Die Gravitationskonstante g auf einer schiefen Bahn bestimmen

Sascha Huber, Aaron Stampa, Joanne Gautschi, Damien Flury

1. Dezember 2019

Zusammenfassung

Dieses Dokument ist der Praktikumsbericht für die Berechnung der Gravitationskonstante g mithilfe einer schiefen Ebene. Dies fand statt im Physikpraktikum im Rahmen des IDAF (Interdisziplinäres Arbeiten in den Fächern) an der Berufsbildungsschule Winterthur (BBW), 2019.

Inhaltsverzeichnis

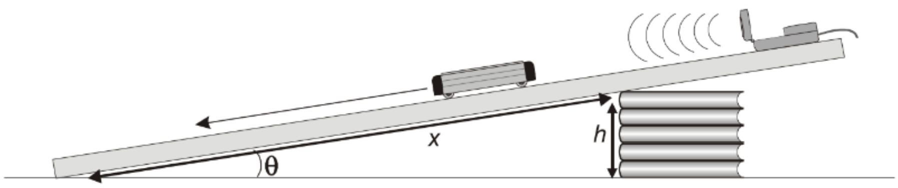

Abbildung 1: Schiefe Bahn

1 Einleitung

Die Gravitation begleitet den Mensch tagtäglich. Doch wie stark ist sie auf der Erde eigentlich und wie kann sie bestimmt werden? Diese Frage hat sich bereits Galileo Galilei anfang des 17. Jahrhunderts gestellt. Da er jedoch keine Möglichkeit hatte, die Zeit sehr genau zu bestimmen, konnte er dies nicht auf der Vertikale tun (die Beschleunigung ist zu hoch). Somit nahm er sich eine schiefe Bahn zur Hilfe und konnte dann mit einfacher Mathematik eine ungefähre Näherung an die Gravitationskonstante g berechnen. Sie bezeichnet die Beschleunigung, die ein Körper nahe der Erde im freien Fall erreicht (ohne Einberechnung des Luftwiderstandes) und beträgt nach heutigen Forschungen etwa $9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Wir möchten ähnliche Versuche ausführen und somit g ungefähr bestimmen. Um eine praktische Sicht auf g zu zeigen, werden wir als Anfangsexperiment einen vertikalen Fall analysieren. Dazu verwenden wir zunächst unseren eigenen Herzschlag und eine mechanische Uhr (ungefähr die Messmethode, welche Galileo hatte), um die Zeit zu bestimmen, welche ein Ball benötigt, um zwei Meter in die Tiefe zu fallen. Da uns mittlerweile wesentlich genauere Messmethoden zur Verfügung stehen, bestimmen wir die Zeit im Anschluss mit einer Stoppuhr, welche eine Genauigkeit bis im Millisekundenbereich aufweist.

In einem weiteren Experiment verwenden wir einen Bewegungssensor, um die Beschleunigung von Objekten auf einer schiefen Bahn zu bestimmen und Excel, um diese in einer Tabellenform darzustellen. Wie in Abbildung 1 dargestellt, können wir durch Messen des Weges x und der Höhe h anhand von Trigonometrie den Neigungswinkel θ bestimmen. Mehr dazu später im Artikel.

2 Vorfragen

2.1 Experiment 1: Ball fallenlassen

Als erstes Experiment haben wir einen Ball aus $2\,\mathrm{m}$ Höhe fallenlassen. Dabei haben wir die Zeit t, welche er bis zum Boden benötigt, gemessen.

2.1.1 Messung mit Herzfrequenz

In einem ersten Teil dieses Experiments haben wir t mithilfe unserer Herzfrequenz gemessen. Unseren Messungen zufolge braucht der Ball ungefähr gleich lang wie ein Herzschlag. Die durchschnittliche Herzfrequenz eines erwachsenen Menschen in unserem Alter und sportlichen Zustand beträgt 70 Schläge pro Minute ($70\,\mathrm{min}^{-1}$).

Berechnung der Zeit t für einen Herzschlag:

$$\Delta t = \frac{n}{f} \tag{1}$$

$$\Delta t = \frac{1}{1.17\,\mathrm{s}^{-1}} \tag{2}$$

$$t = 0.86\,\mathrm{s} \tag{3}$$

Zur Berechnung der Beschleunigung verwenden wir die Formel:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \tag{4}$$

$$a = \frac{2 \cdot s}{t^2} \qquad \text{(Termumformung)} \tag{5}$$

Mit unseren gemessenen Werten erhalten wir somit:

$$a = \frac{2 \cdot 2\,\mathrm{m}}{(0.86\,\mathrm{s})^2} \approx 5.41\,\mathrm{m\,s^{-2}} \tag{6}$$

Dies ist etwa $4.4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ zu klein. Dieser Fehler kommt einerseits von ungenauen Messmethoden (Herzfrequenz), andererseits von unserer Reaktionszeit. Ausserdem verfälscht der Luftwiderstand weiterhin das Resultat. Die korrekte Zeit, welche der Ball im Vakuum bräuchte, wäre ca. $0.64\,\mathrm{s}$.

2.1.2 Messung mit Stoppuhr

Im zweiten Teil dieses Experiments haben wir die benötigte Zeit mit einer Stoppuhr gemessen. Wir erhielten dabei eine Zeit t von $360\,\mathrm{ms}$.

Wenn wir diese Messung wieder der Formel aus (5) mitgeben, erhalten wir eine Beschleunigung von:

$$a = \frac{2 \cdot 2\,\mathrm{m}}{(0.360\,\mathrm{s})^2} \approx 30.86\,\mathrm{m\,s^{-2}} \tag{7}$$

Dies ist wesentlich zu hoch. Dies ist zwar überraschend, da wir eine wesentlich genauere Messmethode anwendeten, jedoch spielt unsere Reaktionszeit immernoch eine entscheidende Rolle. Wir haben einfach zu früh gestoppt oder die Stoppuhr zu spät gestartet.

2.2 Experiment: Ball auf schiefer Bahn

Für das nächste Experiment haben wir einen Ball von einer schiefen Bahn herunterrollen lassen und die Zeit gemessen (siehe Abbildung 1).

θ	10°
x	1 m

2.2.1 Zeitmessung mit Herzfrequenz

Unseren Messungen zufolge benötigt der Ball ungefähr drei Herzschläge für einen Meter. Unter der Annahme, dass unsere durchschnittliche Herzfrequenz f $70\,\mathrm{min}^{-1}$ ($\approx 1.17\,\mathrm{s}^{-1}$) beträgt, erhalten wir durch die Formel aus (1):

$$t = \frac{3}{1.17\,\mathrm{s}^{-1}} \approx 2.57\,\mathrm{s} \tag{8}$$

Anhand der Formel aus (5) erhalten wir für die Beschleunigung a bei einem Neigungswinkel von 10°:

$$a = \frac{2 \cdot 1\,\mathrm{m}}{(2.57\,\mathrm{s})^2} \approx 0.303\,\mathrm{m\,s}^{-2} \tag{9}$$

2.3 Wie aussagekräftig sind diese Experimente?

Die Fehlerquellen sind natürlich sehr gross. Insbesondere zu Zeiten Galileis waren die Messmöglichkeiten stark beschränkt und haben somit eine genaue Berechnung verhindert. Jedoch ermöglichen die Messungen immerhin einen Wert, an welchem man sich ungefähr orientieren konnte. Auch wenn er ungenau ist, ist es ein physikalischer Durchbruch, eine ungefähre Grössenordnung zu kennen.

3 Hauptexperiment: Schiefe Ebene

> Auf einem Holzbrett von 12 Ellen Länge, einer halben Elle Breite und drei Zoll Dicke war auf der schmalen Seite eine Rinne von etwas mehr als einem Zoll Breite eingegraben. Dieselbe war sehr gerade gezogen, und um die Fläche recht glatt zu haben, war innwendig ein sehr glattes und reines Pergament aufgeklebt. In dieser Rinne liessen wir eine harte, völlig runde und glatt polierte Messingkugel laufen. Nach Aufstellung des Brettes wurde dasselbe auf der einen Seite etwas angehoben, bald eine, bald zwei Ellen hoch; dann liessen wir die Kugel durch die Rinne laufen. [...] Bei wohl hundertfacher Wiederholung fanden wir stets, dass die Strecke sich verhielten wie die ungeraden Zahlen: die zweite Strecke ist drei Mal so lang wie die erste Strecke, die dritte Stricke ist fünf Mal so lang wie die

Number of books	**Height of books** (m)	$\sin\theta$	**Trial 1** ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	**Trial 2** ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	**Trial 3** ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	**Average acceleration** ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)
3	0.115	0.0479	0.26	0.31	0.36	0.310
4	0.144	0.0600	0.49	0.38	0.41	0.426
5	0.174	0.073	0.60	0.45	0.38	0.476
6	0.200	0.083	0.61	0.59	0.56	0.586
7	0.275	0.115	0.97	1.22	1.22	1.137

Tabelle 1: Messwerte (Ball)

> erste Strecke... und dies galt für jede beliebige Neigung der Rinne, in der die Kugel lief. [1]

Wir haben unser Experiment wiederum eingerichtet, wie auf Abbildung 1 dargestellt. Dann haben wir verschiedene Objekte herunterrollen lassen mit verschieden Höhen h. Die Länge x ist die Distanz, in welcher wir die Objekte messen. Der Winkel θ bezeichnet den Winkel der schiefen Ebene.

3.1 Messung mit einem Ball

Zunächst haben wir einen Ball herunterrollen lassen. Sein Radius r beträgt etwa 4 cm, seine Masse m 242 g.

Wir haben die Strecke s in Abhängigkeit der Zeit t gemessen, um die Beschleunigung a zu bestimmen. Dazu haben wiederum die Formel aus (5) verwendet. Die Messwerte sind in der Tabelle 1 ersichtlich. Diese Punkte haben wir in einem Graph eingetragen und mithilfe von Geogebra eine am besten passende lineare Funktion berechnet. Diese ist in der Abbildung 2 ersichtlich. Durch Extrapolation zu $\sin\theta = 1$, also zum Winkel $\theta = 90°$ erhalten wir für die Beschleunigung $a = 11.89\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Dies ist in der Abbildung 3.

3.2 Messung mit einem Cart

Um die Reibung und den Luftwiderstand möglichst klein zu halten und somit eine möglichst genaue Messung zu erzielen, haben wir das ganze Experiment auch mit einem Cart durchgeführt. Der Vorgang war prinzipiell derselbe, jedoch haben wir hohere Beschleunigungen erhalten, wie in Tabelle 2 dargestellt. Wir haben wiederum Geogebra verwendet, um die Werte in einem Graphen darzustellen und eine optimale lineare Annäherung zu finden (Abbildung 4) und eine Extrapolation hergeleitet (Abbildung 5).

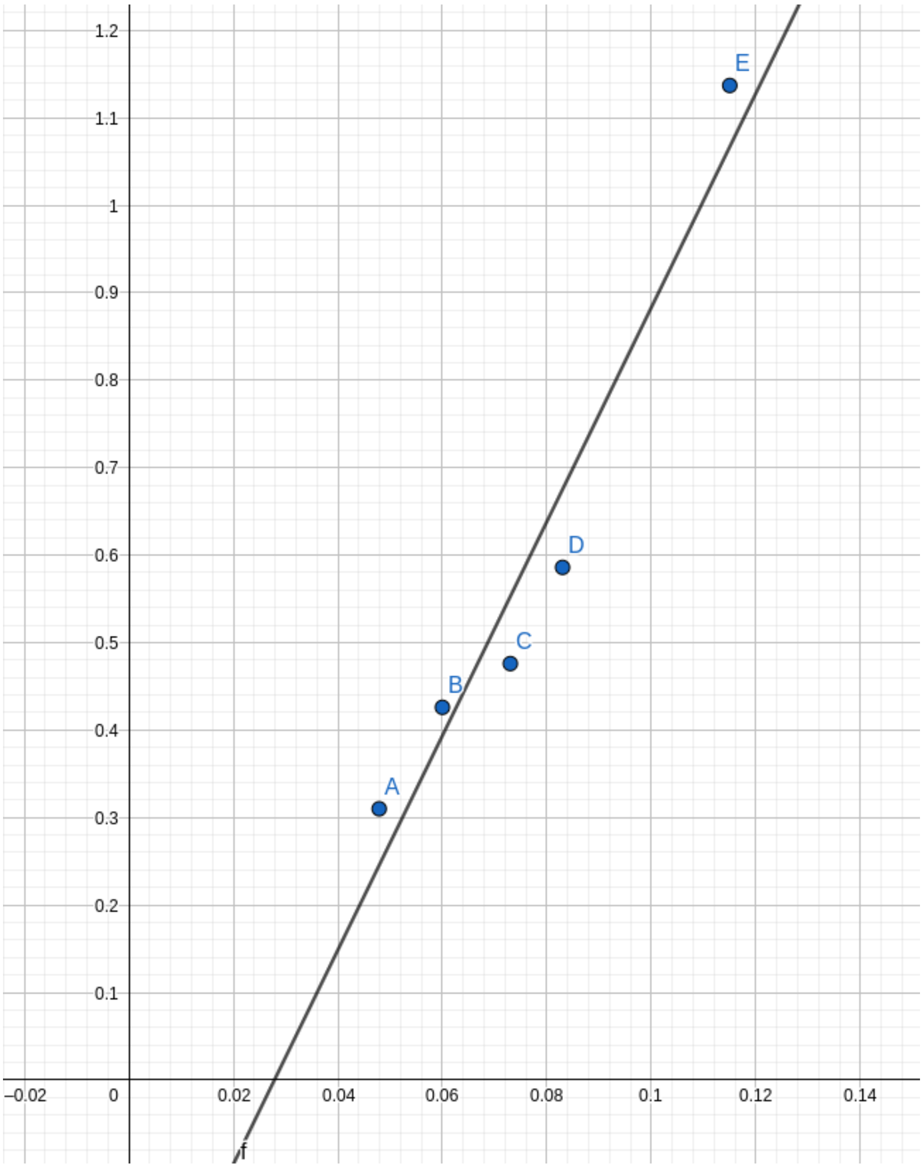

Abbildung 2: Optimale lineare Annäherung

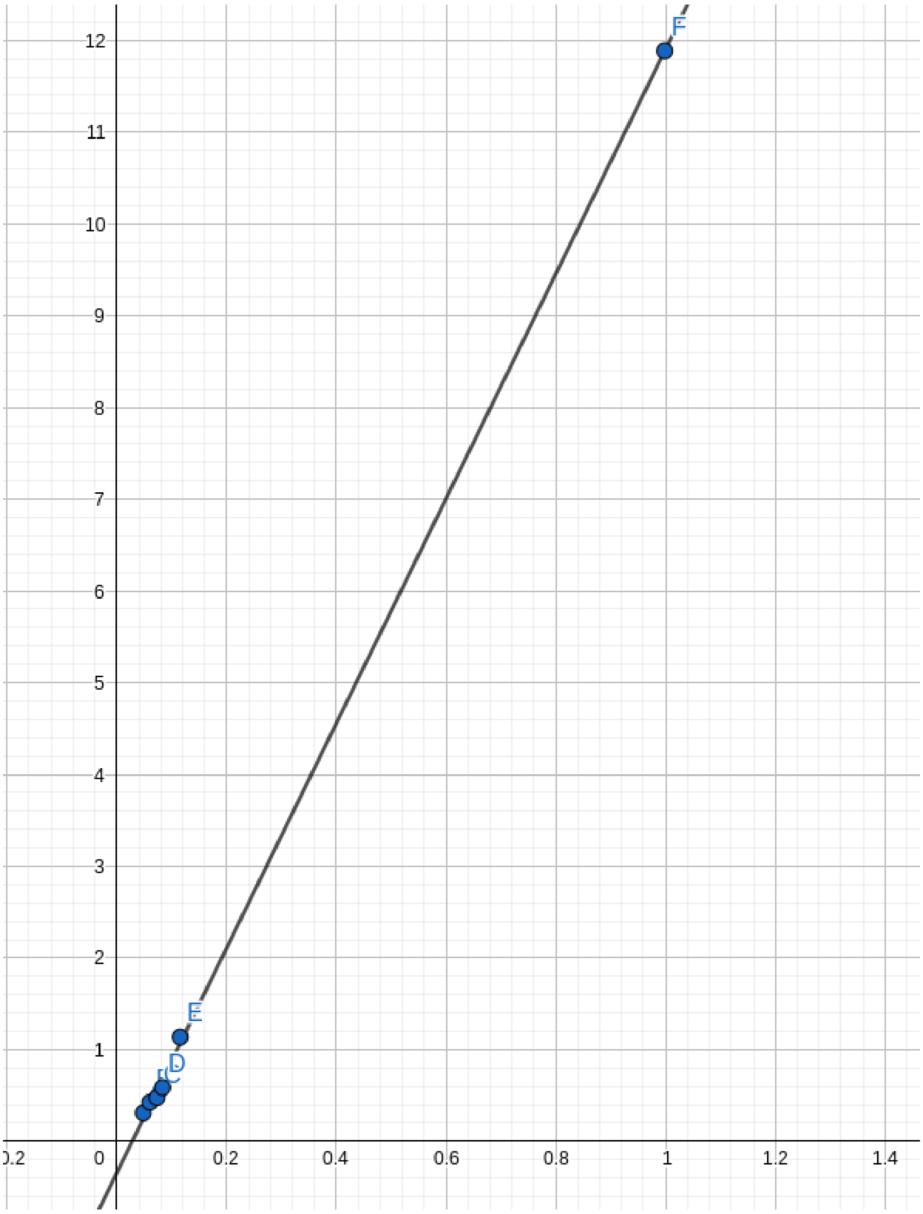

Abbildung 3: Extrapolation zu $\theta = 90°$

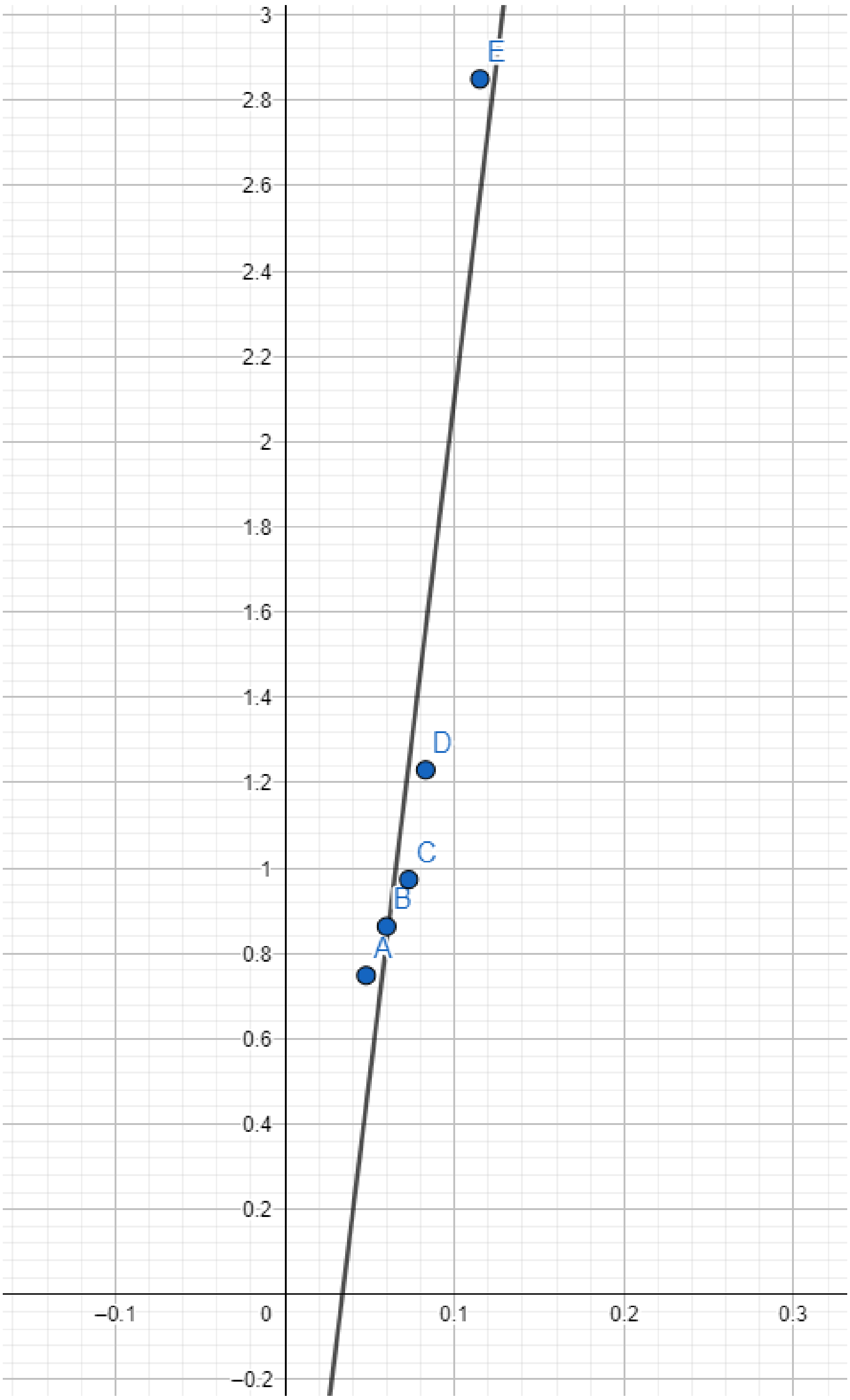

Abbildung 4: Optimale lineare Annäherung (Cart)

Number of books	**Height of books** (m)	**sin θ**	**Trial 1** $(\mathrm{m\,s^{-2}})$	**Trial 2** $(\mathrm{m\,s^{-2}})$	**Trial 3** $(\mathrm{m\,s^{-2}})$	**Average acceleration** $(\mathrm{m\,s^{-2}})$
3	0.115	0.0479	0.70	0.864	0.68	0.748
4	0.144	0.0600	0.83	0.93	0.83	0.863
5	0.174	0.073	0.94	0.99	0.99	0.973
6	0.200	0.083	1.43	1.33	0.93	1.23
7	0.275	0.115	2.43	3.40	2.72	2.85

Tabelle 2: Messwerte (Cart)

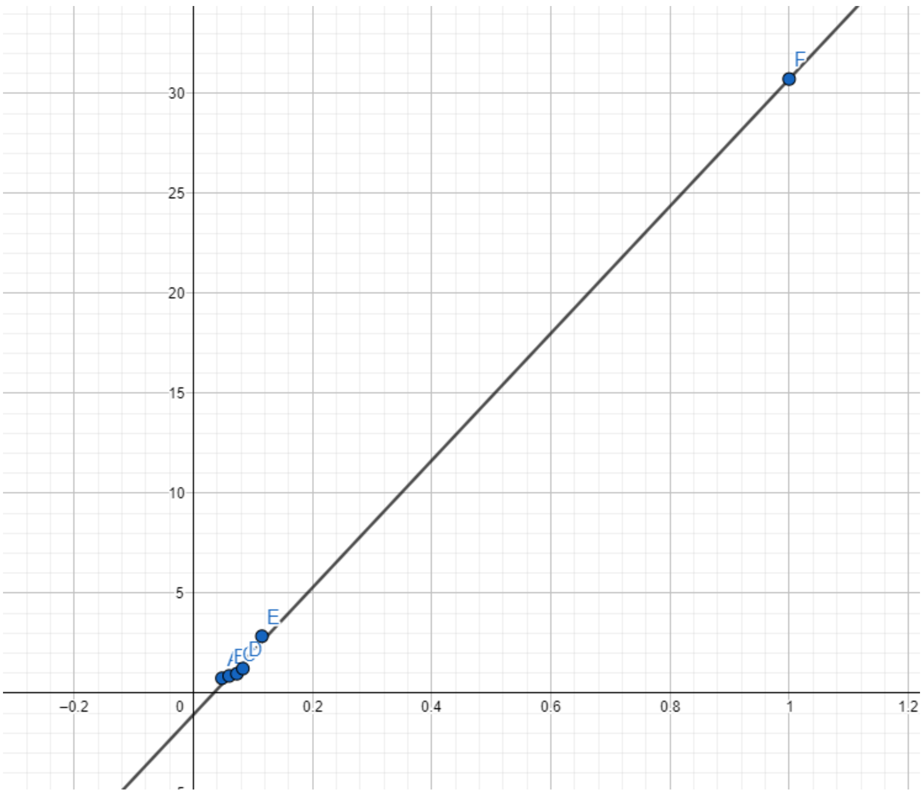

Abbildung 5: Extrapolation zu $\theta = 90°$

Literatur

[1] Ruben Mäder, David Kamber, Remo Häuselmann, *Physik für die Berufsmaturität*, 2nd ed., P. Raeber, Ed. Bern: Hep Verlag, 2017, S. 105.