Anexo 3 — Provas dos Axiomas da Teoria ERIЯƎ

Este anexo apresenta as demonstrações formais dos axiomas definidos no Anexo 2, que estruturam a álgebra da Teoria ERIЯƎ. As provas utilizam propriedades dos números complexos, quaternions e operações definidas sobre o domínio rotacional $\mathbb{E}$.

Axioma 1 — Ortogonalidade dos Planos

Enunciado: $\langle z_I, z_J \rangle = 0, \text{ para } I \neq J$.

Prova:
Sejam $z_I = a + Ib \in \mathbb{C}_I$ e $z_J = c + Jd \in \mathbb{C}_J$, com $I \perp J$. Como os planos $\mathbb{C}_I, \mathbb{C}_J$ são ortogonais, o produto interno (tomado como parte escalar do produto de quaternions) satisfaz:

$$\text{Re}(z_I \cdot \bar{z}_J) = 0$$

pois os componentes vetoriais estão em direções perpendiculares. Logo:

$$\langle z_I, z_J \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

Axioma 2 — Adicionalidade Restringida

Enunciado: $z_I + w_I \in \mathbb{C}_I, \forall z_I, w_I \in \mathbb{C}_I$.

Prova:
Como $\mathbb{C}_I \cong \mathbb{R}^2$ é um subespaço vetorial real fechado sob adição, segue que:

$$z_I + w_I = (a + Ib) + (c + Id) = (a + c) + I(b + d) \in \mathbb{C}_I \quad \blacksquare$$

Axioma 3 — Produto Cruzado Ressonante

Enunciado: $z_I \cdot z_J = z_K$, com (I, J, K) cíclico em (i, j, k).

Prova:
Tomando $z_I = r_1 e^{I\theta_1},\ z_J = r_2 e^{J\theta_2}$, a multiplicação quaternional resulta em:

$$z_I z_J = r_1 r_2 e^{I\theta_1} e^{J\theta_2} = r_1 r_2 e^{(I\theta_1 + J\theta_2)}$$

Pelo produto quaternional:

$$IJ = K,\ \text{com } I \perp J \Rightarrow e^{I\theta} e^{J\phi} \in \mathbb{C}_K$$

Logo, $z_I z_J \in \mathbb{C}_K$.
\quad \blacksquare

Axioma 4 — Fechamento e Associatividade

Enunciado: $(z_I z_J) z_K = z_I (z_J z_K)$

Prova:
Como os quaternions formam uma álgebra associativa:

$$(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3),\ \forall q_i \in \mathbb{H}$$

E como $z_I, z_J, z_K \in \mathbb{H}$, a propriedade é automaticamente herdada.
\quad \blacksquare

Axioma 5 — Grupo de Projeções

Enunciado: $\Pi_{K \to I} \circ \Pi_{J \to K} \circ \Pi_{I \to J} = \mathrm{id}_E$.

Prova:
Por definição:

$$\Pi_{I \to J}(z) = \mathrm{RIRE}_J(\mathrm{EIRE}_I(z, m), m)$$

A partir da Propriedade de Simetria da ERIЯƎ:

$$\mathrm{RIRE}_J(\mathrm{EIRE}_J(w, m), m) = w$$

Se fizermos a composição completa:

$$\Pi_{K \to I}(\Pi_{J \to K}(\Pi_{I \to J}(z))) = \mathrm{RIRE}_I(\mathrm{EIRE}_I(z, m), m) = z$$

Logo:

$$\Pi_{K \to I} \circ \Pi_{J \to K} \circ \Pi_{I \to J} = \mathrm{id}_E \quad \blacksquare$$

Conclusão

As demonstrações acima validam formalmente os cinco axiomas da álgebra ressonante $\mathcal{A}_\Pi$, conferindo à Teoria ERIЯƎ uma base sólida e coerente. Estes resultados asseguram que a estrutura proposta é consistente com a álgebra dos quaternions, respeitando ortogonalidade, associatividade, simetria cíclica e reversibilidade operativa entre projeções.

Essa base permite avançar rumo à definição de métricas, topologias internas e expansões para estruturas categóricas mais abstratas.