## Práctica 8: derivación numérica (II - interpolación global).

**Introducción:** en la práctica anterior se vió que las matrices de diferenciación finita tienen un orden de exactitud $O(h^p)$, siendo $h$ la distancia equiespaciada entre nodos y $p$ un entero positivo (que es justamente el grado del polinomio interpolador *local* utilizado para obtener dichas matrices). Dado que $h \sim n^{-1}$ (con $n$ el numero de puntos del dominio), el error decrece como $\varepsilon_n \sim n^{-p}$. Por ejemplo, para la CD vista el la práctica 7, teníamos $p = 2$, es decir, si aumentábamos el número de puntos del dominio en un factor 10 ($n \longrightarrow 10n$), el error se reducía en un factor $10^{-2}$, dado que $\varepsilon_n \sim n^{-2}$.

La convergencia *óptima* se consigue al interpolar la función a derivar con *un* solo polinomio interpolador (global) que la ajuste en *todos* los puntos del dominio. De este modo, $p = n$ y, obviamente, $\varepsilon_n \sim n^{-n}$. Es decir, mientras que las leyes de convergencia de las fórmulas locales son *algebraicas* ($\varepsilon_n \sim n^{-p}$), las globales son *exponenciales* ($n$ se encuentra en base *y exponente*!). La práctica de hoy consiste en materializar esa convergencia exponencial mediante un interpolador global y las ventajas (y riesgos) que tiene frente a las interpolaciones locales vistas en la práctica anterior.

1. **Diferencia finita local:** en el intervalo $[-1, 3]$, considerar la función $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin^2(2x)$ y su derivada exacta:
$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(2x)\{4\cos(2x) - \sin(2x)\}.$$
Considerar un conjunto de puntos equiespaciados $\{x_0 = -1, x_1, \ldots, x_n = 3\}$, con $n = 10, 20, 30, 40$. Aproximar $f'(x)$ con la CD siguiente:
$$f'(x) \approx \frac{1}{12h}[-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)].$$
Recordar eliminar los puntos exteriores. Comparar la aproximación obtenida con la derivada exacta. Para $n = 10, \ldots, 1000$, determinar el error máximo y representar el error en función de $n$ (ambas escalas logarítmicas). Comprobar que decae con potencia $p = -4$.

2. **Derivación global:** la matriz de diferenciación para los nodos $\{x_0 = a, \ldots, x_n = b\}$ es:
$$\mathbb{D}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_j}{\lambda_i}\dfrac{1}{x_i - x_j} & (i \neq j) \\ \displaystyle\sum_{k\neq j}\frac{1}{x_j - x_k} & (i = j) \end{cases}, \text{ con } \lambda_j = \frac{1}{\Pi_{k\neq j}(x_j - x_k)}.$$
Para $n = 4, 8, 12, 16, \ldots, 32$, determinar $f'(x)$ utilizando la matriz $\mathbb{D}$. Representar de nuevo el error en función de $n$ en escalas logarítmicas y comprobar que, pese a que la convergencia es mucho más rápida que con CD, el error empieza a aumentar por el fenómeno de Runge.