

华侨大学《数学分析（一）》习题课讲义

刘乙明

2025 至 2026 学年秋季学期（此讲义将随本学期习题课的进行不断更新）

目录

1 利用定义证明数列极限	3
1.1 关于证明规范性的若干注记	3
1.2 放缩技巧 · 若干常用的放缩不等式	3
1.3 分步技巧	6
2 数列的收敛性 · 子列 · 递推数列的极限	8
2.1 数列收敛或发散的判断	8
2.2 数列与子列的关系	9
2.3 根据递推公式计算数列极限	10
3 函数极限的证明	13
3.1 利用定义证明函数极限	13
3.2 基于函数方程与收敛性质的函数恒等性证明	15
3.3 复合函数的极限问题	15
4 数列极限与函数极限的计算举例	17
4.1 关于极限计算问题的两个注记	17
4.2 利用等价量代换	18
4.3 利用初等变形	19
4.4 利用迫敛性及其推广形式	21
5 函数连续性的证明与应用	23
5.1 函数连续性的证明	23
5.2 周期函数的最小正周期问题	24
5.3 闭区间上连续函数性质的应用	25
6 函数的一致连续性	28
6.1 函数一致连续性的判断	28
6.2 分步技巧在一致连续及其相关问题中的应用	29

7 一元函数的导数	32
7.1 利用定义证明函数在某一点处的可导性	32
7.2 函数可导性的应用	33
7.3 高阶导数计算的递推公式方法	34
8 微分中值定理的应用	36
8.1 方程根的存在性问题	36
8.2 中值公式的证明	37
8.3 利用有限增量公式研究函数的性质	39

专题一 利用定义证明数列极限

1.1. 关于证明规范性的若干注记 作为数学专业本科阶段的基础课程之一，数学分析中的绝大多数概念（诸如确界、极限、连续等）从直观上理解并不困难。然而，**数学的大厦并不能仅仅建立在感觉直观上，它需要严格的公理与逻辑体系**。因此，保持证明过程的规范性是至关重要的。以下是一些关于证明规范性的注记：

- (1) **证明的书写应当使用严格的数学语言，避免口语化。**可以在证明的书写过程中合理地使用诸如「 \forall (任意的)」、「 \exists (存在)」以及「 $A \Rightarrow B$ (由 A 推出 B)」等符号表达逻辑关系。此外，大学阶段的数学证明往往涉及复杂的因果关系，因此应当**避免滥用「 \because 」和「 \therefore 」符号**。
- (2) **证明的过程应当逻辑清晰，依据充分。**对于一些推导步骤，需注明其所依据的定理、命题或结论。同时，使用诸如「利用反证法」、「要证明 A ，只需证 B 」和「现证明：…」等字段，可一定程度地提高证明过程的易读性。需要注意的是，在初学阶段，应当仔细思考证明中每一步的逻辑，**不要使用诸如「显然」、「易得」或「易证」等词语蒙混过关**。

例子 1.1. 设数列 $\{a_n\}$ 是无穷小量， $\{b_n\}$ 是有界数列。证明： $\{a_n b_n\}$ 是无穷小量。

极其不规范的证明。因为 $\{a_n\}$ 是趋于 0 的，对其中的每一项 a_n 乘以有界数列 $\{b_n\}$ 的对应项后，其结果 $\{a_n b_n\}$ 依旧趋于 0，故结论成立。□

正确的证明。因为 $\{b_n\}$ 有界，则存在 $M \geq 0$ 使得 $|b_n| \leq M$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立。又因为 $\{a_n\}$ 是无穷小量，故对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在正整数 N ，使得

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$$

对一切 $n > N$ 成立。因此，当 $n > N$ 时，有

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

依定义， $\{a_n b_n\}$ 是无穷小量。□

1.2. 放缩技巧 · 若干常用的放缩不等式 在使用定义 ($\varepsilon - N$ 语言) 证明极限的过程中，我们不可避免地会遇到这样一个问题：对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，直接通过不等式

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

难以解出符合条件的 N 。此时，一个常用的技巧是对 $|a_n - a|$ 进行适当放大，我们需要找到一个数列 $\{A_n\}$ 使其（从某一项 N_0 开始）满足

$$|a_n - a| \leq A_n.$$

如果这时能通过不等式 $A_n < \varepsilon$ 解出相应的 N_1 ，使得当 $n > N_1$ 时成立 $A_n < \varepsilon$ ，那么只需令 $N = \max\{N_0, N_1\}$ ，当 $n > N$ 时，就有 $|a_n - a| \leq A_n < \varepsilon$ 。

例子 1.2. 设 $a > 1$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{a^n} = 0$.

证明. (对于 $\varepsilon > 0$, 此时直接通过不等式 $\left| \frac{n^2}{a^n} - 0 \right| < \varepsilon$ 解出符合条件的 N 是较为困难的, 故需要对其适当地放大以化简), 令 $a = 1 + h$, 由 $a > 1$ 可知 $h > 0$. 根据二项式定理, 当 $n \geq 3$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} a^n &= (1+h)^n = C_n^0 + C_n^1 h + C_n^2 h^2 + C_n^3 h^3 + \dots \\ &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} h^3 + \dots \\ &\geq \frac{n(n-1)(n-2)}{6} h^3, \end{aligned}$$

其中, $h > 0$ 确保了上述最后一个不等式成立. 此外, 注意到当 $n > 4$ 时, 我们有如下不等关系 (这一步的目的是尝试消去分母中的 $n-1$ 和 $n-2$, 这些项的存在会导致 N 的求解变得困难)

$$0 < \frac{n}{n-1} < \frac{n}{n-2} < 2.$$

此时, 可以做放缩

$$\left| \frac{n^2}{a^n} - 0 \right| = \frac{n^2}{a^n} \leq \frac{n^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6} h^3} \leq \frac{24}{nh^3}.$$

现在对于任意的 $\varepsilon > 0$, 令 $N = \max \left\{ 4, \left\lfloor \frac{24}{\varepsilon h^3} \right\rfloor + 1 \right\}$, 当 $n > N$ 时即有 $\left| \frac{n^2}{a^n} \right| < \varepsilon$. \square

注记 1.3. 仿照例子 1.2 的方法, 读者可以尝试证明: 当 $a > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ 对一切正整数 k 成立.

适当地使用一些不等式结论, 能够极大地帮助我们构造有效放缩. 以下列出的不等式在放缩技巧中是常用的, 其证明可在标注的参考文献中找到.

(1) **Bernoulli 不等式:** 若 $h > -1$ 且 $n \in \mathbb{N}^+$, 则成立不等式

$$(1+h)^n \geq 1 + nh,$$

其中, 当 $n > 1$ 时等号成立当且仅当 $h = 0$ (见 [Xie] 命题 1.3.1);

(2) **均值不等式:** 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个正实数, 则成立

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \dots + a_n^{-1}}.$$

特别地, 等号成立当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ (见 [Xie] 命题 1.3.3);

(3) **Cauchy-Schwarz 不等式:** 给定实数 a_1, \dots, a_n 和 b_1, \dots, b_n , 成立不等式

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)} \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)}.$$

特别地, 等号成立当且仅当数组 (a_1, \dots, a_n) 与 (b_1, \dots, b_n) 成比例 (见 [Xie] 命题 1.3.5);

(4) 设 $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$\sin t \leq t \leq \tan t,$$

且等号成立当且仅当 $t = 0$ (见 [Xie] 命题 1.3.6, 可利用几何或导数证明);

(5) 对数不等式: 设 $x > -1$, 则成立不等式

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x,$$

且等号成立当且仅当 $x = 0$ (见 [Pei] 例 1.1.8, 需要使用导数证明).

例子 1.4. 利用定义证明极限: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

利用均值不等式证明. 当 $n \geq 2$ 时, 利用均值不等式, 我们有如下放缩

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \left(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdots \cdots 1}_{n-2} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$ (注: 此时只要 $n \geq N$ 就有 $n \geq 2$, 进而满足上述不等式放缩的条件), 则对一切的 $n > N$ 有

$$0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

□

利用二项式定理证明. 令 $A_n = \sqrt[n]{n} - 1$, 则 $A_n \geq 0$. 当 $n \geq 2$ 时, 根据二项式定理有

$$\begin{aligned} n &= (A_n + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 A_n + C_n^2 A_n^2 + \cdots \\ &= 1 + nA_n + \frac{n(n-1)}{2} A_n^2 + \cdots \\ &\geq \frac{n(n-1)}{2} A_n^2. \end{aligned}$$

将上述不等式变形后, 有 $A_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$. 此时对于任意的 $\varepsilon > 0$, 要说明 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$, 只需说明

$$A_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon.$$

注意到当 $n \geq 2$ 时成立 $\frac{n}{n-1} \leq 2$, 因此取 $N = \left\lfloor \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$, 则对任意的 $n > N$ 有

$$A_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} = \sqrt{\frac{2}{n} \cdot \frac{n}{n-1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

□

练习 1.5. 利用定义证明下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0; \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1.$$

1.3. 分步技巧 对于一些形式较为复杂的 $|a_n - a|$, 往往难以直接构造有效的放缩将其化简. 而分步技巧提供了另一种化简策略, 我们可以利用绝对值不等式将 $|a_n - a|$ 拆成若干部分:

$$|a_n - a| \leq A_1(n) + \cdots + A_k(n).$$

如果此时能证明对上述每一部分 $A_i(n)$, 总能找到相应的 N_i , 使得 $A_i(n) < \frac{\varepsilon}{k}$ 对一切的 $n > N_i$ 成立. 那么只需令 $N = \max\{N_1, \dots, N_k\}$, 当 $n > N$ 时就有

$$|a_n - a| \leq A_1(n) + \cdots + A_k(n) < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

例子 1.6 (Cauchy 命题). 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ (有限数), 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

证明. 利用绝对值不等式, 我们有放缩:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &= \left| \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| \\ &\leq \frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$, 故对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时成立

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

固定上述 N_1 , 记 $M = \sum_{i=1}^{N_1} |a_i - a|$ 并取 $N_2 = \left\lfloor \frac{2M}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 则有

$$\frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

对一切的 $n > N_2$ 成立. 此时取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 当 $n > N$ 时就有:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| &\leq \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_{N_1} - a| + |a_{N_1+1} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

练习 1.7. 设数列 $\{p_n\}$ ($p_n > 0$) 和 $\{a_n\}$ 分别满足:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a.$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = a$.

提示. 注意到 $\{a_n\}$ 是有界数列, 可设 $|a_n| \leq M$, 则

$$\left| \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} - a \right| \leq \frac{1}{p_1 + \cdots + p_n} \left(p_1 |a_n - a| + \cdots + p_{n-N} |a_{N+1} - a| + p_{n-N+1} M + \cdots + p_n M \right).$$

练习 1.8. 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} = 0$.

提示. 对于某个 $N_0 > 0$, 设 $M = \max\{|a_i| : 1 \leq i \leq N_0\}$, 则有

$$\left| \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} \right| \leq \frac{MN_0(1 + N_0)}{n(n + 1)} + \frac{(N_0 + 1) \cdot |a_{N_0+1}| + \cdots + n \cdot |a_n|}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

专题二 数列的收敛性 · 子列 · 递推数列的极限

2.1. 数列收敛或发散的判断 对于给定数列 $\{a_n\}$, 要判断其是否收敛或发散, 可以通过下述几种基本方法:

(1) **利用 Cauchy 收敛原理.** 根据 Cauchy 收敛原理, 我们有

$$\begin{aligned} \{a_n\} \text{ 收敛} &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ 当 } m, n > N \text{ 时}, |a_m - a_n| < \varepsilon; \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ 当 } n > N \text{ 时}, |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon (\forall p \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

对应地, 请读者自行写出数列 $\{a_n\}$ 发散的充分必要条件.

(2) **利用单调有界定理 (数列收敛的充分条件).** 若数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界 (或者单调递减且有下界), 则其必定收敛, 且此时有 (见课本 [Encu] 习题 2.3 第 8 题, 请读者自行尝试证明)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_n \{a_n\} \text{ (或者) } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_n \{a_n\}.$$

例子 2.1. 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛 (这一极限被称为 Euler 常数, 通常记作 Γ).

证明. (我们利用单调有界定理证明极限的存在性) 根据对数不等式 (见专题一), 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$, 成立

$$\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

因此对任意的 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln \frac{n+1}{n} < 0,$$

这说明 $\{a_n\}$ 是单调递减的. 另一方面, 再次应用对数不等式, 我们有

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0, \end{aligned}$$

因此 $\{a_n\}$ 有下界. 综上, 根据单调有界定理可知 $\{a_n\}$ 收敛. \square

例子 2.2. 证明: 数列 $\{\sin n\}$ 发散.

证明. (我们使用 Cauchy 收敛准则的否定形式证明发散) 注意到对于任意的 $k \in \mathbb{Z}$, 函数 $\sin x$ 满足

$$\begin{cases} \sin x \geq \frac{1}{2}, & x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right], \\ \sin x \leq -\frac{1}{2}, & x \in \left[(2k+1)\pi + \frac{\pi}{6}, (2k+1)\pi + \frac{5\pi}{6}\right], \end{cases}$$

并且上述提及的每一段区间长度均大于 1. 因此取 $\varepsilon_0 = 1$, 对于任意的 $N > 0$, 由实数的 Archimedes 性, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}^+$ 使得 $2k_0\pi > N$. 此时分别取正整数

$$n \in \left[2k_0\pi + \frac{\pi}{6}, 2k_0\pi + \frac{5\pi}{6}\right], \quad m \in \left[(2k_0 + 1)\pi + \frac{\pi}{6}, (2k_0 + 1)\pi + \frac{5\pi}{6}\right]$$

(这些区间的长度确保了 m 和 n 是可被取到的), 则有 $m > n > 2k_0\pi > N$ 且

$$|\sin m - \sin n| = \sin m - \sin n \geq 1 = \varepsilon_0.$$

由 Cauchy 收敛原理的否定形式, 可知数列 $\{\sin n\}$ 发散. \square

练习 2.3. 证明: 数列 $\{\tan n\}$ 发散.

2.2. 数列与子列的关系 在数学分析中, 子列是一种十分重要的研究对象, 通过分析子列的收敛性, 能够更加具体地刻画数列本身的形态.

对于数列与子列的关系, 以下几条性质是较为基本的, 这些内容可在课本 [Encu] 中找到. 同时, 我们以习题的形式补充了一些额外的结论.

- (1) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是: $\{a_n\}$ 的任意子列都收敛 (见定理 2.8, **这条性质的否定形式可用于判断数列的发散**).
- (2) 任何数列都有单调子列 (见第 2.3 节例 5).
- (3) **致密性定理:** 在实数系中, 有界数列必有收敛子列 (见定理 2.10).
- (4) 若数列 $\{a_n\}$ 无上界 (或无下界), 则存在 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 是正无穷大量 (或负无穷大量) (见第 2.3 节例 6).

例子 2.4. 设 $\{a_n\}$ 是单调数列, $\{a_{n_k}\}$ 是它的一个子列. 证明: 如果 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$, 则有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

证明. 不妨设 $\{a_n\}$ 是单调递增的. 由于 $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = a$, 则

- (a) 对每一项 a_{n_k} 都有 $a_{n_k} \leq a$ (否则, 存在某个 k_0 使得 $a_{n_{k_0}} - a \stackrel{\text{记}}{=} \varepsilon_0 > 0$, 此时由 $\{a_{n_k}\}$ 的单调递增性可知: 对任意的 $k > k_0$, 成立 $a_{n_k} - a \geq a_{n_{k_0}} - a = \varepsilon_0$, 这与 $\{a_{n_k}\}$ 以 a 为极限矛盾);

- (b) 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $K > 0$, 当 $k > K$ 时有

$$0 \leq |a_{n_k} - a| = a - a_{n_k} < \varepsilon.$$

现在取 $N = n_{K+1}$, 由于对任意的 $n > N$, 总存在 $k' > K$ 使得 $n_{k'} \leq n \leq n_{k'+1}$ (见图 2.1), 因此由 $\{a_n\}$ 的单调递增性, 有

$$0 \leq a - a_{n_{k'+1}} \leq a - a_n \leq a - a_{k'} < \varepsilon.$$

此时根据定义可知, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$. \square

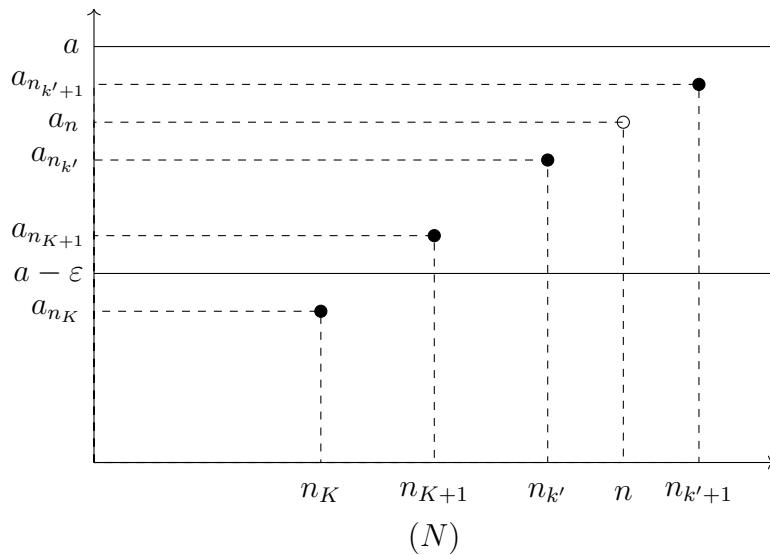


图 2.1: 当 $n > N$ 时, 其必定位于在两个相邻的子列指标 $n_{k'}$ 与 $n_{k'+1}$ 之间

例子 2.5. 若 $\{x_n\}$ 无界, 但不是无穷大量, 则存在两个子列: 其中一个子列收敛, 而另一个子列是无穷大量.

证明. 我们首先构造 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列. 由于 $\{x_n\}$ 非无穷大量, 故存在 $M > 0$, 使得对于任意的 $N > 0$, 总存在 $n > N$ 满足 $|x_n| \leq M$. 于是依次地

- 对 $N_1 = 1$, 取 $n_1 > N_1$ 使得 $|x_{n_1}| \leq M$;
- 对 $N_2 = n_1$, 取 $n_2 > N_2$ 使得 $|x_{n_2}| \leq M$;
- ……,

由此得到 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 其每一项均满足 $|x_{n_k}| \leq M$. 根据致密性定理, 存在 $\{x_{n_k}\}$ 的收敛子列 $\{x_{n_{k_l}}\}$, 这亦是 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列.

另一方面, 由于 $\{x_n\}$ 无界, 则对于任意的 $G > 0$, 总存在 $n > 0$ 使得 $|x_n| > G$. 于是依次地通过

- 对 $G_1 = 1$, 取 $m_1 > 0$ 使得 $|x_{m_1}| > G_1$;
- 对 $G_2 = 2$, 取 $m_2 > m_1$ 使得 $|x_{m_2}| > G_2$ (此处的 m_2 必定可以取到, 否则将意味着对一切 $m > m_1$ 都有 $|x_m| \leq G_2$, 这与 $\{x_n\}$ 无界矛盾);
- ……,

可得到 $\{x_n\}$ 的另一个子列 $\{x_{m_k}\}$. 我们需说明 $\{x_{m_k}\}$ 是无穷大量, 事实上, 对于任意的 $G > 0$, 取正整数 $K > G$, 则当 $k > K$ 时, 有

$$|x_{m_k}| > G_k = k > K > G.$$

□

练习 2.6. 给定数列 $\{a_n\}$ 和实数 a , 证明: a 的任意邻域都包含数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项 **当且仅当** a 是 $\{a_n\}$ 某个子列的极限 (此时, 我们称 a 是数列 $\{a_n\}$ 的一个**极限点**).

2.3. 根据递推公式计算数列极限 有些数列是在给出其第一项 a_1 后, 使用递推公式

$$a_{n+1} = f(a_n), \quad n \in \mathbb{N}^+$$

定义的, 这里的 $f(a_n)$ 表示某个关于 a_n 的函数. 事实上, 计算这类数列极限的方法有很多 (参考 [Pei] 第 1.5 节), 但在本节我们只讨论单调有界定理的应用.

例子 2.7. 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_1 = 1$ 和递推关系

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

给出. 判断 $\{x_n\}$ 的收敛性, 若收敛则计算其极限.

想法. 通过递推关系计算 $\{x_n\}$ 的前若干项, 我们有

$$x_1 = 1 < x_3 = \frac{3}{2} < x_5 = \frac{8}{5} < \cdots < x_6 = \frac{13}{8} < x_4 = \frac{5}{3} < x_2 = 2.$$

于是, 我们可以猜测 $\{x_n\}$ 是有界数列 (具体地: $1 \leq x_n \leq 2$), 且由其奇数项构成的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 单调递增, 由其偶数项构成的子列 $\{x_{2k}\}$ 单调递减. 根据单调有界定理, 我们知道这两个子列是收敛的, 此时若能证明它们收敛于同一极限 A , 则必有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$ (请思考为什么?).

证明. 首先证明数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 事实上, 利用数学归纳法, 由于 $1 \leq x_1 \leq 2$, 假设对于第 n 项有 $1 \leq x_n \leq 2$, 则根据递推关系可得

$$1 \leq x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \leq 2,$$

这说明数列 $\{x_n\}$ 满足 $1 \leq x_n \leq 2$. 此外, 重复使用两次递推关系, 我们有

$$x_{n+2} - x_n = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{1+x_n} - \frac{x_{n-2}}{1+x_{n-2}} = \frac{x_n - x_{n-2}}{(1+x_n)(1+x_{n-2})},$$

这说明对于任意的 $n \geq 3$, $x_{n+2} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-2}$ 具有相同的符号, 再结合

$$x_3 - x_1 = \frac{1}{2} > 0, \quad x_4 - x_2 = -\frac{1}{3} < 0$$

可知由 $\{x_n\}$ 的奇数项构成的子列 $\{x_{2k-1}\}$ 是单调递增的, 而由其偶数项构成的子列 $\{x_{2k}\}$ 是单调递减的. 根据单调有界定理, 子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与 $\{x_{2k}\}$ 均收敛.

现在, 设 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{2k-1} = A$, 对递推公式

$$x_{2k+1} = 1 + \frac{1}{x_{2k}} = 1 + \frac{x_{2k-1}}{1+x_{2k-1}}$$

取极限有 $A = 1 + \frac{A}{1+A}$, 由此解得 $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $A = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (舍去, $\{x_n\}$ 的上下界确保了该数列不可能以此为极限). 类似可以证明 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{2k-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 因此, 我们有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

注记 2.8. 考虑 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$, 该数列是通过递推关系

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^+$$

生成的, 其前 10 项为 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. 由于

$$\frac{F_1}{F_0} = 1, \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{F_n/F_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

因此例子 2.7 中的数列第 n 项 x_n 本质上是 Fibonacci 数列 $\{F_n\}$ 的第 n 项相对于前一项的增长率. 例子 2.7 的结论表明, 随着 n 的增大, Fibonacci 数列的增长率最终将收敛于「黄金比例」, 即 $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618$.

练习 2.9. 给定两个正数 a 和 b , 其满足 $0 < a < b$, 分别令 $a_1 = a$, $b_1 = b$.

(1) 若按照递推公式

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

定义数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 证明: 这两个数列收敛于同一个极限 (该极限称为 a 和 b 的算术几何平均).

(2) 若按照递推公式

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^+,$$

定义数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$. 证明: 这两个数列收敛于同一个极限 (该极限称为 a 和 b 的算术调和平均).

提示. 首先证明 $a \leq a_n < b_n \leq b$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$ 成立, 随后考虑单调有界定理.

专题三 函数极限的证明

3.1. 利用定义证明函数极限 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心领域 $U^\circ(x_0; \eta)$ 上有定义. 则 $f(x)$ 在 x_0 处的极限可以被定义为:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ (有限数)} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta (0 < \delta < \eta), \text{ 当 } x \in U^\circ(x_0; \delta) \text{ 时, 有} \\ |f(x) - A| < \varepsilon \end{array} \right\}.$$

其它情形的函数极限可以类似地被定义. 值得注意的是, 尽管函数极限与数列极限在定义上存在诸多类似之处, 但在使用定义证明函数极限时, 仍然存在着一些额外的需要注意之处:

- (1) 对于 $x \rightarrow x_0$ 类型的极限, 其刻画的是函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $U^\circ(x_0)$ 中的状态, 与 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义、取值如何均无关.
- (2) 对于数列而言, 其可以被视为定义在 \mathbb{N}^+ 上的函数. 然而, 函数的定义域不总是为 \mathbb{R} , 因此在寻找合适的 δ 时, 必须先确保 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0; \delta)$ 内有定义, 其次再讨论于此邻域上是否成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

例子 3.1. 利用定义证明极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} = 1$.

证明. 注意到函数 $f(x) = \sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}}$ 的定义域为 $\left(-\infty, -\frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$, 并且在其定义域内成立不等式

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} - 1 \right| &= \left| \frac{\frac{7}{16x^2 - 9} - 1}{\sqrt{\frac{7}{16x^2 - 9}} + 1} \right| \leq \left| \frac{7}{16x^2 - 9} - 1 \right| = \left| \frac{16x^2 - 16}{16x^2 - 9} \right| \\ &= \frac{16 \cdot |x - 1| \cdot |x + 1|}{|4x + 3| \cdot |4x - 3|}. \end{aligned}$$

对于任意的 $\varepsilon > 0$, 我们逐步地寻找合适的 $\delta > 0$. (首先, 要保证 $f(x)$ 在 $U^\circ(1; \delta)$ 内有定义, 需限制 $0 < \delta < 1/4$. 其次, 直接通过不等式

$$\frac{16 \cdot |x - 1| \cdot |x + 1|}{|4x + 3| \cdot |4x - 3|} < \varepsilon$$

求解合适的 δ 是较为困难的, 因此需要对上述不等式左端做适当放大, 于是进一步地限制 $0 < \delta < 1/8$. 此时, 取 $\delta = \min\{\varepsilon/32, 1/8\}$, 当 $x \in U^\circ(1, \delta)$ 时, 有

$$\frac{16 \cdot |x + 1| \cdot |x - 1|}{|4x + 3| \cdot |4x - 3|} \leq \frac{16 \cdot 3 \cdot |x - 1|}{3 \cdot \frac{1}{2}} < \varepsilon.$$

依照定义, 即有 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. \square

练习 3.2. 利用定义证明极限: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0$.

上述关于函数极限的例子是比较直观的，我们总能依据其函数图像「猜测」出对应的极限值。然而，也有一些函数的极限并不容易直接被看出。

例子 3.3. 考虑 Riemann 函数：

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & x = \frac{q}{p} \text{ (这里 } p, q \text{ 为互素整数, 且 } p > 0), \\ 0, & x \text{ 是无理数.} \end{cases}$$

证明：对于任意的 $x_0 \in [0, 1]$ ，有 $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0$ （当 $x_0 = 0$ 或 1 时，考虑单侧极限）。

想法. 对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，观察 $R(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的函数图像，我们不难发现：满足 $R(x) \geq \varepsilon$ 的 x 至多只有有限个。因此，我们只需要找到足够小的 $\delta > 0$ ，使得去心邻域 $U^\circ(x_0; \delta)$ 能刚好「避开」这有限个 x 即可。

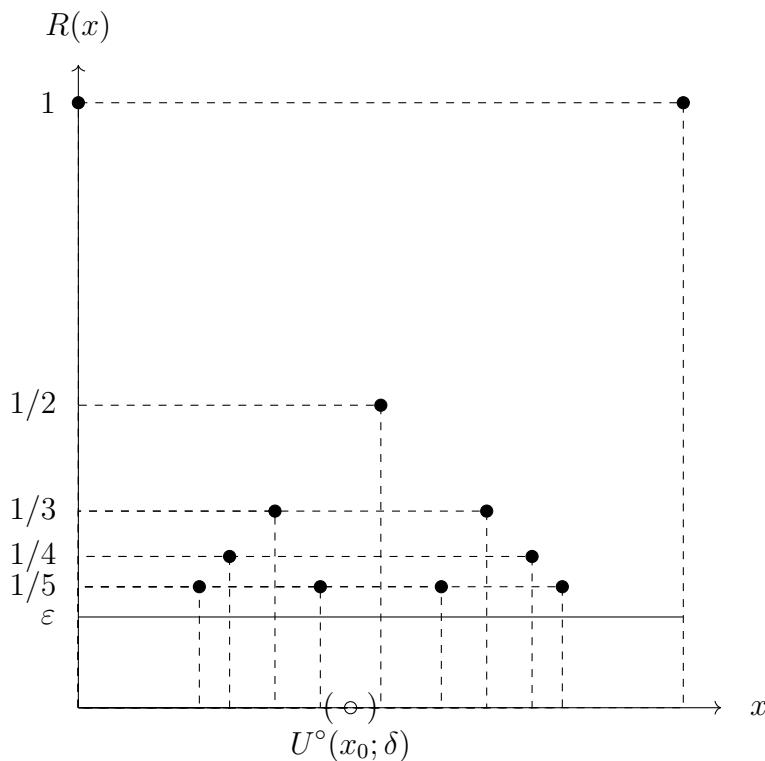


图 3.1: Riemann 函数在 $[0, 1]$ 区间上的图像（只画出 $R(x) \geq \varepsilon$ 的部分）

证明. 我们只讨论 $x_0 \in (0, 1)$ 的情形，而 x_0 位于 0 和 1 的情形则交由读者。对于任意的 $\varepsilon > 0$ ，由于当 x 为无理数时 $R(x) = 0$ ，因此使得 $R(x) \geq \varepsilon$ 的 x 必然是有理数。将有理数 x 写成既约分数 q/p （这里 $p \in \mathbb{N}^+$ ）的形式，则有

$$\begin{aligned} R(x) = R\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{1}{p} \geq \varepsilon &\iff p \leq \frac{1}{\varepsilon} \\ &\iff p \in \left\{1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor\right\}. \end{aligned}$$

换言之，这些使得 $R(x) \geq \varepsilon$ 的有理数 x ，其分母（表示成既约分数时）至多只有有限种可能的取值。因此，这些有理数 x 至多只有有限个（记它们作成的集合为 A ）。

于是, 对上述 $\varepsilon > 0$, 取

$$\delta = \min \left\{ x_0, 1 - x_0, \min_{a \in A - \{x_0\}} \{|a - x_0|\} \right\},$$

则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 成立 $0 \leq R(x) < \varepsilon$. \square

3.2. 基于函数方程与收敛性质的函数恒等性证明 在这一小节中, 我们将通过函数所满足的特定函数方程以及函数本身的极限行为, 证明其在定义域内的恒等性.

例子 3.4. 设函数 $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 满足函数方程 $f(x^2) = f(x)$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(1).$$

证明: $f(x) \equiv f(1)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^+$).

证明. 利用反证法. 若存在 $x_0 \in \mathbb{R}^+$ 使得 $f(x_0) \neq f(1)$, 取 $\varepsilon_0 = |f(x_0) - f(1)| > 0$, 如果 $x_0 > 1$, 则对于任意 (大) 的 $\Delta > 0$, 存在 $k > 0$ 使得 $x_0^{2^k} > \Delta$, 根据函数方程给出的递推关系, 我们有

$$|f(x_0^{2^k}) - f(1)| = |f(x_0^{2^{k-1}}) - f(1)| = \cdots = |f(x_0) - f(1)| = \varepsilon_0.$$

这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(1)$ 矛盾. 类似地, 可证明 $x_0 < 1$ 的情形. \square

练习 3.5. 设 $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ 满足函数方程

$$f(2x) = f(x).$$

若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 证明 $f(x) \equiv A$.

练习 3.6. 设 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个周期函数, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 证明 $f(x) \equiv A$.

3.3. 复合函数的极限问题 在函数极限的计算中, 存在这样一个十分自然的问题: 如果已知 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 和 $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$ (为了方便讨论, 这里均假设 a 、 A 和 B 为有限数), 那么是否成立

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow A} f(y)? \quad (3.1)$$

换言之, 在极限的计算中, 什么情况下允许作变量代换?

事实上, 等式 (3.1) 的成立并非无条件的. 例如: 设 $a = 0$, 取函数 $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

通过计算可知 $A = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = 1$. 然而, 考虑数列

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{2n\pi} \right\} \quad \text{和} \quad \{y_n\} = \left\{ \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \right\},$$

它们均收敛于 $a = 0$, 但是 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(g(x_n)) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(g(y_n)) = 1$. 由 Henie 定理 (归结原理) 可知, 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$ 不存在, 故此时等式 (3.1) 并不成立.

下述命题给出了等式 (3.1) 成立的两个充分条件, 但它们都不是必要条件.

命题 3.7. 设 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$. 如果此时满足下述条件之一:

(1) 存在 a 的某个去心邻域 $U^\circ(a; \eta)$, 使得在该邻域内恒有 $g(x) \neq A$;

(2) $f(y)$ 在点 A 处连续, 即: $B = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = f(A)$,

则有 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$.

证明. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = B$, 则存在 $\delta_1 > 0$, 当 $0 < |y - A| < \delta_1$ 时成立 $|f(y) - B| < \varepsilon$ (注意: 这里并不能保证当 $y = A$ 时成立 $|f(y) - B| < \varepsilon$); 又由于 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, 则对于上述找到的 $\delta_1 > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta_2$ 时成立 $|g(x) - A| < \delta_1$.

- 若条件 (1) 成立, 则取 $\delta = \min\{\delta_2, \eta\}$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时有

$$0 < |g(x) - A| < \delta_1 \implies |f(g(x)) - B| < \varepsilon.$$

- 若条件 (2) 成立, 则只需取 $\delta = \delta_2$, 因为当 $g(x) = A$ 时即有 $f(g(x)) = B$.

因此根据定义, 当满足上述二条件之一时, 均有 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = B$. □

此外, 关于复合函数的极限问题, 下面这个例子也是十分经典的.

例子 3.8. 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$. 但是, 如果 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ 存在, 则不一定有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$.

证明. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$ 存在, 不妨设其极限值为 A . 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $0 < |t| < \delta_1$ 时, 有

$$|f(t^3) - A| < \varepsilon.$$

此时取 $\delta = \delta_1^3$, 当 $0 < |x| < \delta$ 时, 存在 t 使得 $0 < |t| < \delta_1$ 且 $x = t^3$ (这是结论成立的关键), 此时有

$$0 < |f(t^3) - A| = |f(x) - A| < \varepsilon.$$

若极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不一定存在. 例如: 取 $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ 为符号函数, 则有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) = 1$, 但

$$-1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1,$$

故极限 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在. □

专题四 数列极限与函数极限的计算举例

在数学分析中, 极限的计算问题往往种类繁多, 且十分考验技巧性. 本专题仅列出一些常用且读者目前所能理解的方法. 而更多的方法, 一方面依赖于数学分析后续课程的学习 (例如 Taylor 展开, 积分法), 另一方面需要读者通过自主练习不断积累.

4.1. 关于极限计算问题的两个注记 对于初学者而言, 以下两点在极限的计算过程中是需要特别注意的.

(1) **关于变量代换:** 假设我们需要计算极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$, 所谓变量代换法, 就是在已知 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$ 成立的基础上, 令 $y = g(x)$, 通过 $\lim_{y \rightarrow A} f(y)$ 来计算原极限. **但需要注意的是, 变量代换并非无条件的!** 事实上, 如命题 3.7 所述, 只要满足下述二条件之一, 就能确保上述变量代换的合理性:

- (a) 存在关于 a 的某一去心邻域 $U^\circ(a; \eta)$, 使得在 $U^\circ(a; \eta)$ 中恒有 $g(x) \neq A$;
- (b) 函数 $f(y)$ 在 $y = A$ 处连续, 即 $\lim_{y \rightarrow A} f(y) = f(A)$.

(2) **幂指型函数极限的计算:** 对于计算形如 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$ 的极限 (这里要求 $f(x)$ 在关于 a 的某个去心邻域内的取值恒正), 常用的方法是先对 $f(x)^{g(x)}$ 作如下变形:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \ln f(x)).$$

如果 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)$ 存在 (不妨设极限值为 A), 由于指数函数 $\exp(x)$ 在 \mathbb{R} 上每一点都连续, 则可作变量代换 $y = g(x) \ln f(x)$, 从而有

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \exp(g(x) \ln f(x)) = \lim_{y \rightarrow A} \exp(y) = \exp A.$$

例子 4.1. 计算数列极限: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n$.

不规范的解答过程. 由于

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}}$$

且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = e$ 以及 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故原极限为值 $e^1 = e$. \square

规范的解答过程. (暂时不使用上述方法) 注意到, 当 $n \geq 1$ 时,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} + \frac{n}{n+1}} \leq \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} + 1}.$$

利用特殊极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, 并根据 Heine 定理 (归结原则), 我们有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{n+1}{n^2}\right)^1 = e \cdot 1 = e.$$

结合 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 由数列极限的迫敛性可知 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^n = e$. \square

4.2. 利用等价量代换 等价量替换是一种处理乘除式极限的技巧，适当的等价量替换能够化简函数的形式，进而方便极限的计算。

(1) 常用的等价量代换公式（请务必牢记!）：当 $x \rightarrow 0$ 时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$$

$$\sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \quad (a > 0) \sim \frac{(1+x)^b - 1}{b} \quad (b \neq 0),$$

以及

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

(2) 变量代换原则：如果函数 $u(t)$ 在 $t \rightarrow a$ 时是无穷小量，则当 $t \rightarrow a$ 时不一定成立。诸如 $u(t) \sim \sin u(t)$, $u(t) \sim \tan u(t)$ 等结论。例如：若 $u(t) = t \sin \frac{1}{t}$ ，则可以证明当 $t \rightarrow 0$ 时 $u(t)$ 是无穷小量，但此时不成立 $u(t) \sim \sin u(t)$ ，这是因为极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin u(t)}{u(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \left(t \sin \frac{1}{t} \right)}{t \sin \frac{1}{t}}$$

根本不存在（注意：要定义函数在 $t \rightarrow 0$ 时的极限，必须确保该函数在关于 0 的某个去心邻域内有定义）。然而，如果能保证 $u(x)$ 在某个去心邻域 $U(a; \delta)$ 内取值恒不为零，那么我们完全可以对 (1) 中的等价量关系作变量代换 $x = u(t)$ （其原理和参照命题 3.7）。

(3) 为什么不能对「加减型」极限贸然使用等价量替换？我们首先思考一下等价量的本质，根据定义：

$$\begin{aligned} \text{当 } x \rightarrow a \text{ 时, } f(x) \sim g(x) &\iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \\ &\iff \text{当 } x \rightarrow a \text{ 时, } f(x) - g(x) = o(g(x)). \end{aligned}$$

这意味着，当 $x \rightarrow a$ 时，若 $f(x) \sim g(x)$ ，则有

$$f(x) = g(x) + (f(x) - g(x)) = g(x) + o(g(x)).$$

因此对于课本 [Encu] 第 3.5 节例 2 注中的情形，其本质上应为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + o(x)) - (x + o(x))}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^3},$$

但我们根据此表达式不足以计算相应的极限。事实上，如果考虑更加「精细」的等价量关系：

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3),$$

则可以计算出正确结果。

例子 4.2. 设 $a, b > 1$, 计算极限: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$.

解答. 令 $f(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$, 根据 Heine 定理, 当 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 存在时, 我们有

$$\text{原极限} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

注意到

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right)\right).$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) = 0$, 且当 $x \neq 0$ 时, 有 $\frac{a^x + b^x}{2} \neq 1$, 因此当 $x \rightarrow 0$ 时存在下述等价量关系

$$\ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right) \sim \frac{a^x + b^x}{2} - 1.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - 1) + (b^x - 1)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln a + x \ln b + o(x)}{2x} = \frac{1}{2} \ln ab, \end{aligned}$$

同时又注意到指数函数 $\exp(x)$ 在 \mathbb{R} 上任意一点都连续 (见 [Encu] 第 3.2 节例 4), 因此由命题 3.7, 我们可以作代换 $y = \frac{1}{x} \ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right)$, 进而

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(1 + \left(\frac{a^x + b^x}{2} - 1\right)\right)\right) \\ &= \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2} \ln ab} \exp y = \sqrt{ab}. \end{aligned}$$

□

练习 4.3. 计算下列极限:

$$\begin{aligned} (1) \quad &\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{2} \left(1 - \cos \frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2 + 1} - n}; & (2) \quad &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\ln(1 + \sin x)}; \\ & (3) \quad &\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

答案. (1) 1; (2) 1; (3) $e^{-\frac{1}{2}}$.

□

4.3. 利用初等变形 要计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, 有时候可以使用初等数学的方法将 x_n 的表达式化简.

例子 4.4. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ ($x \neq 0$).

证明. 对分子分母同时乘以 $\sin \frac{x}{2^n}$, 并反复利用二倍角公式, 我们有

$$\begin{aligned} \text{原极限} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \cdots \cos \frac{x}{2^{n-1}} \sin \frac{x}{2^{n-1}}}{\sin \frac{x}{2^n}} \\ &= \cdots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

□

例子 4.5. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

解答. 我们首先使用裂项相消, 将表达式化简:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+2)} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \end{aligned}$$

(针对上述最后一个等式, 考虑求和式中的第 k ($k = 2, \dots, n-1$) 个求和项, 我们有

$$\cdots + \underbrace{\frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}}_{\text{第 } k \text{ 个求和项}} + \frac{1}{2(k+1)} + \cdots,$$

可以看出第 k 个求和项中「中间」的负项, 总能同时消去第 $k-1$ 个求和项中「最右边」的正项与第 $k+1$ 个求和项中「最左边」的正项). 于是,

$$\text{原极限} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} \right) = \frac{1}{4}.$$

□

练习 4.6. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1^3 + 2^3 + \cdots + k^3}};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{1-n} (1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x}) \cdots (1-\sqrt[n]{x}).$$

答案. (1) 2; (2) $\frac{1}{n!}$;

□

提示. (1) 可以考虑恒等式 (此恒等式可通过数学归纳法证明):

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

(2) 注意到当 $x > 0$ 时, 对任意的 $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有

$$1-x = (1-\sqrt[k]{x})(1+x^{\frac{1}{k}}+\cdots+x^{\frac{k-1}{k}}).$$

4.4. 利用迫敛性及其推广形式 以数列极限为例, 当计算 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 比较困难时, 可以考虑对 x_n 进行适当地放大和缩小, 例如找到 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 使得 (从某一项开始)

$$y_n \leq x_n \leq z_n.$$

如果此时 $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$ 存在且相等 (假设极限值为 A), 则必有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = A$.

例子 4.7. 计算数列极限: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$.

解答. 根据对数不等式, 我们可构造如下放缩

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{n+k} \right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{n+k-1} \right).$$

利用对数函数的性质,

$$\text{上式最右端} = \ln \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \cdots \cdot \frac{n+n}{n+n-1} \right) \equiv \ln 2,$$

并且当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\text{上式最左端} = \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \cdots \cdot \frac{n+n+1}{n+n} \right) = \ln \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow \ln 2.$$

根据迫敛性可知原极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \ln 2$. □

例子 4.8. 计算函数极限: $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$.

解答. 注意到当 $x \neq 0$ 时成立不等式 $\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$, 于是

$$\begin{cases} 1-x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时;} \\ 1-x > x \left[\frac{1}{x} \right] \geq 1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x) = 1$ (这里需要首先考虑两个单侧极限), 根据迫敛性我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1,$$

从而原极限 $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$. □

练习 4.9. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n^k + 1)^{\frac{1}{k}}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n}.$$

答案. (1) 1; (2) 0. □

提示. (1) 尝试使用不等式 $n^k < n^k + 1 < (n+1)^k$ 构造放缩; (2) 对于分母中的每个因子 $2k$, 根据算术-几何平均值不等式有:

$$2k = \frac{(2k-1) + (2k+1)}{2} > \sqrt{(2k-1)(2k+1)}.$$

练习 4.10 (Cauchy 命题的一个推论). 设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$ (有限数), 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

提示. 利用 Cauchy 命题和算术-几何-调和均值不等式.

当使用迫敛性计算极限时, 若通过放缩产生的新数列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 并不收敛于同一极限, 但二者的极限值只相差一个任意小的常数, 则迫敛性仍然有效.

例子 4.11. 设正实数列 $\{a_n\}$ 有上界, 且 $\sup\{a_n\} = A$, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k^n \right)^{\frac{1}{n}} = A.$$

证明. 由于 $\sup\{a_n\} = A$, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $n_0 > 0$, 使得

$$A - \varepsilon < a_{n_0}.$$

于是当 $n > n_0$ 时, 由于 $\{a_n\}$ 是正实数列, 则 $A > 0$ 且成立

$$A - \varepsilon < a_{n_0} = (a_{n_0}^n)^{\frac{1}{n}} < \left(\sum_{k=1}^n a_k^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq (nA^n)^{\frac{1}{n}}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (nA^n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{nA^n} = A$, 由极限的保不等式性, 我们有

$$A - \varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq A.$$

最后根据 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 我们有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n a_k^n \right)^{\frac{1}{n}} = A$. □

专题五 函数连续性的证明与应用

5.1. 函数连续性的证明 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 要证明 $f(x)$ 在 $x_0 \in I$ 处连续, 我们只需说明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 为此, 我们可以使用下述方法:

- (1) **利用定义:** 证明: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时 (注意这里不必要求 $0 < |x - x_0|$) 成立 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;
- (2) **利用单侧连续性:** 证明: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$;
- (3) **利用数列语言:** 函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in I$ 处连续的充分必要条件是: 对于 I 中任意收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$, 成立 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$; (通常, 我们使用此命题的否定形式证明函数在某一点处的不连续性)

此外, 若要证明函数在某一区间上连续, 我们还可以

- (4) **利用四则运算法则和复合函数的连续性:** 连续函数与连续函数经过有限次四则运算 (除法运算要求作为分母的函数在区间内非零) 和复合运算 (外层函数的定义域必须包含内层函数的值域) 后的结果仍是连续的.

例子 5.1. 依次解答下列问题:

- (1) 设 $f(x), g(x)$ 为区间 I 上的连续函数, 证明:

$$F(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

均为 I 上的连续函数;

- (2) 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, c 是一个大于零的常数, 证明:

$$H(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & -c \leq f(x) \leq c, \\ c, & f(x) > c. \end{cases}$$

证明. (1) 注意到

$$F(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}, \quad G(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}.$$

因为函数 $\varphi(x) = |x|$ 在 \mathbb{R} 上连续 (见教材 [Encu] 习题 4.1 第 1(2) 题), 由复合函数的连续性可知 $|f(x) + g(x)|$ 在 I 上连续, 再根据连续函数的四则运算法则即可证得 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的连续性.

(2) 事实上, 对于任意的 $x \in I$, 函数 $H(x)$ 的取值即为 $c, -c, f(x)$ 三者介于最大值与最小值的「中间」值. 因此, 我们有

$$\begin{aligned} H(x) &= c + (-c) + f(x) - \max\{c, -c, f(x)\} - \min\{c, -c, f(x)\} \\ &= f(x) - \max\{c, f(x)\} - \min\{-c, f(x)\}. \end{aligned}$$

根据 (1) 和连续函数的四则运算法则, 可知 $H(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续. \square

例子 5.2. 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的函数, 且只存在第一类间断点, 定义

$$\tilde{f}(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明: $\tilde{f}(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续.

证明. 由于 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上只存在第一类间断点, 因此对于任意的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 极限 $\lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$ 均存在, 这意味着 $\tilde{f}(x)$ 在整个实数轴 \mathbb{R} 上有定义.

由于 $\tilde{f}(x_0) = \lim_{t \rightarrow x_0} f(t)$, 因此对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $t \in U^\circ(x_0, \delta)$ 时, 成立不等式

$$\tilde{f}(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(t) < \tilde{f}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

此时, 将 t 限制在去心邻域 $U^\circ(x_0, \delta)$ 中, 对于任意的 $x \in U^\circ(x_0, \delta)$, 令 $t \rightarrow x$ 并取极限, 根据函数极限的保不等式性, 我们有

$$\tilde{f}(x_0) - \varepsilon < \tilde{f}(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \tilde{f}(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(t) \leq \tilde{f}(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < \tilde{f}(x_0) + \varepsilon,$$

即 $\tilde{f}(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续. 最后注意到 x_0 的任意性, 于是有 $\tilde{f}(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续. \square

练习 5.3. 设 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的单调函数, 定义

$$\tilde{f}(x) = \lim_{t \rightarrow x^+} f(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明: $\tilde{f}(x)$ 在 \mathbb{R} 上右连续.

提示. 首先需要使用单调有界原理证明 $\tilde{f}(x)$ 在整个 \mathbb{R} 上有定义, 剩余的证明仿照例子 5.2 即可.

5.2. 周期函数的最小正周期问题 设 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的周期函数, 正实数 T 被称为函数 $f(x)$ 的一个**正周期**, 如果

$$f(x + T) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

而 $f(x)$ 所有周期中最小的正整数则被称为 $f(x)$ 的**最小正周期**, 我们想知道的是: 任意一个周期函数是否都存在最小正周期?

上述问题的答案是否定的. 事实上, 考虑 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

因为一个有理数 (无理数) 加上一个有理数的结果依然是有理数 (无理数), 所以 $D(x)$ 的正周期由所有正有理数构成. 然而, 对于正有理数集 \mathbb{Q}^+ , 我们不难验证

$$0 = \inf \mathbb{Q}^+ \notin \mathbb{Q}^+,$$

这意味着集合 \mathbb{Q}^+ 没有最小值, 进而 $D(x)$ 无最小正周期.

但是, 如果我们为周期函数 $f(x)$ 赋予连续性条件, 那么下述命题将表明: 当 $f(x)$ 非常数时, 其必定存在最小正周期.

命题 5.4. 证明：（非常数的）连续周期函数必有最小正周期.

想法. 设 $f(x)$ 是一个（非常数的）连续周期函数，记 A 为由 $f(x)$ 的所有正周期构成的集合，若 $f(x)$ 有最小正周期 T_0 ，则必有

$$T_0 = \min A = \inf A.$$

反之，由于集合 A 有下界，若能证明 A 的下确界 T_0 仍是 $f(x)$ 的一个正周期（即 $T_0 \in A$ ），则能说明 $f(x)$ 有最小正周期.

证明. 设 A 是由 $f(x)$ 的所有正周期构成的集合，由于 0 是该集合的一个下界，根据确界原理，其存在下确界（记为 T_0 ）.

首先证明 T_0 仍是 $f(x)$ 的一个周期. 由于 $T_0 = \inf A$ ，故存在 A 中的数列 $\{T_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T_0$ （见教材 [Encu] 第 2.3 节例 3). 于是对于任意的 $x \in \mathbb{R}$ ， $\{x + T_n\}$ 是一收敛至 $x + T_0$ 的数列，进而根据 $f(x)$ 的连续性与 Heine 定理，有

$$f(x + T_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = f(x),$$

这说明 T_0 是 $f(x)$ 的一个周期.

其次证明 T_0 是正周期，即 $T_0 \in A$. 由于 $\{T_n\}$ 是正数列，且 $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = T_0$ ，根据极限的保号性有 $T_0 \geq 0$. 假设 $T_0 = 0$ ，则对于 \mathbb{R} 上任意一点 x ，对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ ，总存在与之对应的整数 m_n 使得

$$|x - m_n \cdot T_n| < T_n$$

(这里本质上是要找距离 x 最近的关于 T_n 的周期网点，即等于 T_n 整数倍的点，具体可见图 5.1). 现在考虑数列 $\{m_n \cdot T_n\}$ ，由于 $\{T_n\}$ 是无穷小量，利用迫敛性可知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n \cdot T_n = x.$$

此时，再次结合 Heine 定理与 $f(x)$ 的连续性，我们有

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(m_n \cdot T_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(0) = f(0).$$

由 x 的任意性可知 $f(x) \equiv f(0)$ ，但这与 $f(x)$ 非常数产生矛盾，由此推出 $T_0 > 0$. \square

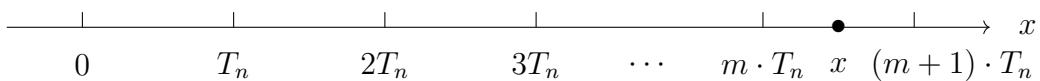


图 5.1: $f(x)$ 关于 T_n 的周期网点

5.3. 闭区间上连续函数性质的应用 对于闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ ，其在对应的闭区间上总是具备下述「整体」性质：

- (1) **有界性：** $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界；

(2) **最值性:** $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可以取到最大值与最小值, 即分别存在 $\xi, \eta \in [a, b]$ 使得

$$f(\xi) = \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}, \quad f(\eta) = \min_{x \in [a, b]} \{f(x)\}.$$

(3) **介值性:** $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可以取到介于最大值与最小值之间的一切值, 即对于任意满足

$$\min_{x \in [a, b]} \{f(x)\} < \mu < \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$$

的实数 μ , 总存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = \mu$.

(4) **零点存在性:** 这是介值性的直接推论. 如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号, 则存在 $x_0 \in [a, b]$ 使得 $f(x_0) = 0$.

例子 5.5. 设函数 $f(x)$ 在整个 \mathbb{R} 上连续, 若 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, 且 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得最小值. 证明: 若 $f(a) < a$, 则 $F(x) = f(f(x))$ 至少在两点处取得最小值.

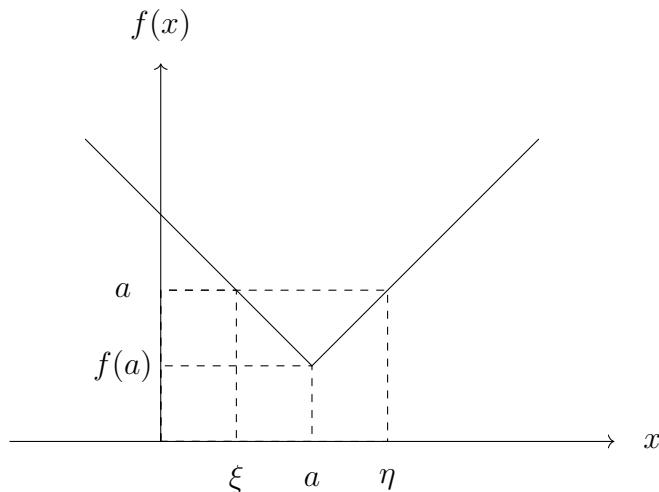


图 5.2: 函数 $f(x)$ 的大致图像

证明. 由于 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, 因此取 $E = 2|a|$, 则存在公共的 $\Delta > 0$, 使得对于任意的 $x > \Delta$ 或 $x < -\Delta$ 成立 $f(x) > 2|a|$. 此时分别取

$$x_1 = \min\{-\Delta, a\} - 1, \quad x_2 = \max\{\Delta, a\} + 1,$$

则有 $f(x_1), f(x_2) > 2|a| > a$. 由于 $f(x)$ 分别在闭区间 $[x_1, a]$ 和 $[a, x_2]$ 上连续, 且 $f(a) < a$, 则根据介值性: 分别存在 $\xi \in [x_1, a]$ 和 $\eta \in [a, x_2]$ 使得

$$f(\xi) = f(\eta) = a.$$

又注意到 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得最小值, 因此

$$f(f(\xi)) = f(f(\eta)) = f(a) = \min_{x \in \mathbb{R}} \{f(x)\},$$

这表明 $F(x)$ 在 ξ 和 η 两点处取得最小值. □

例子 5.6. 设 $f_n(x) = x + x^2 + \cdots + x^n$ ($n = 2, 3, \dots$).

- (1) 证明: 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的实根 x_n ;
- (2) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并计算其极限.

解答. 注意到对于任意的正整数 k , 幂函数 x^k 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调递增, 因此函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上亦严格单调递增.

(1) 由于 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $f_n(0) = 0$ 且 $f_n(1) = n > 1$, 则根据闭区间上连续函数的介值性, 存在 $x_n \in (0, 1)$ 使得 $f_n(x_n) = 1$. 同时, 由 $f_n(x)$ 的严格单调递增性可知, 这样的 x_n 是唯一的.

(2) 我们首先断言数列 $\{x_n\}$ 是严格单调递减的, 事实上, 如果对于某个正整数 n 成立 $x_n \leq x_{n+1}$, 则

$$1 = f_n(x_n) = \sum_{k=1}^n x_n^k < \sum_{k=1}^{n+1} x_{n+1}^k = f_{n+1}(x_{n+1}) = 1,$$

但这是不可能的. 因为 $\{x_n\}$ 有下界 (0 是它的一个下界), 根据单调有界原理, $\{x_n\}$ 收敛. 现在设 $A = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, 根据等比数列的前 n 项和公式, 我们有

$$1 = f_n(x_n) = \sum_{k=1}^n x_n^k = \frac{x_n(1 - x_n^n)}{1 - x_n} \implies 1 - x_n = x_n(1 - x_n^n).$$

此时, 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^n$ 存在 (不妨设极限值为 B), 那么对上式两端取极限可得

$$1 - A = A(1 - B) \implies A = \frac{1}{2 - B}.$$

事实上, 由 (1) 的证明可知, 当 $n \geq 2$ 时有 $x_n \in (0, 1)$, 于是

$$0 < x_n^n = \frac{n \cdot x_n^n}{n} < \frac{x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^n}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow +\infty),$$

进而根据迫敛性有 $B = 0$, 由此可以解得 $A = \frac{1}{2}$. □

练习 5.7. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$. 证明: 对于任意的正整数 n , 存在 $\xi_n \in [0, 1]$, 使得

$$f\left(\xi_n + \frac{1}{n}\right) = f(\xi_n).$$

提示. 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 构造函数 $F(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$, 则有

$$F(0) + F\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + F\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0.$$

此时对于上述等式左边的每个 $F\left(\frac{k}{n}\right)$, 或者全部为零, 或者存在两者异号.

专题六 函数的一致连续性

6.1. 函数一致连续性的判断 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 要判断此函数在区间 I 上的一致连续性, 通常可以考虑下述方法:

- (1) **利用一致连续的定义:** 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 去找相应的 $\delta > 0$, 使之满足: 对任意的 $x', x'' \in I$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时成立

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

- (2) **利用 Cantor 定理 (一致连续性定理):** 设 \tilde{I} 是某一包含 I 的闭区间, 若能证明函数 $f(x)$ 在 \tilde{I} 上连续, 则由 Cantor 定理可知 $f(x)$ 在 \tilde{I} 上一致连续, 进而有 $f(x)$ 在 $I \subseteq \tilde{I}$ 上一致连续.

- (3) **利用一致连续性的数列语言:** 函数 $f(x)$ 在 I 上一致连续的充分必要条件是: 对于区间 I 中任意的两数列 $\{x'_n\}$ 和 $\{x''_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n - x''_n) = 0$, 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x'_n) - f(x''_n)] = 0$$

(通常, 我们使用数列语言的否定形式证明非一致连续性).

例子 6.1. 证明: 函数 $f(x) = \sin \sqrt{x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

证明. 注意到对于任意的 $x', x'' \in [1, +\infty)$, 我们有不等式:

$$|\sin \sqrt{x'} - \sin \sqrt{x''}| \leq |\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| \leq |x' - x''|.$$

于是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 我们一方面取 $\delta_1 = \varepsilon$, 则对于任意的 $x', x'' \in [1, +\infty)$, 当 $|x' - x''| < \delta_1$ 时成立

$$|\sin \sqrt{x'} - \sin \sqrt{x''}| \leq |x' - x''| < \varepsilon.$$

而另一方面, 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上连续, 根据 Cantor 定理, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上一致连续 (这里之所以考虑闭区间 $[0, 2]$ 而非 $[0, 1]$ 上的一致连续性, 是为了涵盖 x' 和 x'' 分别位于区间 $[0, 1]$ 和 $[1, +\infty)$ 的情况). 因此, 对上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得对于任意的 $x', x'' \in [0, 2]$, 当 $|x' - x''| < \delta_2$ 时亦成立

$$|\sin \sqrt{x'} - \sin \sqrt{x''}| < \varepsilon.$$

因此, 对上述 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则对于任意的 $x', x'' \in [0, +\infty)$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 即有 $|\sin \sqrt{x'} - \sin \sqrt{x''}| < \varepsilon$. \square

练习 6.2. 证明: 函数 $f(x) = \cos \sqrt{x}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

例子 6.3. 设函数 $f(x) = \frac{x+2}{x+1} \sin \frac{1}{x}$, 证明:

- (1) 对于任意的 $a > 0$, $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续;

(2) $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致连续.

证明. (1) 由于 $a > 0$, 则对于任意的 $x', x'' \in [a, +\infty)$, 我们有:

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= \left| \frac{x'+2}{x'+1} \sin \frac{1}{x'} - \frac{x''+2}{x''+1} \sin \frac{1}{x''} \right| \\ &= \left| \frac{x'+2}{x'+1} \sin \frac{1}{x'} - \frac{x'+2}{x'+1} \sin \frac{1}{x''} + \frac{x'+2}{x'+1} \sin \frac{1}{x''} - \frac{x''+2}{x''+1} \sin \frac{1}{x''} \right| \\ &\leq \frac{x'+2}{x'+1} \cdot \left| \sin \frac{1}{x'} - \sin \frac{1}{x''} \right| + \left| \frac{x'+2}{x'+1} - \frac{x''+2}{x''+1} \right| \cdot \left| \sin \frac{1}{x''} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| + \frac{|x' - x''|}{(1+x')(1+x'')} \\ &= |x' - x''| \cdot \left(\frac{2}{x' \cdot x''} + \frac{1}{(1+x')(1+x'')} \right) \leq \frac{3 \cdot |x' - x''|}{a^2}. \end{aligned}$$

于是, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{a^2 \varepsilon}{3}$, 则对于任意的 $x', x'' \in [a, +\infty)$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时成立:

$$|f(x') - f(x'')| \leq \frac{3 \cdot |x' - x''|}{a^2} < \varepsilon.$$

根据定义, $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

(2) 分别取 $(0, +\infty)$ 中的数列:

$$x'_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad x''_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n - x''_n) = 0$, 但

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f(x'_n) - f(x''_n)] = \lim_{n \rightarrow +\infty} - \left(\frac{1 + \pi + 4n\pi}{1 + \pi/2 + 2n\pi} \right) \sin(2n\pi + \pi/2) = -2.$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致连续. □

练习 6.4. 证明: 函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 内分别是一致连续的, 但在 $(-1, 0) \cup (0, 1)$ 上非一致连续.

提示. 对于 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的一致连续性, 可以考虑辅助函数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, 1], \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), & x = 0. \end{cases}$$

则一方面, 根据 Cantor 定理可知, $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上一致连续; 而另一方面, 根据函数 \tilde{f} 的定义, 在开区间 $(0, 1)$ 上恒成立 $f(x) = \tilde{f}(x)$.

6.2. 分步技巧在一致连续及其相关问题中的应用 对于某些涉及一致连续性的问题, 往往需要使用分步技巧 (见专题一) 进行处理.

例子 6.5. 设函数 $f(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 上连续, 函数 $\varphi(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 上一致连续, 若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0,$$

证明: $f(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 上一致连续.

想法. 注意到, 对于任意的 $x', x'' \in [c, +\infty)$, 存在如下不等式:

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - \varphi(x')| + |\varphi(x') - \varphi(x'')| + |f(x'') - \varphi(x'')|.$$

因此, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 我们需要设法找到相应的 $\delta > 0$, 使得当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 此不等式右边的三个绝对值均小于 $\varepsilon/3$.

证明. 首先, 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0$, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\Delta > c$, 使得对于一切的 $x > \Delta$ 成立

$$|f(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又因为 $\varphi(x)$ 在 $(\Delta, +\infty)$ 上一致连续, 故对上述 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\delta_1 > 0$, 使得对于任意的 $x', x'' > \Delta$, 当 $|x' - x''| < \delta_1$ 时成立

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

这意味着, 对上述 $\varepsilon > 0$, 当 $x', x'' > \Delta$ 且 $|x' - x''| < \delta_1$ 时成立

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &\leq |f(x') - \varphi(x')| + |\varphi(x') - \varphi(x'')| + |f(x'') - \varphi(x'')| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

其次, 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[c, \Delta + 1]$ 上连续, 由 Cantor 定理可知, $f(x)$ 在此区间上一致连续. 故对于上述 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_2 > 0$, 使得对于任意的 $x', x'' \in [c, \Delta + 1]$, 当 $|x' - x''| < \delta_2$ 时成立

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

因此, 对于最开始的 $\varepsilon > 0$, 我们取 $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$, 此时对于任意的 $x', x'' \in [c, +\infty)$, 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. \square

练习 6.6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[c, +\infty)$ 上连续, 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[c, +\infty)$ 上一致连续.

提示. 这题本质上是例子 6.5 的一个推论, 只需将其中的 $\varphi(x)$ 换成常数函数即可. 当然, 读者也可以在不使用例子 6.5 的前提下直接证明, 具体地:

第一步: 利用极限的存在性和 Cauchy 收敛准则证明: 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在相应的 $\Delta > c$, 使得对于一切 $x', x'' \in [\Delta, +\infty)$ 成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ (注意: 因为 Δ 与 ε 的取法有关, 因此不能直接说 $f(x)$ 在 $[\Delta, +\infty)$ 上一致连续).

第二步: 利用 Cantor 定理证明: $f(x)$ 在有限闭区间 $[a, \Delta + 1]$ 上一致连续.

例子 6.7. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 且对于任意的 $x > 0$ 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + n) = A \text{ (有限数).}$$

证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

想法. 要证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则需要说明对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\Delta > 0$, 使得对于一切的 $x > \Delta$ 成立

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

由于对任意的 $x \in [0, 1]$, 有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + n) = A$. 因此对于上述的 $\varepsilon > 0$ 以及区间 $[0, 1]$ 上的每一个点 x , 存在相应的 $N_x > 0$, 使得当 $n > N_x$ 时有

$$|f(x + n) - A| < \varepsilon.$$

理论上讲, 我们只需要取 $\Delta = \max\{N_x : x \in [0, 1]\}$ 即可. 然而, **问题的关键在于**, 这里存在无穷多个 N_x , 它们的最大值可能根本不存在! 因此, 我们只能从这些 N_x 中挑选有限个, 然后利用一致连续性过渡到所有的 $x \in [0, 1]$ 上.

证明. 由于 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续, 因此对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于一切的 $x', x'' \in [0, +\infty)$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取正整数 $m > 1/\delta$, 我们将闭区间 $[0, 1]$ 划分成 m 等份, 并记对应的分点为 $x_k = k/m$ ($k = 1, 2, \dots, m$). 对于这里的每一个划分点 x_k , 由于 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_k + n) = A$, 故存在相应的正整数 $N_k > 0$, 使得当 $n > N_k$ 时, 有

$$|f(x_k + n) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在我们取 $\Delta = \max\{N_1, N_2, \dots, N_m\} + 1$, 则当 $x > \Delta$ 时, 记 $n = \lfloor x \rfloor \geq \Delta$, 因为 $x - n \in [0, 1)$, 故存在某个 $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ 使得

$$|(x - n) - x_k| = |x - (x_k + n)| < \delta.$$

于是, 我们有

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f(x_k + n)| + |f(x_k + n) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. □

专题七 一元函数的导数

7.1. 利用定义证明函数在某一点处的可导性 设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义, 如果极限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (7.1)$$

存在, 那么我们称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 并将此极限值称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数. 因此, 证明函数在某一点处的可导性就等价于证明极限 (7.1) 的存在性. 关于可导性的证明, 我们需要给出如下注记:

注记 7.1. 假设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义, 若 $f(x)$ 在这一邻域内完全由同一初等函数定义, 那么 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处必可导, 且它在这一点的导数可以通过初等函数的导数公式计算. 若 $f(x)$ 在这一邻域内由不同的初等函数表示 (例如分段函数), 则此时必须从导数的定义出发来验证其可导性.

例子 7.2. 设 $f(x) = |x|^3$, 求 $f'(0)$ 和 $f''(0)$, 并证明 $f'''(0)$ 不存在.

解答. 由于 $f(x) = |x|^3$ 并非初等函数 (注意: 绝对值函数不是基本初等函数), 因此直接使用求导法则计算其导数是不方便的. 将 $f(x)$ 写成下述分段函数的形式:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x^3, & x < 0, \end{cases}$$

利用基本求导法则与求导公式, 我们可以计算 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 处的一、二阶导数:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} 6x, & x > 0 \\ -6x, & x < 0 \end{cases}.$$

此时, 根据导数的定义, 我们有:

$$\begin{cases} f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\pm h^3 - 0}{h} = 0, \\ f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\pm 3h^2 - 0}{h} = 0. \end{cases}$$

然而,

$$\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{f''(h) - f''(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\pm 6h - 0}{h} = \pm 6,$$

故 $f'''(0)$ 不存在. \square

例子 7.3. 证明: Riemann 函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{q}{p}, & x = \frac{p}{q} \text{ (这里 } p, q \text{ 为互素整数, 且 } p > 0\text{)}, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在 $[0, 1]$ 上处处不可导.

证明. 根据例子 3.3 可知, Riemann 函数 $R(x)$ 在 $[0, 1]$ 内的有理点处不连续, 进而在这些点处不可导. 因此, 现在只需说明 $R(x)$ 在 $[0, 1]$ 内的无理点处不可导即可.

设 $x_0 \in [0, 1]$ 为无理点, 取 $[0, 1]$ 中一收敛于 x_0 的无理数列 $\{x_n\}$ (这里要求每一项 $x_n \neq x_0$), 则

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R(x_n) - R(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0}{x_n - x_0} = 0.$$

又因为 x_0 是无理数, 我们可以考虑它的无限不循环小数表示 $x_0 = 0.a_1a_2a_3\dots$, 截取它的前 n 位小数, 并令 $x'_n = 0.a_1a_2\dots a_n$, 由此得到了 $[0, 1]$ 中的收敛于 x_0 的有理数列 $\{x'_n\}$. 注意到 x_0 的小数表示中存在无穷多个 a_k 不为零, 我们记其中一个非零项的指标为 N , 则当 $n > N$ 时, 有

$$R(x'_n) = R(0.a_1a_2\dots a_n) = R\left(\frac{a_1a_2\dots a_n}{10^n}\right) \geq \frac{1}{10^n},$$

进而有

$$\left| \frac{R(x'_n) - R(x_0)}{x'_n - x_0} \right| = \frac{R(0.a_1a_2\dots a_n)}{0.0\dots 0a_{n+1}a_{n+2}\dots} \geq 1,$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{R(x'_n) - R(x_0)}{x'_n - x_0} \neq 0$. 因此, 根据 Heine 定理, 极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(x_0 + h) - R(x_0)}{h}$ 不存在, 故 $R(x)$ 在 $x = x_0$ 处不可导. \square

练习 7.4. 当 $n \in \mathbb{N}$ 满足什么条件时, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(1) 在 $x = 0$ 处连续;

(2) 在 $x = 0$ 处可导;

(3) 在 $x = 0$ 处导函数连续.

答案. (1) $n \geq 1$; (2) $n \geq 2$; (3) $n \geq 3$. \square

7.2. 函数可导性的应用 在这一小节中, 我们将从函数的可导性条件出发, 尝试证明一些相关的结论.

例子 7.5. 设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 若数列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 满足

$$\alpha_n < x_0 < \beta_n \quad \text{且} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = x_0.$$

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0)$.

证明. 首先注意到, 对于任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, 有

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} &= \frac{f(\beta_n) - f(x_0) + f(x_0) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \\ &= \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} \cdot \frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n} + \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} \cdot \frac{x_0 - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n}. \end{aligned}$$

由于 $\frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n} + \frac{x_0 - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n} = 1$, 如果记 $\lambda_n = \frac{\beta_n - x_0}{\beta_n - \alpha_n}$, 则 $1 - \lambda_n = \frac{x_0 - \alpha_n}{\beta_n - \alpha_n}$ 且

$$0 < \lambda_n < 1, \quad 0 < 1 - \lambda_n < 1.$$

因为 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = x_0$, 根据导数的定义, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在关于数列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_n\}$ 公共的 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \quad \text{且} \quad \left| \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

进而有,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} - f'(x_0) \right| \\ &= \left| \lambda_n \cdot \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \cdot \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} - \lambda_n f'(x_0) - (1 - \lambda_n) f'(x_0) \right| \\ &\leq \lambda_n \left| \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} - f'(x_0) \right| + (1 - \lambda_n) \left| \frac{f(\alpha_n) - f(x_0)}{\alpha_n - x_0} - f'(x_0) \right| \\ &< \lambda_n \cdot \varepsilon + (1 - \lambda_n) \cdot \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

即 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x_0)$. □

练习 7.6. 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上定义, 且对于任意的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, 有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2).$$

若 $f'(0) = 1$, 证明: 对于任何 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f'(x) = f(x)$.

提示. 根据恒等式 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, 我们有

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x) \cdot f(h) - f(x)}{h} = f(x) \cdot \frac{f(h) - 1}{h}.$$

练习 7.7. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某一邻域内有定义, 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导, 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0).$$

7.3. 高阶导数计算的递推公式方法 对于某些函数的高阶导数, 直接使用求导法则进行计算可能会相当繁琐. 在这种情况下, 可以先计算其前几阶导数, 并设法找到合适的递推等式, 使得对两端同时求导后能够得到一般的递推关系.

例子 7.8. 设 $f(x) = \arcsin x$, 计算 $f^{(n)}(0)$.

解答. 我们先计算 $f(x)$ 的一、二阶导数:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f''(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)' = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}},$$

容易看出 $f(x)$ 的前两阶导数满足等式 $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 0$. 对两端同时求 n 阶导数, 利用 Leibniz 公式, 我们有

$$\left((1-x^2) \cdot f^{(n+2)} - 2nx \cdot f^{(n+1)} - n(n-1) \cdot f^{(n)}\right) - (x \cdot f^{(n+1)} + n \cdot f^{(n)}) = 0,$$

整理得

$$(1-x^2) \cdot f^{(n+2)} - (2n+1)x \cdot f^{(n+1)} - n^2 \cdot f^{(n)} = 0.$$

现在, 我们将 $x=0$ 分别代入 $f'(x)$ 、 $f''(x)$ 和上述等式, 得到

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f^{(n+2)}(0) = n^2 f^{(n)}(0) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

于是, 我们有

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ [(2k-1)!!]^2, & n = 2k+1, \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

□

练习 7.9. 证明: Legendre 多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

满足方程:

$$(x^2 - 1) \cdot P_n''(x) + 2x \cdot P_n'(x) - n(n+1) \cdot P_n(x) = 0.$$

提示. 令 $u = (x^2 - 1)^n$, 则 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} u^{(n)}$ 且 $u' \cdot (x^2 - 1) = u \cdot 2nx$.

专题八 微分中值定理的应用

8.1. 方程根的存在性问题 判断某个函数在某一区间上的零点存在性，常用的方法有：

- (1) **利用介值性：**闭区间上的连续函数具备介值性。此外，对于某一区间上的可导函数，其导函数亦具备介值性（Darboux 定理），具体地：若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导，则 $f'(x)$ 可在 (a, b) 上取到介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 之间的一切值。
- (2) **利用 Rolle 定理：**Rolle 定理告诉我们，若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导且 $f(a) = f(b)$ ，则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

例子 8.1. 设 (a, b) 为有限或无穷区间，函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导，若

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A \quad (\text{有限数或正负无穷}).$$

证明：存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

证明. 我们只讨论 A 是有限数的情形，并将 A 为正负无穷的情形则留作习题。

若 $f(x) \equiv A$ 于区间 (a, b) 上成立，则 $f'(x) = 0$ ，此时问题自明。现在假设 $f(x)$ 在 (a, b) 上非常数函数，即存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) \neq A$ （这里不妨设 $f(x_0) > A$ ）。因为

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A,$$

此时分别存在 $x_1 \in (a, x_0)$ 和 $x_2 \in (x_0, b)$ 使得

$$f(x_1), f(x_2) < \frac{f(x_0) + A}{2} < f(x_0).$$

对上述 $\frac{f(x_0) + A}{2}$ ，由连续函数的介值性（注意： $f(x)$ 的可导性确保了其连续性），分别存在 $\eta_1 \in (x_1, x_0)$ 和 $\eta_2 \in (x_0, x_2)$ 使得 $f(\eta_1) = f(\eta_2) = \frac{f(x_0) + A}{2}$ 。最后根据 Rolle 定理，可知存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$ 使得 $f'(\xi) = 0$. \square

例子 8.2. 证明：在 $(-1, 1)$ 上至少存在三点使得 $\frac{d^2}{dx^2}[(x^2 - 1)^2 x] = 0$.

证明. 设 $f(x) = (x^2 - 1)^2 x$ ，则易知 $f(1) = f(-1) = f(0) = 0$ ，于是根据 Rolle 定理，分别存在 $\eta_1 \in (-1, 0)$ 和 $\eta_2 \in (0, 1)$ 使得

$$f'(\eta_1) = f'(\eta_2) = 0.$$

同时，注意到 $f'(x) = (x^2 - 1)^2 + 2x^2(x - 1)$ ，故 $f'(-1) = f'(1) = 0$ ，于是分别存在 $x_1 \in (-1, \eta_1)$ 、 $x_2 \in (\eta_1, \eta_2)$ 和 $x_3 \in (\eta_2, 1)$ 使得 $f''(x_1) = f''(x_2) = f''(x_3) = 0$. \square

练习 8.3. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，且 $f(a) < 0, f(b) < 0$. 证明：若存在 $c \in (a, b)$ 使得 $f(c) > 0$ ，则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

提示. 构造函数 $F(x) = e^x f(x)$ 并使用 Rolle 定理.

8.2. 中值公式的证明 在本节，我们将根据已知条件，使用 Rolle 定理和 Lagrange 中值定理推导新的中值公式.

例子 8.4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，且 $f(a) = f(b) = 0$ ，证明：对任意的 $x \in (a, b)$ ，存在 $\xi \in (a, b)$ 使得：

$$f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

证明. 任意取定 $x \in (a, b)$ ，令 $K = \frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$ ，此时问题归结为寻找 $\xi \in (a, b)$ 使其满足 $f''(\xi) = K$ ，为此我们构造函数

$$F(t) = f(t) - \frac{K}{2}(t-a)(t-b).$$

由于 $F(x) = F(a) = F(b) = 0$ ，则根据 Rolle 定理，分别存在 $\eta_1 \in (a, x)$ 和 $\eta_2 \in (x, b)$ 使得

$$F'(\eta_1) = F'(\eta_2) = 0.$$

此时再次使用 Rolle 定理，可知存在 $\xi \in (\eta_1, \eta_2)$ 使得

$$F''(\xi) = (f''(t) - K) \Big|_{t=\xi} = 0,$$

将 K 代回，即有 $f(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$. □

例子 8.5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 上可导，且 $f(0) = 0$ ， $f(1) = 1$ ，又设 k_1, \dots, k_n 为 n 个正实数. 证明：在 $[0, 1]$ 上存在 n 个互不相同的点 x_1, \dots, x_n 使得：

$$\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n k_i.$$

想法. 为了方便，我们不妨考虑 $n = 3$ 的情形. 此时，我们需要找到 $[0, 1]$ 上的三个不同的正实数 x_1, x_2, x_3 使得

$$\frac{k_1}{f'(x_1)} + \frac{k_2}{f'(x_2)} + \frac{k_3}{f'(x_3)} = k_1 + k_2 + k_3.$$

借助于 Lagrange 中值定理，我们只需要从 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间的图像中，找到 3 条斜率分别为 $f'(x_1), f'(x_2), f'(x_3)$ 的弦 L_1, L_2, L_3 即可. 为此，我们不妨先将目标等式两端同时除以 $k_1 + k_2 + k_3$ ，则有

$$\frac{\lambda_1}{f'(x_1)} + \frac{\lambda_2}{f'(x_2)} + \frac{\lambda_3}{f'(x_3)} = 1, \quad \lambda_i = \frac{k_i}{k_1 + k_2 + k_3} \quad (i = 1, 2, 3).$$

如果把 λ_i 视作弦 L_i 在 y -轴上的投影长度，那么 $\lambda_i/f'(x_i)$ 则为 L_i 在 x -轴上的投影长度. 因此解题的关键在于：找到 3 条不同的弦，使得它们在 y 轴上的投影长度分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ，而在 x -轴上的投影长度和为 1.

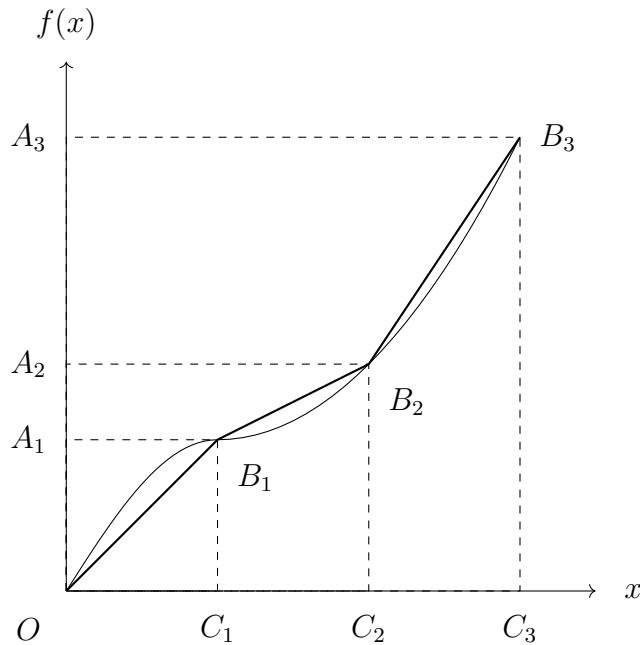


图 8.1: 例子 8.5 的图解 (其中细线为函数图像, 粗线为弦)

注意到 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ 、 $f(0) = 0$ 且 $f(1) = 1$, 为了构造符合要求的弦, 我们可以考虑 $[0, 1]$ 上的划分

$$0 = A_0 < A_1 < A_2 < A_3 = 1, \quad A_i - A_{i-1} = \lambda_i.$$

对于上述每个划分点 A_i , 首先过 A_i 作水平线使之交 $f(x)$ 的函数图像于 B_i , 再过 B_i 作垂直线使之交 x -轴于 C_i . 则 $L_1 = OB_1, L_2 = B_1B_2, L_3 = B_2B_3$ 就是我们所要找的三条弦, 它们在 y -轴上的投影长分别为 λ_i , 而在 x -轴上的投影长之和为 1.

证明. 令 $\lambda_i = \frac{k_i}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则

$$0 < \lambda_i < 1 \quad \text{且} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1.$$

因为 $f(0) = 0$ 且 $f(1) = 1$, 根据 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的连续性, 则对于上述 λ_1 , 存在 $C_1 \in (0, 1)$ 使得 $f(C_1) = \lambda_1$; 由于 $\lambda_1 < \lambda_1 + \lambda_2 < 1$, 则存在 $C_2 \in (C_1, 1)$, 使得 $f(C_2) = \lambda_1 + \lambda_2$; ……. 如此往复, 我们可以顺次找到 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} , 它们满足

$$0 = C_0 < C_1 < C_2 < \cdots < C_n = 1 \quad \text{且} \quad f(C_i) = \sum_{j=1}^i \lambda_j.$$

应用 Lagrange 中值定理, 存在 $x_i \in (C_{i-1}, C_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 使得

$$f'(x_i) = \frac{f(C_i) - f(C_{i-1})}{C_i - C_{i-1}} = \frac{\lambda_i}{C_i - C_{i-1}},$$

进而有

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n (C_i - C_{i-1}) = C_n - C_0 = 1.$$

此时, 将所有 $\lambda_i = \frac{k_i}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}$ 代入, 我们有

$$\sum_{i=1}^n \frac{k_i/(k_1 + \cdots + k_n)}{f'(x_i)} = 1 \implies \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{f'(x_i)} = \sum_{i=1}^n k_i.$$

□

练习 8.6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 上存在二阶导数, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$ 使得

$$f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) = \frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

提示. 可以仿照例子 8.4 的做法, 令

$$K = \frac{4}{(b-a)^2} \cdot \left(f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) \right),$$

然后考虑函数 $F(x) = f(x) - 2\left(\frac{x+a}{2}\right) + f(a) - \frac{(x-a)^2 \cdot K}{4}$.

练习 8.7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导. 又设 $f(x)$ 不是线性函数, 即此函数不等于

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

证明: 若 $f(b) > f(a)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

提示. 考虑函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

由于 $f(x)$ 非线性函数, 故必定存在 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $F(x_0) \neq 0$, 此时可以分别在 $[a, x_0]$ 和 $[x_0, b]$ 上应用 Lagrange 中值定理.

8.3. 利用有限增量公式研究函数的性质 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 上可导, Lagrange 定理告诉我们: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

如果对上式两端同时乘以 $b-a$, 那么我们得到了下述**有限增量公式**:

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

在本节, 我们将使用此公式探究一些函数的性质.

例子 8.8. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f(0) = 0$. 若存在 $A > 0$, 使得在 $[0, +\infty)$ 上恒成立 $|f'(x)| \leq A|f(x)|$, 证明: 在 $[0, +\infty)$ 上成立 $f(x) \equiv 0$.

证明. 因为 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f(0) = 0$, 应用 Lagrange 中值定理, 对于任意的 $x \in [0, +\infty)$, 存在 $\xi_1 \in (0, x)$ 使得

$$|f(x)| = |f(0) + f'(\xi_1)(x - 0)| = |f'(\xi_1)|x \leq A|f(\xi_1)|x.$$

如果此时将 x 限制于 $\left(0, \frac{1}{2A}\right]$, 则有

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2} \cdot |f(\xi_1)|, \quad 0 < \xi_1 < x.$$

现在令 $x = \xi_1$ 并重复上述做法 (注意到 ξ_1 依旧属于 $\left(0, \frac{1}{2A}\right]$), 则可以找到 $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ 使之满足 $|f(\xi_1)| \leq \frac{1}{2}|f(\xi_2)|$. 如此重复下去, 我们可以得到一列 $\{\xi_n\}$, 其满足

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}|f(\xi_1)| \leq \frac{1}{4}|f(\xi_2)| \leq \cdots \leq \frac{1}{2^n}|f(\xi_n)|,$$

此处 $0 < \xi_n < \cdots < \xi_2 < \xi_1 < x < \frac{1}{2A}$.

由 $f(x)$ 的连续性, 可知 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2A}\right]$ 上有界, 即存在 $M > 0$ 使得在此闭区间内成立 $|f(x)| \leq M$. 这意味着

$$|f(x)| \leq \frac{M}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

此时由 $n \in \mathbb{N}^+$ 的任意性, 可知在闭区间 $\left[0, \frac{1}{2A}\right]$ 上成立 $f(x) \equiv 0$. 最后, 利用数学归纳法 (详细过程交由读者), 可以证明 $f(x)$ 在一切闭区间

$$\left[\frac{i-1}{2A}, \frac{i}{2A}\right] \quad (i = 1, 2, \dots)$$

上成立 $f(x) \equiv 0$, 进而在 $[0, +\infty)$ 上成立 $f(x) \equiv 0$. □

练习 8.9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 内满足 $|f''(x)| \leq M$, 并在 $(0, a)$ 内取得最大值. 证明:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma.$$

提示. 考虑 $f'(x)$ 在 $f(x)$ 的最大值点处的有限增量公式.

练习 8.10. 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

参考文献

- [Chen] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析 (上册) [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [Encu] 华东师范大学数学系. 数学分析 (上册) [M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [Li] 李傅山. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [Pei] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [Xie] 谢惠民, 恽自求, 易法槐等. 数学分析习题课讲义 (上册) [M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2018.