*"[...] the way that elementary particles such as electrons [...] and photons all take each other into account in their very core. The notion is a mathematical one, but for a good metaphor, recall how your own identity depends on the identities of your close friends and relatives, and how theirs in turn depends on yours and on their close friends' and relatives' identities, and so on, and so on."*

— Douglas R. Hofstadter, *Metamagical Themas*, 1985

# 1

# Interaction onde-particule par la dynamique $N$-corps

*Ce chapitre propose une description intuitive de l'interaction onde-particule s'appuyant sur la dynamique à $N$-corps. Ce modèle intuitif correspond à un analogue de notre modèle présenté au chapitre 4.*

**De la mécanique à $N$-corps,...**

C'est en voulant calculer la dynamique de « $N \geqslant 2$ » corps célestes, chacun en interaction gravitationnelle avec les autres, que Newton (1687), dans ses *Principia*, posa le fameux problème à $N$-corps. Pour $N = 2$, il démontre que les corps décrivent des ellipses autour de leur centre de gravité commun. Par contre, Newton sous-entend que le simple problème à trois corps (le système Soleil-Terre-Lune) est insoluble. Ce problème fut alors considéré comme un important défi à tel point que le Roi Oscar II de Suède établit un prix pour sa résolution. Ce prix fut octroyé à Poincaré (1890), qui ne résolut pourtant pas le problème initial mais démontra que les trajectoires pouvaient être chaotiques et posa des bases importantes, amenant plus tard à la théorie du chaos.

**à la physique des plasmas,...**

Prenez un morceau de l'univers dans une fiole et observez sa composition. Un cosmologiste vous dira que dans votre fiole il y a 72% d'énergie sombre (*dark energy*), justifiant l'expansion accélérée de l'univers au travers d'une forme d'énergie agissant comme une force gravitationnelle répulsive, et 23% de matière sombre (*dark matter*) agissant comme une masse additionnelle aux galaxies, modifiant leurs mouvements de rotation. Il existe de nombreuses théories essayant de justifier ces deux phénomènes, mais, actuellement, aucune ne fait consensus. Les 5% restants sont ce que les physiciens des particules appellent la matière baryonique et leptonique et composent tout l'univers visible et connu, c'est-à-dire les étoiles, les planètes, nous, etc. Les radiations électromagnétiques sont négligeables. Parmi ce faible pourcentage de matière, il y en a 99% que nous appelons plasma. Les plasmas[1] sont un

[1] Du grec ancien : *plásma* « forme ».

des quatre états fondamentaux de la matière (avec les solides, liquides et gaz) composée de particules chargées électriquement.

Lorsque Tonks et Langmuir (1929) commencèrent à étudier les filaments de tungstène pour les lampes à incandescence, ils mirent en place les bases d'une nouvelle discipline : la physique des plasmas. Dans un premier temps, cette discipline prit de l'ampleur progressivement avec l'étude de l'ionosphère terrestre responsable de la réflexion des ondes radio, mais aussi de l'astrophysique (vents solaires, formation stellaire, milieu interstellaire, etc.) qui mena notamment au développement de la magnétohydrodynamique (MHD) par Alfvén dans les années 1940. La physique des plasmas est aussi au cœur de la création de la bombe à hydrogène en 1952 et des projets de fusion thermonucléaire contrôlée après leurs déclassifications en 1958. C'est à partir des années 1960 et avec le développement des lasers de plus en plus puissants que l'interaction laser-plasma commence à être étudiée. De nos jours, l'on retrouve les plasmas froids ($10^4$–$10^5$ K) dans de nombreuses applications, telles que les tubes d'éclairage fluorescents, les écrans à plasma, les propulseurs électriques (*Hall thruster*), dans les industries pour les traitements métallurgiques ou thermiques, les soudures, ou le traitement des déchets ou des polluants, et, plus récemment, pour quelques traitements médicaux.

L'un des phénomènes les plus connus en physique des plasmas est probablement l'amortissement des ondes de charge d'espace, aussi appelé l'amortissement Laudau[1] (*Landau damping*). Découvert théoriquement par Landau (1946), il fallut attendre près de deux décennies avant que Malmberg et Wharton (1964) observent expérimentalement cet effet. Historiquement, Laudau étudia cet amortissement en utilisant ce qui est probablement l'équation la plus connue de la physique des plasmas : l'équation de Vlasov (1945). En réalité, cette équation était déjà utilisée par Jeans (1915) pour étudier la dynamique stellaire et est toujours appelée, entre autres,[2] l'équation de Boltzmann sans collision par la communauté astrophysique.

[1] Mouhot et Villani 2011

[2] Hénon 1982

**au hamiltonien $N$-corps auto-cohérent en physique des plasmas.**

Pour étudier l'instabilité faisceau-plasma, le modèle cinétique Vlasov-Poisson (un standard en plasma) requiert une résolution très fine en vitesse (du corps et de la queue de la fonction de distribution) posant de nombreux problèmes techniques notamment pour la modélisation numérique (ce qui était d'autant plus problématique dans les années 1970). Pour pallier ce problème, Onishchenko *et al* (1970) et O'Neil *et al* (1971, 1972) s'intéressèrent à un modèle intuitif à faible nombre de degrés de liberté en utilisant un traitement particulaire à $N$ particules. Leurs équations furent réécrites par Mynick et Kaufman (1978) en utilisant un hamiltonien auto-cohérent, repris par la suite par de nombreux auteurs.[3] On notera que, si on fait tendre $N$ vers l'infini dans l'approche hamiltonienne $N$-corps, on peut revenir[4] à la description vlasovienne.

[3] Antoni 1993; Tennyson *et al* 1994; Antoni *et al* 1998

[4] Firpo et Elskens 1998; Elskens *et al* 2014

## 1.1 Modèles d'interaction

L'interaction entre ondes et particules chargées est l'un des processus les plus importants en physique. Sans parler de la mécanique quantique[1] (dans ce travail, les effets quantiques sont négligeables), cette interaction est reliée aux aspects fondamentaux de l'électrodynamique classique et de l'optique, que ce soit dans le vide[2] ou dans les milieux.[3] Elle est aussi au cœur de la physique des plasmas dont les plasmas froids,[4] comme ceux utilisés dans les processus industriels ou les moteurs à plasmas, et chauds, comme en fusion par confinement magnétique[5] (*Magnetic Confinement Fusion (MCF)*) ou la fusion par confinement inertiel[6] (*Inertial Confinement Fusion (ICF)*). Toujours en plasma, elle est à la base de la synchronisation onde-particule,[7] de l'amortissement (ou croissance) Landau[8] (*Landau damping or growth*) ou de l'interaction laser-plasma.[9] De plus, cette interaction est un facteur clé de la caractérisation des accélérateurs de particules,[10] des tubes électroniques sous vide,[11] et des lasers à électrons libres.[12]

Pourtant, une description complète et détaillée des champs électromagnétiques est toujours un défi car ces champs sont, par définition, des fonctions de l'espace et du temps, mettant en jeu un grand nombre de paramètres et requérant une modélisation assez fine. Ce défi est d'autant plus grand lorsque l'on prend en compte toutes les particules chargées, interagissant avec les champs, ce qui ajoute autant de variables de positions et de vitesses, c'est-à-dire de degrés de liberté. Il devient rapidement indispensable d'utiliser des descriptions réduisant le nombre de variables dynamiques, donc réduisant le nombre de degrés de liberté.

Les prédictions sur l'interaction champ-matière, se déroulant dans les tubes électroniques, tels que les tubes à ondes progressives du chapitre 2, sont réalisées avec les mêmes outils que pour étudier les évolutions d'un plasma, parce que le faisceau d'électrons peut être vu comme un plasma à lui tout seul, composé d'une seule espèce. On peut généralement découper les modèles d'interaction en deux grandes parties : le circuit (propagation des ondes) et le faisceau (propagation des particules).

[1] Halzen et Martin 1984
[2] Jackson 1999; Spohn 2004; Rohrlich 2007
[3] Landau *et al* 1984
[4] Nicholson 1983; Rax 2005
[5] Chen 2010
[6] Bénisti 2016
[7] Doveil *et al* 2005a
[8] Landau 1946; O'Neil *et al* 1971
[9] Kruer 2003
[10] Davidson et Qin 2001
[11] Eichmeier et Thumm 2008; Carter 2018; Doveil 2018
[12] Bonifacio *et al* 1990; Marshall 1985; Pellegrini 2010

### 1.1.1 Partie circuit : propagation des champs

La première partie est la description de la propagation des ondes, aussi appelée le **circuit**. Pour étudier les champs électromagnétiques, il existe une large variété d'approches. La plus directe est de résoudre directement les équations de Maxwell-Lorentz en espace-temps, mais cette approche inclut trop de degrés de liberté et est donc extrêmement coûteuse numériquement (en temps de calcul et matériels). Pour les champs électromagnétiques, il existe trois catégories principales de modèle de réduction :

- ◇ Les modèles regroupant les variables phénoménologiques (***"lumped" models***) tels que les modèles des télégraphistes utilisant des circuits $RLC$ ou des éléments non-linéaires comme les transistors, diodes, etc. Pour les tubes à ondes progressives, le modèle de Pierce (cf. section 8.3) est un bon exemple de cette catégorie.
- ◇ Les **représentations en Fourier** ou données en termes de champ élémentaire. Pour les TOPs, on trouve dans cette catégorie les modèles fréquentiels d'enveloppe (cf. chapitre 8) et le modèle discret de Kuznetsov.
- ◇ Les **méthodes des éléments finis** (*finite elements*) ou des **différences finies** (*finite differences*) représentant les champs par des maillages plus ou moins fins. Pour les modélisations en temps (domaine temporel), c'est généralement cette catégorie qui est privilégiée (souvent associée avec une représentation *particle-in-cell (PIC)* de la matière).

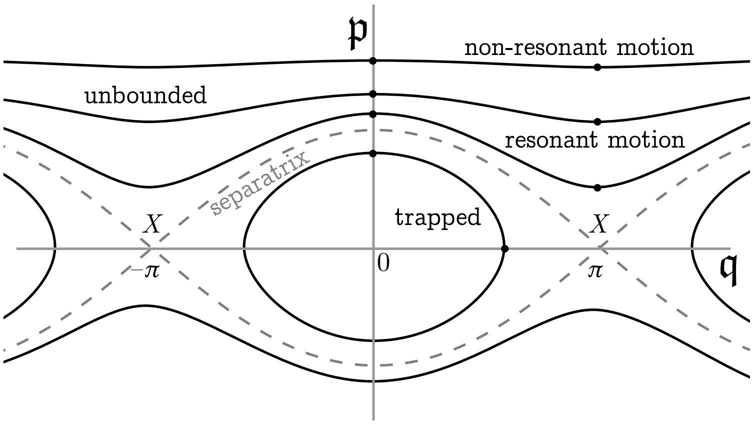



FIGURE 1.1 – Minenna *et al* (2019a). Portrait de phase $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ du pendule pour un électron dans une onde. La largeur de « l'œil de chat », délimité par la séparatrice (courbe discontinue), est proportionnelle à $\sqrt{\mathfrak{U}}$. Ce portrait est dans le référentiel de l'onde, donc $\mathfrak{p} = 0$ correspond au synchronisme avec l'onde (si $\mathfrak{v}_{\mathrm{phs}} = \mathrm{cte}$). Plus le moment de la particule s'éloigne de $\mathfrak{p} = 0$, moins sa dynamique est affectée. Elle entre en résonance lorsque la dynamique est suffisamment affectée par l'onde (quand la vitesse de phase et la vitesse moyenne de la particule coïncident), c'est-à-dire à peu près lorsque $|\mathfrak{p}| \lesssim 2\sqrt{\mathfrak{U}}$.

Le mérite des modèles de réduction repose dans l'équilibre entre précision des prédictions et coût (en temps, prix du matériel et effort d'analyse numérique) des simulations numériques. On notera qu'il est parfois possible de développer un modèle analytique à partir de ces catégories (surtout avec les deux premières). Ces catégories peuvent servir de base à l'écriture d'un solveur numérique, qui peut être en domaine temporel, en domaine fréquentiel, ou hybride.

### 1.1.2 Partie faisceau : dynamique des particules

La deuxième partie des modèles d'interaction est la partie matérielle, dite de **faisceau**. En général, il y a trois classes d'approches[1] pour décrire l'évolution de la matière :

[1] En négligeant les effets quantiques.

- La plus connue est la **description fluide** (et par extension la magnétohydrodynamique MHD) où les variables de densités de fluides évoluent à partir de l'équation de continuité. Puisque les fluides ne sont pas créés ou détruits, la densité locale de fluide change en un point donné en ajoutant ou retirant des petits paquets de matière. Cette approche est réputée plus facile comparée aux autres mais elle résout mal[2] les effets dépendant de la vitesse (tels que l'effet Landau ou le regroupement de particules).

[2] Nicholson 1983

- La **description cinétique**[3] (*kinetic theory*), par exemple la description vlasovienne, est une approche qui prend en compte le mouvement des particules au travers d'une fonction de distribution sur l'espace cinétique $(x, v)$. Le but est d'étudier l'évolution de la distribution des vitesses. Les théories cinétiques ne cherchent pas toujours à décrire le mouvement exact de chaque particule mais essayent d'en déduire les caractéristiques moyennes du plasma, considéré comme continu. Cette approche peut s'avérer très utile pour étudier les larges groupes, comme les $10^{23}$ particules présentes dans un tokamak.[4] L'approche cinétique sert de base aux codes *particle-in-cell (PIC)*.

[3] Du grecque ancien : *kinētikós*, « qui met en mouvement ».

[4] Chen 2010

◇ La plus complexe à mettre en place est la description en **particules discrètes** (dite description $N$-corps, $N$-*body*, ou *many-body*) car chaque particule du système est gouvernée par les lois fondamentales de la dynamique (comme la force de Lorentz). Les fonctions de distribution continues de la description cinétique deviennent des distributions. Cette approche est un cauchemar à numériser à cause de l'immense nombre de degré de liberté mis en jeu. Toutefois, et paradoxalement, cette description permet une caractérisation remarquablement intuitive et pédagogique pour comprendre l'interaction onde-particule. On utilise notamment cette description dans les manuels de nombreux domaines de la physique tels que l'électrodynamique classique[1] (par exemple, la dynamique d'un électron plongé dans un champ électrostatique), la caractérisation des lasers à électrons-libres[2] (LEL, *free electron laser*) et la physique des plasmas,[3] incluant l'étude du synchronisme onde-particule et du chaos hamiltonien.[4] On notera que cette description est commune en astrophysique et en cosmologie.

Dans ce document, nous utiliserons la description $N$-corps. Le $N$ du $N$-corps est la somme de $N_\mathrm{e}$ particules résonantes et de $M$ ondes (dans la limite finie où $M \ll N$).

Nous proposons dans cette section un exemple pour la mécanique à $N$-corps. Cet exemple (modèle aux conditions initiales) nous sert d'analogue à notre approche plus complète (modèle aux conditions limites, cf. chapitre 4). On remarquera que cet exemple est utilisé comme base à de nombreux modèles $N$-corps[5] tels que ceux décrivant la synchronisation onde-particule responsable de l'amortissement Landau (voir section 1.5).

[1] Landau *et al* 1984; Jackson 1999

[2] Marshall 1985; Bonifacio *et al* 1990; Freund and Antonsen 1992

[3] Nicholson 1983; Elskens et Escande 2003; Escande *et al* 2018

[4] Elskens et Escande 2003; Doveil *et al* 2007; Escande 2018

[5] Escande *et al* 1996; Elskens et Escande 2003; Escande 2018

## 1.2 Faisceau d'électrons libres en interaction avec une onde sinusoïdale

La base de l'analogie de notre modèle repose sur le pendule (non-linéaire) décrit en appendice A.1. Ici, nous appliquons la formulation du pendule à un faisceau d'électrons libres en interaction avec une onde sinusoïdale. Ce modèle est utilisé[6] pour représenter intuitivement la dynamique dans les lasers à électrons libres (LEL, *Free Electron Laser*). La physique de l'interaction onde-particule dans les LEL est similaire aux tubes à onde progressive (voir chapitre 2). Dans le jargon des tubistes, on dit que ce modèle est à **gain faible** car on considère l'amplitude du champ comme constante (malgré le transfert de moment par les électrons), et à **grand signal** car le mouvement des électrons est fortement perturbé.

[6] Marshall 1985

On considère donc un faisceau d'électrons à la vitesse initiale $\mathfrak{v}_{\mathrm{el},0}$ en résonance avec un champ électrique sinusoïdal $\mathfrak{E}_\mathfrak{z}(\mathfrak{z}, t) = \mathfrak{E}_{\mathfrak{z},0} \sin(\kappa\mathfrak{z} - \omega t)$ dirigé selon l'axe $\mathfrak{z}$ du faisceau, avec une vitesse de phase $\mathfrak{v}_\mathrm{ph} = \omega/\kappa$ telle que $\mathfrak{v}_\mathrm{ph} \simeq \mathfrak{v}_{\mathrm{el},0}$ permette l'accélération des électrons. L'utilisation de la force électrique $\mathfrak{m}_\mathfrak{e}\ddot{\mathfrak{z}} = -\mathfrak{e}\mathfrak{E}_\mathfrak{z}$ nous permet de réécrire l'équation du mouvement de chaque électron comme

$$\ddot{\mathfrak{z}}' = \frac{-\mathfrak{e}\mathfrak{E}_{\mathfrak{z},0}}{\mathfrak{m}_\mathfrak{e}} \sin(\kappa\mathfrak{z}')\,, \tag{1.1}$$

analogue à l'équation (A.1) en annexe, après un changement de variable $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z} - \mathfrak{v}_\mathrm{ph} t$ pour se placer dans le référentiel où le champ est immobile, et avec $\mathfrak{e}$ la charge électrique d'un électron, et $\mathfrak{m}_\mathfrak{e}$ la masse d'un électron. Comme le montre la figure A.2 en appendice, des zones d'accélération des particules apparaissent aux positions $\mathfrak{q} = \kappa\mathfrak{z}' \in [-\pi + 2\mathfrak{n}\pi, 0 + 2\mathfrak{n}\pi]$, $\forall \mathfrak{n} \in \mathbb{Z}$, et des zones de décélération apparaissent en $\mathfrak{q} = \kappa\mathfrak{z}' \in [0 + 2\mathfrak{n}\pi, \pi + 2\mathfrak{n}\pi]$. Cet effet provoque le regroupement des particules (*electron bunching*, l'effet est observable sur les diagrammes d'Applegate : position en fonction du temps).

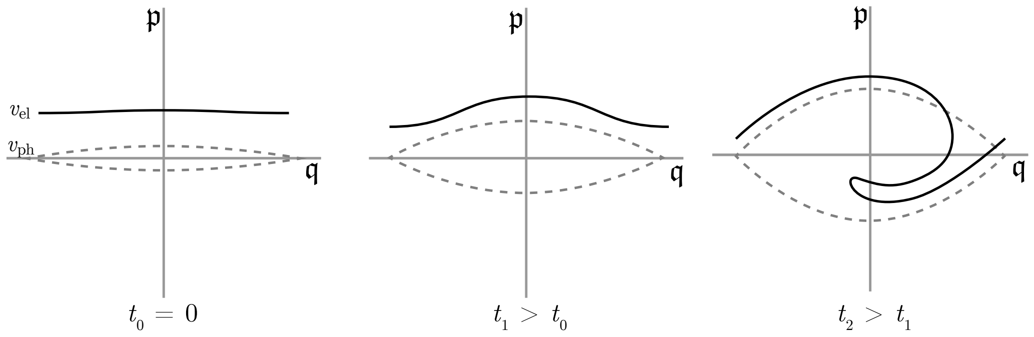



FIGURE 1.2 – Minenna *et al* (2019a). Échange de quantité de mouvement/moment canonique entre une onde et un faisceau de particules pour un système auto-cohérent, inspiré de Firpo *et al* (2001). La largeur de « l'œil de chat » (courbe traitillée) est proportionnelle à $\sqrt{\mathfrak{U}} \propto \mathfrak{I}^{1/4}$. Au temps $t_0$ (image de gauche), on considère un faisceau monocinétique de vitesse $\mathfrak{v}_{\mathrm{el}}$, où les particules sont représentées par la courbe noire continue. Après avoir ajouté une onde avec une vitesse de phase $\mathfrak{v}_{\mathrm{ph}} \lesssim \mathfrak{v}_{\mathrm{el},0}$, les trajectoires commencent à être modulées. Certaines particules sont accélérées, d'autres sont ralenties. À cause de la synchronisation des particules avec l'onde, il s'avère que l'effet de décélération domine, et donc que la quantité de mouvement totale des particules diminue. Le moment perdu est transférée à l'onde qui est donc amplifiée (ce qui augmente la taille de « l'œil de chat », image centrale). Ce processus d'amplification se poursuit jusqu'à ce que les particules soient piégées (image de droite) lorsqu'elles traversent la séparatrice. Cela initie le régime non-linéaire. L'effet inverse se produit si on prend $\mathfrak{v}_{\mathrm{ph}} \gtrsim \mathfrak{v}_{\mathrm{el},0}$ : les particules vont gagner du moment et l'amplitude de l'onde va décroître (voir Doveil *et al* (2005a); Escande (2010)). On remarque que cet exemple exprime l'amplification en temps, alors que, dans un tube à onde progressive, l'amplification est spatiale. Pour les TOPs, ces effets non-linéaires (tels qu'à $t_2$) sont étudiés depuis l'apparition de ces appareils (voir Cutler (1956)).

On note alors la vitesse des particules dans le référentiel co-mouvant avec l'onde comme

$$\dot{\mathfrak{z}}' = \sqrt{(\dot{\mathfrak{z}}'_0)^2 + \frac{2\mathfrak{e}\mathfrak{E}_{\mathfrak{z},0}}{\mathfrak{m}_{\mathfrak{e}}\kappa}\Big(\cos(\kappa\mathfrak{z}') - \cos(\kappa\mathfrak{z}'_0)\Big)}\,, \tag{1.2}$$

où $\dot{\mathfrak{z}}'_0 = \mathfrak{v}_{\mathrm{el},0} - \mathfrak{v}_{\mathrm{ph}}$ et $\mathfrak{z}'_0 = \mathfrak{z}_0$. On peut donc tracer un portrait de phase identique à la figure 1.1, où la demi-largueur de la séparatrice ($\backsim$ segment vertical en 0) est $\sqrt{2|\mathfrak{e}\mathfrak{E}_{\mathfrak{z},0}|/(\mathfrak{m}_{\mathfrak{e}}\kappa)}$. On peut aussi avec ce modèle calculer l'énergie cédée par l'onde au faisceau. Notons la variation d'énergie cinétique

$$\Delta\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\mathfrak{m}_{\mathfrak{e}}\left(\dot{\mathfrak{z}}^2 - \dot{\mathfrak{z}}_0^2\right). \tag{1.3}$$

On développe le membre entre parenthèses, soit $\dot{\mathfrak{z}}^2 - \dot{\mathfrak{z}}_0^2 \simeq 2\mathfrak{v}_{\mathrm{ph}}(\dot{\mathfrak{z}}' - \dot{\mathfrak{z}}'_0)$ en considérant $\dot{\mathfrak{z}} \simeq \mathfrak{v}_{\mathrm{ph}}$, au premier ordre. En faisant la moyenne de la variation d'énergie (1.3) sur le temps d'interaction, on obtient **l'énergie transférée** de l'onde au faisceau

$$\mathfrak{T}_{\mathrm{trans}} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{e}}\mathfrak{v}_{\mathrm{ph}}\langle\dot{\mathfrak{z}}' - \dot{\mathfrak{z}}'_0\rangle\,. \tag{1.4}$$

En utilisant (1.2), on peut trouver[1] une vitesse $\dot{\mathfrak{z}}'_0$ optimale pour maximiser soit le transfert d'énergie de l'onde vers les électrons, soit l'inverse.

Pourtant ce modèle est incomplet. Il ne prend pas en compte les modifications de l'onde engendrées par le faisceau.

[1] Plouin 2004

**Remarque 1.2.1** (Résonance) En mécanique hamiltonienne, le mot « résonance » a un sens géométrique. « L'œil de chat » dans l'espace de phase (fig. 1.1) est souvent appelé « îlot de résonance » (*resonance island*) ou juste résonance. La succession périodique des yeux de chat dans l'espace crée une chaîne d'îlots (*island chain*) et la « résonance » qualifie alors toute la chaîne.

## 1.3 Modèle hamiltonien auto-cohérent

Le système précédent est incomplet pour décrire correctement l'interaction onde-particule car il néglige l'évolution des champs (la partie circuit d'un modèle d'interaction). Il faut donc ajouter les équations d'évolution des ondes. Une théorie prenant en compte l'action de l'onde sur les électrons et la rétroaction des électrons sur l'onde est appelé **auto-cohérente** (*self-consistent*). Nous présentons dans cette section le modèle qui servira d'analogue à notre approche. Notons aussi que le modèle de cette section est électrostatique.

Repartons du hamiltonien du pendule $H(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) = \frac{\mathfrak{p}^2}{2} - \mathfrak{U} \cos \mathfrak{q}$ (voir appendice A), mais, maintenant, ajoutons l'énergie des oscillateurs harmoniques correspondant à l'oscillation libre des ondes. On obtient alors le **hamiltonien auto-cohérent**[1] (ici pour un champ électrostatique et des constantes de couplage unitaires)

$$H(\mathfrak{p}, \mathfrak{z}, \mathfrak{I}, \varphi)_{\{r,s\}} = \sum_r \frac{\mathfrak{p}_r^2}{2} + \sum_s \omega_s \mathfrak{I}_s - \sum_r \sum_s \mathfrak{U}_s \cos\left(\kappa_{\mathfrak{s}} \mathfrak{z}_{\mathfrak{r}} - \varphi_{\mathfrak{s}}\right), \tag{1.5}$$

[1] Mynick et Kaufman 1978; Antoni *et al* 1998; Elskens et Escande 2003

dans le référentiel du laboratoire, pour des particules $(r)$ et des ondes $(s)$, où l'énergie électrostatique (et l'action) des ondes est proportionnelle au carré de leur amplitude $\mathfrak{U}_s \propto \sqrt{\mathfrak{I}_s}$, où les ondes ont une phase (angle) $\varphi_s$ et une pulsation angulaire $\omega_s = \kappa_s \mathfrak{v}_{\mathrm{ph},s}$ pour $\mathfrak{v}_{\mathrm{ph},s}$ la vitesse de phase et $\kappa_s$ le nombre d'onde. La dynamique de ce système est schématisée par la figure 1.2. La transition abrupte entre le hamiltonien du pendule et (1.5) est mieux détaillée par Antoni *et al* (1998) et Elskens et Escande (2003).

Cette approche hamitonienne conserve le caractère réversible de la dynamique. Comme (1.5) est invariant par translation de l'origine du temps ($t' := t + \mathfrak{b}$, $\forall \mathfrak{b}$), la dynamique conserve l'énergie totale $H$. Et puisque ce hamitonien est aussi invariant par translation spatiale ($\mathfrak{z}'_r := \mathfrak{z}_r + \mathfrak{c}$, $\varphi'_s := \varphi_s + \kappa_s \mathfrak{c}$, $\forall \mathfrak{c}$), alors la dynamique conserve aussi la quantité de mouvement totale

$$\mathfrak{p}_{\mathrm{tot}} = \sum_r \mathfrak{p}_r + \sum_s \kappa_s \mathfrak{I}_s \,. \tag{1.6}$$

Cette quantité de mouvement totale est une simple somme des quantités de mouvement des particules et des ondes. L'interaction onde-particule est un effet fondé sur l'échange de moment, tel que schématisé par la figure 1.2. La figure 1.6 présente le résultat d'une simulation du hamiltonien (1.5) pour une onde et 200 particules en utilisant le code PARONHA.[2] La séparatrice de l'onde $s = 1$ (courbe rouge) en $z$ suit $\omega/\kappa \pm 2(2\mathfrak{I})^{1/4} |\cos(\kappa_{\mathfrak{s}} \mathfrak{z} - \varphi)/2|$, avec l'amplitude de l'onde $\sqrt{2\mathfrak{I}}$. Les paramètres initiaux sont 200 particules $(r)$, $\mathfrak{p}_r(t = 0) = 0.5$, réparties aléatoirement sur $[-\pi, \pi]$, avec pour l'onde $\mathfrak{I}(t = 0) = 0$, $\mathfrak{v}_{\mathrm{ph}} = -0.5$, $\omega = -0.5$, et $\kappa = 1$. Dans notre formalisme, le piégeage (et donc le régime non linéaire) intervient lorsque les particules traversent la séparatrice de l'onde. On notera qu'avec ce modèle électrostatique, la quantité de mouvement (masse fois vitesse) des particules est égale au moment canonique (ce qui est vrai dans ce modèle mais ne le sera plus dans les chapitres suivants).

[2] Elskens, communication privée

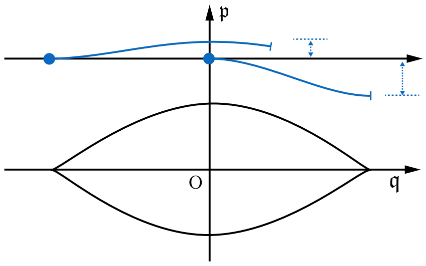



FIGURE 1.3 – Inspiré d'Escande *et al* (2018). Représentation de la synchronisation onde-particule. Le portrait de phase montre l'effet de la synchronisation sur deux particules avec la même vitesse initiale mais démarrant avec un déphasage de $\pi$ dans leur position. Si on suppose un faisceau initial mono-cinétique avec $\mathfrak{v}_{\text{ph}} \lesssim \mathfrak{v}_{\text{el},0}$ comme à la première image ($t_0 = 0$) de la figure 1.2, on peut voir qu'en moyenne les particules vont perdre leur quantité de mouvement. Si on avait pris initialement $\mathfrak{v}_{\text{ph}} \gtrsim \mathfrak{v}_{\text{el},0}$, l'effet inverse se serait produit : les particules auraient gagné de la quantité de mouvement. Grâce à la synchronisation, les particules vont, en moyenne, rapprocher leur vitesse de la vitesse de phase.

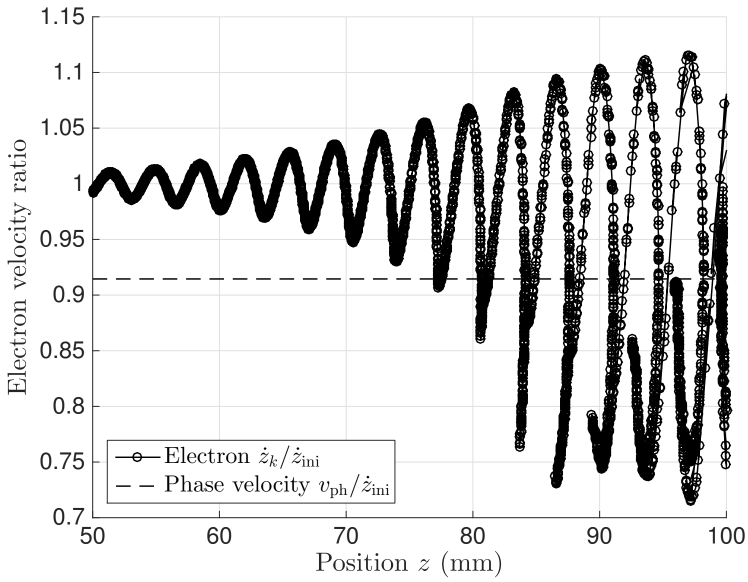



FIGURE 1.4 – Minenna *et al* (2018). Vitesse des électrons (divisée par la vitesse initiale $\mathfrak{v}_{\text{el},0}$) en fonction de la position selon une simulation unidimensionnelle en temps d'un tube à onde progressive (sans *tapers* ni atténuateurs) à partir d'un modèle hamiltonien auto-cohérent décrit au chapitre 4. Le TOP choisi est fictif, mais très proche d'un tube industriel spatial en bande Ku (12–18 GHz). Les paramètres initiaux (tels que courant et potentiel de cathode, impédances de couplage et vitesse de phase) sont choisis pour que l'amplification atteigne la saturation de puissance avant la fin du tube, et les effets de charge d'espace sont pris en compte. Chaque point représente une macro-particule. Au début du tube, les particules sont émises avec la même vitesse $\mathfrak{v}_{\text{el},0}$ (faisceau mono-cinétique). Les particules avec $\mathfrak{v}_{\text{el}}(t) < \mathfrak{v}_{\text{el},0}$ ont donné de leur moment à l'onde et, puisqu'il y a plus de particules en dessous de $\mathfrak{v}_{\text{el}}(t) = \mathfrak{v}_{\text{el},0}$, l'onde est amplifiée. La courbe traitillée représente la vitesse de phase $\mathfrak{v}_{\text{ph}}$ de l'onde (divisée par la vitesse initiale $\mathfrak{v}_{\text{el},0}$). Les effets non-linéaires (piégeage) débutent approximativement lorsque $\mathfrak{z} = 80$ mm (quand certaines particules ont traversé la séparatrice centrée sur $\mathfrak{v}_{\text{ph}}$).

En régime linéaire, la synchronisation onde-particule impose, entre autres, que les particules en résonance avec une onde vont, en moyenne, rapprocher leurs vitesses de la vitesse de phase.[3] Cet effet est observable sur la figure 1.3 et est à la base de nombreux phénomènes en physique, dont le fonctionnement des tubes à ondes progressives.

[3] Macor *et al* 2005

Ce hamiltonien auto-cohérent, bien qu'il nous serve simplement d'analogie, est utilisé dans d'autres contextes, notamment pour décrire le système faisceau-plasma[1] (cf. section 1.5), la physique des lasers à électrons libres[2] ou l'interaction onde-particule dans un tube à ondes progressives.[3]

[1] Elskens et Escande 2003; Escande 2018

[2] Chaix et Iracane 1994

[3] Hartmann *et al* 1995; Tsunoda *et al* 1987b

## 1.4 Interaction entre ondes et électrons dans un tube à ondes progressives

Suivant la section précédente, le processus physique apparaissant dans un tube à onde progressive (TOP), décrit au chapitre 2, est facile à comprendre (voir figure 1.4). La structure à onde lente (c-à-d. la ligne à retard) est conçue pour imposer une quasi-résonance entre la vitesse de phase de l'onde $\mathfrak{v}_{\text{ph}}$ le long de l'axe longitudinal et la vitesse des électrons $\mathfrak{v}_{\text{el}}$ émis depuis une cathode. Par exemple, la vitesse de phase dans un TOP à hélice est environ

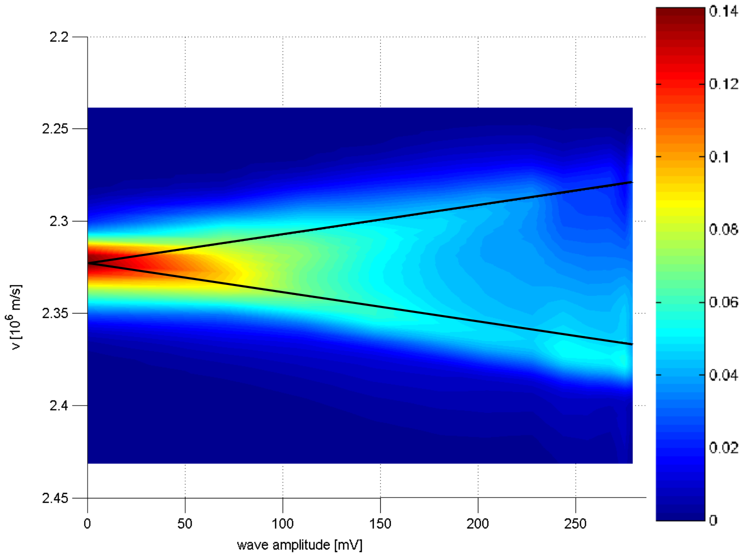



FIGURE 1.5 – Première observation expérimentale de la synchronisation non-linéaire responsable de l'amortissement Landau pour une seule onde (voir Doveil *et al* (2005a)). Mesure provenant du TOP du PIIM (Aix-Marseille Université, CNRS). L'axe des ordonnées est orienté vers le bas. Le faisceau est injecté à $\mathfrak{v}_{\mathrm{el},0} = 2.32 \times 10^6$ m/s en présence d'une onde avec une vitesse de phase $\mathfrak{v}_{\mathrm{ph}} = 3.45 \times 10^6$ m/s. La couleur visualise la fonction de distribution en vitesse moyenne en fonction de l'amplitude de l'onde. Les droites symétriques marquent la portée de la modulation linéaire de la vitesse du faisceau. La synchronisation se manifeste dans une correction quadratique tirant la vitesse du faisceau vers la vitesse de phase de l'onde (ici nous avons $\mathfrak{v}_{\mathrm{el},0} < \mathfrak{v}_{\mathrm{ph}}$).

$\mathfrak{v}_{\mathrm{ph}} \simeq cd/(2\pi\, a)$, avec $a$ le rayon et $d$ le pas de l'hélice, et $c$ la vitesse de la lumière dans le vide (voir figure 2.2). Pour les tubes spatiaux, on a $\mathfrak{v}_{\mathrm{ph}}/c \simeq 0.10$. Pour assurer l'amplification de l'onde, on doit juste avoir $\mathfrak{v}_{\mathrm{el}} \gtrsim \mathfrak{v}_{\mathrm{ph}}$. La synchronisation onde-particule force les vitesses électroniques à se rapprocher de la vitesse de phase. Durant l'interaction, la quantité de mouvement totale (1.6) est conservée, donc les électrons perdent en moyenne leur quantité de mouvement au bénéfice de l'onde qui s'amplifie. Nous disons que cet effet est linéaire (car le gain de l'amplification est linéaire) jusqu'à ce que les électrons aient perdu assez de moment pour traverser la séparatrice dans leurs espaces $(\mathfrak{p}, \mathfrak{z})$ individuels et soient piégées. On notera qu'à la différence du modèle de la section précédente, l'amplification de l'onde dans un tube à onde progressive est spatiale et non temporelle.

Des modèles plus réalistes peuvent inclure la propagation d'une onde électromagnétique (dite de circuit) en plus des effets de charge d'espace (c-à-d. la répulsion coulombienne des électrons entre eux à cause de leurs charges de même signe). Dans les TOPs, c'est l'onde de circuit qui domine la dynamique du faisceau. La charge d'espace est modérément significative dans les tubes, car elle réduit le *bunching* d'électron et donc impose de construire des lignes à retard légèrement plus longues. On remarquera aussi que, dans un vrai TOP, l'émission électronique n'est pas unidirectionnelle ni mono-cinétique, la vitesse de phase n'est pas constante et des pertes apparaissent.

Le fonctionnement des TOPs est parfois assimilé[1] à l'effet Tcherenkov (Čerenkov ou *Vavilov-Cherenkov radiation (VCR)*), puisqu'il s'agit de l'émission d'un rayonnement et du ralentissement d'une particule chargée électriquement intervenant lorsque cette particule se déplace plus vite que la vitesse de la lumière dans ce milieu (vitesse de phase).

[1] Pierce 1955

## 1.5 Lien entre la physique des plasmas et les tubes à ondes progressives

Le modèle de la section 1.3 décrit très bien la propagation d'ondes de Langmuir $s$ couplées de façon significative avec des particules dites du faisceau (*beam*) dont la vitesse est proche de leurs vitesses de phase, et faiblement couplées avec d'autres particules (*bulk*) du plasma (cas de l'instabilité *bump-on-tail*). On parle de système faisceau-plasma. L'amplitude des ondes $\mathfrak{U}_s$ est alors déterminée[2] à partir de celle des oscillations des particules « de fond »

[2] Elskens et Escande 2003

et de leur fonction diélectrique $\epsilon$.

Pour étudier ce système, on peut utiliser un tube à ondes progressives (TOP), présenté au chapitre 2, permettant des expériences dans un environnement mieux contrôlé. En effet, le *bulk* du plasma, qui est le milieu de propagation de nos ondes, est fortement bruité et difficile à contrôler, alors que ce plasma peut être ingénieusement remplacé par un guide d'onde comme la ligne à retard d'un TOP. Le taux de croissance de l'onde dans le premier cas est fixé par la fonction de distribution du plasma, tandis que dans le second cas, il peut se calculer à partir de l'impédance $Z_c$ de la structure (en régime linéaire). Quantitativement, le paramètre clé de la caractérisation du couplage faisceau-guide d'onde est le paramètre sans dimension de Pierce $\mathcal{C}_p$ (voir section 8.3.3) qui donne le taux de croissance de l'onde (l'amplification est spatiale dans un TOP). Pour une onde se propageant dans la ligne à retard d'un tube à ondes progressives en interaction avec un faisceau, ce paramètre vaut $\mathcal{C}_p = \sqrt[3]{I_0 Z_c/(4V_0)}$ (voir équation (8.24)), avec $V_0, I_0$ le potentiel et le courant de cathode. Pour un plasma, le **paramètre de Pierce** est donné[1] par l'identification

$$\mathcal{C}_p^3(s) = -\frac{\omega_p^2}{\omega_s^2}\frac{\mathfrak{n}_b}{\mathfrak{n}_p}\left[\frac{\mathfrak{v}_{el,0}}{\omega_s}\kappa_s^2\frac{\partial\epsilon}{\partial\kappa_s}\Big|_{\omega_s,\kappa_{s,0}}\right]^{-1}, \tag{1.7}$$

avec $\mathfrak{n}_b, \mathfrak{n}_p$ les densités du faisceau et du plasma, $\mathfrak{v}_{el,0}$ la vitesse initiale du faisceau, $\omega_p$ la pulsation plasma et $\epsilon(f_0)$ la fonction diélectrique du plasma liée à la fonction de distribution $f_0$. Dans le cas d'un faisceau froid (*cold beam*, faisceau initial mono-cinétique), le taux de croissance de l'onde (*wave growth rate*) est $\gamma_{max,s} \simeq 2^{1/3}\sqrt{3}\,\mathcal{C}_p\omega_s$. Dans le cas d'un faisceau chaud (*warm beam*), le taux de croissance vaut $\mathcal{C}_p^3\,\partial_{\mathfrak{v}} f_0(\mathfrak{v}_{ph})$.

Le remplacement du plasma par un TOP permet une analyse détaillée de l'interaction auto-cohérente entre des ondes instables et un faisceau d'électrons froid[2] ou chaud.[3] Depuis 1994, un TOP de 4 mètres[4] (l'un des plus longs du monde) est utilisé à Marseille pour étudier expérimentalement les modèles faisceau-plasma. À la place du collecteur, un analyseur trochoïdal[5] permet de mesurer la distribution en énergie du faisceau. Ce TOP a permis d'observer expérimentalement[6] le mécanisme de synchronisation (cf. figure 1.5), en accord avec la théorie $N$-corps hamiltonienne.[7] Il a aussi permis l'observation de caractéristiques importantes du chaos hamiltonien,[8] de tester de nouvelles méthodes de contrôle du transport chaotique,[9] ainsi que de tester le chauffage de particules par des ondes.[10]

[1] O'Neil *et al* 1971; Tsunoda 1982; Tsunoda *et al* 1991

[2] Dimonte et Malmberg 1978

[3] Tsunoda *et al* 1987a, 1991

[4] Doveil 2018

[5] Guyomarc'h et Doveil 2000

[6] Doveil *et al* 2005a

[7] Elskens et Escande 2003; Doveil et Macor 2006; Santos et Elskens 2017

[8] Doveil *et al* 2005c; Macor *et al* 2005; Doveil *et al* 2006, 2007

[9] Macor *et al* 2007

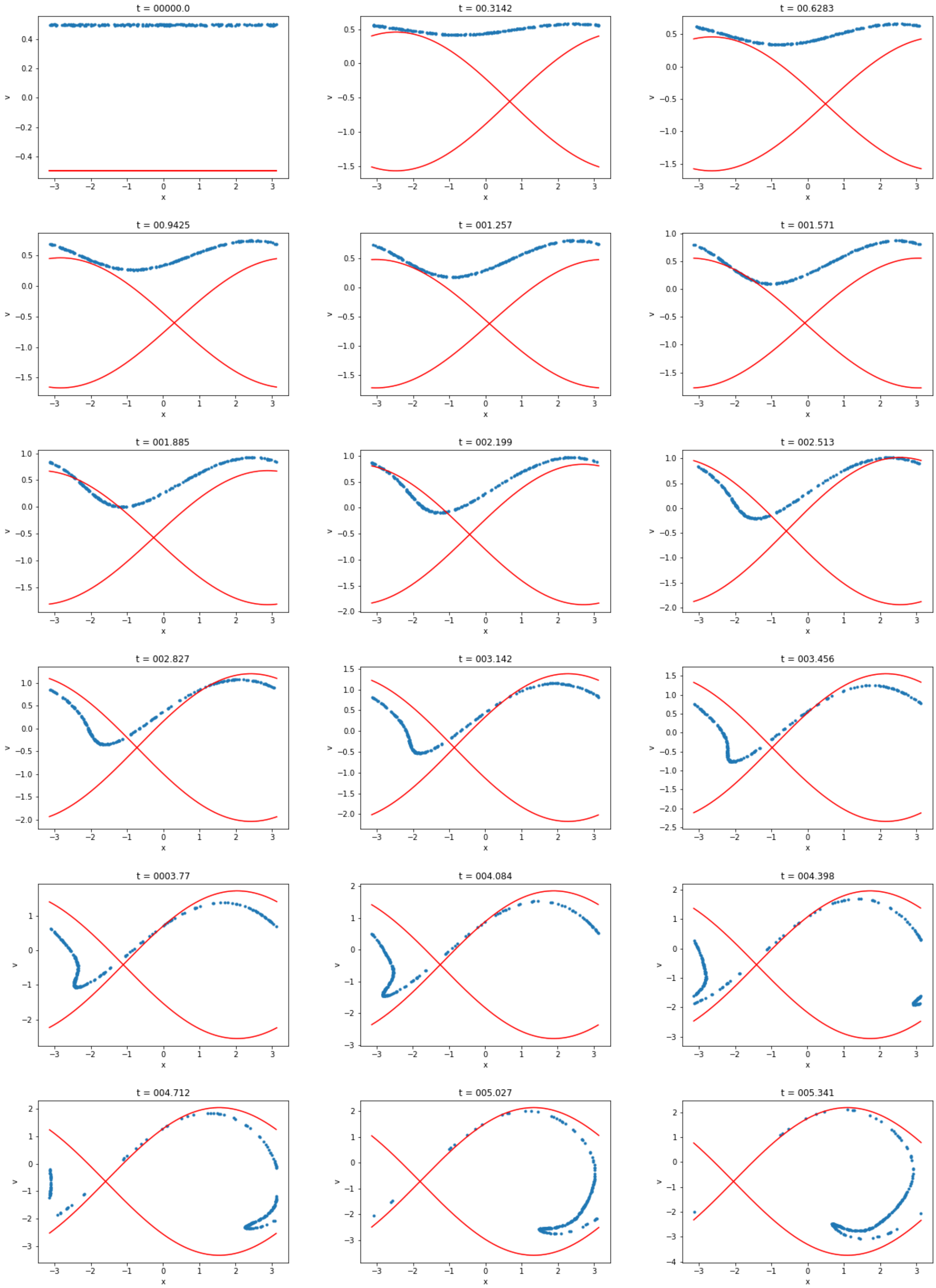
[10] Doveil et Macor 2011

## 1.6 Objectifs : description $N$-corps en physique des plasmas et échange de moment

La description $N$-corps n'a jamais été, à notre connaissance, utilisée pour modéliser en entier des appareils expérimentaux en physique des plasmas. Pour cette discipline, la dynamique en particules discrètes est limitée à l'interprétation intuitive de certains phénomènes. C'est aussi une description pédagogique que l'on trouve de nombreux manuels (p. ex., pour décrire le mouvement d'une seule particule chargée dans un champ électromagnétique). Mais le nombre de degrés de liberté en jeu rend difficile l'utilisation de la description $N$-corps pour des cas appliqués, ce qui amène les physiciens des plasmas à privilégier des modèles cinétiques ou fluides.

L'un des objectifs de cette thèse est de démontrer la viabilité de l'approche $N$-corps. Notamment, nous emploierons cette approche pour simuler des tubes à ondes progressives industriels. Nous pouvons le faire car nous combinons à cette approche un modèle de réduction que nous appelons le modèle discret (présenté au chapitre 3). Notre théorie hamiltonienne $N$-corps est décrite au chapitre 4 et nos résultats de simulations sont présentés au chapitre 5.

Dans notre contexte, l'interaction onde-particule repose sur un échange de moment, qu'il soit mécanique (quantité de mouvement) ou conjugué. L'équation (1.6) présente la conservation du moment pour l'analogie ci-dessus. Un autre des objectifs de cette thèse est d'étudier cet échange avec notre théorie hamiltonienne $N$-corps et de l'observer dans nos simulations. C'est ce que nous faisons au chapitre 6. L'étude de cet échange nous amènera aussi à étudier la controverse Abraham-Minkowski. Cette controverse porte sur la définition de la quantité de mouvement mécanique ou du moment conjugué de la lumière dans les milieux diélectriques. Au chapitre 7, nous proposons une extension de cette controverse aux guides d'onde sous vide grâce à une approche $N$-corps et suggérons son application aux plasmas.


t = 00000.0
t = 00.3142
t = 00.6283
t = 00.9425
t = 001.257
t = 001.571
t = 001.885
t = 002.199
t = 002.513
t = 002.827
t = 003.142
t = 003.456
t = 0003.77
t = 004.084
t = 004.398
t = 004.712
t = 005.027
t = 005.341
x
v

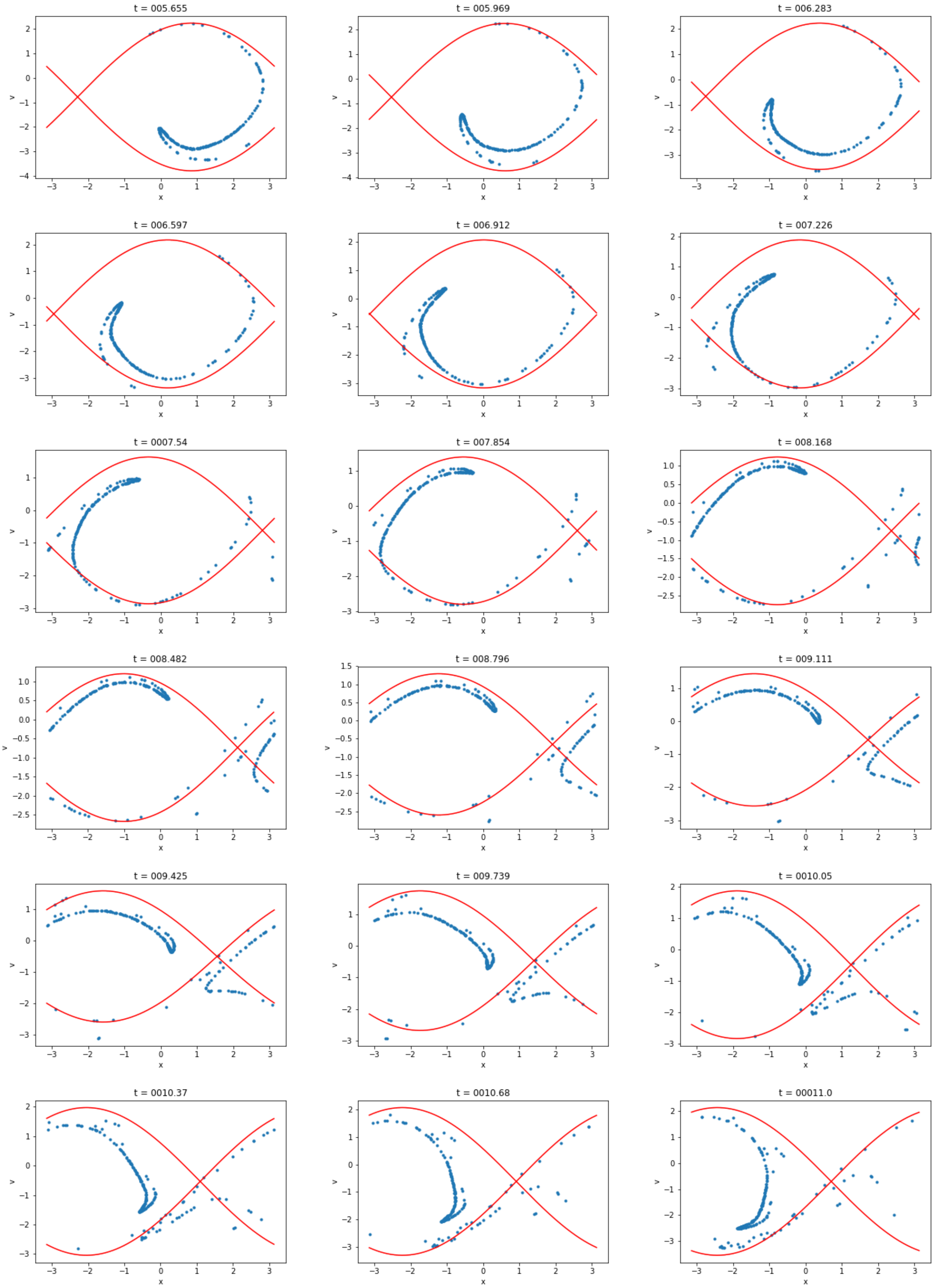



Figure 1.6 – Piégeage d'un faisceau de particules dans une onde selon le hamiltonien (1.5). Vitesse des électrons (points bleus) en fonction de leur position (avec des conditions de frontières périodiques).