Métodos Numéricos Tarea 8 Diego Aarón Moreno Galván

Ejercicio 1. Funciones $f_1(x) = x^3 - 2x + 1$
$f_2(x) = x^2$

(Esquema numérico y 2 iteraciones para aproximar el punto de intersección de f_1 y f_2 con Newton-Raphson).

Como queremos el punto donde se intersectan f_1 y f_2, éste está dado cuando $f_1 = f_2$. Así que nos interesa aproximar el pto. cuando $x^3 - 2x + 1 = x^2$, es decir, una raíz de $f_3(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.

Con el método N-R. Tenemos que:

$$x_1 = x_0 - \frac{f_3(x_0)}{f_3'(x_0)}$$

con $f_3'(x) = 3x^2 - 2x - 2$.
empezemos de $x_0 = 0$, para encontrar una raíz.
(Sabemos que hay 3 raíces pues $grad(f_3(x)) = 3$.

$$\Rightarrow x_1 = 0 - \frac{f_3(0)}{f_3'(0)} = -\frac{0-0-0+1}{0-0-2} = -\frac{1}{-2} = \underline{1/2}. \quad \text{Después:}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f_3(x_1)}{f_3'(x_1)} = \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3 - (1/4) - 2(1/2) + 1}{3(1/4) - 2(1/2) - 2} = \frac{1}{2} - \frac{4}{(8)(9)} = \underline{\frac{4}{9}}$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f_3(x_2)}{f_3'(x_2)} = \frac{4}{9} - \frac{(\frac{4}{9})^3 - (\frac{4}{9})^2 - \frac{8}{9} + 1}{3(\frac{4}{9})^2 - 2(\frac{4}{9}) - 2} = \frac{745}{1674} \approx \underline{0.445}$$

Así que cerca del 0.445 $f_1(x)$ y $f_2(x)$ se intersectan.
(Por ejemplo $f_1(0.445) = 0.19812$ y $f_2(0.445) = 0.198025$, casi se intersectan).

Ejercicio 2. Considerar $g(x) = x^2 + 3/16$

1. ¿Cuántos puntos fijos tiene?

Para obtener los puntos fijos sabemos que debe pasar $x^* = g(x^*)$, así, encontremos que puntos x cumplan $x = x^2 + 3/16 = g(x)$. Lo cual, equivale a encontrar las raíces de $x^2 - x + 3/16 = 0$.
Lo podemos factorizar como $x^2 - x + 3/16 = (x - 1/4)(x - 3/4)$
$x^2 - x + 3/16$ lo podemos factorizar como ... $(x - 1/4)(x - 3/4) = 0$ si y solo si $x = 1/4$ o $x = 3/4$.
Así, $(x - 1/4)(x - 3/4) = 0$ si y solo si

$\Rightarrow$ tiene <u>2 puntos fijos</u>, los cuales son $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$.

2. Supongamos que ~~el~~ punto x_0 está cerca de los puntos fijos

Primero, veamos si para el punto fijo $x^* = 1/4$ converge, si x_0 está cerca de $1/4$.

Supongamos que $x_0 < 1/4$. Entonces $x_1 = g(x_0)$, Sabemos que $g(x) = x^2 + 3/16$ es una parábola.

Observamos que si $g(x) - x = 0$ entonces es un punto fijo, y ya vimos que esto se cumple con $x = 1/4$ y $3/4$.

Si $g(x) - x > 0$ quiere decir que $g(x) > x$, es decir $g(x)$ crece.

Si $g(x) - x < 0 \Rightarrow g(x) < x$ así que $g(x)$ decrece.

Vemos que $g(x) - x > 0 \iff x^2 + 3/16 - x > 0 \iff (x - 1/4)(x - 3/4) > 0$
$\iff (x - 1/4) > 0$ y $(x - 3/4) > 0$ o $(x - 1/4) < 0$ y $(x - 3/4) < 0$.

Así $g(x)$ crece si $x > 1/4$ y $x > 3/4$ es decir para $x > 3/4$.
y también crece si $x < 1/4$ y $x < 3/4$ " " para $x < 1/4$.

Como es una parábola, observamos que para $0 < x < 1/4$, $g(x) > x$ y en $x = 1/4$, $g(x) = x$. así de $0 < x < 1/4$ $g(x) \to 1/4$.

Aseguramos la convergencia a $1/4$ por la izquierda.

y para $x > 3/4$ $g(x) > x$, así que <u>no</u> va a converger por la derecha a $3/4$. Así que por este lado, no aseguramos la convergencia a $3/4$.

Por otro lado $g(x)$ decrece si $x < 1/4$ y $x > 3/4$, lo cual no es posible, y también decrece si $x > 1/4$ y $x < 3/4$, es decir, si $1/4 < x < 3/4$ $g(x) < x$, entonces como $g(1/4) = 1/4$, va a converger a $1/4$.

$\therefore$ Para el punto <u>$x = 1/4$</u>, aseguramos convergencia tanto por la derecha y la izquierda.

Para puntos cerca de $3/4$, no se asegura nada pues si $x < 3/4$ $g(x)$ converge a $1/4$ y si $x > 3/4$, no converge.