# Теория по производной для №12 из ЕГЭ от «Школково»

## Содержание

1 Таблица производных и правила дифференцирования 2
1.1 Таблица производных элементарных функций . . . 2
1.2 Правила дифференцирования . . . 2

2 Поиск точек экстремума функции 4
2.1 Точки экстремума функции . . . 4
2.2 План решения задач . . . 4

3 Поиск наибольшего/наименьшего значения функции 7
3.1 План решения задач . . . 7

# 1 Таблица производных и правила дифференцирования

## 1.1 Таблица производных элементарных функций

| | Функция $y$ | Производная $y'$ |
|---|---|---|
| 1 | $a \ (a \in \mathbb{R})$ | $0$ |
| 2 | $x^a \ (a \in \mathbb{R})$ | $a \cdot x^{a-1}$ |
| 3 | $e^x$ | $e^x$ |
| 4 | $a^x \ (a > 0)$ | $a^x \cdot \ln a$ |
| 5 | $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ |
| 6 | $\log_a x \ (a > 0, a \neq 1)$ | $\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ |
| 7 | $\sin x$ | $\cos x$ |
| 8 | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| 9 | $\operatorname{tg} x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |

| | Функция $y$ | Производная $y'$ |
|---|---|---|
| 10 | $\operatorname{ctg} x$ | $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ |
| 11 | $\arcsin x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 12 | $\arccos x$ | $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 13 | $\operatorname{arctg} x$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| 14 | $\operatorname{arcctg} x$ | $-\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| Важные частные случаи | | |
| 15 | $x$ | $1$ |
| 16 | $\dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ |
| 17 | $\sqrt{x}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |

## 1.2 Правила дифференцирования

| Функция | Производная |
|---|---|
| $a \cdot f(x) \ (a \in \mathbb{R})$ | $a \cdot f'(x)$ |
| $f(x) \pm g(x)$ | $f'(x) \pm g'(x)$ |
| $f(x) \cdot g(x)$ | $f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ |
| $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ | $\dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ |
| $f(g(x))$ | $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ |

1. Производная функции $a \cdot f(x)$, где $a$ — число, равна $a \cdot f'(x)$.

   Например,

$$(2\cos x)' = 2 \cdot (\cos x)' = 2 \cdot (-\sin x) = -2\sin x.$$

$$\left(-\frac{x^3}{3}\right)' = -\frac{1}{3} \cdot \left(x^3\right)' = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 = -x^2.$$

2. Производная суммы функций равна сумме производных этих функций.

   Например,

$$\left(\sqrt{x} - 3x + 1\right)' = \left(\sqrt{x}\right)' - (3x)' + 1' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 + 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3.$$

3. Производная произведения функций

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Например,

$$\left((x^2-3)\cdot e^x\right)' = \left(x^2-3\right)'\cdot e^x + \left(x^2-3\right)\cdot (e^x)' =$$
$$= \left(\left(x^2\right)' - 3'\right)\cdot e^x + \left(x^2-3\right)\cdot e^x = 2x\cdot e^x + \left(x^2-3\right)\cdot e^x = e^x(x^2+2x-3).$$

4. Производная частного функций

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Например,

$$\left(\frac{x+2}{e^x}\right)' = \frac{(x+2)'\cdot e^x - (x+2)\cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{1\cdot e^x - (x+2)\cdot e^x}{e^{2x}} =$$
$$= \frac{e^x\cdot (1-(x+2))}{e^{2x}} = -\frac{x+1}{e^x}$$

5. Сложная функция — это функция вида $f(g(x))$, где $f(y)$ и $g(x)$ — функции.

Производная сложной функции
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Например,

$$\left(\sqrt{-x^2+2-6x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{-x^2+2-6x}}\cdot (-x^2+2-6x)' =$$
$$= \frac{-\left(x^2\right)' + 2' - (6x)'}{2\sqrt{-x^2+2-6x}} = \frac{-2x-6}{2\sqrt{-x^2+2-6x}} = -\frac{x+3}{\sqrt{-x^2+2-6x}}.$$

$$\left(\log_7\left(x^2+16x+100\right)\right)' = \frac{1}{(x^2+16x+100)\cdot \ln 7}\cdot \left(x^2+16x+100\right)' =$$
$$= \frac{\left(x^2\right)' + (16x)' + 100'}{(x^2+16x+100)\cdot \ln 7} = \frac{2x+16}{(x^2+16x+100)\cdot \ln 7}.$$

# 2 Поиск точек экстремума функции

## 2.1 Точки экстремума функции

Вспомним, что:

1. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $X$ и во всех внутренних точках этого промежутка имеет положительную производную $(f'(x) > 0)$, то функция возрастает на промежутке $X$.

2. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $X$ и во всех внутренних точках этого промежутка имеет отрицательную производную $(f'(x) < 0)$, то функция убывает на промежутке $X$.

**Определение** Точка $x_0$ называется *точкой экстремума* функции $f(x)$, если в некоторой её окрестности, которая не включает в себя саму точку $x_0$, выполняется либо неравенство $f(x_0) > f(x)$ (тогда точка называется *точкой максимума*), либо $f(x_0) < f(x)$ (тогда точка называется *точкой минимума*).

**Теорема**
Если функция имеет экстремум в точке $x_0$, то её производная в этой точке либо равна 0, либо не существует.

**Определение** Точка $x_0$, в которой $f'(x_0)$ равна нулю или не существует, называется *критической точкой* функции $f(x)$.

**ВАЖНО!** Таким образом, все точки экстремума функции являются её критическими точками. Обратное, вообще говоря, неверно. Поэтому для поиска точек экстремума функции необходимо найти все её критические точки и определить какие из них являются точками максимума или минимума.

Рассмотрим условия, при которых критическая точка $x_0$ является точкой максимума или минимума.

| |
|---|
| Если в точке $x_0$ функция определена, непрерывна и меняется с возрастающей на убывающую (то есть производная $f'(x)$ в точке $x_0$ меняет свой знак с «$+$» на «$-$», если смотреть слева направо), то точка $x_0$ — *точка максимума* функции $f(x)$. |

| |
|---|
| Если в точке $x_0$ функция определена, непрерывна и меняется с убывающей на возрастающую (то есть производная $f'(x)$ в точке $x_0$ меняет свой знак с «$-$» на «$+$», если смотреть слева направо), то точка $x_0$ — *точка минимума* функции $f(x)$. |

## 2.2 План решения задач

1. Находим область определения функции.

2. Находим производную функции, то есть $f'(x)$.

3. Находим все критические точки, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.

4. На координатной оси отмечаем область определения функции и критические точки. С помощью метода интервалов находим знаки производной на получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает.

5. Если при переходе через точку функция $f(x)$ меняется с возрастающей на убывающую, то эта точка является точкой максимума функции, а если с убывающей на возрастающую, то точкой минимума.

**Пример 1**
Найдите точку минимума функции $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 7$.

**Решение**

1. Область определения функции $x \in \mathbb{R}$.

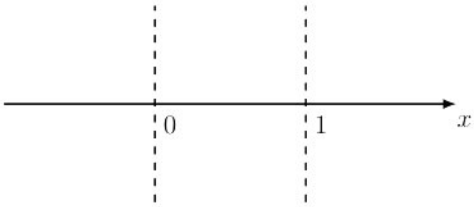
2. Найдем производную:
$$y' = \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} = x^2 - x$$

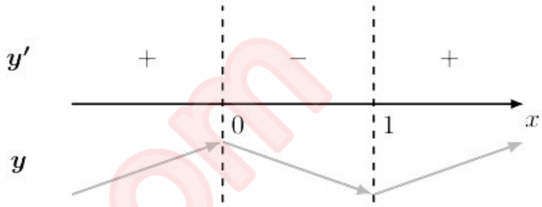
3. Найдём критические точки.

   Точки, в которых производная равна нулю:
$$x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &x = 1 \end{aligned}\right.$$

   Точек, в которых производная не существует, нет.

4. Рисуем координатную ось и отмечаем на ней область определения и критические точки. Затем расставляем знаки производной на трёх получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:




5. Видим, что $x = 0$ является точкой максимума, а $x = 1$ — точкой минимума.

**Пример 2**
Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5) - 2x + 9$.

**Решение**

1. Область определения функции $x > -5$.

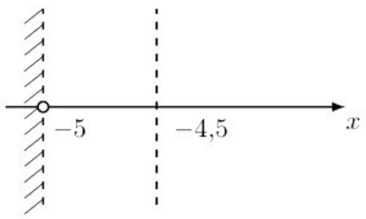
2. Найдем производную:
$$y' = \frac{1}{x+5} \cdot (x+5)' - 2 = \frac{1}{x+5} - 2$$

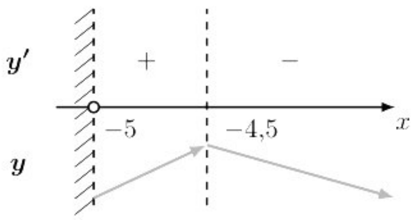
3. Найдём критические точки.

   Точки, в которых производная равна нулю:
$$\frac{1}{x+5} - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x+5} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x+5 = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad x = -4{,}5$$

   Производная не существует в точке $x = -5$.

4. Рисуем координатную ось и отмечаем на ней область определения и критические точки. Затем расставляем знаки производной на двух получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:




5. Видим, что $x = -4{,}5$ — это точка максимума.

**Пример 3**
Найдите точку минимума функции $y = \dfrac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - x$.

**Решение**

1. Область определения функции $x \in \mathbb{R}$.

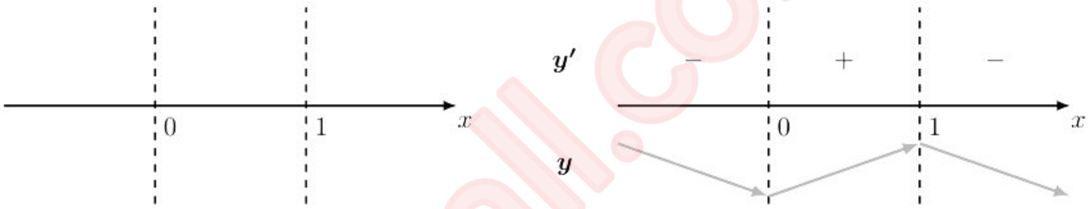
2. Найдем производную:
$$y' = \frac{3}{2} \cdot \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' - (x)' = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1$$

3. Найдём критические точки.

   Точки, в которых производная равна нулю:
$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

   Производная не существует в точке $x = 0$.

4. Рисуем координатную ось и отмечаем на ней область определения и критические точки. Затем расставляем знаки производной на трёх получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:




5. Видим, что $x = 0$ является точкой минимума, а $x = 1$ — точкой максимума.

Рассмотрим задачи, в которых можно исследовать функцию без помощи производной.

**Пример 4**
Найдите точку минимума функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 11}$.

**Решение**
Перепишем функцию в виде
$$y = \sqrt{x^2 - 6x + 11} = \sqrt{(x^2 - 6x + 9) + 2} = \sqrt{(x-3)^2 + 2}.$$

Найдём область определения функции: $(x-3)^2 + 2 \geqslant 0$, откуда получаем $x \in \mathbb{R}$.

Функция $y$ является композицией двух функций: возрастающей при $x \geqslant 0$ функции $y_1 = \sqrt{x}$ и убывающей при $x \leqslant 3$ и возрастающей при $x \geqslant 3$ функции $y_2 = (x-3)^2 + 2$. Следовательно, исходная функция убывает при $x \leqslant 3$ как композиция убывающей и возрастающей функций и возрастает при $x \geqslant 3$ как композиция двух возрастающих функций. Тогда $x = 3$ является точкой минимума.

**Пример 5**
Найдите точку максимума функции $y = \log_2\left(3 + 2x - x^2\right) - 2$.

**Решение**
Перепишем функцию в виде
$$y = \log_2\left(3 + 2x - x^2\right) - 2 = \log_2\left(-(x^2 - 2x + 1) + 4\right) - 2 = \log_2\left(-(x-1)^2 + 4\right) - 2.$$

Найдем область определения функции: $-(x-1)^2 + 4 > 0$, откуда получаем $x \in (-1; 3)$.

Эта функция является композицией двух функций: возрастающей при $x > 0$ функции $y_1 = \log_2 x - 2$ и возрастающей при $x \leqslant 1$ и убывающей при $x \geqslant 1$ функции $y_2 = -(x-1)^2 + 4$. Следовательно, исходная функция возрастает при $x \in (-1; 1]$ как композиция двух возрастающих функций и убывает при $x \in [1; 3)$ как композиция убывающей и возрастающей функций. Тогда $x = 1$ является точкой максимума.

# 3 Поиск наибольшего/наименьшего значения функции

Вспомним, что:

1. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $X$ и во всех внутренних точках этого промежутка имеет положительную производную $(f'(x) > 0)$, то функция возрастает на промежутке $X$.

2. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на промежутке $X$ и во всех внутренних точках этого промежутка имеет отрицательную производную $(f'(x) < 0)$, то функция убывает на $X$.

## 3.1 План решения задач

1. Находим область определения функции.

2. Берем производную функции, то есть находим $f'(x)$.

3. Находим все критические точки, то есть точки, в которых производная равна нулю или не существует.

4. На координатной оси отмечаем область определения функции, заданный в условиях отрезок и критические точки. С помощью метода интервалов находим знаки производной на получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает.

5. Находим значение, которое требуется в задаче.

**Пример 1**

Найдите наибольшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$ на отрезке $[1; 9]$.

**Решение**

1. Область определения функции $x \geqslant 0$.

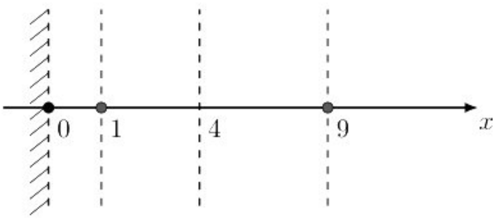
2. Найдем производную:
$$y' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 3.$$

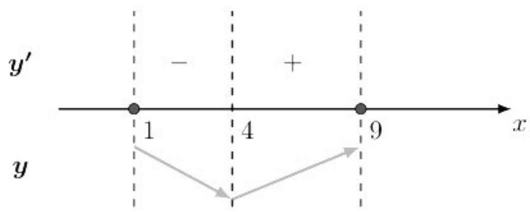
3. Найдем критические точки.

   Нули производной:
$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4.$$

   Точек, в которых производная не существует, нет.

4. Отрезок $[1; 9]$ полностью лежит в области определения, поэтому будем исследовать функцию на этом отрезке. Рисуем координатную ось, отмечаем на ней отрезок $[1; 9]$ и критические точки. Затем расставляем знаки производной на двух получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:



5. На полученном эскизе видно, что наибольшее значение на отрезке $[1;9]$ функция принимает или в точке $x = 1$, или в точке $x = 9$.

   Чтобы решить задачу, осталось найти значения функции в точках $x = 1$ и $x = 9$ :

$$y(1) = 1^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 1 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$$
$$y(9) = 9^{\frac{3}{2}} - 3 \cdot 9 + 1 = \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} - 27 + 1 = 3^3 - 27 + 1 = 1$$

   Так как $1 > -1$, то наибольшее значение функции на отрезке $[1;9]$ равно 1.

**Пример 2**
Найдите наибольшее значение функции $y = \left(3x^2 - 36x + 36\right) e^x$ на отрезке $[-1;4]$.

**Решение**

1. Область определения функции $x \in \mathbb{R}$.

2. Найдем производную:

$$y' = \left(3x^2 - 36x + 36\right)' \cdot e^x + \left(3x^2 - 36x + 36\right) \cdot \left(e^x\right)' =$$
$$= (6x - 36) \cdot e^x + \left(3x^2 - 36x + 36\right) \cdot e^x = \left(3x^2 - 30x\right) \cdot e^x$$

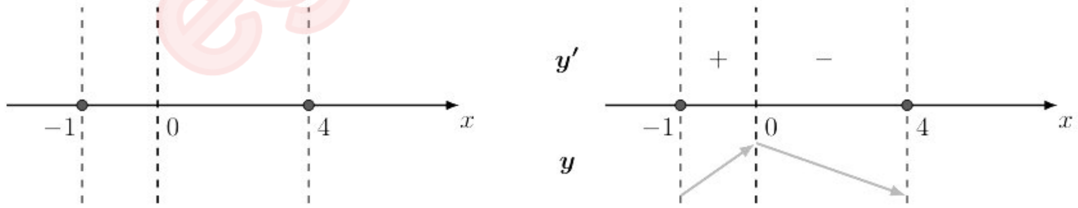
3. Найдем критические точки.

   Нули производной:

$$\left(3x^2 - 30x\right) \cdot e^x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 30x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &x = 10 \end{aligned}\right.$$

   Точек, в которых производная не существует, нет.

4. Отрезок $[-1;4]$ полностью лежит в области определения, поэтому будем исследовать функцию на этом отрезке. Рисуем координатную ось, отмечаем на ней отрезок $[-1;4]$, из критических точек на этот отрезок попадает только точка $x = 0$. Затем расставляем знаки производной на двух получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:




5. На полученном эскизе видно, что наибольшее значение на отрезке $[-1;4]$ функция принимает в точке $x = 0$.

   Чтобы решить задачу, осталось найти значение функции в точке $x = 0$ :

$$y(0) = \left(3 \cdot 0^2 - 36 \cdot 0 + 36\right) \cdot e^0 = 36 \cdot 1 = 36.$$

**Пример 3**
Найдите наибольшее значение функции $y = 12\cos x + 6\sqrt{3} \cdot x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

**Решение**

1. Область определения функции $x \in \mathbb{R}$.

2. Найдем производную:

$$y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}$$

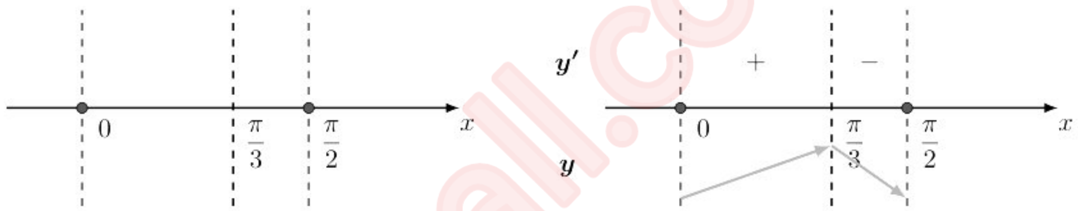
3. Найдем критические точки.

   Нули производной:

$$-12\sin x + 6\sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

   Точек, в которых производная не существует, нет.

4. Отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ полностью лежит в области определения, поэтому будем исследовать функцию на этом отрезке. Рисуем координатную ось, отмечаем на ней отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, из критических точек на этот отрезок попадает только точка $x = \frac{\pi}{3}$. Затем расставляем знаки производной на двух получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:




5. На полученном эскизе видно, что наибольшее значение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция принимает в точке $x = \frac{\pi}{3}$.

   Чтобы решить задачу, осталось найти значение функции в точке $x = \frac{\pi}{3}$:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 6 + 6 = 12.$$

**Пример 4**
Найдите наибольшее значение функции $y = 3\operatorname{tg} x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

**Решение**

1. Область определения функции: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

2. Найдем производную:

$$y' = \frac{3}{\cos^2 x} - 3 = 3\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 3\operatorname{tg}^2 x$$

3. Найдем критические точки.

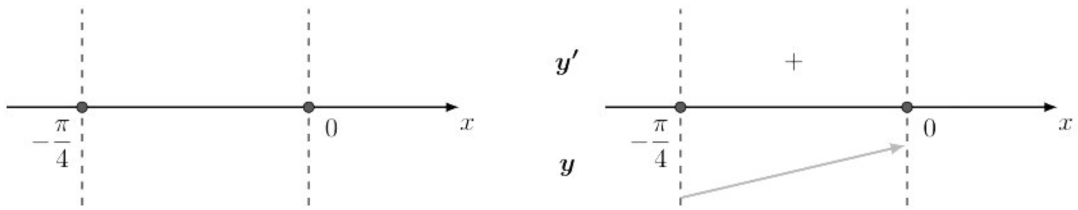
   Нули производной:

$$\operatorname{tg}^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

   Производная не существует в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

   Тогда критические точки можно записать так: $\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Отрезок $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$ полностью лежит в области определения, поэтому будем исследовать функцию на этом отрезке. Рисуем координатную ось, отмечаем на ней отрезок $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$, из критических точек на этот отрезок попадает только точка $x = 0$. Получился один промежуток, находим на нем знак производной и отмечаем, возрастает или убывает функция.




5. Так как функция возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$, то наибольшее значение функция принимает в точке $x = 0$.

   Чтобы решить задачу, осталось найти значение функции в точке $x = 0$ :

$$y(0) = 3\operatorname{tg} 0 - 3 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Рассмотрим задачи, в которых можно исследовать функцию без помощи производной.

**Пример 5**
Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{5 - 4x - x^2}$.

**Решение**
Перепишем функцию в виде

$$y = \sqrt{5 - 4x - x^2} = \sqrt{-(x^2 + 4x + 4) + 9} = \sqrt{-(x + 2)^2 + 9}$$

Заметим, что

$$-(x+2)^2 \leqslant 0$$
$$-(x+2)^2 + 9 \leqslant 9$$
$$\sqrt{-(x+2)^2 + 9} \leqslant 3$$

Так как равенство достигает при $x = -2$, то наибольшее значение функции равно 3.

**Пример 6**
Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2+2x+5}$.

**Решение**
Перепишем функцию в виде

$$y = 2^{\left(x^2+2x+1\right)+4} = 2^{(x+1)^2+4}.$$

Заметим, что

$$(x+1)^2 \geqslant 0$$
$$(x+1)^2 + 4 \geqslant 4$$
$$2^{(x+1)^2+4} \geqslant 2^4$$
$$2^{(x+1)^2+4} \geqslant 16$$

Так как равенство достигает при $x = -1$, то наименьшее значение функции равно 16.