Das Stellenwertsystem

Polynomschreibweise

$d_n = \text{Ziffer} \in Z_n, R^n = \text{Wertigkeit}$

$N_n = d_n R^n + d_{n-1} R^{n-1} + ... + d_1 R^1 + d_0 R^0$

Dezimalsystem

$R_{10} = 10$ (Basis); $Z_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Dualsystem

$R_2 = 2$ (Basis); $Z_2 = \{0, 1\}$

Beispiel

$N_2 = 110$ $N_2 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 4_d + 2_d = 6_d$

Oktalsystem

$R_8 = 8$ (Basis); $Z_8 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Beispiel

$N_8 = 110$ $N_8 = 1 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 72_d$

Kommazahlen

$\mathbb{R}_{10} = 110.13$ $N_{10} = 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$

$\mathbb{R}_2 = 101.110$
$N_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} = 5.75_d$

Subtrahieren durch Addieren

Annahme: Bei 1000 gibt es einen **Überlauf**.

$753 + 247 = 0$, daraus folgt $753 \equiv -247$

Somit ist $620 - 247 \equiv 620 + 753 = 1373 \equiv 373$.

Additive Zahl berechnen

Gesucht: Additive Zahl von −247 (, also 753). hhhh

$$999 - 247 = 752 \text{ (Neunerkomplement)}$$
$$752 + 1 = 753 \text{ (Zehnerkomplement)}$$

Dualzahlen

-1:
$1 = 0001_2$.
Einerkomplement: 1110_2
Zweierkomplement: $1111_2 = -1$

Unsigned Multiplikation

Die unsigned Multiplikation ist eine Summe von Links-Shifts.

$a = 3, b = 5$

$$\begin{aligned} & 0011 * 0101 \\ & = 0101 + 1010 \end{aligned}$$

Signed Multiplikation

Die signed Multiplikation funktioniert analog zur unsigned Multiplikation, aber wenn einer der Operanden negativ ist, muss das Zweierkomplement davon gebildet werden:

Beispiel

$1101 * 0111$ $((-3) \cdot 7 = -21)$

1101 ist negativ, das Zweierkomplement ist 0011.

$0011 * 0111 = 0111 + 01110 = 010101$. Das Zweierkomplement davon ist 101011 (= −21).

Indexschreibweise

$b = 1010$

$b_3 = 1, b_2 = 0, b_1 = 1, b_0 = 0$

$b_{3..1} = 101, b[3..1] = 101$

Subtrahieren

Betrag mit Vorzeichen

$$5 - 1$$
$$5 = 0101$$
$$-1 = 1001$$
$$0101 - 0001 = 0100 = 4$$

Einerkomplement (b-1)

Von negativen Zahlen wird das Einerkomplement gebildet. Gibt es nach Addition einen Überlauf, muss noch +1 gerechnet werden.

$$5 - 1$$
$$5 = 0101$$
$$1 = 0001, -1 = 1110$$
$$0101 + 1110 = 10011$$
$$\Rightarrow \text{Überlauf} \Rightarrow 0011 + 1 = 0100 = 4$$

Zweierkomplement (b-Komplement)

$$5 - 1$$
$$5 = 0101$$
$$1 = 0001, -1 = 1111$$
$$0101 + 1111 = 10100 \Rightarrow \text{Überlauf} \Rightarrow 0100 = 4$$

Allgemeine Berechnung des b-Komplements

$$C_{b,n}(N) = b^n - N$$

- n = Anzahl Stellen
- b = Basis
- N = Zahl, von welcher das Komplement gebildet werden soll

Beispiel:
- $C_{8,2}(6) = 8^2 - 6 = 58_{10} = 72_8$

Im Dualsystem entspricht dies dem Zweierkomplement.

Excesscode

Der Excesscode, der den Zahlenbereich in zwei gleich grosse Hälften aufteilt, hat einen besonderen Stellenwert. Dabei gehört die 0 zu den negativen Zahlen. Beispiel: Bei vierstelligen Codes würde der Excess-7-Code $C_{\text{Ex},-7,4}(x)$ die Zahlen von −7 bis 8 darstellen. Der Bias ergibt sich dann durch $2^{n-1} - 1$.

Um eine Zahl a zu kodieren, wählt man die kleinste Zahl b im Wertebereich und bildet die Differenz $d = |a - b|$. Beispiel:

$$C_{\text{ex},-4,3}(-1) = ?$$
$$d = |-1-(-4)| = 3 \Rightarrow 011$$

Fixkommazahlen

$C_{\text{FK},k,n}(x)$, wobei
- k = Anzahl Nachkommastellen
- n = Länge der binären Schreibweise

Beispiel: $C_{\text{FK},4,16}(453.1234) = 0001'1100'0101'0001$

Absoluter Fehler

$E_{\text{abs}} = |x_{\text{korrekt}} - x_{\text{gerundet}}|$

Relativer Fehler

$E_{\text{rel}} = \frac{|x_{\text{korrekt}} - x_{\text{gerundet}}|}{x_{\text{korrekt}}}$

Gleitkommazahlen

Bei Gleitkommazahlen wird zusätzlich zum Bitmuster z auch die Stelle k mitgeführt, an der das Komma steht.
- z = Signifikand, Mantisse
- k = Exponent
- $C_{\text{GK},k,n}(z) = z \cdot 2^k$

Beispiel: 6.25.

$6 = 0110, 0.25 = 0.01$

Fixkommarepräsentation: 0110.01

Gleitkommazahlrepräsentation: $1.1001 \cdot 2^2$

Für die Mantisse wird die Excess-Darstellung verwendet, d.h. bei 8-Bit-Mantisse der $C_{\text{Ex},-127,8}$. Der Exponent 2 wird so zu 10000001.

Als 32-Bit-Gleitkommazahl: $0'10000001'10010000000000000000000$

0	10000001	10010000000000000000000
Vorzeichen	Exponent	Mantisse

Standard IEEE 754

- Single: 24 Bit Präzision, 8 Bit Exponent
- Double: 53 Bit Präzision, 11 Bit Exponent
- Quadruple: 113 Bit Präzision, 15 Bit Exponent

Addition

1. Wenn Vorzeichen unterschiedlich: Subtraktion
2. Hidden Bits ergänzen
3. Wenn Exponenten unterschiedlich: Signifikand der kleineren Zahl um entsprechend viele Bits nach rechts verschieben
4. Addition durchführen
5. Falls Carry = 1: Ergebnis normalisieren:
   - Exponent um 1 erhöhen
   - Signifikand um 1 nach rechts schieben

- $x = 1.5,\ y = 0.75$
- $x = 0\,|\,0111\,1111\,|\,100\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000$
- $y = 0\,|\,0111\,1110\,|\,100\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000$
- $x' = 0\,|\,0111\,1111\,|(1)\,100\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000$ mit hidden Bit
- $y' = 0\,|\,0111\,1111\,|(0)\,110\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000$ m.h.B., $a+1,\ m \cdot 2^{-1}$
- $z' = 0\,|\,0111\,1111\,|(10)\,010\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000 = x' + y'$
- $z'' = 0\,|\,1000\,0000\,|(1)\,001\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\ \ a+1,\ m \cdot 2^{-1}$
- $z = 0\,|\,1000\,0000\,|\,001\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000$ ohne hidden Bit
- $z = 2.25$