Práctica 9: integración numérica (I - fórmulas compuestas de baja exactitud).

Introducción: en la primera parte de esta práctica se pretende distinguir los conceptos de (I) *grado de exactitud* y (II) *orden infinitesimal o de convergencia* de una regla de cuadratura. En clase de teoría se vió la regla compuesta de Simpson para los puntos x_k:

$$I_{2,m}(f) = \frac{H}{6}\left[f(x_0) + 2\sum_{r=1}^{m-1} f(x_{2r}) + 4\sum_{s=0}^{m-1} f(x_{2s+1}) + f(x_{2m})\right],\ E_{2,m}(f) = -\frac{b-a}{2880}H^4 f^{(4)}(\xi),$$

con $x_k = a + kH/2,\ k = 0, 1, \dots, 2m$ y $H = (b-a)/m$, siendo $[a, b]$ el intervalo de integración. Dicha fórmula es *inexacta* para polinomios de grado $r \geq 4$ y su error decrece como H^4 o m^{-4}.

En la segunda parte se va a determinar π mediante integración numérica de una función racional haciendo uso de la regla de Simpson compuesta.

1. **Exactitud:** calcular con la regla de Simpson compuesta las siguientes integrales triviales:

$$I_7 = \int_0^1 8x^7\,\mathrm{d}x = 1,\ I_4 = \int_0^1 5x^4\,\mathrm{d}x = 1,\ I_3 = \int_0^1 4x^3\,\mathrm{d}x = 1.$$

Para las tres integrales, tomar $m = 1, 10, 20, 40, 60, 70, 80$, calcular el error en cada una de ellas $\varepsilon_m = E_{2,m}$ para los diferentes valores de m y representar en `loglog` ε_m frente a m.

2. **Cálculo de π:** una de las muchas maneras de determinar π consiste en considerar la siguiente integral inmediata:

$$I(a) = \int_0^a \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\arctan(a).$$

De este modo, para $a = 1$ tenemos:

$$I(1) = 4\arctan(1) = 4\frac{\pi}{4},\ \text{es decir } \pi = I(1).$$

Utilizando la regla de Simpson compuesta, determinar π con 14 cifras significativas. Para qué valor de m se obtiene tal precisión?.

• **Opcional:** considerar el sistema de pesos indeterminados de Vandermonde en un conjunto de nodos equiespaciado $\{x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_n = 1\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix},$$

con $I_k = \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1},\ k = 0, 1, 2, \dots, n,$

para determinar los pesos w_j de la regla de cuadratura:

$$I(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} w_j f_j.$$

Aplicarlo a la aproximación de π con valores de n moderados ($n < 30$) y estudiar su convergencia.

Nota: este método es un ejemplo de cúmulo de despropósitos, es decir, combina 3 patologías numéricas: (I) nodos equiespaciados, i.e., constantes de Lebesgue que aumentan como 2^n, (II) mal condicionamiento del sistema de pesos indeterminados Vandermonde (obsérvese el mensaje de advertencia que muestra MATLAB al resolver el sistema) y (III) lo estamos aplicando en una función que es especialmente sensible al fenómeno de Runge equiespaciado: $1/(1 + x^2)$. Pese a todo, $n = 20$ proporciona π con errores cercanos a 10^{-14} (para n mayor se inestabiliza, obviamente).