

Titre

Nom

12 février 2025

# 1 Introduction

Le théorème central limite, formulé par Pierre-Simon de Laplace en 1809, garantit que, sous des conditions raisonnables, la somme normalisée de ces variables suit asymptotiquement une loi normale. Cette convergence est utile pour étudier le comportement **global** des observations, mais elle ne renseigne pas sur le comportement des valeurs extrêmes.

Il est donc naturel de se demander quelle peut être la convergence en loi de ses valeurs extrêmes. Autrement dit, pour  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un échantillon de variables aléatoires i.i.d, on pose :

$$M_n = \max\{X_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$$

et on s'intéresse à la convergence de  $M_n$ , ainsi qu'aux hypothèses sous lesquelles cette convergence a lieu.

Remarque : Etudier le minimum est totalement analogue dans ce qui suit.

## 2 Lois de $M_n$

Une première approche serait de considérer la fonction de répartition et d'utiliser le fait que les  $X_i$  sont i.i.d :

En effet,

$$F_{M_n}(t) = \mathbb{P}(M_n < t) = \mathbb{P}(X_1 < t, \dots, X_n < t) = \mathbb{P}(X_1 < t)^n = F_{X_1}^n(t)$$

Mais on rencontre un problème ici, puisque si  $n \rightarrow +\infty$ ,  $F_{X_1}(t)^n$  converge vers 0 (ou 1 si  $t$  est la borne sup du support des  $X_i$ ).

L'idée est donc d'introduire 2 suites  $(b_n)$  et  $(a_n)$  (avec  $a_n > 0$  pour tout  $n$ ) afin de pouvoir contrôler  $M_n$ .

Puis étudier la loi de la limite de  $\frac{M_n - b_n}{a_n}$ . Comme la fonction de répartition caractérise la loi, il nous suffit d'étudier la fonction  $G$  définie pour tout  $t$  dans le support des  $X_i$  comme :

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} < t\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} G(t)$$

à ce stade là, il nous faut donc trouver toutes les distributions  $G$  qui peuvent apparaître comme limite dans l'équation ci-dessus.

Pour ce faire, nous allons utiliser le théorème suivant :

**Théorème :** Soit  $Y_n$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F_n$ , et soit  $Y$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F$ . Alors  $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$  si et seulement si pour toute fonction  $z$  réelle, bornée et continue :

$$\mathbb{E}[z(Y_n)] \rightarrow \mathbb{E}[z(Y)].$$

En prenant ici  $Y_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}$ , on obtient :

$$\mathbb{E}\left[z\left(\frac{M_n - b_n}{a_n}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} z\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right) n F^{n-1}(x) dF(x)$$

L'astuce ici va être de faire un changement de variable astucieux. On va poser :

$$x = Q\left(1 - \frac{1}{y}\right) = K(y) \quad \text{avec } Q \text{ la fonction quantile}$$

$$\text{donc} \quad \int_{-\infty}^{\infty} z\left(\frac{x - b_n}{a_n}\right) n F^{n-1}(x) dF(x) = \int_0^n z\left(\frac{K\left(\frac{n}{v}\right) - b_n}{a_n}\right) \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-1} dv$$

Or, on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{n-1} = e^{-v}$ , et on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n = \int_0^{+\infty}$ .

On trouve ici une bonne valeur pour  $b_n = K(n)$  (pas bien compris pourquoi).

On obtient alors une condition, il faut qu'il existe une fonction  $a$  tel que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K(\frac{x}{a}) - K(x)}{a(x)}$  converge (vers une fonction  $h(n)$ ).

Les limites possibles dans la condition (C) sont données par :

$$ch_\gamma(u) = c \int_1^u v^{-\gamma-1} dv = c \frac{u^\gamma - 1}{\gamma}.$$

où  $c \geq 0$  et  $\gamma$  est un réel.

Nous interprétons  $h_0(u) = \log u$  lorsque  $\gamma = 0$ .

Pour ca, nous partons de la condition extrémale du domaine d'attraction :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K(xu) - K(x)}{a(x)} = h(u).$$

Si nous supposons que la fonction d'échelle  $a(x)$  est de la forme :

$$a(x) = x^\gamma \ell(x),$$

où  $\ell(x)$  est une fonction de variation lente (i.e.  $\forall a > 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ell(ax)}{\ell(x)} = 1$ ), alors la relation limite implique que :

$$\frac{K(xu) - K(x)}{x^\gamma \ell(x)} \rightarrow h(u).$$

En supposant que la fonction quantile de queue  $K(x)$  satisfait une loi de variation régulière, nous pouvons écrire :

$$K(x) = x^\gamma \ell(x).$$

Ainsi, nous avons :

$$K(xu) - K(x) = (xu)^\gamma \ell(xu) - x^\gamma \ell(x).$$

En divisant par  $x^\gamma \ell(x)$ , nous obtenons :

$$\frac{K(xu) - K(x)}{x^\gamma \ell(x)} = u^\gamma \frac{\ell(xu)}{\ell(x)} - 1.$$

Comme  $\ell(x)$  est une fonction de variation lente, nous avons  $\ell(xu)/\ell(x) \rightarrow 1$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ , ce qui donne :

$$h(u) = u^\gamma - 1.$$

Si nous introduisons un paramètre  $c \geq 0$ , nous pouvons écrire :

$$ch_\gamma(u) = c \int_1^u v^{-\gamma-1} dv.$$

En intégrant :

$$ch_\gamma(u) = c \frac{u^\gamma - 1}{\gamma}.$$

Enfin, pour  $\gamma = 0$ , nous utilisons l'interprétation logarithmique de la variation lente :

$$h_0(u) = \log u.$$

□