3 \wedge e_1$

Und:

$$|a \wedge b|^2 = A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2$$
$$|a \wedge b| = \sqrt{A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2}$$

Also analog zum Betrag eines Vektors.

Implementation eines Bivektors (in Rust)

$$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3$$

```
struct Bivector3d {  
    xy: f32,  
    yz: f32,  
    zx: f32,  
}  
  
fn wedge_product((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) -> Bivector3d {  
    return Bivector3d {  
        xy: a_1 * b_2 - a_2 * b_1,  
        yz: a_2 * b_3 - a_3 * b_2,  
        zx: a_3 * b_1 - a_1 * b_3,  
    }  
}
```

⇒ In 3D entsprechen die Komponenten eines Bivektors denen des Vektorprodukts $a \times b$.

In der Dimension N erhalten wir beim Wedge-Produkt von k Vektoren

$$\binom{N}{k}$$

Komponenten.

Beispiel

- In 3D: $a \wedge b$ resultiert in $\lambda_1 e_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_2 \wedge e_3 + \lambda_3 e_3 \wedge e_1$
- In 4D: $a \wedge b$ resultiert in $\lambda_1 e_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_1 \wedge e_3 + \lambda_3 e_1 \wedge e_4 + \lambda_4 e_2 \wedge e_3 + \lambda_5 e_2 \wedge e_4 + \lambda_6 e_3 \wedge e_4$

Das geometrische Produkt

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

$$ab = \underbrace{a \cdot b}_{\text{Skalar (0-Vektor)}} + \underbrace{a \wedge b}_{\text{Bivektor (2-Vektor)}}$$

$$a^2 = a \cdot a + a \wedge a$$

$$a^2 = |a|^2$$

$$a^2 = a \cdot a + a \wedge a$$

$$a^2 = |a|^2$$

Beispiel

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

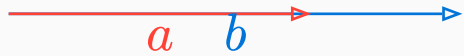
$$|a|^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

und $a \wedge a = 0$ (Axiom).

Und

$$e_i^2 = 1$$

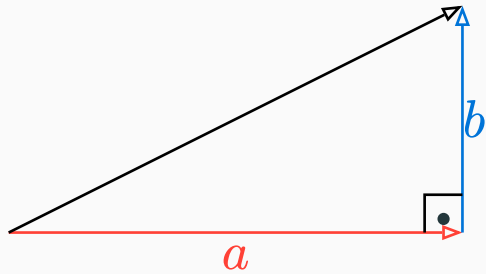
Verhalten bei parallelen Vektoren



$$ab = ba \text{ (Kommutativ)}$$

$$ab = a \cdot b + \cancel{a \wedge b}$$

Verhalten bei orthogonalen Vektoren



$$ab = -ba \text{ (Antikommutativ)}$$

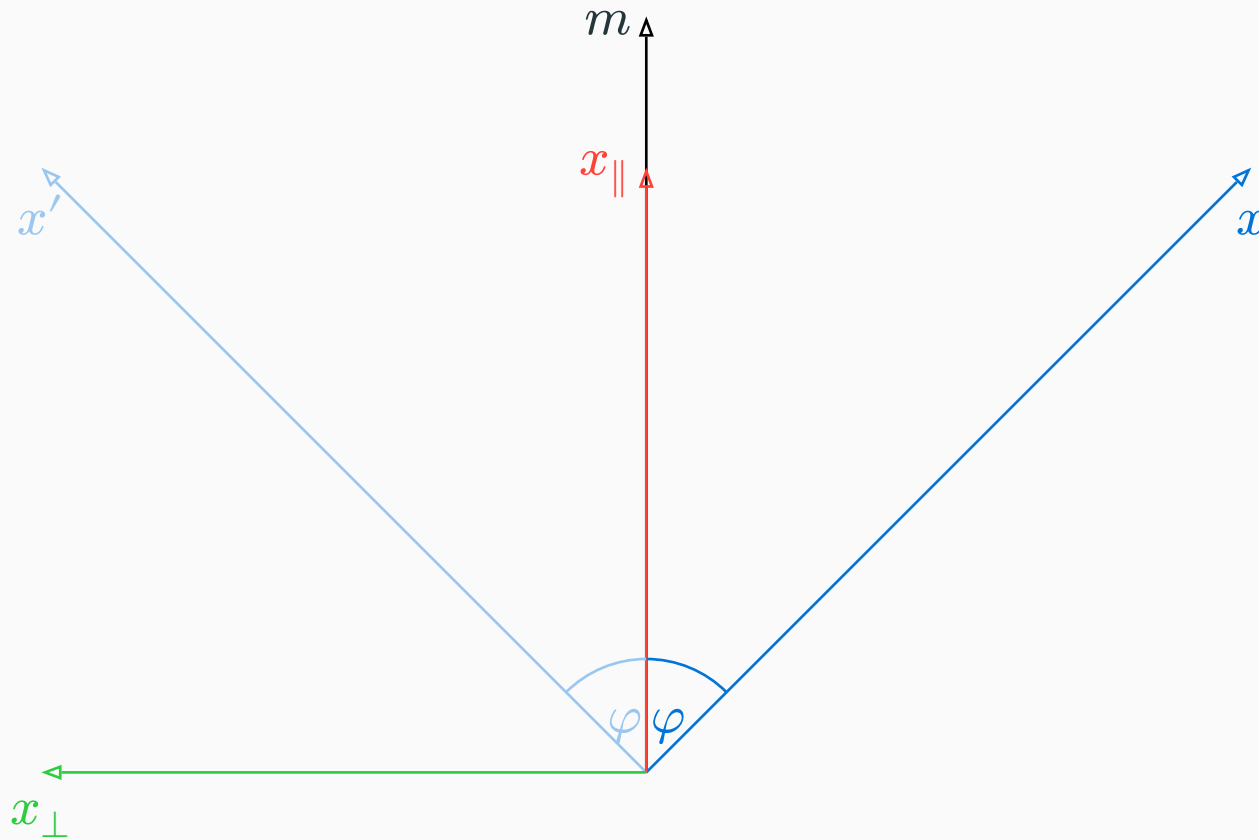
$$ab = \cancel{a \cdot b} + a \wedge b$$

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

für beliebige Vektoren a und b .

Reflexionen & Rotationen

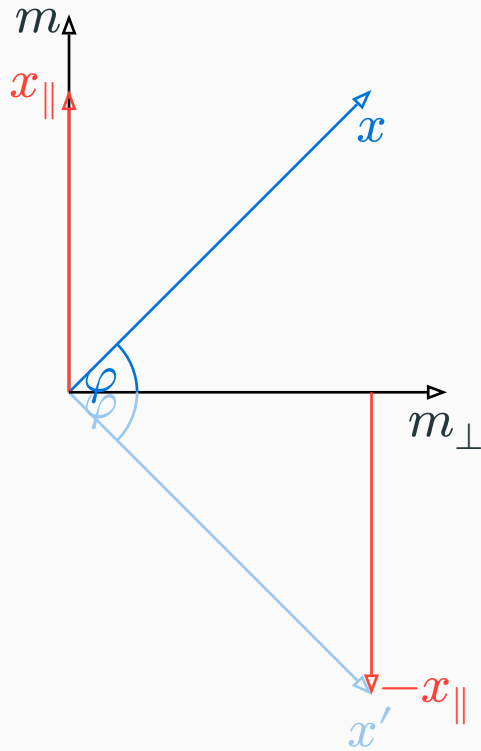
Reflexion



- $x_{\parallel} = (m \cdot x)m$
- $x_{\perp} = (m \wedge x)m$

$$\begin{aligned}x' &= x_{\parallel} + x_{\perp} \\&= (m \cdot x)m + (m \wedge x)m \\&= (m \cdot x + m \wedge x)m \\&= x' = m x m\end{aligned}$$

Reflexion an orthogonalem Vektor



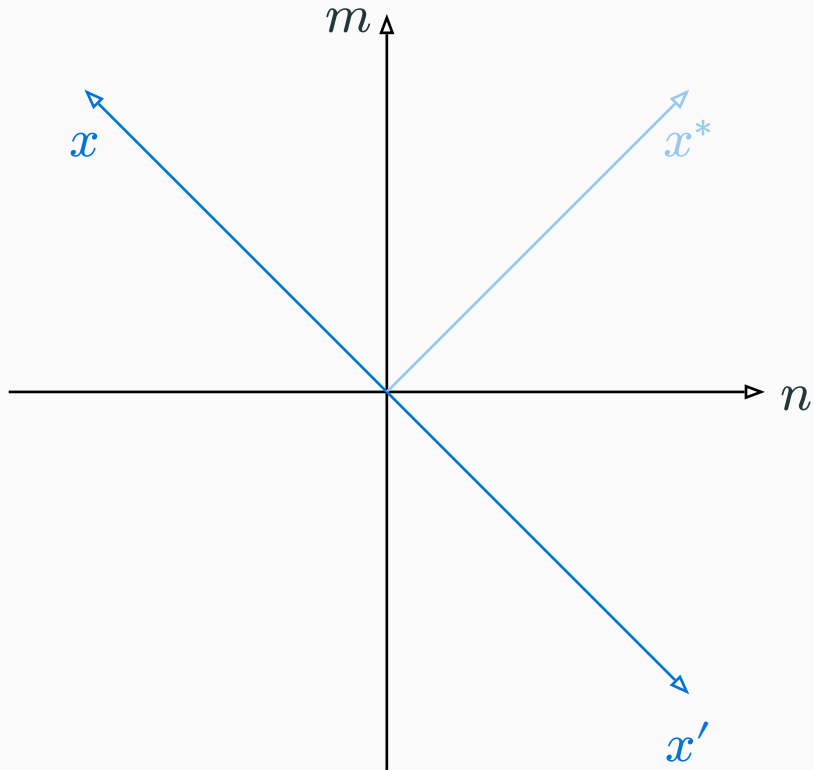
- $x_{\parallel} = (m \cdot x)m$
- $x_{\perp} = -(m \wedge x)m$

$$\begin{aligned}x' &= -x_{\parallel} x_{\perp} \\&= -(m \cdot x)m - (m \wedge x)m \\&= x' = -m x m\end{aligned}$$

Nach dem gleichen System lassen sich Vektoren, Bivektoren, Trivektoren an Ebenen spiegeln.

Rotationen

Rotationen sind nichts anderes als zwei aufeinanderfolgende Reflexionen.



$$x^* = mxm$$

$$\begin{aligned} x' &= nx^*n \\ &= nmxmn \end{aligned}$$

Fragen?