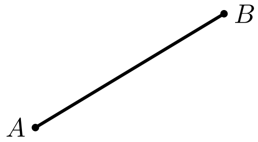
Теория по векторам для №2 из ЕГЭ от «Школково»

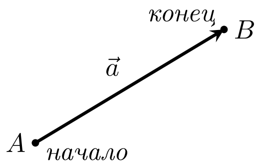
Содержание

1 Понятие вектора

Рассмотрим произвольный отрезок AB. На нём можно указать два направления: от A к B и наоборот.



Чтобы выбрать одно из этих направлений, одну из точек A и B назовём началом отрезка, а вторую — концом отрезка и будем считать, что отрезок направлен от начала к концу.



Определение Отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом, называется *направленным отрезком*, или *вектором.*

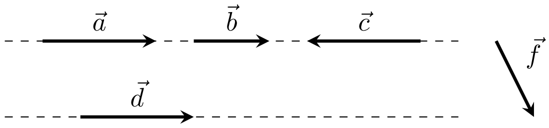
На рисунках вектор изображается отрезком со стрелкой, показывающей направление вектора. Векторы обозначают двумя заглавными латинскими буквами со стрелкой над ними, например $\overrightarrow{AB}$. Первая буква обозначает начало вектора, вторая — его конец. Векторы часто обозначают и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней, например $\vec{a}$.

Любая точка плоскости также является вектором. В этом случае вектор называется *нулевым.* Начало нулевого вектора совпадает с его концом. Нулевой вектор обозначается символом $\vec{0}$.

Длиной, или *модулем* ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$, называется длина отрезка AB. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначается так: $|\overrightarrow{AB}| = AB$. Длина нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

2 Коллинеарные векторы

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными,* если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.



Пусть две пунктирные прямые параллельны. Тогда $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ коллинеарны, а вот $\vec{f}$ не коллинеарен ни одному из них, так как он не находится ни на одной из пунктирных прямых, ни на прямой, параллельной им.

Коллинеарные векторы можно разбить на две группы: *сонаправленные* и *противоположно направленные* векторы. В нашем примере сонаправленными являются векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{d}$; векторы $\vec{c}$ и $\vec{a}$ являются противоположно направленными; векторы $\vec{c}$ и $\vec{b}$ являются противоположно направленными; векторы $\vec{c}$ и $\vec{d}$ являются противоположно направленными.

Нулевой вектор $\vec{0}$ считается колинеарным и сонаправленным любому вектору.

3 Равенство векторов

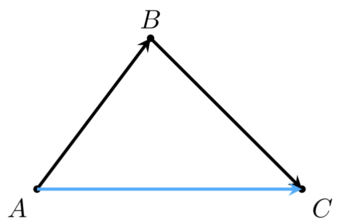
Определение Векторы называются *равными,* если они сонаправлены и их длины равны.

На самом деле вектор $\overrightarrow{AB}$ — это сдвиг точки A в точку B. Тогда этот вектор двигает не только точку A, но и всю плоскость.

Векторы равны, если они сонаправлены и их длины равны, поэтому не важно, где находится наш вектор. Мы можем отложить от разных точек направленный отрезок $\vec{a}$, но с точки зрения векторов это будет один и тот же вектор. Получается, что вектор это не только конкретный направленный отрезок, на самом деле это целый класс всех равных направленных отрезков, которые одинаково двигают плоскость. Таким образом, в задачах любой вектор мы можем рисовать где угодно в удобном для нас месте.

4 Сложение векторов

Пусть точка переместилась из положения A в положение B, а затем из положения B в положение C. В результате этих двух перемещений, которые можно представить векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, точка переместилась из положения A в положение C. Поэтому результат перемещения можно представить как вектор $\overrightarrow{AC}$.

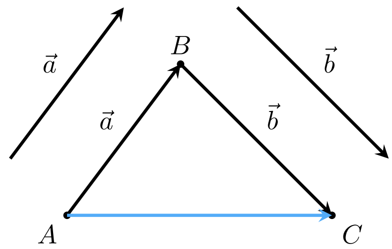


Поскольку перемещение из A в C складывается из перемещения из A в B и перемещения из B в C, то

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

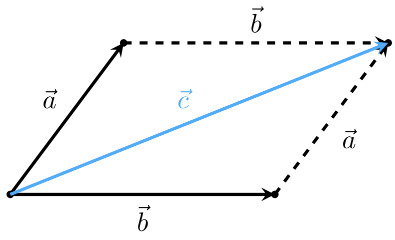
4.1 Правило треугольника

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора, которые мы хотим сложить. Обозначим начало вектора $\vec{a}$ за точку A, его конец за точку B и параллельно перенесем начало вектора $\vec{b}$ в точку B. Пусть получился вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Такое правило сложения векторов называется *правилом треугольника.*



4.2 Правило параллелограмма

Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выходят из одной точки. В таком случае мы можем достроить эту конструкцию до параллелограмма и получить из каждой пары противоположных сторон пары равных векторов.

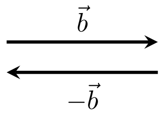


Тогда по правилу треугольника

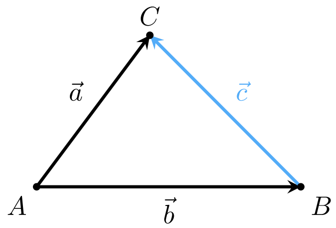
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$$

5 Вычитание векторов

Для начала поймем, что «$-$» перед вектором просто меняет его направление. Таким образом, векторы $\vec{b}$ и $-\vec{b}$ равны по длине, коллинеарны и противоположно направлены.



Пусть есть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенные из одной точки. Пусть при этом вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$, то есть вектор $\vec{a}$ можно получить, сложив векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по правилу треугольника.

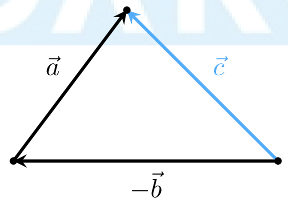


Тогда обозначим $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ и назовем вектор $\vec{c}$ разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Разность векторов можно определить и по-другому. При тех же исходных условиях заменим вектор $\vec{b}$ на вектор $-\vec{b}$. Тогда разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем вектор $\vec{c}$, равный

$$\vec{c} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = -\vec{b} + \vec{a}.$$

Таким образом, можем изобразить вектор $\vec{c}$:

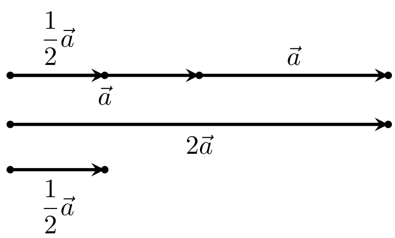


Как мы видим, вектор $\vec{c}$ получается один и тот же независимо от способа определения. Следовательно, на практике можем искать разность двух векторов тем способом, который в условиях конкретной задачи кажется более удобным.

6 Умножение вектора на число

Возьмем вектор $\vec{a}$. Попробуем найти вектор $2\vec{a} = a + a$. Тогда переместить точку на вектор $2\vec{a}$ — это то же самое, что и дважды переместить её на вектор $\vec{a}$.

Также можем разделить вектор $\vec{a}$ на два равных вектора и получить вектор $\frac{1}{2}\vec{a}$.



Правила умножения вектора на число

Пусть α и β — некоторые числа, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — некоторые векторы. Тогда

1. $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{a}$;
2. $\alpha\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\cdot\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$;
3. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{a}=\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{a})$.

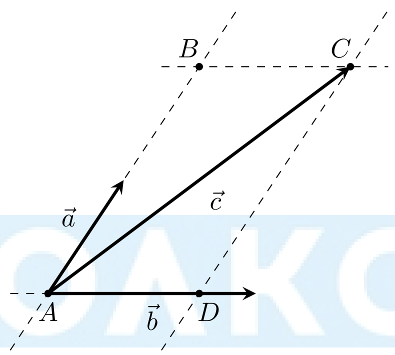
7 Разложение вектора по базису

7.1 Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Пусть даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда любой вектор $\vec{c}$ можно представить в виде

$$\vec{c}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b},\quad \text{где } x, y \text{ — некоторые числа.}$$

Нарисуем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ из общего начала и проведем через начало и конец вектора $\vec{c}$ прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Пусть A, B, C и D — вершины получившегося параллелограмма. Тогда по правилу параллелограмма

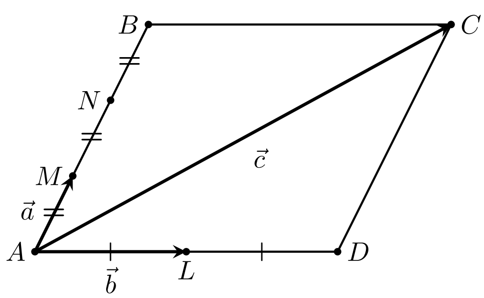
$$\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$

Векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны, поэтому найдется такое число x, что $\overrightarrow{AB}=x\cdot\vec{a}$.
Векторы $\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD}$ коллинеарны, поэтому найдется такое число y, что $\overrightarrow{AD}=y\cdot\vec{b}$.
Таким образом, для некоторых чисел x и y получаем

$$\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}$$

7.2 Решаем задачи

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки M и N лежат на стороне AB и делят её на три равных отрезка (точка M лежит между точками A и N). Точка L лежит на стороне AD и делит её пополам. Пусть $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AL}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}$, где x, y — некоторые числа. Найдите x и y.



Ответ

$x = 3$, $y = 2$

Решение

Мы уже знаем, что по правилу параллелограмма

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Заметим, что

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} = 3\vec{a}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LD} = 2\vec{b}.$$

Тогда получаем

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\vec{a} + 2\vec{b}.$$

Значит, $x = 3$, $y = 2$.

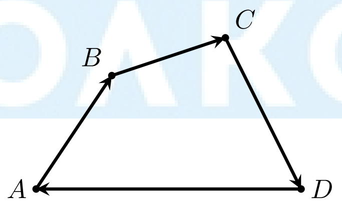
2. Пусть $ABCD$ — четырёхугольник, на сторонах которого отложены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$.

Ответ

0

Решение

Вектор можно воспринимать как перемещение, тогда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ — перемещение из A в B, затем из B в C, затем из C в D — в итоге это перемещение из A в D.



При такой трактовке имеем:

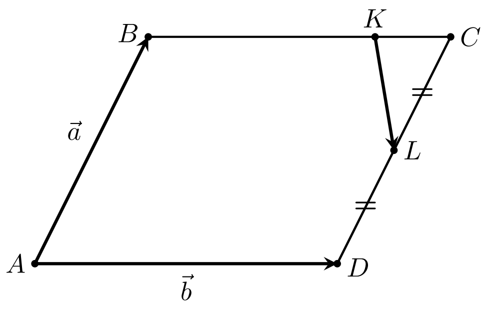
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}.$$

Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA}$ противоположно направлены и имеют одинаковую длину, поэтому

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}.$$

Нулевой вектор $\vec{0}$ имеет длину, равную 0.

3. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки K и L лежат на сторонах BC и CD соответственно, причем $BK : KC = 3 : 1$, а L — середина CD. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{KL} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$, где x и y — некоторые числа. Найдите число, равное $x + y$.



Ответ
−0,25

Решение
По правилу треугольника имеем:

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

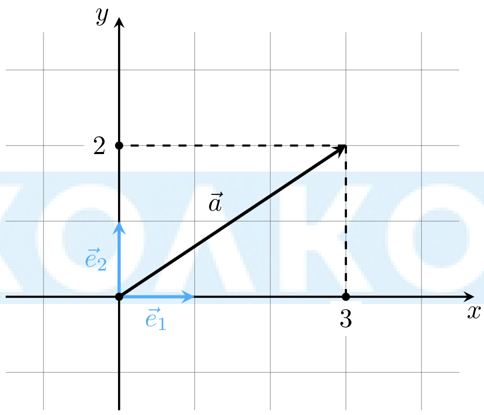
Таким образом, $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$, то есть

$$x + y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -0{,}25.$$

7.3 Разложение по единичным векторам

Рассмотрим декартову систему координат. Обозначим единичные векторы как $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$. Тогда $|\vec{e_1}| = 1 = |\vec{e_2}|$.

Вектор, выходящий из начала координат, назовем *радиус-вектором*. Возьмем радиус-вектор $\vec{a}$, конец которого находится в точке $(3; 2)$.



Мы знаем, что любой вектор можно разложить по двум неколлинеарным векторам. Тогда можем разложить $\vec{a}$ по векторам $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$:

$$\vec{a} = 3 \cdot \vec{e_1} + 2 \cdot \vec{e_2}.$$

Значит, радиус-вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(3; 2)$, то есть координаты его конца.

Таким образом, любой вектор мы можем воспринимать как движение по горизонтали + движение по вертикали, при этом перемещения по горизонтали и вертикали будут соответственно равны координатам вектора по осям абсцисс и ординат.

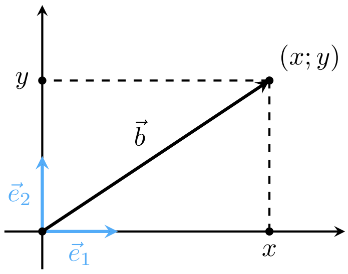
7.4 Длина вектора по его координатам

Так как система координат прямоугольная, то, разложив вектор по базису, мы получаем прямоугольный треугольник. Тогда длина вектора из примера выше по теореме Пифагора равна

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

Обобщая, получаем следующую формулу длины вектора $\vec{b}$ с координатами $(x; y)$:

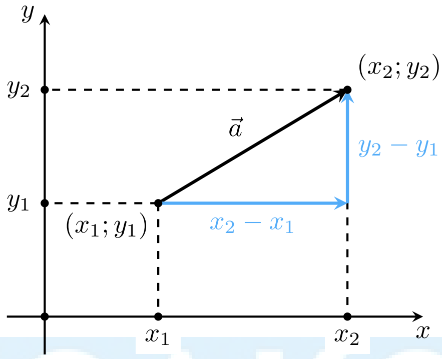
$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



8 Координаты вектора

8.1 Связь координат вектора с координатами его начала и конца

Пусть есть вектор $\vec{a}$ с началом в точке $(x_1; y_1)$ и концом в точке $(x_2; y_2)$.



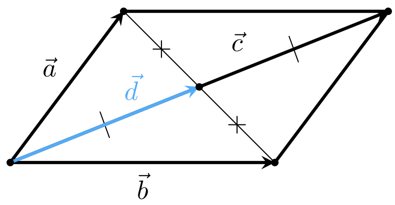
Вектор — последовательное перемещение по горизонтали и по вертикали. Тогда для перемещения из начала вектора, точки $(x_1; y_1)$, в его конец, точку $(x_2; y_2)$, надо сначала сместиться по горизонтали на $x_2 - x_1$, а затем по вертикали на $y_2 - y_1$. Таким образом, координаты вектора $\vec{a}$ равны $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$, то есть для получения координат вектора нужно вычесть из координат его конца координаты его начала.

8.2 Сложение, вычитание, умножение на число

- При сложении векторов $\vec{a}\,(x_1; y_1)$ и $\vec{b}\,(x_2; y_2)$ их координаты складываются, то есть
$$\vec{a}\,(x_1; y_1) + \vec{b}\,(x_2; y_2) = \vec{c}\,(x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$
- При вычитании из вектора $\vec{a}\,(x_1; y_1)$ вектора $\vec{b}\,(x_2; y_2)$ их координаты вычитаются, то есть
$$\vec{a}\,(x_1; y_1) - \vec{b}\,(x_2; y_2) = \vec{c}\,(x_1 - x_2; y_1 - y_2).$$
- При умножении вектора $\vec{a}\,(x_1; y_1)$ на число k его координаты унождаются на k :
$$k \cdot \vec{a}\,(x_1; y_1) = \vec{\alpha}\,(kx_1; ky_1).$$

8.3 Задача про медиану треугольника

Вспомним правило параллелограмма. Возьмем два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общим началом. Пусть $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

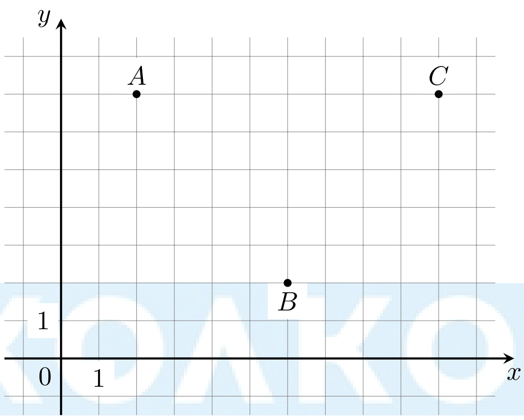


Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому вектор-медиана треугольника, образованного векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, есть половина вектора $\vec{c}$.

Таким образом,

$$\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right).$$

4. На координатной плоскости отмечены точки A, B и C. Найдите длину медианы AM треугольника ABC.



Ответ

6,5

Решение

Для медианы AM треугольника ABC имеем:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$$

Найдем координаты точек A, B, C : $A(2;7)$, $B(6;2)$ и $C(10;7)$.

Отсюда получаем

$$\overrightarrow{AB}=(6-2;2-7)=(4;-5)$$
$$\overrightarrow{AC}=(10-2;7-7)=(8;0)$$

Тогда имеем:

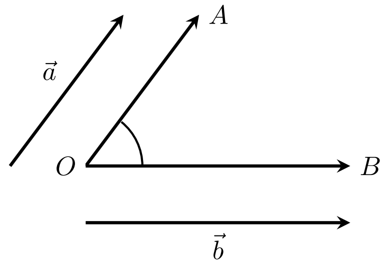
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left((4+8);(-5+0)\right)=\frac{1}{2}(12;-5)=\left(\frac{12}{2};-\frac{5}{2}\right)$$

Следовательно, длина медианы AM равна

$$AM=\sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{13}{2}=6{,}5$$

9 Угол между векторами

Определение Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Чтобы найти угол между ними, выберем произвольную точку O и отложим от неё векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Полученный угол AOB и есть угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

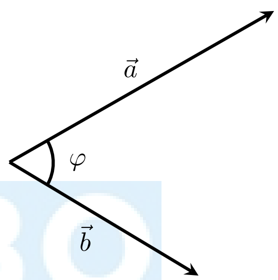


Угол между векторами не зависит от выбора точки, от которой откладываются данные векторы.

Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен $90°$.

10 Скалярное произведение

Определение Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с углом φ между ними называют следующее выражение:



$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi.$$

Здесь $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — длины соответствующих векторов. Иногда скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают как $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

11 Скалярное произведение векторов, заданных координатами

Если есть векторы $\vec{a}\,(x_a;y_a)$ и $\vec{b}\,(x_b;y_b)$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b.$$

Так как в координатах $|\vec{a}|=\sqrt{x_a^2+y_a^2}$ и $|\vec{b}|=\sqrt{x_b^2+y_b^2}$, то с помощью координат можно определить угол между векторами через его косинус:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2}}.$$

12 Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $k\vec{a}\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$;
3. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;
4. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geqslant 0$, причем равенство достигается, только если $\vec{a}=\vec{0}$;
5. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^{\,2}+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$;

6. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\right);$

7. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \ \Leftrightarrow\ \vec{a}\perp\vec{b}$.

Свойство 1: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
Действительно, если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен φ, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\varphi = \vec{b}\cdot\vec{a}.$$

Свойство 2: $k\vec{a}\cdot\vec{b} = k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.
Пусть $\vec{a}\,(x_a;y_a)$, $\vec{b}\,(x_b;y_b)$. Тогда

$$k\vec{a}\cdot\vec{b} = kx_a\cdot x_b + ky_a\cdot y_b = k\cdot x_ax_b + k\cdot y_ay_b = k\cdot(x_ax_b+y_ay_b) = k\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$$

Свойство 3: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
Пусть $\vec{a}\,(x_a;y_a)$, $\vec{b}\,(x_b;y_b)$ и $\vec{c}\,(x_c;y_c)$. Тогда

$$\vec{b}+\vec{c} = \{x_b+x_c; y_b+y_c\}.$$

Значит,

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = x_a\cdot(x_b+x_c)+y_a\cdot(y_b+y_c) = x_a\cdot x_b + x_a\cdot x_c + y_a\cdot y_b + y_a\cdot y_c =$$

$$= (x_a\cdot x_b + y_a\cdot y_b) + (x_a\cdot x_c + y_a\cdot y_c) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Свойство 4: $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geqslant 0$, причем равенство достигается, только если $\vec{a}=\vec{0}$.
Заметим, что вектор $\vec{a}$ сонаправлен самому себе, поэтому $\angle(\vec{a};\vec{a})=0$. Тогда

$$\cos\angle(\vec{a};\vec{a}) = \cos 0 = 1.$$

Значит,

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{a}) = |\vec{a}|^2.$$

При этом если $\vec{a}\neq 0$, то $|\vec{a}|>0$, то есть $\vec{a}\cdot\vec{a}>0$.

Свойство 5: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2} + 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2}$.
По свойствам 3 и 1 имеем:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a} + \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} = \vec{a}^{\,2}+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}.$$

Свойство 6: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\right)$.
По свойствам 5 и 2 имеем:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2}+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2},$$

$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^{\,2}-2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{4}\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 - \left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(\vec{a}^{\,2}+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^{\,2}-\vec{a}^{\,2}+2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^{\,2}\right) = \frac{1}{4}\left(4\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Свойство 7: Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно, что

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$$

Если векторы перпендикулярны, то угол между ними равен 90° и косинус угла между этими векторами равен 0. Поэтому скалярное произведение перпендикулярных векторов равно 0:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Rightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^\circ=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot 0=0.$$

Верно и обратное утверждение: если скалярное произведение ненулевых векторов равно 0, то эти векторы перпендикулярны:

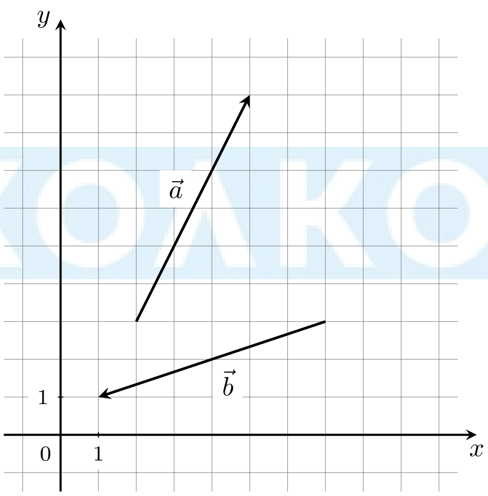
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\quad |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi=90^\circ \quad\Rightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$$

Таким образом,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}.$$

13 Задачи на скалярное произведение векторов

5. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение этих векторов.



Ответ

-30

Решение

Если $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ — точки на координатной плоскости, то вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(x_2-x_1;y_2-y_1)$. Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}=(5-2;9-3)=(3;6)$$
$$\vec{b}=(1-7;1-3)=(-6;-2)$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}(x_1;y_1)$ и $\vec{b}(x_2;y_2)$ равно

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$$

Следовательно, скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot(-6)+6\cdot(-2)=-30$$

6. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 3 и 5, а угол между ними равен 60°. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ

7,5

Решение

Мы знаем, что если ϕ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то скалярное произведение равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\phi$$

Тогда получаем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\phi = 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5$$

7. Даны векторы $\vec{a}\left(\frac{5}{3}; 5\right)$ и $\vec{b}(4; 2)$. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.

Ответ

45

Решение

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$.
Здесь $|\vec{a}|$ — длина вектора $\vec{a}$, α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Найдем длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\frac{25}{9} + 25} = \frac{5}{3}\sqrt{10}, \quad |\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

С другой стороны, скалярное произведение двух векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ равно

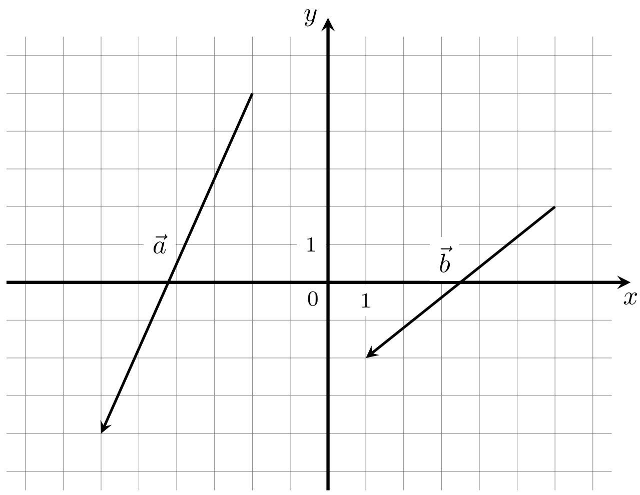
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{5}{3} \cdot 4 + 5 \cdot 2 = \frac{50}{3}$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{50}{3} = \frac{5}{3}\sqrt{10} \cdot \sqrt{20} \cdot \cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Так как $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$, то $\alpha = 45^\circ$.

8. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $2\vec{b}$.



Ответ
112

Решение
Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Так как каждая координата вектора равна разности соответствующих координат конца и начала вектора, то

$$\vec{a} = \{-6-(-2); -4-5\} = \{-4; -9\}$$

$$\vec{b} = \{1-6; -2-2\} = \{-5; -4\}$$

Тогда $2\vec{b} = \{-10; -8\}$. Следовательно, так как скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат двух векторов, то имеем

$$\vec{a} \cdot 2\vec{b} = -4 \cdot (-10) + (-9) \cdot (-8) = 112$$

9. Даны векторы $\vec{a}(14; -2)$ и $\vec{b}(-7; -1)$. Найдите $\cos\alpha$, где α — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Ответ
$-0{,}96$

Решение
Заметим, что, с одной стороны, скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

С другой стороны, скалярное произведение равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Следовательно, в нашем случае имеем:

$$14 \cdot (-7) + (-2) \cdot (-1) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{14^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{-96}{10\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{-96}{100} = -0{,}96$$