




MOVIMIENTO RELATIVO

Sistemas dinámicos
Diego Aarón Moreno Galván

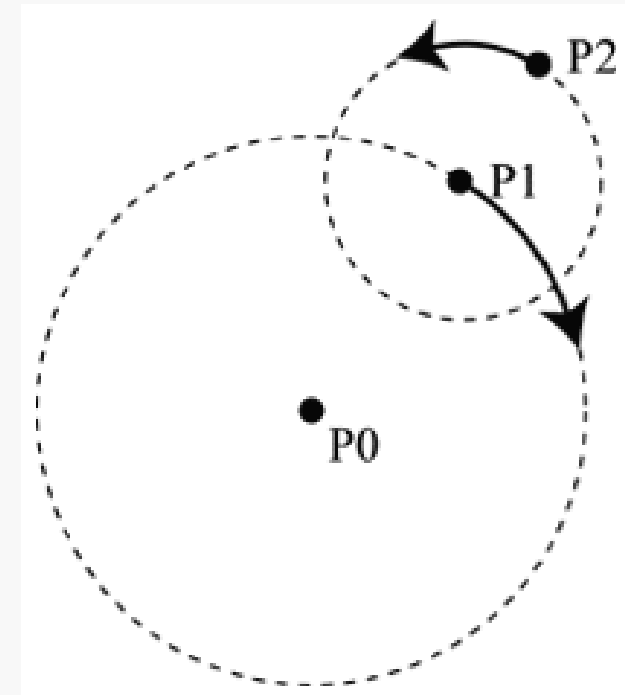


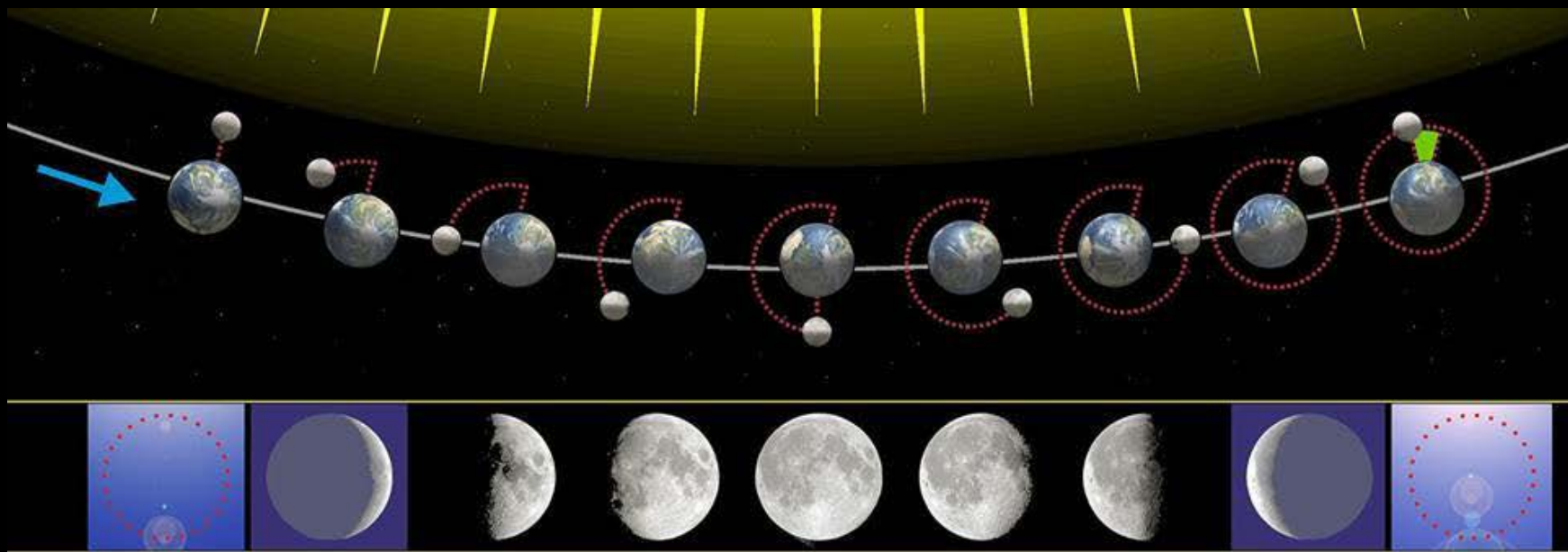
Introducción

- En la vida real existen varios tipos de movimiento: rectilíneo, circular, espiral, etc.
- Estamos trabajando en el mundo numérico de las computadoras.
- Nos vamos a interesar tanto en los movimientos reales, como en los que no existen, pero que los podemos simular sencillamente.
- En nuestro caso, analizaremos el movimiento de la Luna alrededor del Sol (depende del movimiento de la Tierra).
- Las trayectorias son difíciles de predecir si el movimiento que nos interesa está basado en un sistema de coordenadas dinámico.
- Para visualizar el movimiento, primero debemos simular cada movimiento por separado.

Introducción

- Los factores que debemos tomar en cuenta en las trayectorias de los movimientos relativos son:
 - a) El movimiento del punto (Luna).
 - b) El movimiento del sistema de coordenadas (Tierra).
 - c) La velocidad relativa entre el sistema de coordenadas y el punto.
 - d) La distancia entre el punto y el sistema de coordenadas.
- Sean P_0 , P_1 y P_2 los tres niveles de los sistemas de coordenadas.
- P_0 es nuestro origen absoluto del sistema de coordenadas (Sol).
- P_1 es el punto en movimiento respecto al origen P_0 , también es el origen para el punto P_2 .
- P_2 es el punto en movimiento respecto al origen P_1 .
- El número de niveles de movimientos relativos puede ser arbitrariamente grande, más adelante veremos ejemplos donde extendemos dichos niveles.





Movimiento relativo de la Luna

Movimiento relativo de la Luna

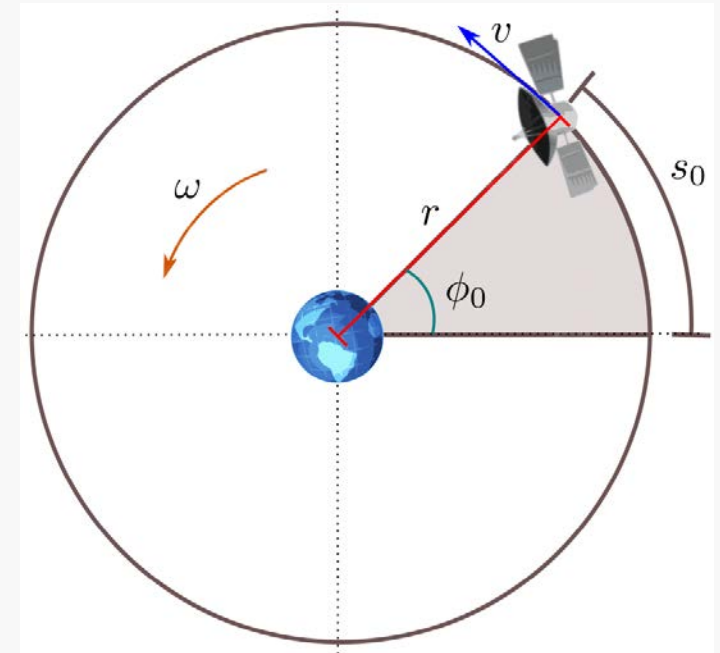
- Nos interesa puesto que, la masa de la Tierra es mucho más grande que la de la Luna. Así, la trayectoria de la Luna es casi solamente determinada por la trayectoria de la Tierra. Sin embargo, la trayectoria lunar tiene muy poca influencia sobre la terrestre.

Asumiremos lo siguiente:

- El Sol es el origen absoluto del sistema de coordenadas, el cual es estático.
- Las órbitas tanto de la Tierra como de la Luna son determinadas solamente por la posición del Sol y de la Tierra respectivamente.
- Caen en un mismo plano.
- La Tierra orbita el Sol al contrario de las manecillas del reloj y la Luna orbita a la Tierra en la misma dirección.

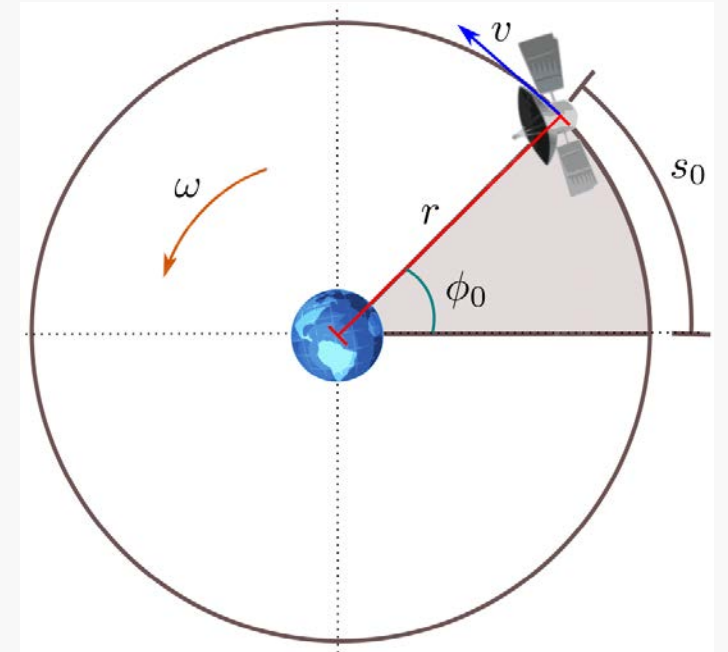
Un poco de física

- La Luna se encuentra a distancia r de la Tierra.
- Se mueve con velocidad tangencial $v(t)$, donde t es el tiempo.
- La Luna se mueve con velocidad angular de:
$$\omega(t) = \frac{v(t)}{r}.$$
- Velocidad angular: cantidad de radianes (s_0) por segundo.
- Al tiempo t , la Luna estará en la posición: $(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$, respecto a la Tierra.



Un poco de física

- La Tierra también está en movimiento, pero respecto al Sol.
- La Tierra se mueve a velocidad angular ω_1 respecto al Sol.
- La Luna se mueve a velocidad angular ω_2 respecto a la Tierra.
- La posición de la Luna está determinada por:
 $(\cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t)) + (\cos(\omega_2 t), \sin(\omega_2 t)) =$
 $(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t), \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)).$

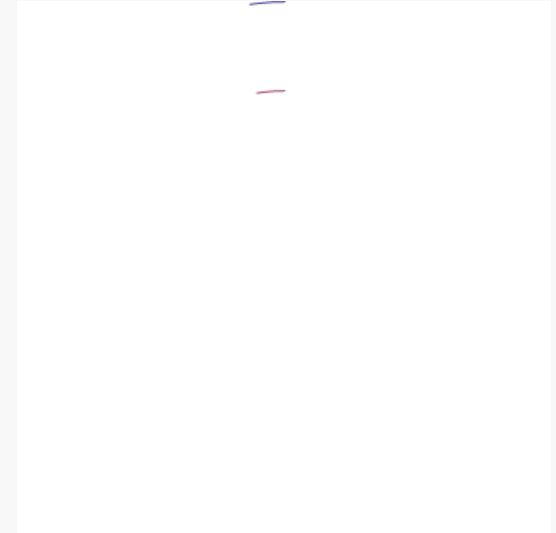
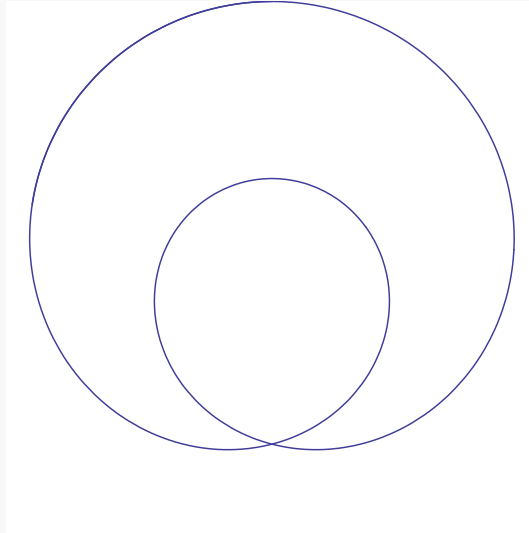


SIMULEMOS TRAYECTORIAS
POSIBLES DE LA LUNA...

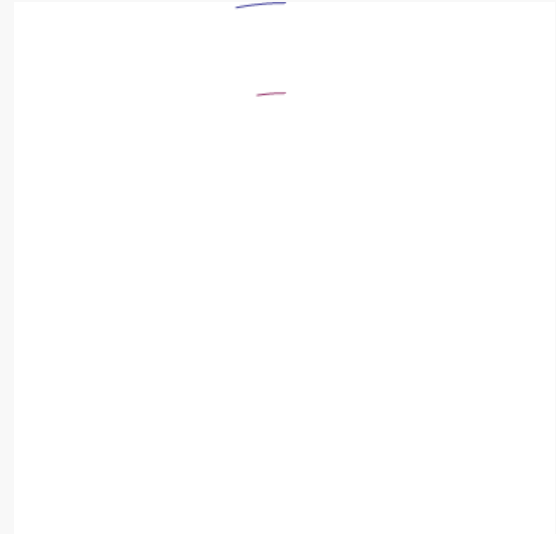
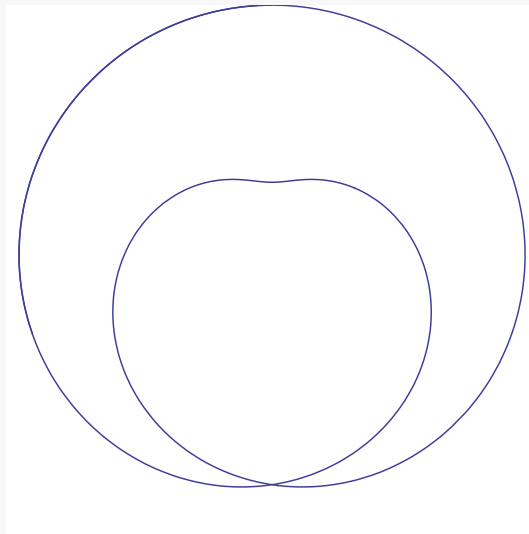


Simulación

$$\omega_L = 0.5\omega_T$$

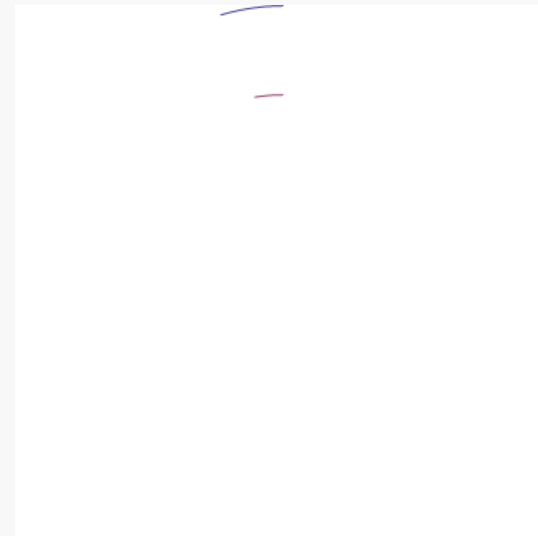
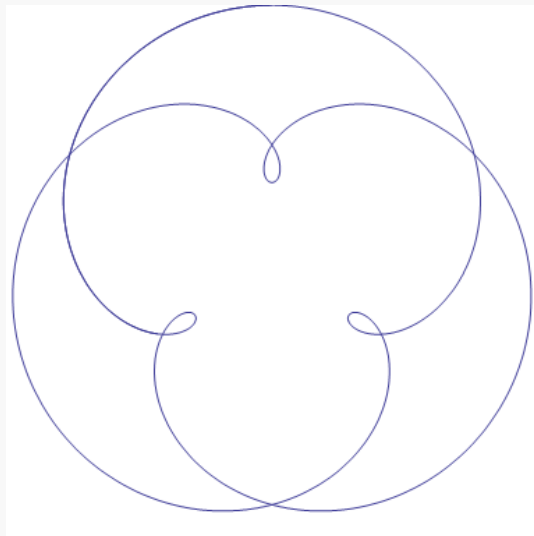


$$\omega_L = 1.5\omega_T$$

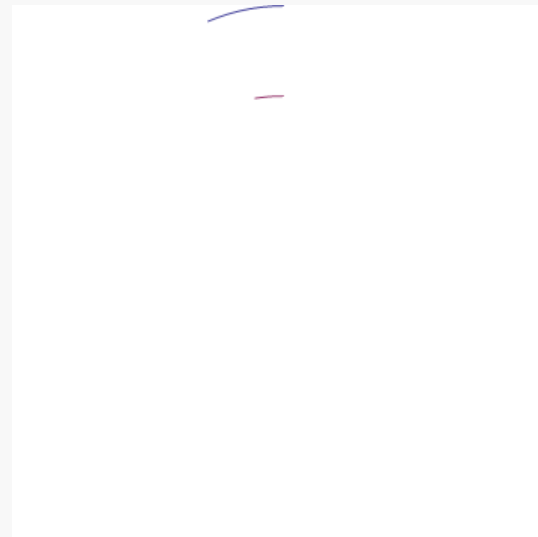
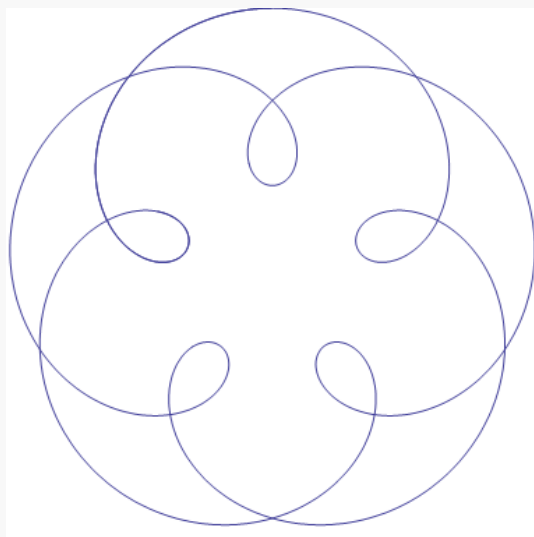


Simulación

$$\omega_L = 2.5\omega_T$$

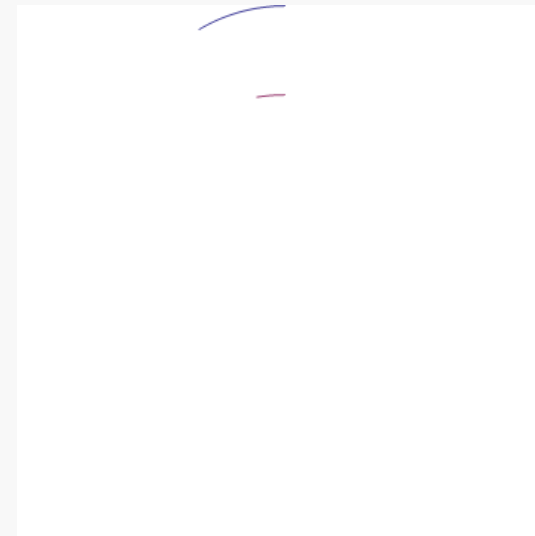
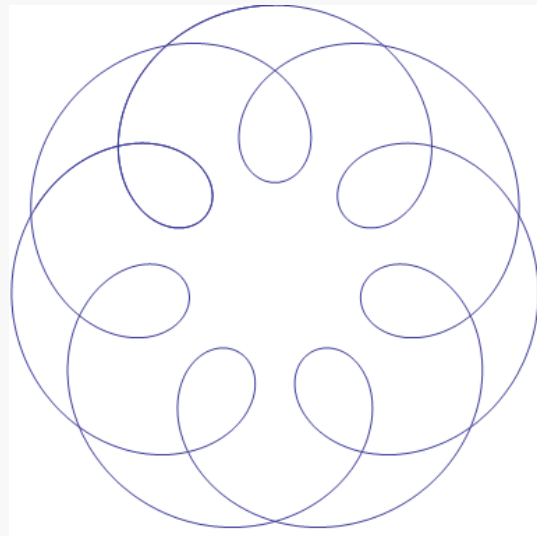


$$\omega_L = 3.5\omega_T$$

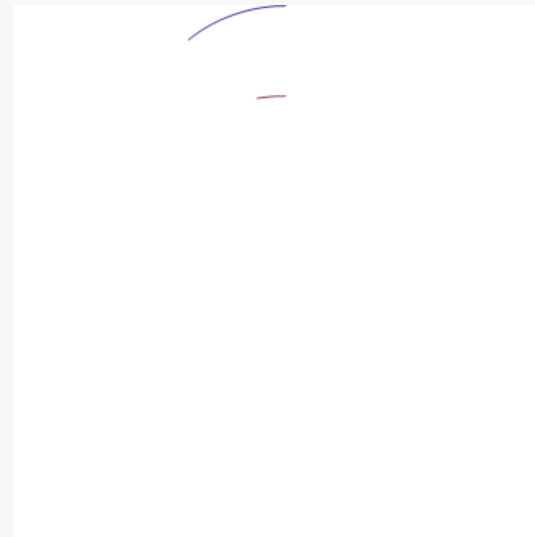
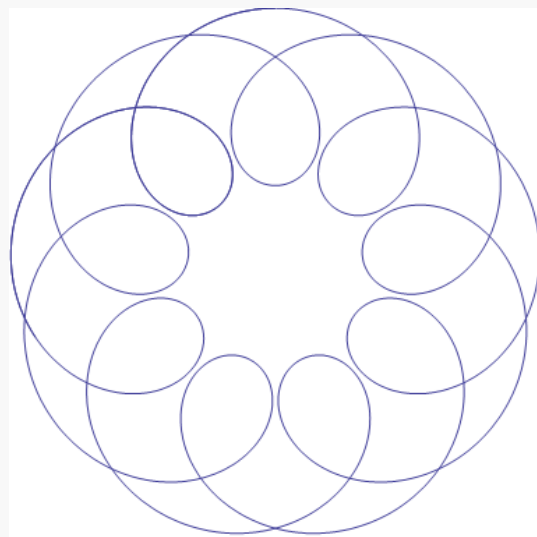


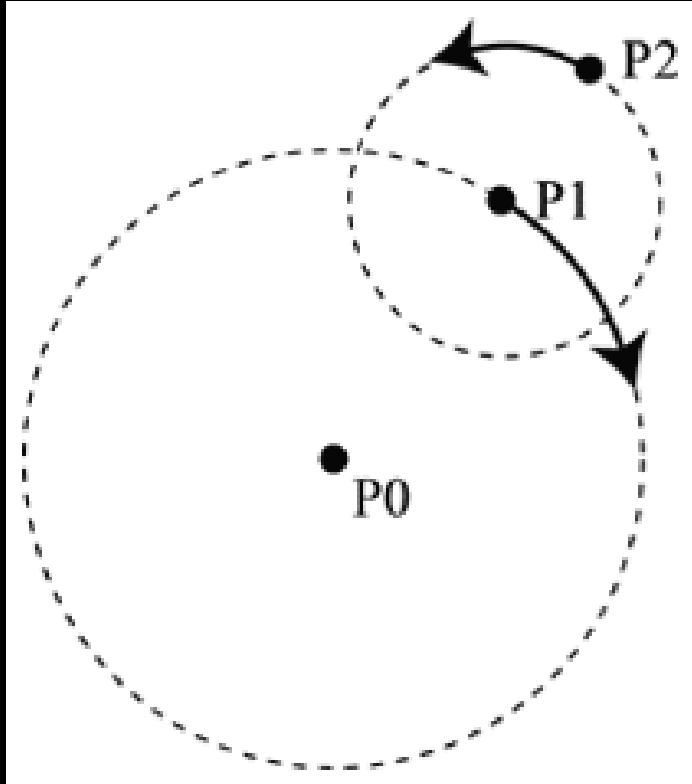
Simulación

$$\omega_L = 4.5\omega_T$$



$$\omega_L = 5.5\omega_T$$



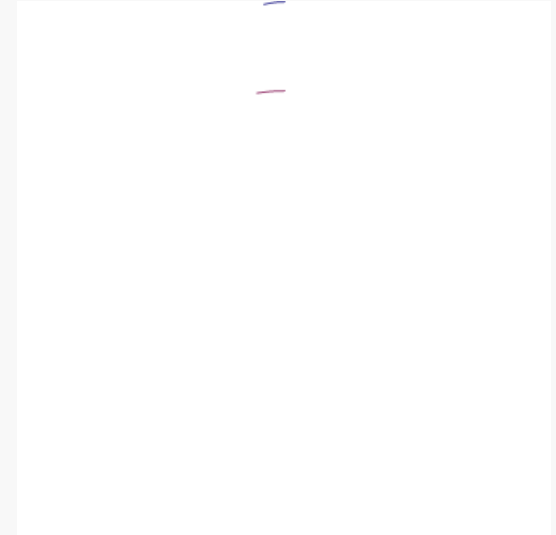
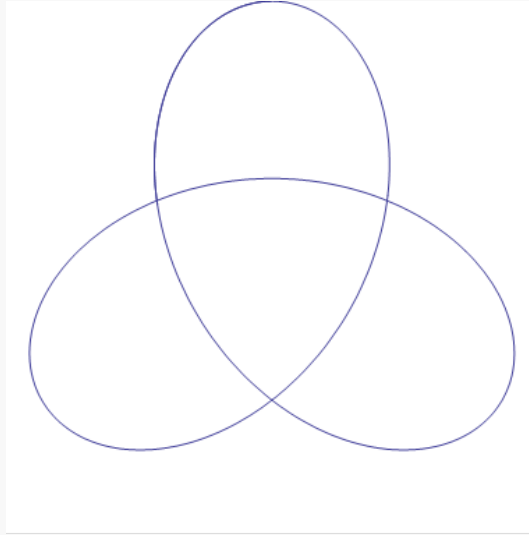


PREGUNTA

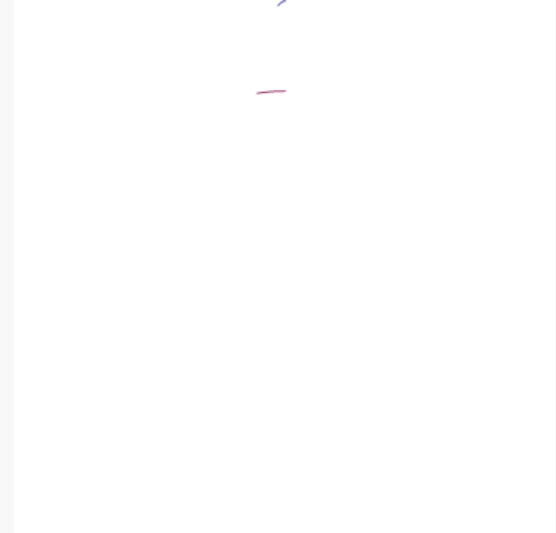
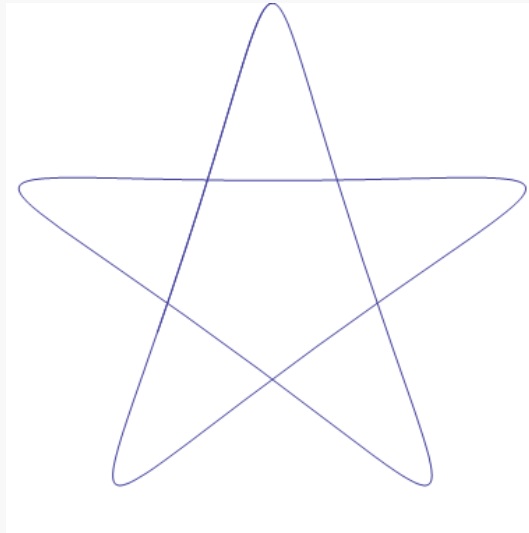
¿Qué pasaría si la Luna, en vez de rotar en la dirección de la Tierra, rotara en el sentido contrario?

Simulación

$$\omega_L = -0.5\omega_T$$

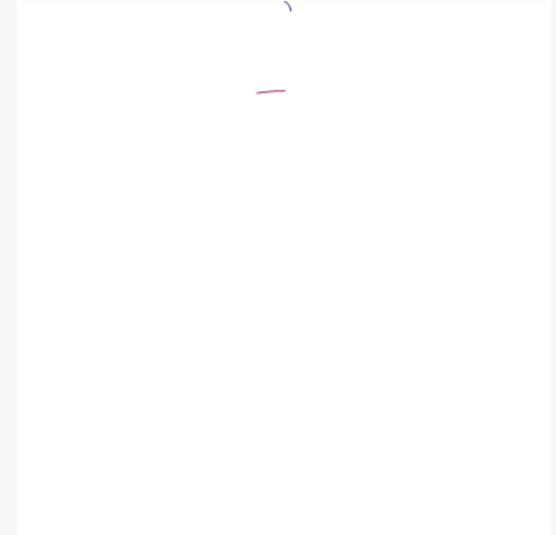
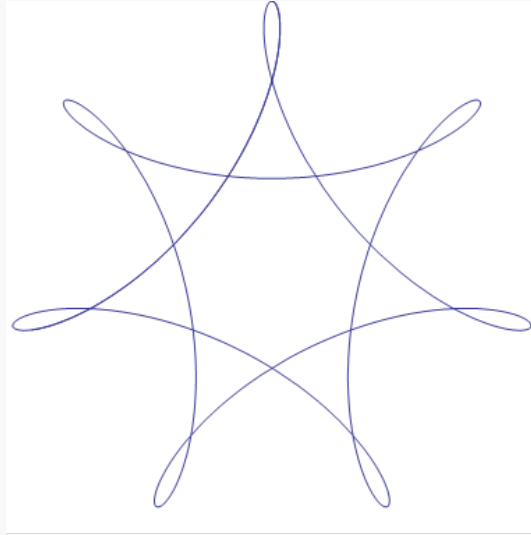


$$\omega_L = -1.5\omega_T$$

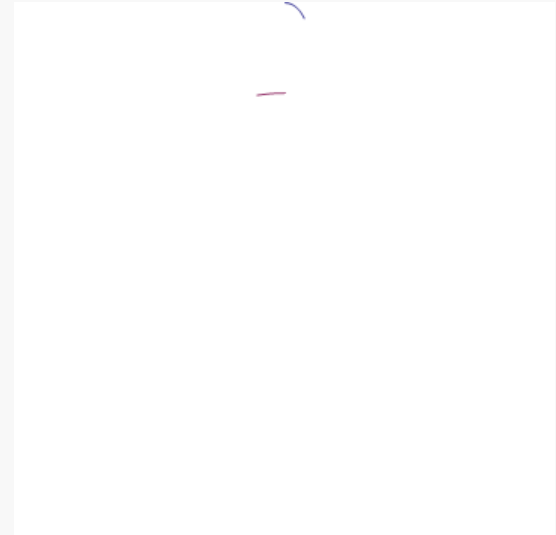
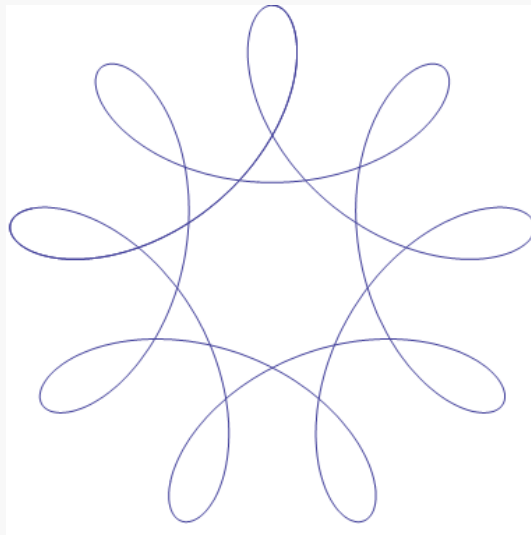


Simulación

$$\omega_L = -2.5\omega_T$$

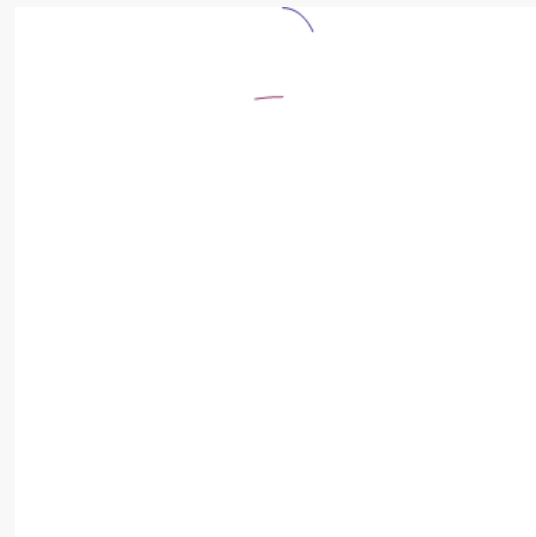
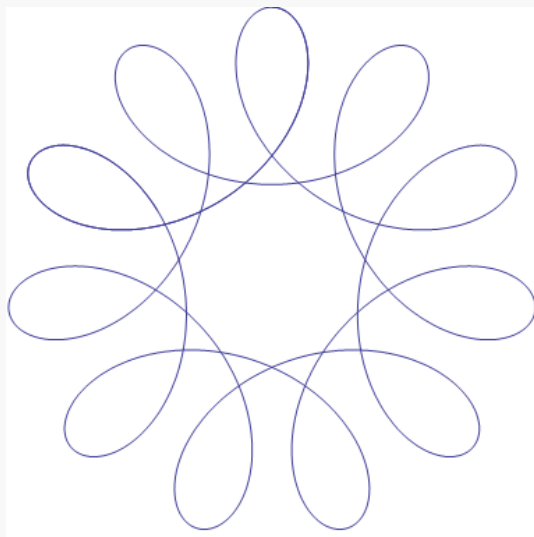


$$\omega_L = -3.5\omega_T$$

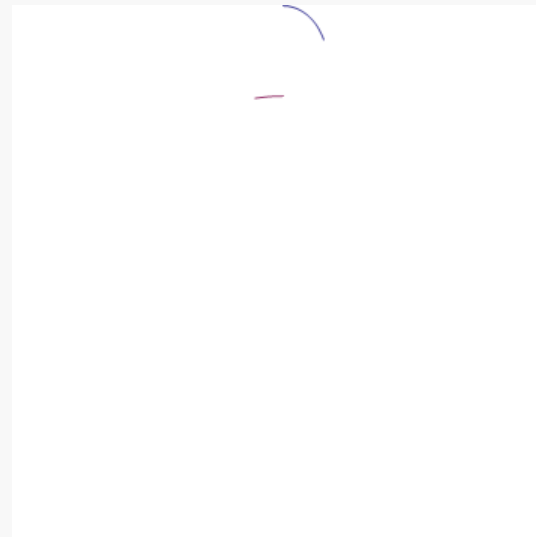
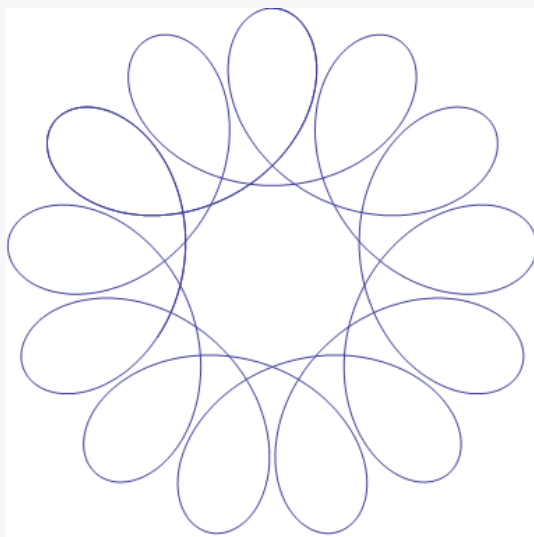


Simulación

$$\omega_L = -4.5\omega_T$$



$$\omega_L = -5.5\omega_T$$



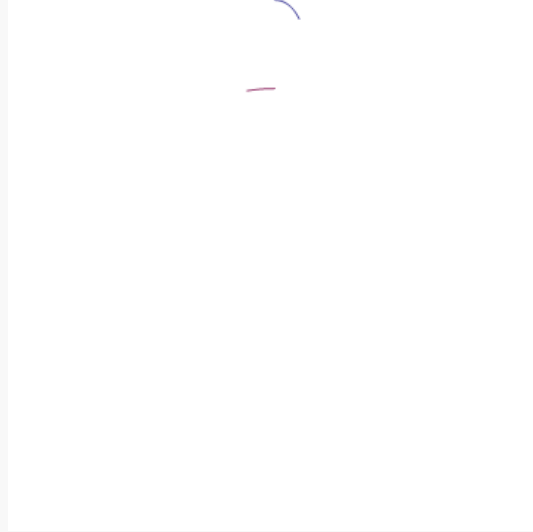
PREGUNTA

¿Existe una trayectoria de la Luna que sea densa?

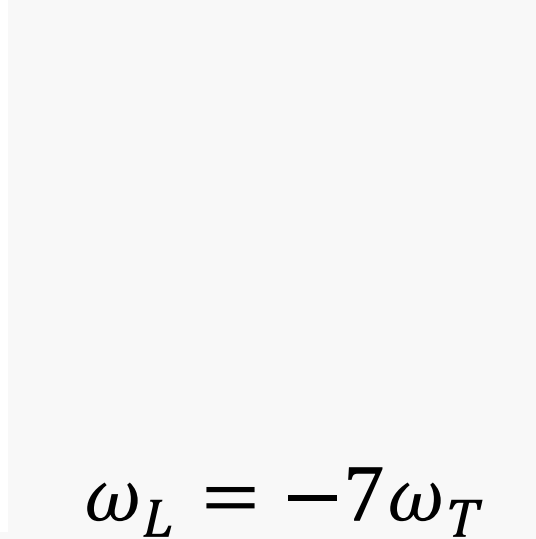
¿Existe una trayectoria de la Luna que sea densa?

- Sabemos que la posición de la Luna respecto al Sol está determinada por: $(\cos(\omega_T t) + \cos(\omega_L t), \sin(\omega_T t) + \sin(\omega_L t))$.
- La función $\cos x$, es periódica. Todo punto en la función es un punto fijo y es de periodo 2π . Lo mismo para la función $\sin x$.
- Si la velocidad de la Luna es: $\omega_L = x\omega_T$, para $x \in R$, la posición de la Luna es: $(\cos(\omega_T t), \sin(\omega_T t)) + (\cos(x\omega_T t), \sin(x\omega_T t))$.
- En el tiempo t_0 , la Tierra está en la posición $p_0 = (\cos(\omega_T t_0), \sin(\omega_T t_0))$, va a volver a estar en dicha posición en el tiempo $t_k = t_0 + k \frac{2\pi}{\omega_T}$, para $k \in N$.
- De manera similar para la función $(\cos(x\omega_T t), \sin(x\omega_T t))$, $t_{k'} = t_0 + \frac{k'}{x} \frac{2\pi}{\omega_T}$.
- Si la Luna se encuentra en una posición p_0 en el tiempo t_0 , va a volver a estar en dicha posición cuando $k'x \in N$.

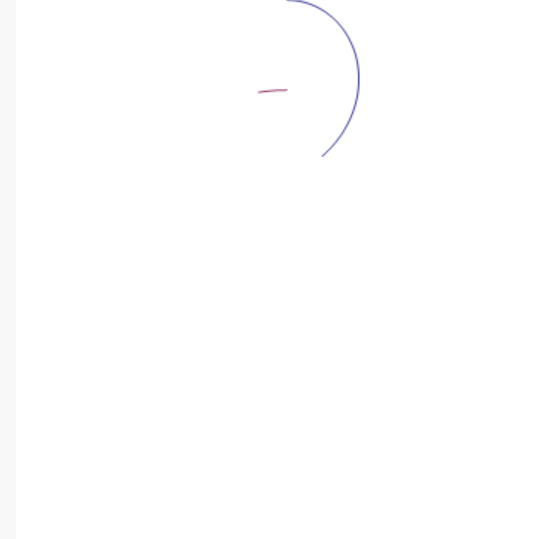
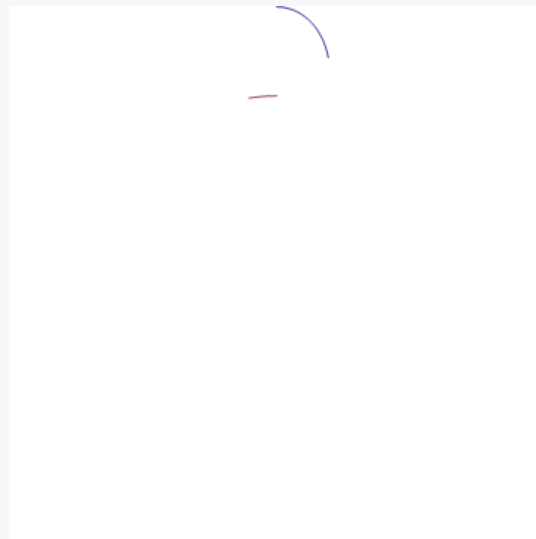
Simulación con k entero



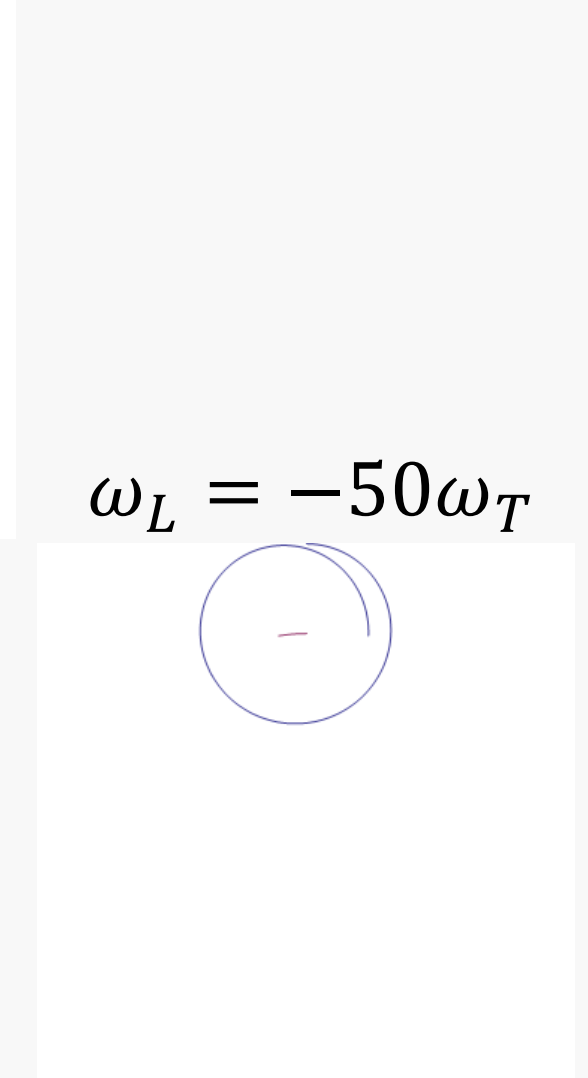
$$\omega_L = -4\omega_T$$



$$\omega_L = -7\omega_T$$



$$\omega_L = -15\omega_T$$



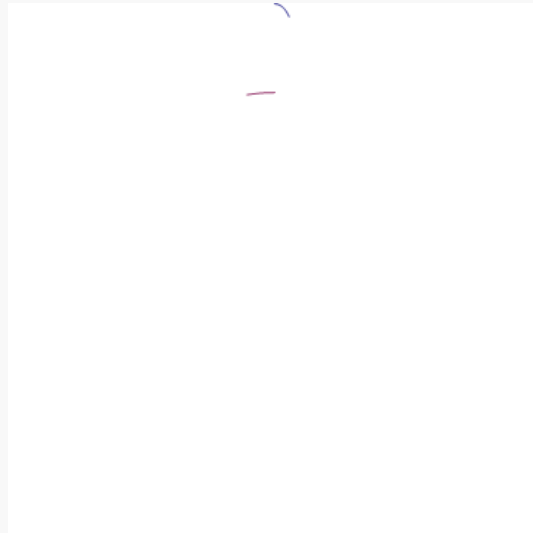
$$\omega_L = -50\omega_T$$

Simulación con k racional

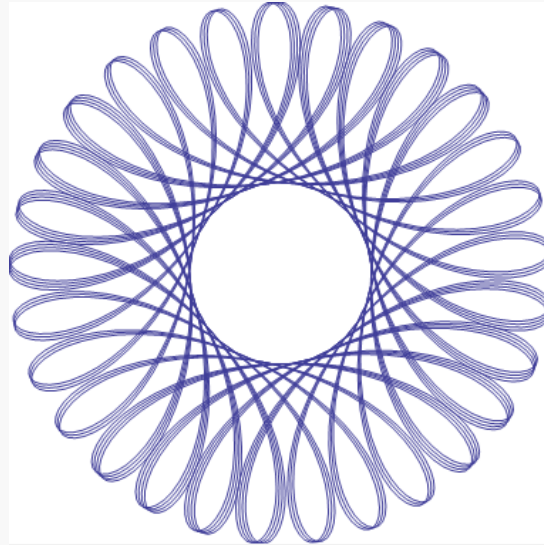


$\omega_L = -4.5\omega_T$	$\omega_L = -13/3\omega_T$	$\omega_L = -1/5\omega_T$	$\omega_L = -4.125\omega_T$
$4.5k \in \mathbb{Z}$	$13/3k \in \mathbb{Z}$	$1/5k \in \mathbb{Z}$	$33/8k \in \mathbb{Z}$
$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$	$k = 8$

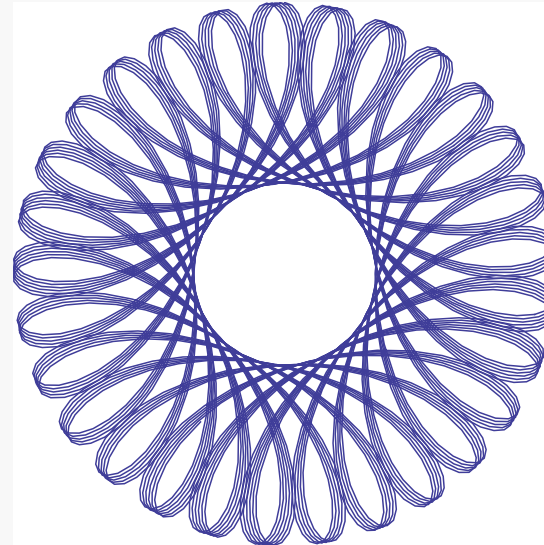
Simulación con Pi



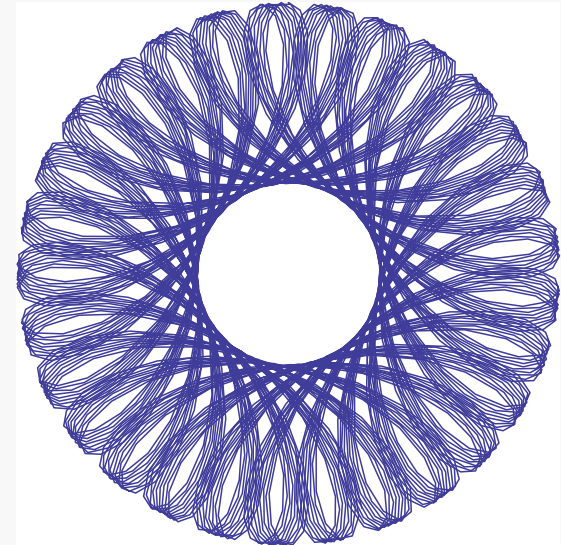
$$\omega_L = -\pi\omega_T$$



100
repeticiones

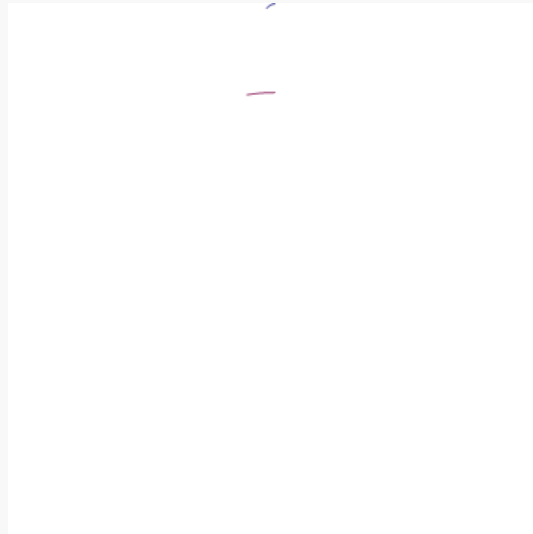


200
repeticiones

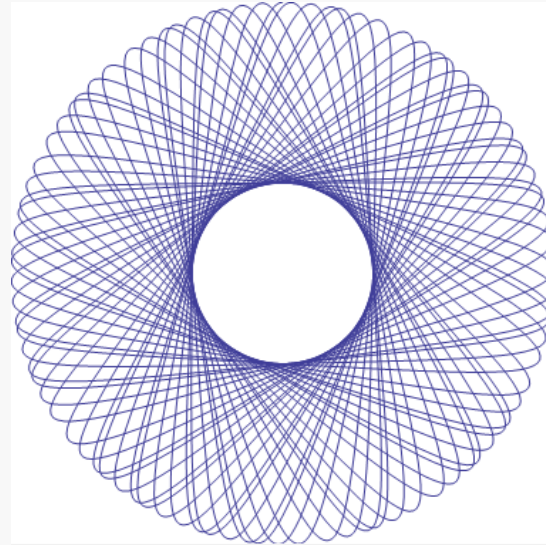


500
repeticiones

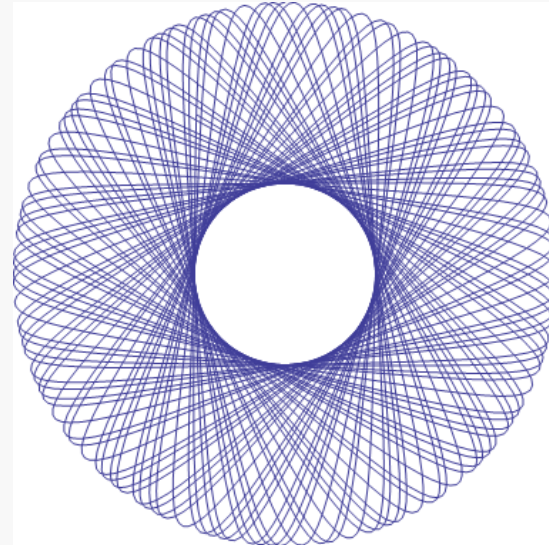
Simulación con $\sqrt{2}$



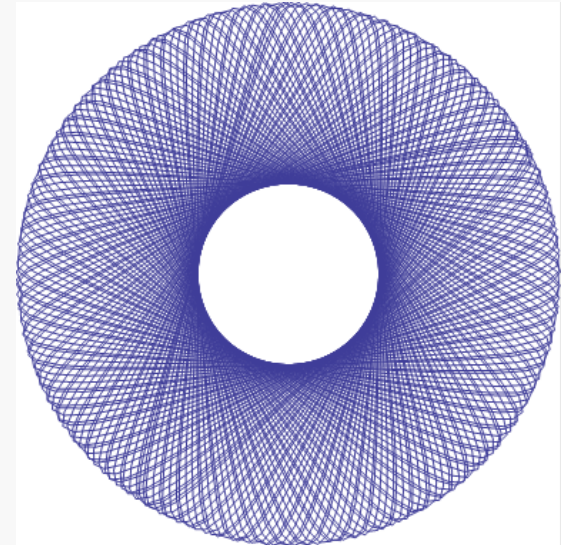
$$\omega_L = -\sqrt{2}\omega_T$$



100
repeticiones



200
repeticiones



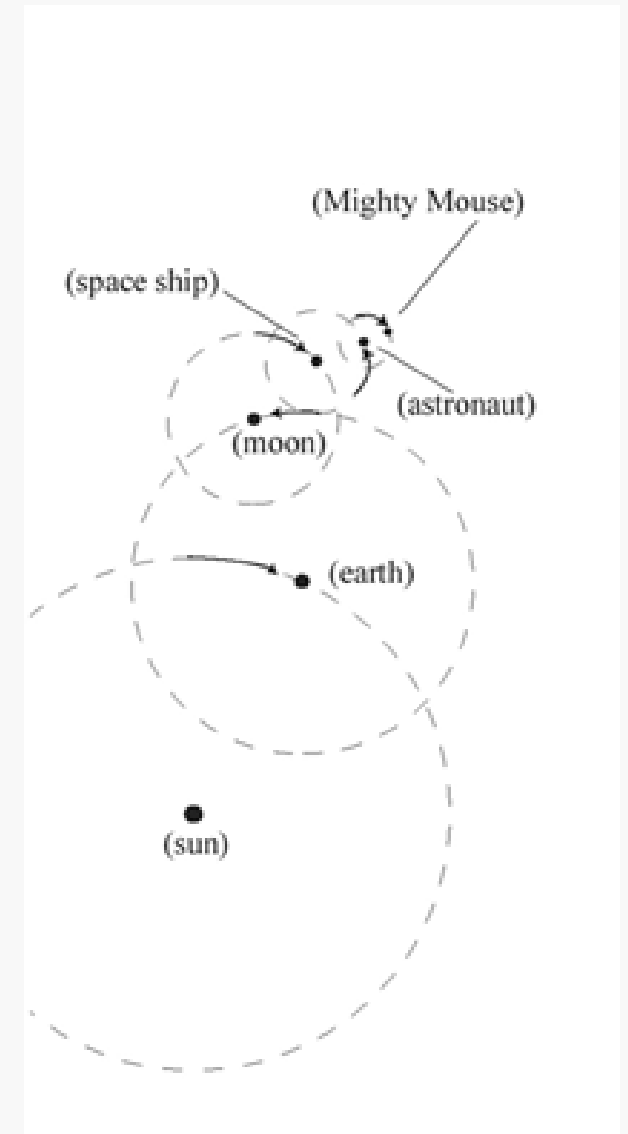
500
repeticiones

PONGAMOS LAS COSAS MÁS COMPLEJAS...

Anteriormente mencionamos que se podían extender los niveles de
movimiento relativo.

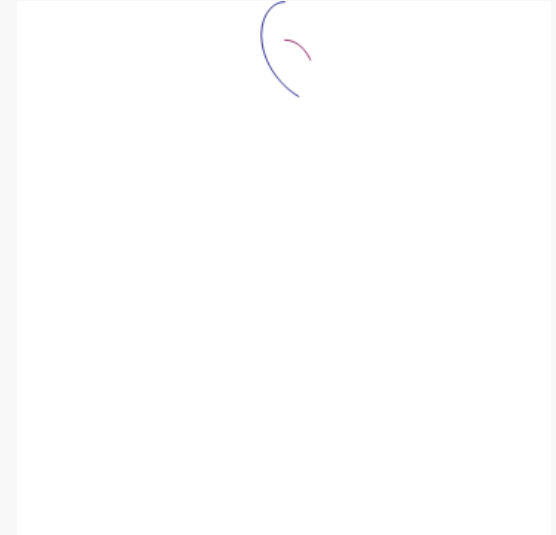
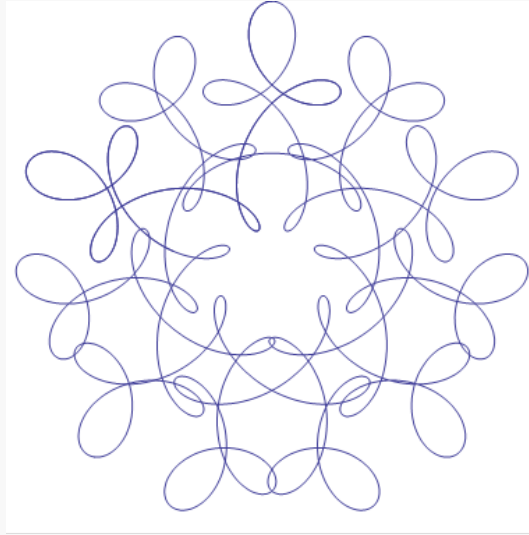
Multiniveles

- Siguiendo los mismos principios.
- Ahora, colocamos a orbitar una nave espacial alrededor de la Luna.
- La dirección a la que gira, será contraria a la de la Luna, y ésta, contraria a la de la Tierra.
- Un astronauta, orbitando a la nave espacial, también en sentido contrario.
- Un ratón orbitando alrededor del astronauta.

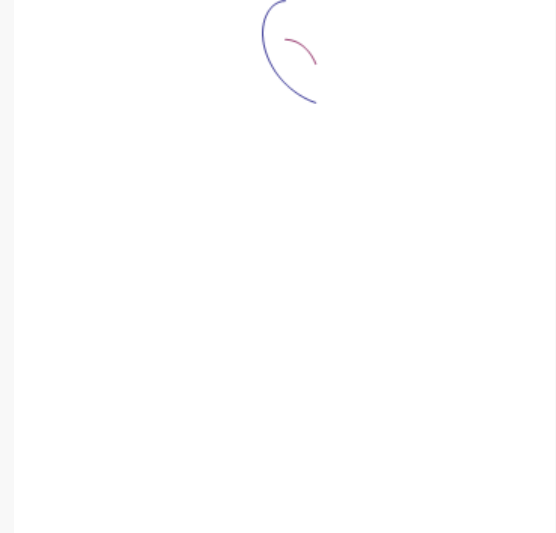
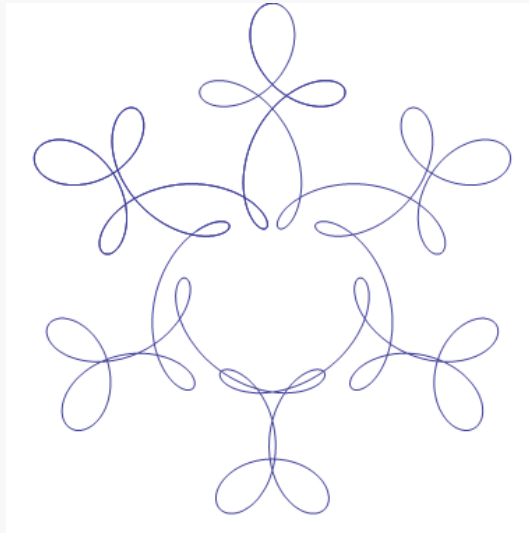


Nave espacial

$$\omega_L = -4.5\omega_T$$
$$\omega_N = -4\omega_L$$



$$\omega_L = -5\omega_T$$
$$\omega_N = -4\omega_L$$

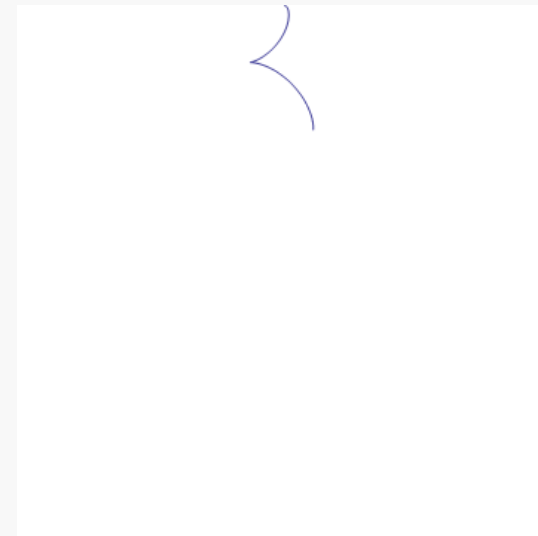
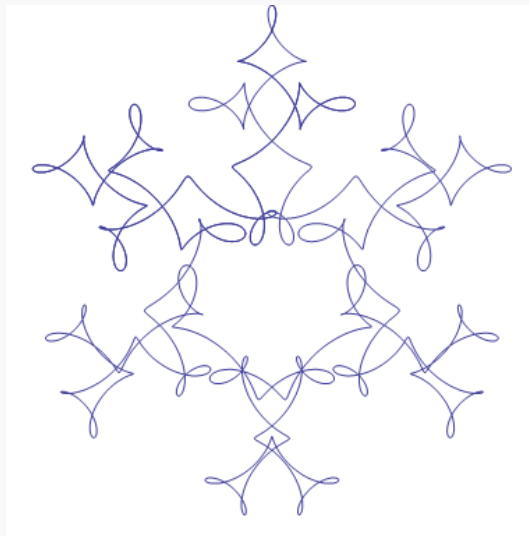


Astronauta

$$\omega_L = -5\omega_T$$

$$\omega_N = -4\omega_L$$

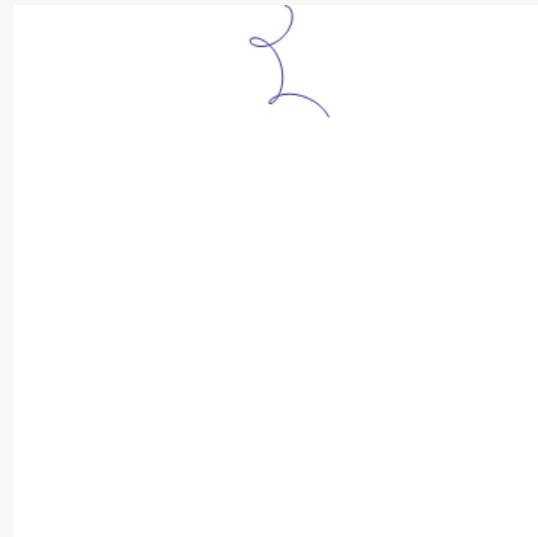
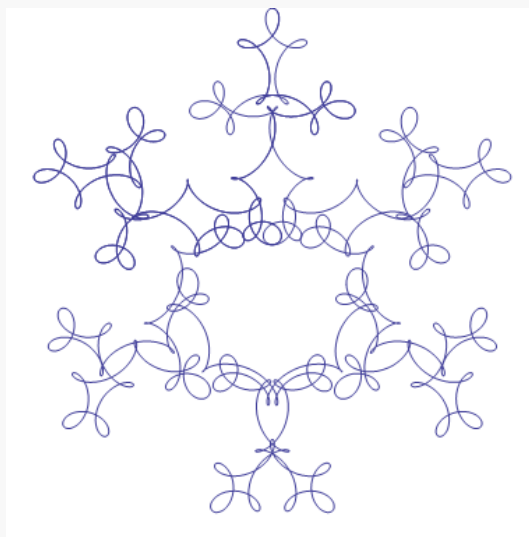
$$\omega_A = -3\omega_N$$



$$\omega_L = -5\omega_T$$

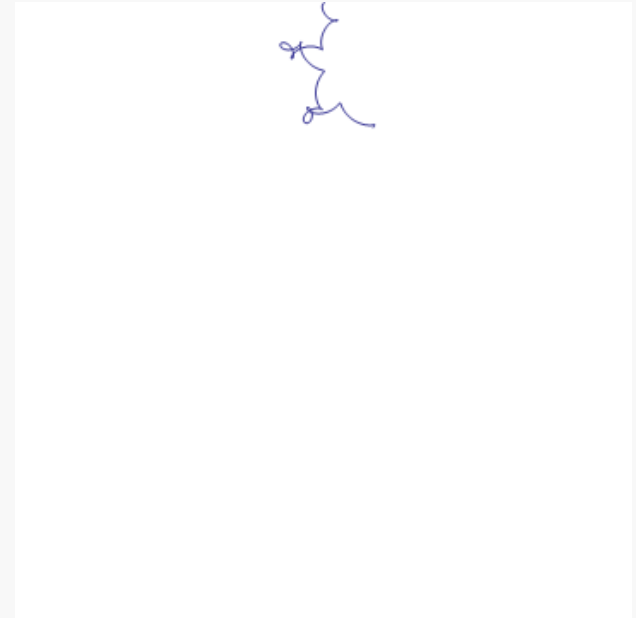
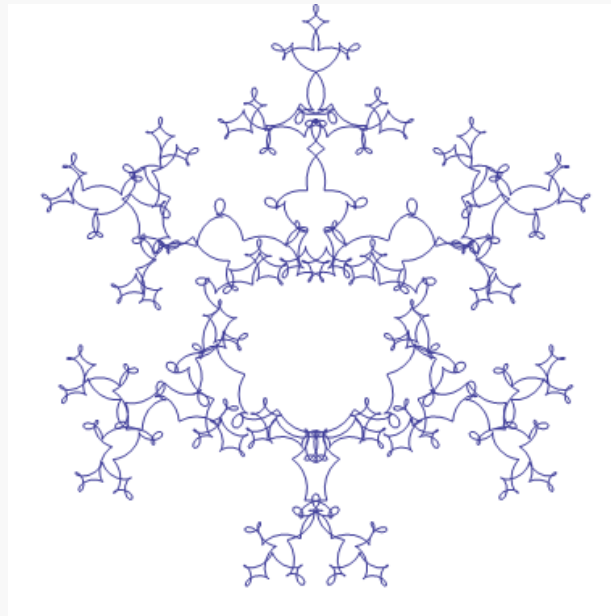
$$\omega_N = -4\omega_L$$

$$\omega_A = -4.5\omega_N$$

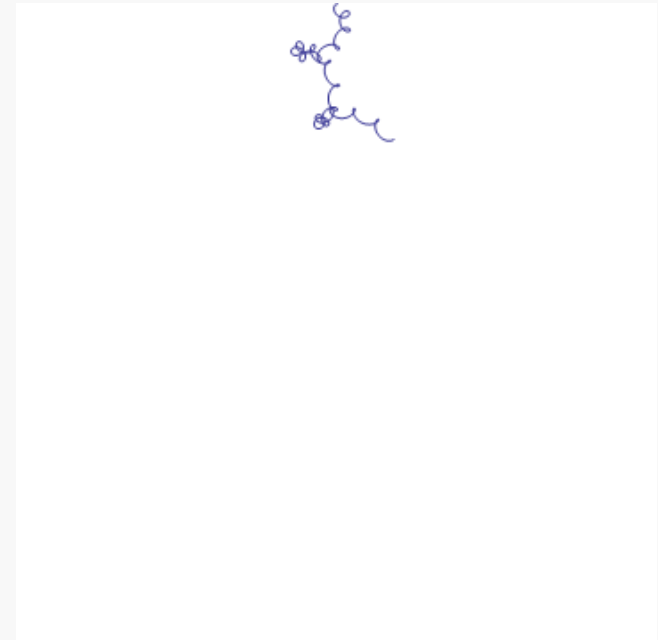
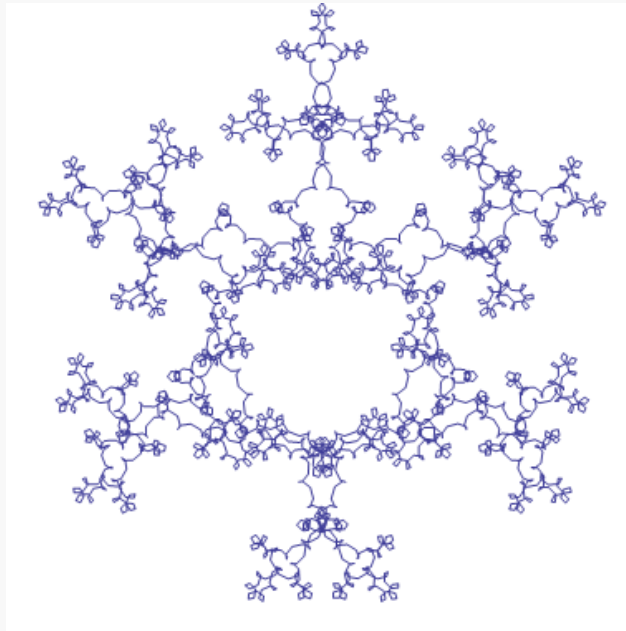


Ratón

$$\begin{aligned}\omega_L &= -5\omega_T \\ \omega_N &= -4\omega_L \\ \omega_A &= -4.5\omega_N \\ \omega_R &= -4\omega_A\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\omega_L &= -5\omega_T \\ \omega_N &= -4\omega_L \\ \omega_A &= -4.5\omega_N \\ \omega_R &= -7\omega_A\end{aligned}$$



Gracias