

# 华侨大学《数学分析（一）》习题课讲义

刘乙明

2025 至 2026 学年秋季学期（此讲义将随本学期习题课的进行不断更新）

## 目录

<b>1 利用定义证明数列极限</b>	<b>2</b>
1.1 关于证明规范性的若干注记	2
1.2 放缩技巧·若干常用的放缩不等式	2
1.3 分步技巧	5
<b>2 数列的收敛性·子列·递推数列的极限</b>	<b>7</b>
2.1 数列收敛或发散的判断	7
2.2 数列与子列的关系	8
2.3 根据递推公式计算数列极限	9
<b>3 函数极限的证明</b>	<b>12</b>
3.1 利用定义证明函数极限	12
3.2 基于函数方程与收敛性质的函数恒等性证明	14
3.3 复合函数的极限问题	14
<b>4 数列极限与函数极限的计算举例</b>	<b>16</b>
4.1 关于极限计算问题的两个注记	16
4.2 利用等价量代换	17
4.3 利用初等变形	18
4.4 利用迫敛性及其推广形式	20
<b>5 函数连续性的证明与应用</b>	<b>22</b>
5.1 函数连续性的证明	22
5.2 周期函数的最小正周期问题	23
5.3 闭区间上连续函数性质的应用	24
<b>6 函数的一致连续性</b>	<b>27</b>
6.1 函数一致连续性的判断	27
6.2 分步技巧在一致连续及其相关问题中的应用	28

## 专题一 利用定义证明数列极限

**1.1. 关于证明规范性的若干注记** 作为数学专业本科阶段的基础课程之一，数学分析中的绝大多数概念（诸如确界、极限、连续等）从直观上理解并不困难。然而，**数学的大厦并不能仅仅建立在感觉直观上，它需要严格的公理与逻辑体系**。因此，保持证明过程的规范性是至关重要的。以下是一些关于证明规范性的注记：

- (1) **证明的书写应当使用严格的数学语言，避免口语化。**可以在证明的书写过程中合理地使用诸如「 $\forall$  (任意的)」、「 $\exists$  (存在)」以及「 $A \Rightarrow B$  (由  $A$  推出  $B$ )」等符号表达逻辑关系。此外，大学阶段的数学证明往往涉及复杂的因果关系，因此应当**避免滥用「 $\because$ 」和「 $\therefore$ 」符号**。
- (2) **证明的过程应当逻辑清晰，依据充分。**对于一些推导步骤，需注明其所依据的定理、命题或结论。同时，使用诸如「利用反证法」、「要证明  $A$ ，只需证  $B$ 」和「现证明：…」等字段，可一定程度地提高证明过程的易读性。需要注意的是，在初学阶段，应当仔细思考证明中每一步的逻辑，**不要使用诸如「显然」、「易得」或「易证」等词语蒙混过关**。

**例子 1.1.** 设数列  $\{a_n\}$  是无穷小量， $\{b_n\}$  是有界数列。证明： $\{a_n b_n\}$  是无穷小量。

**极其不规范的证明。**因为  $\{a_n\}$  是趋于 0 的，对其中的每一项  $a_n$  乘以有界数列  $\{b_n\}$  的对应项后，其结果  $\{a_n b_n\}$  依旧趋于 0，故结论成立。□

**正确的证明。**因为  $\{b_n\}$  有界，则存在  $M \geq 0$  使得  $|b_n| \leq M$  对于任意的  $n \in \mathbb{N}^+$  成立。又因为  $\{a_n\}$  是无穷小量，故对任意的  $\varepsilon > 0$ ，存在正整数  $N$ ，使得

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

对一切  $n > N$  成立。因此，当  $n > N$  时，有

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

依定义， $\{a_n b_n\}$  是无穷小量。□

**1.2. 放缩技巧 · 若干常用的放缩不等式** 在使用定义 ( $\varepsilon - N$  语言) 证明极限的过程中，我们不可避免地会遇到这样一个问题：对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，直接通过不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

难以解出符合条件的  $N$ 。此时，一个常用的技巧是对  $|a_n - a|$  进行适当放大，我们需要找到一个数列  $\{A_n\}$  使其（从某一项  $N_0$  开始）满足

$$|a_n - a| \leq A_n.$$

如果这时能通过不等式  $A_n < \varepsilon$  解出相应的  $N_1$ ，使得当  $n > N_1$  时成立  $A_n < \varepsilon$ ，那么只需令  $N = \max\{N_0, N_1\}$ ，当  $n > N$  时，就有  $|a_n - a| \leq A_n < \varepsilon$ 。

**例子 1.2.** 设  $a > 1$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{a^n} = 0$ .

**证明.** (对于  $\varepsilon > 0$ , 此时直接通过不等式  $\left| \frac{n^2}{a^n} - 0 \right| < \varepsilon$  解出符合条件的  $N$  是较为困难的, 故需要对其适当地放大以化简), 令  $a = 1 + h$ , 由  $a > 1$  可知  $h > 0$ . 根据二项式定理, 当  $n \geq 3$  时, 我们有

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n = C_n^0 + C_n^1 h + C_n^2 h^2 + C_n^3 h^3 + \dots \\ &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} h^3 + \dots \\ &\geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6} h^3, \end{aligned}$$

其中,  $h > 0$  确保了上述最后一个不等式成立. 此外, 注意到当  $n > 4$  时, 我们有如下不等关系 (这一步的目的是尝试消去分母中的  $n-1$  和  $n-2$ , 这些项的存在会导致  $N$  的求解变得困难)

$$0 < \frac{n}{n-1} < \frac{n}{n-2} < 2.$$

此时, 可以做放缩

$$\left| \frac{n^2}{a^n} - 0 \right| = \frac{n^2}{a^n} \leq \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6} h^3} \leq \frac{24}{nh^3}.$$

现在对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 令  $N = \max \left\{ 4, \left\lfloor \frac{24}{\varepsilon h^3} \right\rfloor + 1 \right\}$ , 当  $n > N$  时即有  $\left| \frac{n^2}{a^n} \right| < \varepsilon$ .  $\square$

**注记 1.3.** 仿照例子 1.2 的方法, 读者可以尝试证明: 当  $a > 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$  对一切正整数  $k$  成立.

适当地使用一些不等式结论, 能够极大地帮助我们构造有效放缩. 以下列出的不等式在放缩技巧中是常用的, 其证明可在标注的参考文献中找到.

(1) **Bernoulli 不等式:** 若  $h > -1$  且  $n \in \mathbb{N}^+$ , 则成立不等式

$$(1+h)^n \geq 1 + nh,$$

其中, 当  $n > 1$  时等号成立当且仅当  $h = 0$  (见 [Xie] 命题 1.3.1);

(2) **均值不等式:** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n$  个正实数, 则成立

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}.$$

特别地, 等号成立当且仅当  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$  (见 [Xie] 命题 1.3.3);

(3) **Cauchy-Schwarz 不等式:** 给定实数  $a_1, \dots, a_n$  和  $b_1, \dots, b_n$ , 成立不等式

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)} \cdot \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)}.$$

特别地, 等号成立当且仅当数组  $(a_1, \dots, a_n)$  与  $(b_1, \dots, b_n)$  成比例 (见 [Xie] 命题 1.3.5);

(4) 设  $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ , 则

$$\sin t \leq t \leq \tan t,$$

且等号成立当且仅当  $t = 0$  (见 [Xie] 命题 1.3.6, 可利用几何或导数证明);

(5) 对数不等式: 设  $x > -1$ , 则成立不等式

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

且等号成立当且仅当  $x = 0$  (见 [Pei] 例 1.1.8, 需要使用导数证明).

**例子 1.4.** 利用定义证明极限:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**利用均值不等式证明.** 当  $n \geq 2$  时, 利用均值不等式, 我们有如下放缩

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \left( \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdots \cdots 1}_{n-2} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

因此, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$  (注: 此时只要  $n \geq N$  就有  $n \geq 2$ , 进而满足上述不等式放缩的条件), 则对一切的  $n > N$  有

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

□

**利用二项式定理证明.** 令  $A_n = \sqrt[n]{n} - 1$ , 则  $A_n \geq 0$ . 当  $n \geq 2$  时, 根据二项式定理有

$$\begin{aligned} n &= (A_n + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 A_n + C_n^2 A_n^2 + \cdots \\ &= 1 + nA_n + \frac{n(n-1)}{2} A_n^2 + \cdots \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2} A_n^2. \end{aligned}$$

将上述不等式变形后, 有  $A_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$ . 此时对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 要说明  $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$ , 只需说明

$$A_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

注意到当  $n \geq 2$  时成立  $\frac{n}{n-1} \leq 2$ , 因此取  $N = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ , 则对任意的  $n > N$  有

$$A_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{n}{n-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

□

**练习 1.5.** 利用定义证明下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

**1.3. 分步技巧** 对于一些形式较为复杂的  $|a_n - a|$ , 往往难以直接构造有效的放缩将其化简. 而分步技巧提供了另一种化简策略, 我们可以利用绝对值不等式将  $|a_n - a|$  拆成若干部分:

$$|a_n - a| \leq A_1(n) + \cdots + A_k(n).$$

如果此时能证明对上述每一部分  $A_i(n)$ , 总能找到相应的  $N_i$ , 使得  $A_i(n) < \frac{\varepsilon}{k}$  对一切的  $n > N_i$  成立. 那么只需令  $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$ , 当  $n > N$  时就有

$$|a_n - a| \leq A_1(n) + \cdots + A_k(n) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

**例子 1.6 (Cauchy 命题).** 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  (有限数), 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

**证明.** 利用绝对值不等式, 我们有放缩:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}. \end{aligned}$$

由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ , 故对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1 > 0$ , 当  $n > N_1$  时成立

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

固定上述  $N_1$ , 记  $M = \sum_{i=1}^{N_1} |a_i - a|$  并取  $N_2 = \left\lfloor \frac{2M}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ , 则有

$$\frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

对一切的  $n > N_2$  成立. 此时取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 当  $n > N$  时就有:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &\leq \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a| + |a_{N_1+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

**练习 1.7.** 设数列  $\{p_n\}$  ( $p_n > 0$ ) 和  $\{a_n\}$  分别满足:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a.$$

证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = a$ .

**提示.** 注意到  $\{a_n\}$  是有界数列, 可设  $|a_n| \leq M$ , 则

$$\left| \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} - a \right| \leq \frac{1}{p_1 + \cdots + p_n} \left( p_1 |a_n - a| + \cdots + p_{n-N} |a_{N+1} - a| + p_{n-N+1} M + \cdots + p_n M \right).$$

**练习 1.8.** 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} = 0$ .

**提示.** 对于某个  $N_0 > 0$ , 设  $M = \max\{|a_i| : 1 \leq i \leq N_0\}$ , 则有

$$\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \right| \leq \frac{MN_0(1 + N_0)}{n(n + 1)} + \frac{(N_0 + 1) \cdot |a_{N_0+1}| + \cdots + n \cdot |a_n|}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

## 专题二 数列的收敛性 · 子列 · 递推数列的极限

**2.1. 数列收敛或发散的判断** 对于给定数列  $\{a_n\}$ , 要判断其是否收敛或发散, 可以通过下述几种基本方法:

(1) **利用 Cauchy 收敛原理.** 根据 Cauchy 收敛原理, 我们有

$$\begin{aligned} \{a_n\} \text{ 收敛} &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ 当 } m, n > N \text{ 时}, |a_m - a_n| < \varepsilon; \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ 当 } n > N \text{ 时}, |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon (\forall p \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

对应地, 请读者自行写出数列  $\{a_n\}$  发散的充分必要条件.

(2) **利用单调有界定理 (数列收敛的充分条件).** 若数列  $\{a_n\}$  单调递增且有上界 (或者单调递减且有下界), 则其必定收敛, 且此时有 (见课本 [Encu] 习题 2.3 第 8 题, 请读者自行尝试证明)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_n \{a_n\} \text{ (或者) } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_n \{a_n\}.$$

**例子 2.1.** 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ , 证明:  $\{a_n\}$  收敛 (这一极限被称为 Euler 常数, 通常记作  $\Gamma$ ).

**证明.** (我们利用单调有界定理证明极限的存在性) 根据对数不等式 (见专题一), 对于任意的  $n \in \mathbb{N}$ , 成立

$$\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

因此对任意的  $n \in \mathbb{N}$ , 有

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} < 0,$$

这说明  $\{a_n\}$  是单调递减的. 另一方面, 再次应用对数不等式, 我们有

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0, \end{aligned}$$

因此  $\{a_n\}$  有下界. 综上, 根据单调有界定理可知  $\{a_n\}$  收敛.  $\square$

**例子 2.2.** 证明: 数列  $\{\sin n\}$  发散.

**证明.** (我们使用 Cauchy 收敛准则的否定形式证明发散) 注意到对于任意的  $k \in \mathbb{Z}$ , 函数  $\sin x$  满足

$$\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2}, & x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right], \\ \sin x \leq -\frac{1}{2}, & x \in \left[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi + \frac{5\pi}{6}\right], \end{cases}$$

并且上述提及的每一段区间长度均大于 1. 因此取  $\varepsilon_0 = 1$ , 对于任意的  $N > 0$ , 由实数的 Archimedes 性, 存在  $k_0 \in \mathbb{N}^+$  使得  $2k_0\pi > N$ . 此时分别取正整数

$$n \in \left[2k_0\pi + \frac{\pi}{6}, 2k_0\pi + \frac{5\pi}{6}\right], \quad m \in \left[(2k_0 + 1)\pi + \frac{\pi}{6}, (2k_0 + 1)\pi + \frac{5\pi}{6}\right]$$

(这些区间的长度确保了  $m$  和  $n$  是可被取到的), 则有  $m > n > 2k_0\pi > N$  且

$$|\sin m - \sin n| = \sin m - \sin n \geq 1 = \varepsilon_0.$$

由 Cauchy 收敛原理的否定形式, 可知数列  $\{\sin n\}$  发散.  $\square$

**练习 2.3.** 证明: 数列  $\{\tan n\}$  发散.

**2.2. 数列与子列的关系** 在数学分析中, 子列是一种十分重要的研究对象, 通过分析子列的收敛性, 能够更加具体地刻画数列本身的形态.

对于数列与子列的关系, 以下几条性质是较为基本的, 这些内容可在课本 [Encu] 中找到. 同时, 我们以习题的形式补充了一些额外的结论.

- (1) 数列  $\{a_n\}$  收敛的充分必要条件是:  $\{a_n\}$  的任意子列都收敛 (见定理 2.8, **这条性质的否定形式可用于判断数列的发散**).
- (2) 任何数列都有单调子列 (见第 2.3 节例 5).
- (3) **致密性定理:** 在实数系中, 有界数列必有收敛子列 (见定理 2.10).
- (4) 若数列  $\{a_n\}$  无上界 (或无下界), 则存在  $\{a_n\}$  的子列  $\{a_{n_k}\}$  是正无穷大量 (或负无穷大量) (见第 2.3 节例 6).

**例子 2.4.** 设  $\{a_n\}$  是单调数列,  $\{a_{n_k}\}$  是它的一个子列. 证明: 如果  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ .

**证明.** 不妨设  $\{a_n\}$  是单调递增的. 由于  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$ , 则

- (a) 对每一项  $a_{n_k}$  都有  $a_{n_k} \leq a$  (否则, 存在某个  $k_0$  使得  $a_{n_{k_0}} - a \stackrel{\text{记}}{=} \varepsilon_0 > 0$ , 此时由  $\{a_{n_k}\}$  的单调递增性可知: 对任意的  $k > k_0$ , 成立  $a_{n_k} - a \geq a_{n_{k_0}} - a = \varepsilon_0$ , 这与  $\{a_{n_k}\}$  以  $a$  为极限矛盾);

- (b) 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $K > 0$ , 当  $k > K$  时有

$$0 \leq |a_{n_k} - a| = a - a_{n_k} < \varepsilon.$$

现在取  $N = n_{K+1}$ , 由于对任意的  $n > N$ , 总存在  $k' > K$  使得  $n_{k'} \leq n \leq n_{k'+1}$  (见图 2.1), 因此由  $\{a_n\}$  的单调递增性, 有

$$0 \leq a - a_{n_{k'+1}} \leq a - a_n \leq a - a_{k'} < \varepsilon.$$

此时根据定义可知,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ .  $\square$

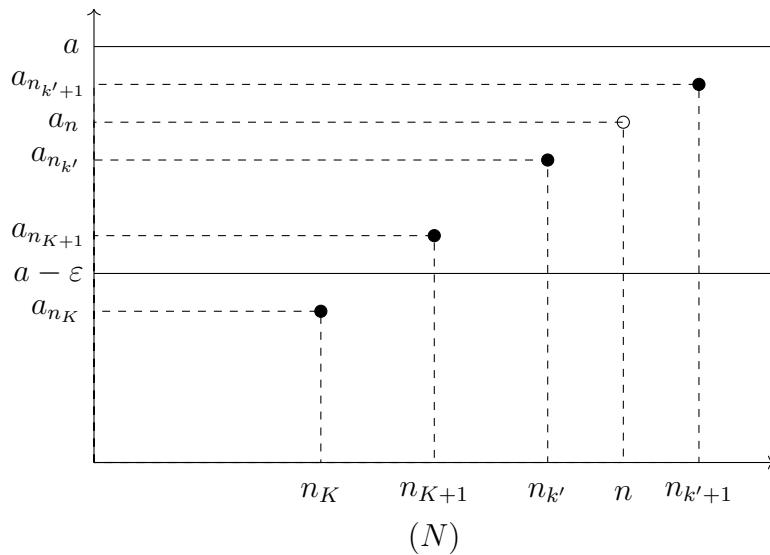


图 2.1: 当  $n > N$  时, 其必定位于在两个相邻的子列指标  $n_{k'}$  与  $n_{k'+1}$  之间

**例子 2.5.** 若  $\{x_n\}$  无界, 但不是无穷大量, 则存在两个子列: 其中一个子列收敛, 而另一个子列是无穷大量.

**证明.** 我们首先构造  $\{x_n\}$  的一个收敛子列. 由于  $\{x_n\}$  非无穷大量, 故存在  $M > 0$ , 使得对于任意的  $N > 0$ , 总存在  $n > N$  满足  $|x_n| \leq M$ . 于是依次地

- 对  $N_1 = 1$ , 取  $n_1 > N_1$  使得  $|x_{n_1}| \leq M$ ;
- 对  $N_2 = n_1$ , 取  $n_2 > N_2$  使得  $|x_{n_2}| \leq M$ ;
- ……,

由此得到  $\{x_n\}$  的一个子列  $\{x_{n_k}\}$ , 其每一项均满足  $|x_{n_k}| \leq M$ . 根据致密性定理, 存在  $\{x_{n_k}\}$  的收敛子列  $\{x_{n_{k_l}}\}$ , 这亦是  $\{x_n\}$  的一个收敛子列.

另一方面, 由于  $\{x_n\}$  无界, 则对于任意的  $G > 0$ , 总存在  $n > 0$  使得  $|x_n| > G$ . 于是依次地通过

- 对  $G_1 = 1$ , 取  $m_1 > 0$  使得  $|x_{m_1}| > G_1$ ;
- 对  $G_2 = 2$ , 取  $m_2 > m_1$  使得  $|x_{m_2}| > G_2$  (此处的  $m_2$  必定可以取到, 否则将意味着对一切  $m > m_1$  都有  $|x_m| \leq G_2$ , 这与  $\{x_n\}$  无界矛盾);
- ……,

可得到  $\{x_n\}$  的另一个子列  $\{x_{m_k}\}$ . 我们需说明  $\{x_{m_k}\}$  是无穷大量, 事实上, 对于任意的  $G > 0$ , 取正整数  $K > G$ , 则当  $k > K$  时, 有

$$|x_{m_k}| > G_k = k > K > G.$$

□

**练习 2.6.** 给定数列  $\{a_n\}$  和实数  $a$ , 证明:  $a$  的任意邻域都包含数列  $\{a_n\}$  的无穷多项 **当且仅当**  $a$  是  $\{a_n\}$  某个子列的极限 (此时, 我们称  $a$  是数列  $\{a_n\}$  的一个**极限点**).

**2.3. 根据递推公式计算数列极限** 有些数列是在给出其第一项  $a_1$  后, 使用递推公式

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

定义的, 这里的  $f(a_n)$  表示某个关于  $a_n$  的函数. 事实上, 计算这类数列极限的方法有很多 (参考 [Pei] 第 1.5 节), 但在本节我们只讨论单调有界定理的应用.

**例子 2.7.** 设数列  $\{x_n\}$  由  $x_1 = 1$  和递推关系

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

给出. 判断  $\{x_n\}$  的收敛性, 若收敛则计算其极限.

**想法.** 通过递推关系计算  $\{x_n\}$  的前若干项, 我们有

$$x_1 = 1 < x_3 = \frac{3}{2} < x_5 = \frac{8}{5} < \cdots < x_6 = \frac{13}{8} < x_4 = \frac{5}{3} < x_2 = 2.$$

于是, 我们可以猜测  $\{x_n\}$  是有界数列 (具体地:  $1 \leq x_n \leq 2$ ), 且由其奇数项构成的子列  $\{x_{2k-1}\}$  单调递增, 由其偶数项构成的子列  $\{x_{2k}\}$  单调递减. 根据单调有界定理, 我们知道这两个子列是收敛的, 此时若能证明它们收敛于同一极限  $A$ , 则必有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$  (请思考为什么?).

**证明.** 首先证明数列  $\{x_n\}$  是有界的. 事实上, 利用数学归纳法, 由于  $1 \leq x_1 \leq 2$ , 假设对于第  $n$  项有  $1 \leq x_n \leq 2$ , 则根据递推关系可得

$$1 \leq x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \leq 2,$$

这说明数列  $\{x_n\}$  满足  $1 \leq x_n \leq 2$ . 此外, 重复使用两次递推关系, 我们有

$$x_{n+2} - x_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{1+x_n} - \frac{x_{n-2}}{1+x_{n-2}} = \frac{x_n - x_{n-2}}{(1+x_n)(1+x_{n-2})},$$

这说明对于任意的  $n \geq 3$ ,  $x_{n+2} - x_n$  与  $x_n - x_{n-2}$  具有相同的符号, 再结合

$$x_3 - x_1 = \frac{1}{2} > 0, \quad x_4 - x_2 = -\frac{1}{3} < 0$$

可知由  $\{x_n\}$  的奇数项构成的子列  $\{x_{2k-1}\}$  是单调递增的, 而由其偶数项构成的子列  $\{x_{2k}\}$  是单调递减的. 根据单调有界定理, 子列  $\{x_{2k-1}\}$  与  $\{x_{2k}\}$  均收敛.

现在, 设  $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k-1} = A$ , 对递推公式

$$x_{2k+1} = 1 + \frac{1}{x_{2k}} = 1 + \frac{x_{2k-1}}{1+x_{2k-1}}$$

取极限有  $A = 1 + \frac{A}{1+A}$ , 由此解得  $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  或  $A = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  (舍去,  $\{x_n\}$  的上下界确保了该数列不可能以此为极限). 类似可以证明  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . 因此, 我们有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . □

**注记 2.8.** 考虑 Fibonacci 数列  $\{F_n\}$ , 该数列是通过递推关系

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

生成的, 其前 10 项为 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. 由于

$$\frac{F_1}{F_0} = 1, \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{F_n/F_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

因此例子 2.7 中的数列第  $n$  项  $x_n$  本质上是 Fibonacci 数列  $\{F_n\}$  的第  $n$  项相对于前一项的增长率. 例子 2.7 的结论表明, 随着  $n$  的增大, Fibonacci 数列的增长率最终将收敛于「黄金比例」, 即  $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$ .

**练习 2.9.** 给定两个正数  $a$  和  $b$ , 其满足  $0 < a < b$ , 分别令  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ .

(1) 若按照递推公式

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

定义数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$ . 证明: 这两个数列收敛于同一个极限 (该极限称为  $a$  和  $b$  的算术几何平均).

(2) 若按照递推公式

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

定义数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$ . 证明: 这两个数列收敛于同一个极限 (该极限称为  $a$  和  $b$  的算术调和平均).

**提示.** 首先证明  $a \leq a_n < b_n \leq b$  对于任意的  $n \in \mathbb{N}^+$  成立, 随后考虑单调有界定理.

### 专题三 函数极限的证明

**3.1. 利用定义证明函数极限** 设  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个去心领域  $U^\circ(x_0; \eta)$  上有定义. 则  $f(x)$  在  $x_0$  处的极限可以被定义为:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ (有限数)} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta (0 < \delta < \eta), \text{ 当 } x \in U^\circ(x_0; \delta) \text{ 时, 有} \\ |f(x) - A| < \varepsilon \end{array} \right\}.$$

其它情形的函数极限可以类似地被定义. 值得注意的是, 尽管函数极限与数列极限在定义上存在诸多类似之处, 但在使用定义证明函数极限时, 仍然存在着一些额外的需要注意之处:

- (1) 对于  $x \rightarrow x_0$  类型的极限, 其刻画的是函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某个去心邻域  $U^\circ(x_0)$  中的状态, 与  $f(x)$  在  $x_0$  处是否有定义、取值如何均无关.
- (2) 对于数列而言, 其可以被视为定义在  $\mathbb{N}^+$  上的函数. 然而, 函数的定义域不总是为  $\mathbb{R}$ , 因此在寻找合适的  $\delta$  时, 必须先确保  $f(x)$  在  $U^\circ(x_0; \delta)$  内有定义, 其次再讨论于此邻域上是否成立  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

**例子 3.1.** 利用定义证明极限  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} = 1$ .

**证明.** 注意到函数  $f(x) = \sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}}$  的定义域为  $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ , 并且在其定义域内成立不等式

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} - 1 \right| &= \left| \frac{\frac{7}{16x^2 - 9} - 1}{\sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} + 1} \right| \leq \left| \frac{7}{16x^2 - 9} - 1 \right| = \left| \frac{16x^2 - 16}{16x^2 - 9} \right| \\ &= \frac{16 \cdot |x - 1| \cdot |x + 1|}{|4x + 3| \cdot |4x - 3|}. \end{aligned}$$

对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 我们逐步地寻找合适的  $\delta > 0$ . (首先, 要保证  $f(x)$  在  $U^\circ(1; \delta)$  内有定义, 需限制  $0 < \delta < 1/4$ . 其次, 直接通过不等式

$$\frac{16 \cdot |x - 1| \cdot |x + 1|}{|4x + 3| \cdot |4x - 3|} < \varepsilon$$

求解合适的  $\delta$  是较为困难的, 因此需要对上述不等式左端做适当放大, 于是进一步地限制  $0 < \delta < 1/8$ . 此时, 取  $\delta = \min\{\varepsilon/32, 1/8\}$ , 当  $x \in U^\circ(1, \delta)$  时, 有

$$\frac{16 \cdot |x + 1| \cdot |x - 1|}{|4x + 3| \cdot |4x - 3|} \leq \frac{16 \cdot 3 \cdot |x - 1|}{3 \cdot \frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

依照定义, 即有  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ .  $\square$

**练习 3.2.** 利用定义证明极限:  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$ .

上述关于函数极限的例子是比较直观的，我们总能依据其函数图像「猜测」出对应的极限值。然而，也有一些函数的极限并不容易直接被看出。

**例子 3.3.** 考虑 Riemann 函数：

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x = \frac{q}{p} \text{ (这里 } p, q \text{ 为互素整数, 且 } p > 0), \\ 0, & x \text{ 是无理数.} \end{cases}$$

证明：对于任意的  $x_0 \in [0, 1]$ ，有  $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$ （当  $x_0 = 0$  或  $1$  时，考虑单侧极限）。

**想法.** 对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，观察  $R(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上的函数图像，我们不难发现：满足  $R(x) \geq \varepsilon$  的  $x$  至多只有有限个。因此，我们只需要找到足够小的  $\delta > 0$ ，使得去心邻域  $U^\circ(x_0; \delta)$  能刚好「避开」这有限个  $x$  即可。

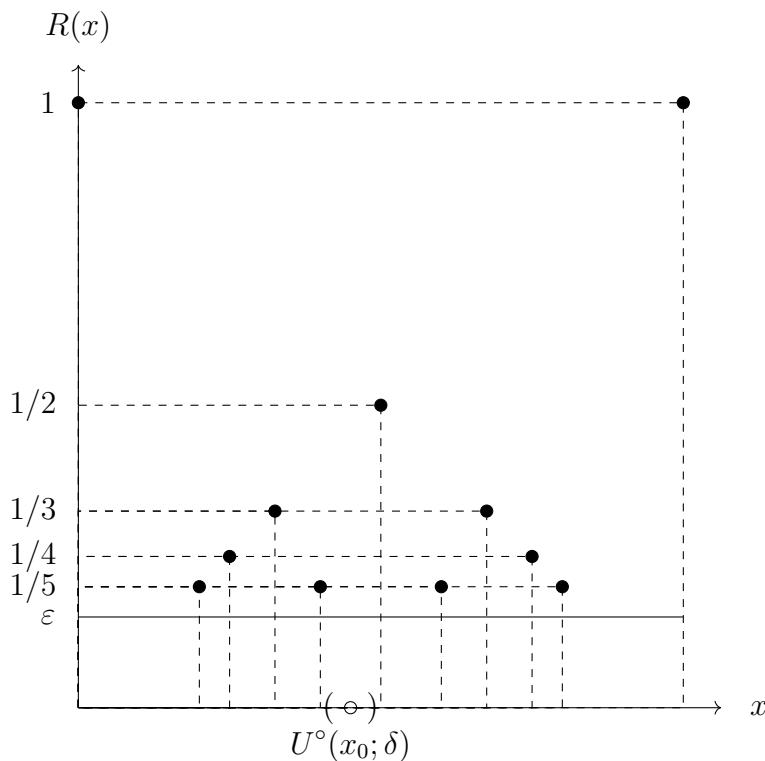


图 3.1: Riemann 函数在  $[0, 1]$  区间上的图像（只画出  $R(x) \geq \varepsilon$  的部分）

**证明.** 我们只讨论  $x_0 \in (0, 1)$  的情形，而  $x_0$  位于  $0$  和  $1$  的情形则交由读者。对于任意的  $\varepsilon > 0$ ，由于当  $x$  为无理数时  $R(x) = 0$ ，因此使得  $R(x) \geq \varepsilon$  的  $x$  必然是有理数。将有理数  $x$  写成既约分数  $q/p$ （这里  $p \in \mathbb{N}^+$ ）的形式，则有

$$\begin{aligned} R(x) = R\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{1}{p} \geq \varepsilon &\iff p \leq \frac{1}{\varepsilon} \\ &\iff p \in \left\{1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor\right\}. \end{aligned}$$

换言之，这些使得  $R(x) \geq \varepsilon$  的有理数  $x$ ，其分母（表示成既约分数时）至多只有有限种可能的取值。因此，这些有理数  $x$  至多只有有限个（记它们作成的集合为  $A$ ）。

于是, 对上述  $\varepsilon > 0$ , 取

$$\delta = \min \left\{ x_0, 1 - x_0, \min_{a \in A - \{x_0\}} \{|a - x_0|\} \right\},$$

则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 成立  $0 \leq R(x) < \varepsilon$ .  $\square$

**3.2. 基于函数方程与收敛性质的函数恒等性证明** 在某些情况下, 函数在其定义域内的整体性质可由其满足的特定函数方程以及该函数的极限行为共同确定. 在本节, 我们将讨论这些条件如何影响函数在其定义域上的恒等性.

**例子 3.4.** 设函数  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  满足函数方程  $f(x^2) = f(x)$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(1).$$

证明:  $f(x) \equiv f(1)$  ( $\forall x \in \mathbb{R}^+$ ).

**证明.** 利用反证法. 若存在  $x_0 \in \mathbb{R}^+$  使得  $f(x_0) \neq f(1)$ , 取  $\varepsilon_0 = |f(x_0) - f(1)| > 0$ , 如果  $x_0 > 1$ , 则对于任意 (大) 的  $\Delta > 0$ , 存在  $k > 0$  使得  $x_0^{2^k} > \Delta$ , 根据函数方程给出的递推关系, 我们有

$$|f(x_0^{2^k}) - f(1)| = |f(x_0^{2^{k-1}}) - f(1)| = \cdots = |f(x_0) - f(1)| = \varepsilon_0.$$

这与  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(1)$  矛盾. 类似地, 可证明  $x_0 < 1$  的情形.  $\square$

**练习 3.5.** 设  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  满足函数方程  $f(2x) = f(x)$ , 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} = A$ , 证明  $f(x) \equiv A$ .

**练习 3.6.** 设  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是一个周期函数, 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} = A$ , 证明  $f(x) \equiv A$ .

**3.3. 复合函数的极限问题** 在函数极限的计算中, 存在这样一个十分自然的问题: 如果已知  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  和  $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$  (为了方便讨论, 这里均假设  $a$ 、 $A$  和  $B$  为有限数), 那么是否成立

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow A} f(y)? \quad (3.1)$$

换言之, 在极限的计算中, 什么情况下允许作变量代换?

事实上, 等式 (3.1) 的成立并非无条件的. 例如: 设  $a = 0$ , 取函数  $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

通过计算可知  $A = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = 1$ . 然而, 考虑数列

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2n\pi} \right\} \quad \text{和} \quad \{y_n\} = \left\{ \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \right\},$$

它们均收敛于  $a = 0$ , 但是  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(g(x_n)) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(g(y_n)) = 1$ . 由 Henie 定理 (归结原理) 可知, 极限  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$  不存在, 故此时等式 (3.1) 并不成立.

下述命题给出了等式 (3.1) 成立的两个充分条件, 但它们都不是必要条件.

**命题 3.7.** 设  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ ,  $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ . 如果此时满足下述条件之一:

(1) 存在  $a$  的某个去心邻域  $U^\circ(a; \eta)$ , 使得在该邻域内恒有  $g(x) \neq A$ ;

(2)  $f(y)$  在点  $A$  处连续, 即:  $B = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = f(A)$ ,

则有  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ .

**证明.** 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 由于  $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$ , 则存在  $\delta_1 > 0$ , 当  $0 < |y - A| < \delta_1$  时成立  $|f(y) - B| < \varepsilon$  (注意: 这里并不能保证当  $y = A$  时成立  $|f(y) - B| < \varepsilon$ ); 又由于  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ , 则对于上述找到的  $\delta_1 > 0$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 使得当  $0 < |x - a| < \delta_2$  时成立  $|g(x) - A| < \delta_1$ .

- 若条件 (1) 成立, 则取  $\delta = \min\{\delta_2, \eta\}$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时有

$$0 < |g(x) - A| < \delta_1 \implies |f(g(x)) - B| < \varepsilon.$$

- 若条件 (2) 成立, 则只需取  $\delta = \delta_2$ , 因为当  $g(x) = A$  时即有  $f(g(x)) = B$ .

因此根据定义, 当满足上述二条件之一时, 均有  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$ . □

此外, 关于复合函数的极限问题, 下面这个例子也是十分经典的.

**例子 3.8.** 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$ . 但是, 如果  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$  存在, 则不一定有  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ .

**证明.** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$  存在, 不妨设其极限值为  $A$ . 则对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta_1 > 0$ , 使得当  $0 < |t| < \delta_1$  时, 有

$$|f(t^3) - A| < \varepsilon.$$

此时取  $\delta = \delta_1^3$ , 当  $0 < |x| < \delta$  时, 存在  $t$  使得  $0 < |t| < \delta_1$  且  $x = t^3$  (这是结论成立的关键), 此时有

$$0 < |f(t^3) - A| = |f(x) - A| < \varepsilon.$$

若极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不一定存在. 例如: 取  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$  为符号函数, 则有  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = 1$ , 但

$$-1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1,$$

故极限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在. □

## 专题四 数列极限与函数极限的计算举例

在数学分析中, 极限的计算问题往往种类繁多, 且十分考验技巧性. 本专题仅列出一些常用且读者目前所能理解的方法. 而更多的方法, 一方面依赖于数学分析后续课程的学习 (例如 Taylor 展开, 积分法), 另一方面需要读者通过自主练习不断积累.

**4.1. 关于极限计算问题的两个注记** 对于初学者而言, 以下两点在极限的计算过程中是需要特别注意的.

(1) **关于变量代换:** 假设我们需要计算极限  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ , 所谓变量代换法, 就是在已知  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$  成立的基础上, 令  $y = g(x)$ , 通过  $\lim_{y \rightarrow A} f(y)$  来计算原极限. **但需要注意的是, 变量代换并非无条件的!** 事实上, 如命题 3.7 所述, 只要满足下述二条件之一, 就能确保上述变量代换的合理性:

- (a) 存在关于  $a$  的某一去心邻域  $U^\circ(a; \eta)$ , 使得在  $U^\circ(a; \eta)$  中恒有  $g(x) \neq A$ ;
- (b) 函数  $f(y)$  在  $y = A$  处连续, 即  $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = f(A)$ .

(2) **幂指型函数极限的计算:** 对于计算形如  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$  的极限 (这里要求  $f(x)$  在关于  $a$  的某个去心邻域内的取值恒正), 常用的方法是先对  $f(x)^{g(x)}$  作如下变形:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln f(x)).$$

如果  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$  存在 (不妨设极限值为  $A$ ), 由于指数函数  $\exp(x)$  在  $\mathbb{R}$  上每一点都连续, 则可作变量代换  $y = g(x) \ln f(x)$ , 从而有

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \exp(g(x) \ln f(x)) = \lim_{y \rightarrow A} \exp(y) = \exp A.$$

**例子 4.1.** 计算数列极限:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$ .

不规范的解答过程. 由于

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}}$$

且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = e$  以及  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ , 故原极限为值  $e^1 = e$ .  $\square$

规范的解答过程. (暂时不使用上述方法) 注意到, 当  $n \geq 1$  时,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} + \frac{n}{n+1}} \leq \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} + 1}.$$

利用特殊极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ , 并根据 Heine 定理 (归结原则), 我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^1 = e \cdot 1 = e.$$

结合  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 由数列极限的迫敛性可知  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = e$ .  $\square$

**4.2. 利用等价量代换** 等价量替换是一种处理乘除式极限的技巧，适当的等价量替换能够化简函数的形式，进而方便极限的计算。

(1) 常用的等价量代换公式（请务必牢记!）：当  $x \rightarrow 0$  时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$$

$$\sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \quad (a > 0) \sim \frac{(1+x)^b - 1}{b} \quad (b \neq 0),$$

以及

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

(2) 变量代换原则：如果函数  $u(t)$  在  $t \rightarrow a$  时是无穷小量，则当  $t \rightarrow a$  时不一定成立。诸如  $u(t) \sim \sin u(t)$ ,  $u(t) \sim \tan u(t)$  等结论。例如：若  $u(t) = t \sin \frac{1}{t}$ ，则可以证明当  $t \rightarrow 0$  时  $u(t)$  是无穷小量，但此时不成立  $u(t) \sim \sin u(t)$ ，这是因为极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin u(t)}{u(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left( t \sin \frac{1}{t} \right)}{t \sin \frac{1}{t}}$$

根本不存在（注意：要定义函数在  $t \rightarrow 0$  时的极限，必须确保该函数在关于 0 的某个去心邻域内有定义）。然而，如果能保证  $u(x)$  在某个去心邻域  $U(a; \delta)$  内取值恒不为零，那么我们完全可以对 (1) 中的等价量关系作变量代换  $x = u(t)$ （其原理和参照命题 3.7）。

(3) 为什么不能对「加减型」极限贸然使用等价量替换？我们首先思考一下等价量的本质，根据定义：

$$\begin{aligned} \text{当 } x \rightarrow a \text{ 时, } f(x) \sim g(x) &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \\ &\iff \text{当 } x \rightarrow a \text{ 时, } f(x) - g(x) = o(g(x)). \end{aligned}$$

这意味着，当  $x \rightarrow a$  时，若  $f(x) \sim g(x)$ ，则有

$$f(x) = g(x) + (f(x) - g(x)) = g(x) + o(g(x)).$$

因此对于课本 [Encu] 第 3.5 节例 2 注中的情形，其本质上应为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + o(x)) - (x + o(x))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3},$$

但我们根据此表达式不足以计算相应的极限。事实上，如果考虑更加「精细」的等价量关系：

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

则可以计算出正确结果。

**例子 4.2.** 设  $a, b > 1$ , 计算极限:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$ .

解答. 令  $f(x) = \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ , 根据 Heine 定理, 当  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在时, 我们有

$$\text{原极限} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

注意到

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right)\right).$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) = 0$ , 且当  $x \neq 0$  时, 有  $\frac{a^x + b^x}{2} \neq 1$ , 因此当  $x \rightarrow 0$  时存在下述等价量关系

$$\ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right) \sim \frac{a^x + b^x}{2} - 1.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - 1) + (b^x - 1)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln a + x \ln b + o(x)}{2x} = \frac{1}{2} \ln ab, \end{aligned}$$

同时又注意到指数函数  $\exp(x)$  在  $\mathbb{R}$  上任意一点都连续 (见 [Encu] 第 3.2 节例 4), 因此由命题 3.7, 我们可以作代换  $y = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right)$ , 进而

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right)\right) \\ &= \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2} \ln ab} \exp y = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

□

**练习 4.3.** 计算下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{2} \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2 + 1} - n}; & (2) \quad &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\ln(1 + \sin x)}; \\ & (3) \quad &\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

答案. (1) 1; (2) 1; (3)  $e^{-\frac{1}{2}}$ .

□

**4.3. 利用初等变形** 要计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , 有时候可以使用初等数学的方法将  $x_n$  的表达式化简.

**例子 4.4.** 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$  ( $x \neq 0$ ).

**证明.** 对分子分母同时乘以  $\sin \frac{x}{2^n}$ , 并反复利用二倍角公式, 我们有

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \cdots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \sin \frac{x}{2^{n-1}}}{\sin \frac{x}{2^n}} \\ &= \cdots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

□

**例子 4.5.** 计算极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

**解答.** 我们首先使用裂项相消, 将表达式化简:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+2)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$

(针对上述最后一个等式, 考虑求和式中的第  $k$  ( $k = 2, \dots, n-1$ ) 个求和项, 我们有

$$\cdots + \underbrace{\frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}}_{\text{第 } k \text{ 个求和项}} + \frac{1}{2(k+1)} + \cdots,$$

可以看出第  $k$  个求和项中「中间」的负项, 总能同时消去第  $k-1$  个求和项中「最右边」的正项与第  $k+1$  个求和项中「最左边」的正项). 于是,

$$\text{原极限} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \right) = \frac{1}{4}.$$

□

**练习 4.6.** 计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1^3 + 2^3 + \cdots + k^3}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{1-n} (1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x}).$$

**答案.** (1) 2; (2)  $\frac{1}{n!}$ ;

□

**提示.** (1) 可以考虑恒等式 (此恒等式可通过数学归纳法证明):

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

(2) 注意到当  $x > 0$  时, 对任意的  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 有

$$1-x = (1-\sqrt[k]{x})(1+x^{\frac{1}{k}}+\cdots+x^{\frac{k-1}{k}}).$$

**4.4. 利用迫敛性及其推广形式** 以数列极限为例, 当计算  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  比较困难时, 可以考虑对  $x_n$  进行适当地放大和缩小, 例如找到  $\{y_n\}$  和  $\{z_n\}$  使得 (从某一项开始)

$$y_n \leq x_n \leq z_n.$$

如果此时  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$  和  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$  存在且相等 (假设极限值为  $A$ ), 则必有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$ .

**例子 4.7.** 计算数列极限:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$ .

**解答.** 根据对数不等式, 我们可构造如下放缩

$$\sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n+k} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{1}{n+k-1} \right).$$

利用对数函数的性质,

$$\text{上式最右端} = \ln \left( \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \cdots \cdot \frac{n+n}{n+n-1} \right) \equiv \ln 2,$$

并且当  $n \rightarrow +\infty$  时, 有

$$\text{上式最左端} = \ln \left( \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \cdots \cdot \frac{n+n+1}{n+n} \right) = \ln \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow \ln 2.$$

根据迫敛性可知原极限  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$ . □

**例子 4.8.** 计算函数极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]$ .

**解答.** 注意到当  $x \neq 0$  时成立不等式  $\frac{1}{x} - 1 < \left[ \frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$ , 于是

$$\begin{cases} 1-x < x \left[ \frac{1}{x} \right] \leq 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时;} \\ 1-x > x \left[ \frac{1}{x} \right] \geq 1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) = 1$  (这里需要首先考虑两个单侧极限), 根据迫敛性我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[ \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1,$$

从而原极限  $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right] = 1$ . □

**练习 4.9.** 计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n^k + 1)^{\frac{1}{k}}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}.$$

答案. (1) 1; (2) 0. □

**提示.** (1) 尝试使用不等式  $n^k < n^k + 1 < (n+1)^k$  构造放缩; (2) 对于分母中的每个因子  $2k$ , 根据算术-几何平均值不等式有:

$$2k = \frac{(2k-1) + (2k+1)}{2} > \sqrt{(2k-1)(2k+1)}.$$

**练习 4.10** (Cauchy 命题的一个推论). 设  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$  (有限数), 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

**提示.** 利用 Cauchy 命题和算术-几何-调和均值不等式.

当使用迫敛性计算极限时, 若通过放缩产生的新数列  $\{y_n\}$  和  $\{z_n\}$  并不收敛于同一极限, 但二者的极限值只相差一个任意小的常数, 则迫敛性仍然有效.

**例子 4.11.** 设正实数列  $\{a_n\}$  有上界, 且  $\sup\{a_n\} = A$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^n \right)^{\frac{1}{n}} = A.$$

**证明.** 由于  $\sup\{a_n\} = A$ , 则对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n_0 > 0$ , 使得

$$A - \varepsilon < a_{n_0}.$$

于是当  $n > n_0$  时, 由于  $\{a_n\}$  是正实数列, 则  $A > 0$  且成立

$$A - \varepsilon < a_{n_0} = (a_{n_0}^n)^{\frac{1}{n}} < \left( \sum_{k=1}^n a_k^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq (nA^n)^{\frac{1}{n}}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nA^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{nA^n} = A$ , 由极限的保不等式性, 我们有

$$A - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq A.$$

最后根据  $\varepsilon > 0$  的任意性, 我们有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n a_k^n \right)^{\frac{1}{n}} = A$ . □

## 专题五 函数连续性的证明与应用

**5.1. 函数连续性的证明** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 要证明  $f(x)$  在  $x_0 \in I$  处连续, 我们只需说明  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . 为此, 我们可以使用下述方法:

- (1) **利用定义:** 证明: 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时 (注意这里不必要求  $0 < |x - x_0|$ ) 成立  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ;
- (2) **利用单侧连续性:** 证明:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ;
- (3) **利用数列语言:** 函数  $f(x)$  在  $x_0 \in I$  处连续的充分必要条件是: 对于  $I$  中任意收敛于  $x_0$  的数列  $\{x_n\}$ , 成立  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$ ; (通常, 我们使用此命题的否定形式证明函数在某一点处的不连续性)

此外, 若要证明函数在某一区间上连续, 我们还可以

- (4) **利用四则运算法则和复合函数的连续性:** 连续函数与连续函数经过有限次四则运算 (除法运算要求作为分母的函数在区间内非零) 和复合运算 (外层函数的定义域必须包含内层函数的值域) 后的结果仍是连续的.

**例子 5.1.** 依次解答下列问题:

- (1) 设  $f(x), g(x)$  为区间  $I$  上的连续函数, 证明:

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

均为  $I$  上的连续函数;

- (2) 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续,  $c$  是一个大于零的常数, 证明:

$$H(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & -c \leq f(x) \leq c, \\ c, & f(x) > c. \end{cases}$$

**证明.** (1) 注意到

$$F(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}, \quad G(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

因为函数  $\varphi(x) = |x|$  在  $\mathbb{R}$  上连续 (见教材 [Encu] 习题 4.1 第 1(2) 题), 由复合函数的连续性可知  $|f(x) + g(x)|$  在  $I$  上连续, 再根据连续函数的四则运算法则即可证得  $F(x)$  和  $G(x)$  的连续性.

(2) 事实上, 对于任意的  $x \in I$ , 函数  $H(x)$  的取值即为  $c, -c, f(x)$  三者介于最大值与最小值的「中间」值. 因此, 我们有

$$\begin{aligned} H(x) &= c + (-c) + f(x) - \max\{c, -c, f(x)\} - \min\{c, -c, f(x)\} \\ &= f(x) - \max\{c, f(x)\} - \min\{-c, f(x)\}. \end{aligned}$$

根据 (1) 和连续函数的四则运算法则, 可知  $H(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续.  $\square$

**例子 5.2.** 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的函数, 且只存在第一类间断点, 定义

$$\tilde{f}(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:  $\tilde{f}(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续.

**证明.** 由于  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上只存在第一类间断点, 因此对于任意的  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 极限  $\lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$  均存在, 这意味着  $\tilde{f}(x)$  在整个实数轴  $\mathbb{R}$  上有定义.

由于  $\tilde{f}(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$ , 因此对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $t \in U^\circ(x_0, \delta)$  时, 成立不等式

$$\tilde{f}(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < \tilde{f}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

此时, 将  $t$  限制在去心邻域  $U^\circ(x_0, \delta)$  中, 对于任意的  $x \in U^\circ(x_0, \delta)$ , 令  $t \rightarrow x$  并取极限, 根据函数极限的保不等式性, 我们有

$$\tilde{f}(x_0) - \varepsilon < \tilde{f}(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \tilde{f}(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t) \leq \tilde{f}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \tilde{f}(x_0) + \varepsilon,$$

即  $\tilde{f}(x)$  在  $x = x_0$  处连续. 最后注意到  $x_0$  的任意性, 于是有  $\tilde{f}(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续.  $\square$

**练习 5.3.** 设  $f(x)$  为  $\mathbb{R}$  上的单调函数, 定义

$$\tilde{f}(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明:  $\tilde{f}(x)$  在  $\mathbb{R}$  上右连续.

**提示.** 首先需要使用单调有界原理证明  $\tilde{f}(x)$  在整个  $\mathbb{R}$  上有定义, 剩余的证明仿照例子 5.2 即可.

**5.2. 周期函数的最小正周期问题** 设  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的周期函数, 正实数  $T$  被称为函数  $f(x)$  的一个**正周期**, 如果

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

而  $f(x)$  所有周期中最小的正整数则被称为  $f(x)$  的**最小正周期**, 我们想知道的是: 任意一个周期函数是否都存在最小正周期?

上述问题的答案是否定的. 事实上, 考虑 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

因为一个有理数 (无理数) 加上一个有理数的结果依然是有理数 (无理数), 所以  $D(x)$  的正周期由所有正有理数构成. 然而, 对于正有理数集  $\mathbb{Q}^+$ , 我们不难验证

$$0 = \inf \mathbb{Q}^+ \notin \mathbb{Q}^+,$$

这意味着集合  $\mathbb{Q}^+$  没有最小值, 进而  $D(x)$  无最小正周期.

但是, 如果我们为周期函数  $f(x)$  赋予连续性条件, 那么下述命题将表明: 当  $f(x)$  非常数时, 其必定存在最小正周期.

**命题 5.4.** 证明：（非常数的）连续周期函数必有最小正周期.

**想法.** 设  $f(x)$  是一个（非常数的）连续周期函数，记  $A$  为由  $f(x)$  的所有正周期构成的集合，若  $f(x)$  有最小正周期  $T_0$ ，则必有

$$T_0 = \min A = \inf A.$$

反之，由于集合  $A$  有下界，若能证明  $A$  的下确界  $T_0$  仍是  $f(x)$  的一个正周期（即  $T_0 \in A$ ），则能说明  $f(x)$  有最小正周期.

**证明.** 设  $A$  是由  $f(x)$  的所有正周期构成的集合，由于 0 是该集合的一个下界，根据确界原理，其存在下确界（记为  $T_0$ ）.

首先证明  $T_0$  仍是  $f(x)$  的一个周期. 由于  $T_0 = \inf A$ ，故存在  $A$  中的数列  $\{T_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T_0$ （见教材 [Encu] 第 2.3 节例 3). 于是对于任意的  $x \in \mathbb{R}$ ， $\{x + T_n\}$  是一收敛至  $x + T_0$  的数列，进而根据  $f(x)$  的连续性与 Heine 定理，有

$$f(x + T_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = f(x),$$

这说明  $T_0$  是  $f(x)$  的一个周期.

其次证明  $T_0$  是正周期，即  $T_0 \in A$ . 由于  $\{T_n\}$  是正数列，且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T_0$ ，根据极限的保号性有  $T_0 \geq 0$ . 假设  $T_0 = 0$ ，则对于  $\mathbb{R}$  上任意一点  $x$ ，对于任意的  $n \in \mathbb{N}$ ，总存在与之对应的整数  $m_n$  使得

$$|x - m_n \cdot T_n| < T_n$$

（这里本质上是要找距离  $x$  最近的关于  $T_n$  的周期网点，即等于  $T_n$  整数倍的点，具体可见图 5.1). 现在考虑数列  $\{m_n \cdot T_n\}$ ，由于  $\{T_n\}$  是无穷小量，利用迫敛性可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n \cdot T_n = x.$$

此时，再次结合 Heine 定理与  $f(x)$  的连续性，我们有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(m_n \cdot T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(0) = f(0).$$

由  $x$  的任意性可知  $f(x) \equiv f(0)$ ，但这与  $f(x)$  非常数产生矛盾，由此推出  $T_0 > 0$ .  $\square$

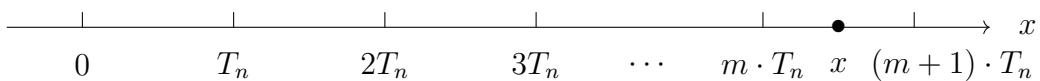


图 5.1:  $f(x)$  关于  $T_n$  的周期网点

**5.3. 闭区间上连续函数性质的应用** 对于闭区间  $[a, b]$  上的连续函数  $f(x)$ ，其在对应的闭区间上总是具备下述「整体」性质：

- (1) **有界性：**  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界；

(2) **最值性:**  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可以取到最大值与最小值, 即分别存在  $\xi, \eta \in [a, b]$  使得

$$f(\xi) = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}, \quad f(\eta) = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}.$$

(3) **介值性:**  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可以取到介于最大值与最小值之间的一切值, 即对于任意满足

$$\min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} < \mu < \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$$

的实数  $\mu$ , 总存在  $x_0 \in [a, b]$  使得  $f(x_0) = \mu$ .

(4) **零点存在性:** 这是介值性的直接推论. 如果  $f(a)$  与  $f(b)$  异号, 则存在  $x_0 \in [a, b]$  使得  $f(x_0) = 0$ .

**例子 5.5.** 设函数  $f(x)$  在整个  $\mathbb{R}$  上连续, 若  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ , 且  $f(x)$  在  $x = a$  处取得最小值. 证明: 若  $f(a) < a$ , 则  $F(x) = f(f(x))$  至少在两点处取得最小值.

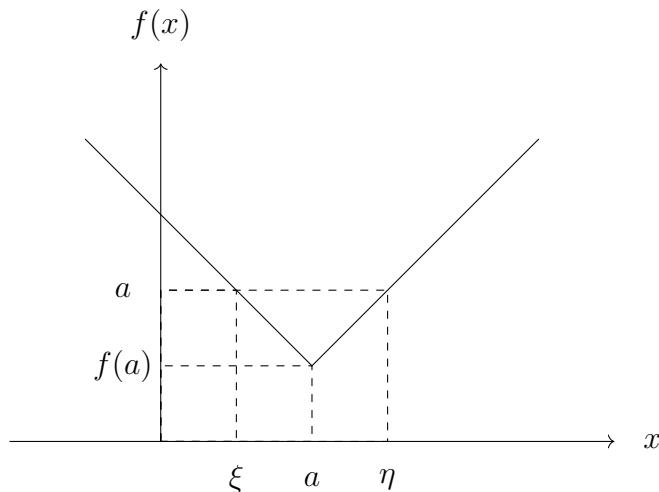


图 5.2: 函数  $f(x)$  的大致图像

**证明.** 由于  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ , 因此取  $E = 2|a|$ , 则存在公共的  $\Delta > 0$ , 使得对于任意的  $x > \Delta$  或  $x < -\Delta$  成立  $f(x) > 2|a|$ . 此时分别取

$$x_1 = \min\{-\Delta, a\} - 1, \quad x_2 = \max\{\Delta, a\} + 1,$$

则有  $f(x_1), f(x_2) > 2|a| > a$ . 由于  $f(x)$  分别在闭区间  $[x_1, a]$  和  $[a, x_2]$  上连续, 且  $f(a) < a$ , 则根据介值性: 分别存在  $\xi \in [x_1, a]$  和  $\eta \in [a, x_2]$  使得

$$f(\xi) = f(\eta) = a.$$

又注意到  $f(x)$  在  $x = a$  处取得最小值, 因此

$$f(f(\xi)) = f(f(\eta)) = f(a) = \min_{x \in \mathbb{R}} \{f(x)\},$$

这表明  $F(x)$  在  $\xi$  和  $\eta$  两点处取得最小值. □

**例子 5.6.** 设  $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ).

- (1) 证明: 方程  $f_n(x) = 1$  在  $(0, +\infty)$  上存在唯一的实根  $x_n$ ;
- (2) 证明数列  $\{x_n\}$  收敛, 并计算其极限.

**解答.** 注意到对于任意的正整数  $k$ , 幂函数  $x^n$  在  $[0, +\infty)$  上严格单调递增, 因此函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上亦严格单调递增.

(1) 由于  $f_n(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $f_n(0) = 0$  且  $f_n(1) = n > 1$ , 则根据闭区间上连续函数的介值性, 存在  $x_n \in (0, 1)$  使得  $f_n(x_n) = 1$ . 同时, 由  $f_n(x)$  的严格单调递增性可知, 这样的  $x_n$  是唯一的.

(2) 我们首先断言数列  $\{x_n\}$  是严格单调递减的, 事实上, 如果对于某个正整数  $n$  成立  $x_n \leq x_{n+1}$ , 则

$$1 = f_n(x_n) = \sum_{k=1}^n x_n^k < \sum_{k=1}^{n+1} x_{n+1}^k = f_{n+1}(x_{n+1}) = 1,$$

但这是不可能的. 因为  $\{x_n\}$  有下界 (0 是它的一个下界), 根据单调有界原理,  $\{x_n\}$  收敛. 现在设  $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ , 根据等比数列的前  $n$  项和公式, 我们有

$$1 = f_n(x_n) = \sum_{k=1}^n x_n^k = \frac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n} \implies 1 - x_n = x_n(1 - x_n^n).$$

此时, 如果  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n$  存在 (不妨设极限值为  $B$ ), 那么对上式两端取极限可得

$$1 - A = A(1 - B) \implies A = \frac{1}{2 - B}.$$

事实上, 由 (1) 的证明可知, 当  $n \geq 2$  时有  $x_n \in (0, 1)$ , 于是

$$0 < x_n^n = \frac{n \cdot x_n^n}{n} < \frac{x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow +\infty),$$

进而根据迫敛性有  $B = 0$ , 由此可以解得  $A = \frac{1}{2}$ . □

**练习 5.7.** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = f(1)$ . 证明: 对于任意的正整数  $n$ , 存在  $\xi_n \in [0, 1]$ , 使得

$$f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right) = f(\xi_n).$$

**提示.** 对于任意的  $n \in \mathbb{N}^+$ , 构造函数  $F(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ , 则有

$$F(0) + F\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + F\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0.$$

此时对于上述等式左边的每个  $F\left(\frac{k}{n}\right)$ , 或者全部为零, 或者存在两者异号.

## 专题六 函数的一致连续性

**6.1. 函数一致连续性的判断** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 要判断此函数在区间  $I$  上的一致连续性, 通常可以考虑下述方法:

- (1) **利用一致连续的定义:** 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 去找相应的  $\delta > 0$ , 使之满足: 对任意的  $x', x'' \in I$ , 当  $|x' - x''| < \delta$  时成立

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

- (2) **利用 Cantor 定理 (一致连续性定理):** 设  $\tilde{I}$  是某一包含  $I$  的闭区间, 若能证明函数  $f(x)$  在  $\tilde{I}$  上连续, 则由 Cantor 定理可知  $f(x)$  在  $\tilde{I}$  上一致连续, 进而有  $f(x)$  在  $I \subseteq \tilde{I}$  上一致连续.

- (3) **利用一致连续性的数列语言:** 函数  $f(x)$  在  $I$  上一致连续的充分必要条件是: 对于区间  $I$  中任意的两数列  $\{x'_n\}$  和  $\{x''_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n - x''_n) = 0$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x'_n) - f(x''_n)] = 0$$

(通常, 我们使用数列语言的否定形式证明非一致连续性).

**例子 6.1.** 证明: 函数  $f(x) = \sin \sqrt{x}$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续.

**证明.** 注意到对于任意的  $x', x'' \in [1, +\infty)$ , 我们有不等式:

$$|\sin \sqrt{x'} - \sin \sqrt{x''}| \leq |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leq |x' - x''|.$$

于是, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 我们一方面取  $\delta_1 = \varepsilon$ , 则对于任意的  $x', x'' \in [1, +\infty)$ , 当  $|x' - x''| < \delta_1$  时成立

$$|\sin \sqrt{x'} - \sin \sqrt{x''}| \leq |x' - x''| < \varepsilon.$$

而另一方面, 由于  $f(x)$  在闭区间  $[0, 2]$  上连续, 根据 Cantor 定理,  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上一致连续 (这里之所以考虑闭区间  $[0, 2]$  而非  $[0, 1]$  上的一致连续性, 是为了涵盖  $x'$  和  $x''$  分别位于区间  $[0, 1]$  和  $[1, +\infty)$  的情况). 因此, 对上述  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 使得对于任意的  $x', x'' \in [0, 2]$ , 当  $|x' - x''| < \delta_2$  时亦成立

$$|\sin \sqrt{x'} - \sin \sqrt{x''}| < \varepsilon.$$

因此, 对上述  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则对于任意的  $x', x'' \in [0, +\infty)$ , 当  $|x' - x''| < \delta$  时, 即有  $|\sin \sqrt{x'} - \sin \sqrt{x''}| < \varepsilon$ .  $\square$

**练习 6.2.** 证明: 函数  $f(x) = \cos \sqrt{x}$  在区间  $[0, +\infty)$  上一致连续.

**例子 6.3.** 设函数  $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \sin \frac{1}{x}$ , 证明:

- (1) 对于任意的  $a > 0$ ,  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续;

(2)  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上非一致连续.

**证明.** (1) 由于  $a > 0$ , 则对于任意的  $x', x'' \in [a, +\infty)$ , 我们有:

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= \left| \frac{x'+2}{x'+1} \sin \frac{1}{x'} - \frac{x''+2}{x''+1} \sin \frac{1}{x''} \right| \\ &= \left| \frac{x'+2}{x'+1} \sin \frac{1}{x'} - \frac{x'+2}{x'+1} \sin \frac{1}{x''} + \frac{x'+2}{x'+1} \sin \frac{1}{x''} - \frac{x''+2}{x''+1} \sin \frac{1}{x''} \right| \\ &\leq \frac{x'+2}{x'+1} \cdot \left| \sin \frac{1}{x'} - \sin \frac{1}{x''} \right| + \left| \frac{x'+2}{x'+1} - \frac{x''+2}{x''+1} \right| \cdot \left| \sin \frac{1}{x''} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| + \frac{|x' - x''|}{(1+x')(1+x'')} \\ &= |x' - x''| \cdot \left( \frac{2}{x' \cdot x''} + \frac{1}{(1+x')(1+x'')} \right) \leq \frac{3 \cdot |x' - x''|}{a^2}. \end{aligned}$$

于是, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{a^2 \varepsilon}{3}$ , 则对于任意的  $x', x'' \in [a, +\infty)$ , 当  $|x' - x''| < \delta$  时成立:

$$|f(x') - f(x'')| \leq \frac{3 \cdot |x' - x''|}{a^2} < \varepsilon.$$

根据定义,  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续.

(2) 分别取  $(0, +\infty)$  中的数列:

$$x'_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad x''_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n - x''_n) = 0$ , 但

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x'_n) - f(x''_n)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} - \left( \frac{1 + \pi + 4n\pi}{1 + \pi/2 + 2n\pi} \right) \sin(2n\pi + \pi/2) = -2.$$

因此  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上非一致连续. □

**练习 6.4.** 证明: 函数  $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$  在  $(-1, 0)$  和  $(0, 1)$  内分别是一致连续的, 但在  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  上非一致连续.

**提示.** 对于  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上的一致连续性, 可以考虑辅助函数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, 1], \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), & x = 0. \end{cases}$$

则一方面, 根据 Cantor 定理可知,  $\tilde{f}(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上一致连续; 而另一方面, 根据函数  $\tilde{f}$  的定义, 在开区间  $(0, 1)$  上恒成立  $f(x) = \tilde{f}(x)$ .

**6.2. 分步技巧在一致连续及其相关问题中的应用** 对于某些涉及一致连续性的问题, 往往需要使用分步技巧 (见专题一) 进行处理.

**例子 6.5.** 设函数  $f(x)$  在  $[c, +\infty)$  上连续, 函数  $\varphi(x)$  在  $[c, +\infty)$  上一致连续, 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0,$$

证明:  $f(x)$  在  $[c, +\infty)$  上一致连续.

**想法.** 注意到, 对于任意的  $x', x'' \in [c, +\infty)$ , 存在如下不等式:

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - \varphi(x')| + |\varphi(x') - \varphi(x'')| + |f(x'') - \varphi(x'')|.$$

因此, 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 我们需要设法找到相应的  $\delta > 0$ , 使得当  $|x' - x''| < \delta$  时, 此不等式右边的三个绝对值均小于  $\varepsilon/3$ .

**证明.** 首先, 因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0$ , 则对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\Delta > c$ , 使得对于一切的  $x > \Delta$  成立

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又因为  $\varphi(x)$  在  $(\Delta, +\infty)$  上一致连续, 故对上述  $\varepsilon > 0$ , 存在相应的  $\delta_1 > 0$ , 使得对于任意的  $x', x'' > \Delta$ , 当  $|x' - x''| < \delta_1$  时成立

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

这意味着, 对上述  $\varepsilon > 0$ , 当  $x', x'' > \Delta$  且  $|x' - x''| < \delta_1$  时成立

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - \varphi(x')| + |\varphi(x') - \varphi(x'')| + |f(x'') - \varphi(x'')| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

其次, 由于  $f(x)$  在闭区间  $[c, \Delta + 1]$  上连续, 由 Cantor 定理可知,  $f(x)$  在此区间上一致连续. 故对于上述  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta_2 > 0$ , 使得对于任意的  $x', x'' \in [c, \Delta + 1]$ , 当  $|x' - x''| < \delta_2$  时成立

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

因此, 对于最开始的  $\varepsilon > 0$ , 我们取  $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$ , 此时对于任意的  $x', x'' \in [c, +\infty)$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$ , 就有  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ .  $\square$

**练习 6.6.** 设函数  $f(x)$  在区间  $[c, +\infty)$  上连续, 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在  $[c, +\infty)$  上一致连续.

**提示.** 这题本质上是例子 6.5 的一个推论, 只需将其中的  $\varphi(x)$  换成常数函数即可. 当然, 读者也可以在不使用例子 6.5 的前提下直接证明, 具体地:

**第一步:** 利用极限的存在性和 Cauchy 收敛准则证明: 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在相应的  $\Delta > c$ , 使得对于一切  $x', x'' \in [\Delta, +\infty)$  成立  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$  (注意: 因为  $\Delta$  与  $\varepsilon$  的取法有关, 因此不能直接说  $f(x)$  在  $[\Delta, +\infty)$  上一致连续).

**第二步:** 利用 Cantor 定理证明:  $f(x)$  在有限闭区间  $[a, \Delta + 1]$  上一致连续.

**例子 6.7.** 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, +\infty)$  上一致连续, 且对于任意的  $x > 0$  有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + n) = A \text{ (有限数).}$$

证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

**想法.** 要证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则需要说明对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\Delta > 0$ , 使得对于一切的  $x > \Delta$  成立

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

由于对任意的  $x \in [0, 1]$ , 有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + n) = A$ . 因此对于上述的  $\varepsilon > 0$  以及区间  $[0, 1]$  上的每一个点  $x$ , 存在相应的  $N_x > 0$ , 使得当  $n > N_x$  时有

$$|f(x + n) - A| < \varepsilon.$$

理论上讲, 我们只需要取  $\Delta = \max\{N_x : x \in [0, 1]\}$  即可. 然而, **问题的关键在于**, 这里存在无穷多个  $N_x$ , 它们的最大值可能根本不存在! 因此, 我们只能从这些  $N_x$  中挑选有限个, 然后利用一致连续性过渡到所有的  $x \in [0, 1]$  上.

**证明.** 由于  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上一致连续, 因此对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得对于一切的  $x', x'' \in [0, +\infty)$ , 当  $|x' - x''| < \delta$  时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取正整数  $m > 1/\delta$ , 我们将闭区间  $[0, 1]$  划分成  $m$  等份, 并记对应的分点为  $x_k = k/m$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). 对于这里的每一个划分点  $x_k$ , 由于  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_k + n) = A$ , 故存在相应的正整数  $N_k > 0$ , 使得当  $n > N_k$  时, 有

$$|f(x_k + n) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在我们取  $\Delta = \max\{N_1, N_2, \dots, N_m\} + 1$ , 则当  $x > \Delta$  时, 记  $n = \lfloor x \rfloor \geq \Delta$ , 因为  $x - n \in [0, 1)$ , 故存在某个  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$  使得

$$|(x - n) - x_k| = |x - (x_k + n)| < \delta.$$

于是, 我们有

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f(x_k + n)| + |f(x_k + n) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ . □

## 参考文献

- [Chen] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析 (上册) [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [Encu] 华东师范大学数学系. 数学分析 (上册) [M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [Li] 李傅山. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [Pei] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [Xie] 谢惠民, 恽自求, 易法槐等. 数学分析习题课讲义 (上册) [M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.