Свойства степеней и логарифмов от «Школково»

Содержание

1 Степени

1.1 Определение степени

Выражение a^n называется степенью, число a — основанием степени, n — показателем степени. На самом деле запись a^n означает, что мы умножаем число a само на себя n раз, то есть

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Например,

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 \quad \text{или} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

1.2 Таблица наиболее часто встречающихся степеней

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$4^3 = 64$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$4^4 = 256$	$5^4 = 625$	
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$			
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$			
$2^7 = 128$				
$2^8 = 256$				
$2^9 = 512$				
$2^{10} = 1024$				

1.3 Свойства степеней

• При перемножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются, то есть

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Например,

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32.$$

Так происходит потому, что $2^2 = 2 \cdot 2$, а $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Таким образом,

$$2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5 = 32.$$

• При делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются, то есть

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}.$$

Например,

$$\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = 9.$$

Опять же, так происходит потому, что

$$\frac{3^6}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 = 9.$$

А что будет, если мы будем делить 3^4 на 3^6? По свойству мы получим

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{4-6} = 3^{-2}.$$

Но мы пока не знаем что делать, если показатель степени отрицателен. Распишем по определению:

$$\frac{3^4}{3^6} = \frac{\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}{3\cdot 3\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = \frac{1}{3\cdot 3} = \frac{1}{9}.$$

Таким образом, мы получили следующее свойство.

• $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$. Например,

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Значит,

$$\frac{3^4}{3^6} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

• При возведении степени в степень показатели перемножаются, то есть

$$(a^x)^y = a^{x\cdot y}.$$

Например,

$$\left(2^3\right)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64;$$

$$\left(2^3\right)^5 = 2^{3\cdot 5} = 2^{15}.$$

• $a^1 = a$, $a^0 = 1$. Об этом свойстве просто договорились, чтобы не было противоречий в предыдущих свойствах. Например,

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{a\cdot a}{a\cdot a} = 1, \quad \text{но и} \quad 1 = \frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0.$$

• Степень произведения равна произведению степеней, то есть

$$(a\cdot b)^x = a^x \cdot b^x.$$

Например,

$$6^3 = (2\cdot 3)^3 = 2^3\cdot 3^3 = 8\cdot 27 = 216.$$

• Степень частного равна частному степеней, то есть

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Например,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

2 Логарифмы

Понятие логарифма тесно связано с понятием степени, поэтому всюду ниже мы будем активно пользоваться следующими базовыми свойствами степеней:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;
- $(a^x)^y = a^{xy}$.

2.1 Определение логарифма

Логарифм по основанию a от b — это число t, которое показывает, в какую степень нужно возвести a, чтобы получить b. Таким образом, для $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ выполняется основное логарифмическое тождество:

$$a^t = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = t.$$

Здесь a называется основанием логарифма, b — аргументом логарифма.

Таким образом, значение логарифма — это просто соответствующий показатель степени. Рассмотрим уравнение

$$2^x = 8.$$

Очевидно, что его решением является число 3. Но что делать, если мы столкнулись например с уравнением

$$2^x = 5?$$

Как записать его решение? Мы знаем только то, что x — это некоторое число, большее чем 2, но меньшее чем 3. Именно в таком случае помогает понятие логарифма, ведь x — это *такое число, в степень которого нужно возвести 2, чтобы получить 5*, а это и есть определение для логарифма $\log_2 5$.

2.2 Свойства логарифмов

Свойство 0 $a^{\log_a b} = b$

Свойство 1 $\log_b a + \log_b c = \log_b ac$

Свойство 2 $\log_b a - \log_b c = \log_b \dfrac{a}{c}$

Свойство 3 $\log_b a^r = r \cdot \log_b a$

Свойство 4 $\log_{b^r} a = \frac{1}{r} \cdot \log_b a$

Свойство 5 $\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$

Свойство 6 $\log_b a \cdot \log_a b = 1$

Свойство 7 $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \ a \neq 1$

Свойство 8 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Свойство 9 $\dfrac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$

2.3 Доказательства свойств логарифмов

Из определения сразу вытекает следующее важнейшее свойство:

Свойство 0 $a^{\log_a b} = b$

Рассмотрим несколько простейших примеров:

1. $\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, так как $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.
2. $\log_2 2 = 1$, так как $2^1 = 2$.
3. $\log_2 1 = 0$, так как $2^0 = 1$.
4. $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, так как $2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Свойство 1 $\log_b a + \log_b c = \log_b ac$

Доказательство
Проведем цепочку равносильных переходов:

$$\log_b a + \log_b c \overset{?}{=} \log_b ac \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a + \log_b c} \overset{?}{=} b^{\log_b ac} \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a} \cdot b^{\log_b c} \overset{?}{=} b^{\log_b ac} \quad \xLeftrightarrow{\text{По свойству 0}} \quad a \cdot c = ac$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Свойство 2 $\log_b a - \log_b c = \log_b \dfrac{a}{c}$

Доказательство
Проведем цепочку равносильных переходов:

$$\log_b a - \log_b c \overset{?}{=} \log_b \frac{a}{c} \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a - \log_b c} \overset{?}{=} b^{\log_b \frac{a}{c}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^{\log_b a}}{b^{\log_b c}} \overset{?}{=} b^{\log_b \frac{a}{c}} \quad \xLeftrightarrow{\text{По свойству 0}} \quad \frac{a}{c} = \frac{a}{c}$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Замечание. При работе с числами все хорошо, но при работе с переменными нужно быть осторожным. Казалось бы, по свойству 1 верно следующее

$$\log_2 (x(x+1)) = \log_2 x + \log_2 (x+1),$$

однако при $x = -3$ с левой частью все хорошо, а правая не имеет смысла, потому что аргументы логарифмов отрицательны. Это недоразумение произошло из-за того, что у левой и правой частей разные ОДЗ.

Свойство 3 $\log_b a^r = r \cdot \log_b a$

Доказательство
Проведем цепочку равносильных переходов:

$$\log_b a^r \overset{?}{=} r \cdot \log_b a \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a^r} \overset{?}{=} b^{r \cdot \log_b a} \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a^r} \overset{?}{=} \left(b^{\log_b a}\right)^r \quad \Leftrightarrow \quad \xLeftrightarrow{\text{По свойству 0}} \quad a^r = (a)^r$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Свойство 4 $\log_{b^r} a = \frac{1}{r} \cdot \log_b a$

Доказательство

Проведем цепочку равносильных переходов. Воспользуемся тем, что $(b^r)^{\frac{1}{r}} = b$.

$$\log_{b^r} a \stackrel{?}{=} \frac{1}{r} \cdot \log_b a \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_{b^r} a} \stackrel{?}{=} b^{\frac{1}{r} \cdot \log_b a} \quad \Leftrightarrow \quad \left((b^r)^{\frac{1}{r}}\right)^{\log_{b^r} a} \stackrel{?}{=} \left(b^{\log_b a}\right)^{\frac{1}{r}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left((b^r)^{\log_{b^r} a}\right)^{\frac{1}{r}} \stackrel{?}{=} \left(b^{\log_b a}\right)^{\frac{1}{r}} \quad \xLeftrightarrow{\text{По свойству 0}} \quad a^{\frac{1}{r}} = a^{\frac{1}{r}}$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Свойство 5 $\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$

Доказательство

Проведем цепочку равносильных переходов:

$$\log_b a \cdot \log_a c \stackrel{?}{=} \log_b c \quad \Leftrightarrow \quad b^{\log_b a \cdot \log_a c} \stackrel{?}{=} b^{\log_b c} \quad \Leftrightarrow \quad \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a c} \stackrel{?}{=} b^{\log_b c} \quad \xLeftrightarrow{\text{По свойству 0}} \quad a^{\log_a c} = c \quad \Leftrightarrow \quad c = c$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Свойство 6 $\log_b a \cdot \log_a b = 1$

Доказательство

По предыдущему свойству $\log_b a \cdot \log_a b = \log_b b = 1$. ■

Свойство 7 $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \ a \neq 1$

Доказательство

Очевидное, но важное следствие предыдущего свойства, так как позволяет менять местами основание и аргумент логарифма. ■

Свойство 8 $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Доказательство

Проведем цепочку равносильных переходов. В первом переходе прологарифмируем обе части по основанию b:

$$a^{\log_c b} \stackrel{?}{=} b^{\log_c a} \quad \Leftrightarrow \quad \log_b a^{\log_c b} \stackrel{?}{=} \log_b b^{\log_c a} \quad \xLeftrightarrow{\text{Преобразуем левую часть по свойству 3}}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{Преобразуем левую часть по свойству 3}} \quad \log_c b \cdot \log_b a \stackrel{?}{=} \log_c a \quad \xLeftrightarrow{\text{Преобразуем левую часть по свойству 5}} \quad \log_c a = \log_c a$$

Мы пришли к верному равенству, значит, исходное было верным. ■

Свойство 9 $\dfrac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$

Доказательство

$$\frac{\log_b a}{\log_b c} \xlongequal{\text{По свойству 7}} \frac{1}{\log_a b \cdot \log_b c} \xlongequal{\text{По свойству 5}} \frac{1}{\log_a c} \xlongequal{\text{По свойству 7}} \log_c a$$

■

2.4 Решение задач на свойства логарифмов

№1

Найдите значение выражения $(\log_{17} 289)\cdot\left(\log_{500}\dfrac{1}{500}\right)$.

Ответ

-2

Решение

$$(\log_{17} 289)\cdot\left(\log_{500}\frac{1}{500}\right)=(\log_{17} 17^2)\cdot\left(\log_{500}\frac{1}{500}\right)=2\cdot(-1)=-2$$

№2

Найдите значение выражения $16^{\log_2 5}$.

Ответ

625

Решение

$$16^{\log_2 5}\xlongequal{\text{По свойству 8}}5^{\log_2 16}=5^4=625$$

№3

Найдите значение выражения $\log_{11} 242-\log_{121} 4$.

Ответ

2

Решение

Сначала преобразуем вычитаемое:

$$\log_{121} 4=\log_{11^2} 2^2\xlongequal{\text{По свойству 3}}2\log_{11^2} 2\xlongequal{\text{По свойству 4}}2\cdot\frac{1}{2}\log_{11} 2=\log_{11} 2$$

Вернемся к исходному выражению:

$$\log_{11} 242-\log_{11} 2\xlongequal{\text{По свойству 2}}\log_{11}\frac{242}{2}=\log_{11} 121=2$$

№4

Найдите значение выражения $\frac{\log_{15} 1000}{\log_{225} 10^4}$.

Ответ

1,5

Решение

Сначала преобразуем знаменатель:

$$\log_{225} 10^4=\log_{15^2} 10^4\xlongequal{\text{По свойству 3}}2\log_{15^2} 10^2\xlongequal{\text{По свойству 4}}2\cdot\frac{1}{2}\log_{15} 10^2=\log_{15} 10^2$$

Вернемся к исходному выражению:

$$\frac{\log_{15} 1000}{\log_{15} 10^2}\xlongequal{\text{По свойству 9}}\log_{10^2} 10^3\xlongequal{\text{По свойству 3}}3\log_{10^2} 10\xlongequal{\text{По свойству 4}}3\cdot\frac{1}{2}\log_{10} 10=1{,}5$$

№5

Найдите значение выражения $\log_7 144\cdot\log_{12}343$.

Ответ

6

Решение

$$\log_7 144\cdot\log_{12}343=\log_7 12^2\cdot\log_{12}7^3 \xlongequal{\text{По свойству 3}} 2\log_7 12\cdot 3\log_{12}7 \xlongequal{\text{По свойству 6}} 2\cdot 3=6$$

№6

Найдите значение выражения $3^{\log_5 2}-2^{\log_{25}9}$.

Ответ

0

Решение

Преобразуем вычитаемое:

$$2^{\log_{25}9}=2^{\log_{5^2}3^2} \xlongequal{\text{По свойству 3}} 2^{2\log_{5^2}3} \xlongequal{\text{По свойству 4}} 2^{2\cdot\frac{1}{2}\log_5 3}=2^{\log_5 3} \xlongequal{\text{По свойству 8}} 3^{\log_5 2}$$

Получили, что

$$3^{\log_5 2}-2^{\log_{25}9}=3^{\log_5 2}-3^{\log_5 2}=0$$

№7

Найдите значение выражения $(3-\log_5 7)\left(\log_{\frac{125}{7}}400+\log_{\frac{7}{125}}80\right)$.

Ответ

1

Решение

Распишем число 3 в виде логарифма по основанию 5:

$$3=3\cdot 1=3\cdot\log_5 5 \xlongequal{\text{По свойству 3}} \log_5 5^3=\log_5 125$$

Тогда первый множитель равен

$$3-\log_5 7=\log_5 125-\log_5 7 \xlongequal{\text{По свойству 2}} \log_5\frac{125}{7}$$

Преобразуем второй множитель:

$$\log_{\frac{125}{7}}400+\log_{\frac{7}{125}}80=\log_{\frac{125}{7}}400+\log_{\left(\frac{125}{7}\right)^{-1}}80 \xlongequal{\text{По свойству 4}} \log_{\frac{125}{7}}400+\frac{1}{-1}\cdot\log_{\frac{125}{7}}80=$$
$$=\log_{\frac{125}{7}}400-\log_{\frac{125}{7}}80 \xlongequal{\text{По свойству 2}} \log_{\frac{125}{7}}\frac{400}{80}=\log_{\frac{125}{7}}5$$

Тогда исходное выражение равно

$$(3-\log_5 7)\left(\log_{\frac{125}{7}}400+\log_{\frac{7}{125}}80\right)=\log_5\frac{125}{7}\cdot\log_{\frac{125}{7}}5 \xlongequal{\text{По свойству 6}} 1$$

№8

Найдите значение выражения $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{11} 1331\right)$.

Ответ

-1

Решение

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{11} 1331\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{11} 11^3\right) = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

№9

Найдите значение выражения $49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$.

Ответ

12,5

Решение

Преобразуем первое слагаемое:

$$49^{1-\log_7 2} = \left(7^2\right)^{\log_7 7 - \log_7 2} \xlongequal{\text{По свойству 2}} \left(7^2\right)^{\log_7 \frac{7}{2}} = \left(7^{\log_7 \frac{7}{2}}\right)^2 \xlongequal{\text{По свойству 0}} \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 12{,}25$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$5^{-\log_5 4} = \left(5^{\log_5 4}\right)^{-1} \xlongequal{\text{По свойству 0}} 4^{-1} = 0{,}25$$

Тогда выражение равно $12{,}25 + 0{,}25 = 12{,}5$.

№10

Найдите значение выражения $81^{\frac{1}{\log_5 3}} + 27^{\log_9 36} + 3^{\frac{4}{\log_7 9}}$.

Ответ

890

Решение

Преобразуем первое слагаемое:

$$81^{\frac{1}{\log_5 3}} \xlongequal{\text{По свойству 7}} 81^{\log_3 5} = \left(3^4\right)^{\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^4 \xlongequal{\text{По свойству 0}} 5^4 = 625$$

Преобразуем второе слагаемое:

$$27^{\log_9 36} = \left(3^3\right)^{\log_{3^2} 36} \xlongequal{\text{По свойству 4}} \left(3^3\right)^{\frac{1}{2}\log_3 36} = \left(3^{\log_3 36}\right)^{\frac{3}{2}} \xlongequal{\text{По свойству 0}} 36^{\frac{3}{2}} = \left(6^2\right)^{\frac{3}{2}} = 6^3 = 216$$

Преобразуем третье слагаемое:

$$3^{\frac{4}{\log_7 9}} = \left(3^{\frac{1}{\log_7 9}}\right)^4 \xlongequal{\text{По свойству 7}} \left(3^{\log_9 7}\right)^4 = \left(9^{\log_9 7}\right)^2 \xlongequal{\text{По свойству 0}} 7^2 = 49$$

Тогда выражение равно $625 + 216 + 49 = 890$.