Práctica 11: integración numérica (III - integrales elípticas).

Periodo del péndulo simple: un péndulo está formado por una varilla rígida (de masa despreciable) de longitud ℓ en el extremo de la cual hay una masa puntual m. Soltando el péndulo desde el reposo y con un ángulo inicial θ_0 (con $0 \leq \theta_0 < \pi$) con la vertical, el período del mismo es:

$$T(\theta_0) = 4\left(\frac{\ell}{\mathrm{g}}\right)^{1/2}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}}, \text{ con } k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right).$$

Es decir:

$$T(\theta_0) = 4\left(\frac{\ell}{\mathrm{g}}\right)^{1/2}\mathrm{K}(\theta_0), \text{ con } \mathrm{K}(\theta_0) = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}}.$$

La integral que define la función $\mathrm{K}(\theta_0)$ se denomina *integral elíptica* completa de primera especie de Jacobi y aparece con frecuencia en problemas de mecánica.

1. Utilizando una cuadratura adecuada, determinar $\mathrm{K}(\theta_0)$ para $\theta_0 = \pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$, $\pi/2$ y $3\pi/4$ con, al menos, 10 cifras exactas.
2. El período para pequeñas oscilaciones viene dado por la expresión $T \approx 2\pi(\ell/\mathrm{g})^{1/2}$. Para qué valor de θ_0 el error relativo de esa aproximación supera el $5\,\%$?.
3. Representar $\mathrm{K}(\theta_0)$ en función de θ_0 para $\theta_0 \in [0, 99\pi/100]$. Comprobar que el número de puntos de cuadratura es el adecuado a medida que nos acercamos a π. Qué ocurre cuando $\theta_0 = \pi$?. En este caso, la integral es impropia. Es convergente?