Geometrische Algebra

Damien Flury

28. April 2025

Einführung

Die geometrische Algebra bietet eine einheitliche Sprache für Vektorrechnung. Sie hat Konzepte wie Bivektoren, Trivektoren und n-Vektoren und ermöglicht eine konsistente Algebra für Vektoren beliebigen Grades.

Ausserdem bietet die geometrische Algebra einen sehr einfachen Weg für Reflexionen und Rotationen und ist besonders für Computergrafik sehr geeignet und effizient.

Wedge-Produkt

Für das Verständnis der geometrischen Algebra ist es wichtig, dass wir nicht nur normale Vektoren betrachten, es gibt auch Bivektoren, Trivektoren und n-Vektoren. Einen Bivektor kann man sich als Parallelogramm vorstellen, einen Trivektor als shiefes Parallelepiped.

Das Wedge-Produkt wird als $a \wedge b$ geschrieben. Für Vektoren a und b ist das Wedge-Produkt ein Bivektor. Der Ausdruck $a \wedge b \wedge c$ für beliebige Vektoren a, b und c ist ein Trivektor. Dies ist für alle Grade möglich, ein Trivektor und ein Vektor ergeben zusammen einen 4-Vektor, usw.

Mit der geometrischen Algebra können wir irgendwelche n-Vektoren kombinieren.

Axiome des Wedge-Produkts

- $e_i \wedge e_i = 0$
- $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$

Herleitung

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1 e_1 + u_2 e_2) \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= u_1 e_1 \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) + u_2 e_2 \wedge (v_1 e_1 + v_2 e_2) \\ &= u_1 e_1 \wedge v_1 e_1 + u_1 e_1 \wedge v_2 e_2 + u_2 e_2 \wedge v_1 e_1 + u_2 e_2 \wedge v_2 e_2\end{aligned}$$

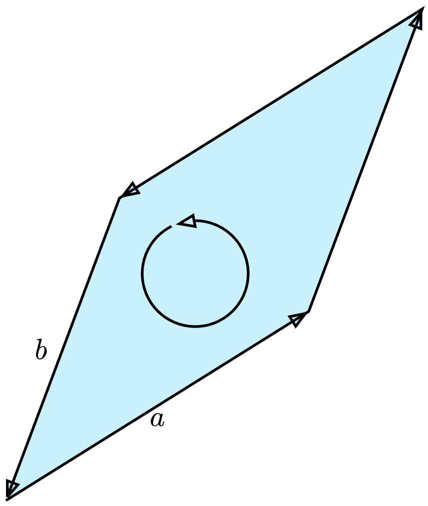
$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= u_1 v_1 e_1 \wedge e_1 + u_1 v_2 e_1 \wedge e_2 + u_2 v_1 e_2 \wedge e_1 + u_2 v_2 e_2 \wedge e_2 \\ &= (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_1 \wedge e_2\end{aligned}$$

Das Wedge-Produkts zwischen zwei normalen Vektoren ergibt einen Bivektor und kann im 2D-Raum auch als Determinante geschrieben werden:

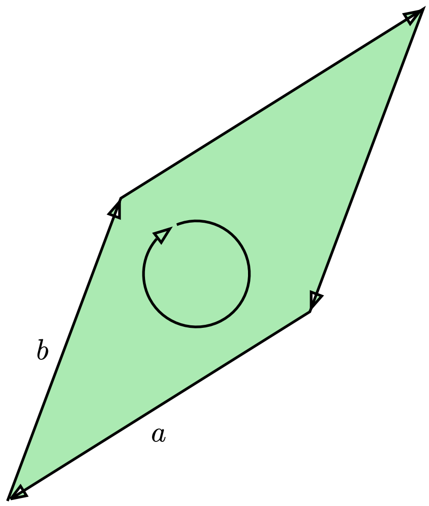
$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} e_1 \wedge e_2$$

Wenn Dimension und Grad des Wedge-Produkts übereinstimmen, kann das Wedge-Produkt immer auch als Determinante geschrieben werden.

Visualisierung eines Bivektors



$a \wedge b$



$b \wedge a$

Fläche eines Parallelogrammes

Es gilt

$$|u|\ |v| \sin \varphi = |u_1 v_2 - u_2 v_1|$$

Somit ist $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$ die Fläche des Parallelogrammes.

Der Term

$$u_1 v_2 - u_2 v_1$$

ist also die vorzeichenbehaftete Fläche des aufgespannten Parallelogrammes.

Rechenbeispiel

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3e_1 + e_2$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2$$

$$\begin{aligned} a \wedge b &= (3e_1 + e_2) \wedge (e_1 + 2e_2) \\ &= 3e_1 \wedge e_1 + 6e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 + 2e_2 \wedge e_2 \\ &= 6e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_1 \\ &= 5e_1 \wedge e_2 \end{aligned}$$

$$= 5e_1 \wedge e_2$$

Die Fläche des Parallelogramms ist 5

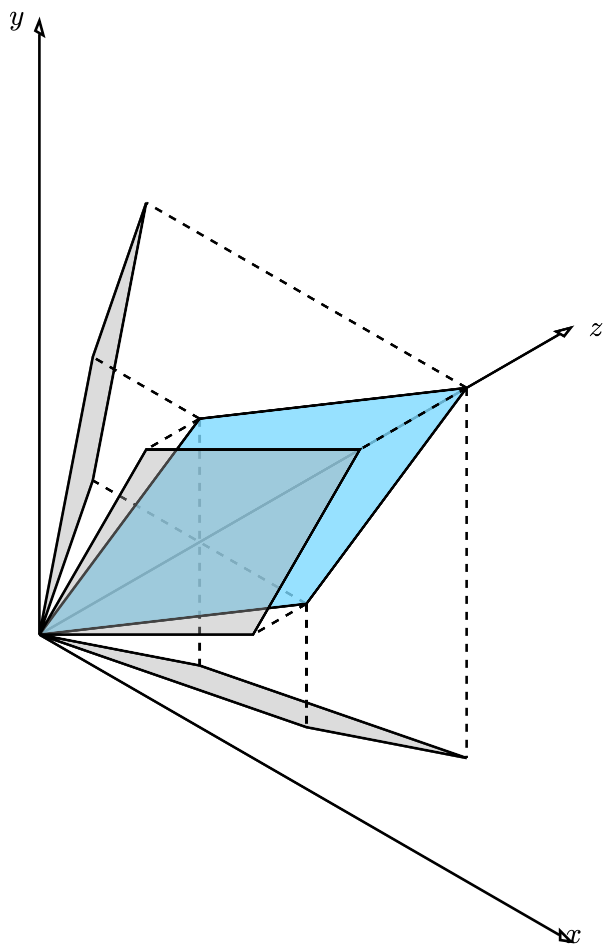
$\Rightarrow$ Gegenuhrzeigersinn

$$b \wedge a = -5e_1 \wedge e_2$$

Fläche ist −5 $\Rightarrow$ Uhrzeigersinn

In 3D

$$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3 \wedge e_1$$



$$a \wedge b = \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{\text{Projektion auf } e_1 \wedge e_2} e_1 \wedge e_2 + \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{\text{Projektion auf } e_2 \wedge e_3} e_2 \wedge e_3 + \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{\text{Projektion auf } e_3 \wedge e_1} e_3 \wedge e_1$$

bedeutet:

- $A_{12} = a_1 b_2 - a_2 b_1$: Fläche der Projektion auf $e_1 \wedge e_2$
- $A_{23} = a_2 b_3 - a_3 b_2$: Fläche der Projektion auf $e_2 \wedge e_3$
- $A_{31} = a_3 b_1 - a_1 b_3$: Fläche der Projektion auf $e_3 \wedge e_1$

Und:

$$|a \wedge b|^2 = A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2$$
$$|a \wedge b| = \sqrt{A_{12}^2 + A_{23}^2 + A_{31}^2}$$

Also analog zum Betrag eines Vektors.

Implementation eines Bivektors (in Rust)

$a \wedge b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_1 \wedge e_2 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_2 \wedge e_3 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_3$

```rust
struct Bivector3d {
  xy: f32,
  yz: f32,
  zx: f32,
}

fn wedge_product((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) -> Bivector3d {
  return Bivector3d {
```

```
    xy: a_1 * b_2 - a_2 * b_1,
    yz: a_2 * b_3 - a_3 * b_2,
    zx: a_3 * b_1 - a_1 * b_3,
  }
}
```

In 3D entsprechen die Komponenten eines Bivektors denen des Vektorprodukts $a \times b$. Das Vektorprodukt ist eigentlich auch ein Pseudovektor, die korrekte Bezeichnung ist Bivektor. Das Kreuzprodukt wird insbesondere in Frankreich und Italien oft auch als Wedge-Produkt $a \wedge b$ geschrieben.

Der Vorteil des Wedge-Produkts ist, dass es in beliebigen Dimensionen funktioniert. Das Vektorprodukt ist nur in 3D definiert.

In beliebigen Dimensionen

In der Dimension N erhalten wir beim Wedge-Produkt von k Vektoren

$$\binom{N}{k}$$

Komponenten.

Beispiel

- In 3D: $a \wedge b$ resultiert in $\lambda_1 e_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_2 \wedge e_3 + \lambda_3 e_3 \wedge e_1$
- In 4D: $a \wedge b$ resultiert in $\lambda_1 e_1 \wedge e_2 + \lambda_2 e_1 \wedge e_3 + \lambda_3 e_1 \wedge e_4 + \lambda_4 e_2 \wedge e_3 + \lambda_5 e_2 \wedge e_4 + \lambda_6 e_3 \wedge e_4$

Das geometrische Produkt

Definition

$$ab = a \cdot b + a \wedge b$$

$$ab = \underbrace{a \cdot b}_{\text{Skalar (0-Vektor)}} + \underbrace{a \wedge b}_{\text{Bivektor (2-Vektor)}}$$

Axiome

$$\begin{aligned} e_i^2 &= 1 \\ a^2 &= a \cdot a + a \wedge a \\ a^2 &= |a|^2 \end{aligned}$$

Beispiel

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

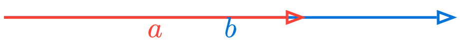
$$a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$$|a|^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

und $a \wedge a = 0$ (Axiom). Somit ist $a^2 = a \cdot a + \cancel{a \wedge a} = |a|^2$.

Verhalten bei parallelen Vektoren

Bei parallelen Vektoren ist das Wedge-Produkt 0. Somit ist das geometrische Produkt $ab = a \cdot b$ und kommutativ.

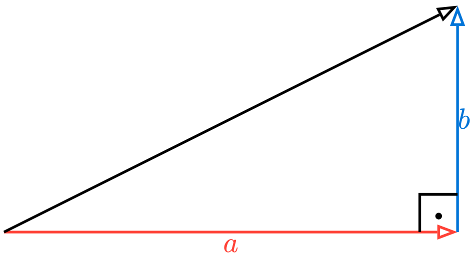


$ab = ba$ (Kommutativ)

$$ab = a \cdot b + \cancel{a \wedge b}$$

Verhalten bei orthogonalen Vektoren

Bei orthogonalen Vektoren ist das innere Produkt 0. Somit ist das geometrische Produkt $ab = a \wedge b$ und antikommutativ.

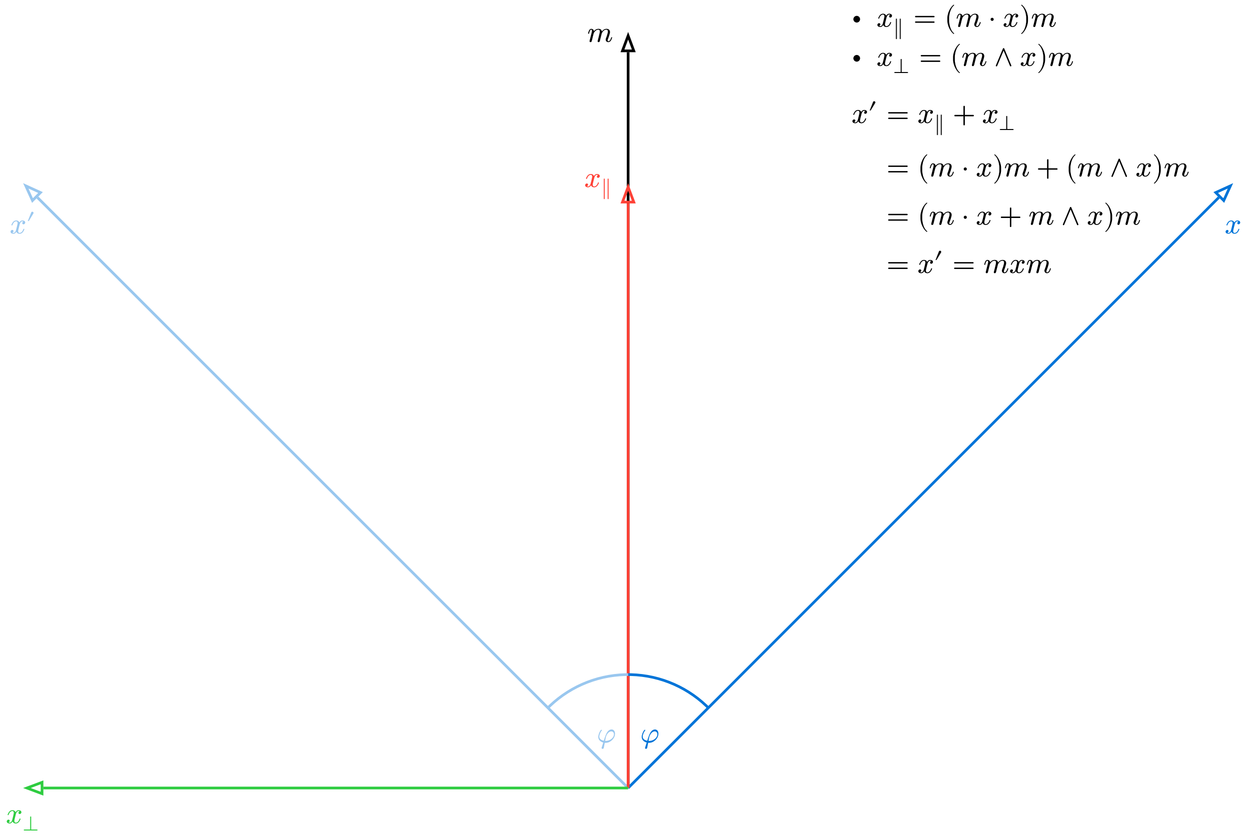


$ab = -ba$ (Antikommutativ)

$$ab = \cancel{a \cdot b} + a \wedge b$$

Reflexionen & Rotationen

Reflexion



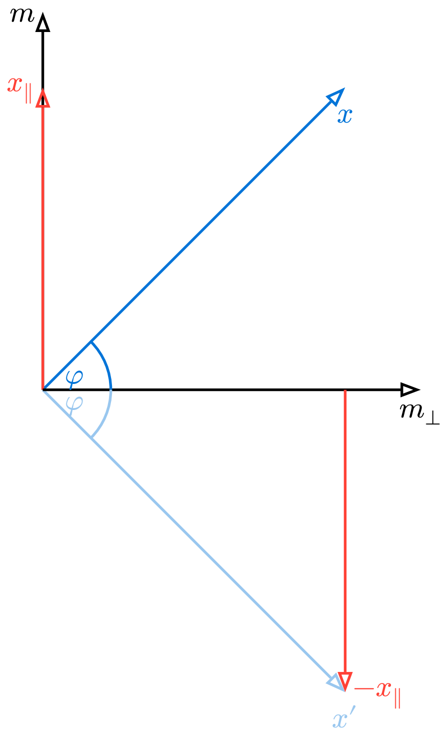
- $x_\parallel = (m \cdot x)m$
- $x_\perp = (m \wedge x)m$

$$\begin{aligned} x' &= x_\parallel + x_\perp \\ &= (m \cdot x)m + (m \wedge x)m \\ &= (m \cdot x + m \wedge x)m \\ &= x' = mxm \end{aligned}$$

Reflexion an orthogonalem Vektor

- $x_\parallel = (m \cdot x)m$
- $x_\perp = -(m \wedge x)m$

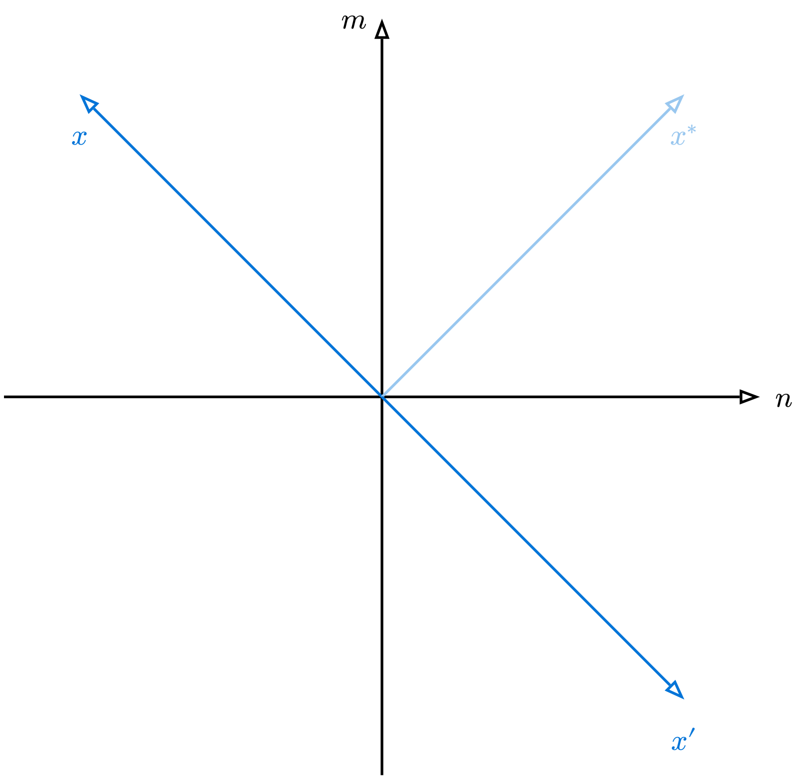
$$\begin{aligned} x' &= -x_\parallel x_\perp \\ &= -(m \cdot x)m - (m \wedge x)m \\ &= x' = -mxm \end{aligned}$$



Nach dem gleichen System lassen sich Vektoren, Bivektoren, Trivektoren an Ebenen spiegeln.

Rotationen

Rotationen sind nichts anderes als zwei aufeinanderfolgende Reflexionen.



$$
\begin{aligned}
x^* &= mxm \\
x' &= nx^*n \\
&= nmxmn
\end{aligned}
$$