

TP1 ADM

MARIAC Damien, SCAIA Matteo

October 10, 2024



Contents

1	Introduction	3
2	Partie 1	3
2.1	inertie et barycentre	3
2.2	Autour des types forestiers	5
2.2.1	Calcul des poids des types forestiers	5
2.2.2	Calcul des barycentres des types forestiers	5
2.2.3	Calcul des normes euclidiennes carrées	6
2.3	Inertie inter-types et coefficient R^2	6
3	Partie 2	7
3.1	Enoncer	7
3.2	Rappel et calcul de projecteur	7
3.2.1	Rappel	7
3.2.2	Calcul de projecteur	8
4	Conclusion	9

1 Introduction

On dispose d'un jeu de données présentant une étude de 27 espèces d'arbres dans 1000 parcelles de la forêt du Congo. Il s'agit d'étudier la variabilité des densités de peuplement d'espèces arborées dans différentes parcelles de la forêt. Nous disposons dans notre jeu de données de 30 variables quantitatives dont : 27 variables de comptage des espèces, la surface de la parcelle, une forestier et une géologique. Et une variable qualitative "code". On arrondira les valeurs à 10^{-3}

Extrait du jeu de données Datagenus

code	gen1	gen2	gen3	forest	geology	surface
1299	0	0	0	2	3	5
2644	9	0	3	7	6	15
1838	9	0	0	5	6	17.5
534	0	4	0	1	5	20.5
3213	1	1	0	1	6	10.5
1861	19	3	1	7	3	20
3445	1	4	0	0	2	0

2 Partie 1

2.1 inertie et barycentre

Nous enlevons une ligne problématique dans notre jeu de données (ligne 1000 code TGC). De plus, on standardise (centré et réduire) les variables pour mieux comparer celles qui décrivent les différentes densités.

$$(d_j^i)_{1 \leq i \leq 27} = \frac{x_j^i}{s_j}$$

Table 1: Extrait de densité

Code	Gen1	Gen5	Gen10
1	0	0	2.200
2	0.6	0.133	1.333
3	0.514	0.057	3.6
4	0	0.439	0.244
5	0.095	0	0.476

Nous devons centrer et réduire les variables quantitatives dans le but de mieux comparer celles qui décrivent les différentes densités. Nous allons alors utiliser :

$$(x_j^i)_{1 \leq i \leq 27} = \frac{x_j^i - \bar{x}_j}{\sigma_j}$$

Avec \bar{x}_j la moyenne pour la j eme variable et σ_j l'écart-type de la variable quantitative j .

Par conséquents on a:

Barycentre à l'origine : (preuve théorique)

Supposons que nous avons un ensemble de données X composé de n observations et p variables. Après le centrage et la réduction, la matrice transformée X' est définie par :

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$$

où \bar{x}_j est la moyenne et s_j l'écart-type de la j -ème variable.

Le barycentre de X est donné par la moyenne de chaque colonne de X . Calculons cette moyenne pour n'importe quelle j :

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j} = \frac{1}{s_j} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} \right) - \frac{\bar{x}_j}{s_j} = 0$$

Ainsi, le barycentre de chaque variable dans X' est zéro.

Inertie totale égale à 27 : (preuve théorique)

Considérons la meme matrice de données X . Après centrage et réduction, chaque élément de la matrice transformée X' est défini par:

$$x'_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}$$

En reprenant les notations précédentes.

L'inertie de l'ensemble des points X' par rapport à leur barycentre \mathbf{y}_M est définie par:

$$I_{Y,W} = \sum_{i=1}^n w_i \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}\|^2$$

Pour les données centrées-réduites, chaque \mathbf{x}'_i est déjà centré, donc le barycentre $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. De plus, tous les poids w_i sont égaux (par exemple, $w_i = \frac{1}{n}$ ce qui est notre cas), alors l'inertie devient: Par conséquent, la formule de l'inertie se simplifie à:

$$I_{Y,W} = \sum_{i=1}^n w_i \|\mathbf{x}'_i\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}'_i\|^2$$

Comme chaque \mathbf{x}'_i est une observation centrée-réduite et la variance de chaque variable est 1, nous avons (pour i fixé) :

$$\|\mathbf{x}'_i\|^2 = \sum_{j=1}^p (x'_{ij})^2 = p$$

Ainsi, l'inertie totale est :

$$I_{Y,W} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p = p$$

ce qui montre que l'inertie totale du nuage des données centrées-réduites est égale au nombre de variables p (qui dans notre cas vaut 27).

2.2 Autour des types forestiers

Dans cette section, nous calculons les barycentres des sept types forestiers présents dans les données, ainsi que l'inertie inter-types et le coefficient R^2 associé à la partition des parcelles selon ces types. Ce calcul nous permet d'évaluer la proportion de la variabilité totale des densités de peuplement expliquée par cette partition.

2.2.1 Calcul des poids des types forestiers

Le poids de chaque type forestier est calculé comme la proportion de parcelles appartenant à ce type par rapport à l'ensemble des 1000 parcelles. C'est à dire, le poids est donné par :

$$p_i = \frac{\text{Nombre de parcelles du type } i}{1000}$$

Tableau des poids forestier

1	2	3	4	5	6	7
0.278	0.105	0.022	0.018	0.169	0.095	0.313

2.2.2 Calcul des barycentres des types forestiers

Pour chaque type forestier, si on note X la matrice des densités standardisées (matrice 1000×27), alors le barycentre vaut :

$$\bar{X}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in \text{Type } i} X_j$$

Cela nous donne comme tableau :

	[1,1]	[1,2]	[1,3]	[1,4]	[1,5]	[1,6]
[1,]	-0.2462294	0.23082910	0.03611401	-0.08889818	0.06922725	-0.01226803
[2,]	-0.05236911	-0.28419720	-0.34740544	-0.34547466	-0.05978232	0.20027739
[3,]	-0.49949475	0.34566947	0.52721272	-0.34547466	-0.12273153	-0.24642324
[4,]	-0.57909396	2.26944388	-0.38335630	-0.12426722	1.68203105	0.34941599
[5,]	-0.2450022	-0.15852951	-0.16319450	-0.24582392	-0.22309466	-0.01502983
[6,]	-0.16040638	-0.26337031	-0.17338984	0.14638021	0.51625842	-0.03510558
[7,]	0.36338233	-0.09895475	0.21019653	0.40343818	-0.16569062	-0.04029016

Barycentres des sept types forestiers pour les sept premières densités de peuplement.

2.2.3 Calcul des normes euclidiennes carrées

Une fois les barycentres calculés, nous évaluons la distance de chaque barycentre à l'origine de l'espace des 27 densités centré réduite. La distance est induite par la norme 2 et donc :

typer forestier	1	2	3	4	5	6	7
distance (en norme 2)	0.7710739	3.2249301	4.2750711	21.189	1.090	1.441	1.627

2.3 Inertie inter-types et coefficient R^2

L'inertie inter-types forestiers est calculée en pondérant les normes euclidiennes carrées par les poids des types forestiers. Elle mesure la variabilité des densités de peuplement expliquée par la partition en types forestiers et est définie par :

$$\text{Inertie inter-types} = \sum_{i=1}^7 p_i \|\bar{X}_i\|^2 = 1.859$$

Le coefficient R^2 nous permet d'évaluer dans quelle mesure les types forestiers expliquent la variabilité des densités de peuplement dans les parcelles observées.

$$R^2 = \frac{\text{Inertie inter-types}}{\text{Inertie totale}} = 0.069$$

3 Partie 2

3.1 Enoncer

On notera X la matrice dont les colonnes sont les 27 densités centrées-réduites, Y la matrice dont les colonnes sont les indicatrices de types forestiers, et Z celle dont les colonnes sont les indicatrices de sols (geology).

On notera $W = \frac{1}{n}I_n$ la matrice des poids des individus et $M = \frac{1}{p}I_p$ celle des poids des variables.

3.2 Rappel et calcul de projecteur

3.2.1 Rappel

Montrons l'égalité suivante.

$$\forall j \quad \Pi_Y x^j = \Pi_{Y^c} x^j$$

Tout d'abord, il est important de rappeler que les x^j sont des variables qui sont centrées réduites. De plus, nous rappelons que

$$Y^c = \Pi_{1^\perp} Y$$

$$\Pi_Y = \Pi_{Y^c} + \Pi_1$$

A partir de ces deux résultats, nous pouvons conclure que.

$$\begin{aligned} \Pi_Y x^j &= \Pi_{Y^c} x^j + \Pi_1 x^j \\ &= \Pi_{Y^c} x^j \end{aligned}$$

Nous venons de montrer que pour tout j ,

$$\Pi_Y x^j = \Pi_{Y^c} x^j$$

De plus, nous fixons j , et nous avons l'expression suivante.

$$\|\Pi_Y x^j\|_W^2 = \langle \Pi_Y x^j, \Pi_Y x^j \rangle_W$$

Or, il est important de préciser que

$$\Pi_Y x^j = \sum_{q=1}^p \Pi_{y^q} x^j = \sum_{q=1}^p y^q (\overline{x^j}^q - \overline{x^j})$$

Ici, $\overline{x^j}$ représente la moyenne globale des x^j , $\overline{x^j}^q$ représente la moyenne pondérée des x^j pour le type forestier q .

A partir de ces notations, nous avons l'expression suivante.

$$\begin{aligned}
\|\Pi_Y x^j\|_W^2 &= \langle \Pi_Y x^j, \Pi_Y x^j \rangle_W \\
&= \sum_{q=1}^p (\overline{x^j}^q - \overline{x^j}) \sum_{i=1}^p (\overline{x^j}^i - \overline{x^j}) \langle y^q, y^i \rangle_W \\
&= \sum_{q=1}^p w^q (\overline{x^j}^q - \overline{x^j})^2
\end{aligned}$$

Nous pouvons conclure que $\|\Pi_Y x^j\|_W^2$ s'interprete statistiquement comme étant la mesure des variation des x^j dans un certain type forestier.

3.2.2 Calcul de projecteur

Le but de cette question est de trouver l'expression de Π_Y et de calculer pour tout $j \in [1, 27]$, Π_{x^j} et $tr(\Pi_{x^j} \Pi_Y)$. Nous ferons la démonstration puis nous programmerons le résultat.

Tout d'abord, on admet l'expression suivante.

$$\Pi_Y = Y(Y'WY)^{-1}Y'W$$

Soit $j \in [1, 27]$. Calculons les deux expressions donné précédemment.

$$\Pi_{x^j} = x^j(x^{j'}Wx^j)^{-1}x^{j'}W$$

En utilisant les propriétés de la trace et l'expression de Π_{x^j} , il suit que

$$\begin{aligned}
tr(\Pi_{x^j} \Pi_Y) &= tr(x^j(x^{j'}Wx^j)^{-1}x^{j'}W\Pi_Y) \\
&= tr((x^{j'}Wx^j)^{-1}x^{j'}W\Pi_Y x^j) \\
&= (x^{j'}Wx^j)^{-1}x^{j'}W\Pi_Y x^j \\
&= \frac{\langle x^{j'}, \Pi_Y x^j \rangle_W}{\|x^j\|_W^2} \\
&= R^2(x^j | Y)
\end{aligned}$$

Donc, nous pouvons conclure que $tr(\Pi_{x^j} \Pi_Y)$

4 Conclusion