Ziel der Aufgabe ist es, mit dem alternierenden Schwarz-Verfahren das zweidimensionale Poissonproblem

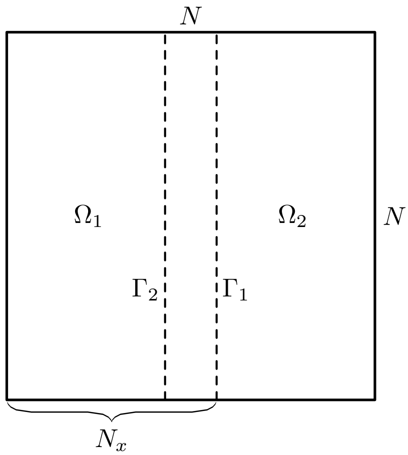
$$-\Delta u(x,y) = 1\,,$$

auf dem Einheitsquadrat $[0,1]^2$ zu lösen. Dabei soll auf dem Rand $u = 0$ gelten.

Wir betrachten zwei überlappende Gebiete mit jeweils $N_x \times N$ inneren Punkten (das Gesamtgebiet hat N^2 innere Punkte, also $h = \frac{1}{N+1}$). Die Terme des Differenzensterns, die aus den Randbedingungen auf Γ_1 bzw. Γ_2 stammen, sollen auf die rechte Seite des Gleichungssystems geschrieben werden. Das Gleichungssystem hat also die Gestalt $Ax = 1 + b_\Gamma$, wobei $-A$ dem Laplace-Operator mit Null-Randbedingungen entspricht. Da A symmetrisch ist, können wir das Problem mit CG-Verfahren lösen.

Verwenden Sie das Programm mit Differenzensternen und iterativem Löser und führen Sie auf den rechteckigen Gebieten Ω_1 und Ω_2 die alternierende Schwarz-Iteration mit Startwert $u = 0$ aus.

Wie sieht eine Version mit verteiltem Speicher, ein Prozessor pro Teilgebiet und Kommunkation über MPI aus?



Parameter

Schwarz-Verfahren: $N = 101$, $N_x \in \{51, 52, 53, 55, 60\}$.

CG-Verfahren: max. 1000 Iterationen, Residuum 10^{-8}.

Als Maß für die Genauigkeit soll u in der Mitte des Quadrates ausgewertet werden. Stellen Sie $u(1/2, 1/2)$ über der Zahl der Schwarz-Iterationen graphisch dar, möglichst alle fünf Graphen in einem Diagramm. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Bemerkung: Aus der analytischen Lösung ergibt sich $u(1/2, 1/2) = 0.0736713532815138$.

Zusatz

Vergleichen Sie den Aufwand des Schwarz-Verfahrens mit einem einzigen CG-Löser für das Gesamtgebiet. Was ist für eine größere Anzahl von Teilgebieten zu erwarten?