Práctica 7: derivación numérica (I).

Introducción: la construcción de matrices de diferenciación con Matlab es relativamente sencilla si dichas matrices tienen una estructura simple. En particular, las matrices de diferenciación resultantes de aplicar fórmulas locales de orden bajo suelen ser de tipo *Toeplitz*, es decir con sus diagonales principales adoptando un mismo valor constante.

1. **Comando `toeplitz`:** este comando construye una matriz de Toeplitz partiendo de las componentes de dos vectores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ dados (con $v_1 = u_1$), ubicándolas diagonalmente de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \cdots & v_{n-1} & v_n \\ u_2 & u_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{n-2} & v_{n-1} \\ u_3 & u_2 & u_1 & v_2 & \cdots & v_{n-3} & v_{n-2} \\ u_4 & u_3 & u_2 & u_1 & \cdots & v_{n-4} & v_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n-1} & u_{n-2} & u_{n-3} & u_{n-4} & \cdots & u_1 & v_2 \\ u_n & u_{n-1} & u_{n-2} & u_{n-3} & \cdots & u_2 & u_1 \end{pmatrix}$$

   Ejemplo: introducir en la línea de comandos: `toeplitz([1 3 5 7],[1 2 3 4])`.

2. Utilizando el comando anterior, construir las matrices de diferenciación FD y CD vistas en clase de teoría para $n = 5, 20, 40, 80$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

   asociadas a las fórmulas $u_i^{\mathrm{FD}} = h^{-1}(f_{i+1} - f_i)$ y $u_i^{\mathrm{CD}} = (2h)^{-1}(f_{i+1} - f_{i-1})$. Al aplicar el comando `toeplitz`, recordar que hay que eliminar algunas filas y que no podemos obtener las derivadas en todos los puntos originales. No olvidar los factores h en las matrices. Visualizar las matrices para $n = 5$ en la línea de comandos para comprobar que tienen el número de filas y columnas adecuado.

3. Considerar la función $f(x) = \sin(\pi x)$ y su derivada $f'(x) = \pi \cos(\pi x)$ en el intervalo $[0, 2]$. Evaluar $f(x)$ en un conjunto de nodos equiespaciado $x_j = 2j/n$, $(j = 0, 1, \ldots, n)$, con $n = 5, 20, 40, 80$. Aplicar las matrices anteriores sobre el vector de valores $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ para obtener una aproximación de $f'(x)$. Representar la derivada exacta sobre los nodos $f'(x_j) = \pi \cos(\pi x_j)$ y, en la misma gráfica, las aproximaciones obtenidas para ver la discrepancia. En otra gráfica en escala semilogarítmica representar $|f'(x_i) - u_i^{\mathrm{FD}}|$ y $|f'(x_i) - u_i^{\mathrm{CD}}|$.

4. (opcional): Para $n = 100, 200, 300, 400, \ldots, 2000$, calcular $\varepsilon_n = \max |f'(x_i) - u_i|$ para FD y CD. En una gráfica `loglog`, representar ε_n frente al h utilizado en cada caso e interpretar la pendiente.