Теория по текстовым задачам №10 от «Школково»

Содержание

1 Задачи на движение по прямой

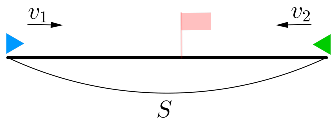
1.1 Движение по прямой. Основные принципы

1. Основная формула $S = v \cdot t$, где S — расстояние, v — скорость, t — время.

2. Средняя скорость $v_{\text{ср}} = \dfrac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}}$ равна отношению общего пройденного расстояния к общему затраченному времени.

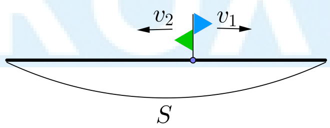
3. Нужно внимательно следить за тем, чтобы единицы измерения физических величин были согласованы друг с другом. Например, если скорость дана в км/ч, а время в минутах, то последнее стоит перевести в часы.

4. Если два объекта выехали одновременно навстречу друг другу, то они сближаются со скоростью, равной сумме их скоростей. Тогда расстояние, на котором они находились друг от друга изначально, равно произведению скорости сближения и времени, через которое они встретились.



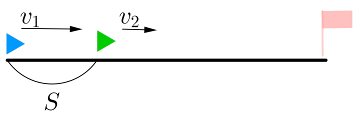
$$S = (v_1 + v_2) \cdot t$$

5. Если два объекта выехали одновременно из одной точки в разных направлениях, то скорость их удаления равна сумме их скоростей. Тогда для того, чтобы найти расстояние, которое будет между ними через время t, нужно это время умножить на скорость удаления.



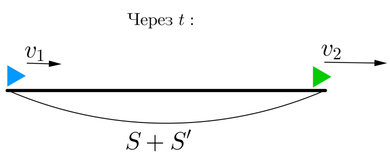
$$S = (v_1 + v_2) \cdot t$$

6. Если один объект догоняет другой, то есть объекты движутся в одном направлении и скорость первого больше скорости второго, то скорость их сближения равна разности большей и меньшей скоростей. Тогда расстояние, которое было между ними изначально, равно произведению скорости их сближения и времени, через которое один догнал другого.



$$S = (v_1 - v_2) \cdot t$$

7. Если два объекта находились на расстоянии S и выехали в одном направлении, но скорость первого меньше скорости второго, то скорость удаления одного от другого равна разности большей и меньшей скоростей. Тогда для того, чтобы найти расстояние, на которое они удалились за время t, нужно это время умножить на скорость удаления.



$$S' = (v_2 - v_1) \cdot t$$

1.2 Примеры решения задачи на движение с составлением таблицы

Пример 1

Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 6 часов позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Решение

Заполним следующую таблицу:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Вел.			
Авт.			

Пусть скорость велосипедиста x км/ч, тогда скорость автомобилиста $(x+40)$ км/ч. Пройденное расстояние и мотоциклиста, и велосипедиста равно 75 км. Если две ячейки из трех в строке заполнены, то третья заполняется через них при помощи формулы $S = v \cdot t$. Получаем

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Вел.	x	$\dfrac{75}{x}$	75
Авт.	$x+40$	$\dfrac{75}{x+40}$	75

Теперь нужно понять, какое уравнение можно составить по заполненной таблице. Какую информацию мы не использовали? Так как велосипедист прибыл в пункт B на 6 часов позже, то его время на 6 часов больше. Получаем уравнение

$$\frac{75}{x} - \frac{75}{x+40} = 6$$

$$\frac{75 \cdot (x+40) - 75x}{x \cdot (x+40)} = 6$$

$$\frac{75 \cdot 40}{x \cdot (x+40)} = 6$$

Так как x — это скорость велосипедиста, то $x > 0$ и $x \cdot (x+40) > 0$. Тогда можем домножить обе части уравнения на $x \cdot (x+40)$. Получаем

$$75 \cdot 40 = 6 \cdot x \cdot (x+40) \quad | : 6$$

$$25 \cdot 20 = x \cdot (x+40)$$

$$x^2 + 40x - 500 = 0$$

$$D = 40^2 + 4 \cdot 500 = 3600$$

$$x_1 = \frac{-40+60}{2} = 10$$

$$x_2 = \frac{-40-60}{2} < 0$$

Так как $x > 0$, то скорость велосипедиста равна 10 км/ч.

Пример 2

Из городов A и B одновременно навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в A, а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?

Решение

Нужно заполнить следующую таблицу:

	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Мот.			
Вел.			

Если две ячейки из трех в строке заполнены, то третья заполняется через них при помощи формулы $S = v \cdot t$.

Пусть велосипедист потратил t часов (это и нужно найти) на путь из B в A, а расстояние из A в B равно S км. Тогда мотоциклист потратил $(t-3)$ часа на путь из A в B.

Получаем таблицу:

	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Мот.	S	$\dfrac{S}{t-3}$	$t-3$
Вел.	S	$\dfrac{S}{t}$	t

Теперь нужно понять, какое уравнение можно составить по заполненной таблице. Какую информацию мы не использовали? Информацию про их встречу. Для начала 48 мин — это $\dfrac{48}{60} = \dfrac{4}{5}$ ч. Скорость их сближения равна $\dfrac{S}{t-3} + \dfrac{S}{t}$, значит, получаем уравнение

$$S = \frac{4}{5}\left(\frac{S}{t-3} + \frac{S}{t}\right).$$

Разделим все слагаемые уравнения на $S > 0$. Получаем уравнение:

$$1 = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{t-3} + \frac{1}{t}\right)$$

$$\frac{5}{4} = \frac{2t-3}{t(t-3)}$$

Так как $t-3$ — это время, за которое мотоциклист проезжает путь из A в B, то $t > 3$. Тогда $t \cdot (t-3) > 0$ и можем домножить обе части уравнения на $4 \cdot t \cdot (t-3)$. Получаем

$$5 \cdot t \cdot (t-3) = 4 \cdot (2t-3)$$

$$5t^2 - 23t + 12 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 4 \\ t = \frac{3}{5} \end{array}\right.$$

Значение $t = \dfrac{3}{5} < 3$ не подходит, следовательно, велосипедист затратил $t = 4$ часа на путь из B в A.

1.3 Поиск средней скорости

Первую треть пути тело двигалось со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость на всем пути.

Решение

Если обозначить весь путь за $3S$ км, то на 1-ую, 2-ую и 3-ю трети пути было затрачено $\dfrac{S}{60}$, $\dfrac{S}{120}$ и $\dfrac{S}{110}$ часа соответственно. Значит, средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{общ}}}{t_{\text{общ}}} = \frac{3S}{\dfrac{S}{60} + \dfrac{S}{120} + \dfrac{S}{110}} = \frac{3}{\dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{110}} = \frac{3}{\dfrac{3}{88}} = 88 \text{ км/ч.}$$

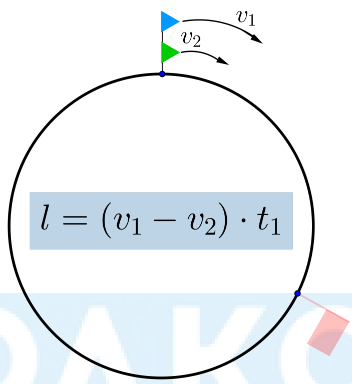
2 Задачи на движение по окружности

2.1 Движение по окружности. Основные принципы

1. Верна та же формула: $S = v \cdot t$.
2. Направление движения по окружности может быть по часовой стрелке и против часовой стрелки.
3. Самое основное в задачах на движение по окружности — это рассмотреть момент, когда тела находятся в одной точке, встретились, одно тело догнало другое тело, поравнялись. Все эти формулировки говорят об одной и той же ситуации: тела находятся в одной точке на окружности.
4. Пусть два тела со скоростями $v_1 > v_2$ начали движение из одной точки в одном направлении.

   Этот момент будем считать нулевым разом, когда они находятся в одной точке.

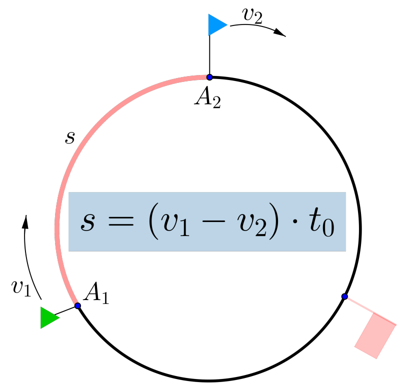
   Если l — длина круга, t_1 — время, через которое они окажутся в одной точке в первый раз, то справедливо равенство (см.рис).



   То есть за время t_1 первое тело пройдет расстояние, на l (ед.) большее (то есть на один круг), чем второе тело. Если t_n — время, через которое они в n-ый раз окажутся в одной точке, то $t_n = n \cdot t_1$. Значит, через время t_n после начала движения первый пройдет на n кругов больше, чем второй, то есть пройденное им расстояние на $n \cdot l$ (ед.) больше.

5. Пусть два тела начали движение со скоростями $v_1 > v_2$ из разных точек в одном направлении. Чтобы свести задачу к предыдущему виду, нужно найти сначала время t_0, через которое первый догонит второго (это будет тот самый нулевой раз, когда они оказались в одной точке), после чего можно рассуждать, как в предыдущем пункте.

   Если на момент начала движения расстояние между ними равно длине дуги $\smile{A_1A_2} = s$, то верно равенство (см.рис).



2.2 Примеры решения задачи на движение по окружности

Пример 1

Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Решение

Заполним следующую таблицу:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Первый автомобиль			
Второй автомобиль			

Пусть скорость второго автомобиля равна x км/ч. Заметим, что второй столбец таблицы заполняется в часах, поэтому 40 минут нужно перевести в часы, получим $\dfrac{2}{3}$ часа. Расстояние найдем по формуле $S = v \cdot t$.

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Первый автомобиль	80	$\dfrac{2}{3}$	$80 \cdot \dfrac{2}{3}$
Второй автомобиль	x	$\dfrac{2}{3}$	$x \cdot \dfrac{2}{3}$

Теперь осталось заметить, что фраза «первый автомобиль опережал второй автомобиль на один круг» означает, что расстояние, пройденное первым автомобилем, больше расстояния, пройденного вторым автомобилем, ровно на один круг, то есть на 14 км. Получаем уравнение:

$$80 \cdot \frac{2}{3} - x \cdot \frac{2}{3} = 14$$

$$(80 - x) \cdot \frac{2}{3} = 14$$

$$80 - x = 21$$

$$x = 59$$

Тогда скорость второго автомобиля равна 59 км/ч.

Пример 2

Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист. Через 30 минут он ещё не вернулся в пункт А и из пункта А следом за ним отправился мотоциклист. Через 10 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще через 30 минут после этого догнал его во второй раз. Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

Решение

К моменту, когда мотоциклист первый раз догнал велосипедиста он проехал за 10 минут расстояние, на которое велосипедист потратил 40 минут. Следовательно, скорость велосипедиста в 4 раза меньше скорости мотоциклиста. Пусть скорость велосипедиста равна x км/ч, тогда скорость мотоциклиста будет равна $4x$ км/ч. Теперь будем рассматривать задачу начиная с момента их первой встречи. Заполним таблицу, учитывая, что 30мин $= \frac{1}{2}$часа.

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Велосипедист	x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot x$
Мотоциклист	$4x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 4x$

Так как за 30 минут мотоциклист обогнал велосипедиста на один круг, расстояние, пройденное мотоциклистом за 30 минут, больше расстояния, пройденного велосипедистом за 30 минут, на один круг, то есть на 30 км. Получаем уравнение:

$$\frac{1}{2} \cdot 4x - \frac{1}{2} \cdot x = 30$$

$$\frac{3}{2} \cdot x = 30$$

$$x = 20$$

Следовательно, скорость велосипедиста равна 20 км/ч, тогда скорость мотоциклиста равна 80 км/ч.

3 Задачи на движение по воде

3.1 Движение по воде. Основные принципы

1. Верна та же формула, что для движения по прямой: $S = v \cdot t$.
2. Пусть $v_с$ — собственная скорость тела (скорость в неподвижной воде), $v_{теч}$ — скорость течения. Тогда если тело движется по реке *по течению*, то скорость движения тела равна $v = v_с + v_{теч}$.

   Значит, $S = (v_с + v_{теч}) \cdot t$.
3. Если тело движется по реке *против течения*, то скорость движения тела равна $v = v_с - v_{теч}$.

   Значит, $S = (v_с - v_{теч}) \cdot t$.
4. Плот — это тело, у которого собственная скорость $v_с = 0$. Значит, плот может плыть только по течению и только со скоростью течения.
5. Принято считать, что в озере нет течения, то есть тело в озере плывет со своей собственной скоростью.
6. Все остальное в данных задачах ничем не отличается от задач на прямолинейное движение. Рассуждать, составлять таблицу и тому подобное в них стоит так же, как и в задачах на движение по прямой.

3.2 Пример решения задачи на движение по воде

Пример

Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта A в пункт B, расположенный в 30 км от A. Пробыв в пункте B 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт A в 18:00. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки равна 1 км/ч.

Решение

Заполним следующую таблицу:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
По теч.			
Против теч.			

Так как лодка сначала плыла из A в B, а затем из B в A, то один раз она плыла по течению, а один раз против течения. При этом не важно, в какую сторону направленно течение — из A в B или из B в A.

Пусть собственная скорость лодки равна x км/ч, тогда её скорость по течению равна $(x+1)$ км/ч, а скорость против течения равна $(x-1)$ км/ч.

Получаем таблицу:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
По теч.	$x+1$	$\dfrac{30}{x+1}$	30
Против теч.	$x-1$	$\dfrac{30}{x-1}$	30

Так как лодка вернулась в пункт отправления через 8 часов после выезда и 2 часа 30 минут из них стояла в пункте B, то она была в пути в течение $8 - 2,5 = 5,5$ часа. Составим уравнение:

$$\frac{30}{x+1} + \frac{30}{x-1} = 5,5$$

$$\frac{30 \cdot (x-1) + 30 \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x-1)} = \frac{11}{2}$$

$$\frac{60x}{(x+1)\cdot(x-1)} = \frac{11}{2}$$

Скорость против течения равна $x - 1$ км/ч, значит, $x > 1$. Тогда $(x+1)\cdot(x-1) > 0$ и можем домножить левую и правую части уравнения на $2\cdot(x+1)\cdot(x-1)$. Получаем

$$\begin{gathered}60x\cdot 2 = 11\cdot(x+1)\cdot(x-1)\\ 120x = 11\cdot(x^2-1)\\ 11x^2 - 120x - 11 = 0\end{gathered}$$

Найдем дискриминант:

$$\begin{gathered}D = 120^2 + 4\cdot 11\cdot 11 =\\ = 4\cdot(60^2 + 11\cdot 11) =\\ = 2^2\cdot 3721 = 2^2\cdot 61^2 = 122^2\end{gathered}$$

Тогда корни квадратного уравнения равны

$$\begin{gathered}x_1 = \frac{120+122}{2\cdot 11} = \frac{242}{22} = 11\\ x_2 = \frac{120-122}{2\cdot 11} < 0\end{gathered}$$

Так как $x > 0$, то собственная скорость лодки равна 11 км/ч.

4 Задачи на работу и производительность

4.1 Работа и производительность. Основные принципы

1. Такие задачи в каком-то смысле похожи на задачи на движение, только в роли расстояния здесь выступает работа, а в роли скорости — производительность. Верна формула $A = p \cdot t$, где A — работа, p — производительность, t — время работы.

2. Если рабочие трудятся одновременно, то их общая производительность равна сумме их производительностей.

3. Работа обычно измеряется в количестве произведенной продукции, производительность — в количестве продукции, произведенной за единицу времени, а время — в минутах, часах и так далее.

4. Работу можно принять за 1, если ей не присвоено никакого значения, да это логически и нельзя сделать. Можно обозначить работу неизвестной A, но тогда полученное вами уравнение можно будет разделить на A, то есть значение работы ни на что не повлияет.

5. Так же, как и задачи на движение, задачи на работу удобно решать с помощью таблицы.

4.2 Примеры решения задач на работу и производительность

Пример 1

Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объемом 99 литров?

Решение

Заполним следующую таблицу:

	Производительность, л/мин	Время, мин	Работа, л
Первая труба			
Вторая труба			

Если две ячейки из трех в строке заполнены, то третья заполняется через них при помощи формулы $A = v \cdot t$.

Нам нужно найти производительность первой трубы, давайте обозначим её за x л/мин. Тогда производительность второй трубы равна $(x+1)$ л/мин. Получаем таблицу:

	Производительность, л/мин	Время, мин	Работа, л
Первая труба	x	$\dfrac{110}{x}$	110
Вторая труба	$x+1$	$\dfrac{99}{x+1}$	99

Так как первая труба заполняет резервуар на 2 минуты дольше, то её время на 2 минуты больше. Составим уравнение:

$$\frac{110}{x} - \frac{99}{x+1} = 2$$

$$\frac{110 \cdot (x+1) - 99 \cdot x}{x \cdot (x+1)} = 2$$

$$\frac{11x + 110}{x \cdot (x+1)} = 2$$

Так как x — производительность первой трубы, то $x > 0$ и $x \cdot (x+1) > 0$. Тогда можем домножить обе части уравнения на $x \cdot (x+1)$.

Получаем

$$11x + 110 = 2 \cdot x \cdot (x+1)$$
$$11x + 110 = 2x^2 + 2x$$
$$2x^2 - 9x - 110 = 0$$
$$D = 81 + 4 \cdot 2 \cdot 110 = 961$$
$$x_1 = \frac{9+31}{4} = 10$$
$$x_2 = \frac{9-31}{4} < 0$$

Так как $x > 0$, то производительность первой трубы равна 10 л/мин.

Пример 2 (вся работа взята за 1)

Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

Решение

Примем работу, которую выполняют рабочие, за 1 (по принципу 4). Пусть p_1, p_2 — производительности первого и второго рабочих соответственно. Тогда из формулы $A = p \cdot t$ следует, что

$$1 = (p_1 + p_2) \cdot 12$$

Требуется найти $\dfrac{1}{p_1}$.

Далее, пусть таблица описывает ситуацию «первый рабочий за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня».

	Производительность	Время	Работа
Рабочий 1	p_1	2	$2p_1$
Рабочий 2	p_2	3	$3p_2$

Мы заполнили первый и второй столбцы, а с помощью этих данных заполнился третий столбец. Уравнение получим из информации о том, что рабочие выполняют одинаковые объемы работы, то есть $2p_1 = 3p_2$.

В итоге нам известно следующее:

$$\begin{cases} 1 = (p_1 + p_2) \cdot 12 \\ 2p_1 = 3p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \dfrac{5}{3}p_1 \cdot 12 \\ p_2 = \dfrac{2}{3}p_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{p_1} = \frac{5}{3} \cdot 12 \Rightarrow \frac{1}{p_1} = 20$$

Значит, первый рабочий самостоятельно выполнит всю работу за 20 дней.

5 Задачи на смеси, сплавы, растворы

5.1 Растворы и сплавы. Основные принципы

1. Задачи этого типа о следующем (на примере раствора):

   - есть раствор некоторого вещества, то есть жидкость, представляющая собой смесь воды и некоторого вещества, к примеру, кислоты. Вещество в растворе находится в некоторой концентрации (процент содержания этого вещества в растворе), которая ищется по формуле
   $$\text{концентрация р-ра} = \frac{\text{масса вещества}}{\text{масса раствора}} \cdot 100\%$$
   - таких растворов, активное вещество которых одинаково, но разной концентрации, несколько, и их смешивают с целью получить новый раствор с новой концентрацией.
   - величины, фигурирующие в задаче: массы (или объемы) растворов и вещества в них, концентрации растворов. С помощью этих величин требуется составить одно или несколько уравнений и найти нужную величину.
   - если в задаче смешивают два раствора и получают третий, то уравнение почти всегда имеет вид
   $$\text{масса в-ва в растворе 1} + \text{масса в-ва в растворе 2} = \text{масса в-ва в смеси}$$

2. Из формулы концентрации раствора можно выразить массу вещества в растворе:
$$\text{масса в-ва} = \text{масса раствора} \cdot \frac{\text{концентрация р-ра}}{100\%}$$

3. При смешивании растворов их массы суммируются, также суммируются массы веществ (об этом и говорит получаемое нами уравнение), но вот концентрации — нет!

4. Если в задаче фигурирует вода, то это значит, что концентрация активного вещества в ней равна 0%.

5.2 Примеры решения задач на смеси, сплавы, растворы

Пример 1

Смешали некоторое количество 16%-го раствора вещества с удвоенным количеством 19%-го раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Решение

Будем рассматривать массы всех растворов в килограммах. Пусть массы первого и второго растворов равны соответственно x и $2x$, тогда масса их смеси равна $3x$. Пусть $k\%$ — концентрация смеси. Массу вещества в каждом растворе найдем по формуле
$$\text{масса в-ва} = \text{масса раствора} \cdot \frac{\text{концентрация р-ра}}{100\%}$$
Для наглядности заполним таблицу:

	Масса раствора, кг	Масса в-ва, кг	Концентрация р-ра, %
Первый раствор	x	$x \cdot \frac{16}{100}$	16
Второй раствор	$2x$	$2x \cdot \frac{19}{100}$	19
Смесь	$3x$	$3x \cdot \frac{k}{100}$	k

Так как сумма масс вещества в первом и втором растворах равна массе вещества в полученной смеси, то получаем уравнение

$$x\cdot\frac{16}{100}+2x\cdot\frac{19}{100}=3x\cdot\frac{k}{100}\quad\Big|\cdot 100$$

$$16x+38x=3kx\quad\Big|: x>0$$

$$16+38=3k$$

$$k=18$$

Значит, концентрация получившегося раствора равна 18%.

Пример 2 (задача с виноградом и изюмом)

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

Решение

Виноград и изюм в нашем случае являются смесями, которые состоят из двух частей: вода и мякоть. Последняя и является в нашем случае веществом. При сушке винограда выпаривается вода, а вся мякоть, имеющаяся в нем, остается и переходит в мякоть, являющуюся частью изюма. Следовательно, уравнение, которое нам необходимо составить, следующее: «масса мякоти в винограде равна массе мякоти в изюме».

Пусть x кг — масса винограда. Если в винограде 90% воды, то мякоти в нем $100\%-90\%=10\%$. Если в изюме 5% воды, то мякоти в нем $100\%-5\%=95\%$. Применим формулу

$$\text{масса в-ва}=\text{масса смеси}\cdot\frac{\text{концентрация смеси}}{100\%}$$

Тогда масса мякоти (в килограммах) в винограде равна

$$x\cdot\frac{10}{100}$$

При этом масса мякоти (в килограммах) в изюме равна

$$20\cdot\frac{95}{100}$$

Таким образом, получаем уравнение

$$x\cdot\frac{10}{100}=20\cdot\frac{95}{100}$$

$$x=\frac{20\cdot 95}{10}$$

$$x=190$$

Следовательно, потребуется 190 кг винограда.

Пример 3

Имеются два сплава. Первый сплав содержит 5% никеля, второй — 20% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 15% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Решение

Пусть масса первого сплава равна x кг, тогда масса второго сплава равна $(225-x)$ кг. Массы никеля в сплавах найдем по формуле

$$\text{масса в-ва} = \text{масса сплава} \cdot \frac{\text{концентрация сплава}}{100\%}$$

Для наглядности заполним таблицу:

	Масса сплава, кг	Масса никеля, кг	Концентрация сплава, %
Первый сплав	x	$x\cdot\dfrac{5}{100}$	5
Второй сплав	$225-x$	$(225-x)\cdot\dfrac{20}{100}$	20
Третий сплав	225	$225\cdot\dfrac{15}{100}$	15

Так как сумма масс никеля в первом и втором сплавах равна массе никеля в третьем сплаве, то получаем уравнение:

$$\begin{gathered}
x\cdot\frac{5}{100}+(225-x)\cdot\frac{20}{100}=225\cdot\frac{15}{100}\quad\Big|\cdot 100\\
5x+(225-x)\cdot 20=225\cdot 15\quad\Big|:5\\
x+(225-x)\cdot 4=225\cdot 3\\
x+900-4x=675\\
-3x=-225\\
x=75
\end{gathered}$$

Следовательно, масса первого сплава равна 75 кг, тогда масса второго сплава равна $225-75=150$ кг. Тогда масса первого сплава меньше массы второго сплава на $150-75=75$ килограммов.

Пример 4 (задача с двумя смешиваниями)

Смешав 15-процентный и 95-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 20-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 30-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 15-процентного раствора использовали для получения смеси?

Решение

Пусть x кг и y кг — массы 15-процентного раствора (будем называть его первым) и 95-процентного раствора (будем называть его вторым). Составим таблицу для первого смешивания, при этом массу кислоты в каждом растворе найдем по формуле

$$\text{масса в-ва} = \text{масса раствора} \cdot \frac{\text{концентрация р-ра}}{100\%}$$

	Масса раствора, кг	Масса кислоты, кг	Концентрация раствора, %
Первый раствор	x	$x \cdot \frac{15}{100}$	15
Второй раствор	y	$y \cdot \frac{95}{100}$	95
Вода	10	$10 \cdot \frac{0}{100}$	0
Полученный раствор	$x+y+10$	$(x+y+10) \cdot \frac{20}{100}$	20

Так как сумма масс кислоты в первом, втором растворах и воде равна массе кислоты в полученном растворе, то получаем уравнение:

$$x \cdot \frac{15}{100} + y \cdot \frac{95}{100} + 10 \cdot \frac{0}{100} = (x+y+10) \cdot \frac{20}{100} \quad \Big| \cdot 100$$

$$15x + 95y = (x+y+10) \cdot 20 \quad \Big| : 5$$

$$3x + 19y = (x+y+10) \cdot 4$$

$$3x + 19y = 4x + 4y + 40$$

Составим таблицу для второго смешивания:

	Масса раствора, кг	Масса кислоты, кг	Концентрация раствора, %
Первый раствор	x	$x \cdot \frac{15}{100}$	15
Второй раствор	y	$y \cdot \frac{95}{100}$	95
Третий раствор	10	$10 \cdot \frac{50}{100}$	50
Полученный раствор	$x+y+10$	$(x+y+10) \cdot \frac{30}{100}$	30

Так как сумма масс кислоты в первом, втором и третьем растворах равна массе кислоты в полученном растворе, то получаем уравнение:

$$x\cdot\frac{15}{100}+y\cdot\frac{95}{100}+10\cdot\frac{50}{100}=(x+y+10)\cdot\frac{30}{100}\quad\Big|\cdot 100$$

$$15x+95y+500=(x+y+10)\cdot 30\quad\Big|:5$$

$$3x+19y+100=(x+y+10)\cdot 6$$

$$3x+19y+100=6x+6y+60$$

Тогда имеем систему:

$$\begin{cases}3x+19y=4x+4y+40\\3x+19y+100=6x+6y+60\end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$\begin{cases}3x+19y=4x+4y+40\\100=2x+2y+20\end{cases}$$

$$\begin{cases}15y-x=40\\2x+2y=80\quad |:2\end{cases}$$

$$\begin{cases}15y-x=40\\x+y=40\end{cases}$$

Складывая первое и второе уравнения, получаем

$$16y=80$$

$$y=5$$

Так как $x+y=40$, то $x=35$.
Таким образом, масса 15-процентного раствора равна 35 килограммам.