# פרויקט הקורס: חקר ביצועים

תאריך הגשה: 20.6.22

מגישים: 318720711 313163057

#### 1. סיפור הבעיה:

https://www.maariv.co.il/news/politics/Article-904476 לינק לכתבה:

בעקבות הניסיונות להפחית את יוקר המחיה בישראל, חתם שר האוצר על רפורמה שמטרתה להוזיל את עלויות הפירות והירקות לצרכן. הרפורמה מפחיתה את המכס על הפירות והירקות ובכך מוזילה את הייבוא מחו"ל. הציפייה היא שבעקבות הוזלת המס על הייבוא, התחרות תגדל ומחירי הפירות והירקות לצרכן תקטן.

יוסי הוא ירקן בעל חנות לירקות ופירות. יוסי מחזיק בחנות שלו 3 סוגי פירות: תפוחים, אבטיחים ופומלות. עד היום, יוסי היה מזמין את הפירות רק מחקלאים בארץ. בעקבות רפורמת החקלאות, יוסי רוצה להזמין חלק מהפירות שלו מטורקיה כדי למזער עלויות. להלן מחירי הפירות מהספק בארץ ומהספק בטורקיה:

מחיר ( בשקלים ) לק"ג פירות:

	<u>ישראל</u>	<u>טורקיה</u>
תפוח	₪ 10	₽ 8
אבטיח	വ 17	₪ 13
פמלה	₪ 20	₪ 25

בנוסף למחיר הפירות, מחירי ההובלה משתנים בין פרי לפרי עקב היחס והעבודה המושקע בהובלה. הובלת אבטיחים דורשת קירור ולכן יקרה יותר והובלת התפוחים דורשת משטחים מרופדים כדי לשמור על שלמות התפוחים. בנוסף, הובלות מטורקיה מגיעות במטוס ועל כן יקרות יותר מהובלות בארץ המגיעות במשאיות.

מחיר ( בשקלים ) להובלה לפי ק"ג :

	<u>ישראל</u>	<u>טורקיה</u>
תפוח	₪ 1.5	₪ 2
אבטיח	₪ 2.3	₪ 3.8
פמלה	₪ 1.3	₪ 1.5

- צריכת התפוחים בשבוע היא 1.5 טון. לא ניתן להזמין יותר כי תפוחים נרקבים מהר ומשפיעים על שאר הפירות בחנות.
  - צריכת האבטיחים השבועית בחנות היא 2 טון.
  - צריכת הפומלות השבועית בחנות היא 700 ק"ג.
  - סה"כ קיבולת מדפי הפירות בחנות היא 5 טון. אין אפשרות לחרוג מכמות זו של פירות.
  - ליוסי חשוב הקשר עם הספק הישראלי איתו הוא עובד שנים רבו., בנוסף, יש לו זיקה לחקלאות ישראלית. לכן, החליט יוסי שכ- 40% מכלל הפירות בחנות צריך להיות תוצרת ישראל.
    - חברת האספקה מטורקיה לא מוכנה להוציא משלוח מתחת לטון.

יוסי רוצה למזער את עלויות הזמנת הפירות לחנות.

### 2. ניסוח הבעיה הלינארית:

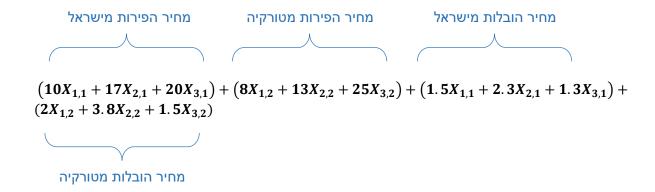
$$X_{i,j}$$
 -  $\,\mathrm{j}\,$  כמות בק"ג של i כמות

i = 1- מפוח -2 אבטיח 3- פמלה

j = 1- טורקיה 2- ישראל

# פונקציית מטרה – <u>מינימום</u> הוצאות הזמנה שבועית:

#### minZ =



minZ = פונקציית המטרה לאחר כינוס איברים:

$$(11.5X_{1,1} + 19.3X_{2,1} + 21.3X_{3,1}) + (10X_{1,2} + 16.8X_{2,2} + 26.5X_{3,2})$$

# :אילוצים

1) 
$$X_{1,1} + X_{1,2} = 1500$$
 . הזמנה של בדיוק 1.5 טון תפוחים.

2) 
$$X_{2,1} + X_{2,2} \ge 2000$$
 צריכה של 2 טון אבטיחים.

3) 
$$X_{3,1} + X_{3,2} \ge 700$$
 צריכה של 0.7 טון פומלות.

4) 
$$X_{1,1} + X_{2,1} + X_{3,1} + X_{1,2} + X_{2,2} + X_{3,2} \le 5000$$
 . a sactor of the state of the sactor of t

5) 
$$0.6X_{1.1} + 0.6X_{2.1} + 0.6X_{3.1} - 0.4X_{1.2} - 0.4X_{2.2} - 0.4X_{3.2} \ge 0$$
 ... ארץ.

6) 
$$X_{1,2} + X_{2,2} + X_{3,2} \ge 1000$$
 מינימום הובלה מטורקיה של טון.

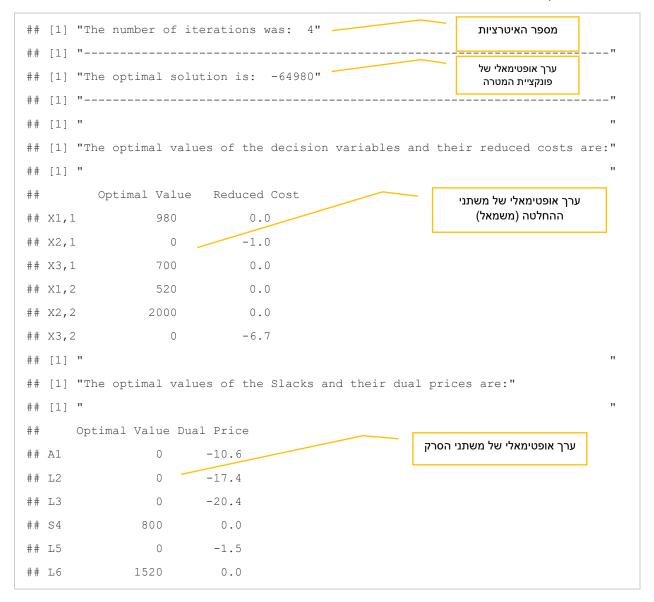
7) 
$$X_{i,j} \ge 0$$
 אי שלילי.

:5 הסבר לאילוץ

$$\begin{split} X_{1,1} + X_{2,1} + X_{3,1} &\geq 0.4 * \left( X_{1,1} + X_{2,1} + X_{3,1} + X_{1,2} + X_{2,2} + X_{3,2} \right) \\ X_{1,1} + X_{2,1} + X_{3,1} &\geq 0.4 X_{1,1} + 0.4 X_{2,1} + 0.4 X_{3,1} + 0.4 X_{1,2} + 0.4 X_{2,2} + 0.4 X_{3,2} \\ 0.6 X_{1,1} + 0.6 X_{2,1} + 0.6 X_{3,1} - 0.4 X_{1,2} - 0.4 X_{2,2} - 0.4 X_{3,2} &\geq 0 \end{split}$$

# 3. פתרון הבעיה הפרימאלית:

# :פתרון אופטימאלי



ערך אופטימאלי של פונקציית המטרה הוא 64,980 , כלומר, זהו הסכום המינימאלי שניתן לרכוש את הפירות באילוצים הנתונים. (לפי התוכנה, הפתרון מוצג כמספר שלילי בגלל שהפונקציה המקורית שלנו היא פונקציית מינימום, ובתוכנה המרנו אותה לפונקציית מקסימום – כפלנו ב 1- ).

עד להגעה לפתרון האופטימאלי, התבצעו 4 איטרציות.

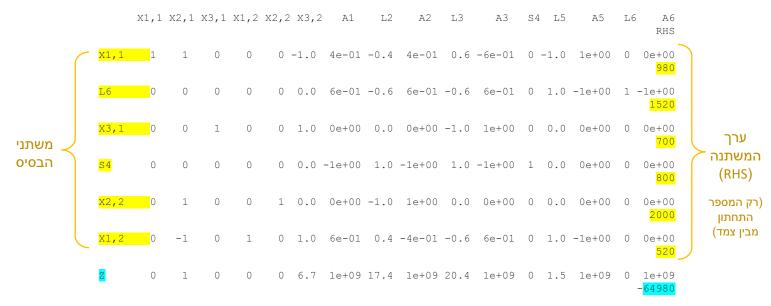
פתרון הבעיה: כמות הפרי האופטימאלית שצריך לרכוש מכל מדינה על מנת למזער עלויות:

כמות בק"ג שנרכש	מדינה	פרי	משתנה
980	ישראל	תפוח	$X_{1,1}$
0	ישראל	אבטיח	$X_{2,1}$
700	ישראל	פמלה	X <sub>3,1</sub>
520	טורקיה	תפוח	<i>X</i> <sub>1,2</sub>
2000	טורקיה	אבטיח	$X_{2,2}$
0	טורקיה	פמלה	X <sub>3,2</sub>

# הסבר מילולי לפתרון:

על מנת להגיע למינימום הוצאות ולעמוד באילוצים הנתונים, נדרש מיוסי להזמין 980 ק"ג תפוחים מישראל, 700 ק"ג מפוחים מטורקיה ו2000 ק"ג אבטיח מטורקיה. סך כל העלויות כולל ההובלות שלהן יעלו ליוסי 64,980 ₪.

# טבלת הסימפלקס האופטימאלית:



 $X_{1,1}$  ,  $X_{3,1}$  ,  $X_{1,2}$  ,  $X_{2,2}$  : מטבלה זו ניתן לראות שמשתני ההחלטה הנמצאים בבסיס

ערך משתני ההחלטה זה מה שמוצג בטבלה למעלה בעמודה הימנית.

בפתרון שלנו ניתן לראות כי לא קיים מצב של ריבוי פתרונות כיוון שמקדמי משתני פונקציית המטרה שאינם בסיסיים אינם שווים ל-0. בנוסף, לא קיים מצב של פתרון מנוון כי אין משתנה בסיסי שערכו האופטימאלי שווה ל-∩

# טווח מקדמים של משתני ההחלטה:

# בטבלה מעל מוצג הטווח שבו מקדמי משתני ההחלטה יכולים להשתנות מבלי שהבסיס ישתנה. בשביל להתאים את הנתונים לבעיה שלנו, בעיית מינימום, נכפול הכל ב 1- :

טווח המחיר של הזמנת ק"ג תפוחים מישראל כולל ההובלה יכול להיות בין 10 ₪ ל- 12.5 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.	הוא בין 10 ל- 12.5.	$X_{1,1}$	טווח השינוי של
טווח המחיר של הזמנת ק"ג אבטיחים מישראל כולל ההובלה יכול להיות מעל 18.3 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.	הוא בין 18.3 ל-אינסוף	$X_{2,1}$	טווח השינוי של
טווח המחיר של הזמנת ק"ג פמלה מישראל כולל ההובלה יכול להיות בין 0.9 ₪ ל- 28 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.	.28 ל- 28.	$X_{3,1}$	טווח השינוי של
טווח המחיר של הזמנת ק"ג תפוחים מטורקיה כולל ההובלה יכול להיות בין 9 ₪ ל- 11.5 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.	.11.5 הוא בין 9 ל-	<i>X</i> <sub>1,2</sub>	טווח השינוי של
טווח המחיר של הזמנת ק"ג אבטיחים מטורקיה כולל ההובלה יכול להיות עד 17.8 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.	.17.8 בין 0 ל- 17.8	$X_{2,2}$	טווח השינוי של
טווח המחיר של הזמנת ק"ג פמלה מטורקיה כולל ההובלה יכול להיות החל מ 19.8 ₪ מבלי שהבסיס ישתנה.	הוא בין 19.8 ל- אינסוף	X <sub>3,2</sub>	טווח השינוי של

# טווח האיברים החופשיים באילוצים:

## [1,] ## [2,]	Current RHS 1500 2000	RHS From 633.3333	RHS Till 2300 2800
## [2,]	2000	0.0000	2800
			2000
## [3,]	700	0.0000	1500
## [4,]	5000	4200.0000	5000
## [5,]	0	-980.0000	520
## [6,]	1000	1000.0000	2520

# בטבלה מעל מוצג הטווח שבו האיברים החופשיים באילוצים (RHS) יכולים להשתנות מבלי שהבסיס ישתנה.

טווח השינוי במשאב	1	2300 עד 633.33 הוא בין	אפשר להזמין בין 633.33 ק"ג ל- 2300 ק"ג תפוחים מבלי שבסיס הפתרון האופטימלי ישתנה.
טווח השינוי במשאב	2	2800 הוא בין 0 עד	כל עוד הצריכה של האבטיחים תהיה נמוכה מ2800 ק"ג, בסיס הפתרון האופטימלי לא ישתנה.
טווח השינוי במשאב	3	1500 הוא בין 0 עד	כל עוד הצריכה של הפומלות תהיה נמוכה מ1500 ק"ג, בסיס הפתרון האופטימלי לא ישתנה.
טווח השינוי במשאב	4	5000 הוא בין 4200 עד	כאשר יכולת הקיבול של הירקן יהיה בין 4.2 טון לבין 5 טון, בסיס הפתרון האופטימלי לא ישתנה.

פירות תוצרת הארץ בחנות צריכה להיות בין 40% מסך הסחורה לבין 40% ועוד 520 ק"ג, בסיס הפתרון האופטימלי לא ישתנה.	520 הוא בין 0 עד	5	טווח השינוי במשאב
כאשר יכולת ההובלות מטורקיה יהיה בין טון ל- 2520 ק"ג, בסיס הפתרון האופטימלי לא ישתנה.	2520 עד 2520 הוא בין 1000	6	טווח השינוי במשאב

# 4. ניסוח הבעיה הדואלית:

הבעיה הפרימאלית	הבעיה הדואלית
min Z = $ (11.5X_{1,1} + 19.3X_{2,1} + 21.3X_{3,1}) + (10X_{1,2} + 16.8X_{2,2} + 26.5X_{3,2}) $ s.t:	$\max W = \\ 1500Y_1 + 2000Y_2 + 700Y_3 + 5000Y_4 + 1000Y_6$ s.t:
1. $X_{1,1} + X_{1,2} = 1500$ 2. $X_{2,1} + X_{2,2} \ge 2000$ 3. $X_{3,1} + X_{3,2} \ge 700$ 4. $X_{1,1} + X_{2,1} + X_{3,1} + X_{1,2} + X_{2,2} + X_{3,2} \le 5000$ 5. $0.6X_{1,1} + 0.6X_{2,1} + 0.6X_{3,1} - 0.4X_{1,2} - 0.4X_{2,2} - 0.4X_{3,2} \ge 0$ 6. $X_{1,2} + X_{2,2} + X_{3,2} \ge 1000$ 7. $X_{i,j} \ge 0$	1. $Y_1 + Y_4 + 0.6Y_5 \le 11.5$ 2. $Y_2 + Y_4 + 0.6Y_5 \le 19.3$ 3. $Y_6 + Y_4 + 0.6Y_5 \le 21.3$ 4. $Y_1 + Y_4 - 0.4Y_5 + Y_6 \le 10$ 5. $Y_2 + Y_4 - 0.4Y_5 + Y_6 \le 16.8$ 6. $Y_3 + Y_4 - 0.4Y_5 + Y_6 \le 26.5$ 7. $Y_1 - \text{idd}$ 8. $Y_4 \le 0$ 9. $Y_2, Y_3, Y_5, Y_6 \ge 0$

בצורה תקינה: R-בעיה הדואלית קיבלנו שהמשתנה  $Y_4$  אי חיובי. לכן, נכפיל ב 1- בשביל שנוכל להכניס ל-R

$$Y_4' = -Y_4$$

$$Y_4' \geq 0$$

באופן תקין: R-בעיה בשביל שנוכל להכניס אינו משתנה חופשי. בשביל באופן אינו שהמשנה אופן באופן קיבלנו שהמשנה אונו משתנה אופשי.

$$Y_1 = Y_1' - Y_1''$$

$$Y_1', {Y_1'}' \ge 0$$

הבעיה הדואלית אחרי תיקון:

max W =

$$\mathbf{1500}Y_1' - \mathbf{1500}Y_1'' + 2000Y_2 + 700Y_3 - 5000Y_4' + 1000Y_6$$

s.t:

1. 
$$Y_1' - Y_1'' - Y_4' + 0.6Y_5 \le 11.5$$

2. 
$$Y_2 - {Y_4}' + 0.6Y_5 \le 19.3$$

3. 
$$Y_6 - {Y_4}' + 0.6Y_5 \le 21.3$$

4. 
$$Y_1' - Y_1'' - Y_4' - 0.4Y_5 + Y_6 \le 10$$

5. 
$$Y_2 - Y_4' - 0.4Y_5 + Y_6 \le 16.8$$

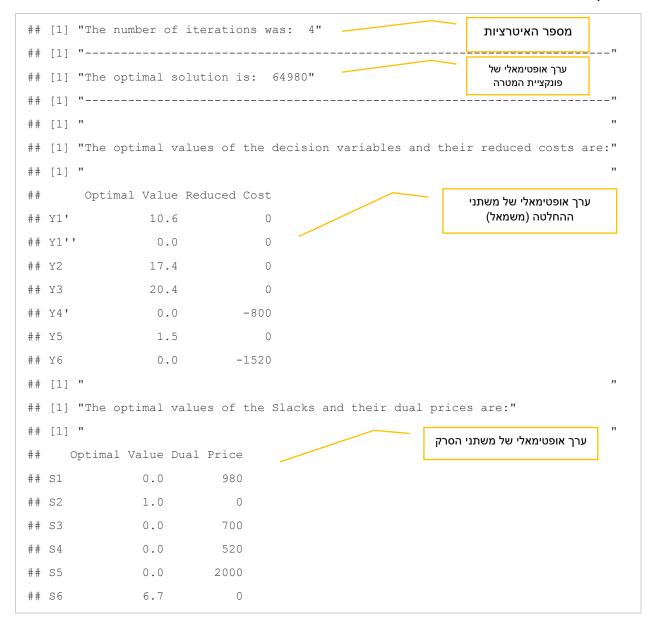
6. 
$$Y_3 - Y_4' - 0.4Y_5 + Y_6 \le 26.5$$

7. 
$$Y_2, Y_3, Y_5, Y_6 \ge 0$$

8. 
$$Y_1', Y_1'', Y_4' \ge 0$$

מכיוון שבבעיה הפרימאלית קיבלנו פתרון בסיסי רגיל ותקין, פתרון הבעיה הדואלית שאמור להתקבל יהיה גם כן פתרון רגיל ולא חריג. ערך הפתרון האופטימאלי יהיה זהה לערך הפתרון של הבעיה הפרימאלית.

# פתרון אופטימאלי של הבעיה הדואלית:



#### : R הפתרון האופטימאלי לפי תוכנת

$$Y_1' = 10.6$$
  $Y_3 = 20.4$   $Y_6 = 0$   $Y_1'' = 0$   $Y_2 = 17.4$   $Y_5 = 1.5$  **W = 64,980**

# הפתרון האופטימאלי לפי המשתנים המקוריים של הבעיה הדואלית:

$$Y_1 = 10.6$$
  $Y_4 = 0$   $(Y_1 = Y_1' - Y_1'')$   
 $Y_2 = 17.4$   $Y_5 = 1.5$   
 $Y_3 = 20.4$   $Y_6 = 0$  **W = 64,980**  $(Y_4' = -Y_4)$ 

#### : R-הטבלה האופטימאלית מתוכנת ה

	##	Y	1'	Y1''	Y2	Υ3	Y4'	Y5	Y6	S1	S2	s3	S4	S5	S6	b		
(	## 3	Y5	0	0	0	0	0	1	-1.0	1.0	0	0	-1.0	0	0	1.5		
	## 5	52	0	0	0	0	0	0	0.0	-1.0	1	0	1.0	-1	0	1.0		
	## 3	¥3	0	0	0	1	-1	0	0.6	-0.6	0	1	0.6	0	0	20.4		2211
משתני 🗸	## 7	Y1'	1	-1	0	0	-1	0	0.6	0.4	0	0	0.6	0	0	10.6	>	ערך המשתנה
הבסיס	## 7	Y2	0	0	1	0	-1	0	0.6	0.4	0	0	-0.4	1	0	17.4		(RHS)
	## 5	36	0	0	0	0	0	0	0.0	1.0	0	-1	-1.0	0	1	6.7		
	## 2	Z	0	0	0	0	800	0	1520.0	980.0	0	700	520.0	2000	0	64980.0		

# 5. ניתוחי רגישות

א. האילוץ השני בבעיה שלנו היא:

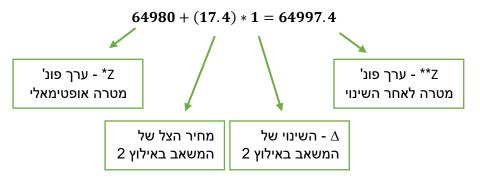
2)  $X_{2,1} + X_{2,2} \ge 2000$  צריכה של 2 טון אבטיחים.

##		Optimal Value	Dual Pric
##	A1	0	-10.6
##	L2	0	-17.4
##	L3	0	-20.4
##	S4	800	0.0
##	L5	0	-1.5
##	L6	1520	0.0

Optimal value: הערך של משתני החוסר/ עודף בפתרון האופטימאלי.

Dual price: מקדמי משתני הסרק בפונקציית המטרה האופטימאלית. זהו גם הערך של המשתנה הדואלי של משתנה ההחלטה המתאים (y). משמעות הערך היא בכמה תשתנה פונקציית המטרה אם נוסיף יחידת משאב נוספת (יחידה אחת לRHS של האילוץ).

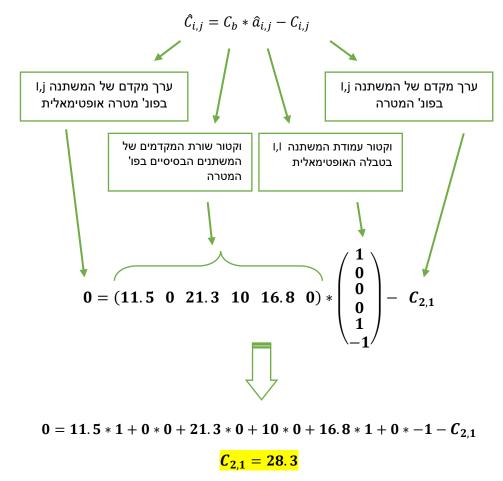
לפי הטבלה למעלה, ניתן לראות שמחיר הצל של המשאב מהאילוץ השני הינו 17.4 (הכפלנו ב 1- כי פונ' המטרה הגדל (MIN). כלומר, על כל תוספת של יחידה אחת במשאב, ערך פונקציית המטרה יגדל ב 17.4 יחידות. הסיבה שהערך גדל הוא כי משתנה הסרק באילוץ השני (L2) שווה 0, כלומר המשאב נוצל במלואו (מינימום 2 טון אבטיחים).



#### ב. שינוי לקבלת ריבוי פתרונות:

בשביל לקבל מצב של ריבוי פתרונות, צריך לבצע שינוי כך שבפתרון האופטימאלי של הבעיה, אחד המשתנים שאינם בבסיס צריך להיות שווה ל- 0. כלומר, במידה ונכניס את המשתנה לבסיס, ערך הפונקציה לא ישתנה, משמע ישנו יותר מפתרון אופטימאלי אחד.

בחרנו את המשתנה  $X_{2.1}$  שלא נמצא בבסיס הפתרון. המקדם שלו בפו' המטרה המקורית הוא 26.5. בשביל לקבל מצב של ריבוי פתרונות צריך למצוא עבורו מקדם חדש שיגרום לו להיות מועמד להכנס לבסיס הפתרון. נעזר בנוסחה:



כלומר, בשביל לקבל מצב של ריבוי פתרונות, המקדם של המשתנה  $X_{2,1}$  בפונקציית המטרה צריך להיות ב-9 יחידות. 28.3 , משמע להגדיל אותו ב-9 יחידות.

אם בניסוח השאלה נגדיל את מחיר האבטיח מישראל או את מחיר ההובלה של אבטיח מהארץ ב- 9 ₪ (או שניהם יחד בקומבינציה מסוימת כך שיחד הם יהיו שווים ל-9), נקבל מצב של ריבוי פתרונות לבעיה.

ג. כדי לשנות את הרכב הבסיס האופטימאלי נבחר את אחד ממשתני הבסיס בבעיה ונבדוק מה טווח השינוי בדי לשנות את הרכב הבסיס האופטימאלי בחר את אחד ממשתנה ב $X_{1,1}$  :

```
Current Coef Coef From Coef Till
## X1,1 -11.5 -1.25e+01 -10.0
```

ניתן לראות כי טווח השינוי של משתנה זה, **מבלי לשנות את הרכב הבסיס**, הינו בין 10 ל- 12.5. כלומר אם ניתן לראות כי טווח השינוי של משתנה זה, מבלי לשנות את הרכב בסיס הפתרון בהכרח ישתנה.

כעת נגדיל את מקדם המשתנה  $X_{1,1}$  ב-1.5 יחידות (עד ל-13) שמייצג את מחיר הזמנת התפוחים מישראל כולל הובלה. פונקציית המטרה תשתנה, האילוצים יישארו זהים:

$$\begin{aligned} & \min Z = \\ & \left( \mathbf{13}X_{1,1} + \mathbf{19}.3X_{2,1} + 2\mathbf{1}.3X_{3,1} \right) + \left( \mathbf{10}X_{1,2} + \mathbf{16}.8X_{2,2} + 26.5X_{3,2} \right) \end{aligned}$$

נציב בתוכנת ה-R ונקבל:

:פתרון אופטימאלי

```
## [1] "The number of iterations was: 4"
## [1] "-----
## [1] "The optimal solution is: -65960"
## [1] "-----
## [1] "
## [1] "The optimal values of the decision variables and their reduced costs are:"
    Optimal Value Reduced Cost
## X1,1
             0
                     -0.5
## X2,1
            980
                      0.0
## X3,1
            700
                      0.0
## X1,2
           1500
                      0.0
## X2,2
            1020
                      0.0
## X3,2
              0
                     -7.7
```

לפי הטבלה מתוכנת ה-R ניתן לראות שבסיס הפתרון השתנה מהבעיה המקורית. בבסיס החדש המשתנה לפי הטבלה מתוכנת ה- $X_{1,1}$  וצא מבסיס הפתרון. כמו כן, ניתן לראות גם כי ערך הפתרון  $X_{2,1}$  נכנס לבסיס הפתרון, ואילו המשתנה  $X_{1,1}$  יצא מבסיס הפתרון. כמו כן, ניתן לראות גם כי ערך הפתרון האופטימאלי גדל ל- 65,960 (ש"ח).

#### הפתרון האופטימאלי החדש:

	כמות בק"ג שנרכש	מדינה	פרי	משתנה
לא בסיסי	0	ישראל	תפוח	$X_{1,1}$
בסיסי	980	ישראל	אבטיח	$X_{2,1}$
בסיסי	700	ישראל	פמלה	X <sub>3,1</sub>
בסיסי	1500	טורקיה	תפוח	<i>X</i> <sub>1,2</sub>
בסיסי	1020	טורקיה	אבטיח	$X_{2,2}$
לא בסיסי	0	טורקיה	פמלה	X <sub>3,2</sub>

הסיבה שערך פו' המטרה גדל היא כי הגדלנו את אחד המקדמים של המשתנים בפונקציה (הגדלנו את מחיר של אחד המוצרים) ובגלל שזה משוואת חיבור לינארית, אם חלק במשוואה גדל גם התוצאה גדלה).

בנוסף, הסיבה שהרכב בסיס הפתרון השתנה היא בגלל שהגדלנו את אחד ממשתני ההחלטה (הגדלנו את מחיר של אחד מהמוצרים) אל מעבר לטווח השינוי שלו עד כדי שיהיה משתנה אחר שיהיה עדיף עליו בבסיס הפתרון (כלומר, שיהיה מוצר אחר "שישתלם" יותר לקנות בהתאם לאילוצים הנתונים מאשר המוצר שהתייקר).