华侨大学《数学分析（一）》习题课讲义

刘乙明

2025 至 2026 学年秋季学期（此讲义将随本学期习题课的进行不断更新）

目录

专题一　利用定义证明数列极限

1.1. 关于证明规范性的若干注记 作为数学专业本科阶段的基础课程之一，数学分析中的绝大多数概念（诸如确界、极限、连续等）从直观上理解并不困难．然而，**数学的大厦并不能仅仅建立在感觉直观上，它需要严格的公理与逻辑体系**．因此，保持证明过程的规范性是至关重要的．以下是一些关于证明规范性的注记：

(1) **证明的书写应当使用严格的数学语言，避免口语化**．可以在证明的书写过程中合理地使用诸如「$\forall$（任意的）」、「$\exists$（存在）」以及「$A \Longrightarrow B$（由 A 推出 B）」等符号表达逻辑关系．此外，大学阶段的数学证明往往涉及复杂的因果关系，因此应当**避免滥用**「$\because$」和「$\therefore$」符号．

(2) **证明的过程应当逻辑清晰，依据充分**．对于一些推导步骤，需注明其所依据的定理、命题或结论．同时，使用诸如「利用反证法」、「要证明 A，只需证 B」和「现证明：$\cdots$」等字段，可一定程度地提高证明过程的易读性．需要注意的是，在初学阶段，应当仔细思考证明中每一步的逻辑，**不要使用诸如「显然」、「易得」或「易证」等词语蒙混过关**．

例子 1.1. 设数列 $\{a_n\}$ 是无穷小量，$\{b_n\}$ 是有界数列．证明：$\{a_nb_n\}$ 是无穷小量．

极其不规范的证明. 因为 $\{a_n\}$ 是趋于 0 的，对其中的每一项 a_n 乘以有界数列 $\{b_n\}$ 的对应项后，其结果 $\{a_nb_n\}$ 依旧趋于 0，故结论成立. (证毕)

正确的证明. 因为 $\{b_n\}$ 有界，则存在 $M \geq 0$ 使得 $|b_n| \leq M$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立. 又因为 $\{a_n\}$ 是无穷小量，故对任意的 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

对一切 $n > N$ 成立. 因此，当 $n > N$ 时，有

$$|a_nb_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

依定义，$\{a_nb_n\}$ 是无穷小量. (证毕)

1.2. 放缩技巧 · 若干常用的放缩不等式 在使用定义（$\varepsilon - N$ 语言）证明极限的过程中，我们不可避免地会遇到这样一个问题：对于任意的 $\varepsilon > 0$，直接通过不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

难以解出符合条件的 N. 此时，一个常用的技巧是对 $|a_n - a|$ 进行适当放大，我们需要找到一个数列 $\{A_n\}$ 使其（从某一项 N_0 开始）满足

$$|a_n - a| \leq A_n.$$

如果这时能通过不等式 $A_n < \varepsilon$ 解出相应的 N_1，使得当 $n > N_1$ 时成立 $A_n < \varepsilon$，那么只需令 $N = \max\{N_0, N_1\}$，当 $n > N$ 时，就有 $|a_n - a| \leq A_n < \varepsilon$.

例子 1.2. 设 $a > 1$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{a^n} = 0$.

证明.（对于 $\varepsilon > 0$，此时直接通过不等式 $\left|\dfrac{n^2}{a^n} - 0\right| < \varepsilon$ 解出符合条件的 N 是较为困难的，故需要对其适当地放大以化简），令 $a = 1 + h$，由 $a > 1$ 可知 $h > 0$. 根据二项式定理，当 $n \geq 3$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
a^n = (1+h)^n &= \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 h + \mathrm{C}_n^2 h^2 + \mathrm{C}_n^3 h^3 + \cdots \\
&= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 + \cdots \\
&\geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3,
\end{aligned}$$

其中，$h > 0$ 确保了上述最后一个不等式成立. 此外，注意到当 $n > 4$ 时，我们有如下不等关系（这一步的目的是尝试消去分母中的 $n-1$ 和 $n-2$，这些项的存在会导致 N 的求解变得困难）

$$0 < \frac{n}{n-1} < \frac{n}{n-2} < 2.$$

此时，可以做放缩

$$\left|\frac{n^2}{a^n} - 0\right| = \frac{n^2}{a^n} \leq \frac{n^2}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3} \leq \frac{24}{nh^3}.$$

现在对于任意的 $\varepsilon > 0$，令 $N = \max\left\{4, \left\lfloor \dfrac{24}{\varepsilon h^3} \right\rfloor + 1\right\}$，当 $n > N$ 时即有 $\left|\dfrac{n^2}{a^n}\right| < \varepsilon$.
(证毕)

注记 1.3. 仿照例子 1.2 的方法，读者可以尝试证明：当 $a > 1$ 时，$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ 对一切正整数 k 成立.

适当地使用一些不等式结论，能够极大地帮助我们构造有效放缩. 以下列出的不等式在放缩技巧中是常用的，其证明可在标注的参考文献中找到.

(1) **Bernoulli 不等式**：若 $h > -1$ 且 $n \in \mathbb{N}^+$，则成立不等式

$$(1+h)^n \geq 1 + nh,$$

其中，当 $n > 1$ 时等号成立当且仅当 $h = 0$（见 [Xie] 命题 1.3.1）；

(2) **均值不等式**：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正实数，则成立

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}.$$

特别地，等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$（见 [Xie] 命题 1.3.3）；

(3) **Cauchy-Schwarz 不等式**：给定实数 $a_1, \cdots, a_n$ 和 $b_1, \cdots, b_n$，成立不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)} \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)}.$$

特别地，等号成立当且仅当数组 $(a_1, \cdots, a_n)$ 与 $(b_1, \cdots, b_n)$ 成比例（见 [Xie] 命题 1.3.5）；

(4) 设 $0 \leq t < \dfrac{\pi}{2}$，则

$$\sin t \leq t \leq \tan t,$$

且等号成立当且仅当 $t = 0$（见 [Xie] 命题 1.3.6，可利用几何或导数证明）；

(5) **对数不等式**：设 $x > -1$，则成立不等式

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

且等号成立当且仅当 $x = 0$（见 [Pei] 例 1.1.8，需要使用导数证明）.

例子 1.4. 利用定义证明极限：$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

利用均值不等式证明. 当 $n \geq 2$ 时，利用均值不等式，我们有如下放缩

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \left(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \cdots \cdot 1}_{n-2}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

因此，对于任意的 $\varepsilon > 0$，取 $N = \left\lfloor \dfrac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$（注：此时只要 $n \geq N$ 就有 $n \geq 2$，进而满足上述不等式放缩的条件），则对一切的 $n > N$ 有

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

(证毕)

利用二项式定理证明. 令 $A_n = \sqrt[n]{n} - 1$，则 $A_n \geq 0$．当 $n \geq 2$ 时，根据二项式定理有

$$\begin{aligned} n = (A_n + 1)^n &= \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 A_n + \mathrm{C}_n^2 A_n^2 + \cdots \\ &= 1 + nA_n + \frac{n(n-1)}{2} A_n^2 + \cdots \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2} A_n^2. \end{aligned}$$

将上述不等式变形后，有 $A_n^2 \leq \dfrac{2}{n-1}$．此时对于任意的 $\varepsilon > 0$，要说明 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$，只需说明

$$A_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

注意到当 $n \geq 2$ 时成立 $\dfrac{n}{n-1} \leq 2$，因此取 $N = \left\lfloor \dfrac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$，则对任意的 $n > N$ 有

$$A_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{n}{n-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

(证毕)

练习 1.5. 利用定义证明下列极限：

(1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin \dfrac{\pi}{n} = 0$; (2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$.

1.3. 分步技巧 对于一些形式较为复杂的 $|a_n - a|$，往往难以直接构造有效的放缩将其化简．而分步技巧提供了另一种化简策略，我们可以利用绝对值不等式将 $|a_n - a|$ 拆成若干部分：

$$|a_n - a| \leq A_1(n) + \cdots + A_k(n).$$

如果此时能证明对上述每一部分 $A_i(n)$，总能找到相应的 N_i，使得 $A_i(n) < \dfrac{\varepsilon}{k}$ 对一切的 $n > N_i$ 成立．那么只需令 $N = \max\{N_1, \cdots, N_k\}$，当 $n > N$ 时就有

$$|a_n - a| \leq A_1(n) + \cdots + A_k(n) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

例子 1.6 (Cauchy 命题). 设 $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$（有限数），证明：

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

证明. 利用绝对值不等式，我们有放缩：

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| &= \left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right| \\ &\leq \frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}.\end{aligned}$$

由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，故对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时成立

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定上述 N_1，记 $M=\sum\limits_{i=1}^{N_1}|a_i-a|$ 并取 $N_2=\left\lfloor\dfrac{2M}{\varepsilon}\right\rfloor+1$，则有

$$\frac{|a_1-a|+|a_2-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

对一切的 $n>N_2$ 成立．此时取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，当 $n>N$ 时就有：

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| &\leq \frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

(证毕)

练习 1.7. 设数列 $\{p_n\}$ $(p_n>0)$ 和 $\{a_n\}$ 分别满足：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0,\quad \lim_{n\to+\infty}a_n=a.$$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a.$

提示. 注意到 $\{a_n\}$ 是有界数列，可设 $|a_n|\leq M$，则

$$\begin{aligned}\left|\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}-a\right| \leq \frac{1}{p_1+\cdots+p_n}\Big(&p_1|a_n-a|+\cdots+p_{n-N}|a_{N+1}-a| \\ &+p_{n-N+1}M+\cdots+p_nM\Big).\end{aligned}$$

练习 1.8. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=0$.

提示. 对于某个 $N_0>0$，设 $M=\max\{|a_i|:1\leq i\leq N_0\}$，则有

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\right|\leq\frac{MN_0(1+N_0)}{n(n+1)}+\frac{(N_0+1)\cdot|a_{N_0+1}|+\cdots+n\cdot|a_n|}{1+2+\cdots+n}.$$

专题二 收敛数列的性质

2.1. 数列收敛或发散的判断 对于给定数列 $\{a_n\}$，要判断其是否收敛或发散，可以通过下述几种基本方法：

(1) **利用 Cauchy 收敛原理**. 根据 Cauchy 收敛原理，我们有

$$\begin{aligned}\{a_n\}\text{ 收敛} &\iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \text{当 } m,n>N \text{ 时},\ |a_m-a_n|<\varepsilon;\\ &\iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N>0,\ \text{当 } n>N \text{ 时},\ |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon\ (\forall p\in\mathbb{N}).\end{aligned}$$

对应地，请读者自行写出数列 $\{a_n\}$ 发散的充分必要条件.

(2) **利用单调有界定理（数列收敛的充分条件）**. 若数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界（或者单调递减且有下界），则其必定收敛，且此时有（见课本 [ENCU] 习题 2.3 第 8 题，请读者自行尝试证明）

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\sup_n\{a_n\}\ (\text{或者 } \lim_{n\to+\infty} a_n=\inf_n\{a_n\}).$$

例子 2.1. 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，证明：$\{a_n\}$ 收敛（这一极限被称为 Euler 常数，通常记作 Γ）.

证明.（我们利用单调有界定理证明极限的存在性）根据对数不等式（见专题一），对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，成立

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.$$

因此对任意的 $n\in\mathbb{N}$，有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}<0,$$

这说明 $\{a_n\}$ 是单调递减的. 另一方面，再次应用对数不等式，我们有

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n\\ &=\ln(n+1)-\ln n>0,\end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 有下界. 综上，根据单调有界定理可知 $\{a_n\}$ 收敛. (证毕)

例子 2.2. 证明：数列 $\{\sin n\}$ 发散.

证明.（我们使用 Cauchy 收敛准则的否定形式证明发散）注意到对于任意的 $k\in\mathbb{Z}$，函数 $\sin x$ 满足

$$\begin{cases}\sin x\geq\dfrac{1}{2}, & x\in\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{6},2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right],\\ \sin x\leq-\dfrac{1}{2}, & x\in\left[(2k+1)\pi+\dfrac{\pi}{6},(2k+1)\pi+\dfrac{5\pi}{6}\right],\end{cases}$$

并且上述提及的每一段区间长度均大于 1．因此取 $\varepsilon_0=1$，对于任意的 $N>0$，由实数的 Archimedes 性，存在 $k_0\in\mathbb{N}^+$ 使得 $2k_0\pi>N$．此时分别取正整数

$$n\in\left[2k_0\pi+\frac{\pi}{6},2k_0\pi+\frac{5\pi}{6}\right],\quad m\in\left[(2k_0+1)\pi+\frac{\pi}{6},(2k_0+1)\pi+\frac{5\pi}{6}\right]$$

（这些区间的长度确保了 m 和 n 是可被取到的），则有 $m>n>2k_0\pi>N$ 且

$$|\sin m-\sin n|\geq 1=\varepsilon_0.$$

由 Cauchy 收敛原理的否定形式，可知数列 $\{\sin n\}$ 发散． (证毕)

练习 2.3. 证明：数列 $\{\tan n\}$ 发散．

2.2. 数列与子列的关系 在数学分析中，子列是一种十分重要的研究对象，通过分析子列的收敛性，能够更加具体地刻画数列本身的形态．

对于数列与子列的关系，以下几条性质是较为基本的，这些内容可在课本 [ENCU] 中找到．同时，我们以习题的形式补充了一些额外的结论．

(1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：$\{a_n\}$ 的任意子列都收敛（见定理 2.8，**这条性质的否定形式可用于判断数列的发散**）．

(2) 任何数列都有单调子列（见第 2.3 节例 5）．

(3) **致密性定理**：在实数系中，有界数列必有收敛子列（见定理 2.10）．

(4) 若数列 $\{a_n\}$ 无上界（或无下界），则存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 是正无穷大量（或负无穷大量）（见第 2.3 节例 6）．

例子 2.4. 设 $\{a_n\}$ 是单调数列，$\{a_{n_k}\}$ 是它的一个子列．证明：如果 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=a$，则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$．

证明. 不妨设 $\{a_n\}$ 是单调递增的，此时 $\{a_{n_k}\}$ 亦单调递增，由于 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{n_k}=a$，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $K>0$，当 $k>K$ 时有

$$0\leq a-a_{n_k}<\varepsilon$$

（$\{a_{n_k}\}$ 的单调性确保了 $a-a_{n_k}$ 非负）．取 $N=n_{K+1}$，则对任意的 $n>N$，存在 $k_0>K$ 使得 $n_{k_0}\leq n\leq n_{k_0+1}$．由 $\{a_n\}$ 的单调递增性，有

$$0\leq a-a_{n_{k_0+1}}\leq a-a_n\leq a-a_{n_{k_0}}<\varepsilon,$$

此时根据定义可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$． (证毕)

例子 2.5. 若 $\{x_n\}$ 无界，但不是无穷大量，则存在两个子列：其中一个子列收敛，而另一个子列是无穷大量．

证明. 我们首先证明：存在 $M>0$，使得数列 $\{x_n\}$ 中有无穷多项满足 $|x_n|\le M$. 事实上，若这样的 M 不存在，则对于任意给定的 $M>0$，满足 $|x_n|\le M$ 的项至多只有有限个（不妨记它们为 $x_{n_1},x_{n_2}\cdots,x_{n_d}$）. 此时只需取 $N=\max\limits_{1\le i\le d}\{n_i\}$，则对于一切的 $n>N$ 均成立 $|x_n|>M$，由此说明 $\{x_n\}$ 是无穷大量，与假设矛盾.

现在，我们分别构造 $\{x_n\}$ 的收敛子列和无穷大量子列. 一方面，由于 $\{x_n\}$ 中存在无穷多项满足 $|x_n|<M$，故可取到子列 $\{x_{n_k}\}$，使其每一项均满足 $|x_{n_k}|<M$. 此时根据致密性定理，可以找到 $\{x_{n_k}\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{n_{k_l}}\}$，这亦是 $\{x_n\}$ 的收敛子列. 另一方面，由于 $\{x_n\}$ 无界，则通过依次地

- 对 $G_1=1$，取 $m_1>0$ 使得 $|x_{m_1}|>G_1$；
- 对 $G_2=2$，取 $m_2>m_1$ 使得 $|x_{m_2}|>G_2$（此处的 m_2 必定可以取到，否则将意味着对一切 $m>m_1$ 都有 $|x_m|\le G_2$，这与 $\{x_m\}$ 无界矛盾)；
- ……，

我们可构造 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{m_k}\}$. 我们需说明 $\{x_{m_k}\}$ 是无穷大量，事实上，对于任意的 $G>0$，取正整数 $K>G$，则当 $k>K$ 时，有

$$|x_{m_k}|>G_k=k>K>G.$$

(证毕)

练习 2.6. 给定数列 $\{a_n\}$ 和实数 a，证明：a 的任意邻域都包含数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项**当且仅当** a 是 $\{a_n\}$ 某个子列的极限（此时，我们称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的一个**极限点**).

2.3. 根据递推公式计算数列极限 有些数列是在给出其第一项 a_1 后，使用递推公式

$$a_{n+1}=f(a_n),\qquad n\in\mathbb{N}^+$$

定义的，这里的 $f(a_n)$ 表示某个关于 a_n 的函数. 事实上，计算这类数列极限的方法有很多（参考 [Pei] 第 1.5 节)，但在本节我们只讨论单调有界定理的应用.

例子 2.7. 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_1=1$ 和递推关系

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n},\qquad n\in\mathbb{N}^+$$

给出. 判断 $\{x_n\}$ 的收敛性，若收敛则计算其极限.

想法. 通过递推关系计算 $\{x_n\}$ 的前若干项，我们有

$$x_1=1<x_3=\frac{3}{2}<x_5=\frac{8}{5}<\cdots<x_6=\frac{13}{8}<x_4=\frac{5}{3}<x_2=2.$$

于是，我们可以猜测 $\{x_n\}$ 是有界数列（具体地：$1\le x_n\le 2$)，且由其奇数项构成的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 单调递增，由其偶数项构成的子列 $\{x_{2k}\}$ 单调递减. 根据单调有界定理，我们知道这两个子列是收敛的，此时若能证明它们收敛于同一极限 A，则必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$ **(请思考为什么?)**.

证明. 首先证明数列 $\{x_n\}$ 是有界的．事实上，利用数学归纳法，由于 $1 \leq x_1 \leq 2$，假设对于第 n 项有 $1 \leq x_n \leq 2$，则根据递推关系可得

$$1 \leq x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \leq 2,$$

这说明数列 $\{x_n\}$ 满足 $1 \leq x_n \leq 2$．此外，重复使用两次递推关系，我们有

$$x_{n+2} - x_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{1+x_n} - \frac{x_{n-2}}{1+x_{n-2}} = \frac{x_n - x_{n-2}}{(1+x_n)(1+x_{n-2})},$$

这说明对于任意的 $n \geq 3$，$x_{n+2} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-2}$ 具有相同的符号，再结合

$$x_3 - x_1 = \frac{1}{2} > 0, \quad x_4 - x_2 = -\frac{1}{3} < 0$$

可知由 $\{x_n\}$ 的奇数项构成的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 是单调递增的，而由其偶数项构成的子列 $\{x_{2k}\}$ 是单调递减的．根据单调有界定理，子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与 $\{x_{2k}\}$ 均收敛．

现在，设 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{2k-1} = A$，对递推公式

$$x_{2k+1} = 1 + \frac{1}{x_{2k}} = 1 + \frac{x_{2k-1}}{1+x_{2k-1}}$$

取极限有 $A = 1 + \dfrac{A}{1+A}$，由此解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $A = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去，$\{x_n\}$ 的上下界确保了该数列不可能以此为极限）．类似可以证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{2k-1} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$．因此，我们有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$． (证毕)

注记 2.8. 考虑 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$，该数列是通过递推关系

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

生成的，其前 10 项为 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$．由于

$$\frac{F_1}{F_0} = 1, \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{F_n/F_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

因此例子 2.7 中的数列第 n 项 x_n 本质上是 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ 的第 n 项相对于前一项的增长率．例子 2.7 的结论表明，随着 n 的增大，Fibonacci 数列的增长率最终将收敛于「黄金比例」，即 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$．

练习 2.9. 给定两个正数 a 和 b，其满足 $0 < a < b$，分别令 $a_1 = a$，$b_1 = b$．

(1) 若按照递推公式

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

定义数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$．证明：这两个数列收敛于同一个极限（该极限称为 a 和 b 的**算术几何平均**）．

(2) 若按照递推公式

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

定义数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 证明：这两个数列收敛于同一个极限（该极限称为 a 和 b 的**算术调和平均**）.

提示. 首先证明 $a \le a_n < b_n \le b$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立，随后考虑单调有界定理.

参考文献

[Chen] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析（上册）[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[ENCU] 华东师范大学数学系. 数学分析（上册）[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[Pei] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[Xie] 谢惠民, 恽自求, 易法槐等. 数学分析习题课讲义（上册）[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.