华侨大学《数学分析（一）》习题课讲义

刘乙明

写于 2025 至 2026 学年秋季学期（已完结）

目录

第一讲 利用定义证明数列极限

1.1. 关于证明规范性的若干注记 作为数学专业本科阶段的基础课程之一，数学分析中的绝大多数概念（诸如确界、极限、连续等）从直观上理解并不困难．然而，**数学的大厦并不能仅仅建立在感觉直观上，它需要严格的公理与逻辑体系**．因此，保持证明过程的规范性是至关重要的．以下是一些关于证明规范性的注记：

(1) **证明的书写应当使用严格的数学语言，避免口语化**．可以在证明的书写过程中合理地使用诸如「$\forall$（任意的）」、「$\exists$（存在）」以及「$\mathrm{A} \Longrightarrow \mathrm{B}$（由 A 推出 B）」等符号表达逻辑关系．此外，大学阶段的数学证明往往涉及复杂的因果关系，因此应当**避免滥用**「$\because$」和「$\therefore$」符号．

(2) **证明的过程应当逻辑清晰，依据充分**．对于一些推导步骤，需注明其所依据的定理、命题或结论．同时，使用诸如「利用反证法」、「要证明 A，只需证 B」和「现证明：$\cdots$」等字段，可一定程度地提高证明过程的易读性．需要注意的是，在初学阶段，应当仔细思考证明中每一步的逻辑，**不要使用诸如「显然」、「易得」或「易证」等词语蒙混过关**．

例子 1.1. 设数列 $\{a_n\}$ 是无穷小量，$\{b_n\}$ 是有界数列．证明：$\{a_nb_n\}$ 是无穷小量．

极其不规范的证明. 因为 $\{a_n\}$ 是趋于 0 的，对其中的每一项 a_n 乘以有界数列 $\{b_n\}$ 的对应项后，其结果 $\{a_nb_n\}$ 依旧趋于 0，故结论成立． □

正确的证明. 因为 $\{b_n\}$ 有界，则存在 $M \geq 0$ 使得 $|b_n| \leq M$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立．又因为 $\{a_n\}$ 是无穷小量，故对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

对一切 $n > N$ 成立．因此，当 $n > N$ 时，有

$$|a_nb_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

依定义，$\{a_nb_n\}$ 是无穷小量． □

1.2. 放缩技巧 · 若干常用的放缩不等式 在使用定义（$\varepsilon - N$ 语言）证明极限的过程中，我们不可避免地会遇到这样一个问题：对于任意的 $\varepsilon > 0$，直接通过不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

难以解出符合条件的 N. 此时，一个常用的技巧是对 $|a_n - a|$ 进行适当放大，我们需要找到一个数列 $\{A_n\}$ 使其（从某一项 N_0 开始）满足

$$|a_n - a| \leq A_n.$$

如果这时能通过不等式 $A_n < \varepsilon$ 解出相应的 N_1，使得当 $n > N_1$ 时成立 $A_n < \varepsilon$，那么只需令 $N = \max\{N_0, N_1\}$，当 $n > N$ 时，就有 $|a_n - a| \leq A_n < \varepsilon$.

例子 1.2. 设 $a>1$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{a^n}=0$．

证明.（对于 $\varepsilon>0$，此时直接通过不等式 $\left|\dfrac{n^2}{a^n}-0\right|<\varepsilon$ 解出符合条件的 N 是较为困难的，故需要对其适当地放大以化简），令 $a=1+h$，由 $a>1$ 可知 $h>0$．根据二项式定理，当 $n\geq 3$ 时，我们有

$$\begin{aligned}a^n=(1+h)^n&=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1h+\mathrm{C}_n^2h^2+\mathrm{C}_n^3h^3+\cdots\\&=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3+\cdots\\&\geq\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3,\end{aligned}$$

其中，$h>0$ 确保了上述最后一个不等式成立．此外，注意到当 $n>4$ 时，我们有如下不等关系（这一步的目的是尝试消去分母中的 $n-1$ 和 $n-2$，这些项的存在会导致 N 的求解变得困难）

$$0<\frac{n}{n-1}<\frac{n}{n-2}<2.$$

此时，可以做放缩

$$\left|\frac{n^2}{a^n}-0\right|=\frac{n^2}{a^n}\leq\frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3}\leq\frac{24}{nh^3}.$$

现在对于任意的 $\varepsilon>0$，令 $N=\max\left\{4,\left\lfloor\dfrac{24}{\varepsilon h^3}\right\rfloor+1\right\}$，当 $n>N$ 时即有 $\left|\dfrac{n^2}{a^n}\right|<\varepsilon$． □

注记 1.3. 仿照例子 1.2 的方法，读者可以尝试证明：当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$ 对一切正整数 k 成立．

适当地使用一些不等式结论，能够极大地帮助我们构造有效放缩．以下列出的不等式在放缩技巧中是常用的，其证明可在标注的参考文献中找到．

(1) **Bernoulli 不等式**：若 $h>-1$ 且 $n\in\mathbb{N}^+$，则成立不等式

$$(1+h)^n\geq 1+nh,$$

其中，当 $n>1$ 时等号成立当且仅当 $h=0$（见 [谢] 命题 1.3.1）；

(2) **均值不等式**：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正实数，则成立

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geq\frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}.$$

特别地，等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$（见 [谢] 命题 1.3.3）；

(3) **Cauchy-Schwarz 不等式**：给定实数 $a_1,\cdots,a_n$ 和 $b_1,\cdots,b_n$，成立不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n a_ib_i\right|\leq\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)}\cdot\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}.$$

特别地，等号成立当且仅当数组 $(a_1,\cdots,a_n)$ 与 $(b_1,\cdots,b_n)$ 成比例（见 [谢] 命题 1.3.5）；

(4) 设 $0 \le t < \dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sin t \le t \le \tan t,$$

且等号成立当且仅当 $t = 0$（见 [谢] 命题 1.3.6，可利用几何或导数证明）；

(5) **对数不等式**：设 $x > -1$，则成立不等式

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x,$$

且等号成立当且仅当 $x = 0$（见 [裴] 例 1.1.8，需要使用导数证明）.

例子 1.4. 利用定义证明极限：$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

利用均值不等式证明. 当 $n \ge 2$ 时，利用均值不等式，我们有如下放缩

$$1 \le \sqrt[n]{n} \le \left(\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot\cdots\cdot 1}_{n-2}\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

因此，对于任意的 $\varepsilon > 0$，取 $N = \left\lfloor \dfrac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$（注：此时只要 $n \ge N$ 就有 $n \ge 2$，进而满足上述不等式放缩的条件），则对一切的 $n > N$ 有

$$0 \le \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

□

利用二项式定理证明. 令 $A_n = \sqrt[n]{n} - 1$，则 $A_n \ge 0$. 当 $n \ge 2$ 时，根据二项式定理有

$$\begin{aligned} n = (A_n+1)^n &= \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 A_n + \mathrm{C}_n^2 A_n^2 + \cdots \\ &= 1 + nA_n + \frac{n(n-1)}{2}A_n^2 + \cdots \\ &\ge \frac{n(n-1)}{2}A_n^2. \end{aligned}$$

将上述不等式变形后，有 $A_n^2 \le \dfrac{2}{n-1}$. 此时对于任意的 $\varepsilon > 0$，要说明 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$，只需说明

$$A_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

注意到当 $n \ge 2$ 时成立 $\dfrac{n}{n-1} \le 2$，因此取 $N = \left\lfloor \dfrac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$，则对任意的 $n > N$ 有

$$A_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2}{n}\cdot\frac{n}{n-1}} \le \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

□

练习 1.5. 利用定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$.

1.3. 分步技巧 对于一些形式较为复杂的 $|a_n-a|$，往往难以直接构造有效的放缩将其化简．而分步技巧提供了另一种化简策略，我们可以利用绝对值不等式将 $|a_n-a|$ 拆成若干部分：

$$|a_n-a|\le A_1(n)+\cdots+A_k(n).$$

如果此时能证明对上述每一部分 $A_i(n)$，总能找到相应的 N_i，使得 $A_i(n)<\dfrac{\varepsilon}{k}$ 对一切的 $n>N_i$ 成立．那么只需令 $N=\max\{N_1,\cdots,N_k\}$，当 $n>N$ 时就有

$$|a_n-a|\le A_1(n)+\cdots+A_k(n)<k\cdot\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon.$$

例子 1.6 (Cauchy 命题)**.** 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$（有限数），证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

证明. 利用绝对值不等式，我们有放缩：

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|&=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\&\le\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，故对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时成立

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定上述 N_1，记 $M=\sum\limits_{i=1}^{N_1}|a_i-a|$ 并取 $N_2=\left\lfloor\dfrac{2M}{\varepsilon}\right\rfloor+1$，则有

$$\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

对一切的 $n>N_2$ 成立．此时取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时就有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|&\le\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

□

练习 1.7. 设数列 $\{p_n\}$ $(p_n>0)$ 和 $\{a_n\}$ 分别满足：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0,\quad\lim_{n\to+\infty}a_n=a.$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$

提示. 注意到 $\{a_n\}$ 是有界数列，可设 $|a_n| \le M$，则

$$\left|\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}-a\right| \le \frac{1}{p_1+\cdots+p_n}\Big(p_1|a_n-a|+\cdots+p_{n-N}|a_{N+1}-a| \\ +p_{n-N+1}M+\cdots+p_nM\Big).$$

练习 1.8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=0$.

提示. 对于某个 $N_0>0$，设 $M=\max\{|a_i|:1\le i\le N_0\}$，则有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\right| \le \frac{MN_0(1+N_0)}{n(n+1)}+\frac{(N_0+1)\cdot|a_{N_0+1}|+\cdots+n\cdot|a_n|}{1+2+\cdots+n}.$$

第二讲　数列的收敛性 · 子列 · 递推数列的极限

2.1. 数列收敛或发散的判断　对于给定数列 $\{a_n\}$，要判断其是否收敛或发散，可以通过下述几种基本方法：

(1) **利用 Cauchy 收敛原理.** 根据 Cauchy 收敛原理，我们有

$$\begin{aligned}\{a_n\}\text{ 收敛 } &\iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\text{ 当 } m,n>N \text{ 时}, |a_m-a_n|<\varepsilon;\\ &\iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\text{ 当 } n>N \text{ 时}, |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon\ (\forall p\in\mathbb{N}).\end{aligned}$$

对应地，请读者自行写出数列 $\{a_n\}$ 发散的充分必要条件.

(2) **利用单调有界定理（数列收敛的充分条件）.** 若数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界（或者单调递减且有下界），则其必定收敛，且此时有（见课本 [华师大] 习题 2.3 第 8 题，请读者自行尝试证明）

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\sup_n\{a_n\}\ (\text{或者 }\lim_{n\to+\infty}a_n=\inf_n\{a_n\}).$$

例子 2.1. 设 $a_n=1+\dfrac12+\cdots+\dfrac1n-\ln n$，证明：$\{a_n\}$ 收敛（这一极限被称为 Euler 常数，通常记作 Γ）.

证明.（我们利用单调有界定理证明极限的存在性）根据对数不等式（见专题一），对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，成立

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac1n.$$

因此对任意的 $n\in\mathbb{N}$，有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0,$$

这说明 $\{a_n\}$ 是单调递减的. 另一方面，再次应用对数不等式，我们有

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac12+\cdots+\frac1n-\ln n>\ln 2+\ln\frac32+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n\\ &=\ln(n+1)-\ln n>0,\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 有下界. 综上，根据单调有界定理可知 $\{a_n\}$ 收敛. □

例子 2.2. 证明：数列 $\{\sin n\}$ 发散．

证明.（我们使用 Cauchy 收敛准则的否定形式证明发散）注意到对于任意的 $k\in\mathbb{Z}$，函数 $\sin x$ 满足

$$\begin{cases}\sin x\geq \dfrac{1}{2}, & x\in\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{6},2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right],\\ \sin x\leq -\dfrac{1}{2}, & x\in\left[(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{6},(2k+1)\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right],\end{cases}$$

并且上述提及的每一段区间长度均大于 1．因此取 $\varepsilon_0=1$，对于任意的 $N>0$，由实数的 Archimedes 性，存在 $k_0\in\mathbb{N}^+$ 使得 $2k_0\pi>N$．此时分别取正整数

$$n\in\left[2k_0\pi+\frac{\pi}{6},2k_0\pi+\frac{5\pi}{6}\right],\quad m\in\left[(2k_0+1)\pi+\frac{\pi}{6},(2k_0+1)\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$$

（这些区间的长度确保了 m 和 n 是可被取到的），则有 $m>n>2k_0\pi>N$ 且

$$|\sin m-\sin n|=\sin m-\sin n\geq 1=\varepsilon_0.$$

由 Cauchy 收敛原理的否定形式，可知数列 $\{\sin n\}$ 发散． □

练习 2.3. 证明：数列 $\{\tan n\}$ 发散．

2.2. 数列与子列的关系 在数学分析中，子列是一种十分重要的研究对象，通过分析子列的收敛性，能够更加具体地刻画数列本身的形态．

对于数列与子列的关系，以下几条性质是较为基本的，这些内容可在课本 [华师大] 中找到．同时，我们以习题的形式补充了一些额外的结论．

(1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\{a_n\}$ 的任意子列都收敛（见定理 2.8，**这条性质的否定形式可用于判断数列的发散**）．

(2) 任何数列都有单调子列（见第 2.3 节例 5）．

(3) **致密性定理**：在实数系中，有界数列必有收敛子列（见定理 2.10）．

(4) 若数列 $\{a_n\}$ 无上界（或无下界），则存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 是正无穷大量（或负无穷大量）（见第 2.3 节例 6）．

例子 2.4. 设 $\{a_n\}$ 是单调数列，$\{a_{n_k}\}$ 是它的一个子列．证明：如果 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=a$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$．

证明. 不妨设 $\{a_n\}$ 是单调递增的．由于 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=a$，则

(a) 对每一项 a_{n_k} 都有 $a_{n_k}\leq a$（否则，存在某个 k_0 使得 $a_{n_{k_0}}-a\overset{\text{记}}{=}\varepsilon_0>0$，此时由 $\{a_{n_k}\}$ 的单调递增性可知：对任意的 $k>k_0$，成立 $a_{n_k}-a\geq a_{n_{k_0}}-a=\varepsilon_0$，这与 $\{a_{n_k}\}$ 以 a 为极限矛盾）；

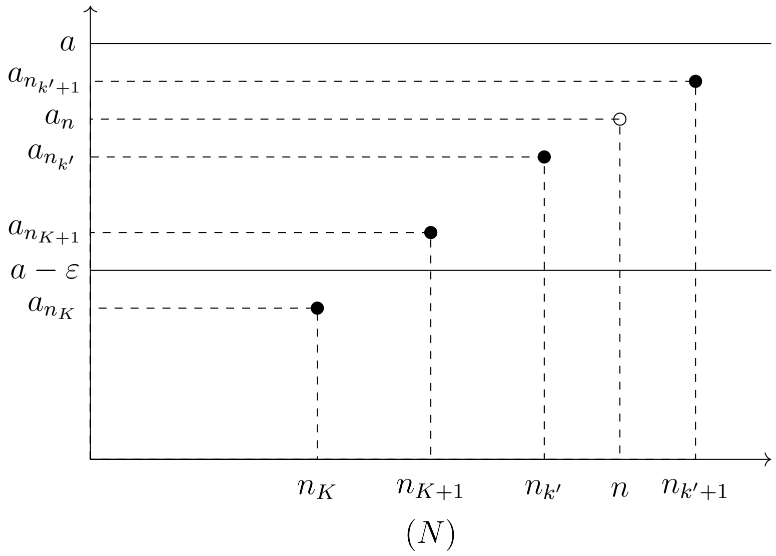

图 2.1: 当 $n > N$ 时，其必定位于在两个相邻的子列指标 $n_{k'}$ 与 $n_{k'+1}$ 之间

(b) 对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $K > 0$，当 $k > K$ 时有

$$0 \le |a_{n_k} - a| = a - a_{n_k} < \varepsilon.$$

现在取 $N = n_{K+1}$，由于对任意的 $n > N$，总存在 $k' > K$ 使得 $n_{k'} \le n \le n_{k'+1}$（见图 2.1），因此由 $\{a_n\}$ 的单调递增性，有

$$0 \le a - a_{n_{k'+1}} \le a - a_n \le a - a_{k'} < \varepsilon.$$

此时根据定义可知，$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. □

例子 2.5. 若 $\{x_n\}$ 无界，但不是无穷大量，则存在两个子列：其中一个子列收敛，而另一个子列是无穷大量.

证明. 我们首先构造 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列. 由于 $\{x_n\}$ 非无穷大量，故存在 $M > 0$，使得对于任意的 $N > 0$，总存在 $n > N$ 满足 $|x_n| \le M$. 于是依次地

- 对 $N_1 = 1$，取 $n_1 > N_1$ 使得 $|x_{n_1}| \le M$;
- 对 $N_2 = n_1$，取 $n_2 > N_2$ 使得 $|x_{n_2}| \le M$;
- ……,

由此得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$，其每一项均满足 $|x_{n_k}| \le M$. 根据致密性定理，存在 $\{x_{n_k}\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_{k_l}}\}$，这亦是 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列.

另一方面，由于 $\{x_n\}$ 无界，则对于任意的 $G > 0$，总存在 $n > 0$ 使得 $|x_n| > G$. 于是依次地通过

- 对 $G_1 = 1$，取 $m_1 > 0$ 使得 $|x_{m_1}| > G_1$;
- 对 $G_2 = 2$，取 $m_2 > m_1$ 使得 $|x_{m_2}| > G_2$（此处的 m_2 必定可以取到，否则将意味着对一切 $m > m_1$ 都有 $|x_m| \le G_2$，这与 $\{x_n\}$ 无界矛盾）;
- ……,

可得到 $\{x_n\}$ 的另一个子列 $\{x_{m_k}\}$. 我们需说明 $\{x_{m_k}\}$ 是无穷大量，事实上，对于任意的 $G>0$，取正整数 $K>G$，则当 $k>K$ 时，有

$$|x_{m_k}|>G_k=k>K>G.$$

□

练习 2.6. 给定数列 $\{a_n\}$ 和实数 a，证明：a 的任意邻域都包含数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项**当且仅当** a 是 $\{a_n\}$ 某个子列的极限（此时，我们称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的一个**极限点**）.

2.3. 根据递推公式计算数列极限 有些数列是在给出其第一项 a_1 后，使用递推公式

$$a_{n+1}=f(a_n),\qquad n\in\mathbb{N}^+$$

定义的，这里的 $f(a_n)$ 表示某个关于 a_n 的函数. 事实上，计算这类数列极限的方法有很多（参考 [裴] 第 1.5 节），但在本节我们只讨论单调有界定理的应用.

例子 2.7. 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_1=1$ 和递推关系

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n},\qquad n\in\mathbb{N}^+$$

给出. 判断 $\{x_n\}$ 的收敛性，若收敛则计算其极限.

想法. 通过递推关系计算 $\{x_n\}$ 的前若干项，我们有

$$x_1=1<x_3=\frac{3}{2}<x_5=\frac{8}{5}<\cdots<x_6=\frac{13}{8}<x_4=\frac{5}{3}<x_2=2.$$

于是，我们可以猜测 $\{x_n\}$ 是有界数列（具体地：$1\le x_n\le 2$），且由其奇数项构成的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 单调递增，由其偶数项构成的子列 $\{x_{2k}\}$ 单调递减. 根据单调有界定理，我们知道这两个子列是收敛的，此时若能证明它们收敛于同一极限 A，则必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$ **(请思考为什么?)**.

证明. 首先证明数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 事实上，利用数学归纳法，由于 $1\le x_1\le 2$，假设对于第 n 项有 $1\le x_n\le 2$，则根据递推关系可得

$$1\le x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n}\le 2,$$

这说明数列 $\{x_n\}$ 满足 $1\le x_n\le 2$. 此外，重复使用两次递推关系，我们有

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=\frac{x_n}{1+x_n}-\frac{x_{n-2}}{1+x_{n-2}}=\frac{x_n-x_{n-2}}{(1+x_n)(1+x_{n-2})},$$

这说明对于任意的 $n\ge 3$，$x_{n+2}-x_n$ 与 x_n-x_{n-2} 具有相同的符号，再结合

$$x_3-x_1=\frac{1}{2}>0,\quad x_4-x_2=-\frac{1}{3}<0$$

可知由 $\{x_n\}$ 的奇数项构成的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 是单调递增的，而由其偶数项构成的子列 $\{x_{2k}\}$ 是单调递减的. 根据单调有界定理，子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与 $\{x_{2k}\}$ 均收敛.

现在，设 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k-1} = A$，对递推公式

$$x_{2k+1} = 1 + \frac{1}{x_{2k}} = 1 + \frac{x_{2k-1}}{1 + x_{2k-1}}$$

取极限有 $A = 1 + \dfrac{A}{1+A}$，由此解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $A = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去，$\{x_n\}$ 的上下界确保了该数列不可能以此为极限）. 类似可以证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 因此，我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

注记 2.8. 考虑 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$，该数列是通过递推关系

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

生成的，其前 10 项为 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$. 由于

$$\frac{F_1}{F_0} = 1, \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{F_n/F_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

因此例子 2.7 中的数列第 n 项 x_n 本质上是 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ 的第 n 项相对于前一项的增长率. 例子 2.7 的结论表明，随着 n 的增大，Fibonacci 数列的增长率最终将收敛于「黄金比例」，即 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$.

练习 2.9. 给定两个正数 a 和 b，其满足 $0 < a < b$，分别令 $a_1 = a$，$b_1 = b$.

(1) 若按照递推公式

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

定义数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 证明：这两个数列收敛于同一个极限（该极限称为 a 和 b 的**算术几何平均**）.

(2) 若按照递推公式

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

定义数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 证明：这两个数列收敛于同一个极限（该极限称为 a 和 b 的**算术调和平均**）.

提示. 首先证明 $a \le a_n < b_n \le b$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立，随后考虑单调有界定理.

第三讲　函数极限的证明

3.1. 利用定义证明函数极限 设 $x_0 \in \mathbb{R}$，函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心领域 $U^\circ(x_0;\eta)$ 上有定义. 则 $f(x)$ 在 x_0 处的极限可以被定义为：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ (有限数)} \iff \left\{ \begin{array}{c} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(0 < \delta < \eta), \text{当 } x \in U^\circ(x_0;\delta) \text{ 时, 有} \\ |f(x) - A| < \varepsilon \end{array} \right\}.$$

其它情形的函数极限可以类似地被定义．值得注意的是，尽管函数极限与数列极限在定义上存在诸多类似之处，但在使用定义证明函数极限时，仍然存在着一些额外的需要注意之处：

(1) 对于 $x \to x_0$ 类型的极限，其刻画的是函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 中的状态，与 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义、取值如何均无关．

(2) 对于数列而言，其可以被视为定义在 $\mathbb{N}^+$ 上的函数．然而，函数的定义域不总是为 $\mathbb{R}$，因此在寻找合适的 δ 时，必须先确保 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0;\delta)$ 内有定义，其次再讨论于此邻域上是否成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$．

例子 3.1. 利用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}=1$．

证明. 注意到函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$，并且在其定义域内成立不等式

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right|=\left|\frac{\dfrac{7}{16x^2-9}-1}{\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}+1}\right|\le\left|\frac{7}{16x^2-9}-1\right|=\left|\frac{16x^2-16}{16x^2-9}\right|$$
$$=\frac{16\cdot|x-1|\cdot|x+1|}{|4x+3|\cdot|4x-3|}.$$

对于任意的 $\varepsilon>0$，我们逐步地寻找合适的 $\delta>0$．（首先，要保证 $f(x)$ 在 $U^\circ(1;\delta)$ 内有定义，需限制 $0<\delta<1/4$．其次，直接通过不等式

$$\frac{16\cdot|x-1|\cdot|x+1|}{|4x+3|\cdot|4x-3|}<\varepsilon$$

求解合适的 δ 是较为困难的，因此需要对上述不等式左端做适当放大，于是进一步地限制 $0<\delta<1/8$）．此时，取 $\delta=\min\{\varepsilon/32,1/8\}$，当 $x\in U^\circ(1,\delta)$ 时，有

$$\frac{16\cdot|x+1|\cdot|x-1|}{|4x+3|\cdot|4x-3|}\le\frac{16\cdot 3\cdot|x-1|}{3\cdot\dfrac{1}{2}}<\varepsilon.$$

依照定义，即有 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$． □

练习 3.2. 利用定义证明极限：$\lim\limits_{x\to 2^-}\sqrt{4-x^2}=0$．

上述关于函数极限的例子是比较直观的，我们总能依据其函数图像「猜测」出对应的极限值．然而，也有一些函数的极限并不容易直接被看出．

例子 3.3. 考虑 Riemann 函数：

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (\text{这里 } p,q \text{ 为互素整数, 且 } p>0),\\ 0, & x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

证明：对于任意的 $x_0\in[0,1]$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$（当 $x_0=0$ 或 1 时，考虑单侧极限）．

想法. 对于任意的 $\varepsilon>0$，观察 $R(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的函数图像，我们不难发现：满足 $R(x)\geq\varepsilon$ 的 x 至多只有有限个．因此，我们只需要找到足够小的 $\delta>0$，使得去心邻域 $U^\circ(x_0;\delta)$ 能刚好「避开」这有限个 x 即可．

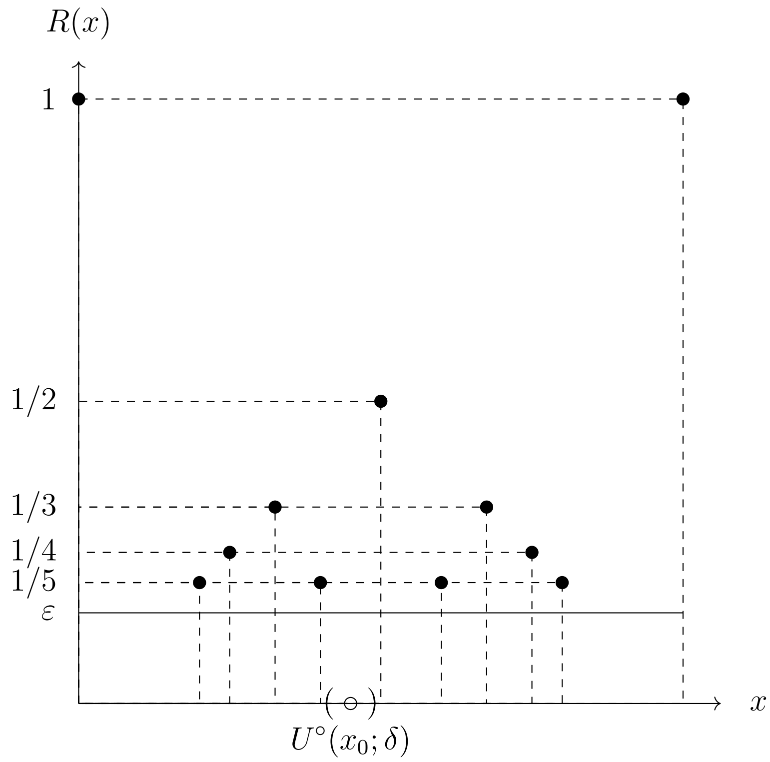

图 3.1: Riemann 函数在 $[0,1]$ 区间上的图像（只画出 $R(x)\geq\varepsilon$ 的部分）

证明. 我们只讨论 $x_0\in(0,1)$ 的情形，而 x_0 位于 0 和 1 的情形则交由读者．对于任意的 $\varepsilon>0$，由于当 x 为无理数时 $R(x)=0$，因此使得 $R(x)\geq\varepsilon$ 的 x 必然是有理数．将有理数 x 写成既约分数 q/p（这里 $p\in\mathbb{N}^+$）的形式，则有

$$\begin{aligned} R(x)=R\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{1}{p}\geq\varepsilon &\iff p\leq\frac{1}{\varepsilon} \\ &\iff p\in\left\{1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor\right\}. \end{aligned}$$

换言之，这些使得 $R(x)\geq\varepsilon$ 的有理数 x，其分母（表示成既约分数时）至多只有有限种可能的取值．因此，这些有理数 x 至多只有有限个（记它们作成的集合为 A）．

于是，对上述 $\varepsilon>0$，取

$$\delta=\min\left\{x_0,1-x_0,\min_{a\in A-\{x_0\}}\{|a-x_0|\}\right\},$$

则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立 $0\leq R(x)<\varepsilon$． □

3.2. 常数函数问题 在这一小节中，我们将通过函数所满足的特定函数方程以及函数本身的极限行为，证明其在定义域内的恒等性．

例子 3.4. 设函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 满足函数方程 $f(x^2)=f(x)$，且

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=f(1).$$

证明：$f(x)\equiv f(1)$ $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$.

证明. 利用反证法．若存在 $x_0\in\mathbb{R}^+$ 使得 $f(x_0)\neq f(1)$，取 $\varepsilon_0=|f(x_0)-f(1)|>0$，如果 $x_0>1$，则对于任意（大）的 $\Delta>0$，存在 $k>0$ 使得 $x_0^{2^k}>\Delta$，根据函数方程给出的递推关系，我们有

$$|f(x_0^{2^k})-f(1)|=|f(x_0^{2^{k-1}})-f(1)|=\cdots=|f(x_0)-f(1)|=\varepsilon_0.$$

这与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(1)$ 矛盾．类似地，可证明 $x_0<1$ 的情形． □

练习 3.5. 设 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 满足函数方程

$$f(2x)=f(x).$$

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，证明 $f(x)\equiv A$.

练习 3.6. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个周期函数，若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，证明 $f(x)\equiv A$.

3.3. 复合函数的极限问题 在函数极限的计算中，存在这样一个十分自然的问题：如果已知 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{y\to A} g(y)=B$（为了方便讨论，这里均假设 a、A 和 B 为有限数），那么是否成立

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=\lim_{y\to A} f(y)? \tag{3.1}$$

换言之，**在极限的计算中，什么情况下允许作变量代换?**

事实上，等式 (3.1) 的成立并非无条件的．例如：设 $a=0$，取函数 $g(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

通过计算可知 $A=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$，$\lim\limits_{y\to A} f(x)=1$．然而，考虑数列

$$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2n\pi}\right\} \quad 和 \quad \{y_n\}=\left\{\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right\},$$

它们均收敛于 $a=0$，但是 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(x_n))=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(y_n))=1$．由 Henie 定理（归结原理）可知，极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ 不存在，故此时等式 (3.1) 并不成立．

下述命题给出了等式 (3.1) 成立的两个充分条件，但它们都不是必要条件．

命题 3.7. 设 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$，$\lim\limits_{y\to A} f(y)=B$．如果此时满足下述条件之一：

(1) 存在 a 的某个去心邻域 $U^\circ(a;\eta)$，使得在该邻域内恒有 $g(x)\neq A$；

(2) $f(y)$ 在点 A 处连续，即：$B=\lim\limits_{y\to A}f(y)=f(A)$，

则有 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=\lim\limits_{y\to A}f(y)=B$.

证明. 对于任意的 $\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{y\to A}f(y)=B$，则存在 $\delta_1>0$，当 $0<|y-A|<\delta_1$ 时成立 $|f(y)-B|<\varepsilon$（注意：这里并不能保证当 $y=A$ 时成立 $|f(y)-B|<\varepsilon$）；又由于 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$，则对于上述找到的 $\delta_1>0$，存在 $\delta_2>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta_2$ 时成立 $|g(x)-A|<\delta_1$.

- 若条件 (1) 成立，则取 $\delta=\min\{\delta_2,\eta\}$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时有

$$0<|g(x)-A|<\delta_1 \implies |f(g(x))-B|<\varepsilon.$$

- 若条件 (2) 成立，则只需取 $\delta=\delta_2$，因为当 $g(x)=A$ 时即有 $f(g(x))=B$.

因此根据定义，当满足上述二条件之一时，均有 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=B$. □

此外，关于复合函数的极限问题，下面这个例子也是十分经典的.

例子 3.8. 证明：若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$. 但是，如果 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$ 存在，则不一定有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$.

证明. 若 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^3)$ 存在，不妨设其极限值为 A. 则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得当 $0<|t|<\delta_1$ 时，有

$$|f(t^3)-A|<\varepsilon.$$

此时取 $\delta=\delta_1^3$，当 $0<|x|<\delta$ 时，存在 t 使得 $0<|t|<\delta_1$ 且 $x=t^3$（这是结论成立的关键），此时有

$$0<|f(t^3)-A|=|f(x)-A|<\varepsilon.$$

若极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不一定存在. 例如：取 $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ 为符号函数，则有 $\lim\limits_{x\to 0}f(x^2)=1$，但

$$-1=\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)=1,$$

故极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在. □

第四讲　数列极限与函数极限的计算举例

在数学分析中，极限的计算问题往往种类繁多，且十分考验技巧性. 本专题仅列出一些**常用且读者目前所能理解**的方法. 而更多的方法，一方面依赖于数学分析后续课程的学习（例如 Taylor 展开，积分法)，另一方面需要读者通过自主练习不断积累.

4.1. 关于极限计算问题的两个注记 对于初学者而言，以下两点在极限的计算过程中是需要特别注意的.

(1) **关于变量代换**：假设我们需要计算极限 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$，所谓变量代换法，就是在已知 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$ 成立的基础上，令 $y=g(x)$，通过 $\lim\limits_{y\to A} f(y)$ 来计算原极限. **但需要注意的是，变量代换并非无条件的！**事实上，如命题 3.7 所述，只要满足下述二条件之一，就能确保上述变量代换的合理性：

   (a) 存在关于 a 的某一去心邻域 $U^\circ(a;\eta)$，使得在 $U^\circ(a;\eta)$ 中恒有 $g(x)\neq A$；

   (b) 函数 $f(y)$ 在 $y=A$ 处连续，即 $\lim\limits_{y\to A} f(y)=f(A)$.

(2) **幂指型函数极限的计算**：对于计算形如 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ 的极限（这里要求 $f(x)$ 在关于 a 的某个去心邻域内的取值恒正），常用的方法是先对 $f(x)^{g(x)}$ 作如下变形：

$$f(x)^{g(x)}=\exp\left(g(x)\ln f(x)\right).$$

如果 $\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ 存在（不妨设极限值为 A），由于指数函数 $\exp(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上每一点都连续，则可作变量代换 $y=g(x)\ln f(x)$，从而有

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}\exp\left(g(x)\ln f(x)\right)=\lim_{y\to A}\exp(y)=\exp A.$$

例子 4.1. 计算数列极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

不规范的解答过程. 由于

$$\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}}$$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}=e$ 以及 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，故原极限为值 $e^1=e$. □

规范的解答过程.（暂时不使用上述方法）注意到，当 $n\geq 1$ 时，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}+\frac{n}{n+1}}\leq\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}+1}.$$

利用特殊极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，并根据 Heine 定理（归结原则），我们有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}\cdot\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)=e\cdot 1=e.$$

结合 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$，由数列极限的迫敛性可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n=e$. □

4.2. 利用等价量代换 等价量替换是一种处理**乘除式极限**的技巧，适当的等价量替换能够化简函数的形式，进而方便极限的计算.

(1) **常用的等价量代换公式（请务必牢记！）**：当 $x \to 0$ 时，

$$\begin{aligned} & x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \\ & \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a}\ (a > 0) \sim \frac{(1+x)^b - 1}{b}\ (b \neq 0), \end{aligned}$$

以及

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

(2) **变量代换原则**：如果函数 $u(t)$ 在 $t \to a$ 时是无穷小量，则当 $t \to a$ 时**不一定**成立诸如 $u(t) \sim \sin u(t)$，$u(t) \sim \tan u(t)$ 等结论. 例如：若 $u(t) = t\sin\dfrac{1}{t}$，则可以证明当 $t \to 0$ 时 $u(t)$ 是无穷小量，但此时不成立 $u(t) \sim \sin u(t)$，这是因为极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin u(t)}{u(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(t\sin\dfrac{1}{t}\right)}{t\sin\dfrac{1}{t}}$$

根本不存在（注意：要定义函数在 $t \to 0$ 时的极限，必须确保该函数在关于 0 的某个去心邻域内有定义）. **然而，如果能保证 $u(x)$ 在某个去心邻域 $U(a;\delta)$ 内取值恒不为零，那么我们完全可以对 (1) 中的等价量关系作变量代换 $x = u(t)$**（其原理和参照命题 3.7）.

(3) **为什么不能对「加减型」极限贸然使用等价量替换？** 我们首先思考一下等价量的本质，根据定义：

$$\begin{aligned} \text{当 } x \to a \text{ 时, } f(x) \sim g(x) &\iff \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0 \\ &\iff \text{当 } x \to a \text{ 时, } f(x) - g(x) = o(g(x)). \end{aligned}$$

这意味着，当 $x \to a$ 时，若 $f(x) \sim g(x)$，则有

$$f(x) = g(x) + (f(x) - g(x)) = g(x) + o(g(x)).$$

因此对于课本 [华师大] 第 3.5 节例 2 注中的情形，其本质上应为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(x + o(x)) - (x + o(x))}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^3},$$

但我们根据此表达式不足以计算相应的极限. 事实上，如果考虑更加「精细」的等价量关系：

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \qquad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

则可以计算出正确结果.

例子 4.2. 设 $a,b>1$，计算极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

解答. 令 $f(x)=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$，根据 Heine 定理，当 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在时，我们有

$$\text{原极限}=\lim_{n\to+\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{x\to0}f(x).$$

注意到

$$f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\right)=\exp\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right)\right).$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}-1\right)=0$，且当 $x\neq0$ 时，有 $\dfrac{a^x+b^x}{2}\neq1$，因此当 $x\to0$ 时存在下述等价量关系

$$\ln\left(1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right)\sim\frac{a^x+b^x}{2}-1.$$

于是我们有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right)&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{(a^x-1)+(b^x-1)}{2x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x\ln a+x\ln b+o(x)}{2x}=\frac{1}{2}\ln ab,\end{aligned}$$

同时又注意到指数函数 $\exp(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上任意一点都连续（见 [华师大] 第 3.2 节例 4），因此由命题 3.7，我们可以作代换 $y=\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right)$，进而

$$\begin{aligned}\text{原极限}&=\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\exp\left(\frac{1}{x}\cdot\ln\left(1+\left(\frac{a^x+b^x}{2}-1\right)\right)\right)\\&=\lim_{y\to\frac{1}{2}\ln ab}\exp y=\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

□

练习 4.3. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3\sqrt[n]{2}\left(1-\cos\dfrac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{\ln(1+\sin x)}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

答案. (1) 1；(2) 1；(3) $e^{-\frac{1}{2}}$. □

4.3. 利用初等变形 要计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，有时候可以使用初等数学的方法将 x_n 的表达式化简.

例子 4.4. 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ $(x\neq0)$.

证明. 对分子分母同时乘以 $\sin\dfrac{x}{2^n}$，并反复利用二倍角公式，我们有

$$
\begin{aligned}
\text{原极限} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{\sin\frac{x}{2^n}}\\
&= \cdots = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.
\end{aligned}
$$

□

例子 4.5. 计算极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

解答. 我们首先使用裂项相消，将表达式化简：

$$
\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+2)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}\right)\\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}
\end{aligned}
$$

(针对上述最后一个等式，考虑求和式中的第 k $(k=2,\cdots,n-1)$ 个求和项，我们有

$$
\cdots+\frac{1}{2(k+1)}+\underbrace{\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}}_{\text{第 } k \text{ 个求和项}}+\frac{1}{2(k+1)}+\cdots,
$$

可以看出第 k 个求和项中「中间」的负项，总能**同时**消去第 $k-1$ 个求和项中「最右边」的正项与第 $k+1$ 个求和项中「最左边」的正项）. 于是，

$$
\text{原极限} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}\right) = \frac{1}{4}.
$$

□

练习 4.6. 计算下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1^3+2^3+\cdots+k^3}}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}(1-x)^{1-n}(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})$.

答案. (1) 2；(2) $\dfrac{1}{n!}$； □

提示. (1) 可以考虑恒等式（此恒等式可通过数学归纳法证明）：

$$
1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2,\qquad n\in\mathbb{N}^+.
$$

(2) 注意到当 $x>0$ 时，对任意的 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，有

$$
1-x=(1-\sqrt[k]{x})(1+x^{\frac{1}{k}}+\cdots+x^{\frac{k-1}{k}}).
$$

4.4. 利用迫敛性及其推广形式 以数列极限为例，当计算 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 比较困难时，可以考虑对 x_n 进行**适当地**放大和缩小，例如找到 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 使得（从某一项开始）

$$y_n \le x_n \le z_n.$$

如果此时 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ 存在且相等（假设极限值为 A），则必有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = A$.

例子 4.7. 计算数列极限：$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解答. 根据对数不等式，我们可构造如下放缩

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n+k}\right) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \le \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n+k-1}\right).$$

利用对数函数的性质，

$$\text{上式最右端} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n}{n+n-1}\right) \equiv \ln 2,$$

并且当 $n\to+\infty$ 时，有

$$\text{上式最左端} = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n+1}{n+n}\right) = \ln\frac{2n+1}{n+1} \to \ln 2.$$

根据迫敛性可知原极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \ln 2$. □

例子 4.8. 计算函数极限：$\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$.

解答. 注意到当 $x \ne 0$ 时成立不等式 $\frac{1}{x}-1 < \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \le \frac{1}{x}$，于是

$$\begin{cases} 1-x < x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \le 1, & \text{当 } x>0 \text{ 时;} \\ 1-x > x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \ge 1, & \text{当 } x<0 \text{ 时.} \end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x) = 1$（这里需要首先考虑两个单侧极限），根据迫敛性我们有

$$\lim_{x\to 0^+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = \lim_{x\to 0^-} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 1,$$

从而原极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 1$. □

练习 4.9. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(n^k+1)^{\frac{1}{k}}}$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2n}$.

答案. (1) 1；(2) 0. □

提示. (1) 尝试使用不等式 $n^k<n^k+1<(n+1)^k$ 构造放缩；(2) 对于分母中的每个因子 $2k$，根据算术–几何平均值不等式有：

$$2k=\frac{(2k-1)+(2k+1)}{2}>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}.$$

练习 4.10 (Cauchy 命题的一个推论). 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$ (有限数)，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

提示. 利用 Cauchy 命题和算术–几何–调和均值不等式.

当使用迫敛性计算极限时，若通过放缩产生的新数列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 并不收敛于同一极限，但二者的极限值只相差一个任意小的常数，则迫敛性仍然有效.

例子 4.11. 设正实数列 $\{a_n\}$ 有上界，且 $\sup\{a_n\}=A$，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}=A.$$

证明. 由于 $\sup\{a_n\}=A$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0>0$，使得

$$A-\varepsilon<a_{n_0}.$$

于是当 $n>n_0$ 时，由于 $\{a_n\}$ 是正实数列，则 $A>0$ 且成立

$$A-\varepsilon<a_{n_0}=\left(a_{n_0}^n\right)^{\frac{1}{n}}<\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}\le(nA^n)^{\frac{1}{n}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to+\infty}(nA^n)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}A=A$，由极限的**保不等式性**，我们有

$$A-\varepsilon\le\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}\le A.$$

最后根据 $\varepsilon>0$ 的任意性，我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^n\right)^{\frac{1}{n}}=A$. □

第五讲 函数连续性的证明与应用

5.1. 函数连续性的证明 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，要证明 $f(x)$ 在 $x_0\in I$ 处连续，我们只需说明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 为此，我们可以使用下述方法：

(1) **利用定义**：证明：对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时（注意这里不必要求 $0 < |x - x_0|$）成立 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$；

(2) **利用单侧连续性**：证明：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$；

(3) **利用数列语言**：函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in I$ 处连续的**充分必要条件**是：对于 I 中任意收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，成立 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$；（通常，我们使用此命题的否定形式证明函数在某一点处的不连续性）

此外，若要证明函数在某一区间上连续，我们还可以

(4) **利用四则运算法则和复合函数的连续性**：连续函数与连续函数经过有限次四则运算（除法运算要求作为分母的函数在区间内非零）和复合运算（外层函数的定义域必须包含内层函数的值域）后的结果仍是连续的.

例子 5.1. 依次解答下列问题：

(1) 设 $f(x), g(x)$ 为区间 I 上的连续函数，证明：

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

均为 I 上的连续函数；

(2) 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，c 是一个大于零的常数，证明：

$$H(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & -c \le f(x) \le c, \\ c, & f(x) > c. \end{cases}$$

证明. (1) 注意到

$$F(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}, \quad G(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

因为函数 $\varphi(x) = |x|$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续（见教材 [华师大] 习题 4.1 第 1(2) 题），由复合函数的连续性可知 $|f(x) + g(x)|$ 在 I 上连续，再根据连续函数的四则运算法则即可证得 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的连续性.

(2) 事实上，对于任意的 $x \in I$，函数 $H(x)$ 的取值即为 $c, -c, f(x)$ 三者中介于最大值与最小值的「中间」值. 因此，我们有

$$\begin{aligned} H(x) &= c + (-c) + f(x) - \max\{c, -c, f(x)\} - \min\{c, -c, f(x)\} \\ &= f(x) - \max\{c, f(x)\} - \min\{-c, f(x)\}. \end{aligned}$$

根据 (1) 和连续函数的四则运算法则，可知 $H(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. □

例子 5.2. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数，且只存在第一类间断点，定义

$$\tilde{f}(x)=\lim_{t\to x}f(t),\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

证明：$\tilde{f}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续.

证明. 由于 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上只存在第一类间断点，因此对于任意的 $x_0\in\mathbb{R}$，极限 $\lim\limits_{t\to x_0}f(t)$ 均存在，这意味着 $\tilde{f}(x)$ 在整个实数轴 $\mathbb{R}$ 上有定义.

由于 $\tilde{f}(x_0)=\lim\limits_{t\to x_0}f(t)$，因此对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $t\in U^\circ(x_0,\delta)$ 时，成立不等式

$$\tilde{f}(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}<f(t)<\tilde{f}(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

此时，将 t 限制在去心邻域 $U^\circ(x_0,\delta)$ 中，对于任意的 $x\in U^\circ(x_0,\delta)$，令 $t\to x$ 并取极限，根据函数极限的保不等式性，我们有

$$\tilde{f}(x_0)-\varepsilon<\tilde{f}(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\le\tilde{f}(x)=\lim_{t\to x}f(t)\le\tilde{f}(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}<\tilde{f}(x_0)+\varepsilon,$$

即 $\tilde{f}(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续. 最后注意到 x_0 的任意性，于是有 $\tilde{f}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续. □

练习 5.3. 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的单调函数，定义

$$\tilde{f}(x)=\lim_{t\to x^+}f(t),\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

证明：$\tilde{f}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上右连续.

提示. 首先需要使用单调有界原理证明 $\tilde{f}(x)$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上有定义，剩余的证明仿照例子 5.2 即可.

5.2. 周期函数的最小正周期问题 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，正实数 T 被称为函数 $f(x)$ 的一个**正周期**，如果

$$f(x+T)=f(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

而 $f(x)$ 所有周期中最小的正整数则被称为 $f(x)$ **的最小正周期**，我们想知道的是：**任意一个周期函数是否都存在最小正周期?**

上述问题的答案是否定的. 事实上，考虑 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

因为一个有理数（无理数）加上一个有理数的结果依然是有理数（无理数），所以 $D(x)$ 的正周期由所有正有理数构成. 然而，对于正有理数集 $\mathbb{Q}^+$，我们不难验证

$$0=\inf\mathbb{Q}^+\notin\mathbb{Q}^+,$$

这意味着集合 $\mathbb{Q}^+$ 没有最小值，进而 $D(x)$ 无最小正周期.

但是，如果我们为周期函数 $f(x)$ 赋予连续性条件，那么下述命题将表明：当 $f(x)$ 非常数时，其必定存在最小正周期.

命题 5.4. 证明:(非常数的)连续周期函数必有最小正周期.

想法. 设 $f(x)$ 是一个(非常数的)连续周期函数,记 A 为由 $f(x)$ 的所有正周期构成的集合,若 $f(x)$ 有最小正周期 T_0,则必有

$$T_0 = \min A = \inf A.$$

反之,由于集合 A 有下界,若能证明 A 的下确界 T_0 仍是 $f(x)$ 的一个正周期(即 $T_0 \in A$),则能说明 $f(x)$ 有最小正周期.

证明. 设 A 是由 $f(x)$ 的所有正周期构成的集合,由于 0 是该集合的一个下界,根据确界原理,其存在下确界(记为 T_0).

首先证明 T_0 仍是 $f(x)$ 的一个周期. 由于 $T_0 = \inf A$,故存在 A 中的数列 $\{T_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T_0$(见教材 [华师大] 第 2.3 节例 3). 于是对于任意的 $x \in \mathbb{R}$,$\{x + T_n\}$ 是一收敛至 $x + T_0$ 的数列,进而根据 $f(x)$ 的连续性与 Heine 定理,有

$$f(x+T_0) = \lim_{n\to+\infty} f(x+T_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x) = f(x),$$

这说明 T_0 是 $f(x)$ 的一个周期.

其次证明 T_0 是正周期,即 $T_0 \in A$. 由于 $\{T_n\}$ 是正数列,且 $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = T_0$,根据极限的保号性有 $T_0 \geq 0$. 假设 $T_0 = 0$,则对于 $\mathbb{R}$ 上任意一点 x,对于任意的 $n \in \mathbb{N}$,总存在与之对应的整数 m_n 使得

$$|x - m_n \cdot T_n| < T_n$$

(这里本质上是要找距离 x 最近的关于 T_n 的**周期网点**,即等于 T_n 整数倍的点,具体可见图 5.1). 现在考虑数列 $\{m_n \cdot T_n\}$,由于 $\{T_n\}$ 是无穷小量,利用迫敛性可知

$$\lim_{n\to+\infty} m_n \cdot T_n = x.$$

此时,再次结合 Heine 定理与 $f(x)$ 的连续性,我们有

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(m_n \cdot T_n) = \lim_{n\to+\infty} f(0) = f(0).$$

由 x 的任意性可知 $f(x) \equiv f(0)$,但这与 $f(x)$ 非常数产生矛盾,由此推出 $T_0 > 0$. □

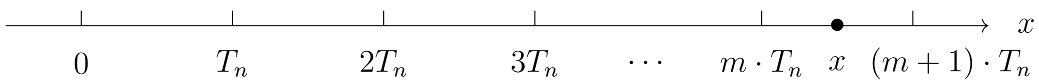

图 5.1: $f(x)$ 关于 T_n 的周期网点

5.3. 闭区间上连续函数性质的应用 对于闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$,其在对应的闭区间上总是具备下述「整体」性质:

(1) **有界性**: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界;

(2) **最值性**：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到最大值与最小值，即分别存在 $\xi,\eta\in[a,b]$ 使得

$$f(\xi)=\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\},\qquad f(\eta)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}.$$

(3) **介值性**：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到介于最大值与最小值之间的一切值，即对于任意满足

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}<\mu<\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$$

的实数 μ，总存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=\mu$.

(4) **零点存在性**：这是介值性的直接推论．如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=0$.

例子 5.5. 设函数 $f(x)$ 在整个 $\mathbb{R}$ 上连续，若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$，且 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得最小值．证明：若 $f(a)<a$，则 $F(x)=f(f(x))$ 至少在两点处取得最小值．

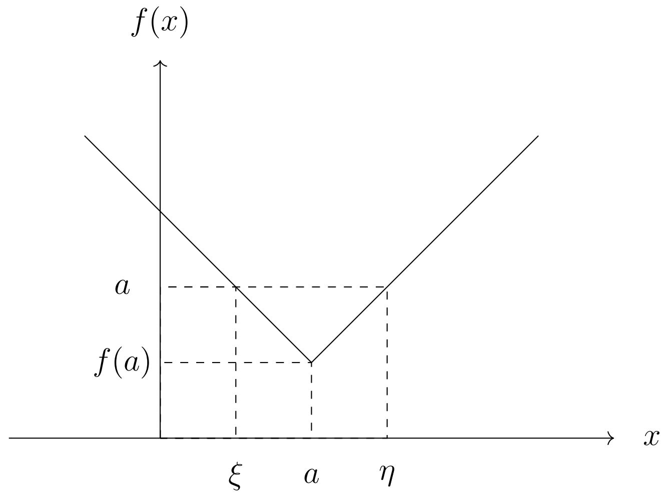

图 5.2: 函数 $f(x)$ 的大致图像

证明. 由于 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$，因此取 $E=2|a|$，则存在公共的 $\Delta>0$，使得对于任意的 $x>\Delta$ 或 $x<-\Delta$ 成立 $f(x)>2|a|$．此时分别取

$$x_1=\min\{-\Delta,a\}-1,\qquad x_2=\max\{\Delta,a\}+1,$$

则有 $f(x_1),f(x_2)>2|a|>a$．由于 $f(x)$ 分别在闭区间 $[x_1,a]$ 和 $[a,x_2]$ 上连续，且 $f(a)<a$，则根据介值性：分别存在 $\xi\in[x_1,a]$ 和 $\eta\in[a,x_2]$ 使得

$$f(\xi)=f(\eta)=a.$$

又注意到 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得最小值，因此

$$f(f(\xi))=f(f(\eta))=f(a)=\min_{x\in\mathbb{R}}\{f(x)\},$$

这表明 $F(x)$ 在 ξ 和 η 两点处取得最小值. $\square$

例子 5.6. 设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$ $(n = 2, 3, \cdots)$.

(1) 证明：方程 $f_n(x) = 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的实根 x_n；

(2) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并计算其极限.

解答. 注意到对于任意的正整数 k，幂函数 x^k 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调递增，因此函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上亦严格单调递增.

(1) 由于 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，$f_n(0) = 0$ 且 $f_n(1) = n > 1$，则根据闭区间上连续函数的介值性，存在 $x_n \in (0, 1)$ 使得 $f_n(x_n) = 1$. 同时，由 $f_n(x)$ 的严格单调递增性可知，这样的 x_n 是唯一的.

(2) 我们首先断言数列 $\{x_n\}$ 是严格单调递减的，事实上，如果对于某个正整数 n 成立 $x_n \leq x_{n+1}$，则

$$1 = f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_n^k < \sum_{k=1}^{n+1} x_{n+1}^k = f_{n+1}(x_{n+1}) = 1,$$

但这是不可能的. 因为 $\{x_n\}$ 有下界（0 是它的一个下界），根据单调有界原理，$\{x_n\}$ 收敛. 现在设 $A = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$，根据等比数列的前 n 项和公式，我们有

$$1 = f_n(x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_n^k = \frac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n} \implies 1 - x_n = x_n(1 - x_n^n).$$

此时，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n$ 存在（不妨设极限值为 B），那么对上式两端取极限可得

$$1 - A = A(1 - B) \implies A = \frac{1}{2 - B}.$$

事实上，由 (1) 的证明可知，当 $n \geq 2$ 时有 $x_n \in (0, 1)$，于是

$$0 < x_n^n = \frac{n \cdot x_n^n}{n} < \frac{x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n}{n} = \frac{1}{n} \to 0, \qquad (n \to +\infty),$$

进而根据迫敛性有 $B = 0$，由此可以解得 $A = \dfrac{1}{2}$. □

练习 5.7. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，且 $f(0) = f(1)$. 证明：对于任意的正整数 n，存在 $\xi_n \in [0, 1]$，使得

$$f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right) = f(\xi_n).$$

提示. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，构造函数 $F(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$，则有

$$F(0) + F\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + F\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0.$$

此时对于上述等式左边的每个 $F\left(\dfrac{k}{n}\right)$，或者全部为零，或者存在两者异号.

第六讲 函数的一致连续性

6.1. 函数一致连续性的判断 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，要判断此函数在区间 I 上的一致连续性，通常可以考虑下述方法：

(1) **利用一致连续的定义**：对于任意的 $\varepsilon > 0$，去找相应的 $\delta > 0$，使之满足：对任意的 $x', x'' \in I$，当 $|x' - x''| < \delta$ 时成立
$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

(2) **利用 Cantor 定理（一致连续性定理）**：设 $\tilde{I}$ 是某一包含 I 的**闭区间**，若能证明函数 $f(x)$ 在 $\tilde{I}$ 上连续，则由 Cantor 定理可知 $f(x)$ 在 $\tilde{I}$ 上一致连续，进而有 $f(x)$ 在 $I \subseteq \tilde{I}$ 上一致连续．

(3) **利用一致连续性的数列语言**：函数 $f(x)$ 在 I 上一致连续的**充分必要条件**是：对于区间 I 中任意的两数列 $\{x_n'\}$ 和 $\{x_n''\}$，若 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n' - x_n'') = 0$，则
$$\lim_{n\to+\infty}[f(x_n') - f(x_n'')] = 0$$
（通常，我们使用数列语言的否定形式证明非一致连续性）．

例子 6.1. 证明：函数 $f(x) = \sin\sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续．

证明. 注意到对于任意的 $x', x'' \in [1, +\infty)$，我们有不等式：
$$|\sin\sqrt{x'} - \sin\sqrt{x''}| \le |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \le |x' - x''|.$$
于是，对于任意的 $\varepsilon > 0$，我们一方面取 $\delta_1 = \varepsilon$，则对于任意的 $x', x'' \in [1, +\infty)$，当 $|x' - x''| < \delta_1$ 时成立
$$|\sin\sqrt{x'} - \sin\sqrt{x''}| \le |x' - x''| < \varepsilon.$$
而另一方面，由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上连续，根据 Cantor 定理，$f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上一致连续（这里之所以考虑闭区间 $[0, 2]$ 而非 $[0, 1]$ 上的一致连续性，是为了涵盖 x' 和 x'' 分别位于区间 $[0, 1]$ 和 $[1, +\infty)$ 的情况）．因此，对上述 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_2 > 0$，使得对于任意的 $x', x'' \in [0, 2]$，当 $|x' - x''| < \delta_2$ 时亦成立
$$|\sin\sqrt{x'} - \sin\sqrt{x''}| < \varepsilon.$$

因此，对上述 $\varepsilon > 0$，取 $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$，则对于任意的 $x', x'' \in [0, +\infty)$，当 $|x' - x''| < \delta$ 时，即有 $|\sin\sqrt{x'} - \sin\sqrt{x''}| < \varepsilon$． □

练习 6.2. 证明：函数 $f(x) = \cos\sqrt{x}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致连续．

例子 6.3. 设函数 $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}\sin\dfrac{1}{x}$，证明：

(1) 对于任意的 $a > 0$，$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续；

(2) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致连续.

证明. (1) 由于 $a>0$，则对于任意的 $x',x''\in[a,+\infty)$，我们有:

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')| &= \left|\frac{x'+2}{x'+1}\sin\frac{1}{x'}-\frac{x''+2}{x''+1}\sin\frac{1}{x''}\right| \\ &= \left|\frac{x'+2}{x'+1}\sin\frac{1}{x'}-\frac{x'+2}{x'+1}\sin\frac{1}{x''}+\frac{x'+2}{x'+1}\sin\frac{1}{x''}-\frac{x''+2}{x''+1}\sin\frac{1}{x''}\right| \\ &\le \frac{x'+2}{x'+1}\cdot\left|\sin\frac{1}{x'}-\sin\frac{1}{x''}\right|+\left|\frac{x'+2}{x'+1}-\frac{x''+2}{x''+1}\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x''}\right| \\ &\le 2\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|+\frac{|x'-x''|}{(1+x')(1+x'')} \\ &= |x'-x''|\cdot\left(\frac{2}{x'\cdot x''}+\frac{1}{(1+x')(1+x'')}\right)\le\frac{3\cdot|x'-x''|}{a^2}.\end{aligned}$$

于是，对于任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{a^2\varepsilon}{3}$，则对于任意的 $x',x''\in[a,+\infty)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时成立:

$$|f(x')-f(x'')|\le\frac{3\cdot|x'-x''|}{a^2}<\varepsilon.$$

根据定义，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

(2) 分别取 $(0,+\infty)$ 中的数列:

$$x_n'=\frac{1}{2n\pi},\qquad x_n''=\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n'-x_n'')=0$，但

$$\lim_{n\to+\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]=\lim_{n\to+\infty}-\left(\frac{1+\pi+4n\pi}{1+\pi/2+2n\pi}\right)\sin(2n\pi+\pi/2)=-2.$$

因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致连续. □

练习 6.4. 证明：函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 内分别是一致连续的，但在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 上非一致连续.

提示. 对于 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的一致连续性，可以考虑辅助函数

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,1],\\ \lim\limits_{x\to0^+}f(x), & x=0.\end{cases}$$

则一方面，根据 Cantor 定理可知，$\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上一致连续；而另一方面，根据函数 $\tilde{f}$ 的定义，在开区间 $(0,1)$ 上恒成立 $f(x)=\tilde{f}(x)$.

6.2. 分步技巧在一致连续及其相关问题中的应用 对于某些涉及一致连续性的问题，往往需要使用分步技巧（见专题一）进行处理.

例子 6.5. 设函数 $f(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上连续，函数 $\varphi(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上一致连续，若

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0,$$

证明：$f(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上一致连续．

想法. 注意到，对于任意的 $x',x''\in[c,+\infty)$，存在如下不等式：

$$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-\varphi(x')|+|\varphi(x')-\varphi(x'')|+|f(x'')-\varphi(x'')|.$$

因此，对于任意的 $\varepsilon>0$，我们需要设法找到相应的 $\delta>0$，使得当 $|x'-x''|<\delta$ 时，此不等式右边的三个绝对值均小于 $\varepsilon/3$．

证明. 首先，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\varphi(x)]=0$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta>c$，使得对于一切的 $x>\Delta$ 成立

$$|f(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又因为 $\varphi(x)$ 在 $(\Delta,+\infty)$ 上一致连续，故对上述 $\varepsilon>0$，存在相应的 $\delta_1>0$，使得对于任意的 $x',x''>\Delta$，当 $|x'-x''|<\delta_1$ 时成立

$$|\varphi(x')-\varphi(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

这意味着，对上述 $\varepsilon>0$，当 $x',x''>\Delta$ 且 $|x'-x''|<\delta_1$ 时成立

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&\le|f(x')-\varphi(x')|+|\varphi(x')-\varphi(x'')|+|f(x'')-\varphi(x'')|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

其次，由于 $f(x)$ 在闭区间 $[c,\Delta+1]$ 上连续，由 Cantor 定理可知，$f(x)$ 在此区间上一致连续．故对于上述 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_2>0$，使得对于任意的 $x',x''\in[c,\Delta+1]$，当 $|x'-x''|<\delta_2$ 时成立

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

因此，对于最开始的 $\varepsilon>0$，我们取 $\delta=\min\{1,\delta_1,\delta_2\}$，此时对于任意的 $x',x''\in[c,+\infty)$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$． □

练习 6.6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[c,+\infty)$ 上连续，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 $[c,+\infty)$ 上一致连续．

提示. 这题本质上是例子 6.5 的一个推论，只需将其中的 $\varphi(x)$ 换成常数函数即可．当然，读者也可以在不使用例子 6.5 的前提下直接证明，具体地：

> **第一步**：利用极限的存在性和 Cauchy 收敛准则证明：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在相应的 $\Delta>c$，使得对于一切 $x',x''\in[\Delta,+\infty)$ 成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$（注意：因为 Δ 与 ε 的取法有关，因此**不能直接说** $f(x)$ 在 $[\Delta,+\infty)$ 上一致连续）．
>
> **第二步**：利用 Cantor 定理证明：$f(x)$ 在有限闭区间 $[a,\Delta+1]$ 上一致连续．

例子 6.7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上一致连续，且对于任意的 $x>0$ 有

$$\lim_{n\to+\infty} f(x+n)=A\ (\text{有限数}).$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

想法. 要证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，则需要说明对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta>0$，使得对于一切的 $x>\Delta$ 成立

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

由于对任意的 $x\in[0,1]$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n)=A$. 因此对于上述的 $\varepsilon>0$ 以及区间 $[0,1]$ 上的每一个点 x，存在相应的 $N_x>0$，使得当 $n>N_x$ 时有

$$|f(x+n)-A|<\varepsilon.$$

理论上讲，我们只需要取 $\Delta=\max\{N_x : x\in[0,1]\}$ 即可. 然而，**问题的关键在于**，这里存在无穷多个 N_x，它们的最大值可能根本不存在！因此，我们只能从这些 N_x 中挑选有限个，然后利用一致连续性过渡到所有的 $x\in[0,1]$ 上.

证明. 由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，因此对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对于一切的 $x',x''\in[0,+\infty)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取正整数 $m>1/\delta$，我们将闭区间 $[0,1]$ 划分成 m 等份，并记对应的分点为 $x_k=k/m\ (k=1,2,\cdots,m)$. 对于这里的每一个划分点 x_k，由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_k+n)=A$，故存在相应的正整数 $N_k>0$，使得当 $n>N_k$ 时，有

$$|f(x_k+n)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

现在我们取 $\Delta=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_m\}+1$，则当 $x>\Delta$ 时，记 $n=\lfloor x\rfloor\geq\Delta$，因为 $x-n\in[0,1)$，故存在某个 $k\in\{1,2,\cdots,m\}$ 使得

$$|(x-n)-x_k|=|x-(x_k+n)|<\delta.$$

于是，我们有

$$|f(x)-A|\leq|f(x)-f(x_k+n)|+|f(x_k+n)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. □

第七讲 一元函数的导数

7.1. 利用定义证明函数在某一点处的可导性 设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \tag{7.1}$$

存在，那么我们称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处**可导**，并将此极限值称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数**. 因此，证明函数在某一点处的可导性就等价于证明极限 (7.1) 的存在性. 关于可导性的证明，我们需要给出如下注记：

注记 7.1. 假设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，若 $f(x)$ 在这一邻域内完全由**同一初等函数**定义，那么 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必可导，且它在这一点的导数可以通过初等函数的导数公式计算. 若 $f(x)$ 在这一邻域内由不同的初等函数表示（例如分段函数），则此时必须从导数的定义出发来验证其可导性.

例子 7.2. 设 $f(x)=|x|^3$，求 $f'(0)$ 和 $f''(0)$，并证明 $f'''(0)$ 不存在.

解答. 由于 $f(x)=|x|^3$ 并非初等函数（注意：绝对值函数**不是**基本初等函数），因此直接使用求导法则计算其导数是不方便的. 将 $f(x)$ 写成下述分段函数的形式：

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x^3, & x<0,\end{cases}$$

利用基本求导法则与求导公式，我们可以计算 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处的一、二阶导数：

$$f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x>0\\ -3x^2, & x<0\end{cases}, \qquad f''(x)=\begin{cases} 6x, & x>0\\ -6x, & x<0\end{cases}.$$

此时，根据导数的定义，我们有：

$$\begin{cases} f'(0)=\lim\limits_{h\to 0\pm}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0\pm}\dfrac{\pm h^3-0}{h}=0,\\ f''(0)=\lim\limits_{h\to 0\pm}\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0\pm}\dfrac{\pm 3h^2-0}{h}=0.\end{cases}$$

然而，

$$\lim_{h\to 0\pm}\frac{f''(h)-f''(0)}{h}=\lim_{h\to 0\pm}\frac{\pm 6h-0}{h}=\pm 6,$$

故 $f'''(0)$ 不存在. □

例子 7.3. 证明：Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases} \dfrac{q}{p}, & x=\dfrac{1}{p}\ (\text{这里 } p,q \text{ 为互素整数，且 } p>0),\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上处处不可导.

证明. 根据例子 3.3 可知，Riemann 函数 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 内的有理点处不连续，进而在这些点处不可导. 因此，现在只需说明 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 内的无理点处不可导即可.

设 $x_0 \in [0,1]$ 为无理点，取 $[0,1]$ 中一收敛于 x_0 的无理数列 $\{x_n\}$（这里要求每一项 $x_n \neq x_0$），则

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R(x_n)-R(x_0)}{x_n-x_0} = \lim_{n\to+\infty} \frac{0}{x_n-x_0} = 0.$$

又因为 x_0 是无理数，我们可以考虑它的无限不循环小数表示 $x_0 = 0.a_1a_2a_3\cdots$，截取它的前 n 位小数，并令 $x_n' = 0.a_1a_2\cdots a_n$，由此得到了 $[0,1]$ 中的收敛于 x_0 的有理数列 $\{x_n'\}$. 注意到 x_0 的小数表示中存在无穷多个 a_k 不为零，我们记其中一个非零项的指标为 N，则当 $n > N$ 时，有

$$R(x_n') = R(0.a_1a_2\cdots a_n) = R\left(\frac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n}\right) \geq \frac{1}{10^n},$$

进而有

$$\left|\frac{R(x_n')-R(x_0)}{x_n'-x_0}\right| = \frac{R(0.a_1a_2\cdots a_n)}{0.0\cdots 0a_{n+1}a_{n+2}\cdots} \geq 1,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{R(x_n')-R(x_0)}{x_n'-x_0} \neq 0$. 因此，根据 Heine 定理，极限 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{R(x_0+h)-R(x_0)}{h}$ 不存在，故 $R(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导. □

练习 7.4. 当 $n \in \mathbb{N}$ 满足什么条件时，函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(1) 在 $x = 0$ 处连续；

(2) 在 $x = 0$ 处可导；

(3) 在 $x = 0$ 处导函数连续.

答案. (1) $n \geq 1$；(2) $n \geq 2$；(3) $n \geq 3$. □

7.2. 函数可导性的应用 在这一小节中，我们将从函数的可导性条件出发，尝试证明一些相关的结论.

例子 7.5. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，若数列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 满足

$$\alpha_n < x_0 < \beta_n \quad 且 \quad \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = x_0.$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} = f'(x_0)$.

证明. 首先注意到，对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$，有

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} &= \frac{f(\beta_n)-f(x_0)+f(x_0)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n} \\ &= \frac{f(\beta_n)-f(x_0)}{\beta_n-x_0}\cdot\frac{\beta_n-x_0}{\beta_n-\alpha_n} + \frac{f(\alpha_n)-f(x_0)}{\alpha_n-x_0}\cdot\frac{x_0-\alpha_n}{\beta_n-\alpha_n}. \end{aligned}$$

由于 $\dfrac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n} + \dfrac{x_0 - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n} = 1$，如果记 $\lambda_n = \dfrac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}$，则 $1 - \lambda_n = \dfrac{x_0 - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n}$ 且

$$0 < \lambda_n < 1, \quad 0 < 1 - \lambda_n < 1.$$

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = x_0$，根据导数的定义，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在关于数列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 公共的 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，

$$\left|\frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon \quad \text{且} \quad \left|\frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} - f'(x_0)\right| < \varepsilon.$$

进而有，

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} - f'(x_0)\right| \\
=&\left|\lambda_n \cdot \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - \alpha_n} + (1 - \lambda_n) \cdot \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} - \lambda_n f'(x_0) - (1 - \lambda_n) f'(x_0)\right| \\
\le&\ \lambda_n \left|\frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} - f'(x_0)\right| + (1 - \lambda_n) \left|\frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} - f'(x_0)\right| \\
<&\ \lambda_n \cdot \varepsilon + (1 - \lambda_n) \cdot \varepsilon = \varepsilon,
\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0)$. □

练习 7.6. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上定义，且对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

若 $f'(0) = 1$，证明：对于任何 $x \in \mathbb{R}$，都有 $f'(x) = f(x)$.

提示. 根据恒等式 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$，我们有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} = f(x) \cdot \frac{f(h) - 1}{h}.$$

练习 7.7. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，证明：

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

7.3. 高阶导数计算的递推公式方法 对于某些函数的高阶导数，直接使用求导法则进行计算可能会相当繁琐. 在这种情况下，可以先计算其前几阶导数，并设法找到合适的递推等式，使得对两端同时求导后能够得到一般的递推关系.

例子 7.8. 设 $f(x) = \arcsin x$，计算 $f^{(n)}(0)$.

解答. 我们先计算 $f(x)$ 的一、二阶导数：

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)' = \frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}},$$

容易看出 $f(x)$ 的前两阶导数满足等式 $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=0$．对两端同时求 n 阶导数，利用 Leibniz 公式，我们有

$$\big((1-x^2)\cdot f^{(n+2)}-2nx\cdot f^{(n+1)}-n(n-1)\cdot f^{(n)}\big)-(x\cdot f^{(n+1)}+n\cdot f^{(n)})=0,$$

整理得

$$(1-x^2)\cdot f^{(n+2)}-(2n+1)x\cdot f^{(n+1)}-n^2\cdot f^{(n)}=0.$$

现在，我们将 $x=0$ 分别代入 $f'(x)$、$f''(x)$ 和上述等式，得到

$$f'(0)=1,\qquad f''(0)=0,\qquad f^{(n+2)}(0)=n^2f^{(n)}(0)\quad(n\in\mathbb{N}).$$

于是，我们有

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ [(2k-1)!!]^2, & n=2k+1,\end{cases}\qquad(k\in\mathbb{N}).$$

□

练习 7.9. 证明：Legendre 多项式

$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}[(x^2-1)^n]^{(n)},\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

满足方程：

$$(x^2-1)\cdot P_n''(x)+2x\cdot P_n'(x)-n(n+1)\cdot P_n(x)=0.$$

提示. 令 $u=(x^2-1)^n$，则 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^nn!}u^{(n)}$ 且 $u'\cdot(x^2-1)=u\cdot 2nx$.

第八讲 微分中值定理的应用

8.1. 方程根的存在性问题 判断某个函数在某一区间上的零点存在性，常用的方法有：

(1) **利用介值性**：闭区间上的连续函数具备介值性．此外，对于某一区间上的可导函数，其导函数亦具备介值性（Darboux 定理），具体地：若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，则 $f'(x)$ 可在 (a,b) 上取到介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的一切值．

(2) **利用 Rolle 定理**：Rolle 定理告诉我们，若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导且 $f(a)=f(b)$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$．

例子 8.1. 设 (a,b) 为有限或无穷区间，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，若

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to b^-}f(x)=A\ (\text{有限数或正负无穷}).$$

证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$．

证明. 我们只讨论 A 是有限数的情形，并将 A 为正负无穷的情形则留作习题.

若 $f(x) \equiv A$ 于区间 (a,b) 上成立，则 $f'(x)=0$，此时问题自明. 现在假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上非常数函数，即存在 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) \neq A$（这里不妨设 $f(x_0) > A$）. 因为

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = A,$$

此时分别存在 $x_1 \in (a,x_0)$ 和 $x_2 \in (x_0,b)$ 使得

$$f(x_1), f(x_2) < \frac{f(x_0)+A}{2} < f(x_0).$$

对上述 $\dfrac{f(x_0)+A}{2}$，由连续函数的介值性（注意：$f(x)$ 的可导性确保了其连续性），分别存在 $\eta_1 \in (x_1,x_0)$ 和 $\eta_2 \in (x_0,x_2)$ 使得 $f(\eta_1)=f(\eta_2)=\dfrac{f(x_0)+A}{2}$. 最后根据 Rolle 定理，可知存在 $\xi \in (\eta_1,\eta_2)$ 使得 $f'(\xi)=0$. □

例子 8.2. 证明：在 $(-1,1)$ 上至少存在三点使得 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}[(x^2-1)^2x]=0$.

证明. 设 $f(x)=(x^2-1)^2x$，则易知 $f(1)=f(-1)=f(0)=0$，于是根据 Rolle 定理，分别存在 $\eta_1 \in (-1,0)$ 和 $\eta_2 \in (0,1)$ 使得

$$f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0.$$

同时，注意到 $f'(x)=(x^2-1)^2+2x^2(x-1)$，故 $f'(-1)=f'(1)=0$，于是分别存在 $x_1 \in (-1,\eta_1)$、$x_2 \in (\eta_1,\eta_2)$ 和 $x_3 \in (\eta_2,1)$ 使得 $f''(x_1)=f''(x_2)=f''(x_3)=0$. □

练习 8.3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)<0, f(b)<0$. 证明：若存在 $c \in (a,b)$ 使得 $f(c)>0$，则存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

提示. 构造函数 $F(x)=e^x f(x)$ 并使用 Rolle 定理.

8.2. 中值公式的证明 在本节，我们将根据已知条件，使用 Rolle 定理和 Lagrange 中值定理推导新的中值公式.

例子 8.4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：对任意的 $x \in (a,b)$，存在 $\xi \in (a,b)$ 使得：

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

证明. 任意取定 $x \in (a,b)$，令 $K=\dfrac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$，此时问题归结为寻找 $\xi \in (a,b)$ 使其满足 $f''(\xi)=K$，为此我们构造函数

$$F(t)=f(t)-\frac{K}{2}(t-a)(t-b).$$

由于 $F(x)=F(a)=F(b)=0$，则根据 Rolle 定理，分别存在 $\eta_1 \in (a,x)$ 和 $\eta_2 \in (x,b)$ 使得

$$F'(\eta_1)=F'(\eta_2)=0.$$

此时再次使用 Rolle 定理，可知存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$ 使得

$$F''(\xi) = \left(f''(t) - K\right)\Big|_{t=\xi} = 0,$$

将 K 代回，即有 $f(x) = \dfrac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$. □

例子 8.5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，又设 $k_1, \cdots, k_n$ 为 n 个正实数．证明：在 $[0,1]$ 上存在 n 个互不相同的点 $x_1, \cdots, x_n$ 使得：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

想法. 为了方便，我们不妨考虑 $n=3$ 的情形．此时，我们需要找到 $[0,1]$ 上的三个不同的正实数 x_1, x_2, x_3 使得

$$\frac{k_1}{f'(x_1)} + \frac{k_2}{f'(x_2)} + \frac{k_3}{f'(x_3)} = k_1 + k_2 + k_3.$$

借助于 Lagrange 中值定理，我们只需要从 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间的图像中，找到 3 条斜率分别为 $f'(x_1), f'(x_2), f'(x_3)$ 的弦 L_1, L_2, L_3 即可．为此，我们不妨先将目标等式两端同时除以 $k_1+k_2+k_3$，则有

$$\frac{\lambda_1}{f'(x_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(x_2)} + \frac{\lambda_3}{f'(x_3)} = 1, \qquad \lambda_i = \frac{k_i}{k_1+k_2+k_3}\ (i=1,2,3).$$

如果把 λ_i 视作弦 L_i 在 y–轴上的投影长度，那么 $\lambda_i / f'(x_i)$ 则为 L_i 在 x–轴上的投影长度．因此**解题的关键在于**：找到 3 条不同的弦，使得它们在 y 轴上的投影长度分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$，而在 x–上的投影长度和为 1．

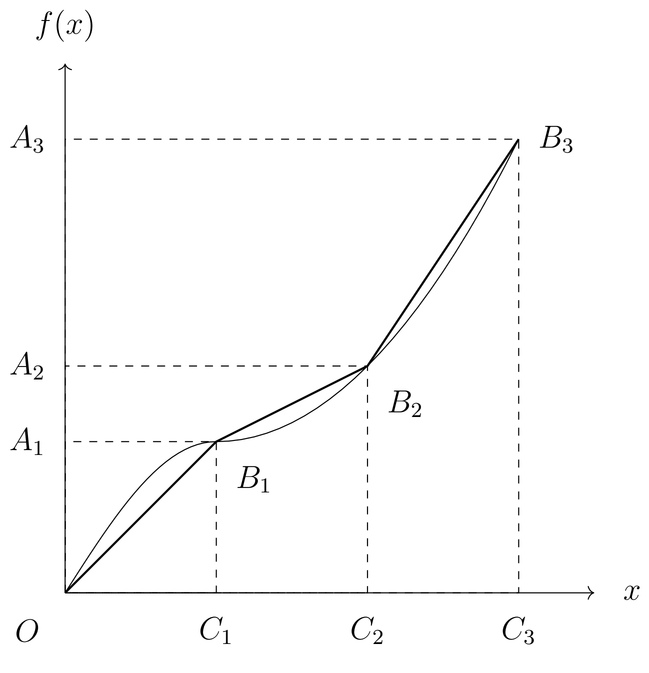

图 8.1: 例子 8.5 的图解（其中细线为函数图像，粗线为弦）

注意到 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$、$f(0)=0$ 且 $f(1)=1$，为了构造符合要求的弦，我们可以考虑 $[0,1]$ 上的划分

$$0=A_0<A_1<A_2<A_3=1, \qquad A_i-A_{i-1}=\lambda_i.$$

对于上述每个划分点 A_i，首先过 A_i 作水平线使之交 $f(x)$ 的函数图像于 B_i，再过 B_i 作垂直线使之交 x–轴于 C_i. 则 $L_1=OB_1, L_2=B_1B_2, L_3=B_2B_3$ 就是我们所要找的三条弦，它们在 y–轴上的投影长分别为 λ_i，而在 x–轴上的投影长之和为 1.

证明. 令 $\lambda_i=\dfrac{k_i}{k_1+k_2+\cdots+k_n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$0<\lambda_i<1 \quad 且 \quad \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1.$$

因为 $f(0)=0$ 且 $f(1)=1$，根据 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的连续性，则对于上述 λ_1，存在 $C_1\in(0,1)$ 使得 $f(C_1)=\lambda_1$；由于 $\lambda_1<\lambda_1+\lambda_2<1$，则存在 $C_2\in(C_1,1)$，使得 $f(C_2)=\lambda_1+\lambda_2$；$\cdots\cdots$. 如此往复，我们可以顺次找到 $C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}$，它们满足

$$0=C_0<C_1<C_2<\cdots<C_n=1 \quad 且 \quad f(C_i)=\sum_{j=1}^{i}\lambda_j.$$

应用 Lagrange 中值定理，存在 $x_i\in(C_{i-1},C_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，使得

$$f'(x_i)=\frac{f(C_i)-f(C_{i-1})}{C_i-C_{i-1}}=\frac{\lambda_i}{C_i-C_{i-1}},$$

进而有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}(C_i-C_{i-1})=C_n-C_0=1.$$

此时，将所有 $\lambda_i=\dfrac{k_i}{k_1+k_2+\cdots+k_n}$ 代入，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i/(k_1+\cdots+k_n)}{f'(x_i)}=1 \implies \sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

□

练习 8.6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上存在二阶导数，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

提示. 可以仿照例子 8.4 的做法，令

$$K=\frac{4}{(b-a)^2}\cdot\left(f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)\right),$$

然后考虑函数 $F(x)=f(x)-2f\left(\dfrac{x+a}{2}\right)+f(a)-\dfrac{(x-a)^2\cdot K}{4}$.

练习 8.7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可导．又设 $f(x)$ 不是线性函数，即此函数**不等于**

$$f(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

证明：若 $f(b)>f(a)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

提示. 考虑函数

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

由于 $f(x)$ 非线性函数，故必定存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $F(x_0)\neq 0$，此时可以分别在 $[a,x_0]$ 和 $[x_0,b]$ 上应用 Lagrange 中值定理．

8.3. 利用有限增量公式研究函数的性质 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，Lagrange 定理告诉我们：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

如果对上式两端同时乘以 $b-a$，那么我们得到了下述**有限增量公式**：

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

在本节，我们将使用此公式探究一些函数的性质．

例子 8.8. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$．若存在 $A>0$，使得在 $[0,+\infty)$ 上恒成立 $|f'(x)|\le A|f(x)|$，证明：在 $[0,+\infty)$ 上成立 $f(x)\equiv 0$．

证明. 因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $f(0)=0$，应用 Lagrange 中值定理，对于任意的 $x\in[0,+\infty)$，存在 $\xi_1\in(0,x)$ 使得

$$|f(x)|=|f(0)+f'(\xi_1)(x-0)|=|f'(\xi_1)|x\le A|f(\xi_1)|x.$$

如果此时将 x 限制于 $\left(0,\dfrac{1}{2A}\right]$，则有

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}\cdot|f(\xi_1)|,\qquad 0<\xi_1<x.$$

现在令 $x=\xi_1$ 并重复上述做法（注意到 ξ_1 依旧属于 $\left(0,\dfrac{1}{2A}\right]$），则可以找到 $\xi_2\in(0,\xi_1)$ 使之满足 $|f(\xi_1)|\le\dfrac{1}{2}|f(\xi_2)|$．如此重复下去，我们可以得到一列 $\{\xi_n\}$，其满足

$$|f(x)|\le\frac{1}{2}|f(\xi_1)|\le\frac{1}{4}|f(\xi_2)|\le\cdots\le\frac{1}{2^n}|f(\xi_n)|,$$

此处 $0<\xi_n<\cdots<\xi_2<\xi_1<x<\dfrac{1}{2A}$.

由 $f(x)$ 的连续性，可知 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{1}{2A}\right]$ 上有界，即存在 $M > 0$ 使得在此闭区间内成立 $|f(x)| \leq M$．这意味着

$$|f(x)| \leq \frac{M}{2^n}, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

此时由 $n \in \mathbb{N}^+$ 的任意性，可知在闭区间 $\left[0, \dfrac{1}{2A}\right]$ 上成立 $f(x) \equiv 0$．最后，利用数学归纳法（详细过程交由读者），可以证明 $f(x)$ 在一切闭区间

$$\left[\frac{i-1}{2A}, \frac{i}{2A}\right] \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

上成立 $f(x) \equiv 0$，进而在 $[0, +\infty)$ 上成立 $f(x) \equiv 0$． □

练习 8.9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 内满足 $|f''(x)| \leq M$，并在 $(0, a)$ 内取得最大值．证明：

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

提示. 考虑 $f'(x)$ 在 $f(x)$ 的最大值点处的有限增量公式．

练习 8.10. 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可微，且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$，证明：$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$．

第九讲　Taylor 公式 · 导函数的界估计

9.1. Taylor 展开的唯一性与最优性 多项式函数是一类形式较为简单的函数，在借助计算机的情况下，我们可以十分容易地计算多项式函数在某一点处的取值（因为这只涉及到加法、减法与乘法）．在实际应用中，为了计算函数 $f(x)$ 在某一点 x_0 处的取值，我们通常会寻找合适的多项式 $p(x)$ 逼近这一函数，然后通过计算此多项式在 $x = x_0$ 处的取值来实现对 $f(x_0)$ 的近似计算．

事实上，要使用多项式逼近一个函数，最理想的方法就是使用 Taylor 多项式．设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，且在 $x = x_0$ 处具备 n 阶导数，我们称

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \tag{9.1}$$

为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的 **Taylor 多项式**．根据 Taylor 定理，我们知道

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

上式被称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的 n 阶 **Taylor 公式**，而 $o((x - x_0)^n) = f(x) - T_n(x)$ 被称为此 Taylor 公式的 **Peano 余项**．我们将要证明，满足 Peano 余项的逼近多项式 $p(x)$ 是唯一的，并且采用 Taylor 多项式 $T_n(x)$ 逼近 $f(x)$ 是最优的！

在接下来的两个命题中，我们将总假设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义，并且在 x_0 处存在 n 阶导数．此外，为方便讨论，我们只考虑 $x_0 = 0$ 的情形（即 $f(x)$ 的 Maclaurin 展开）．

命题 9.1 (Taylor 展开的唯一性). 若实系数多项式 $G_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 满足

$$f(x) = G_n(x) + o(x^n),$$

则必有 $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$.

证明. 将等式 $f(x) = T_n(x) + o(x^n)$ 与 $f(x) = G_n(x) + o(x^n)$ 联立，我们有

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

令 $x \to 0$，并对上式两端同时取极限，我们有 $a_0 = f(0)$. 由此可以消去上式两端的 $a_0 x = f(0)x$，然后两端同时除以 x，有

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^{k-1} + o(x^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} + o(x^{n-1}).$$

再令 $x \to 0$ 并取极限，可得 $a_1 = f'(0)$. 重复上述步骤，即可证明目标结论. □

命题 9.2 (Taylor 展开的最优性). 设 $T_n(x)$ 是由式 (9.1) 定义的 Taylor 多项式，则对于任意与 $T_n(x)$ 不相等的且次数不超过 n 的多项式 $P(x)$，均存在 $\delta > 0$，使得

$$|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - P(x)|$$

在 $x \in U^\circ(0, \delta)$ 内成立.

证明. 由于 $P(x)$ 的次数不超过 n，因此我们可以将 $P(x)$ 写成下述形式

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

这里对各个 a_i 是否等于零**不做要求**. 因为 $P(x) \neq T_n(x)$，故存在某个 $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$ 使得

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad \cdots \quad a_{k-1} = \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}, \quad a_k \neq \frac{f^k(0)}{k!}.$$

此时根据带 Peano 余项的 Taylor 公式，我们有

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - T_n(x)}{f(x) - P(x)} &= \frac{f(x) - T_n(x)}{(f(x) - T_n(x)) + (T_n(x) - P(x))} \\
&= \frac{o(x^n)}{o(x^n) + \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \left(a_i - \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\right) x^i} = \frac{o(x^n)}{\left(a_k - \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\right) x^k + o(x^k)} \\
&= \frac{o(x^{n-k})}{\left(a_k - \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}\right) + o(1).} \qquad (x \to 0).
\end{aligned}$$

因为 $n \geq k$，故当 $x \to 0$ 时 $\dfrac{f(x) - T_n(x)}{f(x) - P(x)}$ 是一个无穷小量，进而存在 $\delta > 0$，使得对于任意的 $x \in U^\circ(0, \delta)$，有

$$\left| \frac{f(x) - T_n(x)}{f(x) - P(x)} \right| < 1,$$

即 $|f(x) - T_n(x)| < |f(x) - P(x)|$. □

9.2. 利用 Taylor 公式对导函数进行界估计 Taylor 公式的一个常见且重要的应用是对导函数进行界估计，对于这一类问题，常用的解答方法是：**根据已知条件选定 Taylor 展开的位置与阶数，然后通过对余项的有效控制来实现估计**.

例子 9.3. 设函数 $f(x)$ 有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x)=2$．证明：

$$\min_{x\in[0,1]} f''(x)\leq -16.$$

证明. 不妨设 $f(x)$ 在 $x_0\in[0,1]$ 处取得最大值 2，由于 $f(0)=f(1)\neq 2$，故可以进一步地设 $x_0\in(0,1)$．由于 x_0 为极大值点，根据 Fermat 引理，我们有 $f'(x_0)=0$.

考虑 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 展开，则分别存在 $\eta_1\in(0,x_0)$ 和 $\eta_2\in(x_0,1)$ 使得

$$\begin{cases} 0=f(0)=f(x_0)+\dfrac{1}{2}f''(\eta_1)(-x_0)^2=2+\dfrac{1}{2}f''(\eta_1)x_0^2, \\ 0=f(1)=f(x_0)+\dfrac{1}{2}f''(\eta_2)(1-x_0)^2=2+\dfrac{1}{2}f''(\eta_2)(1-x_0)^2. \end{cases}$$

于是我们有

$$\min_{x\in[0,1]} f''(x)\leq \min\{f''(\eta_1),f''(\eta_2)\}=\min\left\{-\frac{4}{x_0^2},-\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\}.$$

现在，我们尝试比较 $-\dfrac{4}{x_0^2}$ 和 $-\dfrac{4}{(1-x_0)^2}$：当 $x_0\in[0,1/2]$ 时，

$$\min\left\{-\frac{4}{x_0^2},-\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\}=-\frac{4}{(x_0)^2}\leq -16;$$

而当 $x_0\in[1/2,1]$ 时，有

$$\min\left\{-\frac{4}{x_0^2},-\frac{4}{(1-x_0)^2}\right\}=-\frac{4}{(1-x_0)^2}\leq -16.$$

综上可知 $\min\limits_{x\in[0,1]} f''(x_0)\leq -16$. □

练习 9.4. 设函数 $f(x)$ 有二阶导数，且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-1$．证明：

$$\max_{x\in[0,1]} f''(x)\geq 8.$$

例子 9.5. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且满足下述条件之一：

(a) $f'(a)=f'(b)=0$;

(b) $f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$.

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq \dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

证明. 我们只证明条件 (a)，条件 (b) 的情形与 (a) 类似，留给读者作为练习. 我们分别考虑 $f(x)$ 在 $x=a$ 和 $x=b$ 处的 Taylor 展开:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f(a) + \dfrac{f''(\eta_1)}{2}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2, \\ f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = f(b) + \dfrac{f''(\eta_2)}{2}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2, \end{cases}$$

其中 $\eta_1 \in \left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$，$\eta_2 \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$. 用上述第二个式子减去第一个式子，可得

$$f(b) - f(a) + \frac{(b-a)^2}{8}(f''(\eta_2) - f''(\eta_1)) = 0.$$

于是

$$\frac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2} = \frac{|f''(\eta_2) - f''(\eta_1)|}{2} \le \frac{|f''(\eta_1)| + |f''(\eta_2)|}{2} \le |f''(\xi)|,$$

其中，此处的 ξ 之取法如下

$$\xi = \begin{cases} \eta_1, & |f''(\eta_1)| \ge |f''(\eta_2)|, \\ \eta_2, & \text{其它}. \end{cases}$$

□

练习 9.6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在二阶导数，且存在 $M>0$ 使得

$$|f''(x)| \le M, \qquad 0 \le x \le 1.$$

证明: 若 $f(0)=f(1)$，则 $|f'(x)| \le M/2$ $(0 \le x \le 1)$；特别地，当 $f(0) = f(1/2) = f(1)$ 时，严格不等号成立.

提示. 对于「$\le$」的证明，可以分别考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 和 $x=1$ 处的 Taylor 展开；而对于「$<$」的证明，只需分别在区间 $[0,1/2]$ 和 $[1/2,1]$ 上考虑端点处的 Taylor 展开.

例子 9.7. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上存在二阶导数. 且 $|f''(x)| \ge m > 0$（m 为常数），又 $f(a)=f(b)=0$. 证明:

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) \ge \frac{m(b-a)^2}{8}.$$

证明. 我们首先断言 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒等于常数，否则

$$f(x) \equiv c \implies f'(x) \equiv 0 \implies f''(x) \equiv 0, \qquad x \in (a,b),$$

这与 $|f''(x)| \ge m > 0$ 矛盾. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取到最大值和最小值，且最大值和最小值中至少有一个不为零，即存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得

$$|f(x_0)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| > 0,$$

同时根据 Fermat 引理，我们有 $f'(x_0)=0$.

现在考虑 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 展开：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2,$$

其中 ξ 介于 x_0 与 x 之间.

(i) 若 $x_0<\dfrac{a+b}{2}$，则取 $x=b$，我们有

$$0=f(b)=f(x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(b-x_0)^2 \implies -f(x_0)=\frac{f''(\xi)}{2}(b-x_0)^2.$$

对等式两端取绝对值，则可得到不等式估计

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|=|f(x_0)|=\frac{|f''(\xi)|}{2}(b-x_0)^2\geq\frac{m}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{m(b-a)^2}{8}.$$

(ii) 若 $x_0\geq\dfrac{a+b}{2}$，则取 $x=a$，通过与 (i) 类似的讨论，可证得

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)|\geq\frac{m(b-a)^2}{8}.$$

□

例子 9.8. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在二阶导数，定义符号

$$M_k=\sup\{f^{(k)}(x):x\in\mathbb{R}\},\qquad k=0,1,2.$$

证明：当 M_0 和 M_2 是有限数时，M_1 也是有限数且满足不等式 $M_1^2\leq 2M_0M_2$.

证明. 对于任意的 $x\in\mathbb{R}$，考虑 $f(x)$ 在此处带 Lagrange 余项的 Taylor 展开，则对于任意的 $h>0$，我们有

$$\begin{cases} f(x-h)=f(x)-f'(x)h+\dfrac{f''(\eta_1)}{2}h^2,\\ f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\dfrac{f''(\eta_2)}{2}h^2,\end{cases}$$

其中 $x-h<\eta_1<x<\eta_2<x+h$. 两式相减并适当移项，得

$$2f'(x)h=f(x+h)-f(x-h)-\frac{h^2}{2}(f''(\eta_1)-f''(\eta_2)).$$

对上式两端取绝对值，我们得到估计

$$\begin{aligned}2|f'(x)|h&\leq|f(x+h)|+|f(x-h)|+\frac{h^2}{2}|f''(\eta_1)|+|f''(\eta_2)|\\&\leq 2M_0+h^2M_2,\qquad h>0.\end{aligned}$$

即不等式 $M_2h^2-2|f'(x)|h+2M_0\geq 0$ 对于一切的 $h\in\mathbb{R}$ 和 $x\in\mathbb{R}$ 成立（注意：当 $h\leq 0$ 时，此不等式自动成立）. 这意味着，对于任意的 $x\in\mathbb{R}$，判别式

$$4|f'(x)|^2-8M_0M_2\leq 0,$$

即 $|f'(x)|^2\leq 2M_0M_2$ 对一切 $x\in\mathbb{R}$ 成立. 此时，只需对此不等式左端取上确界，即可得到 $M_1^2\leq 2M_0M_2$. □

第十讲 导数的应用举例

10.1. 极值问题 我们称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得**极大值（或极小值）**，如果在 x_0 的某一邻域内成立 $f(x)\le f(x_0)$（或 $f(x)\ge f(x_0)$）. 通常情况下，我们可以按照下述方法计算某一函数的极值点:

(1) 找出可疑点，这里的可疑点包括：稳定点（即一阶导数为零的点），不可导点以及区间端点.

(2) 对可疑点进行逐一判断，具体方法包括:

  (a) 利用极值的定义判断.

  (b) 利用极值的充分条件判断（见教材 [华师大] 第六章第 4 节）.

例子 10.1. 设 $f(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n}$. 证明：当 n 为奇数时，方程 $f(x)=0$ 存在唯一实根；而当 n 为偶数时，方程 $f(x)=0$ 无实根.

证明. 对 $f(x)$ 求一阶导数，得

$$f'(x)=-1+x-x^2+\cdots+(-1)^n x^{n-1}=\begin{cases}\dfrac{-1+(-1)^n x^n}{1+x}, & x\ne -1,\\ -n, & x=-1\end{cases}$$

（此处将 $f'(x)$ 视作首项为 -1 公比为 $-x$ 的数列的前 n 项和）.

(i) 当 $n=2k+1$ 时，有 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 严格单调递减，又由于

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,$$

由此 $f(x)=0$ 存在唯一实根.

(ii) 当 $n=2k$ 时，我们有

$$f'(x)\begin{cases}>0, & x>1,\\ =0, & x=1,\\ <0, & x<1,\end{cases}$$

故 $f(1)=\min\limits_{\mathbb{R}}f(x)$，而

$$f(1)=(1-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2k-2}-\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{1}{2k}>0,$$

由此说明方程 $f(x)=0$ 无实根. □

例子 10.2. 给定半径为 r 的小球，计算其外接圆锥的最小体积.

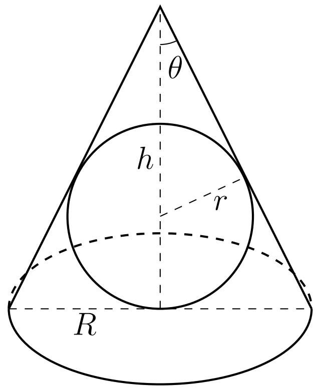

图 10.1: 例子 10.2 示意图

证明. 记圆锥的底圆半径为 R，高为 h，轴线与母线的夹角为 θ（为了使用导数这一工具，我们需要用一个变量来表示所有影响体积的因素，即 R 和 h），则

$$\tan\theta = \frac{R}{h} = \frac{r}{\sqrt{(h-r)^2-r^2}} = \frac{r}{\sqrt{h^2-2hr}} \implies R^2 = \frac{hr^2}{h-2r}.$$

故圆锥体积为

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h^2}{h-2r}.$$

令

$$V'(h) = \frac{\pi r^2}{3} \cdot \frac{h(h-4r)}{(h-2r)^2} = 0,$$

解得 $h=0$（不合题意，舍去）或 $h=4r$. 而

$$V'(h)\begin{cases} <0, & h<4r, \\ >0, & h>4r, \end{cases}$$

这说明 $V_{\min} = V(4r) = \dfrac{8\pi r^3}{3}$. □

练习 10.3. 证明：函数

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}-1\right)\ln x - \ln 2 + \ln(1+x)$$

在 $(0,1)$ 内只有一个零点.

10.2. 不等式的证明举例 在这一小节的习题中，我们主要讨论如何使用微分和导数及其相关理论证明不等式.

例子 10.4. 设 $s>0$，证明：

$$\frac{n^{s+1}}{s+1} < 1^s + 2^s + \cdots + n^s < \frac{(n+1)^{s+1}}{s+1}.$$

证明. 对于任意的 $k\in\mathbb{N}$，在闭区间 $[k,k+1]$ 上对函数 $f(x):=x^{s+1}$ 应用 Lagrange 中值定理，则存在 $k<\xi<k+1$ 使得

$$(k+1)^{s+1}-k^{s+1}=(s+1)\xi^s.$$

由于 $k^s<\xi^s<(k+1)^s$，故

$$k^s<\frac{(k+1)^{s+1}-k^{s+1}}{s+1}<(k+1)^s,\qquad k\in\mathbb{N}.$$

对于上述左边的不等式，依次令 $k=0,1,\cdots,n$，并将对应的 $n+1$ 个不等式两端同时相加可得

$$\sum_{k=1}^{n}k^s<\frac{(n+1)^s}{s+1},$$

此即所证不等式的右边部分；而对于上述右边的不等式，依次令 $k=0,1,\cdots,n-1$，并将对应的 n 个不等式两端同时相加可得

$$\frac{n^{s+1}}{s+1}<\sum_{k=1}^{n}k^s,$$

此即所证不等式的左边部分. □

练习 10.5. 设 $\lambda=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，证明：$e^{\lambda}>n+1$.

提示. 注意到：$e^{\lambda}>n+1\iff\lambda>\ln(n+1)$，故可以考虑在每个 $[k,k+1]$ $(k\in\mathbb{N})$ 上对函数 $f(x):=\ln x$ 应用 Lagrange 中值定理.

例子 10.6. 设 n 是正整数，证明：当 $t\le n$ 时，

$$e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\le\frac{t^2}{n}e^{-t}$$

证明. 注意到目标不等式等价于 $1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^t\le\frac{t^2}{n}$，故只需证明：当 $t\le n$ 时，有

$$F(t):=\frac{t^2}{n}-\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n e^t\right]\ge 0.$$

考虑 $F(t)$ 的一阶导数：

$$F'(t):=\frac{2t}{n}+e^t\left[-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}+\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]=\frac{t}{n}\left[2-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\right].$$

设由方程 $2-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}=0$ 的所有实根作成的集合为 A，则 $F(x)$ 所有可能的极值点不外乎三种情况：(1) $x=0$，(2) $x\in A$，(3) $x=n$. 但 $F(0)=0$，

$$\begin{aligned}F(\xi)&=\frac{\xi^2}{n}-\left[1-\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^n e^{\xi}\right]=\frac{\xi^2}{n}-\left[1-2\left(1-\frac{\xi}{n}\right)\right]\\&=\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^2+\frac{\xi^2}{n^2}(n-1)\ge 0,\qquad(\xi\in A)\\F(n)&=n-1\ge 0,\qquad\lim_{t\to-\infty}F(t)=+\infty.\end{aligned}$$

由此推断出 $\min_{t\le n}F(t)=F(0)=0$. □

例子 10.7. 设 $p>1$，$q>1$ 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，请解答下列问题:

(1) (Young 不等式) 设 $a,b>0$，证明:

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

(2) (Hölder 不等式) 设 $a_i,b_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

证明. (1) 注意到函数 $f(x)=-\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 内为凸函数，根据 Jensen 不等式，由于 $1/p+1/q=1$，我们有

$$-\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \leq -\frac{1}{p}\ln a^p - \frac{1}{q}\ln b^q = -\ln ab.$$

再根据 $\ln u$ 的单调递增性，可得 $ab \leq \dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}$.

(2) 对于每个 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$，分别令 $a=\dfrac{a_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}, b=\dfrac{b_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ 并应用 Young 不等式，我们有

$$\frac{a_k b_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{a_k^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{b_k^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q}.$$

对 $k=1,2,\cdots,n$ 情形下的上述不等式两端相加，得到

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k}{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{\sum_{k=1}^{n} b_k^q}{\sum_{i=1}^{n} b_i^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

此时只需对两端同时乘以 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$，即可得到所证不等式. □

注记 10.8. 对于 Young 不等式，其等号成立的充分必要条件是 $a^p=b^q$；而对于 Hölder 不等式，其等号成立当且仅当向量 $(a_1^p,a_2^p,\cdots,a_n^p)$ 与 $(b_1^q,b_2^q,\cdots,b_n^q)$ 成比例（等号成立条件的详细证明请参见 [谢] 命题 8.5.2）.

练习 10.9. 设 $a_i>0$ $(i=1,\cdots,n)$，应用 Jensen 不等式证明:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

第十一讲 期末复习

这一节旨在帮助各位同学更好地梳理本学期的所学内容，提升期末复习效率，而**绝非所谓的「划重点」**. 此外，本节所有出现的引用，若无特别注明，均为教材 [华师大] 中的对应内容.

11.1. 实数系基本定理・数列极限

A. 确界・确界原理

(1) 确界的定义（见第一章第 2 节之定义 2、3）.

(2) 确界原理：实数系中，有上（下）界数集必有上（下）确界.

注记 11.1. 注意上（下）确界与最大（小）值的区别.

B. 数列极限的定义与性质

(1) <u>数列极限的定义</u>：数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义，描述性定义，无穷大数列（第二章第 1 节）.

注记 11.2. 对于 $\varepsilon - N$ 定义或其否定形式，需要特别注意全称量词 $\forall$ 和存在量词 $\exists$ 的出现顺序.

相关习题. 利用定义证明极限（见此讲义第一讲）.

(2) <u>数列极限的性质</u>：唯一性，有界性，保号性，保不等式性，迫敛性和四则运算（见第二章第 2 节）.

相关习题. 利用已知极限和四则运算法则，利用迫敛性计算数列极限（见习题 2.2 之题 1，4，8）

C. 数列收敛性的判断

(1) 单调有界定理：单调递增（递减）有上（下）界数列必定收敛.

相关习题. 通过递推公式计算极限（见习题 2.3 之题 3）.

(2) 子列：

(a) 子列的概念（见第二章第 2 节之定义 1）.

(b) 收敛数列的子列刻画（见第二章第 2 节之定理 2.8）.

(c) Bolzano–Weierstrass 致密性定理（见第二章第 3 节之定理 2.10）.

(3) Cauchy 收敛准则（见第二章第 3 节之定理 2.11）.

相关习题. 利用 Cauchy 收敛准则证明数列收敛（见习题 2.3 之题 5）.

D. 实数系基本定理及其等价性（非期末考点）

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{确界原理} & \Longrightarrow & \text{单调有界定理} & \Longrightarrow & \text{区间套定理} \\
\Uparrow & & & & \Downarrow \\
\text{Cauchy 收敛准则} & \Longleftarrow & \text{Bolzano–Weierstrass 致密性定理} & \Longleftarrow & \text{有限覆盖定理}
\end{array}
$$

11.2. 函数极限与连续函数

A. 函数极限的定义与性质

(1) <u>函数极限的定义</u>：函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义，单侧极限（见第三章第 1 节）.

注记 11.3. 根据 x 的不同趋向（$x \to x_0, x \to x_0^-, x \to x_0^+, x \to -\infty, x \to +\infty$ 和 $x \to \infty$）以及极限值的不同类型（有限数，$+\infty$，$-\infty$ 和 ∞，函数极限的定义共有 24 种.

相关习题. 利用定义证明函数极限（见习题 3.1 之题 1）. 其中，以下不等式在放缩技巧中是常用的

$$
|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2|, \quad |\cos x_1 - \cos x_2| \le |x_1 - x_2|,
$$
$$
|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \le |x_1 - x_2|.
$$

(2) <u>函数极限的性质</u>：唯一性，局部有界性，局部保号性，保不等式性，迫敛性，四则运算法则（见第三章第 2 节）.

注记 11.4. 除上述性质外，教材第四章第 3 节之例 1 给出了幂指型函数的极限计算方式.

相关习题. 利用已知极限和四则运算法则，利用迫敛性计算函数极限（见习题 3.2 之题 1，2，8）.

B. 函数极限存在的条件

(1) 归结原则（又称 Heine 定理，见第三章第 3 节之定理 3.8）.

相关习题. 利用归结原则判断函数极限不存在（见习题 3.3 之题 1，6）

(2) 单调有界定理（见第三章第 3 节之定理 3.10）.

(3) Cauchy 收敛准则（见第三章第 3 节之定理 3.11）.

(4) <u>两个重要极限</u>：(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$；(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

C. 无穷小量的比较

(1) <u>无穷小量的阶</u>：高（低）阶无穷小量，同阶无穷小量和等价无穷小量（见第三章第 5 节）.

(2) 等价无穷小量替换原则（见第三章第 5 节之定理 3.12，关于等价无穷小替换的若干注意事项亦可见此讲义的 4.2 小节）.

相关习题. 利用等价无穷小替换计算极限（见习题 3.5 之题 2）.

(3) 渐近线计算问题（见第三章第 5 节之四）.

D. 函数的连续性与不连续点的分类

(1) 连续的定义：函数在某一点处的连续性，单侧连续（分别见第四章第 1 节之定义 1，2）.

注记 11.5. 如果使用 $\varepsilon-\delta$ 语言刻画连续性，则需要将「$0<|x-x_0|<\delta$」改成「$|x-x_0|<\delta$」（**请思考为什么?**）.

相关习题. 利用定义证明函数的连续性（见习题 4.1 之题 1）.

(2) 不连续点（间断点）的分类（见第四章第 1 节之二）：第一类间断点（可去间断点，跳跃间断点），第二类间断点.

相关习题. 判断函数的间断点类型（见习题 4.1 之题 2）

(3) 初等函数的连续性：一切初等函数在其定义域内都连续.

E. 连续函数的性质

(1) 局部性质：局部有界性，局部保号性，四则运算（见第四章第 2 节，下同）.

(2) 闭区间上连续函数的性质：有界性，最值性，介值性，根的存在性（可视为介值性的一个推论）.

相关习题. 连续函数的四则运算之应用（见习题 4.2 之题 3 和 4），闭区间上连续函数性质的应用（见习题 4.2 之题 9、10 和 17）.

(3) 反函数的连续性.

F. 函数的一致连续性

(1) 一致连续的定义和数列刻画（分别见第四章第 2 节之定义 2 和例 10）.

(2) Cantor 一致连续性定理（见第四章第 2 节之定理 4.9）.

相关习题. 判断函数在某一区间上的一致连续性（见习题 4.2 之题 13 和题 20）.

11.3. 单变量函数微分学

A. 导数和微分的基本概念与几何意义

(1) 导数和微分的定义（分别见第五章第 1 节之定义 1 和第 5 节之定义 1）.

(2) 可导与可微的关系：$f(x)$ 在 x_0 处可导当且仅导其在 x_0 处可微.

(3) 几何意义：

(a) 导数：$f'(x_0)$ 的值等于 $f(x)$ 的图像在 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率；

(b) 微分：（见第五章第 1 节之一）.

相关习题. 计算切线方程与法线方程（见习题 5.1 之题 6），函数的可导性证明（见习题 5.1 之题 8）.

B. 导数和微分的计算

(1) 导数的计算：

(a) 基本初等函数的导数，四则运算法则，反函数求导法则，复合函数求导法则（见第五章第 2 节）；

(b) 参变量函数求导（见第五章第 3 节）；

(c) 高阶导数计算，Leibniz 公式（见第五章第 4 节）.

相关习题. 计算 n 阶导数（见习题 5.4 之题 5），计算反函数的高阶导数（见习题 5.4 之题 8）.

(2) 微分的计算（见第五章第 5 节）：

(a) 函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的微分：$\mathrm{d}f = f'(x_0)\mathrm{d}x$；

(b) 微分的四则运算法则；

(c) 高阶微分；

(d) <u>一阶微分形式的不变性</u>：$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$ 不仅在 x 为自变量时成立，在 x 为某一函数的因变量时亦成立.

注记 11.6. 高阶微分不具备形式不变形.

C. 微分中值定理及其应用

(1) <u>微分中值定理</u>：Rolle 定理，Lagrange 中值定理，Cauchy 中值定理（分别见第六章第 1 节和第 2 节）.

相关习题. 方程根的存在性问题（见习题 6.1 之题 2），不等式证明（见习题 6.1 之题 5、7 和 14）.

(2) 导数的介值性（Darboux 定理，见第六章第 1 节之定理 6.5）

(3) L'Hospital 法则——不定式极限的计算.

注记 11.7. L'Hospital 法则存在一个**容易忽略的**使用条件：要通过 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 计算极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$，必须保证极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 是存在的！

相关习题. 不定式极限的计算（见习题 6.2 之题 5 和 7）.

D. Taylor 公式（见第六章第 3 节）

(1) Peano 型余项和 Lagrange 型余项的 Taylor 公式，Maclaurin 公式.

(2) 一些函数的 Maclaurin 公式（见第六章第 3 节例 1 和例 5）.

相关习题. Taylor 公式在极限计算中的应用（见习题 6.3 之题 2）.

E. 极值问题与函数的凸性

(1) Fermat 定理（极值的**必要条件**，见第五章第 1 节之定理 5.3）.

(2) 极值的三个充分条件（分别见第六章第 4 节之定理 6.11、6.12 和 6.13）.

(3) 计算函数极值点的一般步骤：(i) 计算可疑点；(ii) 利用定义或极值的充分条件逐一判断.

相关习题. 极值点的计算（见习题 6.4 之题 1 和 10），最值的计算（见习题 6.4 之题 4）.

(4) 凸函数与拐点（见第六章第 5 节）：

(a) 凸（凹）函数的定义（定义 1）；

(b) 凸函数的导数刻画（定理 6.14 和 6.15）；

(c) Jensen 不等式（例 5）.

(d) 拐点（定义 2）.

相关习题. 利用函数的凸性证明不等式（见习题 6.5 之题 5），凸函数的运算（见习题 6.5 之题 3 和 7）.

致谢

此讲义作为我个人的教学实践尝试，随本学期课程推进已近完成. 在此，首先感谢许谷榕老师（本课程的任课老师）予以我充分的自主空间，使我能够自由地探索习题课的内容设计. 其次，感谢各位同学的积极参与，你们的课堂讨论与课后反馈，为讲义的编写与改进提供了宝贵帮助. 同时，感谢 2025 级数院博士生余庆雯对此讲义编写工作的审核与校对支持.

作为笔者的初次教学尝试，讲义亦或是课堂中难免存在疏漏或讲解不清之处，在此向各位同学致以歉意.

期末将至，新年即临. 祝同学们期末考试顺利，在新的一年里学业精进.

参考文献

[华师大] 华东师范大学数学系. 数学分析（上册）[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[陈] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析（上册）[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[李] 李傅山. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.

[裴] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[谢] 谢惠民, 恽自求, 易法槐等. 数学分析习题课讲义（上册）[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.