P11: CASAS Y JIMENEZ

Table of Contents

1) Integración de K_theta para theta = pi/6, pi/4, pi/3, pi/3 i 3*pi/4:

```
clear all;
format long g;
close all;
clc;

%{
Para resolver este apartado utilizaremos tres cuadraturas distintas,
lo cual nos permitirá dar mayor validez a nuestro resultado y
contrastar y comparar su funcionamiento para integrar:

K = @(phi)(1./((1-(k.^2).*(sin(phi)))).^(1/2));

Se resuelve la integral mediante:

- Trapezoidal Compuesta: Dado que funciona especialmente bien para
funciones periódicas como ésta (aparece un seno).

- Cuadratura de Clenshaw - Curtis: Dado que se fundamenta en los
polinomios de Chebyshev, más estables numéricamente, y que permite así
obtener un buen resultado para la mayoría de casos.

- Cuadratura de Féjer: Dado que se corresponde con la cuadratura de
Clenshaw - Curtis abierta (sin incluir los extremos), y que aplicada
 sobre
integrales que presentan alguna singularidad es robusta pero lenta y
nos puede proporcionar una primera aproximación al valor de la
integral que nos sirva de referencia a la hora de aplicar otros
 métodos.

Las funciones que calculan el valor de la integral mediante los
métodos anteriormente presentados son, respectivamente, las
 siguientes:

function I_trap_c = trapez_comp(a, b, m, fun)
k = 0:m;
H = (b-a)/m;
xk = a+k*H;
```

```
sumatori = 0;
for i=0:m-1
    sumatori = sumatori + (fun(xk(i+1))+fun(xk(i+2)));
end
I_trap_c = (H/2)*sumatori;
end


function integral = cuadratura_cc(a, b, N, fun)
%   Fer cuadratura Clenshaw-Curtis:
%   La funcio entregada fun ha de ser capaÃ§ de tractar vectors si se
 li
%   donen com arguments.
j = [0:1:N];
xcheb = cos(j.*pi./N);
xk = a + ((b-a)./2).*(xcheb+1);
fx = fun(xk);

Wj = [];
p = (1/((N^2)-1));
for j=0:N
    if j==0||j==N
        Wj = [Wj p];
    else
        suma = 0;
        % n serÃ  sempre par per aixo podem dividir per 2.
        for k=0:N/2
            if k == 0 || k == N/2
                suma = suma + (1/2)*(1/(1-4*(k^2)))*cos((2*pi*k*j)/N);
            else
                suma = suma + (1/(1-4*(k^2)))*cos((2*pi*k*j)/N);
            end

        end
        Wj= [Wj (4/N)*suma];
    end
end

integral = Wj*fx';
integral = ((b-a)/2)*integral;

end


function I_fej= fejer(a, b, N, fun)
%   Cuadratura de Fejer, que es com la de Clenshaw pero oberta.
%   La funcio entregada fun ha de ser capaÃ§ de tractar vectors si se
 li
%   donen com arguments.

if(1 == mod(N, 2))
    error('"N" HA DE SER PARELL!!');
end
```

```
k = 1:N;
Wj = zeros(1,N);
thk = ((2.*k-1).*pi)/(2.*N);
posicio = 0;

for j = thk
    posicio = posicio + 1;
    sumatori=0;
    for i = 1:N/2
        sumatori = sumatori + (cos(2*i*j)/(4*(i^2)-1));
    end

    Wj(posicio) = (2/N)*(1-2*sumatori);
end

xk = cos(thk);
phi = b + (b-a).*(1/2).*(xk-1);
f_phis = fun(phi);
I_fej = ((b-a)/2).*(Wj*f_phis');
end
%}

%Límites de integración:
a = 0;
b = pi/2;

%Requerimiento del problema: 10 cifras significativas
tol = 10^-10;

valorsTheta = [pi/6, pi/4, pi/3, pi/3, 3*pi/4];
for theta = valorsTheta
    %La funció a integrar s'actualitza segons el valor de theta:
    k = sin(theta/2);
    K = @(phi)(1./((1-(k.^2).*(sin(phi)).^2)).^(1/2));

    m1 = 2;
    error = 1;
    actual = 1;
    while error > tol %TRAPEZOIDAL COMPUESTA
        I_trap_c = trapez_comp(a, b, m1, K);
        error = abs(actual - I_trap_c);
        actual = I_trap_c;
        m1 = m1+10;
    end

    m2 = 2;
    error = 1;
    actual = 1;
    while error > tol %CLENSHAW-CURTIS
        I_cc = cuadratura_cc(a, b, m2, K);
        error = abs(actual - I_cc);
        actual = I_cc;
        m2 = m2+10;
    end
```

```
    m3 = 2;
    error = 1;
    actual = 1;
    while error > tol %FÉJER
        I_fej = fejer(a, b, m3, K);
        error = abs(actual - I_fej);
        actual = I_fej;
        m3 = m3+10;
    end
%Y proporciono los valores que voy obteniendo para cada valor de
 theta:
display = sprintf('Para theta = %d, el valor de K, según el método
 utilizado, es:', theta);
disp(display);
I_trap_c
I_cc
I_fej
end
```

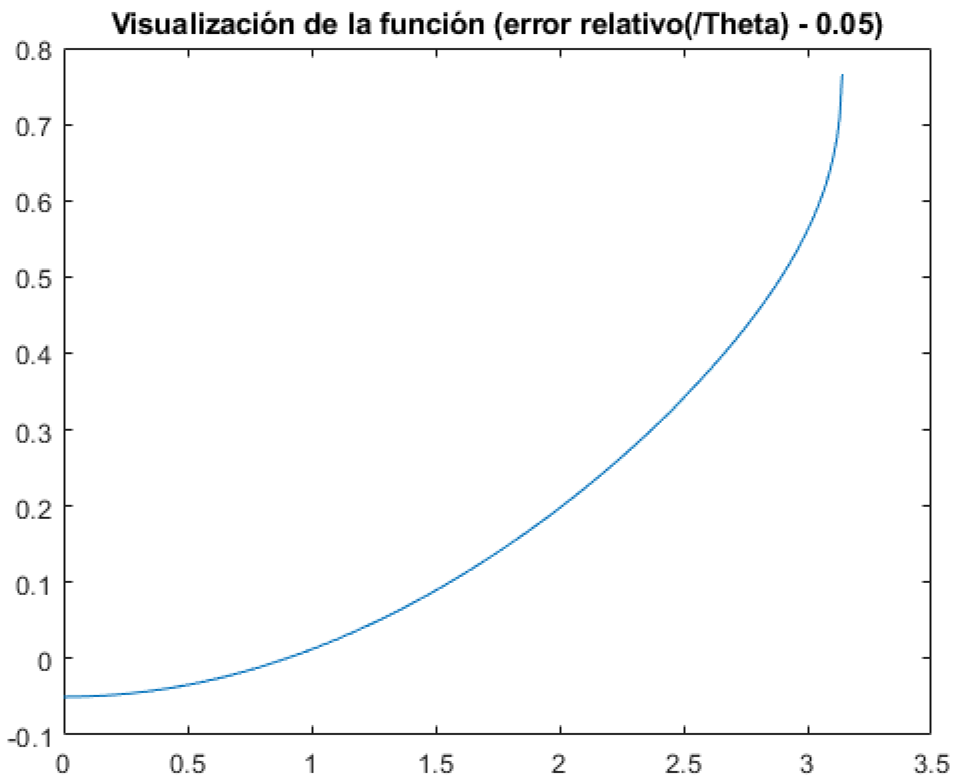
```
Para theta = 5.235988e-01, el valor de K, según el método utilizado,
 es:

I_trap_c =

          1.59814200211254


I_cc =

          1.59814200211254


I_fej =

          1.59814200211254

Para theta = 7.853982e-01, el valor de K, según el método utilizado,
 es:

I_trap_c =

          1.63358630745815


I_cc =

          1.63358630745815


I_fej =

          1.63358630745815
```

```
Para theta = 1.047198e+00, el valor de K, según el método utilizado,
 es:

I_trap_c =

          1.6857503548126


I_cc =

          1.6857503548126


I_fej =

          1.6857503548126

Para theta = 1.047198e+00, el valor de K, según el método utilizado,
 es:

I_trap_c =

          1.6857503548126


I_cc =

          1.6857503548126


I_fej =

          1.6857503548126

Para theta = 2.356194e+00, el valor de K, según el método utilizado,
 es:

I_trap_c =

          2.4000944591337


I_cc =

          2.4000944591337


I_fej =

          2.4000944591337
```

2) Aproximación del periodo para pequeñas oscilaciones. Ángulo a partir del cual el error de la aproximación supera 5%:

```
% En este archivo solo se hará el proceso de encontrar el 0 mediante
% Newton. La definición de la función a la que buscaremos el 0 es:
%{
function error = fa_funcio(theta)
% Aproximación del periodo del péndulo para pequeñas oscilaciones:
T_posc = 2*pi*((1/9.81)^(1/2));

k = sin(theta/2);
K = @(phi)(1./((1-(k.^2).*(sin(phi)).^2)).^(1/2));
a = 0;
b = pi/2;
% m son els nodes, posarem uns 200 per probar.
m = 100;
T_real = 4*((1/9.81)^(1/2))*fejer(a, b, m, K);

% Finalmente hacemos el error relativo y le restamos 0.05 porque el
enunciado pide encontrar donde se supera el 5%. Así ya preparamos la
función para el metodo de Newton:
error = ((abs(T_real - T_posc)/T_real) - 0.05);
end
%}

g = 9.81;
l = 1;

k = sin(theta/2);
a = 0;
b = 2*pi;

% Visualizacion de la funcion a la que buscaremos la raíz mediante
 Newton:
ys = [];
titu = [0:0.01:pi];
for i = titu
    ys = [ys fa_funcio(i)];
end
figure;
plot(titu, ys);
title('Visualización de la función (error relativo(/Theta) - 0.05)');


% Hacemos la exploración de Newton entre 0 y pi, sin incluir este
 porque
% son los valores que puede coger el angulo theta.
X = newton(0, pi-10^-5, 10^-3, 1000, @fa_funcio);
X
```

```
X =

         0.896151246394024
```



3) Representación de K_theta en función del ángulo:

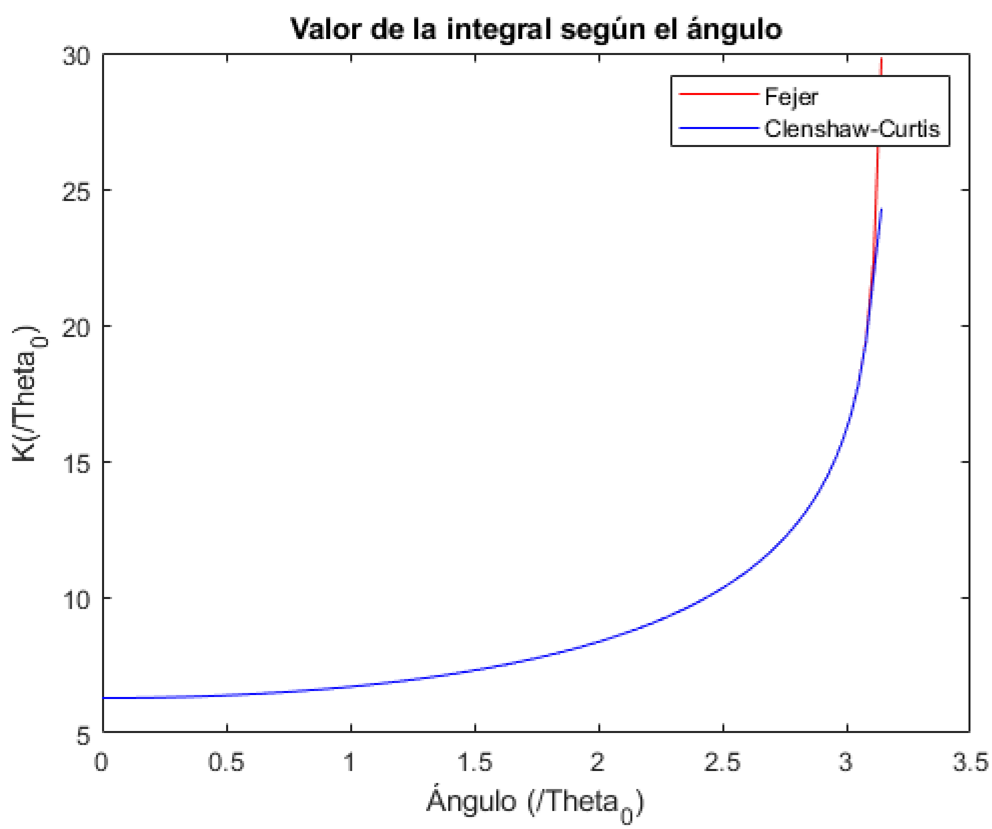
```
%{
En este apartado deberemos calcular y representar K_theta desde
 theta=0
hasta valores muy proximos al ángulo pi, para el cual prevemos que
la integral presentará una singularidad de tipo asintótico.

Observaremos también que el método de Féjer no funciona bien en
acercarnos a la singularidad.
%}
valorsTheta = [0:0.99*pi/100:pi]; %sin llegar a valer pi.
m = 200;
K_theta_cc = zeros(1,length(valorsTheta));
K_theta_fej = zeros(1,length(valorsTheta));
n = 1;
for theta = valorsTheta
    k = sin(theta/2);
```

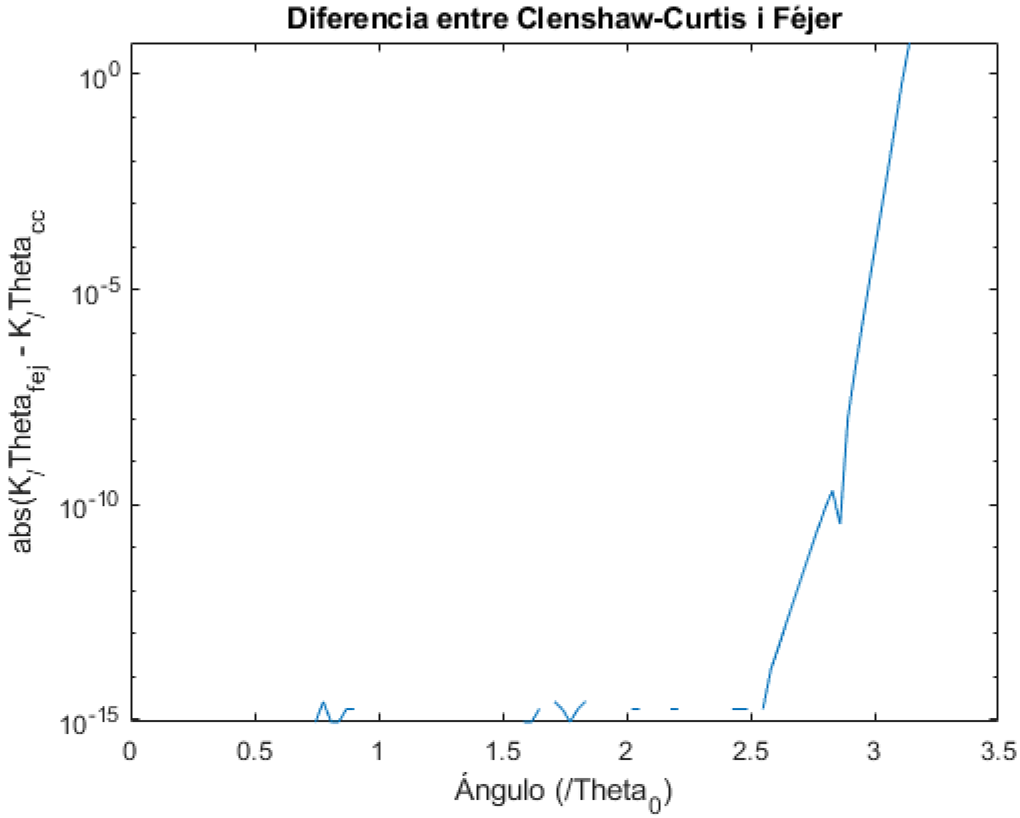
```
    K = @(phi)(1./((1-(k.^2).*(sin(phi)).^2)).^(1/2));
    K_theta_cc(n) = cuadratura_cc(a, b, m, K);
    K_theta_fej(n) = fejer(a, b, m, K);
    n = n + 1;
end
figure;
plot(valorsTheta, K_theta_fej, 'r');
hold on;
plot(valorsTheta, K_theta_cc, 'b');
title('Valor de la integral según el ángulo');
xlabel('Ángulo (/Theta_0)');
ylabel('K(/Theta_0)');
legend('Fejer','Clenshaw-Curtis');
hold off;
diferencia = abs(K_theta_fej - K_theta_cc);
figure;
semilogy(valorsTheta, diferencia);
title('Diferencia entre Clenshaw-Curtis i Féjer');
xlabel('Ángulo (/Theta_0)');
ylabel('abs(K_/Theta_f_e_j - K_/Theta_c_c');

%{
Observo que per a valors de theta compresos entre 0 i 2 la diferencia
entre el resultat de la integral amb Féjer i Clenshaw Curtis és
gairebé zero (s'arriba a precisió de màquina).

Tanmateix, a mesura que la theta va augmentant el seu valor i
acostant-se a pi, la cuadratura de Féjer comença a distanciar-se
de la de Clenshaw-Curtis de manera que, quan theta és gairebé pi,
la diferència entre les dues cuadratures és màxima.

Ara ens disposem a comprobar l'error de la cuadratura de Féjer quan
 ens
acostem a pi segons el nombre de punts utilitzats:
A l'eix X hi posarem les m per les quals evaluem i al Y hi posarem el
error maxim dels ultims punts més propers a pi ([pi-
pi/2:10^-2:pi-10^-15]).
%}
thetas = [pi-pi/2:10^-2:pi-10^-15];
propersAPi = sin(thetas/2);
Ms = [10:6:450];
anterior = ones(1, length(propersAPi));
actual = zeros(1, length(propersAPi));
error = zeros(1, length(propersAPi));
Ys = [];

for m = Ms
    comptador = 0;
    for k = propersAPi
        comptador = comptador + 1;
        K = @(phi)(1./((1-(k.^2).*(sin(phi)).^2)).^(1/2));
        actual(comptador) = fejer(a, b, m, K);
    end
    error = abs(actual - anterior);
```

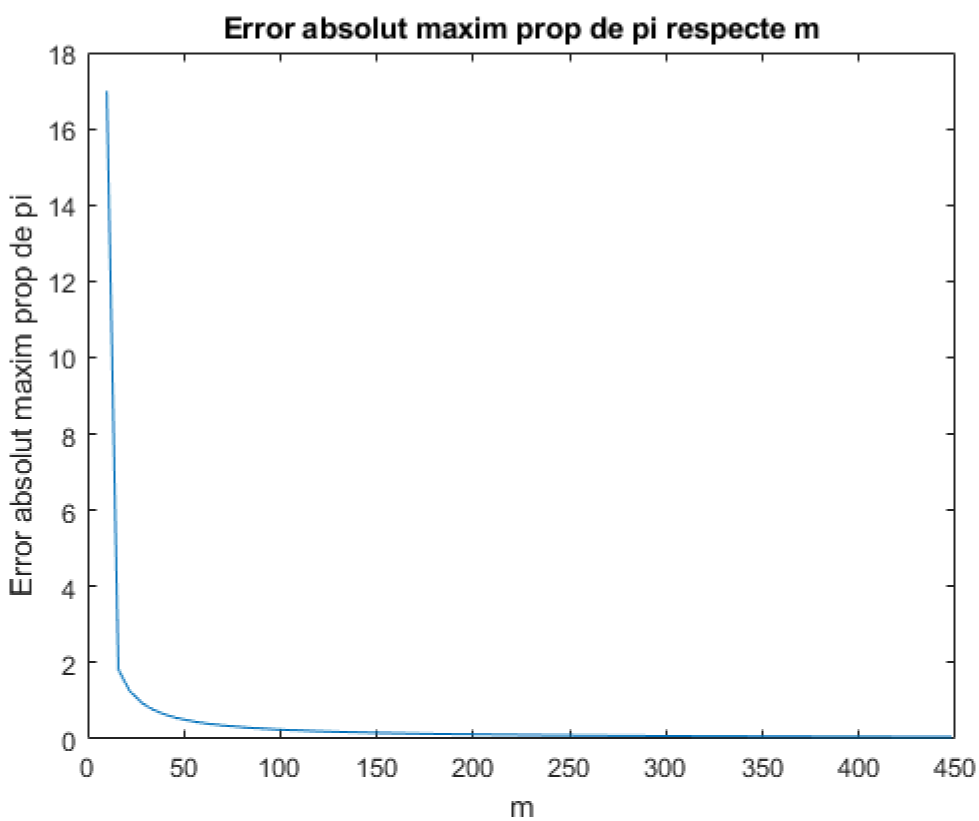
```
    anterior = actual;
    Ys = [Ys max(error)];
end
figure();
plot(Ms, Ys);
title('Error absolut maxim prop de pi respecte m');
xlabel('m');
ylabel('Error absolut maxim prop de pi');

% Tanmateix si fem salts de 10 en 10 trobem un resultat totalment
 diferent:
thetas = [pi-pi/2:10^-2:pi-10^-15];
propersAPi = sin(thetas/2);
Ms = [10:10:450];
anterior = ones(1, length(propersAPi));
actual = zeros(1, length(propersAPi));
error = zeros(1, length(propersAPi));
Ys = [];

for m = Ms
    comptador = 0;
    for k = propersAPi
        comptador = comptador + 1;
        K = @(phi)(1./((1-(k.^2).*(sin(phi)).^2)).^(1/2));
        actual(comptador) = fejer(a, b, m, K);
    end
    error = abs(actual - anterior);
    anterior = actual;
    Ys = [Ys max(error)];
end
figure();
plot(Ms, Ys);
title('Error absolut maxim prop de pi respecte m');
xlabel('m');
ylabel('Error absolut maxim prop de pi');


%Quan theta = pi:
theta = pi;
k = sin(theta/2);
K = @(phi)(1./((1-(k.^2).*(sin(phi)).^2)).^(1/2));
K_theta_fejPI = fejer(a, b, m, K);
K_theta_ccPI = cuadratura_cc(a, b, m, K);
K_theta_fejPI
K_theta_ccPI
%{
Tal com ens diu l'enunciat, quan theta = pi la integral és
impròpia. En interpretar el sentit físic que això té, deduïm que
aquesta integral NO és convergent, ja que si l'angle des del
qual és deixat anar (amb velocitat nula) el pèndol és pi, és a dir,
que el pèndol es troba en posició vertical, aleshores el seu periode
 no
pot donar cap valor concret, donat que el pèndol es quedarà quiet
en aquesta posició i així mai arribarà a oscil·lar.
```

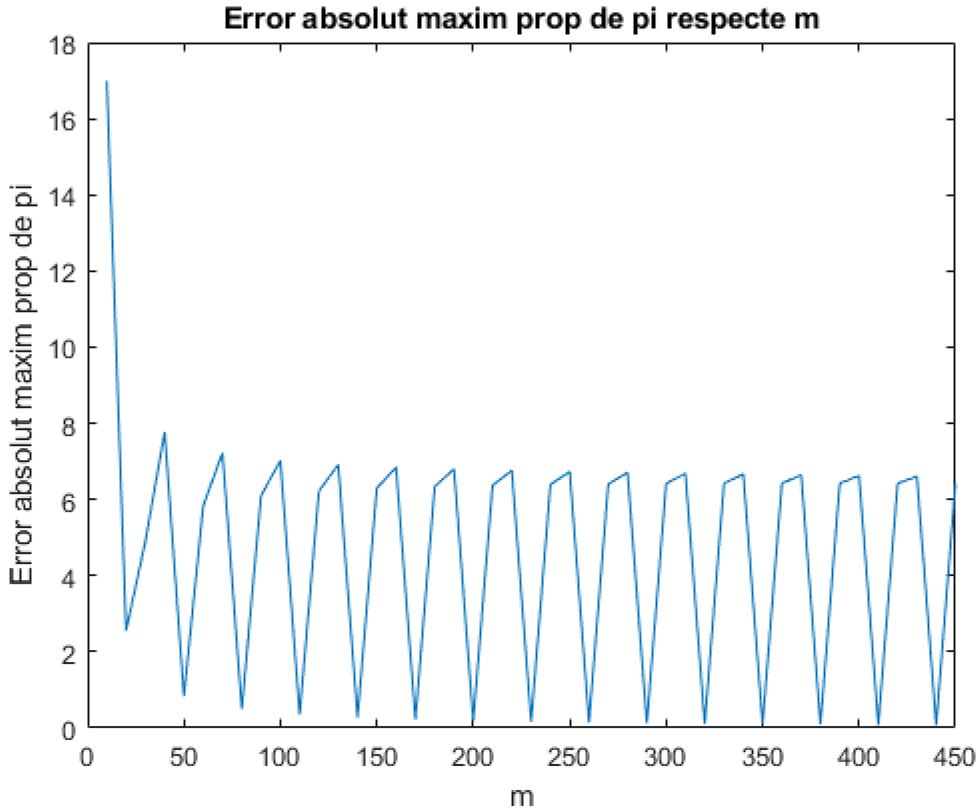
```
Observem que la quadratura que ens aporta un resultat lògic és
la de Clenshaw_Curtis, que proporciona -Inf com a resultat.
La cuadratura de Féjer, en canvi, ens dóna un valor exacte i així
erroni. Tal com hem pogut observar en els gràfics anteriors, aquesta
quadratura comença a funcionar malament a partir de theta = 2 i
arriba al seu error màxim quan theta~pi, que és quan la integral es fa
impròpia.
%}
```

```
K_theta_fejPI =

          26.4811509283591


K_theta_ccPI =

   Inf
```




Diferencia entre Clenshaw-Curtis i Féjer
abs(K,Theta_fej - K,Theta_cc
10^{0}
10^{-5}
10^{-10}
10^{-15}
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
Ángulo (/Theta_0)


Error absolut maxim prop de pi respecte m
Error absolut maxim prop de pi
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
m



Published with MATLAB® R2018b