**Práctica 5: interpolación de Lagrange equiespaciada.**

**1. Problema:** dado un conjunto de puntos equiespaciados $\{x_0 = -1, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = 1\}$, con:

$$x_j = -1 + \frac{2j}{n},\ (j = 0, 1, \ldots, n).$$

Se pide:

**(a)** determinar la matriz de polinomios cardinales de Lagrange $\mathbb{P} \in \mathbb{M}_{m+1,n+1}(\mathbb{R})$ [1] evaluada en un conjunto de puntos $\{z_0, \ldots, z_m\}$ denso ($m \approx 600$, por ejemplo):

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \ell_0(z_0) & \ell_1(z_0) & \ldots & \ell_n(z_0) \\ \ell_0(z_1) & \ell_1(z_1) & \ldots & \ell_n(z_1) \\ \ell_0(z_2) & \ell_1(z_2) & \ldots & \ell_n(z_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_0(z_m) & \ell_1(z_m) & \ldots & \ell_n(z_m) \end{pmatrix}, \quad \text{con } \ell_i(z) = \prod_{\substack{j=0 \\ (j\neq i)}}^{n} \frac{z - x_j}{x_i - x_j},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

**Nota:** procurar no hacer uso de bucles anidados para calcular los productos. Un sólo bucle para los denominadores y otro para los numeradores debería ser suficiente.

**(b)** para $n = 3, 6$ y $9$, representar los $\ell_i(z_k)$ en el conjunto de puntos $z_k$ para poder visualizar el comportamiento de dichos polinomios entre nodos y comprobar que cumplen $\ell_i(x_j) = \delta_{ij}$.

**(c)** para $n = 8, 16, 24, 32$, calcular la función de Lebesgue:

$$\lambda_n(x) = \sum_{j=0}^{n} |\ell_j(x)|$$

sobre el mismo conjunto de puntos $z_k$ y comprobar su crecimiento en los extremos del intervalo. Utilizar una escala adecuada en los ejes.

**(d)** interpolar la función $f(x) = \mathrm{e}^x$ en $[-1, 1]$ para $n = 4, 6, 8, 10, \ldots, 60$ mediante un bucle. Para cada $n$, evaluar la interpolación en el conjunto de nodos $z_k$ haciendo el producto matriz-vector $\Pi_n f(z_i) = \sum_j \mathbb{P}_{ij}\, f(x_i)$, evaluar el error máximo

$$\varepsilon_n = \max_{0\leq k\leq m} |\Pi_n f(z_k) - \mathrm{e}^{z_k}|$$

y almacenarlo en un vector. Representar en una gráfica semilogarítmica $\varepsilon_n$ frente a $n$ y comprobar la ley $\varepsilon_n \sim 2^n/n\log(n)$. Comprobar que la extrapolación de $\varepsilon_n$ para $n \to 0$ intercepta el eje $y$ cerca de $\varepsilon_{\text{mach}} \sim 10^{-16}$.

[1] $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ es el espacio de matrices reales de $m$ filas y $n$ columnas