华侨大学《数学分析（一）》习题课讲义

刘乙明

2025–2026 秋季学期（此讲义将随本学期习题课的进行不断更新）

目录

专题一 利用定义证明数列极限

1.1. 关于证明规范性的若干注记 作为数学专业本科阶段的基础课程之一，数学分析中的绝大多数概念（诸如确界、极限、连续等）从直观上理解并不困难．然而，**数学的大厦并不能仅仅建立在感觉直观上，它需要严格的公理与逻辑体系**．因此，保持证明过程的规范性是至关重要的．以下是一些关于证明规范性的注记：

(1) **证明的书写应当使用严格的数学语言，避免口语化**．可以在证明的书写过程中合理地使用诸如「$\forall$（任意的）」、「$\exists$（存在）」以及「$\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$（由 A 推出 B）」等符号表达逻辑关系．此外，大学阶段的数学证明往往涉及复杂的因果关系，因此应当**避免滥用**「$\because$」和「$\therefore$」符号．

(2) **证明的过程应当逻辑清晰，依据充分**．对于一些推导步骤，需注明其所依据的定理、命题或结论．同时，使用诸如「利用反证法」、「要证明 A，只需证 B」和「现证明：$\cdots$」等字段，可一定程度地提高证明过程的易读性．需要注意的是，在初学阶段，应当仔细思考证明中每一步的逻辑，**不要使用诸如「显然」、「易得」或「易证」等词语蒙混过关**．

例子 1.1. 设数列 $\{a_n\}$ 是无穷小量，$\{b_n\}$ 是有界数列．证明：$\{a_nb_n\}$ 是无穷小量．

极其不规范的证明． 因为 $\{a_n\}$ 是趋于 0 的，对其中的每一项 a_n 乘以有界数列 $\{b_n\}$ 的对应项后，其结果 $\{a_nb_n\}$ 依旧趋于 0，故结论成立． □

正确的证明. 因为 $\{b_n\}$ 有界，则存在 $M \geq 0$ 使得 $|b_n| \leq M$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立. 又因为 $\{a_n\}$ 是无穷小量，故对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

对一切 $n > N$ 成立. 因此，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

依定义，$\{a_n b_n\}$ 是无穷小量. □

1.2. 放缩技巧 · 若干常用的放缩不等式 在使用定义（$\varepsilon - N$ 语言）证明极限的过程中，我们不可避免地会遇到这样一个问题：对于任意的 $\varepsilon > 0$，直接通过不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

难以解出符合条件的 N. 此时，一个常用的技巧是对 $|a_n - a|$ 进行适当放大，我们需要找到一个数列 $\{A_n\}$ 使其（从某一项 N_0 开始）满足

$$|a_n - a| \leq A_n.$$

如果这时能通过不等式 $A_n < \varepsilon$ 解出相应的 N_1，使得当 $n > N_1$ 时成立 $A_n < \varepsilon$，那么只需令 $N = \max\{N_0, N_1\}$，当 $n > N$ 时，就有 $|a_n - a| \leq A_n < \varepsilon$.

例子 1.2. 设 $a > 1$，证明：$\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{a^n} = 0$.

证明.（对于 $\varepsilon > 0$，此时直接通过不等式 $\left|\dfrac{n^2}{a^n} - 0\right| < \varepsilon$ 解出符合条件的 N 是较为困难的，故需要对其适当地放大以化简），令 $a = 1 + h$，由 $a > 1$ 可知 $h > 0$. 根据二项式定理，当 $n \geq 3$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
a^n = (1+h)^n &= \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 h + \mathrm{C}_n^2 h^2 + \mathrm{C}_n^3 h^3 + \cdots \\
&= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 + \cdots \\
&\geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3,
\end{aligned}$$

其中，$h > 0$ 确保了上述最后一个不等式成立. 此外，注意到当 $n > 4$ 时，我们有如下不等关系（这一步的目的是尝试消去分母中的 $n-1$ 和 $n-2$，这些项的存在会导致 N 的求解变得困难）

$$0 < \frac{n}{n-1} < \frac{n}{n-2} < 2.$$

此时，可以做放缩

$$\left|\frac{n^2}{a^n} - 0\right| = \frac{n^2}{a^n} \leq \frac{n^2}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3} \leq \frac{24}{nh^3}.$$

现在对于任意的 $\varepsilon > 0$，令 $N = \max\left\{4, \left\lfloor \dfrac{24}{\varepsilon h^3} \right\rfloor + 1\right\}$，当 $n > N$ 时即有 $\left|\dfrac{n^2}{a^n}\right| < \varepsilon$. □

注记 1.3. 仿照例子 1.2 的方法，读者可以尝试证明：当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$ 对一切正整数 k 成立.

适当地使用一些不等式结论，能够极大地帮助我们构造有效放缩．以下列出的不等式在放缩技巧中是常用的，其证明可在标注的参考文献中找到．

(1) **Bernoulli（伯努利）不等式**：若 $h>-1$ 且 $n\in\mathbb{N}^+$，则成立不等式

$$(1+h)^n\geq 1+nh,$$

其中，当 $n>1$ 时等号成立当且仅当 $h=0$（见 [Xie] 命题 1.3.1）；

(2) **均值不等式**：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正实数，则成立

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geq\frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}.$$

特别地，等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$（见 [Xie] 命题 1.3.3）；

(3) **Cauchy-Schwarz（柯西–施瓦兹）不等式**：给定实数 $a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$，成立不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|\leq\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)}\cdot\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}.$$

特别地，等号成立当且仅当数组 $(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,\cdots,b_n)$ 成比例（见 [Xie] 命题 1.3.5）；

(4) 设 $0\leq t<\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sin t\leq t\leq\tan t,$$

且等号成立当且仅当 $t=0$（见 [Xie] 命题 1.3.6，可利用几何或导数证明）；

(5) **对数不等式**：设 $x>-1$，则成立不等式

$$\frac{x}{1+x}\leq\ln(1+x)\leq x,$$

且等号成立当且仅当 $x=0$（见 [Pei] 例 1.1.8，需要使用导数证明）.

例子 1.4. 利用定义证明极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明.（方法一：利用均值不等式）当 $n\geq 2$ 时，利用均值不等式，我们有如下放缩

$$1\leq\sqrt[n]{n}\leq\left(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot\cdots\cdot 1}_{n-2}\right)^{\frac{1}{n}}\leq\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

因此，对于任意的 $\varepsilon>0$，取 $N=\left\lfloor\dfrac{4}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1$（注：此时只要 $n\geq N$ 就有 $n\geq 2$，进而满足上述不等式放缩的条件），则对一切的 $n>N$ 有

$$0\leq\sqrt[n]{n}-1<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon.$$

（方法二：利用二项式定理）令 $A_n = \sqrt[n]{n} - 1$，则 $A_n \geq 0$．当 $n \geq 2$ 时，根据二项式定理，有

$$\begin{aligned} n = (A_n + 1)^n &= \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 A_n + \mathrm{C}_n^2 A_n^2 + \cdots \\ &= 1 + nA_n + \frac{n(n-1)}{2}A_n^2 + \cdots \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2}A_n^2. \end{aligned}$$

将上述不等式变形后，有 $A_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1}$．此时对于任意的 $\varepsilon > 0$，要说明 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$，只需说明

$$A_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

注意到当 $n \geq 2$ 时成立 $\dfrac{n}{n-1} \leq 2$，因此取 $N = \left\lfloor \dfrac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$，则有

$$A_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{n}{n-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

对一切 $n > N$ 成立． □

练习 1.5. 利用定义证明下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sin\frac{\pi}{n} = 0$;　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

1.3. 分步技巧 对于一些形式较为复杂的 $|a_n - a|$，往往难以直接构造有效的放缩将其化简．而分步技巧提供了另一种化简策略，我们可以利用绝对值不等式将 $|a_n - a|$ 拆成若干部分：

$$|a_n - a| \leq A_1(n) + \cdots + A_k(n).$$

如果此时能证明对上述每一部分 $A_i(n)$，总能找到相应的 N_i，使得 $A_i(n) < \dfrac{\varepsilon}{k}$ 对一切的 $n > N_i$ 成立．那么只需令 $N = \max\{N_1, \cdots, N_k\}$，当 $n > N$ 时就有

$$|a_n - a| \leq A_1(n) + \cdots + A_k(n) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

例子 1.6 (Cesàro（切萨罗）求和)**.** 设 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a$（有限数），证明：

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

证明．利用绝对值不等式，我们有放缩：

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}. \end{aligned}$$

由于 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = a$，故对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 > 0$，当 $n > N_1$ 时成立

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

固定上述 N_1，记 $M=\sum\limits_{i=1}^{N_1}|a_i-a|$ 并取 $N_2=\left\lfloor\dfrac{2M}{\varepsilon}\right\rfloor+1$，则有

$$\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

对一切的 $n>N_2$ 成立．此时取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时就有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| &\le \frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

□

练习 1.7. 设数列 $\{p_n\}$ $(p_n>0)$ 和 $\{a_n\}$ 分别满足：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}a_n=a.$$

证明：$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$

提示．注意到 $\{a_n\}$ 是有界数列，可设 $|a_n|\le M$，则

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}-a\right| \le \frac{1}{p_1+\cdots+p_n}\Big(&p_1|a_n-a|+\cdots+p_{n-N}|a_{N+1}-a|\\ &+p_{n-N+1}M+\cdots+p_nM\Big).\end{aligned}$$

练习 1.8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，证明：$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=0$.

提示．对于某个 $N_0>0$，设 $M=\max\{|a_i|:1\le i\le N_0\}$，则有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\right|\le\frac{MN_0(1+N_0)}{n(n+1)}+\frac{(N_0+1)\cdot|a_{N_0+1}|+\cdots+n\cdot|a_n|}{1+2+\cdots+n}.$$

参考文献

[Chen] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析（上册）[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[ENCU] 华东师范大学数学系. 数学分析（上册）[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[Pei] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[Xie] 谢惠民, 恽自求, 易法槐等. 数学分析习题课讲义（上册）[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.