Ziel der Aufgabe ist es, die zweidimensionale Konvektions-Diffusions-Gleichung

$$-\Delta u + \vec{v} \cdot \nabla u = 1\,, \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{v_0}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_0 > 0$$

auf dem Einheitsquadrat $]0,1[^2$ zu lösen. Dabei soll auf dem Rand $u = 0$ gelten.

Diskretisieren Sie den Laplace-Operator durch den Fünf-Punkt-Stern und den Gradienten gemäß $\vec{v} \cdot \nabla u = v_x \cdot (\partial u/\partial x) + v_y \cdot (\partial u/\partial y)$, wobei die ersten Ableitungen einmal durch zentrale und einmal durch Upwind-Differenzen (Hier: linksseitige Differenzen) approximiert werden sollen.

a) Für welche Geschwindigkeiten v_0 ist die Diskretisierungsmatrix im Falle zentraler Differenzen diagonaldominant?

Für die Lösung des Gleichungssystems soll das Jacobi-Verfahren und das Gauß-Seidel Verfahren in der Sprache `C` implementiert werden. Dabei soll keine Matrix aufgebaut werden. Gesucht ist eine matrix-freie Version. Um die Randbedingungen einfacher zu implementieren, definieren Sie das Gebiet einschließlich der Ränder.