SISTEMAS DINÁMICOS

Análisis y simulación del movimiento relativo a un nivel y multinivel

Descripción breve

Universidad de Guanajuato, Departamento de matemáticas
Trabajo final de sistemas dinámicos
Francisco Javier Solís

En este trabajo se analiza y simula el movimiento relativo que tiene la Luna respecto al Sol. Además, se describen y simulan movimientos relativos a multinivel.

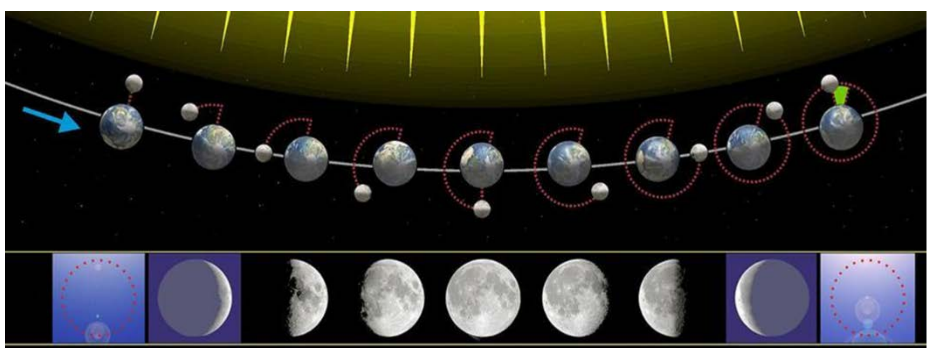
Diego Aarón Moreno Galván
Diego.moreno@cimat.mx

Introducción

En la vida real existen varios tipos de movimiento: rectilíneo, circular, espiral, etc. Sin embargo, estamos trabajando en el mundo numérico de las computadoras. En el cual, no podemos simular exactamente un movimiento de la vida real, pues nos falta precisión. Además, podemos simular, otros movimientos que no necesariamente existen en la vida real. Por lo anterior, nos vamos a interesar tanto en los movimientos reales, como en los que no existen, pero que los podemos simular sencillamente.

En nuestro caso, analizaremos el movimiento de la Luna alrededor del Sol, el cual depende a su vez del movimiento de la Tierra. El movimiento de la Luna se dice que es un movimiento relativo, y nos es de interés estudiarlo puesto que las trayectorias son difíciles de predecir si el movimiento que nos interesa está basado en un sistema de coordenadas dinámico. Por lo anterior, para visualizar el movimiento, primero debemos simular cada movimiento por separado.

Movimiento relativo de la Luna

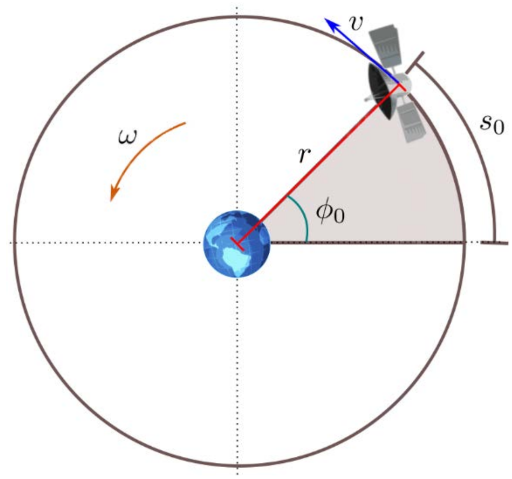


Dicho movimiento es de especial interés puesto que, la masa de la Tierra es mucho más grande que la de la Luna. Así, la trayectoria de la Luna es casi solamente determinada por la trayectoria de la Tierra. Sin embargo, la trayectoria lunar tiene muy poca influencia sobre la terrestre.

Para describir el movimiento que realiza la luna alrededor del Sol asumiremos lo siguiente:

- El Sol es el origen absoluto del sistema de coordenadas, el cual lo consideramos estático.
- Las órbitas tanto de la Tierra como de la Luna son determinadas solamente por la posición del Sol y de la Tierra respectivamente.
- Las trayectorias de la Tierra y de la Luna caen en un mismo plano.
- La Tierra orbita el Sol al contrario de las manecillas del reloj y la Luna orbita a la Tierra en la misma dirección, como se puede apreciar en la imagen superior.

Recordando un poco de física



Apoyándonos en la figura siguiente, recordaremos algunas cuestiones físicas.

- Supongamos que la Luna se encuentra a distancia r de la Tierra. En la imagen podemos observar un satélite, en la posición en la que consideraríamos a la Luna.
- La velocidad tangencial con la que se mueve la Luna, la podemos observar en la imagen como $v(t)$, donde t es el tiempo.
- Dada la velocidad tangencial y el radio, la Luna se mueve con velocidad angular de: $\omega(t)=v(t)/r$. La velocidad angular la podemos "calificar" como la cantidad de arco (S_0), que recorre la Luna, por unidad de tiempo.

Dados los datos anteriores, podemos observar fácilmente que al tiempo t, la Luna estará en la posición: $(\cos(\omega(t)\ t), \sin(\omega(t)\ t))$, respecto a la Tierra, pues estamos considerando que las órbitas son circulares. Sin embargo, la Tierra también está en movimiento, empero respecto al Sol.

Así que si suponemos lo siguiente:

- La Tierra se mueve a velocidad angular ω_1 respecto al Sol.
- La Luna se mueve a velocidad angular ω_2 respecto a la Tierra.

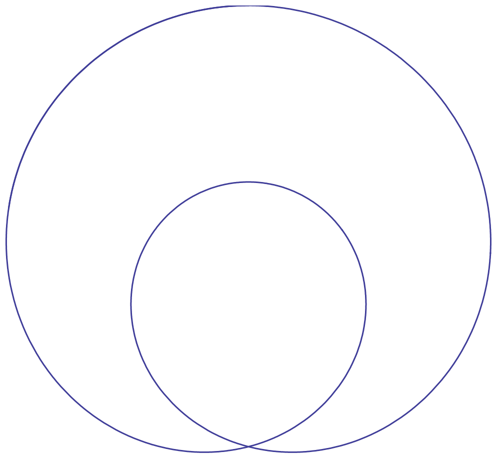
Entonces, la posición de la Luna estará determinada por las siguientes coordenadas:

$$(\cos(\omega_1 t), \sin(\omega_1 t)) + (\cos(\omega_2 t), \sin(\omega_2 t)) = (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t), \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)).$$

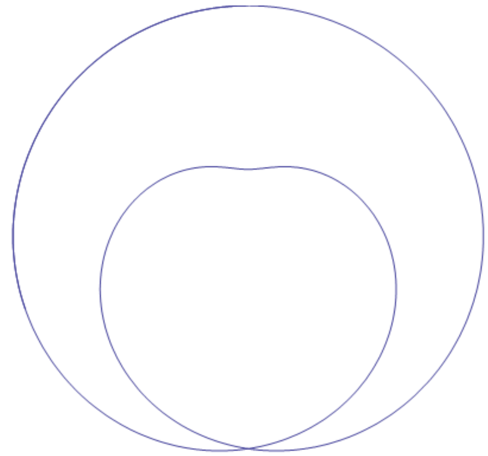
Simulación y resultados de algunas trayectorias

A continuación, se listan algunas imágenes de distintas trayectorias que puede realizar la Luna a distintas velocidades. Para estos ejemplos, se consideró que la Luna orbita alrededor de la Tierra con un radio de la mitad de tamaño del radio al que orbita la Tierra alrededor del Sol. Lo anterior se hace para visualizar mejor la trayectoria de la Luna, puesto que, si lo simulamos con el radio real, el Sol está más de mil veces más lejos de la Tierra que la Luna, entonces, dada nuestra precisión en el mundo de las computadoras, no podremos visualizar el movimiento.

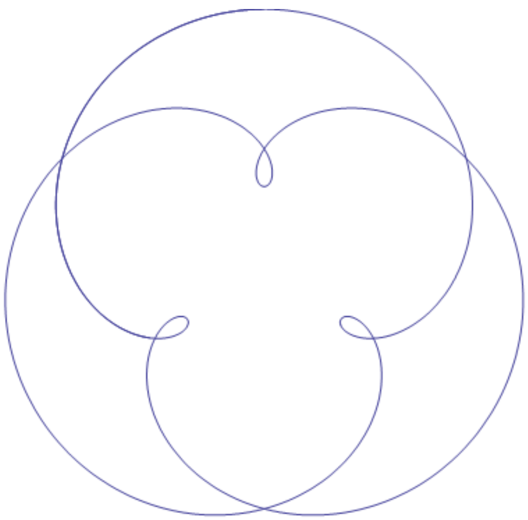
Simularemos a distintas velocidades angulares para que la forma que adquiere la trayectoria de la Luna no dependa del radio entre la Luna y la Tierra y solo dependa de la velocidad a la que vaya.



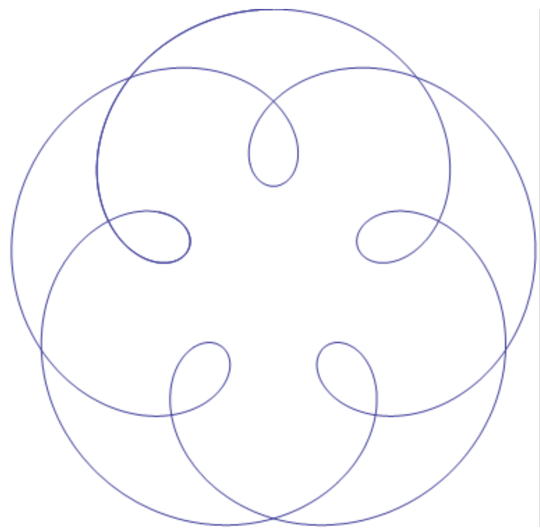
Con velocidad angular de: $\omega_L = 0.5\omega_T$



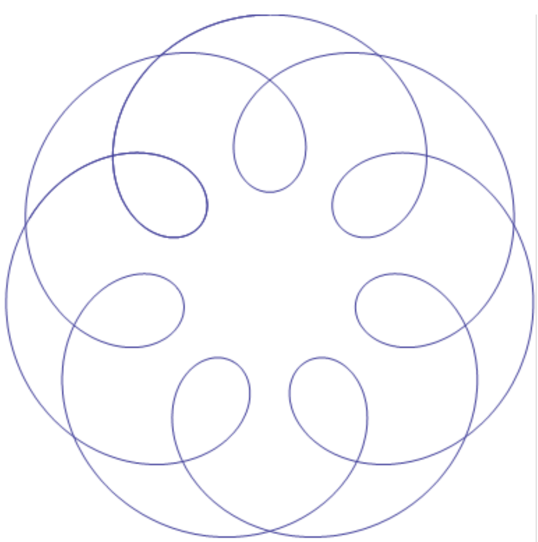
$\omega_L = 1.5\omega_T$



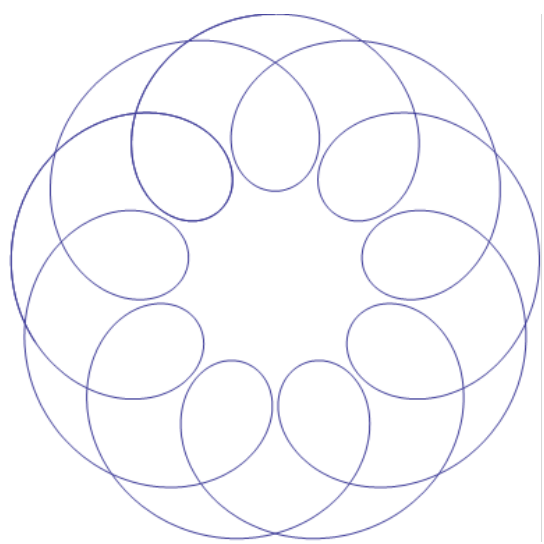
$\omega_L = 2.5\omega_T$



$\omega_L = 3.5\omega_T$



$\omega_L = 4.5\omega_T$



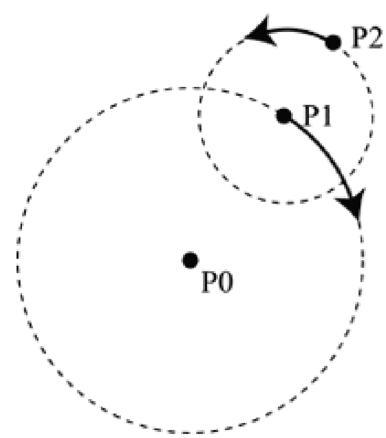
$\omega_L = 5.5\omega_T$

Aclaración: ω_L es la velocidad angular de la Luna, y ω_T es la de la Tierra. De lo anterior, podemos rescatar lo siguiente:

- Si la velocidad de la Luna es menor a la de la Tierra, la Tierra completa una vuelta alrededor del Sol mientras que la Luna aún no se la da a la Tierra, por eso se ve como si fuera casi un círculo y se necesitan dos vueltas de la Tierra para que la Luna complete una vuelta.
- Conforme la velocidad de la Luna aumenta, va dando más vueltas a la Tierra, y se van formando como una "flor". Si aumentamos demasiado la velocidad de la Luna, lo que obtendremos en una especie de espiral que formará un disco si $\omega_L \to \infty$.

Movimiento al sentido contrario

Una pregunta que nos surge al hacer el análisis del movimiento es: ¿Qué pasaría si la Luna, en vez de rotar en la dirección de la Tierra, rotara en el sentido contrario? Para dar respuesta, analicemos ahora nuestras limitaciones a considerar.

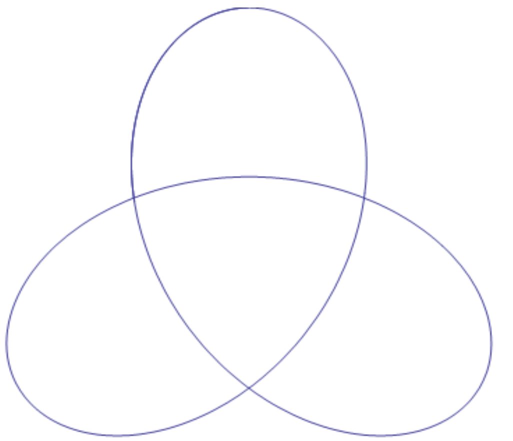


En la sección de las cuestiones físicas de nuestro problema, nos dimos cuenta de que la posición de la Luna respecto al Sol sí depende de la posición en la que está la Tierra, sin embargo, la posición en la que está la Tierra, no se ve afectada por la Luna. Por lo mismo, a la Tierra "le da igual" si la Luna gira hacia un sentido o si gira al otro. Lo que ocasiona que si variamos la velocidad de la Luna a números negativos (rotar al sentido contrario), obtendremos lo deseado.

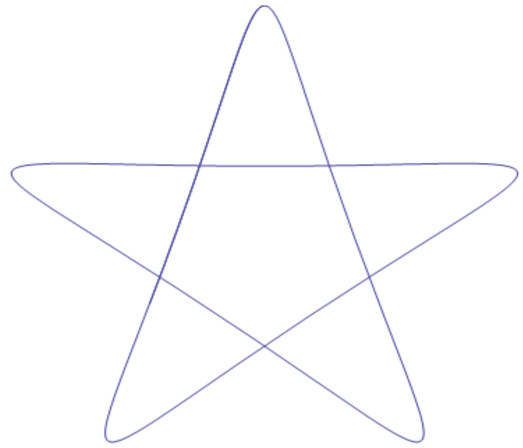
Simulación y resultados de algunas trayectorias al sentido contrario

A continuación, se vuelve a listar algunas imágenes de distintas trayectorias que puede realizar la Luna a distintas velocidades, pero en sentido contrario. Para estos ejemplos, se consideró nuevamente, que la Luna orbita alrededor de la Tierra con un radio de la mitad de tamaño del radio al que orbita la Tierra alrededor del Sol.

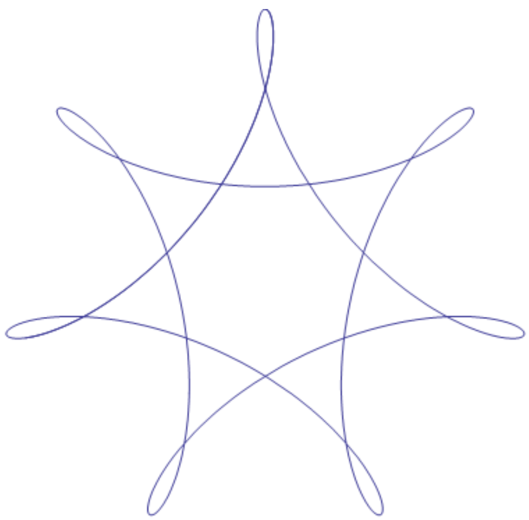
De nueva cuenta simularemos a distintas velocidades angulares para que la forma que adquiere la trayectoria de la Luna no dependa del radio entre la Luna y la Tierra.



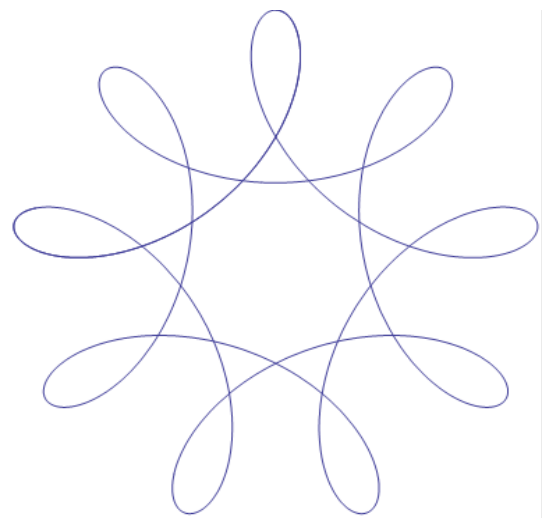
$\omega_L = -0.5\omega_T$



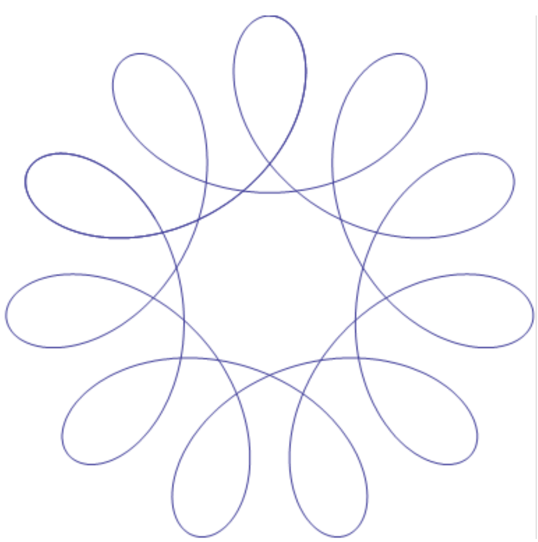
$\omega_L = -1.5\omega_T$



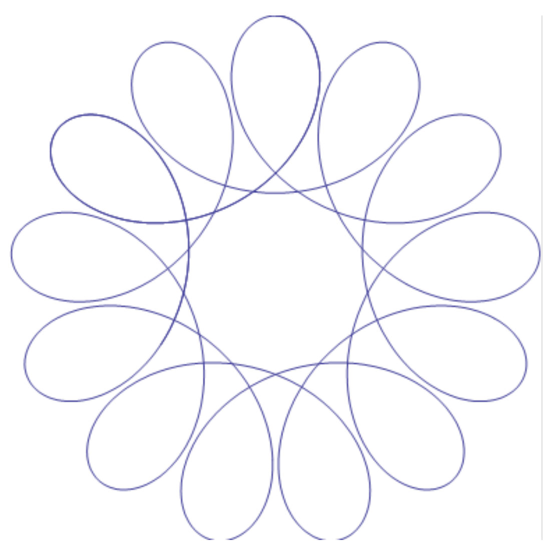
$\omega_L = -2.5\omega_T$



$\omega_L = -3.5\omega_T$



$\omega_L = -4.5\omega_T$



$\omega_L = -5.5\omega_T$

Observamos que conforme la velocidad de la Luna aumenta, va dando más vueltas a la Tierra, y se van formando "pétalos", los cuales, van en aumento la cantidad de pétalos conforme aumentamos la velocidad. Si aumentamos demasiado la velocidad de la Luna $\omega_L \to \infty$, lo que obtendremos será de igual manera que lo anterior, un disco, pero rellenado en el sentido contrario.

Trayectorias lunares densas

Otra pregunta que nos surge al hacer las simulaciones anteriores es: ¿Por qué la trayectoria de la Luna en las simulaciones se cerraba exactamente? Si somos un poco observadores, nos daremos cuenta de que las simulaciones realizadas, corresponden a dos vueltas de la Tierra o más, puesto que si la Tierra, solo da una vuelta al Sol, no se completaría la "figura" que realiza la Luna.

Si logramos entender, por qué las trayectorias se cerraban exactamente en dos vueltas de la Tierra, después nos podremos si hay trayectorias que se completen en exactamente una vuelta o en más vuelta. También nos podemos preguntar si existirá una velocidad a la que la Luna nunca pase por el mismo lugar y nunca complete la "figura" exactamente. A lo anterior, le llamaremos que la trayectoria sea densa.

Analicemos entonces la cuestión. Sabemos de antemano que la posición de la Luna respecto al Sol está determinada por las coordenadas: $(\cos(\omega_T t) + \cos(\omega_L t)\,, \sin(\omega_T t) + \sin(\omega_L t))$.

Las coordenadas de la posición involucran a la función $\cos x$, la cual es una función periódica de periodo 2π. Lo mismo pasa con la función $\sin x$. Por lo tanto, si la velocidad de la Luna la estamos tomando de la forma: $\omega_L = x\omega_T$, para $x \in R$, entonces la posición de la Luna estará dada por las coordenadas: $(\cos(\omega_T t), \sin(\omega_T t)) + (\cos(x\omega_T t)\,,\ \sin(x\omega_T t))$.

Otro aspecto que podemos rescatar es que al tiempo t_0, la Tierra está en la posición $p_0 = (\cos(\omega_T t_0)\,, \sin(\omega_T t_0))$, y va a volver a estar en dicha posición en el tiempo $t_k = t_0 + k\frac{2\pi}{\omega_T}$, para $k \in N$. De manera similar, la función $(\cos(x\omega_T t)\,,\ \sin(x\omega_T t))$, tomará el mismo valor en el tiempo dado por: $t_{k\prime} = t_0 + \frac{k\prime}{x}\frac{2\pi}{\omega_T}$, con $k' \in N$.

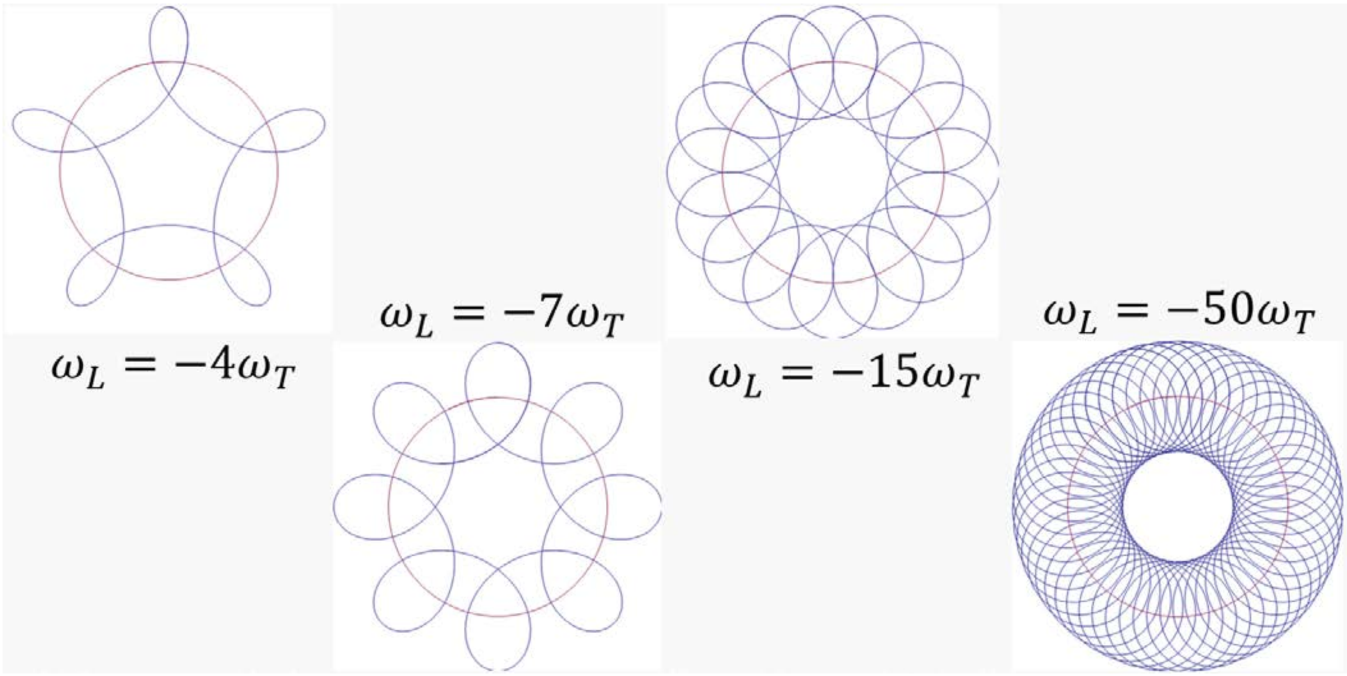
De esta manera, si la Luna se encuentra en una posición p_0 en el tiempo t_0, va a volver a estar en dicha posición cuando $k'x \in N$.

Una vez analizado lo anterior, llegamos a la conclusión de que la trayectoria de la Luna va a completarse exactamente en una vuelta de la Tierra cuando $\omega_L = x\omega_T$ y $x \in Z$. Va a completar la figura en exactamente dos vueltas cuando $k'x = 2$, es decir, cuando x sea de la forma $x = \frac{p}{2}$, para $p \in Z$. En general, la Luna completará la figura en exactamente K vueltas cuando $k'x = K$, es decir, cuando x sea de la forma $x = \frac{p}{K}$, para $p \in Z$.

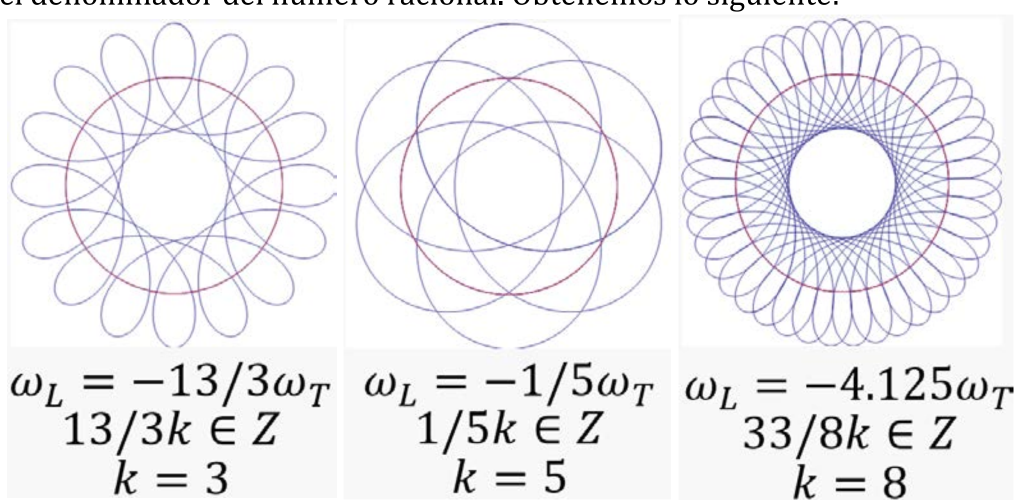
Es claro ya, que la trayectoria de la Luna será densa cuando $x \in I$, por ejemplo $x = \pi$ o $x = e$.

Simulación y resultados de trayectorias con velocidades enteras, racionales e irracionales

Primero simulemos con el factor de velocidad entero, y observemos detenidamente que, en efecto, la trayectoria lunar completa la figura en una sola vuelta de la Tierra.

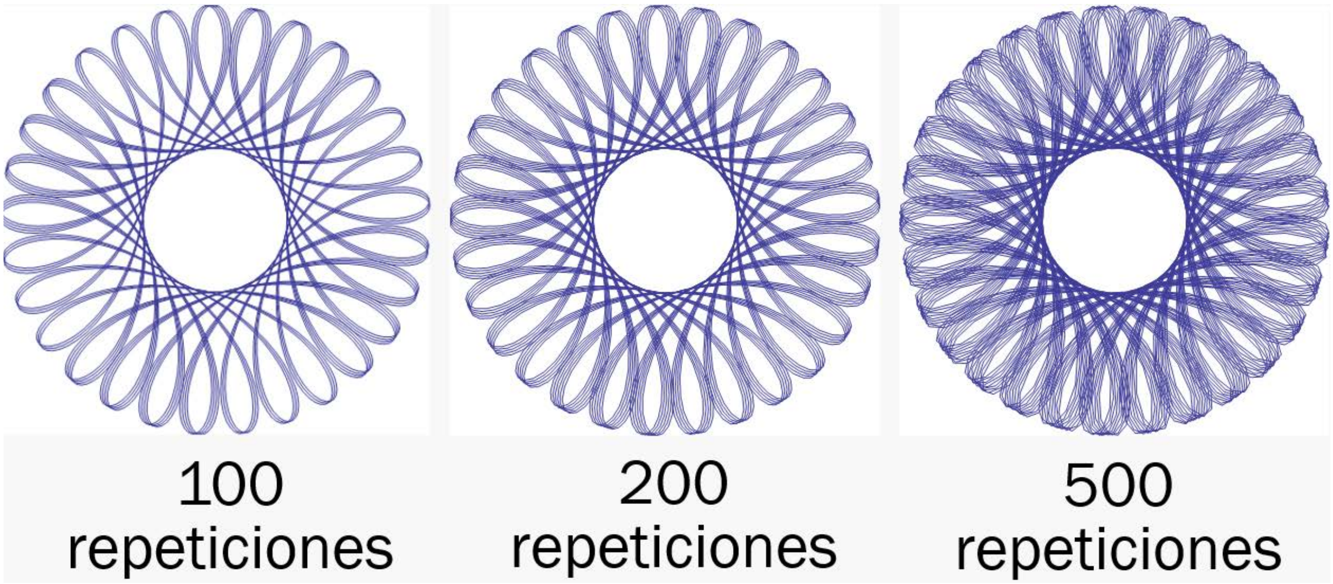


Ahora realicemos algunas simulaciones con el factor de velocidad como un número racional no entero, y observemos nuevamente con atención que se completa la figura en d vueltas de la Tierra, donde d es el denominador del número racional. Obtenemos lo siguiente:



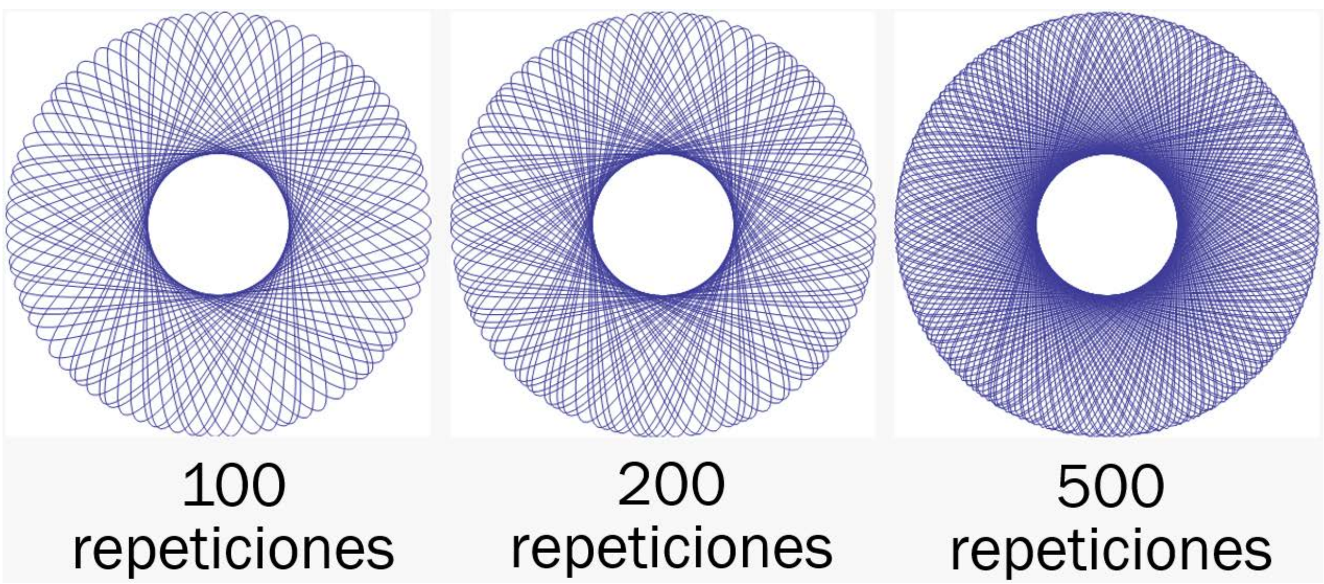
Finalmente simulemos con algunos números que son irracionales para ver que efectivamente, las trayectorias son densas y simulemos con repeticiones grandes para visualizar cómo es que se va llenando el círculo.

Simulamos primero con el número irracional favorito cuando trabajamos con círculos, y este es el número Pi.



$$\omega_L = -\pi\omega_T$$

Ahora simulemos con otro número irracional, por ejemplo $\sqrt{2}$.



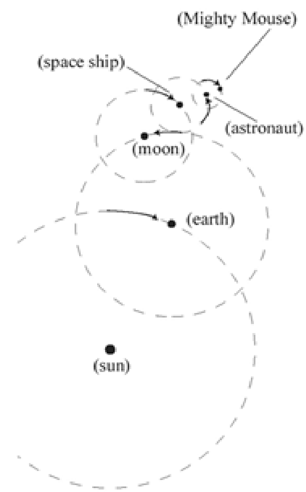
$$\omega_L = -\sqrt{2}\omega_T$$

Observamos que con un número irracional, obtendremos siempre el “disco” sin tener que aumentar mucho la velocidad pues nunca la Luna pasará por la misma posición.

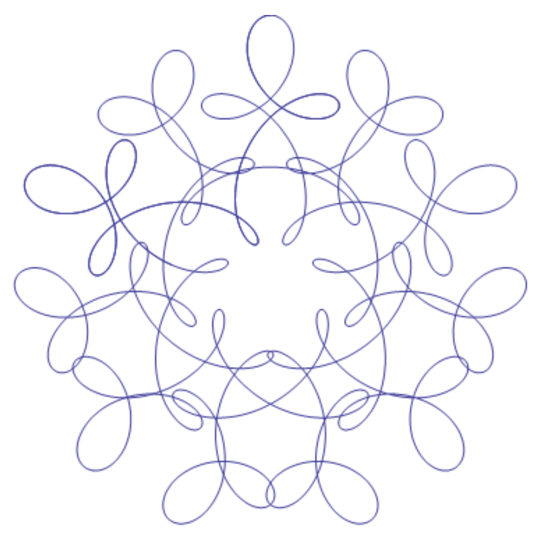
Multiniveles

Por último, ahora nos preguntamos, que pasaría si en lugar de solo tener a la Luna girando alrededor de la Tierra, ahora tenemos varios niveles relativos, es decir, que la Luna también sea un sistema de coordenadas relativo para otro objeto que gira alrededor de la Luna. Para poner las cosas más complejas y simular bien lo que nos preguntamos, consideremos lo siguiente siguiendo los mismos principios físicos:

- El Sol sigue siendo nuestro sistema de coordenadas estático, la Tierra orbita alrededor del Sol y la Luna alrededor de la Tierra en el sentido contrario.
- Pondremos ahora a orbitar una nave espacial alrededor de la Luna, cuya dirección a la que gira, será contraria a la de la Luna.
- También pondremos en la simulación a un astronauta, orbitando a la nave espacial y de igual manera, en sentido contrario.
- Finalmente, colocaremos a un ratón orbitando alrededor del astronauta y también orbitando al sentido contrario del astronauta.
- Lo aspectos anteriores los podemos visualizar en la imagen.

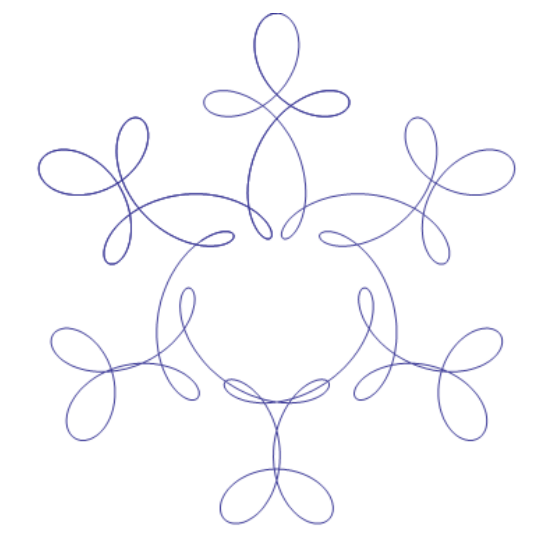


Veamos las trayectorias que hace cada objeto por separado. Inicialmente comencemos con la trayectoria que dibuja la nave espacial a distintas velocidades respecto de la Luna.



$\omega_L = -4.5\omega_T$

$\omega_N = -4\omega_L$

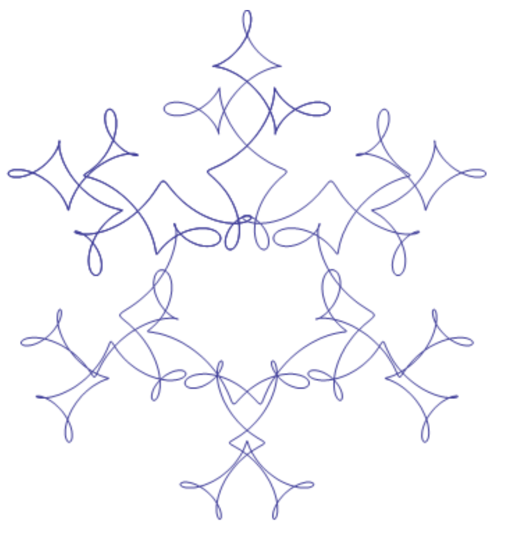


$\omega_L = -5\omega_T$

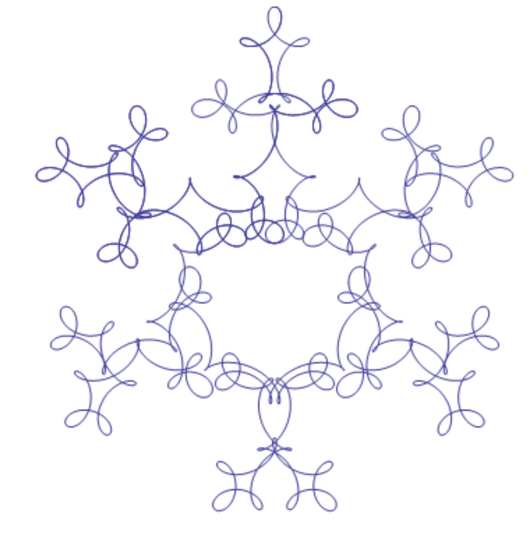
$\omega_N = -4\omega_L$

Donde ω_N es la velocidad angular de la nave espacial y más adelante ω_A será la velocidad angular del astronauta y ω_R la velocidad angular del ratón.

Ahora veamos algunas simulaciones que realiza la trayectoria del astronauta respecto al Sol, recordamos que el astronauta está orbitando alrededor de la nave espacial.

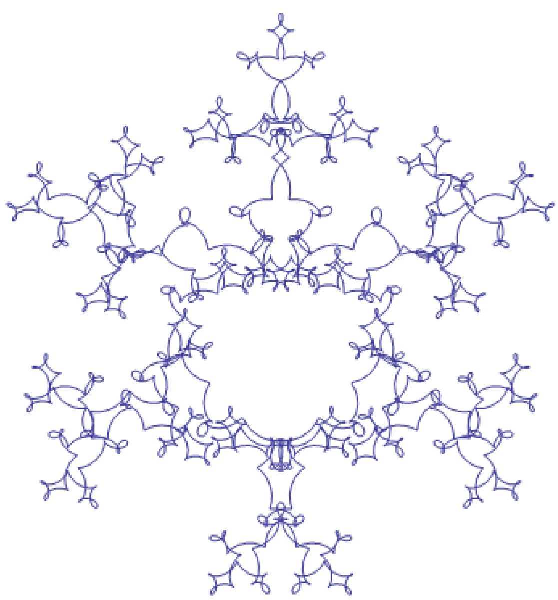


$$\omega_L = -5\omega_T$$
$$\omega_N = -4\omega_L$$
$$\omega_A = -3\omega_N$$

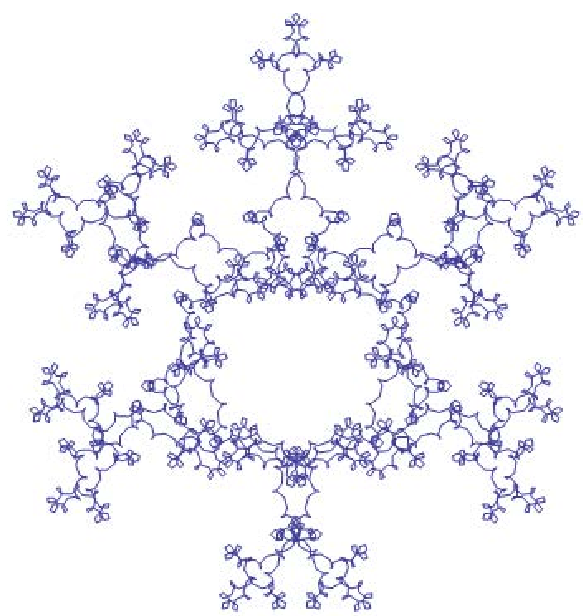


$$\omega_L = -5\omega_T$$
$$\omega_N = -4\omega_L$$
$$\omega_A = -4.5\omega_N$$

Finalmente, visualicemos la trayectoria que hace el ratón, la cual esperamos que es un poco más increíble o bonita, pues va a estar girando sobre el astronauta demasiadas veces y describirá los pétalos de forma pequeña y muy prominente.



$$\omega_R = -4\omega_A$$



$$\omega_R = -7\omega_A$$