Ejercicio 1. Suponga que tenemos un conjunto con m puntos $\{(xi, yi)\}^{m}_{i=1}$. Escriba el desarrollo para encontrar la mejor parábola, en el sentido de mínimos cuadrados, que ajusta al conjunto de datos. Esto es, escriba el problema que se quiere resolver y el desarrollo para encontrar los coeficientes a,b,c del modelo cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que la suma de los cuadrados de las diferencias entre f(xi) y yi es mínima.

El problema que se quiere resolver es el tratar de aproximar la función sin(x) con $x \in [0,\pi]$, con una función cuadrática, en otras palabras, queremos aproximar o encontrar la parábola más parecida a la función sin(x) con $x \in [0,\pi]$.
Para resolver esto, acudiremos al método de los mínimos cuadrados. Observamos la función del error que estamos cometiendo al aproximar, esto es: $E(x) = 1/2 \sum(f(xi) – \sin(xi))^2$. Gracias a que queremos aproximar a sin(x) por medio de una parábola, podemos escribir a $f(x) = ax^2+bx+c$ como funciones del tipo $\sum ai\ \varphi i(x)$ con ai igual a los coeficientes a, b y c, y $\varphi i(x)$ las funciones $\varphi 1(x) = x^2$, $\varphi 2(x) = x$ y $\varphi 3(x)= 1$.
De esta manera podemos escribir el error como $E(x) = 1/2 \sum(\sum ai\ \varphi i(x) – \sin(xi))^2$.
Lo que nos gustaría es que la función f(x) y sin(x) sean lo más parecidas que se pueda, en otras palabras, que el error E(x) sea lo mínimo posible. Así, observamos que la función E(x) puede crecer tanto como guste, y se minímiza en un punto. Para encontrar este punto en el que el error se minimiza, nos fijamos en el gradiente de E(x) y observamos cuando éste sea igual a 0, (la técnica de cálculo 1 para encontrar mínimos y máximos). Este punto nos asegura que es un mínimo, pues como antes mencioné, la función E(x) puede crecer tanto como guste, y no decrece tanto como se guste pues lo que se requiere es aproximarse a una función dada. El error E(x) describe una parábola dónde solo hay un punto mínimo.
Para encontrar el gradiente de E(x) y esto igualarlo a 0, vemos que el error $\varepsilon i = \sum aj\ \varphi j(xi) – \sin(xi)$ lo podemos escribir de forma matricial como: $\Phi a – y$, donde y es el vector de sin(xi), a es el vector $(a,b,c)^T$ y Φ es la matriz de las funciones $\varphi i(x)$, de tal manera que $\varepsilon = \sum ai\ \varphi i(x) – \sin(x) = \Phi a – y$, es el vector de errores para cada xi.
De esta manera, E(x) se puede escribir como $||\varepsilon||^2 = \varepsilon^T\varepsilon = (\Phi a – y)^T(\Phi a – y)$.
Para encontrar el mínimo, lo que deseamos es que $\nabla E(x) = 0$, pero como $E(x) = (\Phi a – y)^T(\Phi a – y)$, entonces $\nabla E(x) = 2\Phi^T\Phi a – 2\Phi^T y$, entonces tenemos que si $\nabla E(x) = 0$, implica $2\Phi^T\Phi a – 2\Phi^T y = 0$, lo que implica que $\Phi^T\Phi a = \Phi^T y$. Así que tenemos entoces que solamente resolver este sistema de ecuaciones lineales para encontrar el vector $a = (a,b,c)^T$ de los coeficientes de la parábola que más se parece a sin(x).
En nuestro caso se obtiene que debemos resolver el sistema $\Phi^T\Phi a = \Phi^T y$ dado por:

$$\begin{vmatrix} x1^2 & x2^2 & x3^2 & \dots & xm^2 \\ x1 & x2 & x3 & \dots & xm \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x1^2 & x1 & 1 \\ & \dots & \\ xm^2 & xm & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x1^2 & x2^2 & x3^2 & \dots & xm^2 \\ x1 & x2 & x3 & \dots & xm \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \sin(x1) \\ \dots \\ \sin(xm) \end{vmatrix}$$

Resolviendo este sistema con los métodos antes vistos, obtenemos el vector solución (a,b,c), en mi caso, resolví por método de factorización LU si $A=\Phi^T\Phi$ y $b=\Phi^T y$, entonces resolví Ax=b y obtuve la solución a=x. Ahora sabemos que la parábola que más se parece a sin(x) es:
$f(x) = (a,b,c)^T(x^2,x,1) = (-0.4146, 1.3027, -0.445)^T(x^2,x,1)$.
Después ya solamente graficámos para ver que tan parecido son las funciones y listo.