MANUEL JOAQUIM ALVES
ELENA VLADIMIROVNA ALVES

MÓDULO
ANÁLISE MATEMÁTICA II

2013

CONTEÚDO

Módulo ANÁLISE MATEMÁTICA II

Bem-vindo ao módulo ANÁLISE MATEMÁTICA II

"*...E nunca considere seu estudo como uma obrigação, mas sim como uma oportunidade invejável de aprender, sobre a influência libertadora da beleza no domínio do espírito, para seu prazer pessoal e para o proveito da comunidade à qual pertencerá o seu trabalho futuro.*" Albert Einstein

Nos dias actuais a principal ferramenta utilizada para auxiliar no pensamento é o computador. Este instrumento foi desenvolvido, basicamente, por engenheiros, físicos e matemáticos. Na primeira metade do século XX a história das máquinas de computação envolveu mais estatísticos, físicos e engenheiros eléctricos que matemáticos. Máquinas de calcular de mesa e sistemas de cartões perfurados eram indispensáveis para negócios, bancos e para as ciências sociais. A régua de calcular tornou-se o símbolo do engenheiro; e integradores de vários tipos eram usados por físicos, geodesistas e estatísticos. A situação mudou por volta de 1940 por causa do envolvimento de matemáticos no esforço de guerra. Embora a maior parte do esforço viesse de físicos e engenheiros, numerosos matemáticos jovens desempenharam um papel no desenvolvimento do computador electrónico digital automático. Três desses matemáticos de destaque são John Von Neumann (1903-1957), Norbert Wiener (1894-1964) e Alan Turing (1913-1954).

A sociedade actual tem tratado o computador com extrema importância. Com ele, profissionais como cientistas e engenheiros de computação, programadores, analistas de sistemas, etc. têm ocupado posição de destaque. Todos esses profissionais têm como base disciplinas como lógica, algoritmos, estrutura de dados, matemática discreta, geometria, estatística, etc., e todas estas disciplinas estão fundamentadas na matemática descoberta ao longo dos séculos anteriores. Um profissional de computação que possui conhecimentos em matemática é capaz de resolver problemas profundos, oferecendo soluções claras, organizadas, criativas e eficientes. As empresas têm buscado cada vez mais profissionais com esse perfil, pois os desafios actuais são cada vez maiores e exigem conhecimentos mais sólidos. A geometria é uma grande aliada no processo criativo de um profissional em computação, já que facilita a abstração do mundo real, permitindo que novos modelos sejam criados com muita facilidade e precisão.

No universo dinâmico da era actual, não dá para pensar em viver sem estes conhecimentos básicos, principalmente os profissionais da área de computação, sejam eles mais técnicos ou voltados ao gerenciamento de projectos. Esta base é diferencial em profissionais que querem alcançar o sucesso, mas também é fundamental para a sobrevivência dos dias actuais, pois a quantidade de informação é gigantesca e os avanços tecnológicos são extremamente rápidos. Pode-se dizer então que para compreender o mundo contemporâneo é necessário acompanhá-lo e para isto a matemática, aliada à computação, tornou-se linguagem imprescindível.

O presente módulo Análise Matemática II é continuação do módulo Análise Matemática I. É composto de quinze unidades. Cada unidade tem uma componente teórica, reforçada de exemplos claros e ilustrativos, que permitem assimilar rapidamente os conceitos, definições e teoremas expostos. Seguem-se exercícios de aprofundamento e consolidação do material. No final de cada unidade temos exercícios e perguntas para autoavaliação.

O Cálculo Diferencial foi o principal tópico abordado no módulo Análise Matemática I. Alguns problemas na Matemática exigem que se determine uma função a partir da informação que se possui sobre a sua derivada. Isto pode ser visto como uma operação inversa da derivação. O processo de reconstrução duma função a partir da sua derivada chama-se *integração*.

Já na antiguidade os anciãos da Babilónia estavam preocupados com o cálculo de áreas de regiões planas como o círculo, que não são limitadas por linhas rectas. A abordagem moderna para o cálculo de tais áreas está intimamente relacionada com a integração. Propriedades adicionais do conceito de integral serão abordadas. Para além de fornecermos uma introdução à integração, iremos também mostrar que os conceitos e resultados sobre o integral possuem importantes aplicações. Apresentamos uma breve introdução às técnicas de integração por partes e substituição, comummente usadas. Algumas dificuldades que surgem quando se integra num intervalo infinito ou quando a função a ser integrada torna-se igual a infinito num certo ponto do intervalo de integração serão investigadas.

As funções a uma variável não cobrem todas as dependências existentes na natureza. Por exemplo, a procura de um produto como o sumo de laranja depende do seu preço, do salário do consumidor e dos preços dos produtos substitutos, tais como refrigerantes. Por isso mesmo, torna-se necessário alargar a noção sobejamente conhecida de dependência funcional e introduzir a noção de função a várias variáveis.

As aulas são teórico-práticas pelo que são compostas de: uma parte expositiva, onde são apresentados conceitos fundamentais das diferentes matérias do programa juntamente com a demonstração dos principais resultados, pretendendo-se assim que os alunos adquiram uma visão global dos temas abordados e suas interligações; uma componente prática, onde os alunos aplicarão os conhecimentos adquiridos melhorando a sua compreensão das matérias leccionadas.

Objectivos do módulo

No final da disciplina o estudante deve ser capaz de:

- Utilizar o pensamento lógico para organizar e relacionar informações recebidas sobre os problemas da vida;
- Quantificar a realidade mediante a realização de cálculos apropriados usando os integrais;
- Actuar na resolução de problemas do quotidiano de acordo com a actividade matemática: estudo das alternativas possíveis, precisão e rigor no uso da linguagem, flexibilidade para mudar o ponto de vista quando necessário e perseverança na busca de soluções;
- Enunciar os principais métodos e propriedades de integração;
- Determinar primitivas de funções reais a uma variável;
- Conhecer as condições de existência do integral definido;
- Calcular integrais definidos, como limite da soma integral;
- Calcular, directamente, integrais definidos;
- Investigar a convergência de integrais impróprios;
- Aplicar integrais na resolução de problemas;
- Compreender e determinar derivadas parciais;
- Analisar e calcular extremos e classificá-los;
- Definir integral duplo num rectângulo e numa região qualquer;
- Calcular o integral duplo como limite da soma integral;
- Calcular integrais duplos usando o método de substituição.

Recomendações para estudo

O processo de ensino e aprendizagem centrado no estudante requer que você desenvolva algumas habilidades essenciais para conseguir um bom rendimento e sucesso. Essas habilidades e competências são a autodisciplina, responsabilidade, o gosto pela pesquisa e a motivação. De modo a tornar o estudo deste módulo mais frutífero e aprofundar os seus conhecimentos recomendamos:

1) Estabeleça um plano de estudo, determine os dias e horários para estudar e realizar as actividades;

2) Estabeleça um tempo mínimo de estudo, de acordo com o seu ritmo e suas necessidades;

3) Procure interagir com os colegas, participando nas discussões propostas, trocando informações, ideias, reflexões, descobertas e dúvidas;

4) Leia e assista, com muita atenção, os parágrafos e os videos onde se explanam os conceitos teóricos;

5) Ao estudar os exemplos providos em cada unidade, pegue numa esferográfica e papel e repita todos os passos de resolução;

6) Ao deparar-se com algum conceito, definição, fórmula ou teorema estudados anteriormente, mas que esqueceu, tome nota e posteriormente procure revê-los;

7) A leitura de algumas páginas de livros recomendados deve ser feita de modo obrigatório e os exercícios devem ser resolvidos;

8) De tempos em tempos faça uma breve revisão dos temas abordados anteriormente;

9) Contacte o regente ou assistente do módulo sempre que precisar.

Bibliografia

[1] R. A. Adams, *Calculus: A Complete Course*, Fifth Edition, Addison Wesley Longman, Toronto, 2003.

[2] C. H. Edwards and D. E. Penney, *Calculus*, Sixth Edition, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2002.

[3] E. V. Alves e M. J. Alves, *Elementos de Análise Matemática: Parte II*, DMI, Maputo, 2004.

[4] B. P. Demidovitch, *Problemas e Exercícios de Análise Matemática*, Editora Mir, Moscovo, 1984.

[5] K. Sydsaeter e P. Hammond (com a colaboração de M. Alves e A. Shindiapin), *Matemática Essencial para Análise Económica: Parte II*, Texto Editores, Maputo, 2006.

[6] G. Ávila, *Análise Matemática para Licenciatura*, Editora "Edgard Blucher", 2006.

[7] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 1, IMPA, 2004.

[8] E. L. Lima, *Análise Real*, Vol. 1, IMPA, 2008.

1 Unidade I. Integral indefinido

1.1 Introdução

O Cálculo Integral lida com o problema de se determinar uma função, conhecendo a sua derivada. A ferramenta principal utilizada no Cálculo Integral é a *primitiva* de uma função.

1.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir primitiva de uma função;

2) Identificar as propriedades do integral indefinido;

3) Identificar a tabela de principais integrais.

1.3 Noção de integral indefinido

No módulo Análise Matemática I, estudamos o Cálculo Diferencial: *dada uma função $f(x)$ pede-se para determinar a sua derivada.* No Cálculo Integral resolve-se o problema inverso: *determinar a função $F(x)$, conhecendo a sua derivada $F'(x) = f(x)$.*

Definição 1. *Diremos que $F(x)$ é primitiva da função $f(x)$ no intervalo (a,b), se para qualquer $x \in (a,b)$ cumpre-se a igualdade $F'(x) = f(x)$.*

Por exemplo, a primitiva da função $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, é a função $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, pois

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

É evidente que qualquer função da forma $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$, onde C é uma constante qualquer, é também primitiva da função $f(x) = x^2$, pois

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x).$$

Teorema 1. *Se a função $F(x)$ é primitiva da função $f(x)$ em (a,b), então o conjunto de todas as primitivas para $f(x)$ é dado pela fórmula $F(x) + C$, onde C é constante.*

Demonstração. A função $F(x) + C$ é primitiva da função $f(x)$. Realmente, $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. Seja $G(x)$ uma outra primitiva de $f(x)$, isto é $G'(x) = f(x)$. Então, para qualquer $x \in (a,b)$ temos:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Isto significa que $G(x) - F(x) = C$, onde C é constante. Consequentemente, $G(x) = F(x) + C$. $\blacksquare$

Definição 2. *O conjunto de todas as primitivas* $F(x)+C$ *para a função* $f(x)$ *chamaremos integral indefinido da função* $f(x)$ *e denota-se pelo símbolo* $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Assim, por definição

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)+C}$$

Aqui, $f(x)$ chamaremos *integrando*, x é a variável de integração e $\displaystyle\int$ é o sinal de integração.

1.4 Propriedades do integral indefinido

Vejamos algumas propriedades do integral indefinido.

1. A derivada do integral indefinido é igual a função integrável, isto é:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

Realmente, $\displaystyle\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x)$. Graças à esta propriedade, a correcteza da integração verifica-se usando a derivação. Por exemplo, a igualdade

$$\int (3x^2+4)\,dx = x^3+4x+C$$

é correcta, pois $(x^3+4x+C)' = 3x^2+4$.

2. O integral indefinido do diferencial duma função é igual a soma desta função e uma constante qualquer:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

Realmente, $\displaystyle\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+C$.

3. O factor constante podemos tirar fora do sinal do integral:

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha\int f(x)\,dx,$$

onde $\alpha \neq 0$ é constante.

Realmente,

$$\int \alpha f(x)\,dx = \int \alpha F'(x)\,dx = \int (\alpha F(x))'\,dx = \int d(\alpha F(x)) = \alpha F(x)+C_1 = \alpha(F(x)+C) = \alpha\int f(x)\,dx,$$

onde $\dfrac{C_1}{\alpha} = C$.

4. O integral indefinido da soma de funções é igual a soma dos integrais das parcelas:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Realmente, sejam $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$. Então,

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int (F'(x)+G'(x))\,dx = \int (F(x)+G(x))'\,dx =$$

$$= \int d(F(x)+G(x)) = F(x)+G(x)+C = (F(x)+C_1)+(G(x)+C_2) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

onde $C_1 + C_2 = C$.

Exemplo 1. *Determine o integral* $\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx$.

Resolução. Temos:

$$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5)\,dx = 2\int x^4\,dx - 3\int x^2\,dx + \int x\,dx - 5\int dx =$$

$$2\left(\frac{x^{4+1}}{4+1}\right) + C_1 - 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + C_2 + \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_3 - 5x + C_4 = \frac{2}{5}x^5 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C,$$

onde $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$.

Exemplo 2. *Determine o integral* $\int \frac{x+1}{x}\,dx$.

Resolução. Temos: $\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)\,dx = x + \ln|x| + C$.

1.5 Tabela de principais integrais

Usando o facto de que a integração é operação inversa da derivação, podemos obter a tabela dos principais integrais. Assim:

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$;
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$;
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$;
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;
7. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C$;
8. $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C$;
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$;
12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C;$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + C;$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$
17. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C;$
18. $\displaystyle\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C.$

1.6 Exercícios

1) Determine $\displaystyle\int (2x^3-5x^2+7x-3)\,dx;$

2) Determine $\displaystyle\int \frac{2-x^4}{1+x^2}\,dx;$

3) Determine $\displaystyle\int x\sqrt{x}\,dx;$

4) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}}\,dx;$

5) Determine $\displaystyle\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx;$

6) Determine $\displaystyle\int 2^x 3^{2x} 5^{3x}\,dx;$

7) Determine $\displaystyle\int e^{3x}3^x\,dx;$

8) Determine $\displaystyle\int (2\sin x+3\cos x)\,dx;$

9) Determine $\displaystyle\int (\text{tg}\,x+\text{ctg}\,x)^2\,dx;$

10) Determine $\displaystyle\int \text{tg}^2 x\,dx.$

1.7 Respostas

1) $\displaystyle\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-3x+C;$

2) $\displaystyle\text{arctg}x+x-\frac{x^3}{3}+C;$

3) $\displaystyle\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C;$

4) $\dfrac{5}{4}\sqrt[5]{x^4}+C$;

5) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+C$;

6) $\dfrac{2250^x}{\ln 2250}+C$;

7) $\dfrac{e^{3x}3^x}{3+\ln 3}+C$;

8) $-2\cos x+3\sin x+C$;

9) $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x+C$;

10) $\operatorname{tg} x-x+C$.

1.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 1.3, 1.4 e 1.5;

2) No capítulo 9, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas de 1 a 7; resolver, no mesmo capítulo 9, parágrafo 9.1, os exercícios 1, 4, 5, 6 e 7;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 1.6 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1031, 1032, 1033, 1034, 1039, 1040, 1043, 1044, 1045 e 1046.

1.9 Auto-avaliação

1) Dê a definição de primitiva de uma função;

2) Formule o teorema sobre a unicidade da primitiva;

3) Forneça a interpretação geométrica do teorema sobre a unicidade da primitiva;

4) Formule as propriedades do integral indefinido;

5) Enumere os principais integrais de tabela;

6) Determine $\displaystyle\int (3-x^2)^3\,dx$;

7) Determine $\displaystyle\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx$;

8) Determine $\displaystyle\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)dx$, onde $a\in\mathbb{R}$;

9) Determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[4]{x}}\, dx$;

10) Determine $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$;

11) Determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$.

1.10 Chave de correcção

1) Veja a Definição 1 no parágrafo 1.3 desta unidade;

2) Veja o Teorema 1 no parágrafo 1.3 desta unidade;

3) É uma família de linhas paralelas;

4) Veja as propriedades do integral indefinido (homogeneidade, linearidade, derivada do integral, integral do diferencial) no parágrafo 1.4 desta unidade;

5) Veja a tabela no parágrafo 1.5 desta unidade;

6) Determine $\displaystyle\int (3-x^2)^3\, dx$;

Resolução. Vamos desenvolver, primeiro, a expressão a ser integrada (o integrando) que é, nada mais nada menos, que o cubo de uma diferença. Assim, aplicando a fórmula

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

temos: $(3-x^2)^3 = 27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6$. Logo,

$$\int (3-x^2)^3\, dx = \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6)\, dx = \int 27\, dx - \int 27x^2\, dx + \int 9x^4\, dx - \int x^6\, dx =$$

$$= 27\int dx - 27\int x^2\, dx + 9\int x^4\, dx - \int x^6\, dx =$$

$$= 27x - 27\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} + 9\cdot\frac{x^{4+1}}{4+1} - \frac{x^{6+1}}{6+1} + C = 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C. \quad \blacksquare$$

7) Determine $\displaystyle\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\, dx$;

Resolução. Vamos desenvolver o integrando

$$(1-x)(1-2x)(1-3x) = 1 - 6x + 11x^2 - 6x^3.$$

Assim,

$$\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\, dx = \int (1 - 6x + 11x^2 - 6x^3)\, dx = \int dx - 6\int x\, dx + 11\int x^2\, dx - 6\int x^3\, dx =$$

$$= x - 6\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + 11\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) - 6\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + C = x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C. \quad \blacksquare$$

8) Determine $\displaystyle\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right) dx$, onde $a \in \mathbb{R}$;

Resolução. Neste exercício aplicamos primeiro as propriedades sobre linearidade e homogeneidade do integral indefinido, depois recorremos à tabela de integrais. Assim,

$$\int \left(\frac{a}{x}+\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right) dx = \int \frac{a}{x}\,dx + \int \frac{a^2}{x^2}\,dx + \int \frac{a^3}{x^3}\,dx = a\int \frac{dx}{x} + a^2 \int \frac{dx}{x^2} + a^3 \int \frac{dx}{x^3} =$$

$$= a\ln|x| + a^2\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right) + a^3\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right) + C = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C. \quad \blacksquare$$

9) Determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$;

Resolução. Pegamos a função a ser integrada e vamos fazer algumas transformações algébricas de modo a usar a tabela de integrais. Assim,

$$\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} - 2\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{x^{1/2}}{x^{1/4}} - 2\frac{x^{2/3}}{x^{1/4}} + \frac{1}{x^{1/4}} = x^{1/4} - 2x^{5/12} + x^{-1/4}.$$

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx = \int \left(x^{1/4} - 2x^{5/12} + x^{-1/4}\right) dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} - 2\left(\frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1}\right) + \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C. \quad \blacksquare$$

10) Determine $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$;

Resolução. Façamos algumas transformações algébricas no integrando:

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{-1+1+x^2}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2} + 1.$$

Agora é mais fácil determinar o integral:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \left(-\frac{1}{1+x^2}+1\right) dx = -\int \frac{dx}{1+x^2} + \int dx = -\operatorname{arctg} x + x + C. \quad \blacksquare$$

11) Determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

Resolução. Façamos algumas transformações algébricas no integrando de modo a que fácilmente possamos fazer uso da tabela de integrais. Assim,

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arcsin x + \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C. \quad \blacksquare$$

2 Unidade II. Principais métodos de integração

2.1 Introdução

O método de integração a partir do qual dado integral conduz a um ou vários integrais de tabela, por meio de transformações do integrando e aplicação das propriedades do integral definido, chamaremos *integração directa.* Veremos como a regra de cadeia para derivação conduz ao *método de substituição.* Finalmente, abordaremos o *método de integração por partes* que se aplica geralmente em integrandos na forma de produto dum polinómio por uma função exponencial ou trigonométrica.

2.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Integrar pelo método de integração directa;

2) Integrar pelo método de substituição;

3) Integrar pelo método de integração por partes.

2.3 Método de integração directa

O método de integração a partir do qual dado integral conduz a um ou vários integrais de tabela, por meio de transformações do integrando e aplicação das propriedades do integral indefinido, chamaremos *integração directa.*

Ao transformar-se um dado integral para um integral de tabela é frequente usar as seguintes transformações do diferencial:

a) $dx = d(x+a)$, onde a é um real;

b) $dx = \frac{1}{a}d(ax)$, onde $a \neq 0$ é um real;

c) $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)$;

d) $\cos x\,dx = d(\sin x)$;

e) $\sin x\,dx = -d(\cos x)$;

f) $\frac{1}{x}\,dx = d(\ln x)$;

g) $\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x)$.

De modo geral, $f'(x)\,dx = d(f(x))$. Esta fórmula usa-se com frequência quando se determinam integrais.

Exemplo 3. *Determine o integral* $\int \frac{dx}{x+3}$.

Resolução. Temos:

$$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C.$$

Exemplo 4. *Determine o integral* $\int (3x-1)^8\,dx$.

Resolução. Temos:

$$\int (3x-1)^8\,dx = \frac{1}{3}\int (3x-1)^8\,d(3x-1) = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)^9}{9} + C.$$

Exemplo 5. *Determine o integral* $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Resolução. Temos:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

2.4 Método de integração por substituição

O método de integração por substituição consiste em introduzir uma nova variável de integração (substituição). Desse modo, o integral dado transforma-se num novo integral que é de tabela ou que se reduz a um integral de tabela. Não existem métodos gerais de escolha da substituição. A destreza de definir correctamente a substituição adquire-se com a prática.

Suponhamos que temos de determinar o integral $\int f(x)\,dx$. Façamos a substituição $x = \psi(t)$, onde $\psi(t)$ é uma função que possui derivada contínua.

Então, $dx = \psi'(t)\,dt$ e imediatamente obtemos a *fórmula de integração por substituição*:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt}$$

Esta fórmula também é conhecida como fórmula de mudança de variável no integral indefinido. Depois de se determinar o integral que se encontra no lado direito da fórmula, convém passar da nova variável t de novo para a variável x.

Exemplo 6. *Determine o integral* $\int e^{2x}\,dx$.

Resolução. Façamos $2x = t$, então $2\,dx = dt$. Consequentemente,

$$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

Exemplo 7. *Determine o integral* $\int x(x+2)^8\,dx$.

Resolução. Façamos $x+2 = t$, então $x = t-2$ e $dx = dt$. Consequentemente,

$$\int x(x+2)^8\,dx = \int (t-2)t^8\,dt = \int t^9\,dt - 2\int t^8\,dt = \frac{t^{10}}{10} - \frac{2t^9}{9} + C = \frac{(x+2)^{10}}{10} - \frac{2(x+2)^9}{9} + C.$$

Exemplo 8. *Determine o integral* $\int x\sqrt{x-3}\,dx$.

Resolução. Façamos $\sqrt{x-3} = t$, então $x = t^2+3$ e $dx = 2t\,dt$. Consequentemente,

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx = \int 2(t^2+3)t^2\,dt = 2\int (t^4+3t^2)\,dt = \frac{2t^5}{5} + 2t^3 + C = \frac{2(x-3)^{5/2}}{5} + 2(x-3)^{3/2} + C.$$

2.5 Método de integração por partes

Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções que possuem derivadas contínuas. Então $d(uv) = u\,dv + v\,du$. Integrando esta igualdade obtemos

$$\boxed{\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \text{ ou } \int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

A fórmula obtida chama-se *fórmula de integração por partes*. Eis alguns tipos de integrais para os quais é cómodo determinar pelo método de integração por partes.

1. Integrais do tipo $\int P(x)e^{kx}\,dx$, $\int P(x)\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, onde $P(x)$ é um polinómio, k é um número real. Para este tipo de integrais é conveniente considerar $u = P(x)$ e denotar por dv os restantes factores.

2. Integrais do tipo

$$\int P(x)\arcsin x\,dx, \int P(x)\arccos x\,dx, \int P(x)\ln x\,dx, \int P(x)\,\mathrm{arctg} x\,dx, \int P(x)\,\mathrm{arcctg} x\,dx,$$

onde $P(x)$ é um polinómio, k é um número real. Para este tipo de integrais é conveniente considerar $P(x)\,dx = dv$ e denotar por u os restantes factores.

3. Integrais do tipo $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, onde a e b são números reais. Para este tipo de integrais é conveniente considerar $u = e^{ax}$.

Exemplo 9. *Determine o integral* $\int (2x+1)e^x\,dx$.

Resolução. Façamos $u = 2x+1 \Longrightarrow du = 2\,dx$, $dv = e^x\,dx \Longrightarrow v = \int e^x\,dx = e^x$. Consequentemente, segundo a fórmula de integração por partes:

$$\int (2x+1)e^x\,dx = (2x+1)e^x - 2\int e^x\,dx = (2x+1)e^x - 2e^x + C.$$

Exemplo 10. *Determine o integral* $\int x\cos x\,dx$.

Resolução. Façamos $u = x \Longrightarrow du = dx$, $dv = \cos x\,dx \Longrightarrow v = \int \cos x\,dx = \sin x$. Consequentemente, segundo a fórmula de integração por partes:

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Exemplo 11. *Determine o integral* $\int \mathrm{arctg}\, x\,dx$.

Resolução. Façamos $u = \mathrm{arctg} x \Longrightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx$, $dv = dx \Longrightarrow v = x$. Por isso, segundo a fórmula de integração por partes:

$$\int \mathrm{arctg} x\,dx = x\,\mathrm{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\,\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}dx = x\,\mathrm{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

2.6 Exercícios

1) Determine $\displaystyle\int e^{3\cos x}\sin x\,dx\,;$

2) Determine $\displaystyle\int \sin(a+bx)\,dx\,;$

3) Determine $\displaystyle\int (x^2-3x+1)^{10}(2x-3)\,dx\,;$

4) Determine $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx\,;$

5) Determine $\displaystyle\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}\,dx\,;$

6) Determine $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx\,;$

7) Determine $\displaystyle\int \ln x\,dx\,;$

8) Determine $\displaystyle\int x\sin x\,dx\,;$

9) Determine $\displaystyle\int x^2e^x\,dx\,;$

10) Determine $\displaystyle\int x\ln x\,dx\,.$

2.7 Respostas

1) $-\dfrac{1}{3}e^{3\cos x}+C\,;$

2) $-\dfrac{1}{b}\cos(a+bx)+C\,;$

3) $\dfrac{1}{11}(x^2-3x+1)^{11}+C\,;$

4) $\dfrac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5}+C\,;$

5) $\dfrac{1}{8}(2\ln x+3)^4+C\,;$

6) $\ln|f(x)|+C\,;$

7) $x(\ln x-1)+C\,;$

8) $-x\cos x+\sin x+C\,;$

9) $e^x(x^2-2x+2)+C\,;$

10) $\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C\,.$

2.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 2.3, 2.4 e 2.5;

2) No capítulo 9, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, resolver no parágrafo 9.1, os exercícios 2, 10, 11, 12 e 13;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 2.6 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1051, 1052, 1061, 1192, 1195, 1197, 1211, 1215, 1221 e 1232.

2.9 Auto-avaliação

1) Diga o que entende por integração directa;

2) Diga o que entende por integração por substituição;

3) Diga o que entende por integração por partes;

4) Determine $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

5) Determine $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\,dx$;

6) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

7) Determine $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$;

8) Determine $\displaystyle\int x\sin^2 x\,dx$;

9) Determine $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

2.10 Chave de correcção

1) Veja o parágrafo 2.3 desta unidade;

2) Veja o parágrafo 2.4 desta unidade;

3) Veja o parágrafo 2.5 desta unidade;

4) Determine $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;

   Resolução. Fácilmente constata-se que $-\frac{1}{2}d(1-x^2)=xdx$, portanto, vamos fazer a substituição:

$$t=1-x^2 \Longrightarrow dt=-2xdx \Longrightarrow -\frac{1}{2}dt=xdx.$$

Assim,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \quad \blacksquare$$

5) Determine $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^4}\,dx$;

Resolução. Façamos a substituição

$$t = x^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}dt = xdx.$$

Deste modo temos:

$$\int \frac{x}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{2^2+t^2} = \frac{1}{4}\text{arctg}\,\frac{t}{2} + C = \frac{1}{4}\text{arctg}\,\frac{x^2}{2} + C. \quad \blacksquare$$

6) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;

Resolução. Temos $e^x + e^{-x} = e^{-x}(e^{2x}+1)$. Assim,

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^{-x}(1+e^{2x})} = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$$

Façamos agora a substituição $t = e^x$. Temos $dt = e^x dx$, portanto,

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arctg}\,t + C = \text{arctg}\,e^x + C. \quad \blacksquare$$

7) Determine $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$;

Resolução. Façamos $u = \arcsin x$, $v = x$. Então,

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\,d\arcsin x = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= x\arcsin x + \int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad \blacksquare$$

8) Determine $\displaystyle\int x\sin^2 x\,dx$;

Resolução. Façamos algumas transformações no integrando:

$$x\sin^2 x\,dx = x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{x}{2}dx - \frac{x}{2}\cos 2x\,dx.$$

Assim,

$$\int x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int x\,dx - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int x\cos 2x\,dx = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\int x\,d\sin 2x =$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\left(x\sin 2x - \int \sin 2x\,dx\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}\left(x\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C. \quad \blacksquare$$

9) Determine $\displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

Resolução. Seja $I \equiv \displaystyle\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$. Então

$$I = \frac{1}{\beta}\int e^{\alpha x}\,d\sin\beta x = \frac{1}{\beta}\left(e^{\alpha x}\sin\beta x - \int \sin\beta x\,de^{\alpha x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta}\left(e^{\alpha x}\sin\beta x - \alpha\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx\right) = \frac{1}{\beta}\left(e^{\alpha x}\sin\beta x - \alpha\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\,d\cos\beta x = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}\left(e^{\alpha x}\cos\beta x - \int \cos\beta x\,de^{\alpha x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2}\left(e^{\alpha x}\cos\beta x - \alpha\int e^{\alpha x}\cos\beta x\right) = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}I \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I + \frac{\alpha^2}{\beta^2}I = \frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} = \frac{\beta e^{\alpha x}\sin\beta x + \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2}.$$

Logo, obtemos $I = \dfrac{e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)}{\beta^2 + \alpha^2}$. ■

3 Unidade III. Integração de funções racionais

3.1 Introdução

Nesta unidade começaremos por abordar o processo de *decomposição duma expressão fraccionária própria em soma de fracções simples.* Vemos a *integração de expressões racionais simples.* Seguidamente, debruçamo-nos sobre a *integração de expressões racionais mais gerais.*

3.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Decompor expressões fraccionárias;
2) Integrar expressões racionais cujo denominador é uma expressão do segundo grau;
3) Integrar expressões racionais, após a sua decomposição em fracções simples.

3.3 Expressões racionais

Vejamos a função racional $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, onde $P_n(x)$ e $Q_m(x)$ são polinómios de grau n e m, respectivamente, em relação à variável x. Se $n \geq m$, então a função é imprópria e ela pode ser escrita na forma

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \tilde{P}_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

onde $\tilde{P}_{n-m}(x)$ é um polinómio de grau $n-m$ em relação à variável x, $k < m$.

Teorema 2. *Seja* $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *uma função racional,* $n < m$, *onde*

$$Q_m(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_k)^{\alpha_k} (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_rx+c_r)^{\beta_r},$$

a_i $(i = 1,\ 2, \ldots,\ k)$ *são raízes reais,* $\alpha_1+\cdots+\alpha_k+2(\beta_1+\cdots+\beta_r) = m$, $b_j^2-4c_j < 0$, α_j, $\beta_j \in \mathbb{N}$ $(j = 1, \ldots,\ r)$.

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ \frac{A_k^{(1)}}{x-a_k} + \frac{A_k^{(2)}}{(x-a_k)^2} + \cdots + \frac{A_k^{(\alpha_k)}}{(x-a_k)^{\alpha_k}} + \\
&+ \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \cdots + \frac{B_1^{(\beta_1)}x + C_1^{(\beta_1)}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}} + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\
&+ \frac{B_r^{(1)}x + C_r^{(1)}}{x^2+b_rx+c_r} + \frac{B_r^{(2)}x + C_r^{(2)}}{(x^2+b_rx+c_r)^2} + \cdots + \frac{B_r^{(\beta_r)}x + C_r^{(\beta_r)}}{(x^2+b_rx+c_r)^{\beta_r}},
\end{aligned}$$

onde $A_l^{(p)}$, $B_l^{(p)}$ *e* $C_l^{(p)}$ *são números reais.*

Exemplo 12. *Represente a fracção* $\dfrac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$ *na forma duma soma de fracções simples.*

Resolução. De acordo com o Teorema 2, temos:

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

Daqui segue que

$$3x-4 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2).$$

Resolvendo o sistema que provém desta igualdade determinamos $A=2$, $B=\dfrac{1}{3}$ e $C=-\dfrac{7}{3}$. Logo,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{3(x-2)} - \frac{7}{3(x+1)}.$$

Exemplo 13. *Represente a fracção* $\dfrac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ *na forma duma soma de fracções simples.*

Resolução. De acordo com o Teorema 2, temos:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5},$$

isto é

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = \frac{A(x^2-2x+5)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2-2x+5)}.$$

Daqui segue que

$$2x^2-3x-3 = Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx-C \Longrightarrow 2x^2-3x-3 = (A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C).$$

Comparando os coeficientes juntos a x^2, x^1 e x^0 obtemos o sistema:

$$A+B=2, \quad 2A+B-C=3, \quad C-5A=3.$$

Resolvendo este sistema determinamos $A=-1$, $B=3$ e $C=-2$. Logo,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} = -\frac{1}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$

3.4 Integração de expressões racionais simples

Vamos, neste parágrafo, determinar integrais cujos integrandos são expressões racionais simples.

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$

3. Vejamos o integral $J = \displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx$, sob a condição $b^2-4c<0$. Completando, no denominador, o quadrado perfeito, obtemos:

$$J = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4}} dx.$$

Fazendo a substituição $x + \dfrac{b}{2} = t$, então $x = t - \dfrac{b}{2}$, $dx = dt$. Denotando $c - \dfrac{b^2}{4} = a^2$, temos:

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx = \int \frac{M\left(t-\dfrac{b}{2}\right)+N}{t^2+a^2} dt =$$

$$= M\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mb}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \left(N-\frac{Mb}{2}\right)\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Voltando para a variável inicial x obtemos finalmente:

$$J = \int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c} dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+bx+c) + \frac{2N-Mb}{\sqrt{4c-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} + C.$$

Exemplo 14. *Determine o integral* $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx$.

Resolução. Temos $x^2+2x+10 = (x+1)^2+9$. Fazendo a substituição $x+1=t$, logo $x = t-1$, $dx = dt$ e

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9} dt = 3\int \frac{t}{t^2+9} dt - 2\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2}\ln(t^2+9) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3} + C.$$

Voltando para a variável inicial x obtemos finalmente:

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} + C.$$

4. Vejamos o integral $K_\alpha = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. Vamos obter a sua fórmula recorrencial.

Seja $u = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}$, $dv = dx$. Então,

$$K_\alpha = \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} - \int x\,d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^\alpha}\right) = \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{\alpha+1}} dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha\left(\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^\alpha} - a^2\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\alpha+1}}\right) = \frac{x}{(x^2+a^2)^\alpha} + 2\alpha(K_\alpha - a^2K_{\alpha+1}),$$

donde obtemos a fórmula recorrente

$$K_{\alpha+1} = \frac{x}{2\alpha a^2(x^2+a^2)^\alpha} + \frac{2\alpha-1}{2\alpha a^2}K_\alpha.$$

Exemplo 15. *Determine o integral* $K_3 = \displaystyle\int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

Resolução. Aqui $a = 1$ e $k = 3$. Sabendo que

$$K_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C,$$

então

$$K_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{2\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}K_1 + \frac{t}{2(2-1)(t^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C,$$

$$K_3 = \frac{3}{4}K_2 + \frac{t}{4(t^2+1)^2} = \frac{t}{4(t^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)}\right) + C.$$

3.5 Integração de expressões racionais

O material estudado nos parágrafos 3.3 e 3.4 permite formular uma *regra geral de integração de expressões racionais.*

1. Se a expressão fraccionária é imprópria, então ela representa-se na forma duma soma dum polinómio e uma expressão fraccionária própria;
2. Decompõe-se o denominador da expressão fraccionária própria em produto de factores e depois representa-se na forma da soma de expressões fraccionárias simples;
3. Finalmente, integramos o polinómio e a soma das expressões fraccionárias simples.

Exemplo 16. *Determine o integral* $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$.

Resolução. O integrando é uma expressão fraccionária imprópria. Efectuando a divisão de x^5+2x^3+4x+4 por $x^4+2x^3+2x^2$ obtemos:

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}.$$

Decompondo a expressão fraccionária própria em fracções simples temos:

$$\frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = \frac{4x^3+4x^2+4x+4}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Daqui, após algumas manipulações algébricas temos o sistema:

$$A + C = 4, \quad 2A + B + D = 4, \quad 2A + 2B = 4, \quad 2B = 4.$$

Resolvendo este sistema obtemos a solução $A = 0$, $B = 2$, $C = 4$ e $D = 2$. Assim,

$$\frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2} = x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2}.$$

Integramos a igualdade obtida:

$$\int \frac{x^5+2x^3+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x+2}{x^2+2x+2}\right)dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx.$$

Denotando $x + 1 = t$, então $x = t - 1$ e $dx = dt$. Deste modo,

$$\int \frac{4x+2}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{4t-4+2}{t^2+1}\,dt = 4\int \frac{t\,dt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2\ln(t^2+1) - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\ln(x^2+2x+2) - 2\operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Exemplo 17. *Determine o integral* $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx$.

Resolução. Vamos decompor o integrando em fracções simples e, para tal, começamos por factorizar o denominador. Facilmente se constata que $x=1$ anula o denominador. Aplicando a regra de Ruffini, sobre a divisão de um polinómio por um binómio do tipo $x-a$, temos $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$. Assim,

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}.$$

Temos uma igualdade de duas fracções com o mesmo denominador, significa que os numeradores também deverão ser iguais. Portanto,

$$x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2.$$

Vamos determinar os coeficientes A, B e C da seguinte maneira: colocamos o valor $x=1$ na nossa igualdade e temos

$$1=3B\Longrightarrow B=\frac{1}{3};$$

colocamos o valor $x=-2$ na nossa igualdade e temos

$$-2=9C\Longrightarrow C=-\frac{2}{9};$$

finalmente, colocando, por exemplo, $x=0$ na nossa igualdade temos

$$0=-2A+2B+C=-2A+\frac{4}{9}\Longrightarrow A=\frac{2}{9}.$$

Voltando ao integral inicial temos

$$\int\frac{x}{x^3-3x+2}\,dx=\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{9}\ln|x+2|+C=-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

3.6 Exercícios

1) Determine $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$;

2) Determine $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}$;

3) Determine $\displaystyle\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx$;

4) Determine $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{2x^2+2x+5}$;

5) Determine $\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{x^6+2x^3+3}$;

6) Determine $\displaystyle\int\frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}\,dx$;

7) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$;

8) Determine $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x-3)}\,dx$;

9) Determine $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}\,dx$;

10) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-8}$.

3.7 Respostas

1) $\dfrac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\dfrac{x+3}{4} + C$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{5}} + C$;

3) $\dfrac{3}{2}\ln(x^2-4x+8) + \dfrac{5}{2}\,\mathrm{arctg}\dfrac{x-2}{2} + C$;

4) $\dfrac{1}{4}\ln(2x^2+2x+5) - \dfrac{1}{6}\,\mathrm{arctg}\dfrac{2x+1}{3} + C$;

5) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\dfrac{x^3+1}{\sqrt{2}}$;

6) $\ln\left|\dfrac{(x-1)^3(x-4)^5}{(x-2)^7}\right| + C$;

7) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

8) $-\dfrac{2}{3}\ln|x| + \dfrac{5}{3}\ln|x-3| + C$;

9) $-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + 3\ln|x+2| + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;

10) $\dfrac{1}{12}\ln|x-2| - \dfrac{1}{24}\ln(x^2+2x+4)$.

3.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 3.3, 3.4 e 3.5;

2) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

3) Resolver os exercícios do parágrafo 3.6 desta unidade;

4) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1280, 1282, 1284, 1290, 1291, 1292, 1294, 1298, 1299 e 1300.

3.9 Auto-avaliação

1) Enuncie o teorema sobre a decomposição de expressões fraccionárias próprias;

2) Decomponha a expressão $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ em soma de fracções simples;

3) Decomponha a expressão $\dfrac{t}{(t+1)^3(t-1)}$ em soma de fracções simples;

4) Determine $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$;

5) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$;

6) Determine $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$;

7) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5-x^4+x^3-x^2+x-1}$.

3.10 Chave de correcção

1) Veja o Teorema 2, parágrafo 3.3 desta unidade;

2) Decomponha a expressão $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ em soma de fracções simples;

   Resolução. Temos:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

   Igualando os numeradores temos o sistema

$$A+B=0, \quad A-B+C=0, \quad A-C=1,$$

   cuja solução é

$$A=\frac{1}{3}, \quad B=-\frac{1}{3}, \quad C=-\frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

3) Decomponha a expressão $\dfrac{t}{(t+1)^3(t-1)}$ em soma de fracções simples;

   Resolução. Temos:

$$\frac{t}{(t-1)(t+1)^3} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2} + \frac{D}{(t+1)^3} =$$
$$= \frac{A(t+1)^3+B(t-1)(t+1)^2+C(t-1)(t+1)+D(t-1)}{(t-1)(t+1)^3}.$$

   Igualando os numeradores

$$t = A(t+1)^3+B(t-1)(t+1)^2+C(t-1)(t+1)+D(t-1)$$

e colocando $t=-1$, $t=1$ determinamos $D=\frac{1}{2}$ e $A=\frac{1}{8}$. Agora falta determinar B e C e para tal colocamos na igualdade, por exemplo, $t=0$ e $t=2$ obtendo deste modo o sistema

$$B+C=-\frac{3}{8}, \quad 3B+C=-\frac{5}{8}.$$

Resolvendo este sistema determinamos $B=-\frac{1}{8}$ e $C=-\frac{1}{4}$. ■

4) Determine $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$;

Resolução. Vamos decompôr o integrando em fracções simples, isto é,

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}=\frac{(A+B)x+(5A-2B)}{(x-2)(x+5)}.$$

Temos duas fracções com o mesmo denominador e, como elas são iguais, significa que os numeradores são iguais. Assim, temos a igualdade

$$2x+3=(A+B)x+(5A-2B).$$

Dois polinómios são iguais se os coeficientes ligados às partes literais do mesmo grau coincidem. Portanto,

$$A+B=2, \quad 5A-2B=3 \Longrightarrow A=B=1.$$

Voltando ao nosso integral podemos escrevê-lo na forma

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx=\int \frac{dx}{x-2}+\int \frac{dx}{x+5}.$$

Cada um dos integrais à direita calcula-se directamente usando a fórmula vista no resumo teórico, isto é,

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C.$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{x-2}=\ln|x-2|, \quad \int \frac{dx}{x+5}=\ln|x+5|.$$

Em conclusão temos:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx=\ln|x-2|+\ln|x+5|+C. \quad ■$$

5) Determine $\int \frac{dx}{x^3-1}$;

Resolução. Dado o integrando $\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ vamos decompor em fracções simples, isto é,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Resolvendo pelo método de coeficientes indeterminados temos: $A=1/3$, $B=-1/3$, $C=-2/3$. Assim,

$$\int \frac{dx}{x^3-1}=\int \frac{dx}{3(x-1)}-\int \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}\,dx.$$

Vamos determinar, separadamente, cada um dos integrais:

$$\int \frac{dx}{3(x-1)} = \frac{1}{3}\ln|x-1|;$$

$$\int \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

Portanto,

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \quad \blacksquare$$

6) Determine $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx$;

Resolução. O integrando não é uma fracção própria, pois o grau do numerador é igual ao grau do denominador. Podemos somar e subtrair no numerador a expressão $5x^2+4$. Ao fazermos isto procuramos expressar a nossa fracção como soma da parte inteira mais a parte própria, isto é,

$$\frac{x^4}{x^4+5x^2+4} = \frac{x^4+5x^2+4-5x^2-4}{x^4+5x^2+4} = \frac{x^4+5x^2+4}{x^4+5x^2+4} - \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}.$$

Assim,

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int dx - \int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\,dx.$$

Agora vamos determinar o último integral à direita, começando por factorizar a expressão x^4+5x^2+4 que se encontra no denominador, isto é

$$x^4+5x^2+4 = (x^2+4)(x^2+1).$$

A fracção que constitui o integrando vamos escrevê-la na forma de soma de fracções simples:

$$\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4} = \frac{5x^2+4}{(x^2+4)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{x^2+1} =$$

$$= \frac{(A+B)x^3+(B+D)x^2+(A+4C)x+B+4D}{(x^2+4)(x^2+1)}.$$

Temos duas fracções com o mesmo denominador e como elas são iguais significa que os numeradores são iguais. Assim, temos a igualdade

$$5x^2+4 = (A+B)x^3+(B+D)x^2+(A+4C)x+B+4D.$$

Dois polinómios são iguais se os coeficientes ligados às partes literais do mesmo grau coincidirem. Portanto,

$$A+B=0, \quad B+D=5, \quad A+4C=0, \quad B+4D=4 \Longrightarrow A=C=0, \quad B=\frac{16}{3}, \quad D=-\frac{1}{3}.$$

Assim,

$$\int \frac{5x^2+4}{(x^2+4)(x^2+1)}\,dx = \frac{16}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x.$$

Em conclusão temos:

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int dx - \int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\,dx = x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + C. \quad \blacksquare$$

7) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$.

Resolução. Pegamos o integrando e factorizamos o denominador, isto é,

$$x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = x^4(x-1) + x^2(x-1) + (x-1) =$$

$$= (x-1)(x^4 + x^2 + 1) = (x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Assim,

$$\frac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 - x + 1} = \frac{P_4(x)}{(x-1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)},$$

onde

$$P_4(x) = (A + B + D)x^4 - (2B - C - E)x^3 + (A + 2B - 2C)x^2 - (B - 2C + D)x + A - C - E.$$

Igualando os numeradores obteremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B + D = 0, \\ -2B + C + E = 0, \\ A + 2B - 2C = 0, \\ -B + 2C - D = 0, \\ A - C - E = 1. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema encontramos

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = -\frac{1}{6}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{2}.$$

Deste modo,

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + 1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{[x - (1/2)]^2 + (\sqrt{3}/2)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 + x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3} + C. \quad \blacksquare$$

4 Unidade IV. Integração de expressões trigonométricas

4.1 Introdução

Nesta unidade iremos considerar alguns casos de determinação do integral de funções trigonométricas. A determinação de integrais desse tipo reduz-se à determinação de integrais de funções racionais se fizermos a *substituição universal.* Este método de substituição é, habitualmente, cansativo, mas conduz sempre ao resultado. Do ponto de vista prático aplicam-se outras substituições mais simples, dependendo das propriedades do integrando.

4.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Determinar integrais de expressões trigonométricas, usando a substituição universal;

2) Determinar integrais de expressões trigonométricas consoante a sua paridade;

3) Aplicar transformações trigonométricas na determinação de integrais de expresses trigonométricas.

4.3 Substituição trigonométrica universal

Consideremos alguns casos de determinação do integral de funções trigonométricas. Por $R(\sin x, \cos x)$, onde R é uma função racional, denotamos uma função com variáveis $\sin x$ e $\cos x$, na qual se cumprem operações algébricas (soma, subtração, multiplicação e divisão). A determinação de integrais do tipo $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ reduz-se à determinação de integrais de funções racionais se fizermos a *substituição universal* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$.

Realmente,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Assim,

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int \frac{2}{1+t^2} R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) dt = \int R_1(t)\,dt,$$

onde R_1 é uma função racional da variável t.

Exemplo 18. *Determine o integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$.

Resolução. Aplicamos a substituição universal $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. Então, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Consequentemente,

$$\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x} = \int \frac{dt}{t^2+t+2} = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{7}} + C.$$

Do ponto de vista prático aplicam-se outras substituições mais simples, dependendo das propriedades do integrando. Em particular, são cómodas as seguintes regras:

1) Se a função $R(\sin x, \cos x)$ é *ímpar* em relação a $\sin x$, isto é $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, então a substituição $\cos x = t$ racionaliza o integral;

2) Se a função $R(\sin x, \cos x)$ é *ímpar* em relação a $\cos x$, isto é $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, -\cos x)$, então faz-se a substituição $\sin x = t$;

3) Se a função $R(\sin x, \cos x)$ é *par* em relação a $\sin x$ e $\cos x$, isto é $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, então a substituição $\operatorname{tg} x = t$ racionaliza o integral. A mesma substituição aplica-se se o integral tem a forma $\int R(\operatorname{tg} x)\, dx$.

Exemplo 19. *Determine o integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Resolução. Já que $R(-\sin x, -\cos x) = \dfrac{dx}{1+\sin^2 x} = R(\sin x, \cos x)$, então a substituição a fazer é $\operatorname{tg} x = t$. Daqui,

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Logo,

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dt}{2t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2} t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{2} \operatorname{tg} x + C.$$

4.4 Integrais do tipo $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

Para a determinação de integrais deste tipo usam-se as seguintes substituições:

1) Substituição $\sin x = t$, se n é um inteiro positivo ímpar;

2) Substituição $\cos x = t$, se m é um inteiro positivo ímpar;

3) Fórmulas de redução do grau:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

se m e n são inteiros pares não negativos;

4) Substituição $\operatorname{tg} x = t$, se $m+n$ é um inteiro negativo par.

Exemplo 20. *Determine o integral* $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx$.

Resolução. Vamos fazer a substituição $\sin x = t$. Então, $x = \arcsin t$, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$. Assim,

$$\int \sin^4 x \cos^5 x\, dx = \int t^4 (\sqrt{1-t^2})^5 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int (t^4 - 2t^6 + t^8)\, dt = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$$

Exemplo 21. *Determine o integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$.

Resolução. Aqui, $m+n=-4$, logo fazemos a substituição $\operatorname{tg} x = t$. Então,

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Colocando no integral inicial temos:

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{1+t^2}{t^3}\, dt = \int t^{-3}\, dt + \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

4.5 Uso de transformações trigonométricas

Os integrais do tipo $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \sin bx\, dx$ e $\int \cos ax \cos bx\, dx$ determinam-se com ajuda das fórmulas trigonométricas: $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$, $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$ e $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

Exemplo 22. *Determine o integral* $\int \sin 8x \cos 2x\, dx$.

Resolução. Temos:

$$\int \sin 8x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x + \sin 6x)\, dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x - \frac{1}{6}\cos 6x\right) + C.$$

4.6 Exercícios

1) Determine $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$;

2) Determine $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^2 x + 4\sin x\cos x}$;

3) Determine $\int \sin^3 x\, dx$;

4) Determine $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}\, dx$;

5) Determine $\int \sin 3x \sin x\, dx$;

6) Determine $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\, dx$;

7) Determine $\int \sin 2x \cos 5x\, dx$;

8) Determine $\int \cos^4 x\, dx$;

9) Determine $\int \operatorname{tg}^4 x\, dx$;

10) Determine $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx$.

4.7 Respostas

1) $\frac{1}{5}\ln|5\,\text{tg}\,(x/2)+3|+C$;

2) $-\frac{x}{17}+\frac{1}{4}\ln|\sin x|-\frac{1}{68}\ln|\sin x+4\cos x|+C$;

3) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$;

4) $\ln|\sin x|-\sin^2 x+\frac{1}{4}\sin^4 x+C$;

5) $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$;

6) $\frac{3}{5}\sin\frac{5}{6}x+3\sin\frac{x}{6}$;

7) $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C$;

8) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$;

9) $\frac{1}{3}\text{tg}^{\,3}\frac{x}{2}-2\text{tg}\,\frac{x}{2}+x+C$;

10) $-\frac{1}{3}\,\text{ctg}^{\,3}x+C$.

4.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 4.3, 4.4 e 4.5;

2) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

3) Resolver os exercícios do parágrafo 4.6 desta unidade;

4) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1338, 1340, 1342, 1365, 1366, 1367, 1372, 1373, 1374 e 1390.

4.9 Auto-avaliação

1) Diga o que entende por substituição trigonométrica universal;

2) Indique outros tipos de substituição trigonométrica;

3) Determine $\int \cos^5 x\,dx$;

4) Determine $\int \sin 5x\cos x\,dx$;

5) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$;

6) Determine $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$;

7) Determine $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$;

8) Determine $\displaystyle\int \cos^6 x\,dx$.

4.10 Chave de correcção

1) Veja o parágrafo 4.3 desta unidade;

2) Veja os parágrafos 4.3 e 4.4 desta unidade;

3) Determine $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$;

Resolução. Seja $R(\sin x, \cos x) = \cos^5 x$. Vemos, que $R(\sin x, -\cos x) = (-\cos x)^5 = -\cos^5 x = -R(\sin x, \cos x)$, portanto faremos a substituição $t = \sin x$. Assim,

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos^4 x\,d\sin x = \int (1-\sin^2 x)^2\,d\sin x = \int (1-t^2)^2\,dt = t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C,$$

onde $t = \sin x$. ■

4) Determine $\displaystyle\int \sin 5x\cos x\,dx$;

Resolução. Vamos transformar o integrando na soma de senos:

$$\sin 5x\cos x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 6x).$$

Então,

$$\int \sin 5x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 6x)\,dx = -\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + C. \quad \blacksquare$$

5) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$;

Resolução. Vamos aplicar a substituição universal $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Então, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Assim,

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dt}{t} = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x+\phi}{2}\right| + C,$$

onde $\operatorname{tg}\phi = \dfrac{a}{b}$. ■

6) Determine $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx$;

Resolução. Considerando $\sin x = t$, logo $\cos x \, dx = dt$ e obtemos:

$$\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx = \int t^4 (1 - t^2)^2 \, dt =$$

$$= \frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C. \quad \blacksquare$$

7) Determine $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$;

Resolução. Vemos que $\sin^2 x \cos^2 x = (\sin x \cos x)^2 = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x$. Assim, $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$. Colocando no integral esta transformação do integrando temos:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad \blacksquare$$

8) Determine $\int \cos^6 x \, dx$.

Resolução. Fazendo algumas manipulações algébricas obtemos:

$$\int \cos^6 x \, dx = \int (\cos^2 x)^3 \, dx = \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \quad \blacksquare$$

5 Unidade V. Integração de expressões irracionais

5.1 Introdução

Nesta unidade iremos abordar integrais cujos integrandos contêm *irracionalidades quadráticas.*

5.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Integrar expressões irracionais;

2) Usar substituições fraccionário-lineares;

3) Aplicar as substituições de Euler.

5.3 Irracionalidades quadráticas

Consideremos alguns tipos de integrais que contêm funções irracionais. Integrais do tipo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \quad \int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

chamaremos integrais indefinidos com irracionalidades quadráticas. A sua determinação faz-se do seguinte modo: completamos o quadrado perfeito no radicando

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right),$$

e fazemos a substituição $x+\dfrac{b}{2a}=t$. Logo, os dois primeiros integrais reduzem-se a integrais de tabela e o terceiro integral determina-se como a soma de dois integrais de tabela.

Exemplo 23. *Determine o integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

Resolução. Tendo em conta que $4x^2+2x+1 = 4\left(\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{3}{16}\right)$, introduzimos a substituição $x+\dfrac{1}{4}=t$, logo $x=t-\dfrac{1}{4}$, $dx=dt$. Então,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+1}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3/16}} = \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2+\frac{3}{16}}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}\right|+C.$$

Exemplo 24. *Determine o integral* $\displaystyle\int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}\,dx$.

Resolução. Uma vez que $6-2x-x^2=-(x^2+2x-6)=-((x+1)^2-7)=7-(x+1)^2$, então a substituição tem a forma $x+1=t$, $x=t-1$, $dx=dt$. Logo,

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{6-2x-x^2}}\,dx=\int \frac{t-1+4}{\sqrt{7-t^2}}\,dt=\int \frac{t}{\sqrt{7-t^2}}\,dt+3\frac{dt}{\sqrt{7-t^2}}=$$
$$=-\sqrt{7-t^2}+3\text{arcsin}\frac{t}{\sqrt{7}}+C=3\text{arcsin}\frac{x+1}{\sqrt{7}}-\sqrt{6-2x-x^2}+C.$$

5.4 Substituição fraccionário-linear

Integral do tipo $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right)dx$, onde a, b, c e d são números reais, α, β, δ e γ são números naturais, fazendo a substituição $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ reduz-se ao integral de função racional, k é o mínimo múltiplo comum de β e γ.

Exemplo 25. *Determine o integral* $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$.

Resolução. O mínimo múltiplo comum de 2 e 3 é 6, logo a substituição é $x+2=t^6$, $x=t^6-2$, $dx=6t^5\,dt$, $t=\sqrt[6]{x+2}$. Logo,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}=\int \frac{6t^5\,dt}{t^4-t^3}=6\int \frac{t^2\,dt}{t-1}=6\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}\,dt=6\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$
$$=3t^2+6t+6\ln|t-1|+C=3\sqrt[3]{x+2}+6\sqrt[6]{x+2}+6\ln|\sqrt[6]{x+2}-1|+C.$$

5.5 Integrais do tipo $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

O integral do tipo

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,\quad a\neq 0,$$

resolve-se com ajuda das substituições de Euler, que racionalizam os integrandos. Se $b^2-4ac<0$, $a>0$, então aplicamos a primeira substituição de Euler:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}.$$

Se $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, onde x_1 e x_2 são valores reais, então aplicamos a segunda substituição de Euler:

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}.$$

Exemplo 26. *Determine o integral* $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$*;*

Resolução. A expressão $x^2+x+1>0$, portanto vamos aplicar a primeira substituição de Euler:

$$t=\sqrt{x^2+x+1}+x\Longrightarrow x=\frac{t^2-1}{1+2t}\Longrightarrow dx=\frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}dt.$$

Deste modo,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,dt.$$

Decompondo o último integrando em fracções simples temos:

$$\frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2} = \frac{A(1+2t)^2 + Bt(1+2t) + Ct}{t(1+2t)^2}.$$

Para determinarmos os coeficientes A, B e C resolvemos o sistema

$$2B + 4A = 2, \quad 4A + B + C = 2, \quad A = 2$$

e encontramos $A = 2$, $B = C = -3$. Em conclusão

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t} - 3\int \frac{dt}{1+2t} - 3\int \frac{dt}{(1+2t)^2} = \frac{3}{2(1+2t)} + \frac{1}{2}\ln\frac{t^4}{|1+2t|^3} + C,$$

onde $t = x + \sqrt{x^2+x+1}$.

Exemplo 27. *Determine o integral* $\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$.

Resolução. Temos $x^2+3x+2 = (x+1)(x+2)$, por isso aplicamos a segunda substituição de Euler:

$$t = \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1} \Longrightarrow x = \frac{2-t^2}{t^2-1} \Longrightarrow dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt.$$

Assim,

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx = \int \frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}\,dt.$$

Pegamos no último integrando e vamos decompô-lo em fracções simples:

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1} + \frac{D}{(t+1)^2} + \frac{E}{(t+1)^3}.$$

Determinamos os valores de A, B, C, D e E: $A = -\dfrac{16}{27}$, $B = \dfrac{3}{4}$, $C = -\dfrac{17}{108}$, $D = \dfrac{5}{18}$ e $E = \dfrac{1}{3}$. Em conclusão,

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx = -\frac{16}{27}\ln|t-3| + \frac{3}{4}\ln|t-1| - \frac{17}{108}\ln|t+1| - \frac{5}{18(t+1)} - \frac{1}{6(t+1)^2} + C.$$

5.6 Exercícios

1) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$;

2) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$;

3) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-1+4x-3x^2}}\,dx$;

4) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$;

5) Determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$;

6) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}}$;

7) Determine $\displaystyle\int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}\,dx$;

8) Determine $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$;

9) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}$;

10) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$.

5.7 Respostas

1) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln|\sqrt[6]{2x+1}-1|+C$;

2) $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|+C$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C$;

4) $-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln|\sqrt[4]{1-2x}-1|+C$;

5) $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[6]{x}+C$;

6) $\ln\left|x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-1}\right|+C$;

7) $-5\sqrt{-x^2+4x+5}+13\arcsin\dfrac{x-2}{3}+C$;

8) $3\sqrt{x^2+x+2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right|+C$;

9) $-\arcsin\dfrac{x+1}{x\sqrt{3}}+C$;

10) $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}+C$.

5.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 5.3, 5.4 e 5.5.
2) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados.
3) Resolver os exercícios do parágrafo 5.6 desta unidade.
4) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1317, 1318, 1319, 1320, 1321, 1322, 1323, 1324, 1325 e 1326.

5.9 Auto-avaliação

1) Explique em que consiste a substituição fraccionário linear;
2) Explique em que consiste a primeira substituição de Euler;
3) Explique em que consiste a segunda substituição de Euler;
4) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;
5) Determine $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$;
6) Determine $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$;
7) Determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$;
8) Indique a substituição mais adequada para a determinação do integral $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}\,dx$;
9) Indique a substituição mais adequada para a determinação do integral $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(1-x)^2}$.

5.10 Chave de correcção

1) Veja o parágrafo 5.3 desta unidade;
2) Veja o parágrafo 5.3 desta unidade;
3) Veja o parágrafo 5.3 desta unidade;
4) Determine $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

   Resolução. Façamos a substituição $t^2 = x \Longrightarrow 2t\,dt = dx$. Assim,

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int \frac{t}{1+t}\,dt = 2\int \frac{1+t-1}{1+t}\,dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C. \quad \blacksquare$$

5) Determine $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$;

Resolução. Façamos a substituição

$$t^6 = x+1 \Longrightarrow 6t^5 dt = dx.$$

Assim,

$$\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = 6\int \frac{t^5-t^8}{1+t^2}\,dt.$$

O integrando no último integral é uma fracção imprópria. Vamos reescrevê-la como a soma da parte inteira mais a parte própria:

$$\frac{t^5-t^8}{1+t^2} = -t^6+t^4+t^3-t^2-t+1+\frac{t-1}{t^2+1}.$$

Deste modo,

$$6\int \frac{t^5-t^8}{1+t^2}\,dt = 6\left(-\frac{t^7}{7}+\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}-\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right)+3\int\frac{d(1+t^2)}{1+t^2}-6\int\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= -\frac{6t^7}{7}+\frac{6t^5}{5}+\frac{3t^4}{2}-2t^3-3t^2+6t+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arctg} t + C,$$

onde $t^6 = x+1$. ■

6) Determine $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$;

Resolução. Façamos a substituição

$$t^3 = \frac{x+1}{x-1} \Longrightarrow dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt.$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{(x+1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = -3\int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Neste último integral pegamos o integrando e vamos decompô-lo em fracções mais simples:

$$\frac{1}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+1} = \frac{(A+B)t^2+(A-B+C)t+A-C}{(t-1)(t^2+t+1)}.$$

Igualando os numeradores temos o sistema

$$A+B=0, \quad A-B+C=0, \quad A-C=1,$$

cuja solução é

$$A=\frac{1}{3}, \quad B=-\frac{1}{3}, \quad C=-\frac{2}{3}.$$

Deste modo temos:

$$\int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{3}\int\frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt = \frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2t+1)}{3}.$$

Em conclusão,

$$\int \frac{1}{(x+1)}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx = -3\int\frac{dt}{(t-1)(t^2+t+1)} = \ln|t-1|-\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(2t+1)}{3}+C. \quad ■$$

7) Determine $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx$;

Resolução. Pegamos o integrando e evidenciamos a expressão $\sqrt{x-1}$, que se encontra no numerador e denominador, após o qual introduzimos a variável $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$:

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{t-1}{t+1}.$$

Já que $t=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ então, $x=\dfrac{t^2+1}{t^2-1}$ e, portanto, $dx=-\dfrac{4tdt}{(t^2-1)^2}$. Assim,

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx=-4\int \frac{t}{(t+1)^3(t-1)}\,dt.$$

Vamos decompor a expressão $\dfrac{t}{(t+1)^3(t-1)}$ em fracções simples:

$$\frac{t}{(t-1)(t+1)^3}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^2}+\frac{D}{(t+1)^3}=$$

$$=\frac{A(t+1)^3+B(t-1)(t+1)^2+C(t-1)(t+1)+D(t-1)}{(t-1)(t+1)^3}.$$

Igualando os numeradores

$$t=A(t+1)^3+B(t-1)(t+1)^2+C(t-1)(t+1)+D(t-1)$$

e colocando $t=-1$, $t=1$ determinamos $D=\dfrac{1}{2}$ e $A=\dfrac{1}{8}$. Agora falta determinar B e C e para tal colocamos na igualdade, por exemplo, $t=0$ e $t=2$ obtendo deste modo o sistema

$$B+C=-\frac{3}{8},\quad 3B+C=-\frac{5}{8}.$$

Resolvendo este sistema determinamos $B=-\dfrac{1}{8}$ e $C=-\dfrac{1}{4}$. Em conclusão

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx=-4\int \frac{t}{(t+1)^3(t-1)}\,dt=$$

$$=-4\left[\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t-1}-\frac{1}{8}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^3}\right]=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{t+1}+\frac{1}{(t+1)^2}+C=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x\sqrt{x^2-1}}{2}+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.\quad\blacksquare$$

8) Indique a substituição mais adequada para a determinação do integral $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-x}\,dx$;

Resolução. A substituição adequada é $x=t^2$. $\blacksquare$

9) Indique a substituição mais adequada para a determinação do integral $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(1-x)^2}$.

Resolução. A substituição adequada é $\dfrac{x+1}{x-1} = t^3$. ■

6 Unidade VI. Integral definido

6.1 Introdução

Nesta unidade iremos abordar o *integral definido como limite da soma integral.* De seguida iremos demonstrar a *fórmula de Newton-Leibniz* e estudaremos as principais *propriedades do integral definido.* Note-se que a continuidade do integrando é condição suficiente para sua integrabilidade. Contudo, o integral definido pode existir também para certas funções descontínuas, em particular se o integrando é limitado no segmento onde possui um número finito de pontos de descontinuidade.

6.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir integral definido como limite da soma integral;

2) Aplicar a fórmula de Newton-Leibniz no cálculo directo de integrais definidos;

3) Identificar as principais propriedades do integral definido.

6.3 Integral definido como limite da soma integral

Seja $f(x)$ uma função definida no segmento $[a,b]$, $a<b$. Façamos o seguinte:

1) Com a ajuda dos pontos $x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_n=b$ $(x_0<x_1<\cdots<x_n)$ vamos partir o segmento $[a,b]$ em n segmentos parciais $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1},x_n]$;

2) Em cada segmento parcial $[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ escolhemos um ponto qualquer $\zeta_k\in[x_{k-1},x_k]$ e calculamos o valor da função nesse ponto, isto é $f(\zeta_k)$;

3) Multiplicamos $f(\zeta_k)$ por $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, isto é $f(\zeta_k)\Delta x_k$;

4) Compomos a soma σ de todos os produtos, isto é

$$\sigma=f(\zeta_1)\Delta x_1+f(\zeta_2)\Delta x_2+\cdots+f(\zeta_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta x_k; \tag{1}$$

5) Calculamos o limite de (1), quando $d=\max\Delta x_k\to 0$ $(k=1,2,\ldots,n)$.

Definição 3. *A soma (1) chamaremos* **soma integral** *da função* $f(x)$ *no segmento* $[a,b]$.

Definição 4. *Se (1) possui limite* I *quando* $d=\max\Delta x_k\to 0$*, e que não depende do modo como partimos o segmento* $[a,b]$ *e nem da escolha de* ζ_k*, diremos que* I *é o integral definido da função* $f(x)$ *no segmento* $[a,b]$ *e denota-se* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Assim,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k} \tag{2}$$

Os números a e b chamaremos *limite de integração inferior* e *limite de integração superior*, respectivamente.

Exemplo 28. *Com base na definição de integral definido como o limite da soma integral, calcule* $\int_0^1 x\,dx$.

Resolução. Dividindo o comprimento do segmento $[0,1]$ em n partes iguais temos $h = \frac{1}{n}$. Deste modo, a partição τ de $[0,1]$ será composta por pontos do tipo $x_k = kh$ $(k = 0,\ 1, \ldots,\ n)$. Vamos escolher

$$\zeta_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = \left(k - \frac{1}{2}\right)h, \quad 1 \le k \le n.$$

Então,

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n}\left(k - \frac{1}{2}\right)h^2 = h^2 \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty}\sigma = \int\limits_0^1 x\,dx.$$

Teorema 3. *(de Cauchy) Se a função* $y = f(x)$ *é contínua no segmento* $[a,b]$, *então o integral definido* $\int_a^b f(x)\,dx$ *existe.*

Este é o teorema de existência do integral definido. Notemos que a continuidade do integrando é condição suficiente para sua integrabilidade. Contudo, o integral definido pode existir também para certas funções descontínuas, em particular se o integrando é limitado no segmento onde possui um número finito de pontos de descontinuidade.

Vejamos algumas propriedades do integral definido que advêm imediatamente da sua definição (2).

1. O integral definido não depende da notação da variável de integração:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz.$$

2. Se os limites de integração superior e inferior coincidem, então o integral é igual a zero:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3. Para qualquer número real c temos: $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a).$

6.4 Fórmula de Newton-Leibniz

Suponhamos que $y = f(x)$ é integrável no segmento $[a,b]$.

Teorema 4. *Se a função $y = f(x)$ é contínua segmento $[a, b]$ e $F(x)$ é sua primitiva em $[a, b]$, então tem lugar a fórmula*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

Demonstração. Partimos o segmento $[a, b]$ segundo os pontos $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ $(x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$ em segmentos parciais $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{n-1}, x_n]$.

Seja a identidade

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = (F(x_n) - F(x_{n-1})) + (F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})) + \cdots + (F(x_1) - F(x_0)).$$

Transformando cada diferença $F(x_k) - F(x_{k-1})$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ segundo a fórmula de Lagrange $f(b) - f(a) = f'(\zeta)(b - a)$ obtemos

$$F(b) - F(a) = F'(\zeta_n)(x_n - x_{n-1}) + \cdots + F'(\zeta_2)(x_2 - x_1) + F'(\zeta_1)(x_1 - x_0) = \sum_{k=1}^{n} F'(\zeta_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k,$$

isto é

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k, \tag{4}$$

onde ζ_k é um certo ponto do intervalo (x_{k-1}, x_k). Como a função $y = f(x)$ é contínua em $[a, b]$, então ela é integrável em $[a, b]$. Por isso existe o limite da soma integral, que é igual ao integral definido de $f(x)$ em $[a, b]$.

Fazendo em (4) a transição do limite quando $d = \max \Delta x_k \to 0$, obtemos

$$F(b) - F(a) = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k,$$

isto é

$$\boxed{F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx} \quad \blacksquare$$

A igualdade (3) chama-se *fórmula de Newton-Leibniz*. Se introduzirmos a notação $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$, então a fórmula de Newton-Leibniz podemos reescrever na seguinte forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)|_a^b .$$

A fórmula de Newton-Leibniz fornece uma maneira cómoda para o cálculo directo do integral definido. Para calcular o integral definido de uma função contínua $f(x)$ no segmento $[a, b]$ precisamos determinar a sua primitiva $F(x)$ e calcular a diferença $F(b) - F(a)$.

Exemplo 29. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,dx$.

Resolução. A primitiva de $\sin x$ é $-\cos x$. Aplicando a fórmula de Newton-Leibniz temos

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x|_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = 2.$$

Exemplo 30. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Resolução. A primitiva de $\dfrac{1}{1+x^2}$ é $\operatorname{arctg} x$. Aplicando a fórmula de Newton-Leibniz temos

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

6.5 Propriedades principais do integral definido

Vejamos as principais propriedades do integral definido, sob a suposição de que o integrando é integrável no segmento $[a,b]$. Na dedução das propriedades vamos usar a definição de integral definido e a fórmula de Newton-Leibniz.

Proposição 1. *(homogeneidade) Se* c *é uma constante e a função* $f(x)$ *é integrável em* $[a,b]$, *então*

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx, \tag{5}$$

isto é a constante c *podemos retirar para fora do sinal do integral definido.*

Demonstração. Compomos a soma integral da função $cf(x)$. Temos:

$$\sum_{k=1}^n cf(\zeta_k)\Delta x_k = c\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta x_k.$$

Então,

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^n cf(\zeta_k)\Delta x_k = \lim_{d\to 0} c\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta x_k = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Daqui advém que a função $cf(x)$ é integrável em $[a,b]$ e é justa a fórmula (5). ■

Proposição 2. *(linearidade) Se as funções* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são integráveis em* $[a,b]$, *então a sua soma* $f(x)+g(x)$ *é integrável em* $[a,b]$ *e*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \tag{6}$$

isto é, o integral da soma é igual a soma de integrais.

Demonstração. Por definição,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^n (f(\zeta_k)+g(\zeta_k))\Delta x_k =$$

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta x_k + \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^n g(\zeta_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \quad ■$$

Proposição 3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Demonstração. Realmente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Proposição 4. *(aditividade) Se a função $f(x)$ é integrável no segmento $[a,b]$ e $a < c < b$, então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Demonstração. Ao partirmos o segmento $[a,b]$, vamos incluir o ponto c como sendo um dos pontos que compõem a partição. Se $c = x_m$, então a soma integral podemos partir em duas somas:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\zeta_k)\Delta x_k + \sum_{k=m}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k.$$

Cada uma das somas é a soma integral nos segmentos $[a,b]$, $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente. Fazendo o limite em ambos os lados, quando $d \to 0$, obtemos a igualdade (7). $\blacksquare$

Proposição 5. *(teorema do valor médio) Se a função $f(x)$ é contínua no segmento $[a,b]$, então existe um ponto $c \in [a,b]$ tal que*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)}$$

Demonstração. Segundo a fórmula de Newton-Leibniz, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

onde $F'(x) = f(x)$. Aplicando o teorema de Lagrange, estudado no módulo Análise Matemática I, temos

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a). \quad \blacksquare$$

Definição 5. *O número real* $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *chama-se* **valor médio** *da função $f(x)$ no segmento $[a,b]$.*

A propriedade sobre o teorema de valor médio, no caso quando $f(x) \geq 0$ tem o seguinte sentido geométrico: o valor do integral definido é igual, para certo $c \in [a,b]$, a superfície do rectângulo com altura $f(c)$ e base $b-a$.

Proposição 6. *Se a função $f(x)$ conserva o sinal no segmento $[a,b]$, então o integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *possui o mesmo sinal que $f(x)$. Assim, se $f(x) \geq 0$ no segmento $[a,b]$, então o integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Demonstração. Pelo teorema do valor médio

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a),$$

onde $c \in [a,b]$. Mas como $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$f(c) \geq 0, \quad b - a > 0.$$

Assim, $f(c)(b-a) \geq 0$, isto é $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. $\blacksquare$

Proposição 7. *Suponhamos que $f(x) \leq g(x)$ no segmento $[a,b]$. Então,*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Demonstração. Como $g(x) - f(x) \geq 0$, $a < b$, então de acordo com a Proposição 6, temos:

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geq 0.$$

Ou, segundo a Proposição 2,

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b f(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Proposição 8. *Se m e M são o menor e maior valores de $f(x)$ no segmento $[a,b]$, então*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a). \tag{8}$$

Demonstração. Como para qualquer $x \in [a,b]$ temos a dupla desigualdade $m \leq f(x) \leq M$, então de acordo com a Proposição 7 temos:

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \Longleftrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a). \quad \blacksquare$$

Proposição 9. *O módulo do integral é menor ou igual ao integral do módulo, isto é*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Demonstração. Aplicando a Proposição 7 para a dupla desigualdade $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, obtemos

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \Longleftrightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \quad \blacksquare$$

6.6 Exercícios

1) Calcule $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ como limite da soma integral;

   Nota: $1 + 2^2 + 3^2 + \cdot + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) Com base na definição de integral definido como limite da soma integral, calcule $\displaystyle\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx$;

3) Sabendo que $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$;

4) Calcule $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \sin x \, dx$ usando a fórmula de Newton-Leibniz;

5) Calcule $\displaystyle\int_0^1 e^x \, dx$ usando a fórmula de Newton-Leibniz;

6) Calcule $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$ usando a fórmula de Newton-Leibniz;

7) Utilizando o teorema de valor médio, avalie o integral $I = \displaystyle\int\limits_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} \, dx$;

8) Avalie o integral $I = \displaystyle\int_0^1 x(1-x)^2 \, dx$;

9) Avalie o integral $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}} \, dx$;

10) Demonstre a igualdade $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{x^n}{1+x} \, dx = 0.$

6.7 Respostas

1) $\dfrac{1}{3}$;

2) 3;

3) $\displaystyle\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x) \, dx$

4) 2;

5) $e - 1$;

6) $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

7) $e^{-100} \ln 2 \leq I \leq \ln 2$;

8) $0 < I \leq \dfrac{4}{27}$;

9) $|I| < 0.1$.

6.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 6.3, 6.4 e 6.5;

2) No capítulo 9, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas 7 a 18; resolver, no mesmo capítulo 9, parágrafo 9.2, os exercícios 5 e 8; no parágrafo 9.3, resolver os exercícios 1, 2, 3, 7 e 8;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 6.6 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1501, 1502, 1514, 1515, 1516, 1521, 1528, 1536, 1538 e 1545.

6.9 Auto-avaliação

1) Dê a definição de integral definido como limite da soma integral;

2) Demonstre a fórmula de Newton-Leibniz;

3) Formule as propriedades do integral definido;

4) Calcule a soma integral para a função $f(x) = 1 + x$ no segmento $[-1, 4]$, dividindo-o em n partes iguais e escolhendo
$$\zeta_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \quad 1 \leq k \leq n;$$

5) Utilizando a fórmula de Newton-Leibniz, calcule $\int\limits_0^1 x^3\,dx$;

6) Utilizando a fórmula de Newton-Leibniz, calcule $\int\limits_0^2 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{se} \quad 1 < x \leq 2; \end{cases}$

7) Calcule o valor médio para $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2]$;

8) Utilizando o teorema de valor médio, avalie o integral $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5\cos x}$.

6.10 Chave de correcção

1) Veja a Definição 4 no parágrafo 6.3;

2) Veja a demonstração do Teorema 3 no parágrafo 6.4;

3) Veja as propriedades do integral definido no parágrafo 6.5;

4) Calcule a soma integral para a função $f(x) = 1 + x$ no segmento $[-1, 4]$, dividindo-o em n partes iguais e escolhendo
$$\zeta_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}, \quad 1 \le k \le n.$$

Resolução. Dividindo $[-1, 4]$ em n partes iguais obtem-se
$$-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 4,$$
onde $x_k = -1 + kh$, $h = \dfrac{5}{n}$. Já que
$$\zeta_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2},$$
então $\zeta_k = -1 + \left(k - \dfrac{1}{2}\right) h$. Compondo a soma integral tem-se
$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{1}{2}\right) h^2 =$$
$$= h^2 \sum_{k=1}^{n} \left(k - \frac{1}{2}\right) = h^2 \left(-\frac{1}{2}n + \sum_{k=1}^{n} k\right) = h^2 \left(-\frac{1}{2}n + \frac{(n+1)n}{2}\right) = h^2 \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{25n^2}{2n^2} = 12.5. \quad \blacksquare$$

5) Utilizando a fórmula de Newton-Leibniz, calcule $\displaystyle\int_0^1 x^3\, dx$.

Resolução. A primitiva de $f(x) = x^3$ é $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$. Assim,
$$\int_0^1 x^3\, dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

6) Utilizando a fórmula de Newton-Leibniz, calcule $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ onde $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & \text{se} \quad 1 < x \le 2. \end{cases}$

Resolução. Como podemos ver, a função $f(x)$ tem comportamento quadrático em $[0, 1]$ e comportamento linear em $(1, 2]$. No cálculo do integral usaremos a propriedade de aditividade que, para este caso, é
$$\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 (2 - x)\, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 = \frac{5}{6}. \quad \blacksquare$$

7) Calcule o valor médio para $f(x) = x^2, \quad x \in [0, 2]$.

Resolução. Por definição temos:
$$\mu = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{4}{3}. \quad \blacksquare$$

8) Utilizando o teorema de valor médio, avalie o integral $I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + 0.5\cos x}$.

Resolução. Vamos avaliar o integrando $f(x) = \frac{1}{1 + 0.5\cos x}$. Temos

$$-1 \leq \cos x \leq 1,\ \forall\ x\ \in\ [0, 2\pi];$$

multiplicando esta dupla desigualdade por 0.5 e somando 1

$$-0.5 + 1 \leq 1 + 0.5\cos x \leq 0.5 + 1,$$

isto é

$$\frac{2}{3} \leq \frac{1}{1 + 0.5\cos x} \leq 2.$$

Integrando a dupla desigualdade de 0 à 2π obtemos $\frac{4\pi}{3} \leq I \leq 4\pi$. ■

7 Unidade VII. Cálculo do integral definido

7.1 Introdução

Caro estudante, o método mais simples e cómodo para o cálculo do integral definido duma função contínua é a fórmula de Newton-Leibniz. Este método usamos sempre quando é possível determinar a primitiva do integrando. Nesta unidade veremos os *métodos de integração por substituição e integração por partes* para o integral definido.

7.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Calcular integrais definidos usando o método de substituição;

2) Aplicar o método de integração por partes;

3) Calcular integrais de funções pares e ímpares em intervalos simétricos.

7.3 Método de substituição

Para o cálculo do integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ duma função contínua $f(x)$ façamos a substituição $x = \psi(t)$.

Teorema 5. *Suponhamos que:*

1) A função $x = \psi(t)$ e a sua derivada $x' = \psi'(t)$ são contínuas para $t \in [\alpha, \beta]$;

2) O conjunto imagem da função $x = \psi(t)$ para $t \in [\alpha, \beta]$ é o segmento $[a, b]$;

3) $\psi(\alpha) = a$ e $\psi(\beta) = b$.

Então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\,dt. \tag{9}$$

Demonstração. Seja $F(x)$ a primitiva de $f(x)$ no segmento $[a, b]$. Então, pela fórmula de Newton-Leibniz, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Sabendo que $(F(\psi(t))' = f(\psi(t))\psi'(t)$, então $F(\psi(t))$ é primitiva da função $f(\psi(t))\psi'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Por isso, pela fórmula de Newton-Leibniz, temos:

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\,dt = F(\psi(t))\big|_\alpha^\beta = F(\psi(\beta)) - F(\psi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \quad \blacksquare$$

A fórmula (9) chama-se *fórmula de mudança de variável no integral definido.*

Observação 1. *Notemos o seguinte:*

1) *Quando calculamos o integral definido pelo método de substituição, não precisamos voltar para a variável inicial;*

2) *Habitualmente, no lugar de se fazer a substituição $x = \psi(t)$ faz-se a substituição $t = g(x)$;*

3) *Não se esqueça de mudar os limites de integração quando efectua a mudança de variável.*

Exemplo 31. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\, dx$.

Resolução. Seja $t = 5 - 4x$, então $dt = -4dx$. Quando $x = -1$ a variável $t = 9$ e quando $x = 1$, $t = 1$. Assim,

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\, dx = -\int_{9}^{1} \frac{(5-t)}{16\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{16}\int_{1}^{9} \left(\frac{5}{\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right) dt = \frac{1}{16}\left(-\frac{2}{3}t\sqrt{t} + 10\sqrt{t}\Big|_{1}^{9}\right) = \frac{1}{6}.$$

Exemplo 32. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\, dx$.

Resolução. Façamos a substituição $x = 2\sin t$, logo $dx = 2\cos t\, dt$. Se $x = 0$, então $t = 0$; se $x = 2$, então $t = \dfrac{\pi}{2}$. Assim,

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} 8\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\cos t\, dt = 16\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos^2 t\, dt =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\cos^2 t\, dt = 4\int_0^{\pi/2} (2\sin t\cos t)^2\, dt = 4\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, dt = 2\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\, dt = \pi.$$

7.4 Integração por partes

Teorema 6. *Se as funções $u = u(x)$ e $v = v(x)$ possuem derivadas contínuas em $[a, b]$, então tem lugar a fórmula*

$$\int_a^b u\, dv = uv|_a^b - \int_a^b v\, du. \tag{10}$$

Demonstração. No segmento $[a, b]$ tem lugar a igualdade $(uv)' = u'v + uv'$. Consequentemente, a função uv é primitiva da função contínua $(uv)' = u'v + uv'$. Então, pela fórmula de Newton-Leibniz, temos:

$$\int_a^b (u'v + uv')\, dx = uv|_a^b.$$

Logo,

$$\int_a^b vu'\, dx + \int_a^b uv'\, dx = uv|_a^b \Longrightarrow \int_a^b v\, du + \int_a^b u\, dv = uv|_a^b \Longrightarrow \int_a^b u\, dv = uv|_a^b - \int_a^b v\, du. \quad \blacksquare$$

Exemplo 33. *Calcule o integral* $\int\limits_0^{\pi} x \sin x \, dx$.

Resolução. Temos $\sin x dx = -d \cos x$. Assim,

$$\int\limits_0^{\pi} x \sin x \, dx = -\int\limits_0^{\pi} x \, d \cos x = -x \cos x|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x \, dx = \pi + \sin x|_0^{\pi} = \pi.$$

Exemplo 34. *Calcule o integral* $\int\limits_0^{\ln 2} x e^{-x} \, dx$.

Resolução. Como $e^{-x} dx = -de^{-x}$ então

$$\int\limits_0^{\ln 2} x e^{-x} \, dx = -\int\limits_0^{\ln 2} x \, de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int\limits_0^{\ln 2} e^{-x} \, dx = (-\ln 2) e^{-\ln 2} - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(-\ln 2 + 1) = \frac{1}{2}(\ln e - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}.$$

7.5 Integração de funções pares e ímpares em intervalos simétricos

Teorema 7. *Seja $f(x)$ uma função par no segmento simétrico $[-a, a]$. Então,*

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x) \, dx = 2 \int\limits_0^{a} f(x) \, dx. \tag{11}$$

Demonstração. Aplicando a propriedade de aditividade do integral definido temos

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x) \, dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x) \, dx + \int\limits_0^{a} f(x) \, dx.$$

Para demonstrarmos a igualdade (11) basta mostrar que

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x) \, dx = \int\limits_0^{a} f(x) \, dx.$$

Fazendo $x = -t$ temos $dx = -dt$ e quando x varia de $-a$ até 0, t varia de a até 0. Assim,

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x) \, dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t) \, dt = \int\limits_0^{a} f(-t) \, dt = \int\limits_0^{a} f(t) \, dt,$$

pois $f(x)$ é par. $\blacksquare$

Teorema 8. *Seja* $f(x)$ *uma função ímpar no segmento simétrico* $[-a, a]$. *Então,*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{12}$$

Demonstração. Aplicando a propriedade de aditividade do integral definido temos

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Para demonstrarmos a igualdade (12) basta mostrar que

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Fazendo $x = -t$ temos $dx = -dt$ e quando x varia de $-a$ até 0, t varia de a até 0. Assim,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt,$$

pois $f(x)$ é ímpar. ■

Exemplo 35. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x\,dx$.

Resolução. Como $f(x) = \cos^2 x \sin^3 x$ é ímpar, pois $f(-x) = -f(x)$, pelo Teorema 8 temos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x\,dx = 0.$$

Exemplo 36. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$.

Resolução. Como $f(x) = \cos x$ é par, pois $f(-x) = f(x)$, pelo Teorema 7 temos que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

7.6 Exercícios

1) Calcule $\displaystyle\int_{1}^{e} \cos\ln x\,dx$;

2) Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx$;

3) Calcule $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{x^2+x}$;

4) Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^x \cos x\, dx$;

5) Calcule $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1}\, dx$;

6) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\, dx$;

7) Calcule $\displaystyle\int_0^{1} xe^{-x}\, dx$;

8) Calcule $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln^2 x}{x}\, dx$;

9) Calcule $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x}\, dx$;

10) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$.

7.7 Respostas

1) $\dfrac{e^{\pi/2}-1}{2}$;

2) $\dfrac{1}{2}(\ln 3 - 1)$;

3) $\ln \dfrac{4}{3}$;

4) $\dfrac{e^{\pi/2}-1}{2}$;

5) 0;

6) $\dfrac{\pi}{2} - 1$;

7) $\dfrac{e-2}{2}$;

8) $\dfrac{1}{3}$;

9) $2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \ln \operatorname{tg} \dfrac{5\pi}{12}\right)$;

10) 0.

7.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 7.3, 7.4 e 7.5;

2) 2) No capítulo 9, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas de 25 a 32; resolver, no mesmo capítulo 9, parágrafo 9.5 os exercícios 2 e 5; no parágrafo 9.6 resolver os exercícios 3 e 7;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 7.6 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1582, 1584, 1587, 1596, 1597, 1599, 1600, 1601, 1602 e 1607.

7.9 Auto-avaliação

1) Enuncie o teorema de integração por substituição no integral definido;

2) Formule o teorema sobre integração por partes no integral definido;

3) Prove que o integral duma função ímpar, num intervalo simétrico, é igual a zero;

4) Calcule $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$;

5) Calcule $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} x^2 \cos x\,dx$;

6) Calcule $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx$;

7) Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$;

8) Demonstre a igualdade

$$\int_0^a x^3 f(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} x f(x)\,dx \quad (a > 0);$$

9) Demonstre que se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,dx;$$

.

7.10 Chave de correcção

1) Veja o Teorema 5 no parágrafo 7.3;

2) Veja o Teorema 6 no parágrafo 7.4;

3) Veja a prova do Teorema 8 no parágrafo 7.5;

4) Calcule $\displaystyle\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$.

Resolução. Por definição

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x & \text{se} \quad x \geq 1 \\ -\ln x & \text{se} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Então

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx = \int_{1/e}^{1} (-\ln x)\,dx + \int_1^e \ln x\,dx = -x\ln x\Big|_{1/e}^{1} + \int_{1/e}^{1} dx + x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx =$$

$$= \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} + \left(1 - \frac{1}{e}\right) + e\ln e - (e-1) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right). \quad \blacksquare$$

5) Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\,dx$.

Resolução. Neste exercício, com o intuito de fazer desaparecer o factor x^2 que se encontra no integrando, aplicamos duas vezes a integração por partes. Como $\cos x dx = d\sin x$, então

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\,dx = \int_0^{2\pi} x^2\,d\sin x = x^2 \sin x\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx =$$

$$= -2\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = 2\int_0^{2\pi} x\,d\cos x = 2\left(x\cos x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos x\,dx\right) = 2\left(2\pi - \sin x\Big|_0^{2\pi}\right) = 4\pi. \quad \blacksquare$$

6) Calcule $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$.

Resolução. Fazemos $e^x - 1 = t^2$, então $e^x dx = 2tdt$. Assim, $dx = \dfrac{2t}{1+t^2}dt$. Quando $x = 0$ temos $t = 0$ e quando $x = \ln 2$ temos $t = 1$. Deste modo

$$\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = \int\limits_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\, dt = 2\int\limits_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\, dt = 2\left(\int\limits_0^1 dt - \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\right) =$$

$$= 2\left(t - \operatorname{arctg} t\big|_0^1\right) = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - \frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

7) Calcule $\int\limits_0^1 \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$.

Resolução. Façamos $t = \arcsin\sqrt{x}$, então $dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x(1-x)}}$. Quando $x = 0$ temos $t = 0$ e quando $x = 1$ temos $t = \dfrac{\pi}{2}$. Deste modo

$$2\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{2x\sqrt{x(1-x)}}\, dx = 2\int\limits_0^{\pi/2} t\, dt = \frac{\pi^2}{4}. \quad \blacksquare$$

8) Demonstre a igualdade

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} x f(x)\, dx \quad (a > 0).$$

Resolução. Façamos $t = x^2$, então $2xdx = dt$ e, portanto, $dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$. Quando x varia de 0 à a temos t variando de 0 até a^2. Assim,

$$\int\limits_0^a x^3 f(x^3)\, dx = \int\limits_0^{a^2} \frac{t\sqrt{t}f(t)}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{a^2} t f(t)\, dt. \quad \blacksquare$$

9) Demonstre que se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, então

$$\int\limits_a^b f(x) = (b-a)\int\limits_0^1 f(a + (b-a)x)\, dx;$$

Resolução. Façamos $t = \dfrac{x-a}{b-a}$, então $dt = \dfrac{dx}{b-a}$ e quando x varia de a à b temos t variando de 0 até 1. Vê-se que

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_0^1 f(a + (b-a)t)(b-a)\, dt = (b-a)\int\limits_0^1 f(a + (b-a)t)\, dt. \quad \blacksquare$$

8 Unidade VIII. Integrais impróprios

8.1 Introdução

Nesta unidade vamos estudar integrais de funções contínuas, mas com intervalo de integração infinito ou integrais com intervalos de integração finito, mas cujo integrando possui descontinuidade nesse intervalo de integração. Tais integrais chamam-se *integrais impróprios.*

8.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Calcular integrais impróprios usando a definição;

2) Enunciar os teoremas de comparação;

3) Identificar integrais impróprios e investigar a sua convergência.

8.3 Integral impróprio do primeiro tipo

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, +\infty)$. Se existe limite finito $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$, então chamamos *integral impróprio do primeiro tipo* e a notação usada é $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Deste modo, segundo a definição,

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx}$$

Neste caso dizemos que o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge.* Se este limite não existe ou é igual a infinito, dizemos que o integral $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *diverge.*

De modo análogo definimos integral impróprio no intervalo $(-\infty, b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$$

O integral impróprio com ambos limites de integração infinitos define-se pela fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx,$$

onde c é um real qualquer. Neste caso o integral que se encontra no lado esquerdo converge só e somente só quando convergem ambos integrais no lado direito.

Exemplo 37. *Calcule o integral* $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$.

Resolução. Por definição,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{x}\Big|_1^b = -\lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b} - 1\right) = 1.$$

O integral converge.

Exemplo 38. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Resolução. Por definição,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = -\lim_{b\to+\infty} \ln x|_1^b = -\lim_{b\to+\infty} \ln b = \infty.$$

O integral diverge.

Teorema 9. *(de comparação) Se no intervalo* $[a, +\infty)$ *as funções contínuas* $f(x)$ *e* $g(x)$ *satisfazem a condição* $0 \le f(x) \le g(x)$, *então:*

1) da convergência do integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *implica a convergência do integral* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$*;*

2) da divergência do integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *implica a divergência do integral* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$*.*

Exemplo 39. *Investigue a convergência do integral* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$.

Resolução. Vamos procurar o majorante de $\dfrac{dx}{x^2(1+3^x)}$:

$$x \ge 1 \Longrightarrow 3^x \ge 3 \Longrightarrow 1 + 3^x \ge 4 \Longrightarrow x^2(1+3^x) \ge 4x^2 \Longrightarrow \frac{1}{x^2(1+3^x)} \le \frac{1}{4x^2}.$$

O integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4x^2}$ converge, logo converge o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+3^x)}$.

Teorema 10. *Se* $f(x)$ *é equivalente a* $g(x)$, *quando* $x \to +\infty$, *então os integrais* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *convergem ou divergem simultaneamente.*

Exemplo 40. *Investigue a convergência do integral* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$.

Resolução. Temos um integral impróprio do primeiro tipo. É fácil notar que

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^2}} \sim \frac{1}{x^{5/3}}, \quad x \to +\infty.$$

O integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}$ converge, pois $\lambda = \dfrac{5}{3} > 1$, logo $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$ converge.

8.4 Integral impróprio do segundo tipo

Seja $f(x)$ uma função contínua em $[a, b)$ e possui descontinuidade do segundo tipo no ponto $x = b$. Se existe limite finito $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\displaystyle\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$, então chamamos *integral impróprio do segundo tipo* e a notação usada é $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Deste modo, segundo a definição,

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx}$$

Se este limite existe, então o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *converge*. Se este limite não existe ou é igual a infinito, dizemos que o integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge*.

De modo análogo, se $f(x)$ é uma função contínua em $(a, b]$ e possui descontinuidade do segundo tipo no ponto $x = a$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Se a função $f(x)$ possui descontinuidade do segundo tipo no ponto interior c de $[a, b]$, então o integral impróprio do segundo tipo define-se pela fórmula

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Neste caso o integral que se encontra no lado esquerdo converge só somente só quando convergem ambos integrais no lado direito.

Exemplo 41. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

Resolução. Temos aqui um integral impróprio do segundo tipo, com singularidade no ponto $x = 0$. Por definição

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx.$$

Integrando $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx$ por partes temos:

$$\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = x\ln x|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 dx = -\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon$$

e passando para o limite, quando $\varepsilon \to 0^+$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(-\varepsilon\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon) = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon} = -1 + \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = -1.$$

Assim, $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = -1$.

Exemplo 42. *Calcule o integral* $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Resolução. A função $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ possui singularidade nos pontos $x=-1$ e $x=1$, sendo $f(-x)=f(x)$. Então,

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=2\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por definição,

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{0}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\arcsin(1-\varepsilon)=\frac{\pi}{2}.$$

Em conclusão obtemos:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\pi.$$

Teorema 11. *(de comparação) Se no intervalo* $[a,b)$ *as funções* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são contínuas e possuem no ponto* b *descontinuidade do segundo tipo e satisfazem a condição* $0\le f(x)\le g(x)$, *então:*

1) da convergência do integral $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *implica a convergência do integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$;

2) da divergência do integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *implica a divergência do integral* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$.

Teorema 12. *Se* $f(x)$ *é equivalente a* $g(x)$, *quando* $x\to b$, *então os integrais* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *convergem ou divergem simultaneamente.*

Exemplo 43. *Investigue a convergência do integral* $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

Resolução. Este integral, para o caso quando $n<0$, tem singularidade nos pontos $x=0$ e $x=1$. Na sua investigação iremos partir o intervalo $[0,1]$ em dois sub-intervalos, por exemplo $[0,1/2]$ e $[1/2,1]$. Deste modo temos:

$$\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx=\int_0^{1/2}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx+\int_{1/2}^{1}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

Seja

$$I_1\overset{\text{def}}{=}\int_0^{1/2}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

É fácil constatar que

$$\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\sim x^n,\quad x\to 0.$$

Como o integral $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{dx}{x^{-n}}$ converge para valores $-n<1$, isto é, $n>-1$, então I_1 também converge se $n>-1$. Vejamos agora o integral

$$I_2=\int_{1/2}^{1}\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\,dx.$$

Vejamos como se comporta o integrando quando $x \to 1$:

$$\frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{1-x}}, \quad x \to 1.$$

O integral $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$ converge, pois $\lambda = \frac{1}{2} < 1$, consequentemente I_2 converge. Em conclusão

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$$

converge se $n > -1$.

Exemplo 44. *Investigue a convergência do integral* $\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}$.

Resolução. Este integral tem singularidade nos pontos $x = 1$ e $x = 2$. Sendo assim vamos partir o intervalo de integração $[1, 2]$ em dois subintervalos, por exemplo, $[1, 3/2]$ e $[3/2, 2]$. Assim,

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x} = \int_1^{3/2} \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x} + \int_{3/2}^2 \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}.$$

Seja

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_1^{3/2} \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}.$$

Fácilmente constatamos que

$$\frac{1}{(x-2)^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(-1)^p (x-1)^q}, \quad x \to 1.$$

O integral $\int_1^{3/2} \frac{dx}{(-1)^p (x-1)^q}$ converge se $q < 1$, daí que I_1 também converge se $q < 1$. Vejamos agora o integral

$$I_2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{3/2}^2 \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}.$$

É evidente que

$$\frac{1}{(x-2)^p \ln^q x} \sim \frac{1}{(x-2)^p \ln^q 2}, \quad x \to 2,$$

daí que o integral $\int_{3/2}^2 \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}$ converge se $p < 1$, portanto I_2 também converge se $p < 1$. Deste modo temos:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^p \ln^q x}$$

converge se $p < 1$ e $q < 1$.

8.5 Exercícios

1) Calcule $\int\limits_0^{\infty} \frac{\text{arctg} x}{1+x^2}\, dx$;

2) Calcule $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$;

3) Calcule $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{x^5\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

4) Calcule $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

5) Calcule $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} x\ln^2 x\,dx$;

6) Investigue a convergência do integral $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$;

7) Investigue a convergência do integral $\displaystyle\int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^p}$, $a<b$;

8) Investigue a convergência do integral $\displaystyle\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1+x^2}{x^3}\,dx$;

9) Investigue a convergência do integral $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$;

10) Investigue a convergência do integral $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$.

8.6 Respostas

1) $\dfrac{\pi^2}{8}$;

2) $\dfrac{\pi}{4}$;

3) $\dfrac{256}{15}$;

4) π;

5) $\dfrac{1}{4}$;

6) Converge;

7) Converge, se $p<1$ e diverge se $p\geq 1$;

8) Diverge;
9) Diverge;
10) Converge.

8.7 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 8.3 e 8.4;
2) No capítulo 9, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas de 32 a 39; resolver, no mesmo capítulo 9, parágrafo 9.7 os exercícios 1, 2, 3, 6, 11 e 12;
3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;
4) Resolver os exercícios do parágrafo 8.5 desta unidade;
5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1546, 1549, 1551, 1554, 1562, 1567, 1568, 1569, 1572 e 1573.

8.8 Auto-avaliação

1) Dê a definição de integral impróprio do primeiro tipo;
2) Enuncie o teorema de comparação para o integral impróprio do primeiro tipo;
3) Dê a definição de integral impróprio do segundo tipo;
4) Enuncie o teorema de comparação para o integral impróprio do segundo tipo;
5) Calcule $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}\ (a > 0)$;
6) Calcule $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx\ (a > 0)$;
7) Calcule $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$;
8) Investigue a convergência do integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}\, dx$;
9) Investigue a convergência do integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$;
10) Investigue a convergência do integral $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$.

8.9 Chave de correcção

1) Veja a definição no parágrafo 8.3;

2) Veja o Teorema 9 no parágrafo 8.3;

3) Veja a definição no parágrafo 8.4;

4) Veja o Teorema 11 no parágrafo 8.4;

5) Calcule $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}\ (a>0)$.

Resolução. Temos aqui um integral impróprio do primeiro tipo. Por definição

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A x^{-\lambda}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\left.\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_a^A \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{A^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1} & \text{se} \quad \lambda>1 \\ +\infty & \text{se} \quad \lambda \le 1. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

6) Calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx\ (a>0)$.

Resolução. Por definição sabemos que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-ax}\cos bx\,dx.$$

Façamos a denotação

$$I \overset{\text{def}}{=} \int_0^A e^{-ax}\cos bx\,dx.$$

Integrando I por partes duas vezes temos:

$$I = \frac{1}{b}\int_0^A e^{-ax}\,d\sin bx = \frac{1}{b}\left(e^{-ax}\sin bx\Big|_0^A + a\int_0^A e^{-ax}\sin bx\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{b}\left(e^{-aA}\sin bA - \frac{a}{b}\int_0^A e^{-ax}\,d\cos bx \right) =$$

$$= \frac{1}{b}\left(e^{-aA}\sin bA - \frac{a}{b}\left(e^{-ax}\cos bx\Big|_0^A + a\int_0^A e^{-ax}\cos bx\,dx \right)\right) =$$

$$= \frac{1}{b}\left(e^{-aA}\sin bA - \frac{a}{b}e^{-aA}\cos bA + \frac{a}{b} - \frac{a^2}{b}I \right) =$$

$$= \frac{1}{b}\left(e^{-aA}\sin bA - \frac{a}{b}e^{-aA}\cos bA\right) + \frac{a}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}I \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right) = \frac{1}{b}\left(e^{-aA}\sin bA - \frac{a}{b}e^{-aA}\cos bA\right) + \frac{a}{b^2}.$$

Passando ao limite, quando $A \to +\infty$, temos:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{b^2} \Longrightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}. \quad \blacksquare$$

7) Calcule $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

Resolução. Façamos algumas transformações no integrando:

$$f(x) = (x^2+1) \div (x^4+1) = x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \div x^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right) \div \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right).$$

Seja $t = x - \frac{1}{x}$, então $dt = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ e quando x varia de 0 à $+\infty$, t varia de $-\infty$ à $+\infty$. Sendo $t = x - \frac{1}{x}$ temos $t^2+2 = x^2+\frac{1}{x^2}$.

Deste modo,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = 2\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} \frac{dt}{t^2+2} =$$

$$= 2\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_0^A = 2\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{A}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

8) Investigue a convergência do integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx$.

Resolução. Temos neste caso um integral impróprio do primeiro tipo. Com base na aditividade, é justa a igualdade:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx = \int\limits_0^{1} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx.$$

Para investigar a convergência do integral inicial, basta investigar a convergência do integral

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}\,dx.$$

Quando $x \to +\infty$ é válida a equivalência

$$\frac{x^2}{x^4-x^2+1} \sim \frac{1}{x^2}.$$

O integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge , portanto o integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}\, dx$ também converge e, consequentemente, converge o integral $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}\, dx$. ■

9) Investigue a convergência do integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$.

Resolução. Temos um integral impróprio do primeiro tipo. É fácil notar que

$$\frac{1}{x\sqrt[3]{1+x^2}} \sim \frac{1}{x^{5/3}}, \quad x \to +\infty.$$

O integral $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}$ converge, pois $\lambda = \frac{5}{3} > 1$, logo $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$ converge. ■

10) Investigue a convergência do integral $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$.

Resolução. É fácil ver, que a convergência do integral depende dos valores que o parâmetro p pode tomar. Se $p < 1$, o ponto 0 é ponto de singularidade, portanto é preciso partir o intervalo de integração em dois sub-intervalos, por exemplo de 0 à 1 e de 1 à $+\infty$. Então,

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx = \int\limits_0^{1} x^{p-1} e^{-x}\, dx + \int\limits_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx.$$

Temos que

$$x^{p-1} e^{-x} \sim x^{p-1}, \quad x \to 0.$$

O integral $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{1-p}}$ converge se $1 - p < 1$, isto é, se $p > 0$.

Vejamos agora o segundo integral $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$. Como a função e^{-x} decresce mais rápidamente do que qualquer função do tipo $\frac{1}{x^\lambda}$, $\lambda > 1$, quando $x \to +\infty$, então este integral converge, quaisquer que sejam os valores de p. Sendo assim, o integral $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx$ converge se $p > 0$. ■

9 Unidade IX. Aplicações do integral

9.1 Introdução

O Cálculo Integral tem muitas *aplicações na resolução de problemas geométricos, físicos, económicos* e etc. Iremos, nesta unidade, ver algumas dessas aplicações do integral.

9.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Calcular áreas;
2) Calcular comprimentos;
3) Calcular volumes.

9.3 Cálculo de áreas de figuras planas

Proposição 10. *A área S do trapézio curvilíneo, delimitado pelas linhas $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$ e $y = 0$, calcula-se segundo a fórmula*

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{13}$$

Notemos que, se a figura está delimitada pelas linhas $y = f(x)$, $y = g(x)$ $x = a$, $x = b$ e $f(x) \geq g(x)$ em $[a, b]$, a sua área calcula-se pela fórmula

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Exemplo 45. *Calcule a área da figura delimitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função $y = 2x - x^2$, $0 \leq x \leq 2$.*

Resolução. Aplicando a fórmula (13) calculamos a área:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Proposição 11. *Suponhamos que o trapézio curvilíneo é delimitado por uma linha dada na forma paramétrica*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Neste caso, a sua área calcula-se segundo a fórmula

$$S = \left| \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\,dt \right|. \tag{14}$$

Exemplo 46. *Calcule a área da figura delimitada pela elipse* $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Resolução. Vamos, primeiro, calcular $1/4$ da área S da elipse. Aqui, x varia de 0 a a, logo t irá variar de $\pi/2$ a 0. Aplicando a fórmula (14) temos

$$\frac{S}{4} = \left| ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\, dt \right| = \frac{ab}{2}\left| \int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)\, dt \right| = \frac{\pi ab}{4}.$$

Em conclusão, $S = \pi ab$.

Proposição 12. *Suponhamos que uma figura plana é delimitada por uma linha dada na forma polar* $\rho = \rho(\varphi)$ *e por dois feixes* $\varphi = \alpha$ *e* $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$. *A sua área calcula-se segundo a fórmula*

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{15}$$

Exemplo 47. *Calcule a área da figura delimitada pela rosa de três-pétalas* $\rho = 2\cos 3\varphi$.

Resolução. Vamos calcular, primeiro, a metade da área duma pétala, isto é $1/6$ de toda a área:

$$\frac{S}{6} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} (2\cos 3\varphi)^2\, d\varphi = \int_0^{\pi/6} (1+\cos 6\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{6}$$

Em conclusão, $S = \pi$.

9.4 Cálculo do comprimento de linhas no plano

Proposição 13. *O comprimento* $\mathcal{L}$ *da curva plana* AB, *dada pela equação* $y = f(x)$, *onde* $a \le x \le b$, *calcula-se segundo a fórmula*

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{16}$$

Exemplo 48. *Calcule o perímetro da circunferência de raio R.*

Resolução. Basta calcular $1/4$ do perímetro. A partir da equação da circunferência $x^2 + y^2 = R^2$ temos $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Assim,

$$\frac{\mathcal{L}}{4} = \int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R = \frac{R\pi}{2}.$$

Em conclusão, $\mathcal{L} = 2\pi R$.

Proposição 14. *O comprimento* $\mathcal{L}$ *da curva plana* AB, *dada na forma paramétrica*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

calcula-se segundo a fórmula

$$\mathcal{L} = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt. \tag{17}$$

Exemplo 49. *Calcule o perímetro da circunferência de raio R, dada na forma paramétrica.*

Resolução. Temos $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Aplicando a fórmula (17) temos

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\, dt = Rt\big|_0^{2\pi} = 2\pi R.$$

Proposição 15. *O comprimento $\mathcal{L}$ da curva plana AB, dada na forma polar*

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta,$$

calcula-se segundo a fórmula

$$\mathcal{L} = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi. \tag{18}$$

Exemplo 50. *Calcule o comprimento do cardióide $\rho = 2(1+\cos\varphi)$.*

Resolução. Tendo em conta que o cardióide é simétrico em relação ao eixo polar, vamos calcular metade do comprimento e depois multiplicamos esse resultado por dois. Aplicando a fórmula (18) temos

$$\frac{\mathcal{L}}{2} = 2\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi = 4\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8.$$

Em conclusão, $\mathcal{L} = 16$.

9.5 Cálculo de volumes e áreas de superfície de rotação

Proposição 16. *O volume V de um corpo, gerado pela rotação duma linha $y = y(x)$, $a \le x \le b$, à volta do eixo das abcissas, calcula-se pela fórmula*

$$V = \pi\int_a^b y^2(x)\, dx. \tag{19}$$

No caso mais geral, o volume dum corpo gerado pela rotação à volta do eixo das abcissas de um anel, formado pelas linhas $y_1(x) \le y(x) \le y_2(x)$, $a \le x \le b$, onde $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são funções contínuas, não negativas, calcula-se pela fórmula

$$V = \pi\int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))\, dx.$$

Exemplo 51. *Calcule o volume do corpo gerado pela rotação à volta do eixo OX da figura limitada pela curva $y^2 = (x-1)^3$ e pela recta $x = 2$.*

Resolução. A curva $y^2 = (x-1)^3$ intersecta o eixo das abcissas quando $x = 1$. Assim,

$$V = \pi\int_1^2 y^2\, dx = \pi\int_1^2 (x-1)^3\, dx = \frac{1}{4}\pi(x-1)^4\bigg|_1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

Proposição 17. *Se o arco duma curva definida por* $y = f(x), a \leq x \leq b$*, gira à volta do eixo das abcissas, então a área da superfície de rotação calcula-se segundo a fórmula*

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx. \tag{20}$$

Exemplo 52. *Calcule a área da superfície formada pela rotação à volta do eixo* OX*, do arco do sinusóide* $y = \sin 2x$ *de* $x = 0$ *até* $x = \dfrac{\pi}{2}$

Resolução. Determinamos, primeiro, $y' = 2\cos 2x$. Então,

$$S_x = 2\pi \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x \sqrt{1 + 4\cos^2 2x}\, dx.$$

Façamos a mudança de variável: $2\cos 2x = t$, $-4\sin 2x\, dx = dt$, $\sin 2x\, dx = -\dfrac{1}{4}\, dt$. Vamos determinar os limites de integração após esta mudança: se $x = 0$, então $t = 2$, se $x = \dfrac{\pi}{2}$, então $t = -2$. Deste modo temos:

$$S_x = 2\pi \int\limits_2^{-2} \sqrt{1 + t^2} \left(-\frac{1}{4}\right) dt = \frac{\pi}{2} \int\limits_{-2}^{2} \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{\pi}{2} \left(\frac{t}{2}\sqrt{1 + t^2} + \frac{1}{2} \ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right) \Big|_{-2}^{2} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(2\sqrt{5} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} \right) = \frac{\pi}{2} \left(2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2) \right).$$

Proposição 18. *Se a curva é dada na forma paramétrica*

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

então a área da superfície de rotação calcula-se segundo a fórmula

$$S_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt. \tag{21}$$

Exemplo 53. *Calcule a área da superfície formada pela rotação à volta do eixo* OX*, do arco do ciclóide* $x = t - \sin t$*,* $y = 1 - \cos t$*,* $0 \leq t \leq 2\pi$*.*

Resolução. Quando da rotação da metade do arco do ciclóide à volta do eixo OX a área da superfície de rotação é igual a

$$\frac{S_x}{2} = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos t)\sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2}\, dt = \frac{32\pi}{3}.$$

Logo, $S_x = \dfrac{64\pi}{3}$.

9.6 Exercícios

1) Calcule a área da figura limitada pelas linhas $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$;

2) Calcule a área da figura limitada pela linha $x = 12\cos t + 5\sin t$, $y = 5\cos t - 12\sin t$;

3) Calcule a área da figura limitada pela linha $\rho = a\sin 3\varphi$;

4) Calcule o comprimento da linha $y = \ln\sin x$, $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}$;

5) Calcule o comprimento da linha $x = 8\sin t + 6\cos t$, $y = 6\sin t - 8\cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

6) Calcule o comprimento da linha $\rho = a\sin\varphi$;

7) Calcule o volume do corpo obtido pela rotação à volta do eixo das abcissas da figura limitada pelas linhas $y = \dfrac{64}{x^2+16}$ e $x^2 = 8y$;

8) Calcule o volume do corpo obtido pela rotação à volta do eixo das abcissas da figura limitada pelas linhas $y = \dfrac{x^2}{4}$ e $y = \dfrac{x^3}{8}$;

9) Calcule a área da superfície obtida pela rotação à volta do eixo das abcissas do arco da curva $y = x^2$, $0 \le x \le \dfrac{1}{2}$;

10) Calcule a área da superfície obtida pela rotação à volta do eixo das abcissas do arco da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

9.7 Respostas

1) $S = \dfrac{9}{2}$;

2) $S = 169\pi$;

3) $S = \dfrac{\pi a^2}{12}$;

4) $\mathcal{L} = \dfrac{1}{2}\ln 3$;

5) $\mathcal{L} = 5\pi$;

6) $\mathcal{L} = \pi a$;

7) $V = \dfrac{16\pi}{5}$;

8) $V = \dfrac{4\pi}{35}$;

9) $S_x = \dfrac{61\pi}{1728}$;

10) $2\pi b\left(b + \dfrac{a^2}{a^2-b^2}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$.

9.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 9.3, 9.4 e 9.5;

2) No capítulo 9, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas de 7 a 10 e 18 a 25; resolver, no mesmo capítulo 9, parágrafo 9.2, os exercícios 1, 2, 3 e 4; no mesmo capítulo 9, parágrafo 9.4, resolver os exercícios 1, 3, 4 e 5;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Resolver os exercícios do parágrafo 9.6 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1623, 1624, 1638, 1640, 1665, 1677, 1685, 1687, 1714 e 1716.

9.9 Auto-avaliação

1) Escreva a fórmula do cálculo da área em coordenadas polares;

2) Escreva a fórmula do cálculo do comprimento duma curva dada na forma paramétrica;

3) Escreva a fórmula do cálculo do volume;

4) Calcule a área da figura limitada pela parábola $y = 4x - x^2$ e o eixo OX;

5) Calcule a área da figura limitada pela leminiskata $\rho^2 = 2\cos 2\theta$;

6) Calcule o comprimento do arco da curva

$$x = \cos^5 t, \quad y = \sin^5 t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2};$$

7) Calcule o comprimento do arco da curva $\rho = \sin^3 \dfrac{\theta}{3}$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$;

8) Calcule o volume do corpo gerado pela rotação à volta do eixo OX da figura limitada pela curva $y^2 = (x-1)^3$ e pela recta $x = 2$;

9) Calcule a área da superfície formada pela rotação à volta do eixo OX, do arco do sinusóide $y = \sin 2x$ de $x = 0$ até $x = \dfrac{\pi}{2}$.

9.10 Chave de correcção

1) Veja o parágrafo 9.3 desta unidade;

2) Veja o parágrafo 9.4 desta unidade;

3) Veja o parágrafo 9.5 desta unidade;

4) Calcule a área da figura limitada pela parábola $y = 4x - x^2$ e o eixo OX.

Resolução. A parábola $y = 4x - x^2$ tem concavidade virada para baixo e os seus zeros são $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Logo, ao calcularmos a área, virá:

$$S = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^4 = \frac{32}{3}. \quad \blacksquare$$

5) Calcule a área da figura limitada pela leminiskata $\rho^2 = 2\cos 2\theta$.

Resolução. Aplicando a fórmula para o cálculo da área da figura, para o caso quando a linha que limita essa figura é dada em coordenadas polares e tendo em conta que basta calcular a quarta parte da área, correspondente à variação $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4}$, virá:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\,d\theta = 2\sin 2\theta\big|_0^{\pi/4} = 2. \quad \blacksquare$$

6) Calcule o comprimento do arco da curva

$$x = \cos^5 t, \quad y = \sin^5 t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Resolução. Vamos, primeiro, determinar as derivadas de $x(t)$ e $y(t)$:

$$x'(t) = -5\cos^4 t \cdot \sin t, \quad y'(t) = 5\sin^4 t \cdot \cos t.$$

Agora, aplicando directamente a fórmula do cálculo do comprimento do arco duma curva dada na forma paramétrica, virá:

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-5\cos^4 t \cdot \sin t)^2 + (5\sin^4 t \cdot \cos t)^2}\,dt = 5\int_0^{\pi/2} \sin t \cdot \cos t\sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t}\,dt =$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2t}\,dt = -\frac{5}{8}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\,d(\cos 2t) =$$

$$= -\frac{5}{8\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2t \cdot \sqrt{1 + 3\cos^2 2t} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{3} \cdot \cos 2t + \sqrt{1 + 3\cos^2 2t})\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{5}{8}\left(2 - \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right). \quad \blacksquare$$

7) Calcule o comprimento do arco da curva $\rho = \sin^3 \dfrac{\theta}{3}$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

Resolução. Primeiro determinamos a derivada $\rho' = \sin^2 \dfrac{\theta}{3} \cos \dfrac{\theta}{3}$. Agora, pela fórmula que permite calcular o comprimento do arco dado no sistema polar, virá:

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^6 \frac{\theta}{3} + \left(\sin^2 \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{3}\right)^2}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \frac{\theta}{3}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\cos\frac{2\theta}{3}\right)d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{3}{2}\sin\frac{2\theta}{3}\bigg|_0^{\pi/2}\right) = \frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3}). \quad \blacksquare$$

8) Calcule o volume do corpo gerado pela rotação à volta do eixo OX da figura limitada pela curva $y^2 = (x-2)^3$ e pela recta $x = 4$.

Resolução. A curva $y^2 = (x-2)^3$ intersecta o eixo das abscissas quando $x = 2$. Assim,

$$V = \pi\int\limits_2^4 y^2\,dx = \pi\int\limits_2^4 (x-2)^3\,dx = \frac{1}{4}\pi(x-2)^4\bigg|_2^4 = 4\pi. \quad \blacksquare$$

10 Unidade X. Funções a duas variáveis

10.1 Introdução

Nesta unidade iremos considerar *funções de duas variáveis*, pois os factos mais importantes da teoria de funções de várias variáveis observam-se também nas funções de duas variáveis. Estes factos generalizam-se no caso de mais variáveis. Além disso, para funções de duas variáveis podemos dar uma interpretação geométrica mais ilustrativa, pois possuem gráficos em três dimensões.

10.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir função de duas variáveis;

2) Definir e calcular limite de função de duas variáveis;

3) Definir e investigar a continuidade de função de duas variáveis.

10.3 Noções gerais

Seja D um conjunto de pares ordenados (x, y). A correspondência f a qual para cada par $(x, y) \in D$ atribui um e somente um valor $z \in \mathbb{R}$ chamaremos *função de duas variáveis* definida no conjunto D com imagem em $\mathbb{R}$. A notação usada é $z = f(x, y)$ ou $f : D \mapsto \mathbb{R}$, sendo x e y as *variáveis independentes* e z a *variável dependente*. O conjunto $D = D(f)$ chamaremos *domínio de definição* da função. O conjunto de valores que z toma no domínio de definiçaõ chamaremos *conjunto das imagens* da função e denota-se $E(f)$ ou simplesmente E.

Como exemplo de uma função de duas variáveis temos a área S dum rectângulo cujos lados têm as dimensões x e y: $S = xy$. O domínio de definição desta função é o conjunto $\{(x, y)|\, x > 0,\, y > 0\}$.

A função $z = f(x, y)$, onde $(x, y) \in D$ podemos entender como sendo uma função do ponto $M(x, y)$ pertencente ao plano coordenado Oxy. Em particular, o domínio de definição pode ser todo o plano ou uma parte do plano limitadas por algumas linhas. A linha que delimita a região chamaremos *fronteira da região.* Os pontos da região que não se encontram na fronteira chamaremos *pontos interiores.* A região que consiste somente de pontos interiores chamaremos *região aberta.* Se pegarmos uma região D e unirmos a sua fronteira obtemos uma *região fechada* e denotaremos por $\bar{D}$. Um exemplo duma região fechada é o círculo ao qual unimos a sua circunferência. A imagem da função $z = f(x, y)$ no ponto $M_0(x_0, y_0)$ denotaremos por $z_0 = f(x_0, y_0)$.

A função de duas variáveis tem a seguinte interpretação geométrica. Para cada ponto $M_0(x_0, y_0)$ pertencente à região D corresponde o ponto $M(x_0, y_0, z_0)$ no sistema coordenado $Oxyz$, onde $z_0 = f(x_0, y_0)$ é a *aplicata* do ponto M. O conjunto de todos esses pontos representa uma certa superfície no espaço. Por exemplo, a função $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ tem como domínio de definição o círculo e sua respectiva fronteira $x^2 + y^2 \leq 1$ e representa a semiesfera superior com centro no ponto $(0, 0)$ e raio $R = 1$.

Exemplo 54. *Determine o domínio da função* $u = \arcsin \dfrac{x}{y^2}$.

Resolução. A função $u = \arcsin \dfrac{x}{y^2}$ está definida se $y \neq 0$ e $-1 \leq \dfrac{x}{y^2} \leq 1$. Logo, o domínio é uma parte do plano que se situa entre as parábolas $y^2 = x$ e $y^2 = -x$, com excepção do ponto $(0, 0)$.

Dada a função de duas variáveis $z = f(x, y)$, o conjunto de pontos no plano que satisfaz a equação $f(x, y) = C$, onde C é um valor constante, chamaremos *linha de nível.*

Exemplo 55. *Determine as linhas de nível da função* $u = x^2 + y^2$.

Resolução. A equação de família de linhas de nível tem a forma $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$. Dando a C diferentes valores reais obtemos circunferências concêntricas com centro na origem.

10.4 Limite de função a duas variáveis

Para a função de duas variáveis introduz-se a noção de limite de função do mesmo modo como o limite de função de uma variável, estudado no módulo *Análise Matemática I.* Vamos definir *δ–vizinhança* do ponto $M_0(x_0, y_0)$ como sendo o conjunto de pontos $M(x, y)$ do plano que satisfazem a desigualdade $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$. Por outras palavras, a δ–vizinhança do ponto $M_0(x_0, y_0)$ é o círculo centrado em M_0 e raio δ.

Definição 6. *Seja $z = f(x, y)$ uma função definida numa certa vizinhança do ponto $M_0(x_0, y_0)$, com excepção talvez do próprio ponto $M_0(x_0, y_0)$. Diremos que $f(x, y)$ tende para L, quando (x, y) tende para (x_0, y_0), se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todos $x \neq x_0$ e $y \neq y_0$ e que satisfazem a desigualdade $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ cumpre-se a desigualdade $|f(x, y) - L| < \epsilon$.*

A notação usada é $L = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ ou $L = \lim\limits_{M\to M_0} f(x, y)$. A partir da definição advem que se o limite existe, então ele não depende do modo como M tende para M_0.

Exemplo 56. *Calcule* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (2x - y^2)$.

Resolução. Calculando directamente temos $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (2x - y^2) = 2 \cdot 2 - 3^2 = -5$.

Exemplo 57. *Calcule* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Resolução. Vamos aproximar-nos do ponto $(0, 0)$ pela recta $y = kx$, onde k é um real. Então,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

A função $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não possui limite no ponto $(0, 0)$, pois para diferentes valores de k o limite da função não é o mesmo.

O limite de função de duas variáveis possui propriedades análogas às propriedades de limite de função de uma variável. Assim, se as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ estão definidas no conjunto D e possuem no ponto (x_0, y_0) deste conjunto os limites L e P, respectivamente, então as funções $f(x, y) + g(x, y)$, $f(x, y) \cdot g(x, y)$ e $\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$, $g(x, y) \neq 0$, possuem no ponto (x_0, y_0) limites que são iguais a $L + P$, LP e $\dfrac{L}{P}$, respectivamente.

Definição 7. *Seja $z = f(x, y)$ uma função definida numa certa vizinhança do ponto $M_0(x_0, y_0)$, com excepção talvez do próprio ponto $M_0(x_0, y_0)$. Diremos que $f(x, y)$ tende para L, quando (x, y) tende para (x_0, y_0), se para qualquer sucessão $\{x_n, y_n\}$ de pontos de D diferentes de (x_0, y_0), $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ vem que a sucessão $f(x_n, y_n)$ tende para L.*

Esta definição é conhecida como *limite segundo Heine.*

Exemplo 58. *Verifique se existe* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Resolução. Seja $\{x_n, y_n\} \neq (0,0)$, $\{x_n, y_n\} \to (0,0)$ e $x_n = \lambda y_n$, onde λ é um real qualquer. Então,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n y_n}{x_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\lambda y_n^2}{\lambda^2 y_n^2+y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\lambda y_n^2}{(\lambda^2+1)y_n^2} = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1},$$

logo o limite não existe porque se variarmos o λ o limite varia.

10.5 Continuidade de funções de duas variáveis

Definição 8. *A função* $z = f(x,y)$ *é contínua no ponto* (x_0, y_0) *se:*

1) Está definida neste ponto e numa certa vizinhança deste ponto;

2) Possui limite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$*;*

3) Este limite é igual ao valor de z *neste ponto* (x_0, y_0)*, isto é*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Os pontos onde se viola a continuidade, isto é não se cumpre pelo menos uma das três condições de continuidade no ponto chamaremos *pontos de descontinuidade* desta função. Os pontos de descontinuidade da função $z = f(x,y)$ podem formar linhas de descontinuidade. Por exemplo, a função $z = \dfrac{2}{x-y}$ possui a linha de descontinuidade que é a primeira bissectriz $y = x$.

Fazendo uso da definição de continuidade e os teoremas sobre limites, podemos provar que as operações aritméticas com funções contínuas e a construção da função composta de funções contínuas conduz a funções contínuas. Vejamos algumas propriedades de funções contínuas em regiões limitadas e fechadas.

Teorema 13. *Se a função* $z = f(x,y)$ *é contínua numa região limitada e fechada, então nesta região:*

1) a função é limitada, isto é existe um real $R > 0$ *tal que para todos os pontos nesta região cumpre-se a desigualdade* $|f(x,y)| < R$*;*

2) a função tem pontos nos quais atinge o maior e menor valores M *e* m*, respectivamente;*

3) a função toma em pelo menos um ponto da região quaisquer valores compreendidos entre m *e* M*.*

10.6 Exercícios

1) Determine o domínio da função $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

2) Determine o domínio da função $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$;

3) Determine o domínio da função $z = \arcsin(x + y)$;

4) Determine as linhas de nível da função $u = x^2 + y^2$;

5) Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{\sin xy}{x}$;

6) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to\infty} \sin\frac{\pi x}{2x + y}$ e $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\lim_{x\to\infty} \sin\frac{\pi x}{2x + y}$;

7) Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}$;

8) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\lim_{y\to+0} \frac{x^y}{1 + x^y}$ e $\displaystyle\lim_{y\to+0}\lim_{x\to\infty} \frac{x^y}{1 + x^y}$;

9) Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,2)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$;

10) Estude a continuidade da função $f(x,y) = \dfrac{x + y}{x^3 + y^3}$.

10.7 Respostas

1) $x^2 + y^2 \geq 1-$ parte do plano que se encontra fora do círculo unitário centrado na origem e raio 1;

2) O interior do círculo $x^2 + y^2 < 1$;

3) Feixes entre as rectas paralelas $x + y \leq 1$ e $x + y \geq -1$;

4) Circunferências concêntricas com centro na origem;

5) a;

6) 0 e 1;

7) 0;

8) $\dfrac{1}{2}$ e 1;

9) e;

10) Descontinuidade na recta $y = -x$.

10.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 10.3, 10.4 e 10.5;

2) No capítulo 11, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas de 79 a 83; resolver, no mesmo capítulo 11, parágrafo 11.1, os exercícios 1, 2, 4, 6 e 7;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Assistir os vídeos:
   $www.youtube.com/watch?v = EZYV5pGL9cU$
   $www.youtube.com/watch?v =_U yd6ru6wxY$

5) Resolver os exercícios do parágrafo 10.6 desta unidade;

6) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1784, 1785, 1786, 1787, 1788, 1792, 1794, 1793, 1798 e 1799.

10.9 Auto-avaliação

1) Dê a definição de função a duas variáveis;

2) Dê a definição de conjunto aberto, conjunto fechado, fronteira dum conjunto;

3) Dê a definição de limite de função;

4) Dê a definição de função contínua;

5) Determine o domínio da função $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$;

6) Determine o domínio da função $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$;

7) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$ e $\lim\limits_{y\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$;

8) Verifique se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$;

9) Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} \dfrac{\sin xy}{x}$;

10) Estude a continuidade da função $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

10.10 Chave de correcção

1) Veja a definição no parágrafo 10.3 desta unidade;

2) Veja a definição no parágrafo 10.3 desta unidade;

3) Veja a definição no parágrafo 10.4 desta unidade;

4) Veja a definição no parágrafo 10.5 desta unidade;

5) Determine o domínio da função $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Resolução. A função z assume valores reais se $a^2 - x^2 - y^2 \geq 0$, isto é, $x^2 + y^3 \leq a^2$. Logo, o domínio é um círculo e circunferência centrados na origem e raio a. ■

6) Determine o domínio da função $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$.

Resolução. A função dada depende de três variáveis e assume valores reais se $2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6 > 0$, isto é, $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{z^2}{3} < -1$. Logo, o domínio é parte do espaço delimitado pelo parabolóide de duas folhas. ■

7) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$ e $\lim\limits_{y\to\infty} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$.

Resolução. Temos:

$$\lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^2} = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

e

$$\lim_{y\to\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to\infty} \lim_{x\to\infty} 1 = \lim_{y\to\infty} 1 = 1. \quad ■$$

8) Verifique se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

Resolução. Seja $\{x_n, y_n\} \neq (0,0)$, $\{x_n, y_n\} \to (0,0)$ e $x_n = \lambda y_n$, onde λ é um real qualquer. Então,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\lambda y_n^2}{\lambda^2 y_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\lambda y_n^2}{(\lambda^2+1) y_n^2} = \frac{2\lambda}{\lambda^2+1},$$

logo o limite não existe porque se variarmos o λ o limite varia. ■

9) Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} \dfrac{\sin xy}{x}$.

Resolução. Façamos a substituição $t = xy \to 0$ quando $(x,y) \to (0,\pi)$. Assim, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} \dfrac{\sin xy}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi)} y \dfrac{\sin xy}{xy} = \pi \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = \pi$. ■

10) Estude a continuidade da função $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Resolução. A função é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, com excepção do(s) ponto(s) que anula(m) o denominador. No ponto $(0,0)$ a função dada tende para o infinito, logo possui uma descontinuidade. ■

11 Unidade XI. Derivadas parciais

11.1 Introdução

Para uma função a uma variável a sua derivada é um valor que mede a taxa de variação quando a variável independente varia. Para funções com duas variáveis também é importante investigar como o valor da função varia em ordem à variação dos valores das variáveis independentes. Nesta unidade iremos abordar as *derivadas parciais e o diferencial total*. Partindo da interpretação geométrica da derivada duma função a uma variável, estudado no módulo Análise Matemática I, damos uma interpretação geométrica da derivada parcial no ponto de tangencia. Mostramos como usar o diferencial total no cálculo aproximado.

11.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Determinar derivadas parciais de primeira ordem;
2) Determinar diferencial e aplicar no cálculo aproximado;
3) Determinar derivadas parciais de ordem superior.

11.3 Derivadas parciais de primeira ordem

Seja dada a função $z = f(x, y)$. Tendo em conta que x e y são variáveis independentes, então uma delas pode variar enquanto a outra variável se mantém inalterável. Damos à variável independente x um acréscimo Δx, e mantemos o valor de y. Assim z recebe um acréscimo que chamaremos *acréscimo parcial* de z em relação a x e denotamos por $\Delta_x z$, isto é

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

De modo análogo obtemos o acréscimo parcial de z em relação a y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

O acréscimo total Δz da função z define-se segundo a igualdade

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Se existir o limite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

chamaremos *derivada parcial* da função $z = f(x, y)$ no ponto (x, y) em ordem à variável x e denota-se z'_x ou $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ou f'_x ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. As derivadas parciais em ordem x no ponto $M_0(x_0, y_0)$ denotamos pelos símbolos $f'_x(x_0, y_0)$ ou $f'_x|_{M_0}$.

De modo análogo define-se e denota-se a derivada parcial de $z = f(x, y)$ em relação a y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Deste modo, a derivada parcial duma função de várias variáveis (duas, três ou mais) define-se como a derivada duma função a uma destas variáveis, sob condição de que as restantes variáveis independentes se mantêm constantes. Por isso mesmo, as derivadas parciais da função $f(x, y)$ se determinam segundo as fórmulas e a regras de cálculo das derivadas de funções a uma variável.

Exemplo 59. *Determine as derivadas parciais da função* $z = 2y + \sin(x^2 - y) + 1$.

Resolução. Temos de determinar duas derivadas parciais, nomeadamente z'_x e z'_y. Temos:

$$z'_x = (2y + \sin(x^2 - y) + 1)'_x = (2y)'_x + (\sin(x^2 - y))'_x + (1)'_x = 0 + (x^2 - y)'_x \cos(x^2 - y) + 0 = 2x\cos(x^2 - y),$$

$$z'_y = (2y + \sin(x^2 - y) + 1)'_y = (2y)'_y + (\sin(x^2 - y))'_y + (1)'_y = 2 + (x^2 - y)'_y \cos(x^2 - y) + 0 = 2 - \cos(x^2 - y).$$

O gráfico da função $z = f(x, y)$ é uma certa superfície. O gráfico da função $z = f(x, y_0)$ é uma linha resultante da intersecção desta superfície com o plano $y = y_0$. Partindo da interpretação geométrica da derivada duma função a uma variável, estudado no módulo *Análise Matemática I*, concluímos que $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha$, onde α é o ângulo entre o eixo Ox e a tangente à curva $z = f(x, y_0)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. De modo análogo, $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \beta$, onde β é o ângulo entre o eixo Oy e a tangente à curva $z = f(x_0, y)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Seja $z = f(x, y)$ uma função definida numa certa vizinhança do ponto $M(x, y)$. Vamos compor o acréscimo total desta função no ponto M:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Definição 9. *Diremos que a função* $z = f(x, y)$ *é diferenciável no ponto* $M(x, y)$, *se o seu acréscimo total pode-se representar na forma*

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{22}$$

onde $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$, *quando* $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

A soma das duas parcelas da igualdade (22) são a *parte principal do acréscimo da função.* A parte principal do acréscimo da função $z = f(x, y)$ chamaremos *diferencial total* desta função e denota-se pelo símbolo dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y. \tag{23}$$

As expressões $A\Delta x$ e $B\Delta y$ chamaremos *diferenciais parciais.* Para as variáveis independentes x e y consideramos $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$. Por isso, a igualdade (23) podemos reescrever na forma

$$dz = Adx + Bdy. \tag{24}$$

Teorema 14. *Se a função* $z = f(x, y)$ *é diferenciável no ponto* $M(x, y)$, *então ela é contínua nesse ponto e possui derivadas parciais* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ *sendo* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$ *e* $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$.

Demonstração. Como a função é diferenciável no ponto M, então tem lugar a igualdade (22). Daqui vem que $\Delta z \to 0$, quando $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$. Isto significa que a função é contínua no ponto M. Colocamos $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$ na igualdade (22) e obtemos $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Daqui tiramos que $\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$ e fazendo $\Delta x \to 0$ obtemos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$, isto é $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$. Vemos assim que no ponto M existe a derivada parcial $f'_x(x, y) = A$. De modo análogo provamos que no ponto M existe a derivada parcial $f'_y(x, y) = \dfrac{\partial z}{\partial y} = B$. ■

Como consequência do teorema obtemos a fórmula para o cálculo do diferencial total. A fórmula (24) reescrevemos na forma

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{25}$$

Teorema 15. *Se a função* $z = f(x, y)$ *possui derivadas parciais contínuas* z'_z *e* z'_y *no ponto* M, *então ela é diferenciável nesse ponto e o seu diferencial total expressa-se segundo a fórmula (25).*

11.4 Aplicação do diferencial total

A partir da definição do diferencial da função $z = f(x, y)$ segue que, para valores suficentemente pequenos de Δx e Δy tem lugar a aproximção $\Delta z \approx dz$. Tendo em conta que o acréscimo total $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$, então

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \tag{26}$$

Esta fórmula aplica-se quando se pretende fazer um cálculo aproximado.

Exemplo 60. *Calcule aproximadamente* $1.02^{3.01}$.

Resolução. Consideremos a função $z = x^y$. Então $1.02^{3.01} = (x + \Delta x)^{y+\Delta y}$, onde $x = 1$, $\Delta x = 0.02$, $y = 3$ e $\Delta y = 0.01$. Fazendo uso da fórmula (26) determinamos primeiro z'_x e z'_y: $z'_x = yx^{y-1}$ e $z'_y = x^y \ln x$. Consequentemente, $1.02^{3.01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0.02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0.01$, isto é $1.02^{3.01} \approx 1.06$. Para comparação, usando uma microcalculadora obtemos $1.02^{3.01} \approx 1.061418168$.

11.5 Derivadas parciais e diferenciais totais de ordem superior

As derivadas parciais $z'_x(x, y)$ e $z'_y(x, y)$ chamaremos derivadas parciais de primeira ordem. Podemos considerar estas derivadas como funções de $(x, y) \in D$. Estas funções podem ter derivadas parciais que chamaremos *derivadas parciais de segunda ordem.* Elas definem-se e denotam-se do seguinte modo:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}.$$

De modo análogo definimos as derivadas parciais de terceira, quarta e etc. ordens. As derivadas parciais z''_{xy} e z''_{yx} chamaremos *derivadas mistas.*

Exemplo 61. *Determine* z''_{xy} *e* z''_{yx} *para a função* $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$.

Resolução. Temos $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$ e $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$. Assim, $z''_{xy} = -12xy^2$, $z''_{yx} = -12xy^2$.

Vemos que $z''_{xy} = z''_{yx}$. Este resultado não é casual. Tem lugar o seguinte teorema:

Teorema 16. *Se as derivadas parciais de primeira e segunda ordens da função* $z = f(x, y)$ *são contínuas, então* $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Seja $z = f(x, y)$ uma função que admite derivadas parciais de segunda ordem contínuas. O diferencial de segunda ordem define-se segundo a fórmula $d^2z = d(dz)$. Vamos determinar a forma geral:

$$d^2z = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = z''_{xx}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dxdy + z''_{yy}\,dy^2.$$

Simbolicamente podemos escrever esta fórmula do modo seguinte:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z.$$

De modo geral, o diferencial de n–ésima ordem determinamos segundo o símbolo

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Exemplo 62. *Determine* d^2z *para a função* $z = x^3y^2$.

Resolução. Temos $z''_{xx} = 6xy^2$, $z''_{xy} = 6x^2y$ e $z''_{yy} = 2x^3$. Assim,

$$d^2z = 6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dxdy + 2x^3\,dy^2.$$

11.6 Exercícios

1) Dada a função $z = x^2 + 2y^2 - 3xy - 4x + 2y + 5$, determine as derivadas parciais de primeira ordem;

2) Dada a função $u = (x - y)(x - z)(y - z)$, determine as derivadas parciais de primeira ordem;

3) Dada a função $r = \rho^2 \sin^4 \theta$, determine as derivadas parciais de primeira ordem;

4) Determine o diferencial total de $z = \ln(x^2 + y^2)$;

5) Determine o diferencial total de $z = \sin(x^2 - y^2)$;

6) Dada a função $z = 4x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, determine z''_{xy} ;

7) Dada a função $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy}$, determine z''_{xy} ;

8) Dada a função $z = \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, determine d^2z ;

9) Calcule aproximadamente $\sqrt[3]{1.02^2 + 0.05^2}$;

10) Calcule aproximadamente $\ln(0.09^3 + 0.99^3)$.

11.7 Respostas

1) $z'_x = 2x - 3y - 4$, $z'_y = 4y - 3x + 2$;

2) $u'_x = (y - z)(2x - y - z)$, $u'_y = (x - z)(x - 2y + z)$, $u'_z = (x - y)(-y + 2z - x)$;

3) $r'_\rho = 2\rho \sin^4 \theta$, $r'_\theta = 4\rho^2 \sin^2 \theta \cos \theta$;

4) $dz = \dfrac{2(xdx + ydy)}{x^2 + y^2}$;

5) $dz = 2(xdx - ydy) \cos(x^2 - y^2)$;

6) $6(x + y)$;

7) 0 ;

8) $d^2z = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}(dy^2 - dx^2) - \dfrac{4xydxdy}{(x^2 + y^2)^2}$;

9) 1.013 ;

10) -0.03 .

11.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 11.3, 11.4 e 1.5;

2) No capítulo 11, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas de 83 a 96; no mesmo capítulo 11, resolver no parágrafo 11.2 os exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 7 e 8;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Assistir os vídeos:

   $www.youtube.com/watch?v = Y1TIgeNvj7c$

   $www.youtube.com/watch?v = b_D A9i5tHfU$

5) Resolver os exercícios do parágrafo 11.6 desta unidade;

6) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1801, 1802, 1806, 1828, 1833, 1848, 1892, 1897, 1916 e 1922.

11.9 Auto-avaliação

1) Defina derivada parcial;

2) Defina diferencial total;

3) Enuncie o teorema sobre a coincidência das derivadas mistas;

4) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função $z = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$;

5) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$;

6) Determine o diferencial total dz para a função $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{x-y}$;

7) Usando o cálculo diferencial, calcule aproximadamente $\operatorname{arctg} \dfrac{1.02}{0.95}$;

8) Dada a função $z = y \ln x$, determine f''_{xx}, f''_{xy} e f''_{yy};

9) Dada a função $z = \sin x \sin y$, determine $d^2 z$.

11.10 Chave de correcção

1) Veja a definição no parágrafo 11.3 desta unidade;

2) Veja a definição no parágrafo 11.3 desta unidade;

3) Veja a definição no parágrafo 11.5 desta unidade;

4) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função $z = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$.

Resolução. Considerando, primeiro, y como uma grandeza constante temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 1.$$

Considerando, depois, x como uma grandeza constante temos:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 8y + 2. \quad \blacksquare$$

5) Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função $\rho = u^4 \cos^2 \varphi$.

Resolução. Considerando, primeiro, φ como uma grandeza constante temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = 4u^2 \cos^2 \varphi.$$

Considerando, depois, u como uma grandeza constante temos:

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -u^4 \sin 2\varphi. \quad \blacksquare$$

6) Determine o diferencial total dz para a função $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x+y}{x-y}$.

Resolução. Determinamos as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Assim, $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = -\dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$. $\blacksquare$

7) Usando o cálculo diferencial, calcule aproximadamente $\operatorname{arctg} \dfrac{1.02}{0.95}$.

Resolução. Consideramos $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $\Delta x = -0.05$ e $\Delta y = 0.02$. Assim, $f'_x(1,1) = -\dfrac{1}{2}$, $f'_y(1,1) = \dfrac{1}{2}$. Logo,

$$\operatorname{arctg} \frac{1.02}{0.95} \approx \frac{\pi}{4} + \frac{0.05}{2} + \frac{0.02}{2} \approx 0.785 + 0.035 = 0.82. \quad \blacksquare$$

8) Dada a função $z = y \ln x$, determine f''_{xx}, f''_{xy} e f''_{yy}.

Resolução. Determinamos primeiros as derivadas parciais de primeira ordem:

$$f'_x = \frac{y}{x}, \quad f'_y = \ln x.$$

Agora, voltando a derivar, temos:

$$f''_{xx} = -\frac{y}{x^2}, \quad f''_{xy} = \frac{1}{x}, \quad f''_{yy} = 0. \quad \blacksquare$$

9) Dada a função $z = \sin x \sin y$, determine $d^2 z$.

Resolução. Temos:

$$z''_{xx} = -\sin x \sin y, \quad z''_{xy} = \cos x \cos y, \quad z''_{yy} = -\sin x \sin y.$$

Assim,

$$d^2 z = -\sin x \sin y \, dx^2 + 2 \cos x \cos y \, dxdy - \sin x \sin y \, dy^2. \quad \blacksquare$$

12 Unidade XII. Derivada da função composta

12.1 Introdução

Muitos modelos matemáticos envolvem funções compostas. Elas são funções de uma ou várias variáveis nas quais as variáveis são funções de outras variáveis básicas. Por exemplo, muitos modelos de crescimento económico consideram a produção como função do capital e trabalho, ambos os quais são funções do tempo. Como é que a produção varia com o tempo? De modo mais geral, *o que acontece ao valor duma função composta quando as suas variáveis básicas variam*? Este é o problema geral que iremos abordar nesta unidade.

12.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Determinar a derivada duma função composta;

2) Determinar a derivada duma função implícita;

3) Determinar derivadas segundo uma orientação.

12.3 Regra de cadeia

Seja $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis x e y, que por sua vez dependem da variável t: $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Neste caso a função $z = f(x(t), y(t))$ é função composta de uma variável independente t.

Teorema 17. *Se a função $z = f(x, y)$ é diferenciável no ponto $M(x, y) \in D$ e $x = x(t)$, $y = y(t)$ são funções diferenciáveis, então a derivada da função composta $z = f(x(t), y(t))$ determina-se segundo a fórmula*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{27}$$

Demonstração. Vamos dar à variável independente t o acréscimo Δt. Então as variáveis $x = x(t)$ e $y = y(t)$ sofrem uma alteração Δx e Δy, respectivamente. Elas, por sua vez, provocam um acréscimo Δz à função z. Já que, segundo a condição, $z = f(x, y)$ é diferenciável no ponto $M(x, y)$, então o seu acréscimo total admite a representação

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y,$$

onde $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, quando $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Dividimos a expressão Δz por Δt e calculamos o limite quando $\Delta t \to 0$. Então $\Delta x \to 0$ e $\Delta y \to 0$ devido à continuidade de $x = x(t)$ e $y = y(t)$, pois elas são diferenciáveis. Obtemos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \alpha \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \beta \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},$$

isto é

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \quad \blacksquare$$

Seja $z = f(x, y)$, onde $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Então $z = f(x(u, v), y(u, v))$ é uma função composta das variáveis independentes u e v. As suas derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ determinam-se segundo as fórmulas

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Exemplo 63. *Determine a derivada parcial* $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ *da função* $z = \ln(x^2 + y^2)$, *onde* $x = uv$, $y = \dfrac{u}{v}$.

Resolução. Temos:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x \cdot v + \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y \cdot \frac{1}{v}.$$

Após algumas manipulações obtemos $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{2}{u}$.

12.4 Derivada implícita

A função $z = f(x, y)$ chamaremos *implícita* se ela é dada pela equação

$$F(x, y, z) = 0, \tag{28}$$

não resolúvel em ordem a z. Vamos determinar as derivadas parciais $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ da função implícita z, dada pela equação (28). Para tal, colocando na equação no lugar de z a função $f(x, y)$, obtemos a identidade

$$F(x, y, f(x, y)) = 0.$$

As derivadas parciais em ordem a x e y, da função F são:

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y, f(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \text{considerando } x \text{ constante,}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y, f(x, y)) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{considerando } y \text{ constante,}$$

donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{29}$$

Exemplo 64. *Determine as derivadas parciais da função* z, *definida pela equação* $e^z + z - x^2 y + 1 = 0$.

Resolução. Aqui, $F(x, y, z) = e^z + z - x^2 y + 1$, $F'_x = -2xy$, $F'_y = -x^2$, $F'_z = e^z + 1$. Usando as fórmulas (29) obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{e^z + 1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{e^z + 1}.$$

12.5 Derivada segundo uma orientação

Dada a função $z = f(x, y)$, a sua *derivada no ponto* $M(x, y)$ *segundo a orientação do vector* $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, calcula-se segundo a fórmula

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

onde α e β são os ângulos formados pelo vector $\vec{l}$ com o eixo Ox e Oy, respectivamente. O vector $\nabla z = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ chamaremos *vector gradiente* de z no ponto M.

Exemplo 65. *Determine a derivada da função* $z = x^2 - y^2$ *no ponto* $M(1,1)$ *segundo a orientação do vector* $\vec{l}$ *que faz* 60 *graus com o eixo* Ox*.*

Resolução. Calculando as derivadas parciais no ponto M temos $\frac{\partial z}{\partial x}|_M = 2$, $\frac{\partial z}{\partial y}|_M = -2$. As coordenadas do vector $\vec{l}$ são $\cos 60 = \frac{1}{2}$ e $\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo,

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}.$$

12.6 Exercícios

1) Dada a função $z = x^2 y$, onde $y = \cos x$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{dz}{dx}$;
2) Dada a função $z = \frac{1}{2} \ln \frac{u}{v}$, onde $u = \operatorname{tg}^2 x$, $v = \operatorname{ctg}^2 x$, determine $\frac{dz}{dx}$;
3) Dada a função $z = x^2 + y^2$, onde $x = \zeta + \eta$, $y = \zeta - \eta$, determine $\frac{\partial z}{\partial \zeta}$ e $\frac{\partial z}{\partial \eta}$;
4) Determine a derivada da função $z = x^2 - xy + y^2$ no ponto $M(1,1)$ segundo a orientação $\vec{l} = (6,8)$;
5) Determine o módulo e a orientação do gradiente da função $z = xy$ no ponto $M(2,1)$;
6) Dada a expressão $x + y + z - e^z = 0$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$;
7) Dada a expressão $x \sin y + y \sin x + z \sin x = 2$, determine $\frac{\partial z}{\partial y}$;
8) Dada a expressão $xy + xz + yz = 1$, determine dz;
9) Dada a expressão $xe^y + ye^x + ze^x = 2$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$;
10) Dada a expressão $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z - x}$, determine $\frac{\partial z}{\partial x}$.

12.7 Respostas

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy$, $\frac{dz}{dx} = x(2\cos x - x \sin x)$;
2) $\frac{dz}{dx} = \frac{4}{\sin 2x}$;
3) $\frac{\partial z}{\partial \zeta} = 4\zeta$, $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 4\eta$;
4) $\left(\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right)\Big|_M = \frac{7}{5}$;
5) $|\nabla z| = \sqrt{5}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

6) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x+y+z-1}$;

7) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x\cos y + \sin x}{\sin x}$;

8) $dz = -\dfrac{(y+z)\,dx + (x+z)\,dy}{x+y}$;

9) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -y - z - e^{y-x}$;

10) 1.

12.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 12.3, 12.4 e 12.5;

2) No capítulo 12, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas de 118 a 129; no mesmo capítulo 12, resolver no parágrafo 12.1 os exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7; resolver no parágrafo 12.2 os exercícios 1, 2, 3, 4, 7 e 8;

3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

4) Assistir o vídeo $www.youtube.com/watch?v = 1Q4hEbj9wm8$

5) Resolver os exercícios do parágrafo 12.6 desta unidade;

6) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 1856, 1858, 1861, 1863, 1866, 1871, 1876, 1879, 1950 e 1952.

12.9 Auto-avaliação

1) Defina derivada de função composta;

2) Defina derivada de função implícita;

3) Defina gradiente e derivada segundo uma orientação;

4) Dada a função $z = e^{x^2+y^2}$, onde $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, determine a derivada $\dfrac{dz}{dt}$;

5) Dada a função $z = \ln x^2 - y^2$, onde $y = e^x$, determine as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{dz}{dx}$;

6) Determine as derivadas parciais da função z, definida pela equação $z^3 - 3xy = a^2$;

7) Determine dz da função z, definida pela equação $xyz - x - y - z = 0$;

8) Determine a derivada da função $z = x^5 + y^5$ no ponto $M(1,1)$ segundo a orientação do vector $\vec{l} = (3,4)$;

9) Determine a derivada da função $z = \ln(x^2+y^2)$ no ponto $M(3,4)$ segundo a orientação do gradiente da função z nesse ponto.

12.10 Chave de correcção

1) Veja a definição no parágrafo 12.3 desta unidade;

2) Veja a definição no parágrafo 12.4 desta unidade;

3) Veja a definição no parágrafo 12.5 desta unidade;

4) Dada a função $z = e^{x^2+y^2}$, onde $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, determine a derivada $\dfrac{dz}{dt}$.

   Resolução. Pela regra de cadeia temos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = e^{x^2+y^2}2x(-a\sin t) + e^{x^2+y^2}2y(a\cos t) = 2ae^{x^2+y^2}(y\cos t - x\sin t).$$

   Tendo em conta que $x = a\cos t$, $y = a\sin t$ obtemos: $\dfrac{dz}{dt} = 2ae^{a^2}(a\sin t\cos t - a\cos t\sin t) = 0$. ■

5) Dada a função $z = \ln x^2 - y^2$, onde $y = e^x$, determine as derivadas $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{dz}{dx}$.

   Resolução. Temos $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 - y^2}$.

   Pela regra de cadeia temos

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2-y^2} - \frac{2ye^x}{x^2-y^2} = \frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}. \quad ■$$

6) Determine as derivadas parciais da função z, definida pela equação $z^3 - 3xy = a^2$.

   Resolução. Aqui, $F(x,y,z) = z^3 - 3xy - a^2$, $F'_x = -3yz$, $F'_y = -3xz$, $F'_z = 3z^2 - 3xy$. Usando as fórmulas (3), da Unidade III. Anexo I, obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{(-3yz)}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(-3xz)}{3z^2 - 3xy} = \frac{xz}{z^2 - xy}. \quad ■$$

7) Determine dz da função z, definida pela equação $xyz - x - y - z = 0$.

   Resolução. Aqui, $F(x,y,z) = xyz - x - y - z$, $F'_x = yz - 1$, $F'_y = xz - 1$, $F'_z = xy - 1$. Usando as fórmulas (3), da Unidade III. Anexo I, obtemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz-1}{xy-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz-1}{xy-1}.$$

   Logo,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{yz-1}{1-xy}\,dx + \frac{xz-1}{1-xy}\,dy. \quad ■$$

8) Determine a derivada da função $z = x^5 + y^5$ no ponto $M(1,1)$ segundo a orientação do vector $\vec{l} = (3,4)$.

   Resolução. Calculando as derivadas parciais no ponto M temos $\dfrac{\partial z}{\partial x}|_M = 5$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}|_M = 5$. Os cosenos orientadores do vector $\vec{l}$ são $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$. Logo,

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = 5\cdot\frac{3}{5} + 5\cdot\frac{4}{5} = 7. \quad ■$$

9) Determine a derivada da função $z = \ln(x^2 + y^2)$ no ponto $M(3,4)$ segundo a orientação do gradiente da função z nesse ponto.

Resolução. Calculando as derivadas parciais no ponto M temos $\frac{\partial z}{\partial x}|_M = \frac{6}{25}$, $\frac{\partial z}{\partial y}|_M = \frac{8}{25}$. Os cosenos orientadores do vector gradiente ∇z são $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Logo,

$$\frac{\partial z}{\partial \nabla z} = \frac{6}{25} \cdot \frac{3}{5} + \frac{8}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}. \quad \blacksquare$$

13 Unidade XIII. Extremo de funções a duas variáveis

13.1 Introdução

No módulo Análise Matemática I abordamos problemas de optimização a uma variável. Contudo, na vida real deparamo-nos com fenómenos cujos modelos matemáticos conduzem a problemas de optimização mais interessantes que exigem a escolha simultânea de várias variáveis. Por exemplo, um produtor que maximiza o lucro duma mercadoria escolhe as quantidades de vários insumos, como também escolhe o seu nível de produção. O consumidor opta em comprar quantidades de diferentes mercadorias. *Iremos nesta unidade abordar problemas de extremos para funções a duas variáveis. Estudaremos os extremos locais e os extremos globais.*

13.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Determinar extremos locais e classificá-los;

2) Determinar extremos absolutos;

3) Determinar a equação do plano tangencial à uma superfície dada.

13.3 Condições necessária e suficiente de extremo local

A noção de máximo, mínimo e de extremo de função a duas variáveis é análoga ao estudado no módulo *Análise Matemática I* e referente às funções a uma variável. Seja $z = f(x, y)$ uma função definida num certo domínio D, e seja $N(x_0, y_0) \in D$.

Definição 10. *Diremos que o ponto* (x_0, y_0) *é ponto de máximo (respectivamente mínimo) local da função* $z = f(x, y)$*, se existe uma* δ*–vizinhança do ponto* (x_0, y_0) *na qual para cada ponto* (x, y) *desta vizinhança diferente de* (x_0, y_0) *cumpre-se a desigualdade* $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ *(respectivamente* $f(x, y) > f(x_0, y_0)$*).*

O valor da função no ponto de máximo (mínimo) chamaremos *máximo* (*mínimo*). O máximo e mínimo duma função chamaremos *extremos* da função.

Vejamos as condições de existência de extremo duma função.

Teorema 18. *Se no ponto* $N(x_0, y_0)$ *a função diferenciável* $z = f(x, y)$ *possui extremo, então as suas derivadas parciais nesse ponto é igual a zero:* $f'_x(x_0, y_0) = 0$*,* $f'_y(x_0, y_0) = 0$*.*

Demonstração. Fixamos uma das variáveis, por exemplo $y = y_0$. Então obtemos a função $f(x, y_0) = \varphi(x)$ a uma variável que possui extremo no ponto $x = x_0$. Consequentemente, segundo a condição necessária de extremo de função a uma variável temos $\varphi'(x_0) = 0$, isto é $f'_x(x_0, y_0) = 0$. De modo análogo provamos que $f'_y(x_0, y_0) = 0$. ■

Os pontos da função $z = f(x, y)$ nos quais as derivadas parciais de primeira ordem se anulam chamaremos *ponto estacionário* dessa função. Os pontos estacionários e os pontos nos quais pelo menos uma das derivadas parciais não existe chamaremos *pontos críticos.*

Teorema 19. *Suponhamos que no ponto estacionário $N(x_0, y_0)$ e numa certa vizinhança a função $z = f(x, y)$ possui derivadas parciais contínuas até a segunda ordem. Seja $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$ e $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta = AC - B^2$. Então:*

1) *Se $\Delta > 0$, então a função $z = f(x, y)$ possui no ponto $N(x_0, y_0)$ um extremo local. Se $A < 0$ será ponto de máximo local, se $A > 0$ será ponto de mínimo local;*

2) *Se $\Delta < 0$, então a função $z = f(x, y)$ não possui no ponto $N(x_0, y_0)$ um extremo local.*

Observação 2. *Se $\Delta = 0$, então a função $z = f(x, y)$ pode possuir ou não extremo local no ponto $N(x_0, y_0)$, exigindo investigação adicional.*

Exemplo 66. *Determine os extremos locais da função $z = 3x^2y - x^3 - y^4$.*

Resolução. Temos $z'_x = 6xy - 3x^2$, $z'_y = 3x^2 - 4y^3$. Igualando estas derivadas parciais a zero e resolvendo o sistema obtemos os pontos estacionários $N_1(6, 3)$ e $N_2(0, 0)$. Determinamos as derivadas parciais $z''_{xx} = 6y - 6x$, $z''_{xy} = 6x$, $z''_{yy} = -12y^2$. Vamos, de seguida, classificar cada ponto estacionário:

a) No ponto $N_1(6, 3)$ temos $A = -18$, $B = 36$, $C = -108$, $\Delta = 648$, logo é ponto de máximo local e esse máximo é igual a 27;

b) No ponto $N_2(0, 0)$ temos $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $\Delta = 0$, logo é preciso fazer um estudo adicional. Nesse ponto temos $z(0, 0) = 0$. Notemos que se $x = 0$, $y \neq 0$ então $z = -y^4 < 0$ e se $x < 0$, $y = 0$ a função $z = -x^3 > 0$. Significa que na vizinhança de $N_2(0, 0)$ a função assume e valores positivos e valores negativos. Logo, no ponto $N_2(0, 0)$ a função não possui extremo.

13.4 Extremos absolutos

Seja $z = f(x, y)$ uma função definida e contínua no domínio fechado e limitado $\bar{D}$. Então esta função atinge em alguns pontos de $\bar{D}$ o seu maior valor M e o seu menor valor m, isto é o seu *extremo global*. Estes valores a função atinge nos pontos que se encontram dentro de $\bar{D}$ ou na fronteira deste domínio.

Passamos a enunciar as regras para obtenção dos extremos globais da função $z = f(x, y)$ diferenciável no domínio $\bar{D}$:

1) Determinar todos os pontos críticos da função que pertencem ao domínio $\bar{D}$ e calcular os valores da função nesses pontos;

2) Determinar o maior e menor valor da função $z = f(x, y)$ na fronteira do domínio;

3) Comparar todos os valores determinados nos pontos 1) e 2) e escolher o maior valor M e o menor valor m.

Exemplo 67. *Determine os extremos absolutos da função $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ na região $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0,\ y \leq 0,\ x + y \geq -3\}$.*

Resolução. Vamos, primeiro, determinar os pontos estacionários:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0.$$

Resolvendo o sistema obtemos $M_0(-1;-1) \in \Omega$, logo $z(-1,-1) = -1$.

Vamos agora investigar os extremos na fronteira de Ω.

Para $y = 0$: $z = x^2 + x$, $z' = 2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -0.5 \Longrightarrow M_1(-0.5; 0)$.

Para $x = 0$: $z = y^2 + y$, $z' = 2y + 1 = 0 \Longrightarrow y = -0.5 \Longrightarrow M_2(0; -0.5)$.

Para $y = -3 - x$: $z = 3x^2 + 9x + 6$, $z' = 6x + 9 = 0 \Longrightarrow x = -1.5, \quad y = 1.5 \Longrightarrow M_3(-1.5; 1.5)$.

Assim,

$$z_{max} = \max\{z(M_0), z(M_1), z(M_2), z(M_3)\} = 6,$$
$$z_{min} = \min\{z(M_0), z(M_1), z(M_2), z(M_3)\} = -1. \quad \blacksquare$$

13.5 Plano tangencial

Vejamos uma das aplicações geométricas das derivadas parciais de uma função a duas variáveis. Chamaremos *plano tangencial* à superfície $\mathcal{S}$ no ponto M ao plano que contém todas as tangentes às curvas que passam na superfície pelo ponto M. Suponhamos que a superfície $\mathcal{S}$ é dada na forma $z = f(x, y)$. A equação do plano tangencial à esta superfície no ponto $M(x_0, y_0, z_0)$ tem a forma

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Exemplo 68. *Dada a superfície* $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$*, determine a equação do plano tangencial no ponto* $M(1, 1, 1)$.

Resolução. Temos $z'_x|_M = 2x - 2y - 1|_M = -1$, $z'_y|_M = -2x + 2y + 2|_M = 2$. Logo, a equação do plano tangencial tem a forma

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1) \quad \text{ou} \quad x - 2y + z = 0.$$

13.6 Exercícios

1) Determine os extremos locais da função $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$;

2) Determine os extremos locais da função $z = xy^2(1 - x - y)$;

3) Determine os extremos locais da função $z = x^3 + y^3 - 15xy$;

4) Determine os extremos globais da função $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ no domínio fechado delimitado pelas linhas $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$;

5) Determine os extremos globais da função $z = xy$ no círculo $x^2 + y^2 \leq 1$;

6) Determine os extremos globais da função $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ no triângulo delimitado pelas linhas $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$;

7) De todos os triângulos com perímetro dado, determine aquele de maior área;

8) Dada a superfície $z = \ln(x^2 + y^2)$, determine a equação do plano tangencial no ponto $M(1, 0, 0)$;

9) Dada a superfície $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, determine a equação do plano tangencial no ponto $M(2, 2, 3)$;

10) Componha as equações dos planos tangenciais à superfície $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ paralelos ao plano $x + 4y + 6z = 0$.

13.7 Respostas

1) Mínimo local -9;
2) Máximo local $\frac{1}{64}$;
3) Mínimo local -125;
4) Mínimo global $-\frac{16}{3}$, máximo global 16;
5) Mínimo global $-\frac{1}{2}$, máximo global $\frac{1}{2}$;
6) Mínimo global 1, máximo global 4;
7) Triângulo equilátero;
8) $z = 2x - 2$;
9) $2x + 2y - 3z + 1 = 0$;
10) $x + 4y + 6z \pm 21 = 0$.

13.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 13.3, 13.4 e 13.5;
2) No capítulo 13, do livro *Matemática Essencial para Análise Económica-Parte II*, ler as páginas 172 a 186 e as páginas 194 a 201; no mesmo capítulo 13, resolver no parágrafo 13.1 os exercícios 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10; resolver no parágrafo 13.2 os exercícios 1, 2, 3, 4, 5, e 6; resolver no parágrafo 13.4 os exercícios 1, 2, 3 e 6;
3) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;
4) Assistir o vídeo em $www.youtube.com/watch?v = S1aYFH03W8Y$;
5) Resolver os exercícios do parágrafo 13.6 desta unidade;
6) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 2008, 2011, 2015, 2016, 2030, 2031, 2033, 2034, 2035 e 2036.

13.9 Auto-avaliação

1) Enuncie as condições necessárias e suficientes de extremo;
2) Diga o que é um extremo global;
3) Diga como se determina a equação dum plano tangencial à uma superfície dada;
4) Dada a função $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$, determine o(s) ponto(s) crítico(s) e classifique-o(s);
5) Dada a função $z = x^3 + y^3 - 3xy$, determine o(s) valor(es) extremo(s) e classifique-o(s);

6) Dada a função $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$, determine o(s) ponto(s) crítico(s) e classifique-o(s);

7) Dada a função $z = x^2 + y^2 + 6$ na região $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$, determine os seus extremos absolutos;

8) Dada a superfície $z = x^2 - 2xy + y^2$, determine a equação do plano tangencial no ponto $M(1,1,0)$;

9) Dada a superfície $z = \dfrac{x^2}{2} - y^2$, determine a equação do plano tangencial no ponto $M(2,-1,1)$.

13.10 Chave de correcção

1) Veja a definição no parágrafo 13.3 desta unidade;

2) Veja a definição no parágrafo 13.4 desta unidade;

3) Veja a definição no parágrafo 13.5 desta unidade;

4) Dada a função $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$, determine o(s) ponto(s) crítico(s) e classifique-o(s).

   Resolução. Vamos achar os pontos de possíveis extremos locais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 6y = 0.$$

   Resolvendo o sistema (pelo método, por exemplo, de substituição) achamos dois pontos críticos: $A(0,0)$ e $B(1,1)$. Vamos achar as derivadas parciais de segunda ordem nestes pontos:

   (a) Para o ponto A:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6.$$

   Vamos agora classificar este ponto, para tal temos que ver os sinais dos menores silvestrianos: $H_1 = 0$, $H_2 = -36 < 0$, logo concluímos que A é um ponto sela.

   (b) Para o ponto B:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6.$$

   Vamos agora classificar este ponto, para tal temos que ver os sinais dos menores silvestrianos: $H_1 = 12 > 0$, $H_2 = 36 > 0$, logo concluímos que B é um ponto de mínimo local. ■

5) Dada a função $z = x^3 + y^3 - 3xy$, determine o(s) valor(es) extremo(s) e classifique-o(s).

   Resolução. Vamos determinar os pontos de possíveis extremos locais:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 3x^2 - 3y = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv 3y^2 - 3x = 0.$$

   Resolvendo o sistema (pelo método, por exemplo, de substituição) achamos dois pontos estacionários: $A(0,0)$ e $B(1,1)$. Vamos achar as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y.$$

   Vamos agora classificar os pontos encontrados, para tal temos que ver os sinais dos menores silvestrianos:

   (a) para o ponto A: $M_1 = 0$, $M_2 = -9 < 0$, logo concluímos que não existe extremo em A;

(b) para o ponto B: $M_1 = 6 > 0$, $M_2 = 27 > 0$, logo concluímos que no ponto B a função z atinge um mínimo local $z_{min} = z(1,1) = -1$. ■

6) Dada a função $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$, ache o(s) ponto(s) crítico(s) e classifique-o(s).

Resolução. Vamos achar os pontos de possíveis extremos locais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2 + 2z = 0.$$

Resolvendo o sistema (pelo método, por exemplo, de substituição) achamos o ponto crítico: $A(1,1,-1/2)$. Vamos achar as derivadas parciais de segunda ordem neste ponto:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2.$$

Vamos agora classificar o ponto encontrado, para tal temos que ver os sinais dos menores silvestrianos: $H_1 = 2 > 0$, $H_2 = -6 < 0$ e $H_3 = -20 < 0$, logo concluímos que é um ponto sela. ■

7) Dada a função $z = x^2 + y^2 + 6$ na região $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$, determine os seus extremos absolutos.

Resolução. Vamos, primeiro, determinar os pontos estacionários:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0.$$

Resolvendo o sistema obtemos $M_0(0;0) \notin \Omega$. Vamos agora investigar os extremos na fronteira de Ω. Para $x^2 + y^2 = 1$: $z = 1 + 6 = 7$; para $x^2 + y^2 = 9$: $z = 9 + 6 = 15$.

Assim,

$$z_{max} = \max\{7, 15\} = 15, \; z_{min} = \min\{7, 15\} = 7. \quad ■$$

8) Dada a superfície $z = x^2 - 2xy + y^2$, determine a equação do plano tangencial no ponto $M(1,1,0)$.

Resolução. Temos $z'_x|_M = 2x - 2y|_M = 0$, $z'_y|_M = -2x + 2y|_M = 0$. Logo, a equação do plano tangencial tem a forma $z = 0$. ■

9) Dada a superfície $z = \dfrac{x^2}{2} - y^2$, determine a equação do plano tangencial no ponto $M(2,-1,1)$.

Resolução. Temos $z'_x|_M = x|_M = 2$, $z'_y|_M = -2y|_M = 2$. Logo, a equação do plano tangencial tem a forma $z - 1 = 2(x-2) + 2(y+1)$. ■

14 Unidade XIV. Integral duplo

14.1 Introdução

A generalização do integral definido no caso de funções de duas variáveis é o *integral duplo*. Nesta unidade iremos definir o integral duplo como o limite da soma integral. Iremos estudar como passar do integral duplo para o integral reiterado e abordaremos as principais propriedades do integral duplo.

14.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Definir integral duplo;

2) Passar do integral duplo para o integral reiterado;

3) Identificar as propriedades principais do integral duplo.

14.3 Integral duplo como limite da soma integral

Vamos considerar a função contínua $f(x,y)$ definida no domínio D do plano Oxy. Partimos a região em n regiões elementares D_i, $i = 1, 2, \ldots < n$, cuja área vamos denotar por ΔS_i e o diâmetro denotamos por d_i. Em cada domínio D_i escolhemos um ponto arbitrário $M_i(\zeta_i, \eta_i)$, multiplicamos o valor $f(\zeta_i, \eta_i)$ por ΔS_i e compomos a soma

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i, \eta_i)\Delta S_i. \tag{30}$$

Esta soma chama-se *soma integral* da função $f(x,y)$ num domínio qualquer D. Vejamos o limite de (30) quando n tende para infinito de tal modo que $\max d_i \to 0$. Se este limite existe e não depende do modo como partimos D e nem da escolha do ponto $M_i(\zeta_i, \eta_i)$, então chamaremos *integral duplo* de $f(x,y)$ e denotamos por

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy.$$

Vejamos agora o caso particular quando $f(x,y)$ é uma função contínua definida no rectângulo $\Pi = [a,b] \times [c,d]$. Partimos o segmento $[a,b]$ em n partes $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ e o segmento $[c,d]$ partimos em m partes $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = d$. Esta partição dos segmentos corresponde a partição τ do rectângulo Π em nm pequenos rectângulos $\Pi_{ik} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{k-1}, y_k]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Denotemos $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, $d_{ik} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_k)^2}$. A expressão

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(\zeta_i, \eta_k)\Delta x_i \Delta y_k \tag{31}$$

chamaremos *soma integral* de $f(x,y)$ correspondente a dada partição τ. Diremos que a função $f(x,y)$ é *integrável* no rectângulo $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ se para qualquer que seja a partição τ desse rectângulo, a soma integral (31) tem limite quando $d = \max\limits_{i,k} d_{ik}$ tende para zero. A notação usada é

$$\iint_\Pi f(x,y)\, dxdy.$$

Exemplo 69. *Dada a região* $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1\}$, *calcule o integral* $\iint\limits_{\Pi} xy\,dxdy$ *como limite da soma integral.*

Resolução. Vamos partir este quadrado por meio de rectas $x = i/n$ e $y = k/n$ $(i,k = 1,2,\ldots,n-1)$. Compondo a soma integral temos:

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{i}{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n^4}(1+2+\cdots+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} \to \frac{1}{4} = \iint\limits_{\Pi} xy\,dxdy, \ n \to \infty.$$

Teorema 20. *Se a função* $z = f(x,y)$ *é contínua no domínio fechado* D, *então ela é integrável nesse domínio.*

14.4 Passagem do integral duplo para reiterado

O cálculo do integral definido reduz-se ao cálculo sucessivo de dois integrais definidos. Consideremos o integral $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$, que expressa o volume do corpo limitado superiormente pela superfície $z = f(x,y)$. Seja $S(x)$ a área resultante do corte feito pelo plano perpendicular ao eixo Ox, $x = a$ e $x = b$ são as equações que limitam esse corpo. O volume é

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Vamos considerar que D é um trapézio curvilíneo limitado pelas rectas $x = a$ e $x = b$ e a curvas $y = \varphi_1(x)$ e $y = \varphi_2(x)$ sendo $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ contínuas e $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Então $S(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ e

$$V = \int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Temos assim o seguinte teorema.

Teorema 21. *Seja* $f : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ *e suponhamos que* $f(x,y)$ *é integrável em* D *segundo Riemann. Suponhamos, também, que para qualquer recta paralela ao eixo* Oy *ela contém o segmento* $[\varphi_1(x), \varphi_2(x)]$ *ou intersecta somente dois pontos da fronteira* $S = \partial D$ *com ordenadas* $\varphi_1(x)$ *e* $\varphi_2(x)$, *onde* $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$. *Suponhamos que, para qualquer* $x \in [a,b]$, *existe a função*

$$I(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy, \tag{32}$$

onde $[a,b]$ *é a projecção de* D *no eixo* Ox. *Então* $I(x)$ *é integrável em* $[a,b]$ *e tem lugar a igualdade*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \tag{33}$$

Para o caso particular quando D é um rectângulo $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ o teorema anterior tem a seguinte formulação.

Teorema 22. *Seja* $f : \Pi \mapsto \mathbb{R}$, $\Pi \subset \mathbb{R}^2$, $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ *e suponhamos que* $f(x,y)$ *é integrável em* Π. *Suponhamos, também, que para qualquer* $x \in [a,b]$ *existe a função*

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{34}$$

Então $I(x)$ *é integrável em* $[a,b]$ *e tem lugar a igualdade*

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{35}$$

Exemplo 70. *Passe o integral duplo* $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ *para integral reiterado, onde a região* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$.

Resolução. Temos um anel delimitado pelas circunferências $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$. Assim,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-3}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f\,dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f\,dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f\,dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f\,dy.$$

Exemplo 71. *No integral duplo* $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, *coloque os limites de integração numa e noutra ordem, sabendo que* D *é um triângulo cujos vértices são* $O(0,0)$, $A(2,1)$ *e* $B(-2,1)$.

Resolução. Temos:

$$\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-x/2}^{1} f(x,y)dy + \int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x/2}^{1} f(x,y)dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-2y}^{2y} f(x,y)dx.$$

Exemplo 72. *Mude a ordem de integração no integral* $\displaystyle\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\,dy$.

Resolução. Temos:

$$\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{8} dy \int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

14.5 Propriedades do integral duplo

Podemos notar que a construção do integral duplo numa região D repete os procedimentos da construção do integral para uma função a uma variável num segmento. As propriedades também são análogas. Vamos aqui enunciá-las.

1. $\iint\limits_D cf(x,y)\,dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, onde c é constante.

2. $\iint\limits_D (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$.

3. Se a região D partimos em duas subregiões D_1 e D_2 tais que $D_1 \cup D_2 = D$, então

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy \cup \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

4. Se na região D é válida a desigualdade $f(x) \geq 0$, então $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geq 0$. Se na região D as funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ satisfazem a desigualdade $f(x,y) \geq g(x,y)$, então

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy.$$

5. $\iint\limits_D dxdy = \text{Área de } D$

6. Se a função $f(x,y)$ é contínua na região fechada D, cuja área é igual a $|D|$, então

$$m|D| \leq \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \leq M|D|,$$

onde m e M são o menor e maior valores de $f(x,y)$ em D.

7. Se a função $f(x,y)$ é contínua na região fechada D, cuja área é igual a $|D|$, então nesta região existe um ponto (ζ,η) tal que $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(\zeta,\eta)|D|$. O valor

$$f(\zeta,\eta) = \frac{1}{|D|}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

chamaremos *valor médio da função* $f(x,y)$ na região D.

14.6 Exercícios

1) Dada a região $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$, calcule o integral $\iint\limits_\Pi (x+y)\,dxdy$ como limite da soma integral;

2) No integral duplo $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, passe para o integral reiterado, se D é limitado pelas linhas $y = 2-x^2$, $y = 2x-1$;

3) No integral duplo $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, reescreva-o numa e noutra ordem de integração se D é um triângulo fechado com vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$;

4) Troque a ordem de integração no integral reiterado $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$;

5) Troque a ordem de integração no integral reiterado $\displaystyle\int_{1}^{e} dx \int_{0}^{\ln x} f(x,y)\,dy$;

6) Troque a ordem de integração no integral reiterado $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$;

7) Troque a ordem de integração no integral reiterado $\displaystyle\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} f(x,y)\,dx$;

8) Troque a ordem de integração no integral reiterado $\displaystyle\int_{0}^{1} dx \int_{(1-x)^2/2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$.

14.7 Respostas

1) 1;

2) $\displaystyle\int_{-3}^{1} dx \int_{2x-1}^{2-x^2} f(x,y)\,dy$;

3) $\displaystyle\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} dy \int_{1}^{y} f(x,y)dx$;

4) $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$;

5) $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$;

6) $\displaystyle\int_{1}^{2} dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$;

7) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,y)\, dx\,;$

8) $\int\limits_0^{1/2} dy \int\limits_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dy + \int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\, dy\,.$

14.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 14.3, 14.4 e 14.5;

2) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

3) Assistir o vídeo:
   $www.youtube.com/watch?v = kxp_I B83i_I$
   $www.youtube.com/watch?v = HwdCDW - k7w8$

4) Resolver os exercícios do parágrafo 14.6 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 2121, 2122, 2123, 2125, 2126, 2127, 2128, 2136, 2138 e 2143.

14.9 Auto-avaliação

1) Dê a definição de integral duplo;

2) Enuncie as principais propriedades do integral duplo;

3) Explique como se faz a passagem do integral duplo para o integral reiterado;

4) Dada a região $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3,\ 4 \le y \le 6\}$, calcule o integral $\iint\limits_{\Pi} xy\, dxdy$ como limite da soma integral;

5) No integral duplo $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, coloque os limites de integração numa e noutra ordem, sabendo que D é delimitado pelas linhas que unem os pontos $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(0,2)$ e $D(-1,1)$;

6) No integral duplo $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, coloque os limites de integração numa e noutra ordem, sabendo que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le y\}$;

7) No integral reiterado $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x,y)dy$, mude a ordem de integração;

8) Passe o integral duplo $\iint\limits_D f(x,y)\, dxdy$, onde D está limitada pelas rectas $x = 2$, $y = x$ e pela hipérbole $xy = 1$, para o integral reiterado.

14.10 Chave de correcção

1) Veja a definição no parágrafo 14.3 desta unidade;

2) Veja a definição no parágrafo 14.5 desta unidade;

3) Veja a definição no parágrafo 14.4 desta unidade;

4) Dada a região $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ 4 \leq y \leq 6\}$, calcule o integral $\displaystyle\iint\limits_{\Pi} xy\,dxdy$ como limite da soma integral.

   Resolução. Vamos partir este quadrado em rectas $x = 1 + i\dfrac{2}{n}$ e $y = 4 + j\dfrac{2}{n}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Compondo a soma integral temos:

$$\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{2i}{n}\right)\left(4+\frac{2j}{n}\right) = \frac{4(2n+1)(5n+1)}{n^2} \to 40,\ n \to \infty. \quad \blacksquare$$

5) No integral duplo $\displaystyle\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, coloque os limites de integração numa e noutra ordem, sabendo que D é delimitado pelas linhas que unem os pontos $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(0,2)$ e $D(-1,1)$.

   Resolução. Temos:

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^{y} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{y-2}^{2-y} f(x,y)dx = \int_{-1}^{0} dx \int_{-x}^{x+2} f(x,y)dy + \int_0^1 dx \int_x^{-x+2} f(x,y)dy. \quad \blacksquare$$

6) No integral duplo $\displaystyle\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, coloque os limites de integração numa e noutra ordem, sabendo que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq y\}$.

   Resolução. Temos:

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx. \quad \blacksquare$$

7) No integral reiterado $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy$, mude a ordem de integração.

   Resolução. A região de integração define-se pelas desigualdades: $0 \leq x \leq 1$, $2x \leq y \leq 3x$, logo encontramos os pontos extremos para y: 0 e 3.

$$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)dx + \int_2^3 dy \int_{y/3}^{1} f(x,y). \quad \blacksquare$$

8) Passe o integral duplo $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, onde D está limitada pelas rectas $x=2$, $y=x$ e pela hipérbole $xy=1$, para o integral reiterado.

Resolução. Passando para o integral reiterado temos:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy. \quad \blacksquare$$

15 Unidade XV. Cálculo de integrais duplos

15.1 Introdução

Na unidade anterior vimos como passar do integral duplo para o integral reiterado. Nesta unidade iremos *calcular os integrais duplos nos sistemas cartesiano e polar.* Veremos algumas *aplicações geométricas e físicas do integral duplo*, nomeadamente, *a área, volume e massa duma figura plana.*

15.2 Objectivos

No fim desta unidade didáctica o aluno será capaz de:

1) Calcular integrais duplos;

2) Fazer a mudança de variáveis no integral duplo;

3) Calcular a área, volume e massa duma figura plana usando o integral duplo.

15.3 Cálculo de integrais duplos no sistema cartesiano

Na unidade anterior vimos como é que o integral duplo se reduz ao integral reiterado. Vejamos agora alguns exemplos de cálculo do integral duplo no sistema cartesiano.

Exemplo 73. *Calcule o integral duplo* $\iint\limits_D \left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y\right)\,dxdy$, *onde* D *é o rectângulo definido pelas desigualdades* $-1\le x\le 1$, $-2\le y\le 2$.

Resolução. Passando para o integral reiterado temos:

$$\iint\limits_D \left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y\right)\,dxdy=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-2}^{2}\left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y\right)\,dy=\int\limits_{-1}^{1}\left(y-\frac{1}{3}xy-\frac{1}{8}y^2\right)\Big|_{-2}^{2}\,dx=8.$$

Exemplo 74. *Calcule o integral duplo* $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, *onde* D *está limitada pelas linhas* $y=x^2$, $y=x$.

Resolução. A projecção da região D no eixo Ox dá-nos o segmento $[0,1]$. Assim,

$$\iint\limits_D (x+y)\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}(x+y)\,dy=\int\limits_0^1\left(xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{x}\,dx=\int\limits_0^1\left(x^2+\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)\,dx=\frac{3}{20}.$$

Exemplo 75. *Calcule o integral duplo* $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy$, *onde* D *está limitada pelas linhas* $y=2-x^2$, $y=2x-1$.

Resolução. A projecção da região D no eixo Ox dá-nos o segmento $[-3,1]$. Assim,

$$\iint\limits_D (x-y)\,dxdy=\int\limits_{-3}^{1}dx\int\limits_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)\,dy=\int\limits_{-3}^{1}\left(xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{2x-1}^{2-x^2}\,dx=\int\limits_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)\,dx=\frac{64}{15}.$$

15.4 Mudança de variáveis no integral duplo

De modo a simplificar o cálculo do integral duplo, usamos frequentemente o método de substituição, isto é introduzimos novas variáveis. Vamos definir a transformação das variáveis independentes x e y como

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v). \tag{36}$$

Se as funções (36) possuem numa certa região Ω do plano Ouv derivadas contínuas de primeira ordem e determinante diferente de zero

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}, \tag{37}$$

e a função $f(x, y)$ é contínua na região D, então é justa a *fórmula de mudança de variáveis no integral duplo*:

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_\Omega f(\varphi(u, v), \psi(u, v))|J(u, v)|\, dudv. \tag{38}$$

O determinante funcional (37) chamaremos *determinante de Jacob* ou *jacobiano.*

Consideremos o caso particular de mudança de variáveis muito usado quando se calcula o integral duplo, que são as coordenadas polares ρ e θ. Na qualidade de u e v vamos colocar as coordenadas polares ρ e θ. Elas estão relacionadas com as coordenadas cartesianas segundo as fórmulas $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$. O jacobiano da transformação é

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Neste caso, a fórmula (38) assume a forma

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_\Omega f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho d\theta, \tag{39}$$

onde Ω é a região no sistema polar de coordenadas correspondente à região D no sistema cartesiano.

Observação 3. *De notar o seguinte:*

1) *A passagem para o sistema de coordenadas polares é útil quando o integrando tem a forma* $f(x^2 + y^2)$, *a região* D *é um círculo, um anel ou parte deles.*

2) *Na prática a passagem para coordenadas polares faz-se por meio da mudança* $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $dxdy = \rho d\rho d\theta$. *A transformação da região* D *na região* Ω *não se faz, mas sim faz-se a compatibilização dos sistemas cartesiano e polar e determinam-se os respectivos limites de integração segundo* ρ *e* θ.

Exemplo 76. *Calcule* $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}\, dxdy$, *onde* D *é o círculo* $x^2 + y^2 \le 9\}$.

Resolução. Usando a fórmula (39), passamos para as coordenadas polares:

$$\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy = \iint_\Omega \sqrt{9-(\rho\cos\theta)^2-(\rho\sin\theta)^2}\rho\,d\rho d\theta = \iint_\Omega \rho\sqrt{9-\rho^2}\,d\rho d\theta.$$

A região D no sistema polar determina-se pelas desigualdades $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 3$. De notar que a região D, que é um círculo, transforma-se na região Ω que é um rectângulo. Assim,

$$\iint_\Omega \rho\sqrt{9-\rho^2}\,d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \rho\sqrt{9-\rho^2}\,d\rho = 18\pi.$$

Exemplo 77. *Calcule* $\displaystyle\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, *onde* $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4 \le x^2+y^2 \le 9\}$.

Resolução. Passando para coordenadas polares $x = r\cos\phi$ e $y = r\sin\phi$ temos:

$$\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_\Omega \sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi}\;r\,drd\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_2^3 r^2\,dr = \frac{38\pi}{3}.$$

15.5 Aplicações de integrais duplos

Vejamos algumas aplicações do integral duplo.

1) **Área**

   Se $f(x,y)=1$ então $A = \displaystyle\iint_D dxdy$ dá-nos a área da região D.

2) **Volume**

   O integral duplo $V = \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ dá-nos o volume do corpo delimitado superiormente pela superfície $z = f(x,y)$ e cuja base é D.

3) **Massa duma figura plana**

   A massa dum disco plano D, cuja densidade variável é $f(x,y)$, calcula-se pela fórmula

$$m = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

Exemplo 78. *Calcule o volume do corpo delimitado pelas superfícies* $x^2+y^2-z+1=0$ *e* $x^2+y^2+3z-7=0$.

Resolução. O corpo é delimitado por dois parabolóides. Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= z-1 \\ x^2+y^2 &= -3z+7 \end{cases}$$

determinamos a equação da linha da sua intersecção: $x^2+y^2=1$, $z=2$. O volume será igual a diferença de volumes de dois corpos cilindricos com a mesma base $x^2+y^2\le 1$ e limitado superiormente pelas superfícies $z=\frac{1}{3}(7-x^2-y^2)$ e $z=1+x^2+y^2$. Assim,

$$V=\iint_D \frac{1}{3}(7-x^2-y^2)\,dxdy-\iint_D(1+x^2+y^2)\,dxdy.$$

Passando para coordenadas polares temos:

$$V=\frac{1}{3}\iint_\Omega(7-\rho^2)\rho\,d\rho d\theta-\iint_\Omega(1+\rho^2)\rho\,d\rho d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(7\rho-\rho^3)\,d\rho-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(\rho+\rho^3)\,d\rho=\frac{2}{3}\pi.$$

Exemplo 79. *Usando o integral duplo, calcule a área da da figura delimitada por* $(x^3+y^3)^2=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$ *(*$x\ge 0,\ y\ge 0$*)*

Resolução. Passando para coordenadas polares temos $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3\theta+\cos^3\theta}}$. Assim,

$$A=\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\sin^3\theta+\cos^3\theta}}}\rho d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln(1+\sqrt{2}).$$

Exemplo 80. *Calcule a massa da figura que se encontra no primeiro quadrante, delimitada pela elipse* $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ *e eixos coordenados, sabendo que a sua densidade em cada ponto* (x,y) *é proporcional ao produto das suas coordenadas.*

Resolução. Seja k o coeficiente de proporcionalidade, logo a densidade no ponto (x,y) é $f(x,y)=kxy$. Assim,

$$m=k\int_0^2 x\,dx\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}y\,dy=\frac{k}{2}.$$

15.6 Exercícios

1) Calcule o integral duplo $\iint_D y\ln x\,dxdy$, se D está limitada pelas linhas $xy=1$, $y=\sqrt{x}$, $x=2$;

2) Calcule o integral duplo $\iint_D(3x+y)\,dxdy$, se D está definida pelas desigualdades $x^2+y^2\le 9$, $y\ge\frac{2}{3}x+3$;

3) Passando para coordenadas polares, calcule o integral duplo $\iint_D\frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, se D está limitada pela semicircunferência $y=\sqrt{1-x^2}$ e o eixo das abcissas;

4) Passando para coordenadas polares, calcule o integral duplo $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, se D está limitada pelas linhas $x^2+y^2=a^2$ e $x^2+y^2=4a^2$;
5) Usando o integral duplo, calcule a área da figura limitada pelas linhas $x=y^2-2y$ e $x+y=0$;
6) Usando o integral duplo, calcule a área da figura limitada pelas linhas $y=4x-x^2$ e $y=2x^2-5x$;
7) Usando o integral duplo, calcule o volume do corpo limitado pelas superfícies $x^2+y^2=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$;
8) Usando o integral duplo, calcule o volume do corpo limitado pelas superfícies $z=5x$, $x^2+y^2=9$, $z=0$;
9) Calcule a massa dum lâmina quadrada cujo lado é igual a a, sabendo que a densidade em qualquer ponto é proporcional ao quadrado da distância que vai desse ponto até um dos vértices do quadrado;
10) Calcule a massa dum disco de raio igual a r, sabendo que a densidade em qualquer ponto é inversamente proporcional a distância que vai desse ponto até ao centro e é igual a δ na fronteira do disco.

15.7 Respostas

1) $\frac{5}{8}(2\ln 2-1)$;
2) $-2\frac{94}{169}$;
3) $\frac{\pi}{2}\ln 2$;
4) $\frac{14}{3}\pi a^2$;
5) $\frac{1}{6}$;
6) $\frac{27}{2}$;
7) $8\pi-\frac{32}{3}\sqrt{2}$;
8) 90;
9) $\frac{2}{3}a^4k$, onde k é o coeficiente de proporcionalidade;
10) $2\pi r^2\delta$.

15.8 Tarefas

Para esta unidade o estudante deverá desenvolver as seguintes actividades:

1) Ler os parágrafos 15.3, 15.4 e 15.5;
2) Elaborar uma lista dos principais conceitos abordados;

3) Assistir os vídeos:

   $www.youtube.com/watch?v = -6nxXrBLAoc$

   $www.youtube.com/watch?v = t3QvC7Ub5pE$

4) Resolver os exercícios do parágrafo 15.6 desta unidade;

5) Do livro de B. Demidovitch, resolver os exercícios 2145, 2146, 2148, 2160, 2165, 2180, 2194, 2195, 2225 e 2226.

15.9 Auto-avaliação

1) Explique o método de mudança de variável no integral duplo;

2) Fale sobre algumas aplicações do integral duplo;

3) Calcule o integral duplo $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, onde D está limitada pelas rectas $x = 2$, $y = x$ e pela hipérbole $xy = 1$;

4) Calcule o integral duplo $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, onde D está limitada pelas linhas $y = x^2$, $y = 0$ e $x+y-2 = 0$;

5) Calcule $\iint\limits_D \ln(x^2 + y^2)\, dxdy$, se D é a região que se encontra entre as circunferências $x^2 + y^2 = e^2$ e $x^2 + y^2 = e^4$;

6) Usando o integral duplo, calcule a área da da figura delimitada por $(x + y)^4 = ax^2y$;

7) Usando o integral duplo, calcule a área da leminiscata $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$;

8) Usando o integral duplo, calcule o volume do corpo limitado pelas superfícies $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$ e situado no primeiro octante.

15.10 Chave de correcção

1) Veja a definição no parágrafo 15.4 desta unidade;

2) Veja a definição no parágrafo 15.5 desta unidade;

3) Calcule o integral duplo $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy$, onde D está limitada pelas rectas $x = 2$, $y = x$ e pela hipérbole $xy = 1$.

   Resolução. Passando para o integral reiterado temos:

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int\limits_1^2 (x^2 - x) dx = 9/4. \quad \blacksquare$$

4) Calcule o integral duplo $\displaystyle\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, onde D está limitada pelas linhas $y=x^2$, $y=0$ e $x+y-2=0$.

Resolução. Passando para o integral reiterado temos:

$$\iint\limits_D (x+2y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} (x+2y)dx = \frac{29}{20}. \quad \blacksquare$$

5) Calcule $\displaystyle\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy$, se D é a região que se encontra entre as circunferências $x^2+y^2=e^2$ e $x^2+y^2=e^4$.

Resolução. Passando para coordenadas polares temos

$$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy = 2\iint\limits_D \rho\ln\rho\,d\rho d\theta = 2\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_e^{e^2} \rho\ln\rho\,d\rho = \pi e^2(3e^2-1). \quad \blacksquare$$

6) Usando o integral duplo, calcule a área da da figura delimitada por $(x+y)^4 = ax^2y$.

Resolução. Passando para coordenadas polares temos $\rho = a\cos^4\theta\sin^2\theta$. Assim,

$$A = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{a\cos^4\theta\sin^2\theta} \rho d\rho = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^9\theta\sin^5\theta d\theta = \frac{a^2}{210}. \quad \blacksquare$$

7) Usando o integral duplo, calcule a área da leminiscata $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$.

Resolução. Passando para coordenadas polares temos $\rho^2 = a^2\sin 2\theta$. Assim,

$$A = 4\iint\limits_D \rho d\rho d\theta = 4\int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}} \rho d\rho = 2a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \sin 2\theta d\theta = a^2. \quad \blacksquare$$

8) Usando o integral duplo, calcule o volume do corpo limitado pelas superfícies $y=1+x^2$, $z=3x$, $y=5$, $z=0$ e situado no primeiro octante.

Resolução. O corpo cujo volume pretendemos calcular é limitado superiormente pelo plano $z=3x$, de lado pelo cilindro parabólico $y=1+x^2$ e o plano $y=5$. A região D é limitada pela parábola $y=1+x^2$ e as rectas $y=5$ e $x=0$. Assim,

$$\iint\limits_D 3x\,dxdy = 2\int\limits_0^2 x\,dx \int\limits_{1+x^2}^5 dy = 12.$$