Problem Set 1 - Damir Nabiullin

Task 1

1. *λx.(λy.xy) x*
2. *λx.(λx.x) x*
    - > λx.(λy.y) x
3. *λx.λy.x y*
4. *λx.x (λx.x)*
    - > λx.x (λy.y)
5. *λx.(λx.x) x*
    - > λx.(λy.y) x
6. *(λx.λy.y) z x*
    - > (λw.λy.y) z x

Task 2

1. *(λx.λy.x) y z*
    - > (λx.λw.x) y z
    - > λw.y z
    - > y
2. *(λx.λy.x) (λz.y) z w*
    - > (λx.λu.x) (λs.y) z w
    - > λu.λs.y z w
    - > λs.y w
    - > y
3. *(λb.λf.λt.b t f) (λf.λt.t)*
    - > (λb.λf.λt.b t f) (λx.λy.y)
    - > λf.λt.(λx.λy.y) t f
    - > λf.λt.(λy.y) f
    - > λf.λt.f
4. *(λs.λz.s (s z)) (λb.λf.λt.b t f) (λf.λt.t)*
    - > (λs.λz.s (s z)) (λb.λf.λt.b t f) (λx.λy.y)
    - > (λz.(λb.λf.λt.b t f) (λb'.λf'.λt'.b' t' f' z)) (λx.λy.y)
    - > (λb.λf.λt.b t f) (λb'.λf'.λt'.b' t' f' (λx.λy.y))
    - > (λf.λt.(λb'.λf'.λt'.b' t' f'(λx.λy.y)) t f)
    - > (λf.λt.(λf'.λt'.(λx.λy.y) t' f') t f)
    - > (λf.λt.(λf'.λt'.(λy.y) f') t f)
    - > (λf.λt.(λf'.λt'.f') t f)
    - > (λf.λt.(λt'.t) f)
    - > λf.λt.t
5. *(λs.λz.s (s z)) (λs.λz.s (s z)) (λb.λf.λt.b t f) (λf.λt.t)*
    - > (λs.λz.s (s z)) (λs'.λz'.s' (s' z')) (λb.λf.λt.b t f) (λf'.λt'.t')
    - > (λz.(λs'.λz'.s' (s' z')) ((λs''.λz''.s'' (s'' z'')) z)) (λb.λf.λt.b t f) (λf'.λt'.t')
    - > (λs'.λz'.s' (s' z')) ((λs''.λz''.s'' (s'' z'')) (λb.λf.λt.b t f)) (λf'.λt'.t')
    - > (λz'.((λs''.λz''.s'' (s'' z'')) (λb.λf.λt.b t f)) (((λs''.λz''.s'' (s'' z'')) (λb''.λf''.λt''.b'' t'' f'')) z')) (λf'.λt'.t')
    - > (λs''.λz''.s'' (s'' z'')) (λb.λf.λt.b t f) (((λs''.λz''.s'' (s'' z'')) (λb''.λf''.λt''.b'' t'' f'')) (λf'.λt'.t'))
    - > Substitute from 4-th lambda equation
    - > (λs''.λz''.s'' (s'' z'')) (λb.λf.λt.b t f) (λf''.λt''.t'')
    - > Substitute from 4-th lambda equation
    - > λf.λt.t

Task 3

tru = λt.λf.t

fls = λt.λf.f

test = λc.λt.λf.c t f

1. implies = λa.λb.(test a b tru)
2. implies fls tru

- > (λa.λb.(test a b tru)) fls tru
- > (test fls tru tru)
- > (λc.λt.λf.c t f) fls tru tru
- > (fls tru tru)
- > (λt.λf.f) tru tru
- > tru

Task 4

c0 = λs.λz.z

c1 = λs.λz.sz

c2 = λs.λz.s (s z)

c3 = λs.λz.s (s (s z))

1. > (2n + 1) = λn.λs.λz.n s (n s (s z))
   >
   > (n^2 + 1) = λn.λs.λz.n (n s) (s z)
   >
   > (2^n + 1) = λn.λs.λz.n c_2 s (s z)
   >
   > (2^{n+1}) = λn.λs.λz.n c_2 s (n c_2 s z)

2. 2n + 1:

   - > (λn.λs.λz.n s (n s (s z))) (λs'.λz'.s' (s' z'))
   - > λs.λz.(λs''.λz''.s'' (s'' z'')) s ((λs'.λz'.s' (s' z')) s (s z))
   - > λs.λz.(λz''.s (s z'')) ((λs'.λz'.s' (s' z')) s (s z))
   - > λs.λz.s (s (λs'.λz'.s' (s' z')) s (s z))
   - > λs.λz.s (s (λz'.s (s z')) (s z))
   - > λs.λz.s (s (s (s (s z))))
   - > c_5

   (n^2 + 1)

   - > (λn.λs.λz.n (n s) (s z)) (λs'.λz'.s' (s' z'))
   - > λs.λz.(λs''.λz''.s'' (s'' z'')) ((λs'.λz'.s' (s' z')) s) (s z)
   - > λs.λz.(λz''.((λs'.λz'.s' (s' z')) s) (((λs'.λz'.s' (s' z')) s) z'')) (s z)
   - > λs.λz.((λs'.λz'.s' (s' z')) s) (((λs'.λz'.s' (s' z')) s) (s z))
   - > λs.λz.(λz'.s (s z')) (((λs'.λz'.s' (s' z')) s) (s z))
   - > λs.λz.s (s (((λs'.λz'.s' (s' z')) s) (s z)))
   - > λs.λz.s (s ((λz'.s (s z')) (s z)))
   - > λs.λz.s (s (s (s (s z))))
   - > c_5

   (2^n + 1)

   - > (λn.λs.λz.n c_2 s (s z)) (c_2)
   - > λs.λz.c_2 c_2 s (s z)
   - > λs.λz.(λs'.λz'.s' (s' z')) c_2 s (s z)
   - > λs.λz.(c_2 (c_2 s)) (s z)
   - > λs.λz.(λs'.λz'.s' (s' z') (λs''.λz''.s'' (s'' z'') s)) (s z)
   - > λs.λz.((λs''.λz''.s'' (s'' z'') s) ((λs''.λz''.s'' (s'' z'') s) (s z)))
   - > λs.λz.((λs''.λz''.s'' (s'' z'') s) (s (s (s z))))
   - > λs.λz.s (s (s (s (s z))))
   - > c_5

   (2^{n+1})

   - > (λn.λs.λz.n c_2 s (n c_2 s z)) (c_2)
   - > λs.λz.c_2 c_2 s (c_2 c_2 s z)
   - > λs.λz.(c_2 (c_2 s)) (c_2 c_2 s z)
   - > λs.λz.(c_2 s) ((c_2 s) (c_2 c_2 s z))

- > $\lambda s.\lambda z.(s\ (s\ ((c_2\ s)\ (c_2\ c_2\ s\ z))))$
- > $\lambda s.\lambda z.s\ (s\ (s\ (s\ (c_2\ c_2\ s\ z))))$
- > $\lambda s.\lambda z.s\ (s\ (s\ (s\ ((c_2\ (c_2\ s))\ z))))$
- > $\lambda s.\lambda z.s\ (s\ (s\ (s\ ((c_2\ s)\ ((c_2\ s)\ z)))))$
- > $\lambda s.\lambda z.s\ (s\ (s\ (s\ (s\ (s\ ((c_2\ s)\ z))))))$
- > $\lambda s.\lambda z.s\ (s\ (s\ (s\ (s\ (s\ (s\ (s\ z)))))))$
- > c_8