华侨大学《数学分析（一）》习题课讲义

刘乙明

2025 至 2026 学年秋季学期（此讲义将随本学期习题课的进行不断更新）

目录

专题一 利用定义证明数列极限

1.1. 关于证明规范性的若干注记 作为数学专业本科阶段的基础课程之一，数学分析中的绝大多数概念（诸如确界、极限、连续等）从直观上理解并不困难. 然而，**数学的大厦并不能仅仅建立在感觉直观上，它需要严格的公理与逻辑体系**. 因此，保持证明过程的规范性是至关重要的. 以下是一些关于证明规范性的注记:

(1) **证明的书写应当使用严格的数学语言，避免口语化**. 可以在证明的书写过程中合理地使用诸如「$\forall$（任意的）」、「$\exists$（存在）」以及「$A \Longrightarrow B$（由 A 推出 B）」等符号表达逻辑关系. 此外，大学阶段的数学证明往往涉及复杂的因果关系，因此应当**避免滥用**「$\because$」和「$\therefore$」符号.

(2) **证明的过程应当逻辑清晰，依据充分**. 对于一些推导步骤，需注明其所依据的定理、命题或结论. 同时，使用诸如「利用反证法」、「要证明 A，只需证 B」和「现证明: $\cdots$」等字段，可一定程度地提高证明过程的易读性. 需要注意的是，在初学阶段，应当仔细思考证明中每一步的逻辑，**不要使用诸如「显然」、「易得」或「易证」等词语蒙混过关**.

例子 1.1. 设数列 $\{a_n\}$ 是无穷小量，$\{b_n\}$ 是有界数列. 证明: $\{a_nb_n\}$ 是无穷小量.

极其不规范的证明. 因为 $\{a_n\}$ 是趋于 0 的，对其中的每一项 a_n 乘以有界数列 $\{b_n\}$ 的对应项后，其结果 $\{a_nb_n\}$ 依旧趋于 0，故结论成立. (证毕)

正确的证明. 因为 $\{b_n\}$ 有界，则存在 $M \geq 0$ 使得 $|b_n| \leq M$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立. 又因为 $\{a_n\}$ 是无穷小量，故对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

对一切 $n > N$ 成立. 因此，当 $n > N$ 时，有

$$|a_nb_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

依定义，$\{a_nb_n\}$ 是无穷小量. (证毕)

1.2. 放缩技巧 · 若干常用的放缩不等式 在使用定义（$\varepsilon - N$ 语言）证明极限的过程中，我们不可避免地会遇到这样一个问题: 对于任意的 $\varepsilon > 0$，直接通过不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

难以解出符合条件的 N. 此时，一个常用的技巧是对 $|a_n - a|$ 进行适当放大，我们需要找到一个数列 $\{A_n\}$ 使其（从某一项 N_0 开始）满足

$$|a_n - a| \leq A_n.$$

如果这时能通过不等式 $A_n < \varepsilon$ 解出相应的 N_1，使得当 $n > N_1$ 时成立 $A_n < \varepsilon$，那么只需令 $N = \max\{N_0, N_1\}$，当 $n > N$ 时，就有 $|a_n - a| \leq A_n < \varepsilon$.

例子 1.2. 设 $a>1$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{a^n}=0$.

证明.（对于 $\varepsilon>0$，此时直接通过不等式 $\left|\dfrac{n^2}{a^n}-0\right|<\varepsilon$ 解出符合条件的 N 是较为困难的，故需要对其适当地放大以化简），令 $a=1+h$，由 $a>1$ 可知 $h>0$. 根据二项式定理，当 $n\geq 3$ 时，我们有

$$\begin{aligned}a^n=(1+h)^n&=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1h+\mathrm{C}_n^2h^2+\mathrm{C}_n^3h^3+\cdots\\&=1+nh+\frac{n(n-1)}{2}h^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3+\cdots\\&\geq\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3,\end{aligned}$$

其中，$h>0$ 确保了上述最后一个不等式成立. 此外，注意到当 $n>4$ 时，我们有如下不等关系（这一步的目的是尝试消去分母中的 $n-1$ 和 $n-2$，这些项的存在会导致 N 的求解变得困难）

$$0<\frac{n}{n-1}<\frac{n}{n-2}<2.$$

此时，可以做放缩

$$\left|\frac{n^2}{a^n}-0\right|=\frac{n^2}{a^n}\leq\frac{n^2}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3}\leq\frac{24}{nh^3}.$$

现在对于任意的 $\varepsilon>0$，令 $N=\max\left\{4,\left\lfloor\dfrac{24}{\varepsilon h^3}\right\rfloor+1\right\}$，当 $n>N$ 时即有 $\left|\dfrac{n^2}{a^n}\right|<\varepsilon$. (证毕)

注记 1.3. 仿照例子 1.2 的方法，读者可以尝试证明：当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$ 对一切正整数 k 成立.

适当地使用一些不等式结论，能够极大地帮助我们构造有效放缩. 以下列出的不等式在放缩技巧中是常用的，其证明可在标注的参考文献中找到.

(1) **Bernoulli 不等式**：若 $h>-1$ 且 $n\in\mathbb{N}^+$，则成立不等式

$$(1+h)^n\geq 1+nh,$$

其中，当 $n>1$ 时等号成立当且仅当 $h=0$（见 [Xie] 命题 1.3.1）；

(2) **均值不等式**：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正实数，则成立

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\geq\frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}.$$

特别地，等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$（见 [Xie] 命题 1.3.3）；

(3) **Cauchy-Schwarz 不等式**：给定实数 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_n$，成立不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)}.$$

特别地，等号成立当且仅当数组 $(a_1, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, \cdots, b_n)$ 成比例（见 [Xie] 命题 1.3.5）；

(4) 设 $0 \le t < \dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sin t \le t \le \tan t,$$

且等号成立当且仅当 $t = 0$（见 [Xie] 命题 1.3.6，可利用几何或导数证明）；

(5) **对数不等式**：设 $x > -1$，则成立不等式

$$\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x,$$

且等号成立当且仅当 $x = 0$（见 [Pei] 例 1.1.8，需要使用导数证明）.

例子 1.4. 利用定义证明极限：$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

利用均值不等式证明. 当 $n \ge 2$ 时，利用均值不等式，我们有如下放缩

$$1 \le \sqrt[n]{n} \le \left(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \cdots \cdot 1}_{n-2}\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

因此，对于任意的 $\varepsilon > 0$，取 $N = \left\lfloor \dfrac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$（注：此时只要 $n \ge N$ 就有 $n \ge 2$，进而满足上述不等式放缩的条件），则对一切的 $n > N$ 有

$$0 \le \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

(证毕)

利用二项式定理证明. 令 $A_n = \sqrt[n]{n} - 1$，则 $A_n \ge 0$. 当 $n \ge 2$ 时，根据二项式定理有

$$\begin{aligned} n = (A_n + 1)^n &= \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 A_n + \mathrm{C}_n^2 A_n^2 + \cdots \\ &= 1 + nA_n + \frac{n(n-1)}{2} A_n^2 + \cdots \\ &\ge \frac{n(n-1)}{2} A_n^2. \end{aligned}$$

将上述不等式变形后，有 $A_n^2 \le \dfrac{2}{n-1}$. 此时对于任意的 $\varepsilon > 0$，要说明 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$，只需说明

$$A_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

注意到当 $n \ge 2$ 时成立 $\dfrac{n}{n-1} \le 2$，因此取 $N = \left\lfloor \dfrac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$，则对任意的 $n > N$ 有

$$A_n \le \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{n}{n-1}} \le \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

(证毕)

练习 1.5. 利用定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$.

1.3. 分步技巧 对于一些形式较为复杂的 $|a_n-a|$，往往难以直接构造有效的放缩将其化简．而分步技巧提供了另一种化简策略，我们可以利用绝对值不等式将 $|a_n-a|$ 拆成若干部分：

$$|a_n-a|\le A_1(n)+\cdots+A_k(n).$$

如果此时能证明对上述每一部分 $A_i(n)$，总能找到相应的 N_i，使得 $A_i(n)<\dfrac{\varepsilon}{k}$ 对一切的 $n>N_i$ 成立．那么只需令 $N=\max\{N_1,\cdots,N_k\}$，当 $n>N$ 时就有

$$|a_n-a|\le A_1(n)+\cdots+A_k(n)<k\cdot\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon.$$

例子 1.6 (Cauchy 命题). 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$（有限数），证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

证明. 利用绝对值不等式，我们有放缩：

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|&=\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\&\le\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，故对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时成立

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定上述 N_1，记 $M=\sum\limits_{i=1}^{N_1}|a_i-a|$ 并取 $N_2=\left\lfloor\dfrac{2M}{\varepsilon}\right\rfloor+1$，则有

$$\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

对一切的 $n>N_2$ 成立．此时取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时就有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|&\le\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

(证毕)

练习 1.7. 设数列 $\{p_n\}$ $(p_n>0)$ 和 $\{a_n\}$ 分别满足：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0,\quad\lim_{n\to+\infty}a_n=a.$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$

提示. 注意到 $\{a_n\}$ 是有界数列，可设 $|a_n| \le M$，则

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}-a\right| \le \frac{1}{p_1+\cdots+p_n}\Big(&p_1|a_n-a|+\cdots+p_{n-N}|a_{N+1}-a| \\ &+p_{n-N+1}M+\cdots+p_nM\Big).\end{aligned}$$

练习 1.8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=0$.

提示. 对于某个 $N_0 > 0$，设 $M = \max\{|a_i| : 1 \le i \le N_0\}$，则有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\right| \le \frac{MN_0(1+N_0)}{n(n+1)} + \frac{(N_0+1)\cdot|a_{N_0+1}|+\cdots+n\cdot|a_n|}{1+2+\cdots+n}.$$

专题二 数列的收敛性 · 子列 · 递推数列的极限

2.1. 数列收敛或发散的判断 对于给定数列 $\{a_n\}$，要判断其是否收敛或发散，可以通过下述几种基本方法：

(1) **利用 Cauchy 收敛原理**．根据 Cauchy 收敛原理，我们有

$$\begin{aligned}\{a_n\}\text{ 收敛 } &\iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \text{当 } m,n>N \text{ 时},\ |a_m-a_n|<\varepsilon;\\ &\iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \text{当 } n>N \text{ 时},\ |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon\ (\forall p\in\mathbb{N}).\end{aligned}$$

对应地，请读者自行写出数列 $\{a_n\}$ 发散的充分必要条件．

(2) **利用单调有界定理（数列收敛的充分条件）**．若数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界（或者单调递减且有下界），则其必定收敛，且此时有（见课本 [ENCU] 习题 2.3 第 8 题，请读者自行尝试证明）

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\sup_n\{a_n\}\ (\text{或者}\ \lim_{n\to+\infty}a_n=\inf_n\{a_n\}).$$

例子 2.1. 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，证明：$\{a_n\}$ 收敛（这一极限被称为 Euler 常数，通常记作 Γ）．

证明.（我们利用单调有界定理证明极限的存在性）根据对数不等式（见专题一），对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，成立

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.$$

因此对任意的 $n\in\mathbb{N}$，有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0,$$

这说明 $\{a_n\}$ 是单调递减的．另一方面，再次应用对数不等式，我们有

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n\\&=\ln(n+1)-\ln n>0,\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 有下界．综上，根据单调有界定理可知 $\{a_n\}$ 收敛． (证毕)

例子 2.2. 证明：数列 $\{\sin n\}$ 发散．

证明.（我们使用 Cauchy 收敛准则的否定形式证明发散）注意到对于任意的 $k\in\mathbb{Z}$，函数 $\sin x$ 满足

$$\begin{cases}\sin x\geq\dfrac{1}{2}, & x\in\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{6},2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right],\\ \sin x\leq-\dfrac{1}{2}, & x\in\left[(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{6},(2k+1)\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right],\end{cases}$$

并且上述提及的每一段区间长度均大于 1．因此取 $\varepsilon_0=1$，对于任意的 $N>0$，由实数的 Archimedes 性，存在 $k_0\in\mathbb{N}^+$ 使得 $2k_0\pi>N$．此时分别取正整数

$$n\in\left[2k_0\pi+\frac{\pi}{6},2k_0\pi+\frac{5\pi}{6}\right],\quad m\in\left[(2k_0+1)\pi+\frac{\pi}{6},(2k_0+1)\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$$

（这些区间的长度确保了 m 和 n 是可被取到的），则有 $m>n>2k_0\pi>N$ 且

$$|\sin m-\sin n|=\sin m-\sin n\geq 1=\varepsilon_0.$$

由 Cauchy 收敛原理的否定形式，可知数列 $\{\sin n\}$ 发散． (证毕)

练习 2.3. 证明：数列 $\{\tan n\}$ 发散．

2.2. 数列与子列的关系 在数学分析中，子列是一种十分重要的研究对象，通过分析子列的收敛性，能够更加具体地刻画数列本身的形态．

对于数列与子列的关系，以下几条性质是较为基本的，这些内容可在课本 [ENCU] 中找到．同时，我们以习题的形式补充了一些额外的结论．

(1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\{a_n\}$ 的任意子列都收敛（见定理 2.8，**这条性质的否定形式可用于判断数列的发散**）．

(2) 任何数列都有单调子列（见第 2.3 节例 5）．

(3) **致密性定理**：在实数系中，有界数列必有收敛子列（见定理 2.10）．

(4) 若数列 $\{a_n\}$ 无上界（或无下界），则存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 是正无穷大量（或负无穷大量）（见第 2.3 节例 6）．

例子 2.4. 设 $\{a_n\}$ 是单调数列，$\{a_{n_k}\}$ 是它的一个子列．证明：如果 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=a$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$．

证明. 不妨设 $\{a_n\}$ 是单调递增的．由于 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=a$，则

(a) 对每一项 a_{n_k} 都有 $a_{n_k}\leq a$（否则，存在某个 k_0 使得 $a_{n_{k_0}}-a\overset{\text{记}}{=}\varepsilon_0>0$，此时由 $\{a_{n_k}\}$ 的单调递增性可知：对任意的 $k>k_0$，成立 $a_{n_k}-a\geq a_{n_{k_0}}-a=\varepsilon_0$，这与 $\{a_{n_k}\}$ 以 a 为极限矛盾）；

(b) 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $K>0$，当 $k>K$ 时有

$$0\leq|a_{n_k}-a|=a-a_{n_k}<\varepsilon.$$

现在取 $N=n_{K+1}$，由于对任意的 $n>N$，总存在 $k'>K$ 使得 $n_{k'}\leq n\leq n_{k'+1}$（见图 2.1），因此由 $\{a_n\}$ 的单调递增性，有

$$0\leq a-a_{n_{k'+1}}\leq a-a_n\leq a-a_{k'}<\varepsilon.$$

此时根据定义可知，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$． (证毕)

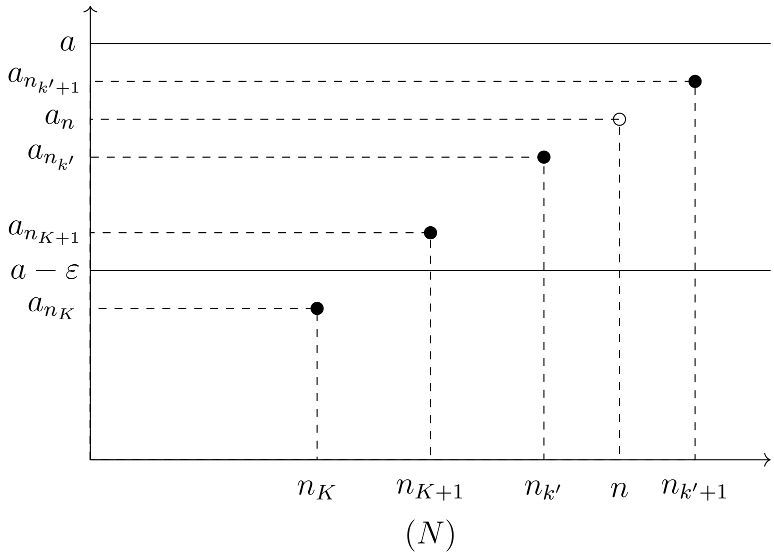

图 2.1: 当 $n > N$ 时，其必定位于在两个相邻的子列指标 $n_{k'}$ 与 $n_{k'+1}$ 之间

例子 2.5. 若 $\{x_n\}$ 无界，但不是无穷大量，则存在两个子列：其中一个子列收敛，而另一个子列是无穷大量.

证明. 我们首先构造 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列．由于 $\{x_n\}$ 非无穷大量，故存在 $M > 0$，使得对于任意的 $N > 0$，总存在 $n > N$ 满足 $|x_n| \le M$．于是依次地

- 对 $N_1 = 1$，取 $n_1 > N_1$ 使得 $|x_{n_1}| \le M$；
- 对 $N_2 = n_1$，取 $n_2 > N_2$ 使得 $|x_{n_2}| \le M$；
- ……，

由此得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$，其每一项均满足 $|x_{n_k}| \le M$．根据致密性定理，存在 $\{x_{n_k}\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_{k_l}}\}$，这亦是 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列.

另一方面，由于 $\{x_n\}$ 无界，则对于任意的 $G > 0$，总存在 $n > 0$ 使得 $|x_n| > G$．于是依次地通过

- 对 $G_1 = 1$，取 $m_1 > 0$ 使得 $|x_{m_1}| > G_1$；
- 对 $G_2 = 2$，取 $m_2 > m_1$ 使得 $|x_{m_2}| > G_2$（此处的 m_2 必定可以取到，否则将意味着对一切 $m > m_1$ 都有 $|x_m| \le G_2$，这与 $\{x_n\}$ 无界矛盾）；
- ……，

可得到 $\{x_n\}$ 的另一个子列 $\{x_{m_k}\}$．我们需说明 $\{x_{m_k}\}$ 是无穷大量，事实上，对于任意的 $G > 0$，取正整数 $K > G$，则当 $k > K$ 时，有

$$|x_{m_k}| > G_k = k > K > G.$$

(证毕)

练习 2.6. 给定数列 $\{a_n\}$ 和实数 a，证明：a 的任意邻域都包含数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项**当且仅当** a 是 $\{a_n\}$ 某个子列的极限（此时，我们称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的一个**极限点**）.

2.3. 根据递推公式计算数列极限 有些数列是在给出其第一项 a_1 后，使用递推公式

$$a_{n+1} = f(a_n), \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

定义的，这里的 $f(a_n)$ 表示某个关于 a_n 的函数．事实上，计算这类数列极限的方法有很多（参考 [Pei] 第 1.5 节），但在本节我们只讨论单调有界定理的应用．

例子 2.7. 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_1=1$ 和递推关系

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n},\qquad n\in\mathbb{N}^+$$

给出．判断 $\{x_n\}$ 的收敛性，若收敛则计算其极限．

想法. 通过递推关系计算 $\{x_n\}$ 的前若干项，我们有

$$x_1=1<x_3=\frac{3}{2}<x_5=\frac{8}{5}<\cdots<x_6=\frac{13}{8}<x_4=\frac{5}{3}<x_2=2.$$

于是，我们可以猜测 $\{x_n\}$ 是有界数列（具体地：$1\le x_n\le 2$），且由其奇数项构成的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 单调递增，由其偶数项构成的子列 $\{x_{2k}\}$ 单调递减．根据单调有界定理，我们知道这两个子列是收敛的，此时若能证明它们收敛于同一极限 A，则必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$ **(请思考为什么?)**.

证明. 首先证明数列 $\{x_n\}$ 是有界的．事实上，利用数学归纳法，由于 $1\le x_1\le 2$，假设对于第 n 项有 $1\le x_n\le 2$，则根据递推关系可得

$$1\le x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n}\le 2,$$

这说明数列 $\{x_n\}$ 满足 $1\le x_n\le 2$．此外，重复使用两次递推关系，我们有

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=\frac{x_n}{1+x_n}-\frac{x_{n-2}}{1+x_{n-2}}=\frac{x_n-x_{n-2}}{(1+x_n)(1+x_{n-2})},$$

这说明对于任意的 $n\ge 3$，$x_{n+2}-x_n$ 与 x_n-x_{n-2} 具有相同的符号，再结合

$$x_3-x_1=\frac{1}{2}>0,\quad x_4-x_2=-\frac{1}{3}<0$$

可知由 $\{x_n\}$ 的奇数项构成的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 是单调递增的，而由其偶数项构成的子列 $\{x_{2k}\}$ 是单调递减的．根据单调有界定理，子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与 $\{x_{2k}\}$ 均收敛．

现在，设 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{2k-1}=A$，对递推公式

$$x_{2k+1}=1+\frac{1}{x_{2k}}=1+\frac{x_{2k-1}}{1+x_{2k-1}}$$

取极限有 $A=1+\dfrac{A}{1+A}$，由此解得 $A=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $A=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去，$\{x_n\}$ 的上下界确保了该数列不可能以此为极限）．类似可以证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_{2k-1}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$．因此，我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$． (证毕)

注记 2.8. 考虑 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$，该数列是通过递推关系

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

生成的，其前 10 项为 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$．由于

$$\frac{F_1}{F_0} = 1, \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{F_n/F_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

因此例子 2.7 中的数列第 n 项 x_n 本质上是 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ 的第 n 项相对于前一项的增长率．例子 2.7 的结论表明，随着 n 的增大，Fibonacci 数列的增长率最终将收敛于「黄金比例」，即 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$．

练习 2.9. 给定两个正数 a 和 b，其满足 $0 < a < b$，分别令 $a_1 = a$，$b_1 = b$．

(1) 若按照递推公式

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

定义数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$．证明：这两个数列收敛于同一个极限（该极限称为 a 和 b 的**算术几何平均**）．

(2) 若按照递推公式

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

定义数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$．证明：这两个数列收敛于同一个极限（该极限称为 a 和 b 的**算术调和平均**）．

提示. 首先证明 $a \le a_n < b_n \le b$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立，随后考虑单调有界定理．

专题三　函数极限的证明

3.1. 利用定义证明函数极限 设 $x_0 \in \mathbb{R}$，函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心领域 $U^\circ(x_0;\eta)$ 上有定义．则 $f(x)$ 在 x_0 处的极限可以被定义为：

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A\ (\text{有限数}) \iff \left\{ \begin{array}{c} \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta(0<\delta<\eta),\ \text{当}\ x\in U^\circ(x_0;\delta)\ \text{时, 有} \\ |f(x)-A|<\varepsilon \end{array} \right\}.$$

其它情形的函数极限可以类似地被定义．值得注意的是，尽管函数极限与数列极限在定义上存在诸多类似之处，但在使用定义证明函数极限时，仍然存在着一些额外的需要注意之处：

(1) 对于 $x\to x_0$ 类型的极限，其刻画的是函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 中的状态，与 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义、取值如何均无关．

(2) 对于数列而言，其可以被视为定义在 $\mathbb{N}^+$ 上的函数．然而，函数的定义域不总是为 $\mathbb{R}$，因此在寻找合适的 δ 时，必须先确保 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0;\delta)$ 内有定义，其次再讨论于此邻域上是否成立 $|f(x)-A|<\varepsilon$．

例子 3.1. 利用定义证明极限 $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}=1$．

证明. 注意到函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right)\cup\left(\dfrac{3}{4},+\infty\right)$，并且在其定义域内成立不等式

$$\left|\sqrt{\frac{7}{16x^2-9}}-1\right| = \left|\frac{\dfrac{7}{16x^2-9}-1}{\sqrt{\dfrac{7}{16x^2-9}}+1}\right| \le \left|\frac{7}{16x^2-9}-1\right| = \left|\frac{16x^2-16}{16x^2-9}\right|$$
$$= \frac{16\cdot|x-1|\cdot|x+1|}{|4x+3|\cdot|4x-3|}.$$

对于任意的 $\varepsilon>0$，我们逐步地寻找合适的 $\delta>0$．(首先，要保证 $f(x)$ 在 $U^\circ(1;\delta)$ 内有定义，需限制 $0<\delta<1/4$．其次，直接通过不等式

$$\frac{16\cdot|x-1|\cdot|x+1|}{|4x+3|\cdot|4x-3|}<\varepsilon$$

求解合适的 δ 是较为困难的，因此需要对上述不等式左端做适当放大，于是进一步地限制 $0<\delta<1/8$)．此时，取 $\delta=\min\{\varepsilon/32,1/8\}$，当 $x\in U^\circ(1,\delta)$ 时，有

$$\frac{16\cdot|x+1|\cdot|x-1|}{|4x+3|\cdot|4x-3|} \le \frac{16\cdot3\cdot|x-1|}{3\cdot\dfrac{1}{2}}<\varepsilon.$$

依照定义，即有 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$．　(证毕)

练习 3.2. 利用定义证明极限：$\lim\limits_{x\to2^-}\sqrt{4-x^2}=0$．

上述关于函数极限的例子是比较直观的，我们总能依据其函数图像「猜测」出对应的极限值．然而，也有一些函数的极限并不容易直接被看出．

例子 3.3. 考虑 Riemann 函数：

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (\text{这里 } p,q \text{ 为互素整数, 且 } p>0),\\[2mm] 0, & x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

证明：对于任意的 $x_0\in[0,1]$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$（当 $x_0=0$ 或 1 时，考虑单侧极限）．

想法. 对于任意的 $\varepsilon>0$，观察 $R(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上的函数图像，我们不难发现：满足 $R(x)\geq\varepsilon$ 的 x 至多只有有限个．因此，我们只需要找到足够小的 $\delta>0$，使得去心邻域 $U^\circ(x_0;\delta)$ 能刚好「避开」这有限个 x 即可．

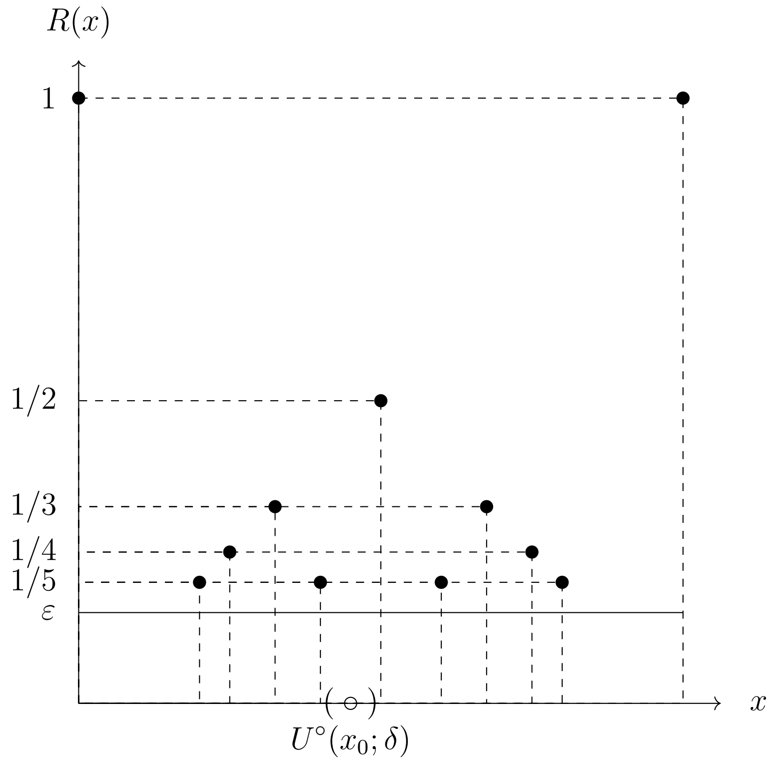

图 3.1: Riemann 函数在 $[0,1]$ 区间上的图像（只画出 $R(x)\geq\varepsilon$ 的部分）

证明. 我们只讨论 $x_0\in(0,1)$ 的情形，对 x_0 位于 0 和 1 的情形则交由读者．对于任意的 $\varepsilon>0$，由于当 x 为无理数时 $R(x)=0$，因此使得 $R(x)\geq\varepsilon$ 的 x 必然是有理数．将有理数 x 写成既约分数 q/p（这里 $p\in\mathbb{N}^+$）的形式，则有

$$\begin{aligned}R(x)=R\left(\frac{q}{p}\right)=\frac{1}{p}\geq\varepsilon &\iff p\leq\frac{1}{\varepsilon}\\ &\iff p\in\left\{1,2,\cdots,\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor\right\}.\end{aligned}$$

换言之，这些使得 $R(x)\geq\varepsilon$ 的有理数 x，其分母（表示成既约分数时）至多只有有限种可能的取值．因此，这些有理数 x 至多只有有限个（记它们作成的集合为 A）．

于是，对上述 $\varepsilon > 0$，取

$$\delta = \min\left\{x_0, 1-x_0, \min_{a\in A-\{x_0\}}\{|a-x_0|\}\right\},$$

则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，成立 $0\le R(x)<\varepsilon$. (证毕)

3.2. 基于函数方程与收敛性质的函数恒等性证明 在某些情况下，函数在其定义域内的整体性质可由**其满足的特定函数方程**以及**该函数的极限行为**共同确定. 在本节，我们将讨论这些条件如何影响函数在其定义域上的恒等性.

例子 3.4. 设函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 满足函数方程 $f(x^2)=f(x)$，且

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(1).$$

证明：$f(x)\equiv f(1)$ $(\forall x\in\mathbb{R}^+)$.

证明. 利用反证法. 若存在 $x_0\in\mathbb{R}^+$ 使得 $f(x_0)\ne f(1)$，取 $\varepsilon_0=|f(x_0)-f(1)|>0$，如果 $x_0>1$，则对于任意（大）的 $\Delta>0$，存在 $k>0$ 使得 $x_0^{2^k}>\Delta$，根据函数方程给出的递推关系，我们有

$$|f(x_0^{2^k})-f(1)| = |f(x_0^{2^{k-1}})-f(1)| = \cdots = |f(x_0)-f(1)| = \varepsilon_0.$$

这与 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(1)$ 矛盾. 类似地，可证明 $x_0<1$ 的情形. (证毕)

练习 3.5. 设 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ 满足函数方程 $f(2x)=f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}=A$，证明 $f(x)\equiv A$.

练习 3.6. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个周期函数，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}=A$，证明 $f(x)\equiv A$.

3.3. 复合函数的极限问题 在函数极限的计算中，存在这样一个十分自然的问题：如果已知 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{y\to A} g(y)=B$（为了方便讨论，这里均假设 a、A 和 B 为有限数），那么是否成立

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to A} f(y)? \tag{3.1}$$

事实上，等式 (3.1) 并非无条件成立. 例如：设 $a=0$，取函数 $g(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\ne 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

通过计算可知 $A=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$，$\lim\limits_{y\to A} f(x)=1$. 然而，考虑数列

$$\{x_n\}=\left\{\frac{1}{2n\pi}\right\} \quad 和 \quad \{y_n\}=\left\{\frac{1}{2n\pi+\pi/2}\right\},$$

它们均收敛于 $a=0$，但是 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(x_n))=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty} f(g(y_n))=1$. 由 Henie 定理（归结原理）可知，极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x))$ 不存在，故此时等式 (3.1) 并不成立.

下述命题给出了等式 (3.1) 成立的两个充分条件，但它们都不是必要条件.

命题 3.7. 设 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$，$\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$．如果此时满足下述条件之一：

(1) 存在 a 的某个去心邻域 $U^\circ(a;\eta)$，使得在该邻域内恒有 $g(x) \neq A$;

(2) $f(y)$ 在点 A 处连续，即：$B = \lim\limits_{y\to A} f(y) = f(A)$，

则有 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to A} f(y) = B$．

证明. 对于任意的 $\varepsilon > 0$，由于 $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$，则存在 $\delta_1 > 0$，当 $0 < |y - A| < \delta_1$ 时成立 $|f(y) - B| < \varepsilon$（注意：这里并不能保证当 $y = A$ 时成立 $|f(y) - B| < \varepsilon$）；又由于 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$，则对于上述找到的 $\delta_1 > 0$，存在 $\delta_2 > 0$，使得当 $0 < |x - a| < \delta_1$ 时成立 $|g(x) - A| < \delta_1$．

- 若条件 (1) 成立，则取 $\delta = \min\{\delta_2, \eta\}$，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时有

$$0 < |g(x) - A| < \delta_1 \implies |f(g(x)) - B| < \varepsilon.$$

- 若条件 (2) 成立，则只需取 $\delta = \delta_2$，因为当 $g(x) = A$ 时即有 $f(g(x)) = B$．

因此根据定义，当满足上述二条件之一时，均有 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = B$． (证毕)

此外，关于复合函数的极限问题，下面这个例子也是十分经典的．

例子 3.8. 证明：若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$．但是，如果 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$ 存在，则不一定有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$．

证明. 若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^3)$ 存在，不妨设其极限值为 A．则对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，使得当 $0 < |t| < \delta_1$ 时，有

$$|f(t^3) - A| < \varepsilon.$$

此时取 $\delta = \delta_1^3$，当 $0 < |x| < \delta$ 时，存在 t 使得 $0 < |t| < \delta_1$ 且 $x = t^3$（这是结论成立的关键），此时有

$$0 < |f(t^3) - A| = |f(x) - A| < \varepsilon.$$

若极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不一定存在．例如：取 $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ 为符号函数，则有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2) = 1$，但

$$-1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1,$$

故极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在． (证毕)

参考文献

[Chen] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析（上册）[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[ENCU] 华东师范大学数学系. 数学分析（上册）[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[Pei] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[Xie] 谢惠民, 恽自求, 易法槐等. 数学分析习题课讲义（上册）[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.