# 计算物理基础第二次作业

柴声都 *19307110142*

2021 年 10 月 1 日

## 一 第一题

### 1 问题描述

Sketch the function $x^3 - 5x + 3 = 0$.

(i) Determine the two positive roots to 4 decimal places using the bisection method. Note: You first need to bracket each of the roots.

(ii) Take the two roots that you found in the previous question (accurate to 4 decimal places) and "polish them up" to 14 decimal places using the Newton-Raphson method.

(iii) Determine the two positive roots to 14 decimal places using the hybrid method.

### 2 求解思路

通过对 $f(x) = x^3 - 5x + 3$ 作图，如下图所示，可以发现 $x^3 - 5x + 3 = 0$ 的两个正根大约分别在 $[0, 1]$ $[1, 2]$ 两个区间内，因此可以用二分法求解方程，之后用二分法求解得出的结果，采用牛顿法，将根的精度提高; 或者可以直接用混合法，直接将方程的解精确到 14 位小数。

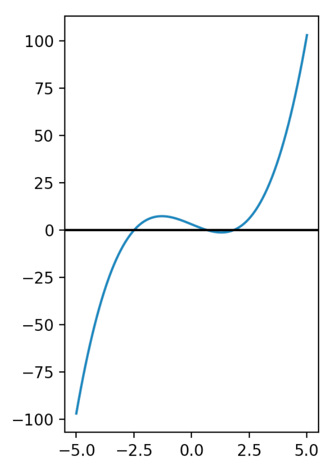


图 一 f（x）示意图

对于二分法和牛顿法求解思路与上课老师讲述类似，这里不再赘述，对于混合法，我们思路如下，根据初始二分法区间，从该区间的中点开始使用牛顿法迭代，如果迭代后的值落在原区间之内，则继续使用牛顿法迭代，如果迭代出的值落在原区间之外，则采用二分法，把原区间的中点作为新的迭代值并对区间做更新。

精度的确定上，我采用的方式是，判断迭代后的 x0 在加减 err 后的函数值是否符号相反，如果相反，则说明精度已经达到。

## 3 伪代码

**Algorithm 1** BISECTION METHOD

**Input:** initial interval[a,b] ,root err

**Output:** root of the function x0

**while** $\text{FUNC}(x0 + err) * \text{FUNC}(x0 - err) > 0$ **do**
  $x0 = (a + b)/2$
  **if** $\text{FUNC}(x0) * \text{FUNC}(a) > 0$ **then**
    $a = x0$
  **end if**
  **if** $\text{FUNC}(x0) * \text{FUNC}(b) > 0$ **then**
    $b = x0$
  **end if**
  **return** $x0$

**Algorithm 2** NEWTON-RAPHSON METHOD

**Input:** initial value x0 ,root err

**Output:** root of the function x

**while** $\text{FUNC}(x0 + err) * \text{FUNC}(x0 - err) > 0$ **do**
  $x0 = x0 - \text{FUNC}(x0)/\text{FUNC}(x0)'$
  $x = x0$
  **return** $x$

**Algorithm 3** HYBRID METHOD

**Input:** initial interval[a,b] ,root err

**Output:** root of the function x

**while** $\textsc{func}(x0 + err) * \textsc{func}(x0 - err) > 0$ **do**

  $x0 = x0 - \textsc{func}(x0)/\textsc{func}(x0)'$

  **if** $x0 < a\ or\ x0 > b$ **then**

    $x0 = (a + b)/2$

    **if** $\textsc{func}(x0) * \textsc{func}(a) > 0$ **then**

      $a = x0$

    **end if**

    **if** $\textsc{func}(x0) * \textsc{func}(b) > 0$ **then**

      $b = x0$

    **end if**

  **end if**

  $x = x0$

  **return** $x$

### 4 运行结果

```
solution with bisection
0.6566162109375
1.834228515625
solution with newton
0.6566204310471103
1.8342431843139217
solution with hybrid
0.6566204310471104
1.8342431843139217
```

图 二 运行结果

## 二 第二题

### 1 问题描述

Search for the minimum of the function $f(x, y) = sin(x + y) + cos(x + 2y)$ in the whole space.

## 2 求解思路

利用梯度下降法进行求解，同时我们对学习率进行优化。记 $g$ 是 $f(x)$ 的梯度,$H(x)$ 是 $x$ 处的 Hessian 矩阵，则通过泰勒展开等方式可以得到优化后的梯度下降法（详见《深度学习》伊恩 · 古德费洛 4.3），即：$x' = x - \epsilon g, \epsilon = g^T g / g^T H g$

## 3 伪代码

**Algorithm 4** GRADIENT DESCEND

**Input:** initial point (x0,y0),step_number

**Output:** Minimum of f(x, y) and the corresponding (x, y)

**for** i in range(step_num) **do**
    *calculate g and H*
    *calculate* $\epsilon = g^T g / g^T H g$
    $x0 = x0 - \epsilon g$
**end for**
*calculate* $f(x, y)$
**return** $(x, y), f(x, y)$ =0

## 4 运行结果

在初值设为（3，4），迭代次数设为 100 次时，得到最小值为-1.999997，对应的坐标为（6.2784876，4.71536248），结果及其迭代过程如图：

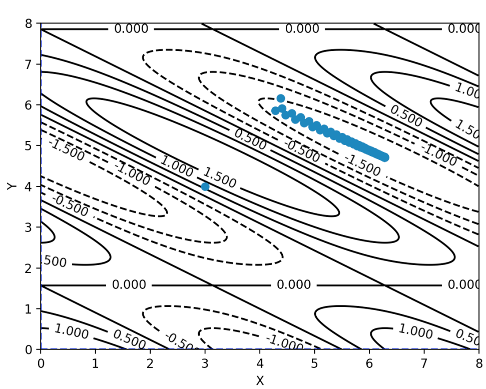


图 三　迭代过程

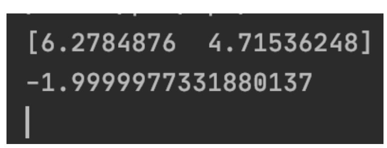


图 四 运行结果

# 三 第三题

## 1 问题描述

Determine M(T) the magnetization as a function of temperature T for simple magnetic materials.

## 2 求解思路

磁化满足方程 $tanh(m(t)/t) = m(t)$,$M(T)$ 和 $m(t)$ 只相差一个常数，$T$ 和 $t$ 也只相差一个常数，因此只需求解 $m(t)$ 即可，这里我们采用第一题中的 hybrid method，在不同的 t 下进行求解。

## 3 伪代码

**Algorithm 5** DETERMINE THE m(t)

**Input:** interval of t ,step_number

**Output:** m(t)

**for** i in range(2),step_num=200 **do**

  $find\ the\ root\ of\ tanh(m(t)/t) = m(t)\ via\ hybrid\ method$

  $m(t).append = m(t)$

**end for**

**return** $m(t)$

## 4 运行结果

我们取 t 的范围为（0，2）发现在 $t = 1$ 时有相变，在 $t > 1$ 时方程只有一个零解，在 $0 < t < 1$ 时，方程除了一个零解外还有两个互为相反数的解，图中只取正解，结果如图:

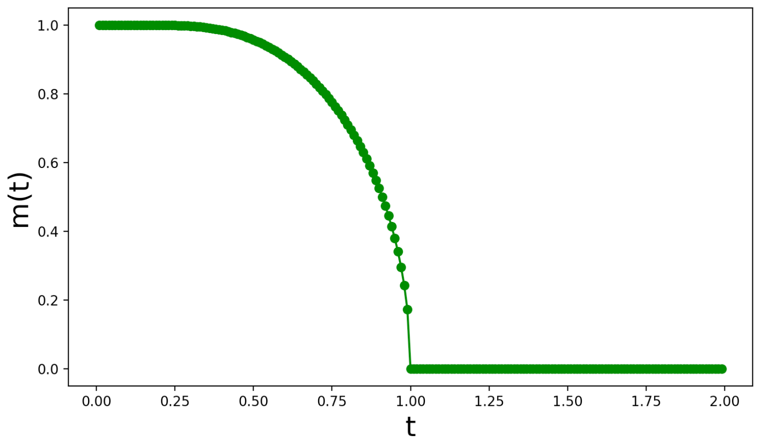


图 五 运行结果