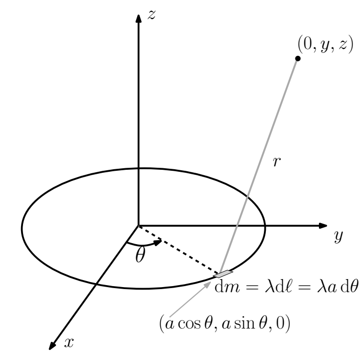
Práctica 10: integración numérica (II - Cuadratura de Clenshaw-Curtis y potencial gravitatorio).

Introducción: utilizaremos la cuadratura de Clenshaw-Curtis para determinar el potencial gravitatorio creado por un anillo de masa uniformemente distribuida. Primero comprobaremos que la cuadratura funciona correctamente calculando V en el eje del anillo (para el cual conocemos la expresión exacta). Posteriomente extenderemos el cálculo a puntos en un plano de simetría perpendicular al plano del anillo y que pasa por el centro del mismo. Opcionalmente, determinaremos de forma cualitativa las *curvas equipotenciales* $V =$ ct. sobre dicho plano de simetría.

1. **Potencial en el eje:** el anillo es de radio $a = 1$, tiene una densidad lineal de masa $\lambda = 1$ y se encuentra sobre el plano $z = 0$ con su centro en el origen de coordenadas. El diferencial de potencial $\mathrm{d}V$ creado por un elemento de anillo $\mathrm{d}\ell = a\,\mathrm{d}\theta$ situado en $(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ en un punto arbitrario del plano $x = 0$ con coordenadas $(0, y, z)$ es (por simplicidad tomamos origen de potencial en el infinito y normalizamos la constante gravitacional; $G = 1$):

$$\mathrm{d}V = -\frac{\lambda a \mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + (y - a\sin\theta)^2 + z^2}}$$



De modo que el potencial es la resultante de integrar para todos los elementos diferenciales del anillo (tomamos $a = 1$, $\lambda = 1$):

$$V(0, y, z) = -\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos^2\theta + (y - \sin\theta)^2 + z^2}}.$$

Programar una función para la cual, dados dos valores cualquiera de z e y, con $(y, z) \neq (1, 0)$, aproxime la integral anterior mediante Clenshaw-Curtis con $N = 20$. Particularizar para $y = 0$ y comparar con el potencial sobre el eje que se obtiene analíticamente.

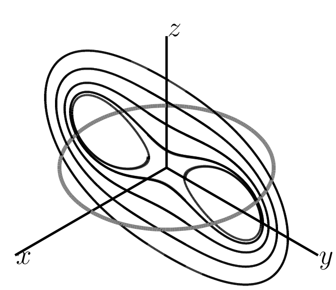
2. **Potencial en el plano** $x = 0$**:** para $y = 0.25,\ 0.75, 1.5$, representar el potencial en función de z (explorar el rango $z \in [-5, 5]$).

3. **Curvas equipotenciales sobre el plano** $x = 0$**:** tomad un punto inicial, por ejemplo $(y_0, z_0) = (0.25, 0)$, y calcular en ese punto el campo gravitatorio aproximadamente mediante diferencias finitas centradas con $h = 0.01$:

$$F_y \approx -\frac{V(0, y_0 + h, z_0) - V(0, y_0 - h, z_0)}{2h}, \quad F_z \approx -\frac{V(0, y_0, z_0 + h) - V(0, y_0, z_0 - h)}{2h}.$$

Al movemos perpendicularmente a (F_y, F_z) mantenemos el potencial constante. Otro punto (y_1, z_1) de (aproximadamente) mismo potencial lo podemos localizar con esta traslación:

$$(y_1, z_1) = (y_0, z_0) + \varepsilon\hat{\mathbf{f}}, \text{ con } \varepsilon = 0.001 \text{ y } \hat{\mathbf{f}} = \frac{(-F_z, F_y)}{\sqrt{F_y^2 + F_z^2}}.$$



Ahora reevaluamos (F_y, F_z) en (y_1, z_1) y repetimos la operación. Representando el conjunto de puntos $\{(y_0, z_0), (y_1, z_1), (y_2, z_2), \ldots\}$ podemos visualizar cualitativamente una curva equipotencial. El proceso se ha de repetir empezando de nuevo desde otro punto cualquiera inicial.