פרויקט הקורס:
חקר ביצועים

תאריך הגשה:

20.6.22

מגישים:

318720711

313163057

1. סיפור הבעיה:

לינק לכתבה: https://www.maariv.co.il/news/politics/Article-904476

בעקבות הניסיונות להפחית את יוקר המחיה בישראל, חתם שר האוצר על רפורמה שמטרתה להוזיל את עלויות הפירות והירקות לצרכן. הרפורמה מפחיתה את המכס על הפירות והירקות ובכך מוזילה את הייבוא מחו"ל. הציפייה היא שבעקבות הוזלת המס על הייבוא, התחרות תגדל ומחירי הפירות והירקות לצרכן תקטן.

יוסי הוא ירקן בעל חנות לירקות ופירות. יוסי מחזיק בחנות שלו 3 סוגי פירות: תפוחים, אבטיחים ופומלות. עד היום, יוסי היה מזמין את הפירות רק מחקלאים בארץ. בעקבות רפורמת החקלאות, יוסי רוצה להזמין חלק מהפירות שלו מטורקיה כדי למזער עלויות. להלן מחירי הפירות מהספק בארץ ומהספק בטורקיה:

מחיר (בשקלים) לק"ג פירות:

	ישראל	טורקיה
תפוח	10 ₪	8 ₪
אבטיח	17 ₪	13 ₪
פמלה	20 ₪	25 ₪

בנוסף למחיר הפירות, מחירי ההובלה משתנים בין פרי לפרי עקב היחס והעבודה המושקע בהובלה. הובלת אבטיחים דורשת קירור ולכן יקרה יותר והובלת התפוחים דורשת משטחים מרופדים כדי לשמור על שלמות התפוחים. בנוסף, הובלות מטורקיה מגיעות במטוס ועל כן יקרות יותר מהובלות בארץ המגיעות במשאיות.

מחיר (בשקלים) להובלה לפי ק"ג :

	ישראל	טורקיה
תפוח	1.5 ₪	2 ₪
אבטיח	2.3 ₪	3.8 ₪
פמלה	1.3 ₪	1.5 ₪

- צריכת התפוחים בשבוע היא 1.5 טון. לא ניתן להזמין יותר כי תפוחים נרקבים מהר ומשפיעים על שאר הפירות בחנות.
- צריכת האבטיחים השבועית בחנות היא 2 טון.
- צריכת הפומלות השבועית בחנות היא 700 ק"ג.
- סה"כ קיבולת מדפי הפירות בחנות היא 5 טון. אין אפשרות לחרוג מכמות זו של פירות.
- ליוסי חשוב הקשר עם הספק הישראלי איתו הוא עובד שנים רבו., בנוסף, יש לו זיקה לחקלאות ישראלית. לכן, החליט יוסי שכ- 40% מכלל הפירות בחנות צריך להיות תוצרת ישראל.
- חברת האספקה מטורקיה לא מוכנה להוציא משלוח מתחת לטון.

יוסי רוצה למזער את עלויות הזמנת הפירות לחנות.

2. ניסוח הבעיה הלינארית:

$X_{i,j}$ - כמות בק"ג של i מארץ j

i = 1- תפוח 2- אבטיח 3- פמלה

j = 1- ישראל 2- טורקיה

פונקציית מטרה – <u>מינימום</u> הוצאות הזמנה שבועית:

minZ =

$$\overbrace{\left(\mathbf{10}\boldsymbol{X}_{\mathbf{1,1}}+\mathbf{17}\boldsymbol{X}_{\mathbf{2,1}}+\mathbf{20}\boldsymbol{X}_{\mathbf{3,1}}\right)}^{\text{מחיר הפירות מישראל}}+\overbrace{\left(\mathbf{8}\boldsymbol{X}_{\mathbf{1,2}}+\mathbf{13}\boldsymbol{X}_{\mathbf{2,2}}+\mathbf{25}\boldsymbol{X}_{\mathbf{3,2}}\right)}^{\text{מחיר הפירות מטורקיה}}+\overbrace{\left(\mathbf{1.5}\boldsymbol{X}_{\mathbf{1,1}}+\mathbf{2.3}\boldsymbol{X}_{\mathbf{2,1}}+\mathbf{1.3}\boldsymbol{X}_{\mathbf{3,1}}\right)}^{\text{מחיר הובלות מישראל}}+\underbrace{\left(\mathbf{2}\boldsymbol{X}_{\mathbf{1,2}}+\mathbf{3.8}\boldsymbol{X}_{\mathbf{2,2}}+\mathbf{1.5}\boldsymbol{X}_{\mathbf{3,2}}\right)}_{\text{מחיר הובלות מטורקיה}}$$

minZ = פונקציית המטרה לאחר כינוס איברים:

$$\left(\mathbf{11.5}\boldsymbol{X}_{\mathbf{1,1}}+\mathbf{19.3}\boldsymbol{X}_{\mathbf{2,1}}+\mathbf{21.3}\boldsymbol{X}_{\mathbf{3,1}}\right)+\left(\mathbf{10}\boldsymbol{X}_{\mathbf{1,2}}+\mathbf{16.8}\boldsymbol{X}_{\mathbf{2,2}}+\mathbf{26.5}\boldsymbol{X}_{\mathbf{3,2}}\right)$$

אילוצים:

1) $X_{1,1}+X_{1,2}=1500$ — הזמנה של בדיוק 1.5 טון תפוחים.

2) $X_{2,1}+X_{2,2}\geq 2000$ — צריכה של 2 טון אבטיחים.

3) $X_{3,1}+X_{3,2}\geq 700$ — צריכה של 0.7 טון פומלות.

4) $X_{1,1}+X_{2,1}+X_{3,1}+X_{1,2}+X_{2,2}+X_{3,2}\leq 5000$ — הגבלת קיבולת מדפים של 5 טון.

5) $0.6X_{1,1}+0.6X_{2,1}+0.6X_{3,1}-0.4X_{1,2}-0.4X_{2,2}-0.4X_{3,2}\geq 0$ — 40% תוצרת הארץ.

6) $X_{1,2}+X_{2,2}+X_{3,2}\geq 1000$ — מינימום הובלה מטורקיה של טון.

7) $X_{i,j}\geq 0$ — אי שליליֿ.

הסבר לאילוץ 5:

$$X_{1,1}+X_{2,1}+X_{3,1}\geq 0.4*\left(X_{1,1}+X_{2,1}+X_{3,1}+X_{1,2}+X_{2,2}+X_{3,2}\right)$$

$$X_{1,1}+X_{2,1}+X_{3,1}\geq 0.4X_{1,1}+0.4X_{2,1}+0.4X_{3,1}+0.4X_{1,2}+0.4X_{2,2}+0.4X_{3,2}$$

$$0.6X_{1,1}+0.6X_{2,1}+0.6X_{3,1}-0.4X_{1,2}-0.4X_{2,2}-0.4X_{3,2}\geq 0$$

3. פתרון הבעיה הפרימאלית:

פתרון אופטימאלי:

```
## [1] "The number of iterations was:  4"
## [1] "------------------------------------------------------------------------"
## [1] "The optimal solution is:  -64980"
## [1] "------------------------------------------------------------------------"
## [1] "                                                                        "
## [1] "The optimal values of the decision variables and their reduced costs are:"
## [1] "                                                                        "
##          Optimal Value   Reduced Cost
## X1,1               980            0.0
## X2,1                 0           -1.0
## X3,1               700            0.0
## X1,2               520            0.0
## X2,2              2000            0.0
## X3,2                 0           -6.7
## [1] "                                                                        "
## [1] "The optimal values of the Slacks and their dual prices are:"
## [1] "                                                                        "
##      Optimal Value Dual Price
## A1               0      -10.6
## L2               0      -17.4
## L3               0      -20.4
## S4             800        0.0
## L5               0       -1.5
## L6            1520        0.0
```

מספר האיטרציות

ערך אופטימאלי של פונקציית המטרה

ערך אופטימאלי של משתני ההחלטה (משמאל)

ערך אופטימאלי של משתני הסרק

ערך אופטימאלי של פונקציית המטרה הוא 64,980 , כלומר, זהו הסכום המינימאלי שניתן לרכוש את הפירות באילוצים הנתונים. (לפי התוכנה, הפתרון מוצג כמספר שלילי בגלל שהפונקציה המקורית שלנו היא פונקציית מינימום, ובתוכנה המרנו אותה לפונקציית מקסימום – כפלנו ב 1-).

עד להגעה לפתרון האופטימאלי, התבצעו 4 איטרציות.

פתרון הבעיה: כמות הפרי האופטימאלית שצריך לרכוש מכל מדינה על מנת למזער עלויות:

משתנה	**פרי**	**מדינה**	**כמות בק"ג שנרכש**
$X_{1,1}$	תפוח	ישראל	980
$X_{2,1}$	אבטיח	ישראל	0
$X_{3,1}$	פמלה	ישראל	700
$X_{1,2}$	תפוח	טורקיה	520
$X_{2,2}$	אבטיח	טורקיה	2000
$X_{3,2}$	פמלה	טורקיה	0

הסבר מילולי לפתרון:

על מנת להגיע למינימום הוצאות ולעמוד באילוצים הנתונים, נדרש מיוסי להזמין 980 ק"ג תפוחים מישראל, 700 ק"ג פמלה מישראל, 520 ק"ג תפוחים מטורקיה ו2000 ק"ג אבטיח מטורקיה. סך כל העלויות כולל ההובלות שלהן יעלו ליוסי 64,980 ₪.

טבלת הסימפלקס האופטימאלית:

משתני הבסיס

	X1,1	X2,1	X3,1	X1,2	X2,2	X3,2	A1	L2	A2	L3	A3	S4	L5	A5	L6	A6	RHS
X1,1	1	1	0	0	0	-1.0	4e-01	-0.4	4e-01	0.6	-6e-01	0	-1.0	1e+00	0	0e+00	980
L6	0	0	0	0	0	0.0	6e-01	-0.6	6e-01	-0.6	6e-01	0	1.0	-1e+00	1	-1e+00	1520
X3,1	0	0	1	0	0	1.0	0e+00	0.0	0e+00	-1.0	1e+00	0	0.0	0e+00	0	0e+00	700
S4	0	0	0	0	0	0.0	-1e+00	1.0	-1e+00	1.0	-1e+00	1	0.0	0e+00	0	0e+00	800
X2,2	0	1	0	0	1	0.0	0e+00	-1.0	1e+00	0.0	0e+00	0	0.0	0e+00	0	0e+00	2000
X1,2	0	-1	0	1	0	1.0	6e-01	0.4	-4e-01	-0.6	6e-01	0	1.0	-1e+00	0	0e+00	520
Z	0	1	0	0	0	6.7	1e+09	17.4	1e+09	20.4	1e+09	0	1.5	1e+09	0	1e+09	-64980

ערך המשתנה (RHS)

(רק המספר התחתון מבין צמד)

מטבלה זו ניתן לראות שמשתני ההחלטה הנמצאים בבסיס הפתרון הם: $X_{1,1}$, $X_{3,1}$, $X_{1,2}$, $X_{2,2}$

ערך משתני ההחלטה זה מה שמוצג בטבלה למעלה בעמודה הימנית.

בפתרון שלנו ניתן לראות כי לא קיים מצב של ריבוי פתרונות כיוון שמקדמי משתני פונקציית המטרה שאינם בסיסיים אינם שווים ל-0. בנוסף, לא קיים מצב של פתרון מנוון כי אין משתנה בסיסי שערכו האופטימאלי שווה ל-0.

טווח מקדמים של משתני ההחלטה:

```
       Current Coef Coef From    Coef Till
## X1,1        -11.5 -1.25e+01     -10.0
## X2,1        -19.3 -1.00e+30     -18.3
## X3,1        -21.3 -2.80e+01      -0.9
## X1,2        -10.0 -1.15e+01      -9.0
## X2,2        -16.8 -1.78e+01       0.6
## X3,2        -26.5 -1.00e+30     -19.8
```

בטבלה מעל מוצג הטווח שבו מקדמי משתני ההחלטה יכולים להשתנות מבלי שהבסיס ישתנה. בשביל להתאים את הנתונים לבעיה שלנו, בעיית מינימום, נכפול הכל ב 1- :

טווח השינוי של	$X_{1,1}$	הוא בין 10 ל- 12.5.	טווח המחיר של הזמנת ק"ג תפוחים מישראל כולל ההובלה יכול להיות בין 10 ₪ ל- 12.5 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.
טווח השינוי של	$X_{2,1}$	הוא בין 18.3 ל-אינסוף	טווח המחיר של הזמנת ק"ג אבטיחים מישראל כולל ההובלה יכול להיות מעל 18.3 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.
טווח השינוי של	$X_{3,1}$	הוא בין 0.9 ל- 28.	טווח המחיר של הזמנת ק"ג פמלה מישראל כולל ההובלה יכול להיות בין 0.9 ₪ ל- 28 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.
טווח השינוי של	$X_{1,2}$	הוא בין 9 ל- 11.5.	טווח המחיר של הזמנת ק"ג תפוחים מטורקיה כולל ההובלה יכול להיות בין 9 ₪ ל- 11.5 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.
טווח השינוי של	$X_{2,2}$	הוא בין 0 ל- 17.8.	טווח המחיר של הזמנת ק"ג אבטיחים מטורקיה כולל ההובלה יכול להיות עד 17.8 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.
טווח השינוי של	$X_{3,2}$	הוא בין 19.8 ל- אינסוף	טווח המחיר של הזמנת ק"ג פמלה מטורקיה כולל ההובלה יכול להיות החל מ 19.8 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.

טווח האיברים החופשיים באילוצים:

```
       Current RHS  RHS From   RHS Till
## [1,]        1500  633.3333     2300
## [2,]        2000    0.0000     2800
## [3,]         700    0.0000     1500
## [4,]        5000 4200.0000     5000
## [5,]           0 -980.0000      520
## [6,]        1000 1000.0000     2520
```

בטבלה מעל מוצג הטווח שבו האיברים החופשיים באילוצים (RHS) יכולים להשתנות מבלי שהבסיס ישתנה.

טווח השינוי במשאב	1	הוא בין 633.33 עד 2300	אפשר להזמין בין 633.33 ק"ג ל- 2300 ק"ג תפוחים מבלי שבסיס הפתרון האופטימלי ישתנה.
טווח השינוי במשאב	2	הוא בין 0 עד 2800	כל עוד הצריכה של האבטיחים תהיה נמוכה מ2800 ק"ג, בסיס הפתרון האופטימלי לא ישתנה.
טווח השינוי במשאב	3	הוא בין 0 עד 1500	כל עוד הצריכה של הפומלות תהיה נמוכה מ1500 ק"ג, בסיס הפתרון האופטימלי לא ישתנה.
טווח השינוי במשאב	4	הוא בין 4200 עד 5000	כאשר יכולת הקיבול של הירקן יהיה בין 4.2 טון לבין 5 טון, בסיס הפתרון האופטימלי לא ישתנה.

טווח השינוי במשאב	5	הוא בין 0 עד 520	פירות תוצרת הארץ בחנות צריכה להיות בין 40% מסך הסחורה לבין 40% ועוד 520 ק"ג, בסיס הפתרון האופטימלי לא ישתנה.
טווח השינוי במשאב	6	הוא בין 1000 עד 2520	כאשר יכולת ההובלות מטורקיה יהיה בין טון ל- 2520 ק"ג, בסיס הפתרון האופטימלי לא ישתנה.

4. ניסוח הבעיה הדואלית:

הבעיה הדואלית	**הבעיה הפרימאלית**
max W = $\mathbf{1500Y_1 + 2000Y_2 + 700Y_3 + 5000Y_4 + 1000Y_6}$ s.t: 1. $Y_1 + Y_4 + 0.6Y_5 \leq 11.5$ 2. $Y_2 + Y_4 + 0.6Y_5 \leq 19.3$ 3. $Y_6 + Y_4 + 0.6Y_5 \leq 21.3$ 4. $Y_1 + Y_4 - 0.4Y_5 + Y_6 \leq 10$ 5. $Y_2 + Y_4 - 0.4Y_5 + Y_6 \leq 16.8$ 6. $Y_3 + Y_4 - 0.4Y_5 + Y_6 \leq 26.5$ 7. $Y_1 -$ חופשי 8. $Y_4 \leq 0$ 9. $Y_2, Y_3, Y_5, Y_6 \geq 0$	min Z = $\mathbf{(11.5X_{1,1} + 19.3X_{2,1} + 21.3X_{3,1}) + (10X_{1,2} + 16.8X_{2,2} + 26.5X_{3,2})}$ s.t: 1. $X_{1,1} + X_{1,2} = 1500$ 2. $X_{2,1} + X_{2,2} \geq 2000$ 3. $X_{3,1} + X_{3,2} \geq 700$ 4. $X_{1,1} + X_{2,1} + X_{3,1} + X_{1,2} + X_{2,2} + X_{3,2} \leq 5000$ 5. $0.6X_{1,1} + 0.6X_{2,1} + 0.6X_{3,1} - 0.4X_{1,2} - 0.4X_{2,2} - 0.4X_{3,2} \geq 0$ 6. $X_{1,2} + X_{2,2} + X_{3,2} \geq 1000$ 7. $X_{i,j} \geq 0$

בבעיה הדואלית קיבלנו שהמשתנה Y_4 אי חיובי. לכן, נכפיל ב -1 בשביל שנוכל להכניס ל-R בצורה תקינה:

$$Y_4' = -Y_4$$

$$Y_4' \geq 0$$

בבעיה הדואלית קיבלנו שהמשנה Y_1 הינו משתנה חופשי. בשביל שנוכל להכניס ל-R באופן תקין:

$$Y_1 = Y_1' - Y_1''$$

$$Y_1', Y_1'' \geq 0$$

הבעיה הדואלית אחרי תיקון:

max W =

$\mathbf{1500Y_1' - 1500Y_1'' + 2000Y_2 + 700Y_3 - 5000{Y_4}' + 1000Y_6}$

s.t:

1. $Y_1' - Y_1'' - {Y_4}' + 0.6Y_5 \leq 11.5$

2. $Y_2 - {Y_4}' + 0.6Y_5 \leq 19.3$

3. $Y_6 - {Y_4}' + 0.6Y_5 \leq 21.3$

4. $Y_1' - Y_1'' - {Y_4}' - 0.4Y_5 + Y_6 \leq 10$

5. $Y_2 - {Y_4}' - 0.4Y_5 + Y_6 \leq 16.8$

6. $Y_3 - {Y_4}' - 0.4Y_5 + Y_6 \leq 26.5$

7. $Y_2, Y_3, Y_5, Y_6 \geq 0$

8. $Y_1', Y_1'', {Y_4}' \geq 0$

מכיוון שבבעיה הפרימאלית קיבלנו פתרון בסיסי רגיל ותקין, פתרון הבעיה הדואלית שאמור להתקבל יהיה גם כן פתרון רגיל ולא חריג. ערך הפתרון האופטימאלי יהיה זהה לערך הפתרון של הבעיה הפרימאלית.

פתרון אופטימאלי של הבעיה הדואלית:

```
## [1] "The number of iterations was:  4"
## [1] "-----------------------------------------------------------------------"
## [1] "The optimal solution is:  64980"
## [1] "-----------------------------------------------------------------------"
## [1] "                                                                       "
## [1] "The optimal values of the decision variables and their reduced costs are:"
## [1] "                                                                       "
##       Optimal Value Reduced Cost
## Y1'            10.6            0
## Y1''            0.0            0
## Y2             17.4            0
## Y3             20.4            0
## Y4'             0.0         -800
## Y5              1.5            0
## Y6              0.0        -1520
## [1] "                                                                       "
## [1] "The optimal values of the Slacks and their dual prices are:"
## [1] "                                                                       "
##     Optimal Value Dual Price
## S1            0.0        980
## S2            1.0          0
## S3            0.0        700
## S4            0.0        520
## S5            0.0       2000
## S6            6.7          0
```

מספר האיטרציות

ערך אופטימאלי של פונקציית המטרה

ערך אופטימאלי של משתני ההחלטה (משמאל)

ערך אופטימאלי של משתני הסרק

הפתרון האופטימאלי לפי תוכנת R :

$Y_1' = 10.6$ $\quad$ $Y_3 = 20.4$ $\quad$ $Y_6 = 0$

$Y_1'' = 0$ $\quad$ $Y_4' = 0$

$Y_2 = 17.4$ $\quad$ $Y_5 = 1.5$ $\quad$ **W = 64,980**

הפתרון האופטימאלי לפי **המשתנים המקוריים** של הבעיה הדואלית:

$Y_1 = 10.6$ $\quad$ $Y_4 = 0$ $\quad$ $(Y_1 = Y_1' - Y_1'')$

$Y_2 = 17.4$ $\quad$ $Y_5 = 1.5$

$Y_3 = 20.4$ $\quad$ $Y_6 = 0$ $\quad$ **W = 64,980** $\quad$ $(Y_4' = -Y_4)$

הטבלה האופטימאלית מתוכנת ה-R :

משתני הבסיס

```
##        Y1' Y1'' Y2 Y3 Y4' Y5     Y6    S1 S2  S3    S4  S5 S6       b
## Y5     0     0  0  0   0  1   -1.0   1.0  0   0  -1.0   0  0     1.5
## S2     0     0  0  0   0  0    0.0  -1.0  1   0   1.0  -1  0     1.0
## Y3     0     0  0  1  -1  0    0.6  -0.6  0   1   0.6   0  0    20.4
## Y1'    1    -1  0  0  -1  0    0.6   0.4  0   0   0.6   0  0    10.6
## Y2     0     0  1  0  -1  0    0.6   0.4  0   0  -0.4   1  0    17.4
## S6     0     0  0  0   0  0    0.0   1.0  0  -1  -1.0   0  1     6.7
## Z      0     0  0  0 800  0 1520.0 980.0  0 700 520.0 2000  0 64980.0
```

ערך המשתנה (RHS)

5. ניתוחי רגישות

א. האילוץ השני בבעיה שלנו היא:

2) $X_{2,1} + X_{2,2} \geq 2000$ צריכה של 2 טון אבטיחים.

```
##     Optimal Value Dual Price
## A1              0      -10.6
## L2              0      -17.4
## L3              0      -20.4
## S4            800        0.0
## L5              0       -1.5
## L6           1520        0.0
```

Optimal value: הערך של משתני החוסר/ עודף בפתרון האופטימאלי.
Dual price: מקדמי משתני הסרק בפונקציית המטרה האופטימאלית. זהו גם הערך של המשתנה הדואלי של משתנה ההחלטה המתאים (y). משמעות הערך היא בכמה תשתנה פונקציית המטרה אם נוסיף יחידת משאב נוספת (יחידה אחת לRHS של האילוץ).

לפי הטבלה למעלה, ניתן לראות שמחיר הצל של המשאב מהאילוץ השני הינו 17.4 (הכפלנו ב -1 כי פונ' המטרה המקורית היא MIN). כלומר, על כל תוספת של יחידה אחת במשאב, ערך פונקציית המטרה יגדל ב 17.4 יחידות. הסיבה שהערך גדל הוא כי משתנה הסרק באילוץ השני (L2) שווה 0, כלומר המשאב נוצל במלואו (מינימום 2 טון אבטיחים).

$$\mathbf{64980 + (17.4) * 1 = 64997.4}$$

Z* - ערך פונ' מטרה אופטימאלי

מחיר הצל של המשאב באילוץ 2

Δ - השינוי של המשאב באילוץ 2

Z** - ערך פונ' מטרה לאחר השינוי

ב. שינוי לקבלת ריבוי פתרונות:

בשביל לקבל מצב של ריבוי פתרונות, צריך לבצע שינוי כך שבפתרון האופטימאלי של הבעיה, אחד המשתנים שאינם בבסיס צריך להיות שווה ל- 0. כלומר, במידה ונכניס את המשתנה לבסיס, ערך הפונקציה לא ישתנה, משמע ישנו יותר מפתרון אופטימאלי אחד.

בחרנו את המשתנה $X_{2.1}$ שלא נמצא בבסיס הפתרון. המקדם שלו בפו' המטרה המקורית הוא 26.5. בשביל לקבל מצב של ריבוי פתרונות צריך למצוא עבורו מקדם חדש שיגרום לו להיות מועמד להכנס לבסיס הפתרון. נעזר בנוסחה:

$$\hat{C}_{i,j} = C_b * \hat{a}_{i,j} - C_{i,j}$$

ערך מקדם של המשתנה i,j בפו' מטרה אופטימאלית

וקטור שורת המקדמים של המשתנים הבסיסיים בפו' המטרה

וקטור עמודת המשתנה i,j בטבלה האופטימאלית

ערך מקדם של המשתנה i,j בפו' המטרה

$$\mathbf{0 = (11.5 \quad 0 \quad 21.3 \quad 10 \quad 16.8 \quad 0) * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - C_{2,1}}$$

$$\mathbf{0 = 11.5 * 1 + 0 * 0 + 21.3 * 0 + 10 * 0 + 16.8 * 1 + 0 * -1 - C_{2,1}}$$

$$\mathbf{C_{2,1} = 28.3}$$

כלומר, בשביל לקבל מצב של ריבוי פתרונות, המקדם של המשתנה $X_{2,1}$ בפונקציית המטרה צריך להיות 28.3 , משמע להגדיל אותו ב-9 יחידות.

אם בניסוח השאלה נגדיל את מחיר האבטיח מישראל או את מחיר ההובלה של אבטיח מהארץ ב- 9 ₪ (או שניהם יחד בקומבינציה מסוימת כך שיחד הם יהיו שווים ל-9), נקבל מצב של ריבוי פתרונות לבעיה.

ג. כדי לשנות את הרכב הבסיס האופטימאלי נבחר את אחד ממשתני הבסיס בבעיה ונבדוק מה טווח השינוי שלו לפי הטבלה מסעיף 3. נבחר במשתנה $X_{1,1}$:

```
        Current Coef Coef From    Coef Till
## X1,1         -11.5 -1.25e+01     -10.0
```

ניתן לראות כי טווח השינוי של משתנה זה, **מבלי לשנות את הרכב הבסיס**, הינו בין 10 ל- 12.5. כלומר אם נגדיל את מקדם המשתנה להיות מעל 12.5 או נקטין מתחת ל- 10, הרכב בסיס הפתרון בהרכב ישתנה.

כעת נגדיל את מקדם המשתנה $X_{1,1}$ ב-1.5 יחידות (עד ל-13) שמייצג את מחיר הזמנת התפוחים מישראל כולל הובלה. פונקציית המטרה תשתנה, האילוצים יישארו זהים:

minZ =
$$\left(\mathbf{13}\boldsymbol{X_{1,1}} + \mathbf{19.3}\boldsymbol{X_{2,1}} + \mathbf{21.3}\boldsymbol{X_{3,1}}\right) + \left(\mathbf{10}\boldsymbol{X_{1,2}} + \mathbf{16.8}\boldsymbol{X_{2,2}} + \mathbf{26.5}\boldsymbol{X_{3,2}}\right)$$

נציב בתוכנת ה-R ונקבל:

פתרון אופטימאלי:

```
## [1] "The number of iterations was:  4"
## [1] "-------------------------------------------------------------------------"
## [1] "The optimal solution is:  -65960"
## [1] "-------------------------------------------------------------------------"
## [1] "                                                                         "
## [1] "The optimal values of the decision variables and their reduced costs are:"
## [1] "                                                                         "
##      Optimal Value Reduced Cost
## X1,1             0         -0.5
## X2,1           980          0.0
## X3,1           700          0.0
## X1,2          1500          0.0
## X2,2          1020          0.0
## X3,2             0         -7.7
```

לפי הטבלה מתוכנת ה-R ניתן לראות שבסיס הפתרון השתנה מהבעיה המקורית. בבסיס החדש המשתנה $X_{2,1}$ נכנס לבסיס הפתרון, ואילו המשתנה $X_{1,1}$ יצא מבסיס הפתרון. כמו כן, ניתן לראות גם כי ערך הפתרון האופטימאלי גדל ל- 65,960 (ש"ח).

הפתרון האופטימאלי החדש:

משתנה	פרי	מדינה	כמות בק"ג שנרכש	
$X_{1,1}$	תפוח	ישראל	0	לא בסיסי
$X_{2,1}$	אבטיח	ישראל	980	בסיסי
$X_{3,1}$	פמלה	ישראל	700	בסיסי
$X_{1,2}$	תפוח	טורקיה	1500	בסיסי
$X_{2,2}$	אבטיח	טורקיה	1020	בסיסי
$X_{3,2}$	פמלה	טורקיה	0	לא בסיסי

הסיבה שערך פו' המטרה גדל היא כי הגדלנו את אחד המקדמים של המשתנים בפונקציה (הגדלנו את מחיר של אחד המוצרים) ובגלל שזה משוואת חיבור לינארית, אם חלק במשוואה גדל גם התוצאה גדלה).

בנוסף, הסיבה שהרכב בסיס הפתרון השתנה היא בגלל שהגדלנו את אחד ממשתני ההחלטה (הגדלנו את מחיר של אחד מהמוצרים) אל מעבר לטווח השינוי שלו עד כדי שיהיה משתנה אחר שיהיה עדיף עליו בבסיס הפתרון (כלומר, שיהיה מוצר אחר "שישתלם" יותר לקנות בהתאם לאילוצים הנתונים מאשר המוצר שהתייקר).