

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

VALMIR MACÁRIO FILHO

CARLOS ALEXANDRE MELLO



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Na Biologia: área que trata com a forma e a estrutura de plantas e animais.

Morfologia Matemática:

Ferramenta para extração de componentes de imagens que sejam úteis na representação e descrição da forma de uma região.

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Morfologia = Forma e estrutura de um objeto

- Inter-relações entre as partes de um objeto

Base na Teoria dos Conjuntos

Algumas operações matemáticas podem ser aplicadas a conjuntos de pixels a fim de intensificar aspectos das formas tal que eles possam ser contados ou reconhecidos

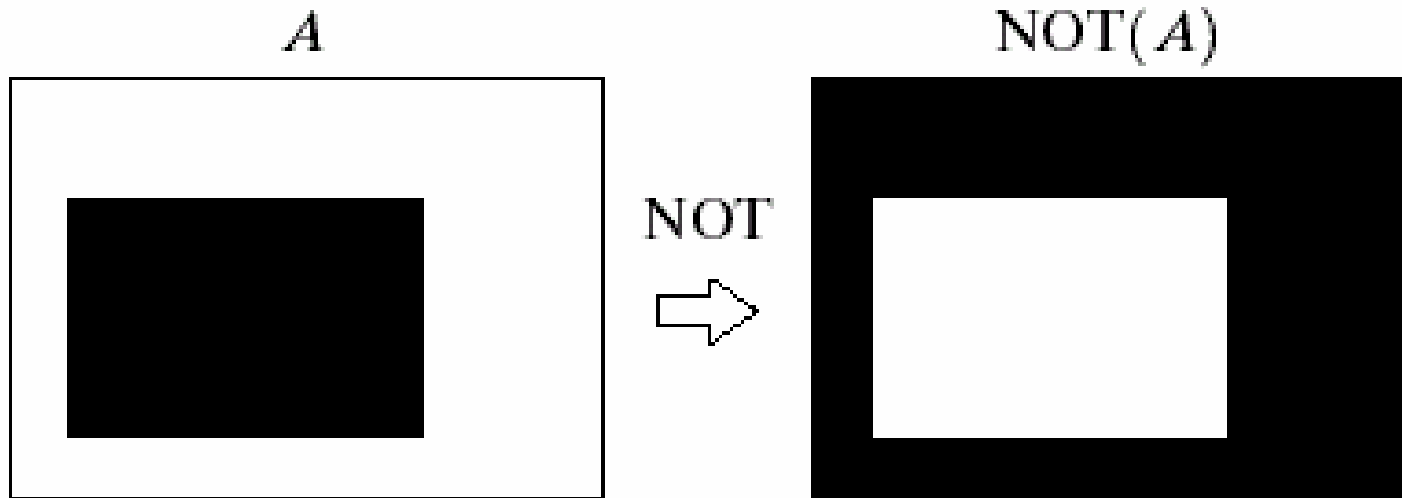
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

- O conjunto de todos os pixels pretos de uma imagem Binária é uma descrição completa dessa Imagem
- Em Imagens Binárias, os conjuntos são membros do espaço bi-dimensional de números inteiros em que cada elemento é um vetor cujas coordenadas são (x,y)
- Imagens digitais em nível de cinza podem ser representadas por conjuntos cujos componentes estejam em 3 dimensões. Dois componentes de cada elemento são as coordenadas do pixel e o terceiro corresponde ao valor da Intensidade

MORFOLOGIA

OPERAÇÕES DE

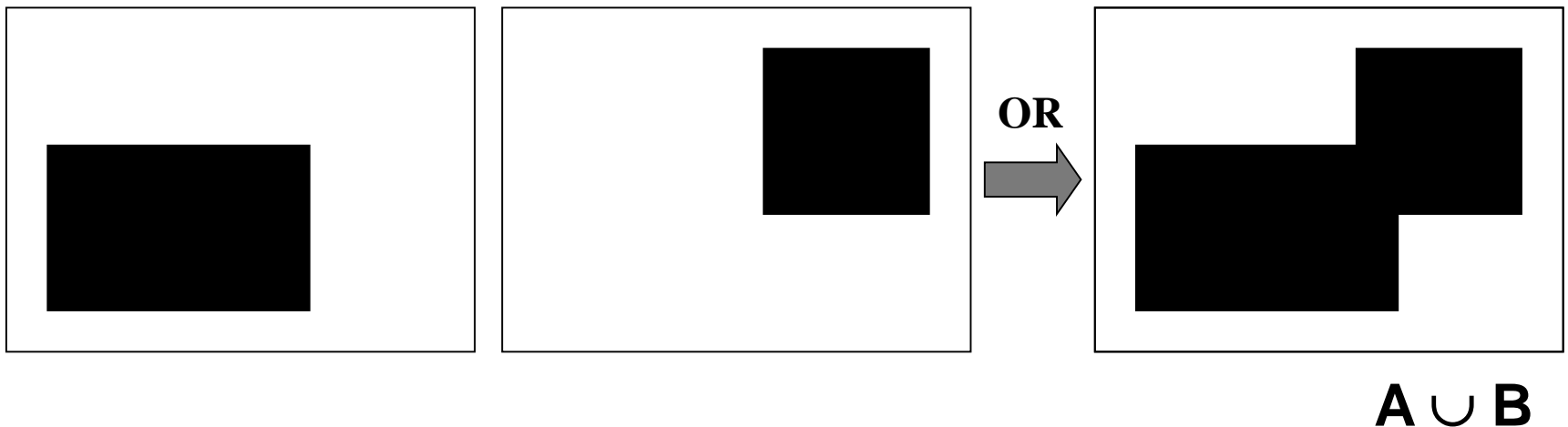
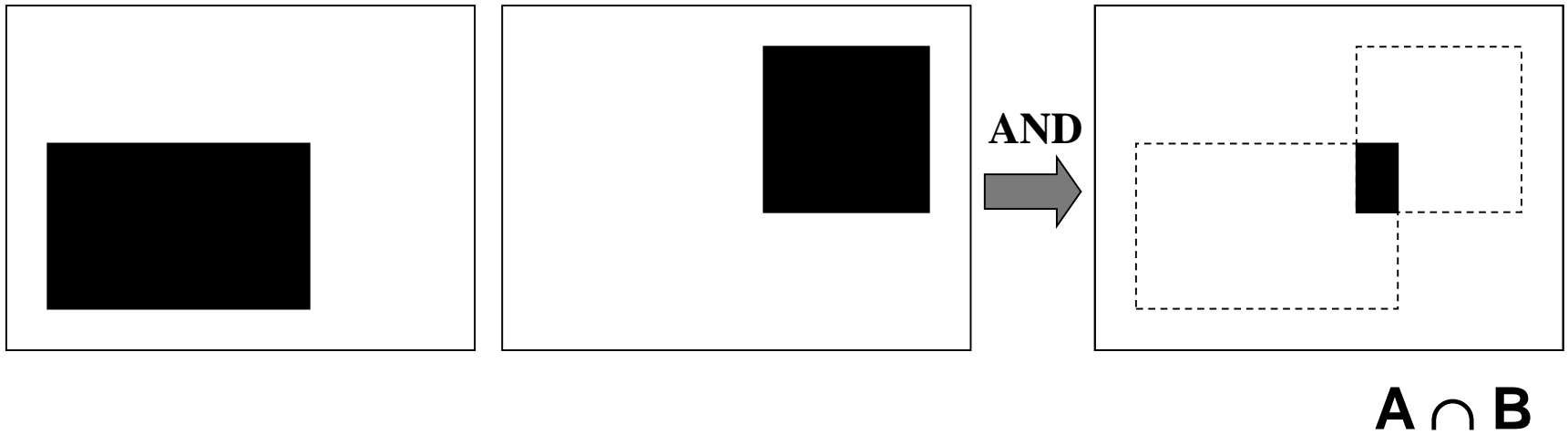
CONJUNTOS EM IMAGENS



MORFOLOGIA

OPERAÇÕES DE

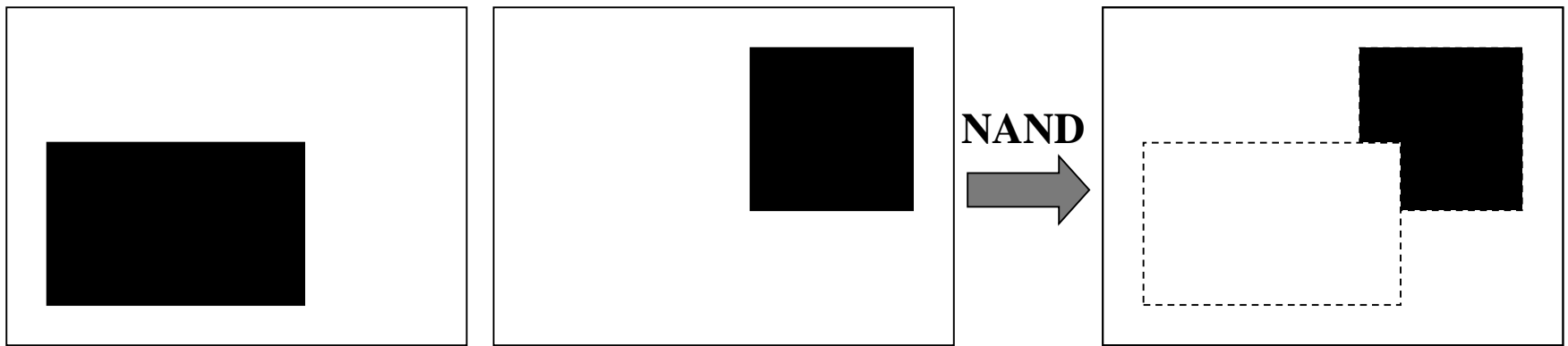
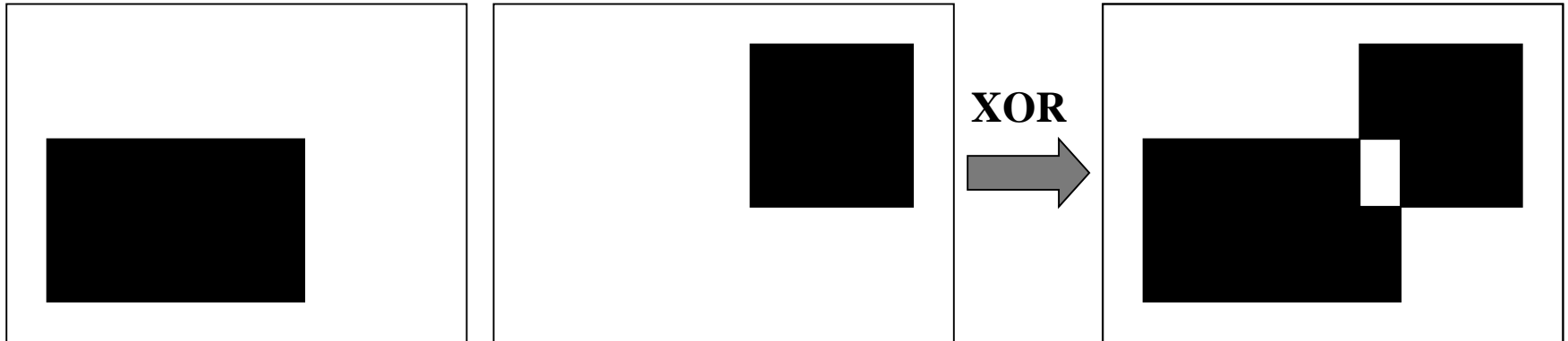
CONJUNTOS EM IMAGENS



MORFOLOGIA

OPERAÇÕES DE

CONJUNTOS EM IMAGENS



B - A

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação

- Aumenta a área em branco da imagem
- Diminui a área em preto da imagem
- Objetos na imagem crescem

Erosão

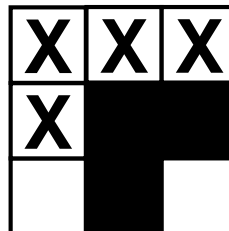
- Diminui a área em branco da imagem
- Aumenta a área em preto da imagem
- Objetos na imagem diminuem

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

O ‘elemento central’ pode ser qualquer ponto do elemento estruturante

Não necessariamente o elemento estruturante é uma matriz retangular ou quadrada...

- Elementos chamados ‘don’t care’ podem mudar a forma do elemento



X = *don't care*
(não importa)

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Operação

- A operação deve casar o pixel central do elemento estruturante com o pixel analisado na imagem
- No caso de pixels na borda da imagem, considera-se que os elementos estruturantes que não estão sobre elementos da imagem cobrem podem cobrir elementos *off* ou *don't care*
 - É como se a imagem sofresse uma extensão nula ou com elementos *don't care*

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Operações morfológicas binárias são definidas em imagens de duas cores

Observe a imagem abaixo....

(0,0)

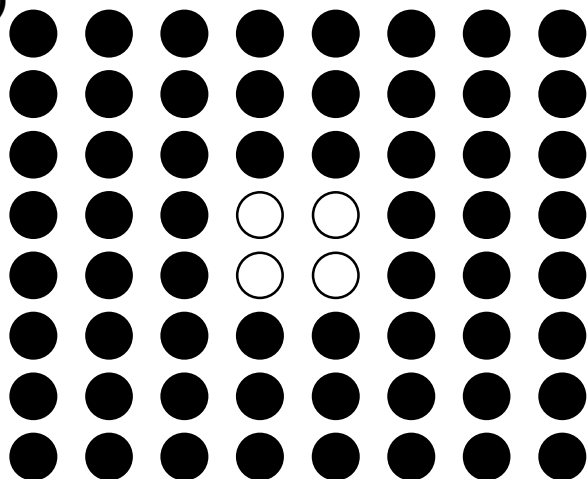
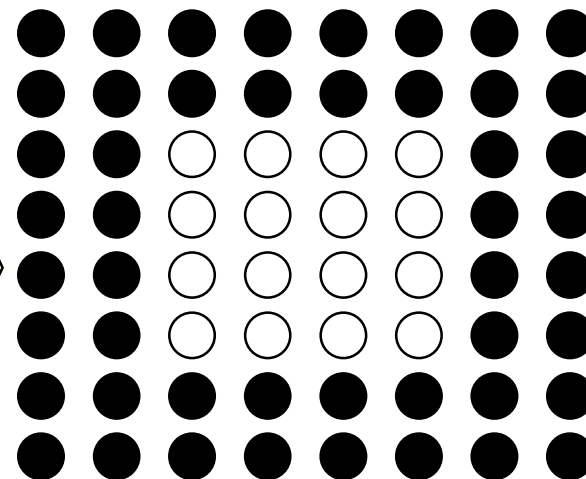


Imagem A

Vamos pintar de branco todos os vizinhos de um pixel branco....



O mesmo quadrado, mas um pixel mais largo que o anterior... *Dilatação*

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

De forma simples, a dilatação faz com que os objetos tornam-se mais largos

Esse é um exemplo de uma operação de morfologia que pode ser facilmente implementado

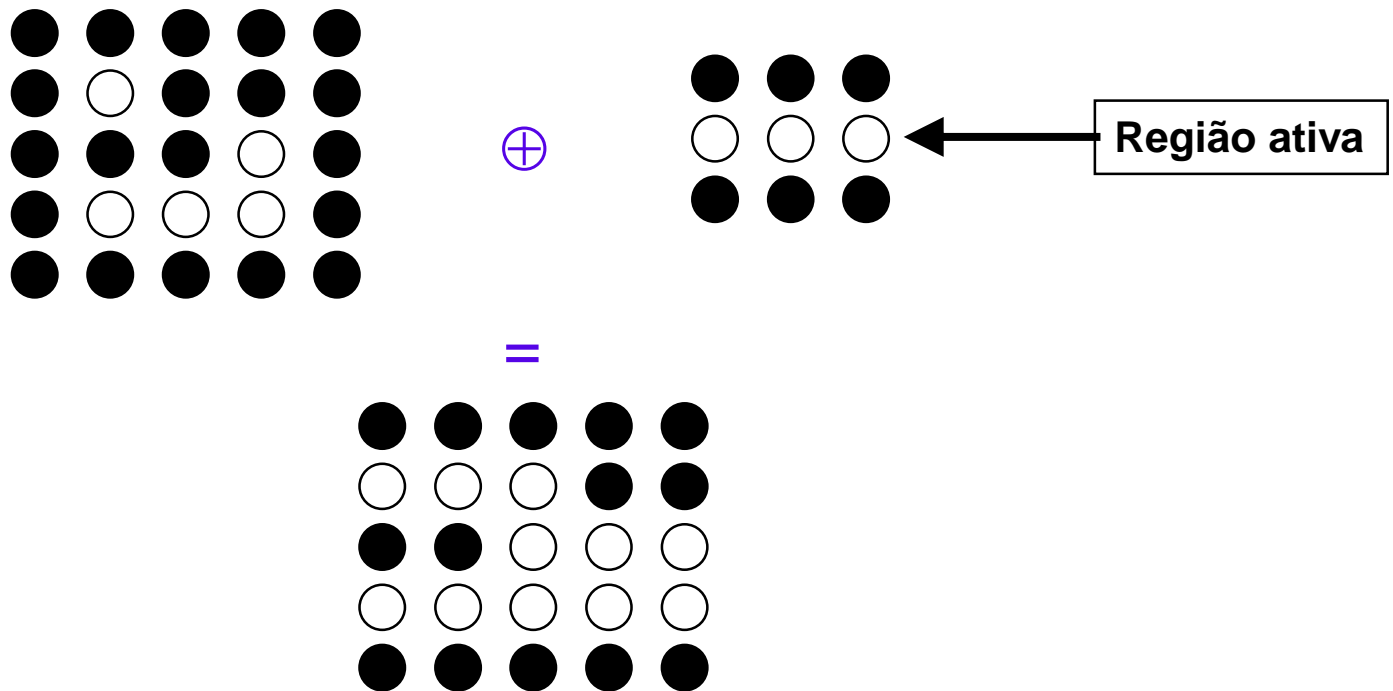
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação: Exemplo 1

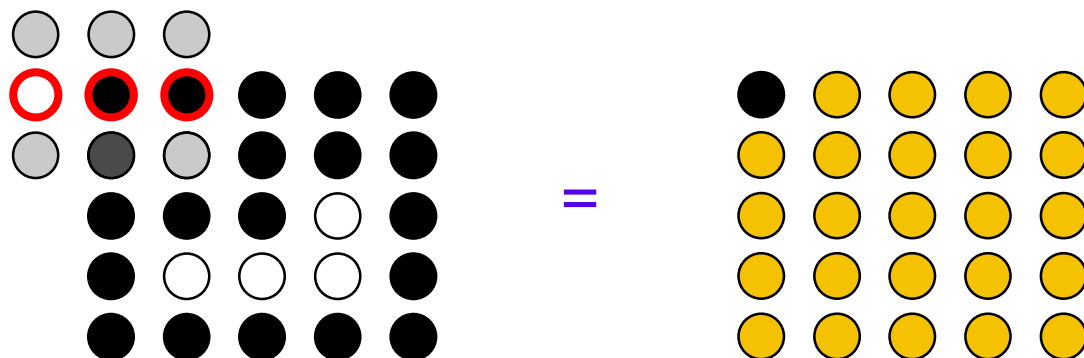
$$\begin{array}{ccccc} \text{im} = & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} \text{struct} = & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \end{array} = \begin{array}{ccccc} \text{bw} = & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação: Exemplo 1



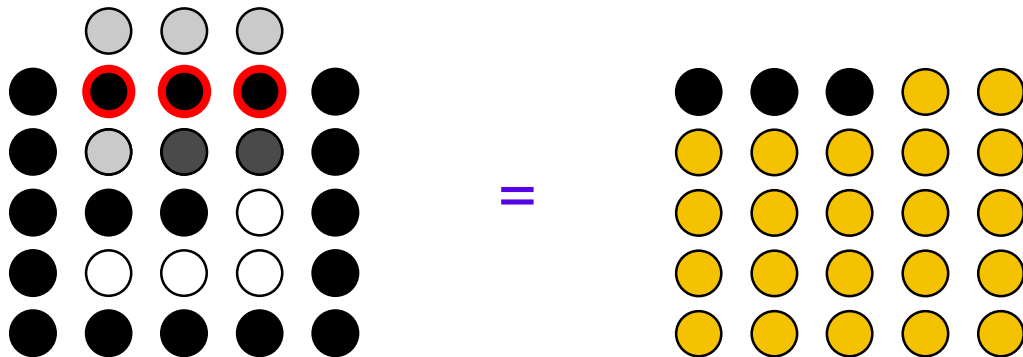
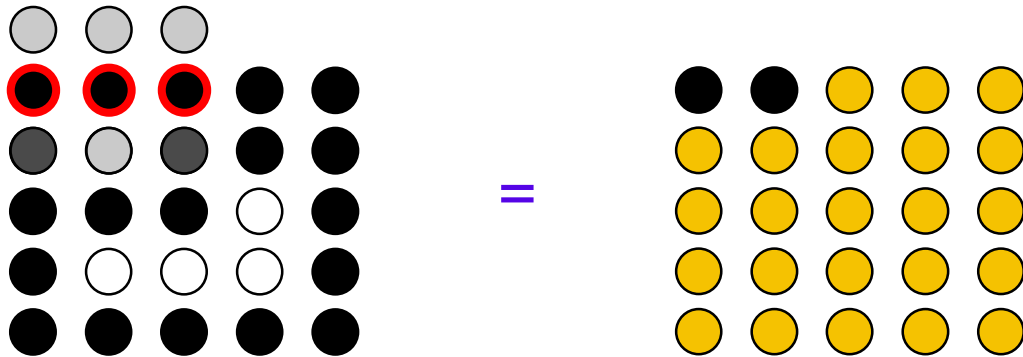
Dilatação: Exemplo 1



O pixel central do elemento casa com o pixel a ser processado; se **qualquer** pixel sob a região ativa estiver ativo, então o pixel correspondente na imagem final fica ativo (1); se todos forem inativos, o pixel na imagem final fica inativo (0).

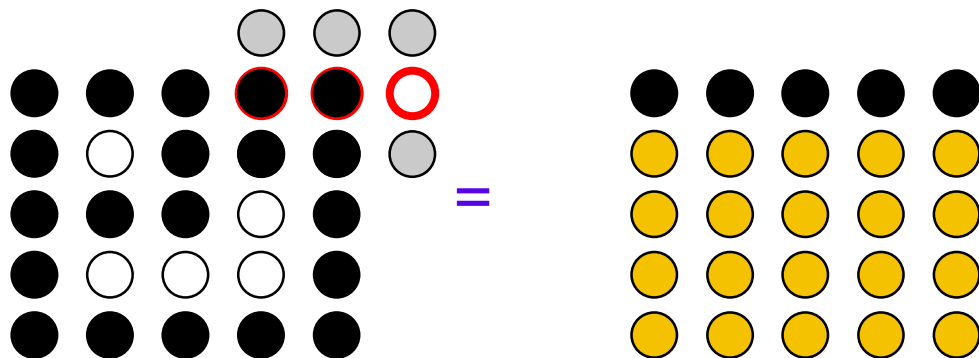
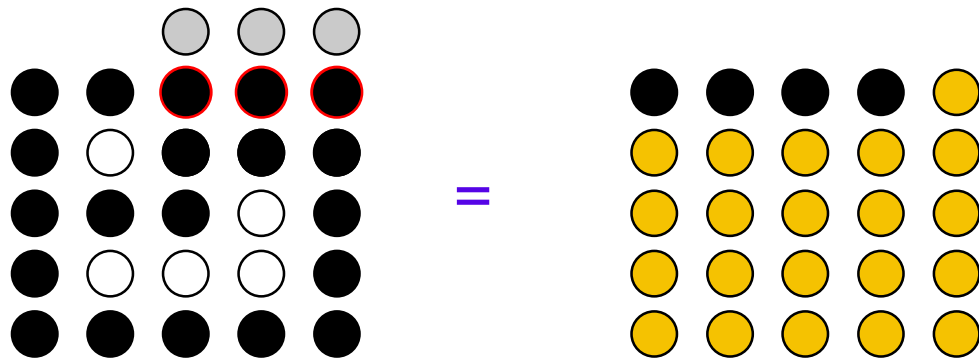
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação: Exemplo 1



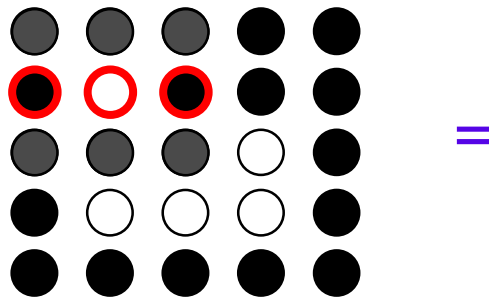
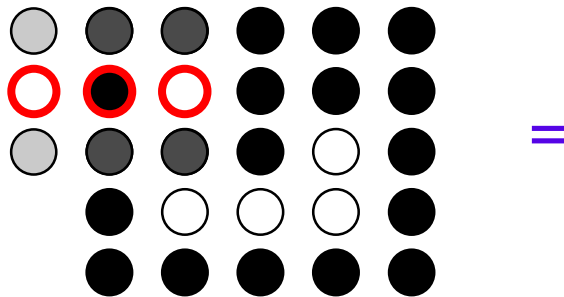
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação: Exemplo 1



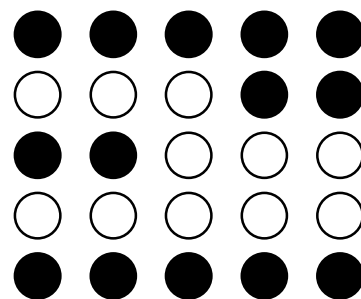
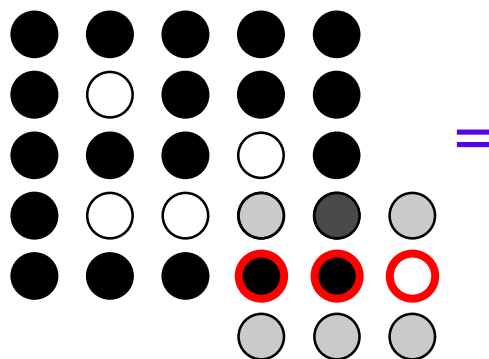
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação: Exemplo 1



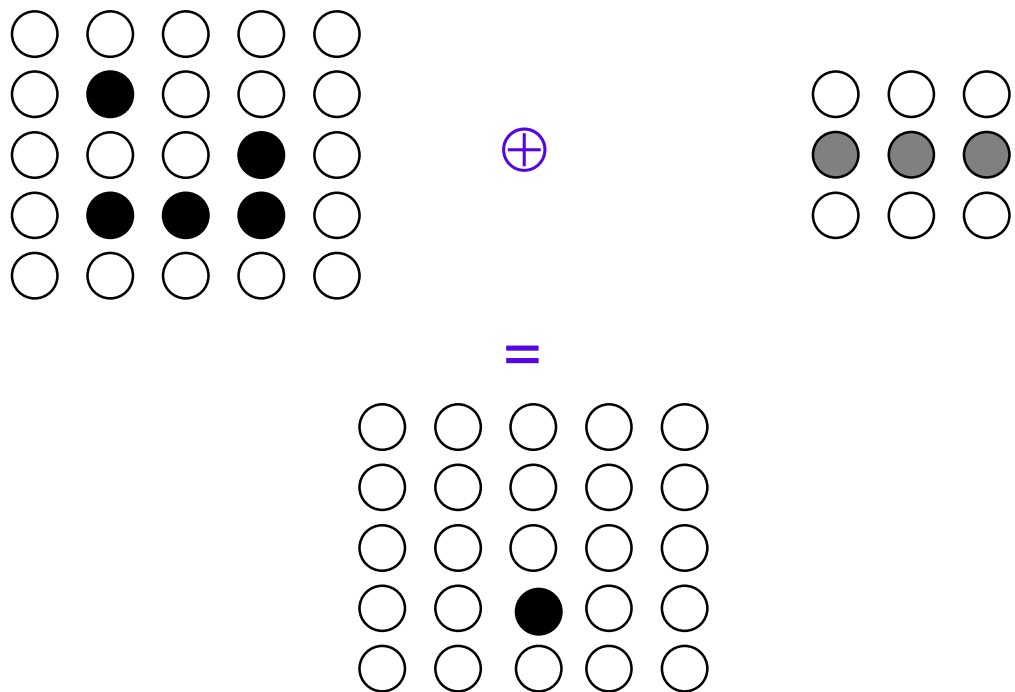
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação: Exemplo 1



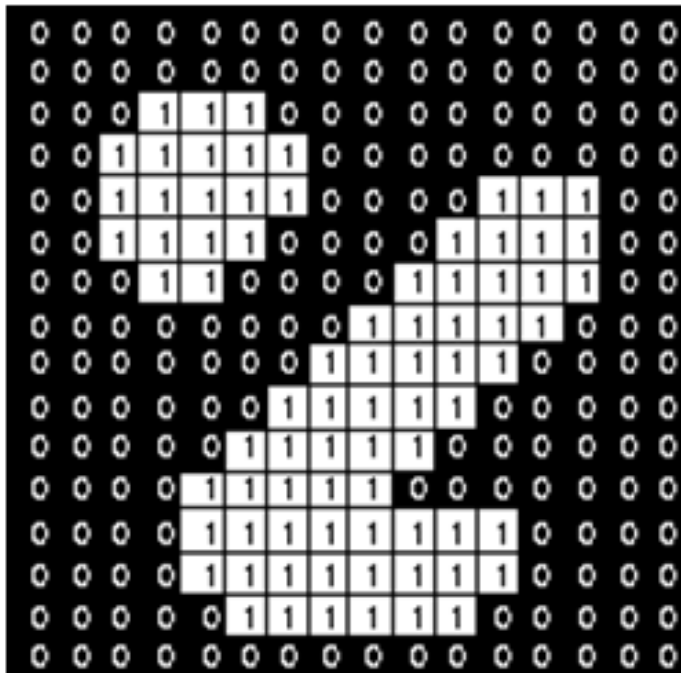
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação: Exemplo 2

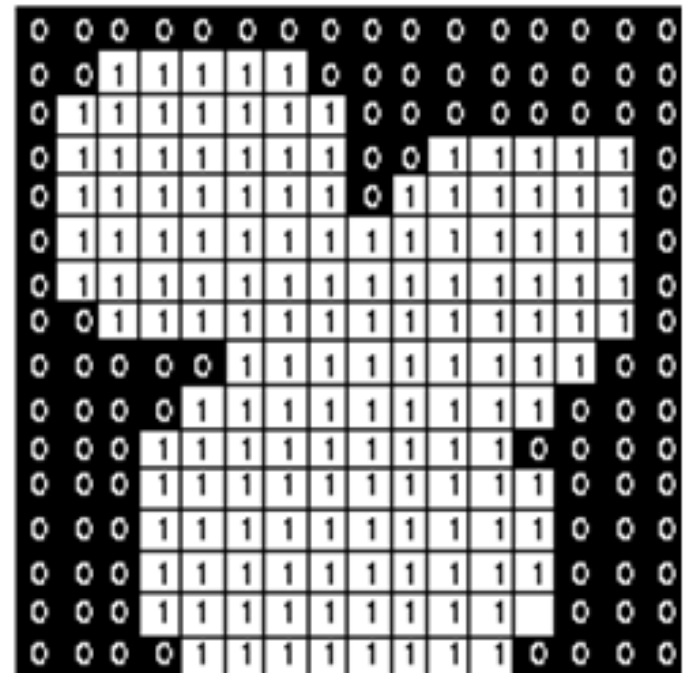


MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação: Exemplo 3



1	1	1
1	1	1
1	1	1



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação: Observe que o “objeto” são os pixels com tom 1 (brancos)

- *Logo, a dilatação faz com que as áreas da imagem aumentem*
- Às vezes, é interessante inverter a imagem para aplicar uma dilatação
 - Depois, inverte-se o resultado novamente

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação

- Exemplo: Observe o resultado da dilatação da imagem abaixo pelo elemento estruturante do Exemplo 1 anterior

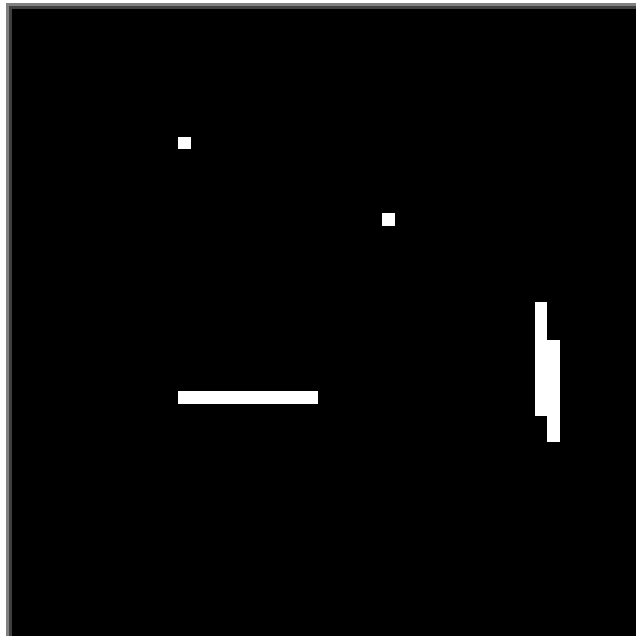


Imagem original

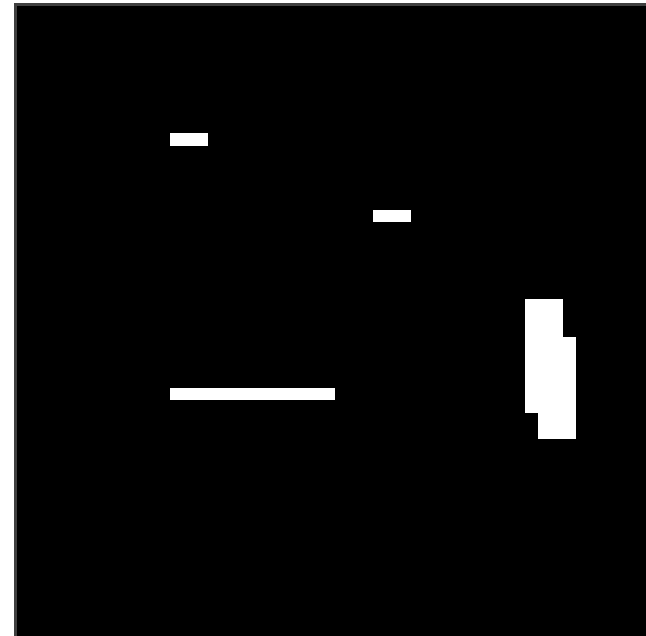


Imagem dilatada

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Dilatação

- Exemplo: Enquanto que o resultado à aplicação na imagem não negativada seria.....

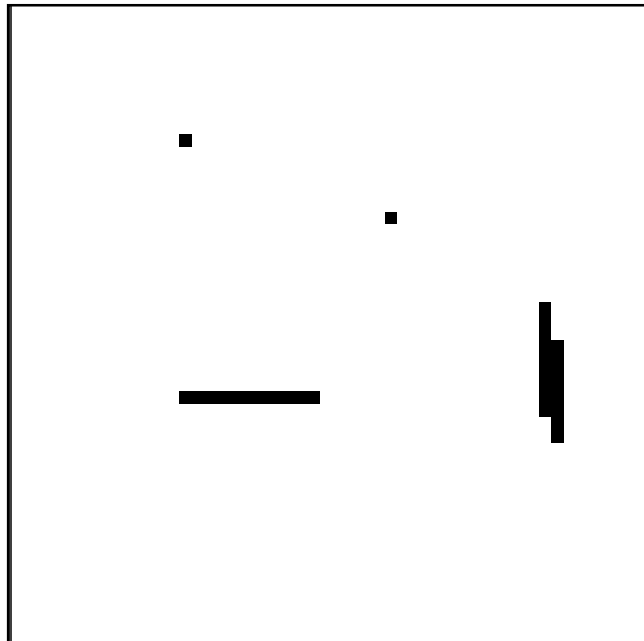


Imagem original

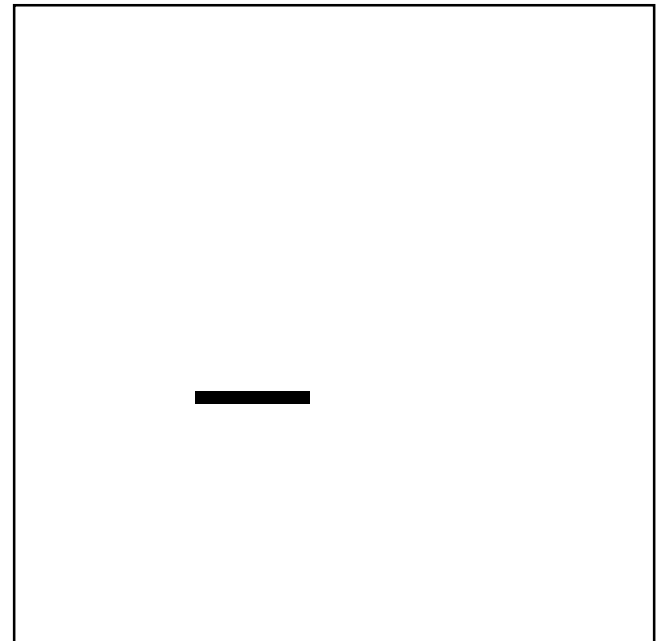


Imagem dilatada

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

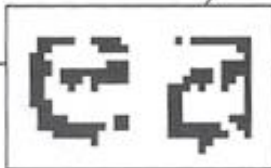
Dilatação

- Assim, a dilatação pode ser considerada como a união de todas as translações especificadas pelo elemento estrutural B
 - Como a união é comutativa, a dilatação também será a mesma se trocarmos a imagem com o elemento estrutural

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Aplicação de Dilatação (sobre imagem negativada)

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

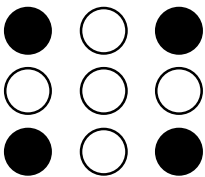


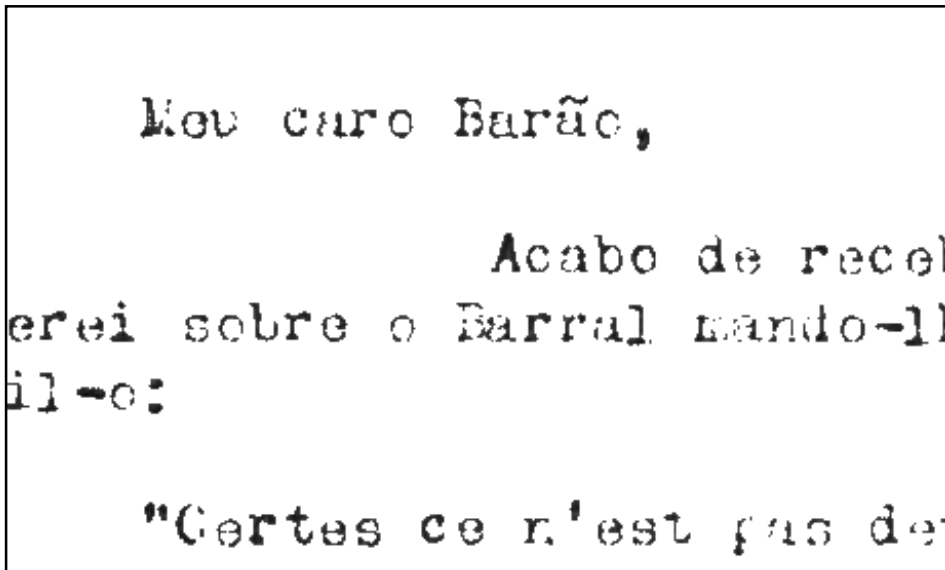
Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Aplicação de Dilatação

struct = 

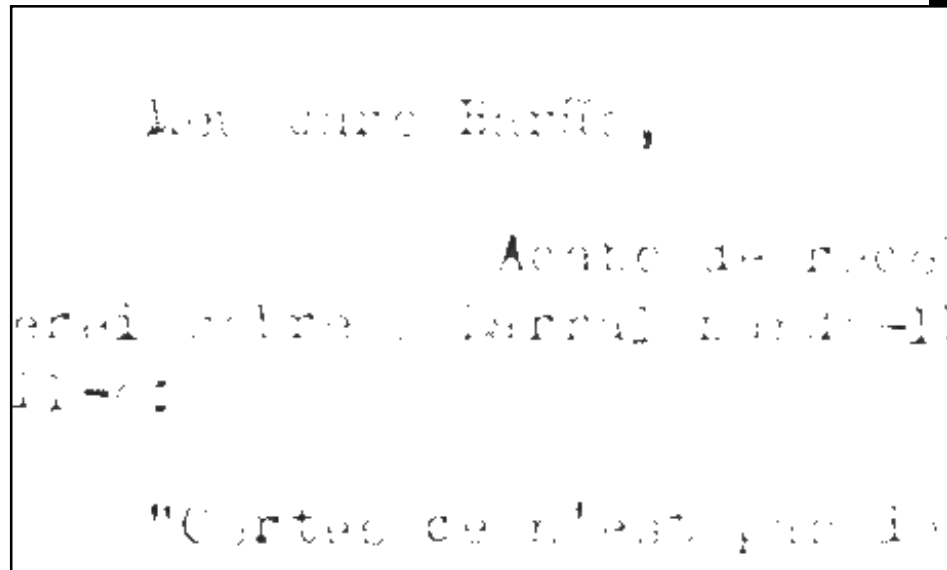


Meu caro Barão,

Acabo de receber sobre o Barral mando-lhe o: il-o:

Certes ce n'est pas de

Imagem original



Meu caro Barão,

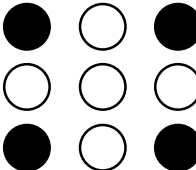
Acabo de receber sobre o Barral mando-lhe o: il-o:

Certes ce n'est pas de

Imagem dilatada

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Aplicação de Dilatação

struct = 

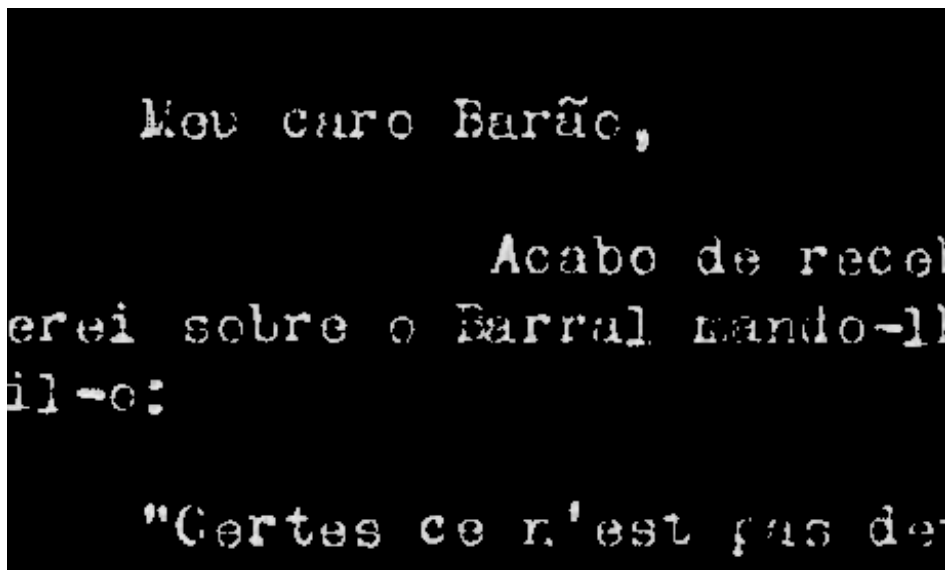


Imagem original
negativada

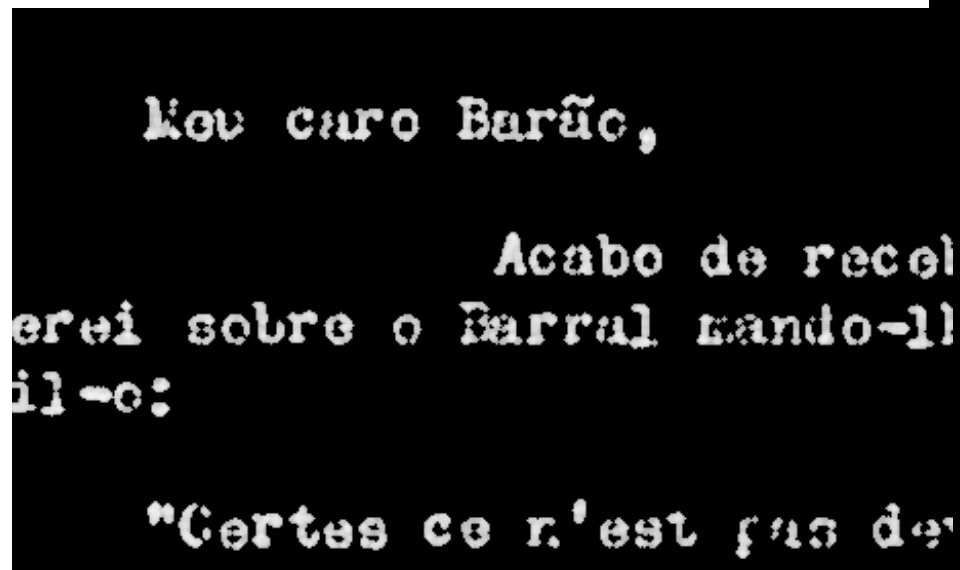
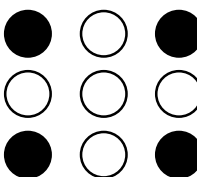


Imagem negativada
dilatada

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Aplicação de Dilatação

struct = 

Meu caro Barão,

Acabo de receber
sobre o Barral mando-lh
il-o:

"Certes ce n'est pas de

Imagem original

Meu caro Barão,

Acabo de receber
sobre o Barral mando-lh
il-o:

"Certes ce n'est pas de

Resultado final após
nova negatificação

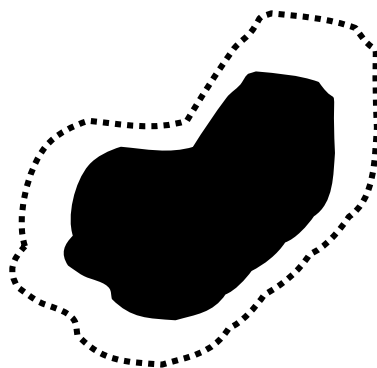
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão

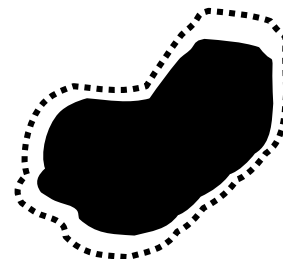
- Se a dilatação deixa um objeto mais largo, a erosão o estreita
- De forma simples, a erosão remove os pixels da camada externa de um objeto



**Objeto
Original**



Dilatação



Erosão

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão

- $A \ominus B = \{c | (B)_c \subseteq A\}$
- Em outras palavras, é o conjunto de todos os pixels c tal que o elemento estrutural B transladado por c corresponda a um conjunto de pixels relevantes em A
- Vamos ver um exemplo simples....

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 1

im =

1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1



s =

1	1	1
1	1	1
1	1	1

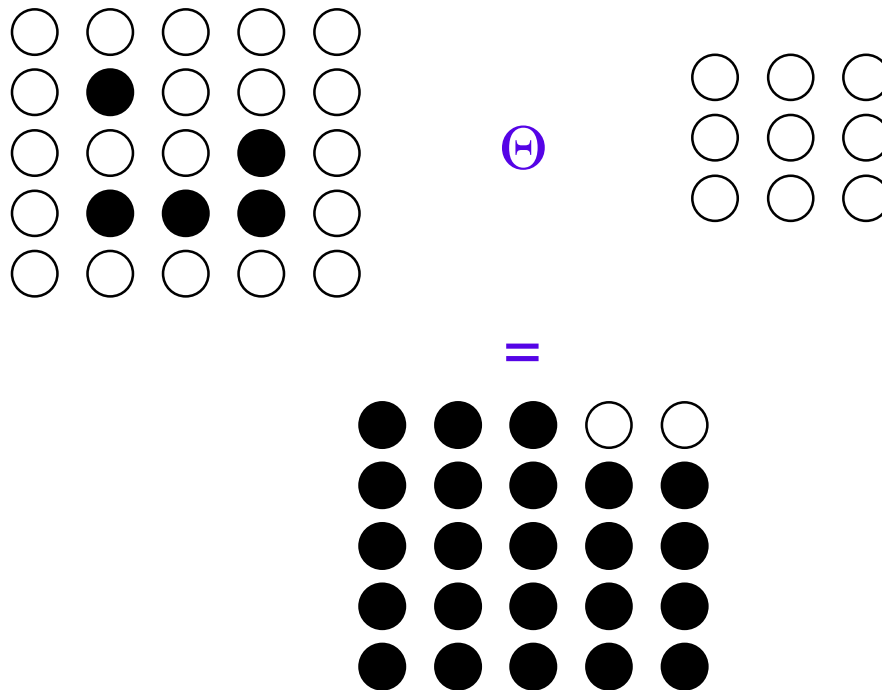
=

bw =

0	0	0	1	1
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

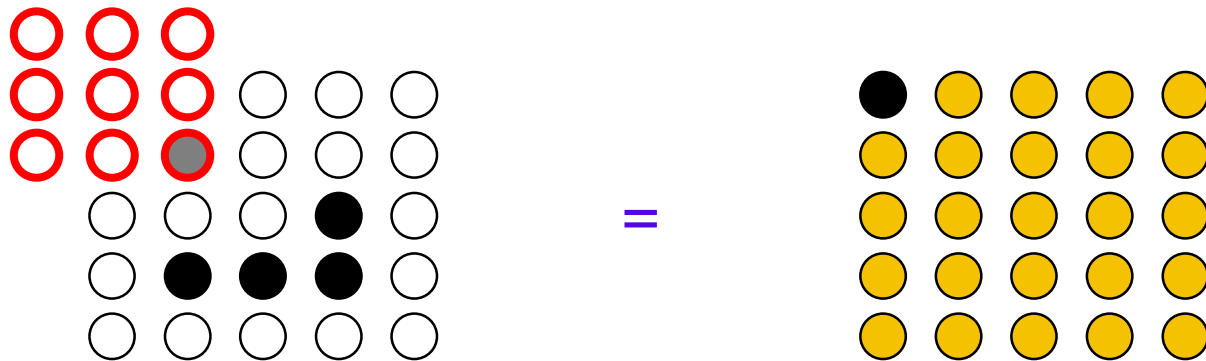
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 1



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

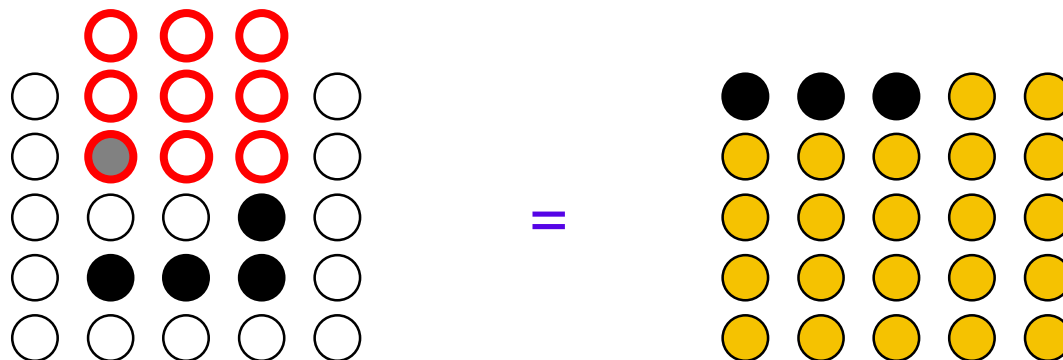
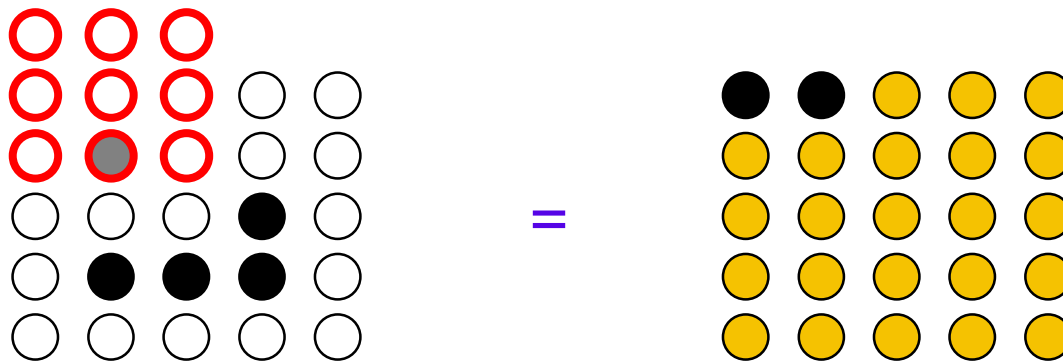
Erosão: Exemplo 1



O pixel central do elemento casa com o pixel a ser processado; se todos os pixels da região ativa estiverem ativos, o resultado final fica ativo

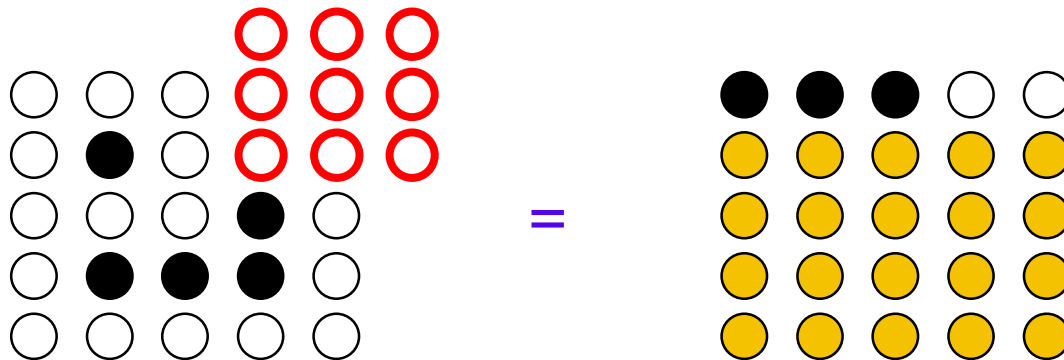
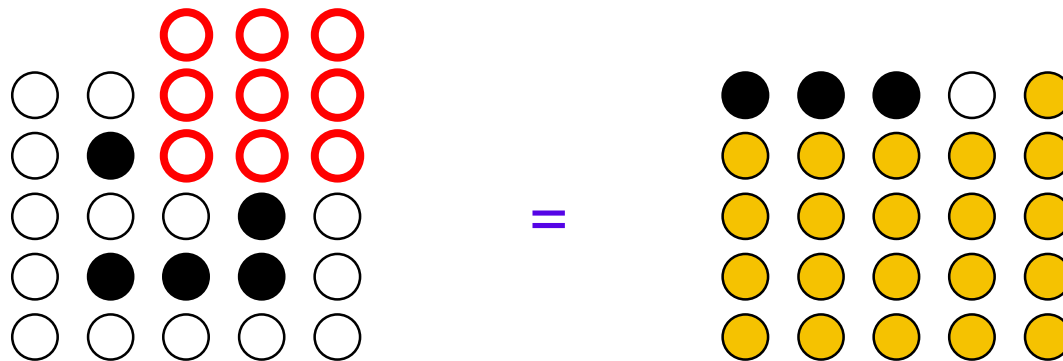
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 1



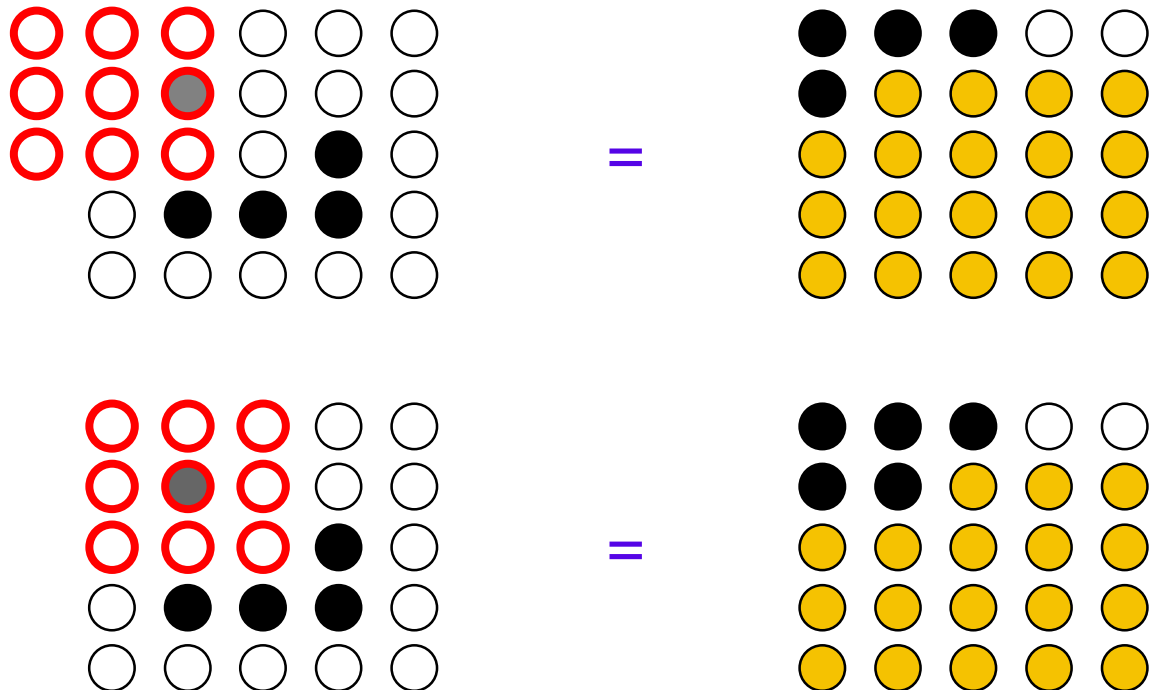
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 1



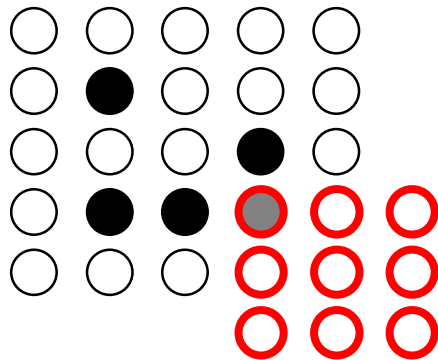
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 1

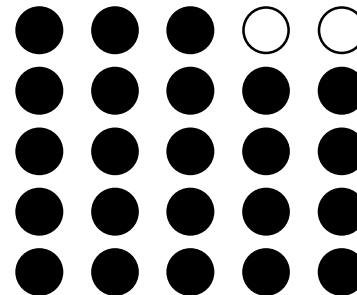


MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 1

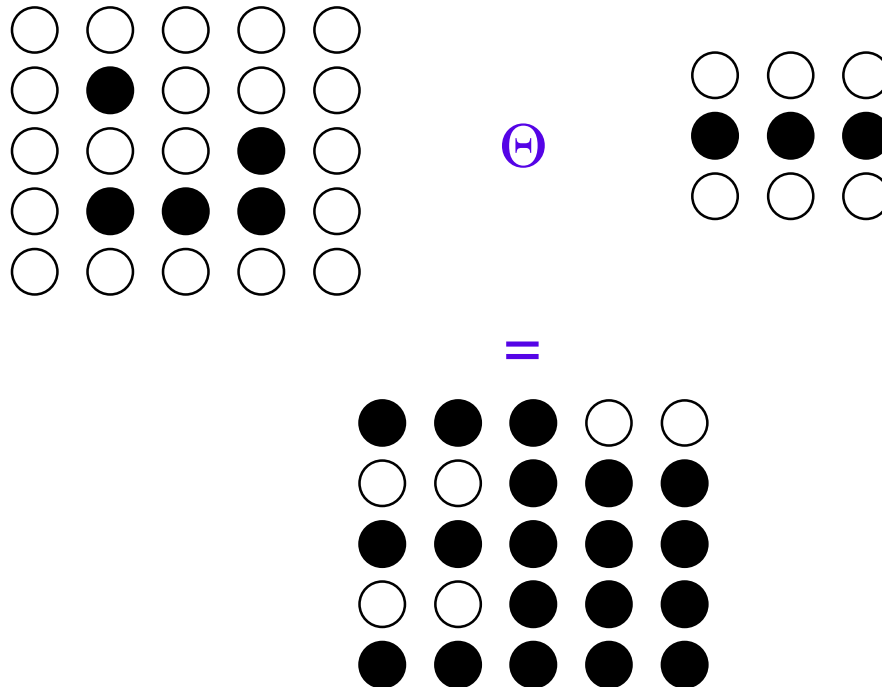


=



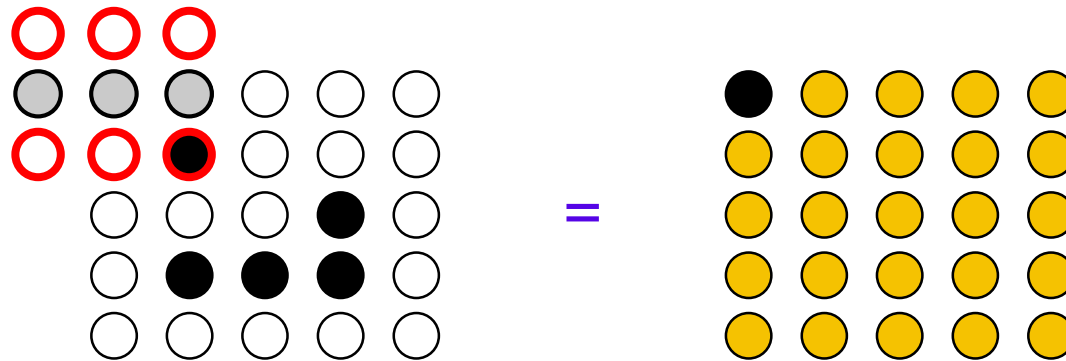
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 2



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

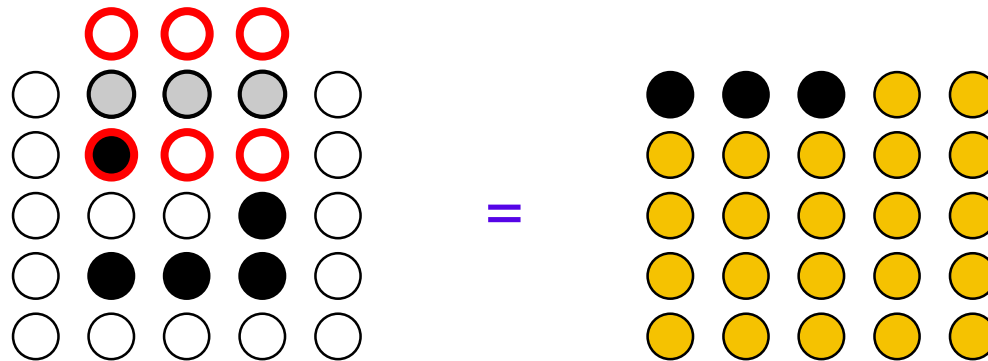
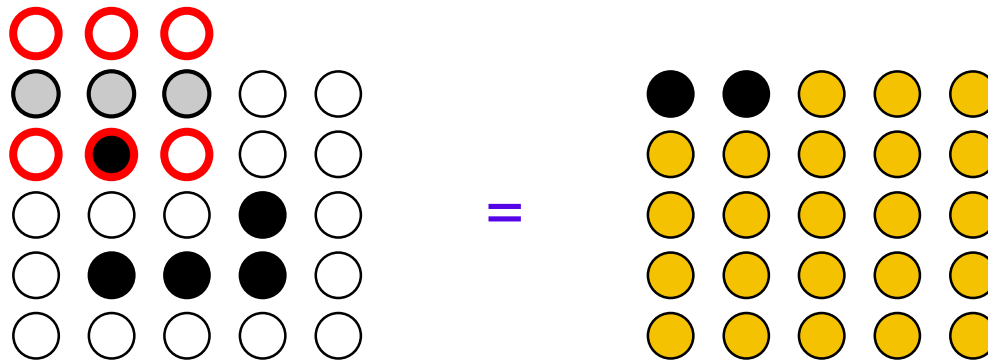
Erosão: Exemplo 2



O pixel central do elemento casa com o pixel a ser processado; se todos os pixels da região ativa estiverem ativos, o resultado final fica ativo

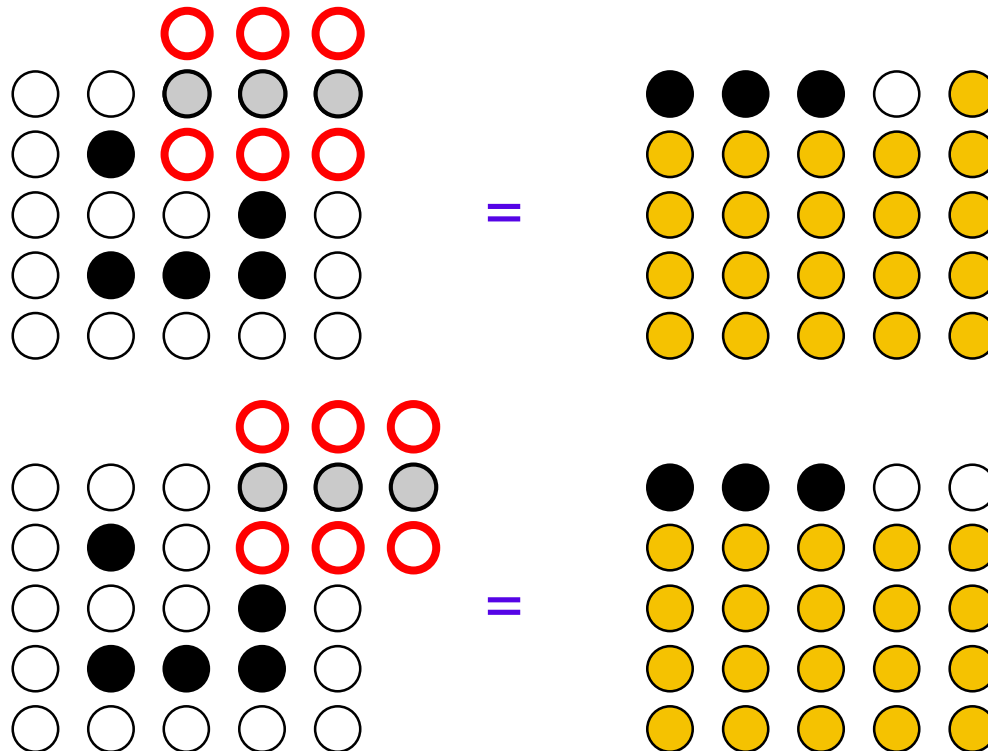
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 2



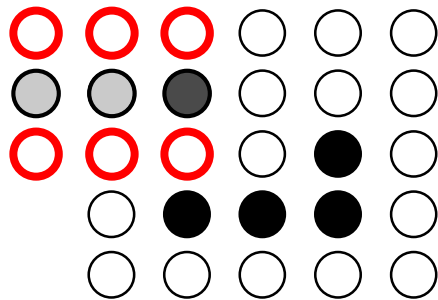
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 2

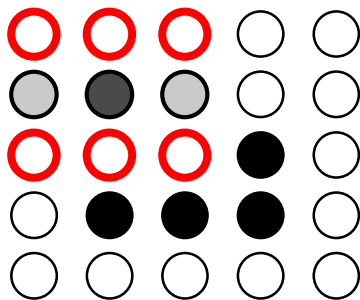
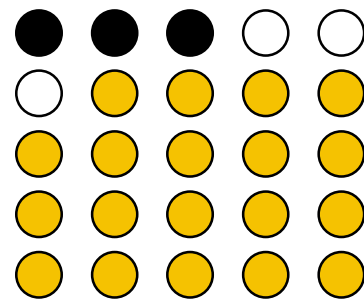


MORFOLOGIA MATEMÁTICA

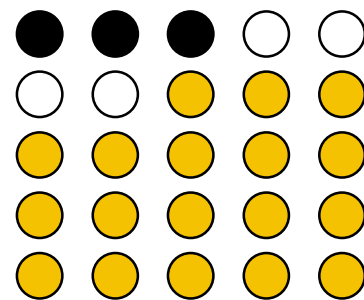
Erosão: Exemplo 2



=

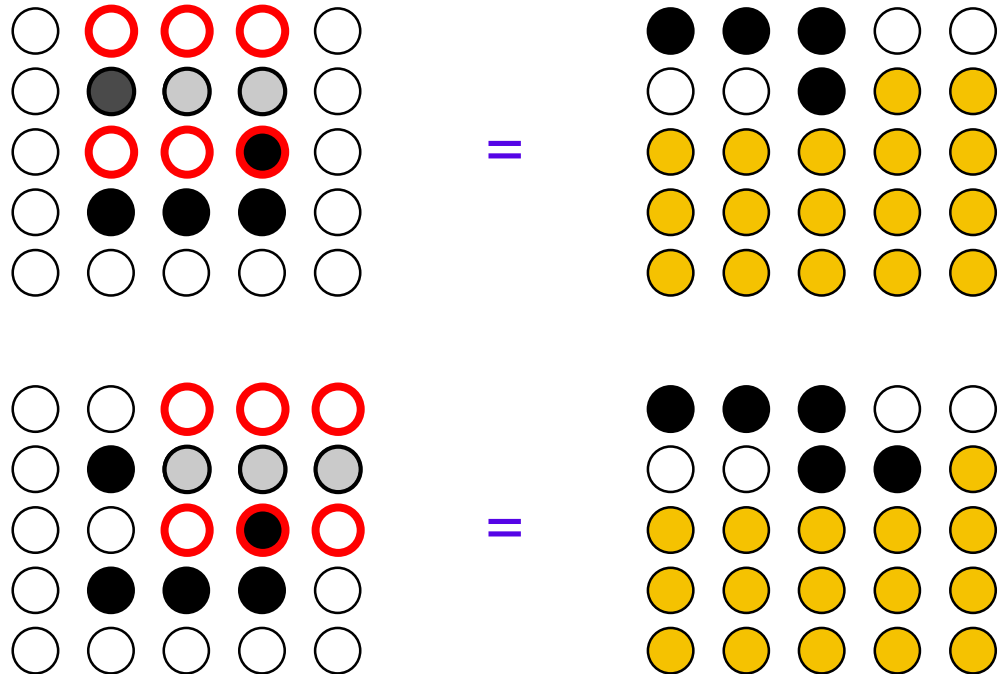


=



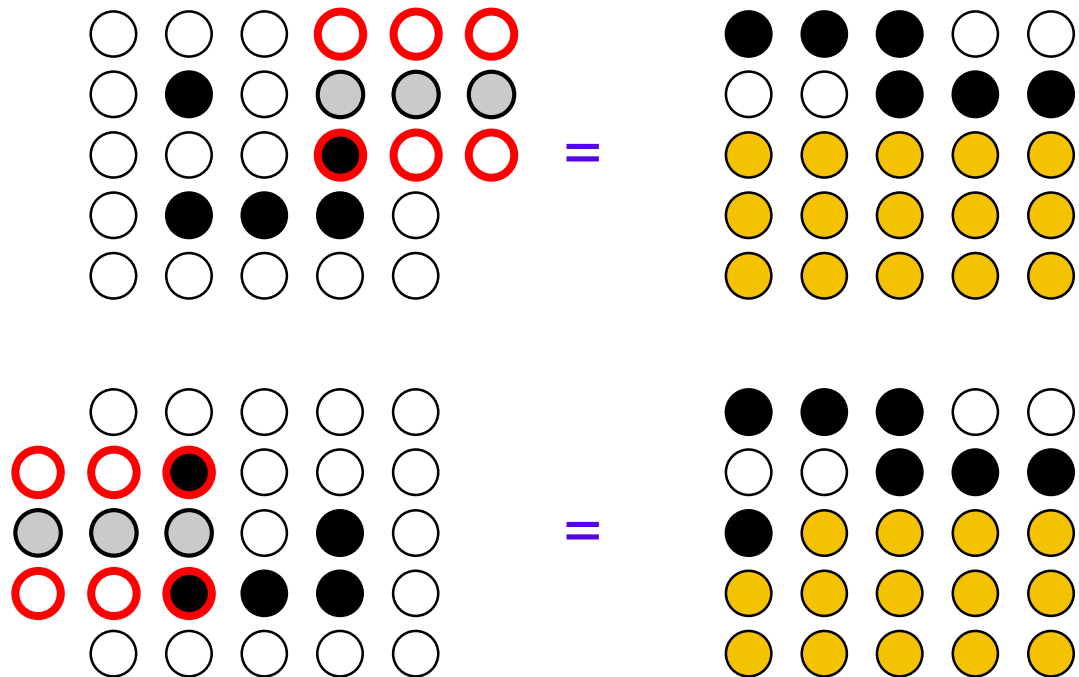
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 2



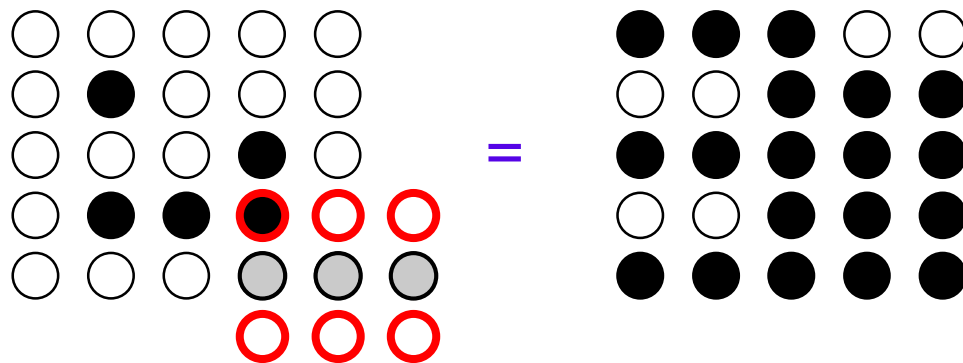
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 2



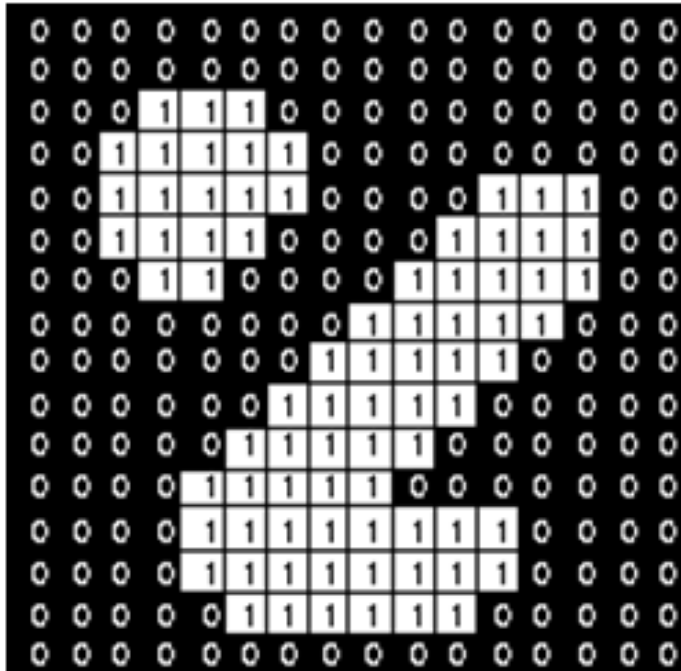
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 2

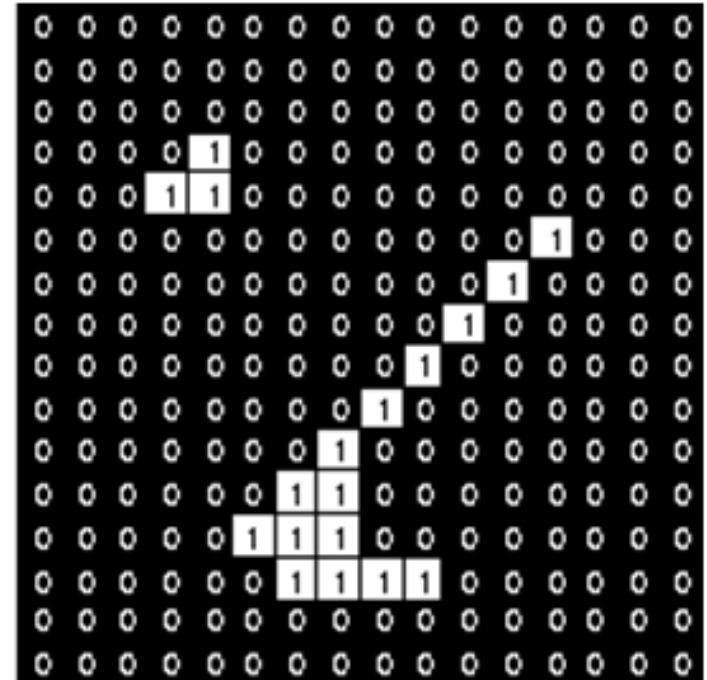


MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão: Exemplo 3



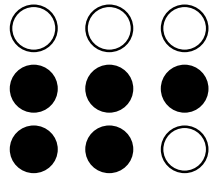
1	1	1
1	1	1
1	1	1



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo 4

- Elemento estruturante



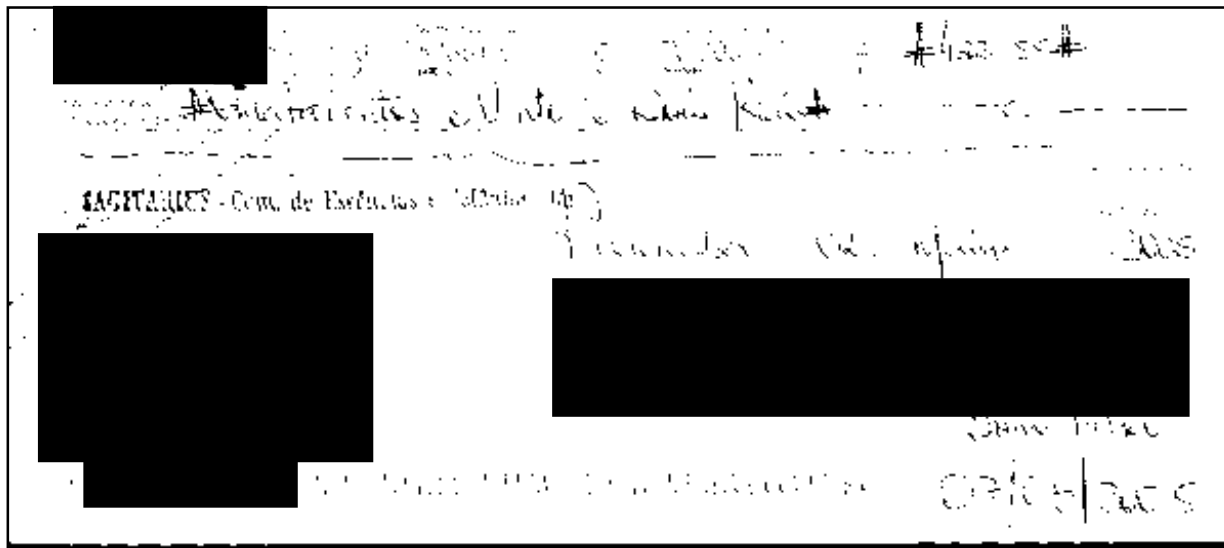
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo 4: Imagem original

[Redacted]		54	0	53861-6	10	TV 000107	4	7/22, set
Pagamento		Quarenta e Vinte e Dois Reais						
Cheque nº		[Redacted]						
SACITARDOS - Com. de Produtos e Colônias Ltda		[Redacted]						
[Redacted]		Piracicaba, 02. Maio 2005						
[Redacted]		[Redacted]						
[Redacted]		Dom Passa						
[Redacted]		07/08/2005						

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo 4: Dilatação



(lembre que crescem as áreas de branco)

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo 4: Erosão

[Redacted]		54	0	53861-6	TV-000107	4	422, sc
Pague por este		Cem e Vinte e Dois Reais					
Cheque a ordem de							
SAETABROS - Com. de Relações e Colônias		Piracicaba, 02 de Maio de 2005					
[Redacted]		[Redacted]					
[Redacted]		Dom para					
0180001075		551995386169					
		07/08/2005					

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo 5: Erosão

- Elemento estruturante

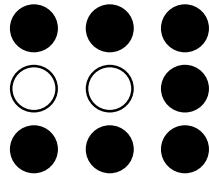


Imagem Original

Imagem Filtrada

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Erosão e dilatação *não* são operações inversas

Em algumas situações, uma erosão pode desfazer o resultado de uma dilatação, mas isso não é sempre...

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Aplicação de Erosão em Cascata



Imagem
original



Erosão



Segunda
Erosão

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Relações entre Erosão e Dilatação

- $\text{erode}(\text{dilate}(S)) \neq S$
- $\text{dilate}(\text{erode}(S)) \neq S$
- $\text{erode}(\text{dilate}(S)) \supseteq S$
- $\text{dilate}(\text{erode}(S)) \subseteq S$

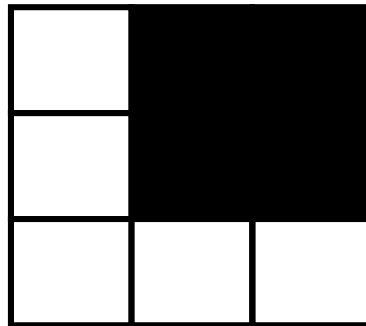
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Mais do que mudar as características da imagem, a morfologia trabalha com a forma de objetos presentes (ou não) na imagem

Assim, podemos usar essas operações para tentar encontrar determinados objetos ou, mais ainda, determinadas *formas* em uma imagem

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

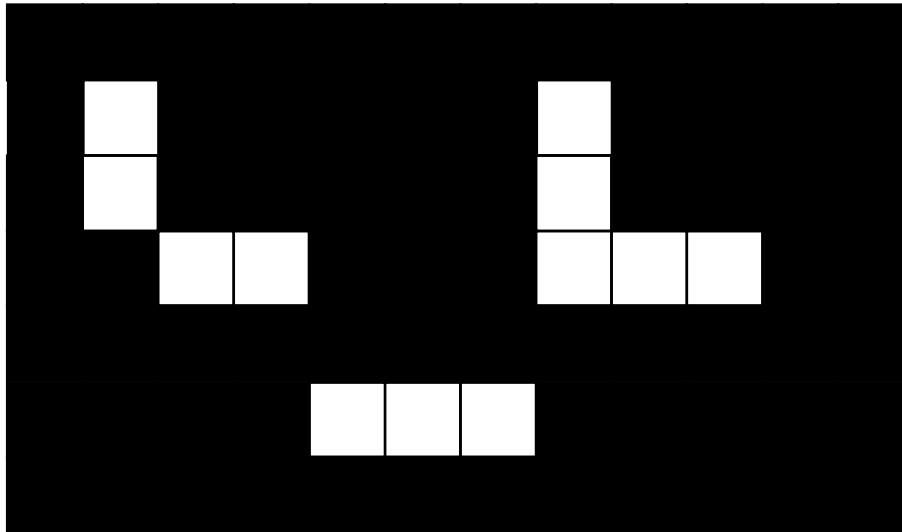
Suponha, por exemplo, que queremos saber se uma imagem tem algum objeto na forma de um L, como no elemento abaixo:



Se essa matriz for usada como elemento estruturante, podemos usar a operação de erosão para identificar se o elemento existe em uma imagem ou não

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

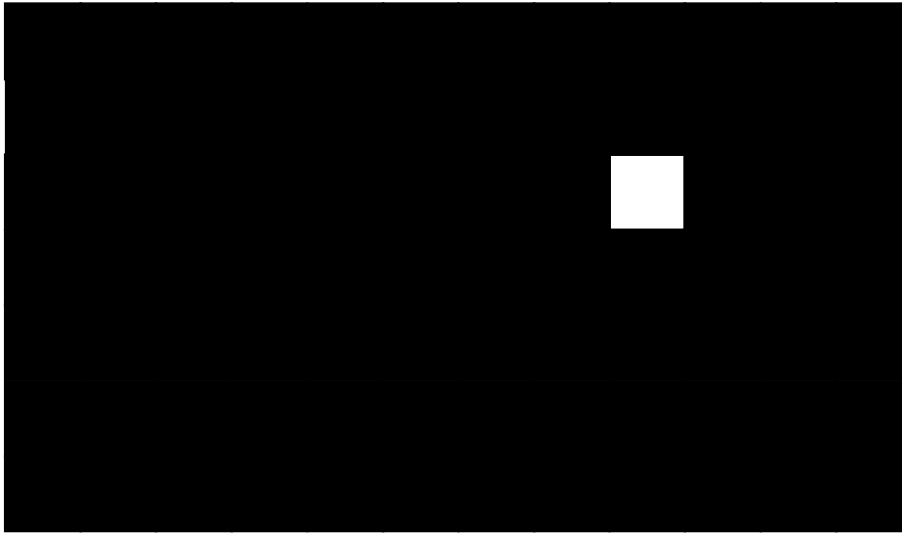
Podemos negar a imagem



e aplicar uma erosão com o elemento estruturante da forma do objeto que procuramos

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

O resultado será:

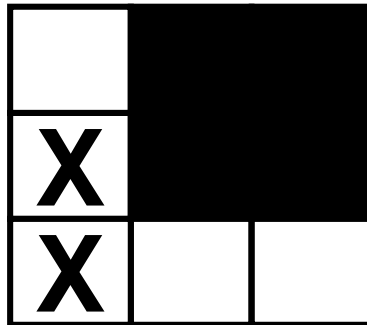


Ou seja, mais do que uma erosão, o retorno de um valor verdade indica que o objeto está presente na imagem.

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Considere agora que queremos encontrar objetos que tenham *mais ou menos* a forma de um L

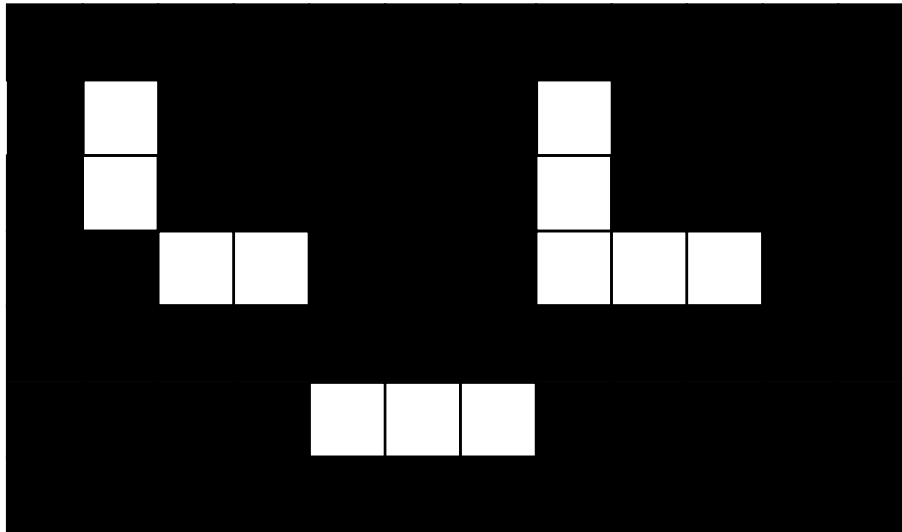
Assim, podemos considerar algo como, por exemplo:



Onde 'X' indica *don't care*

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

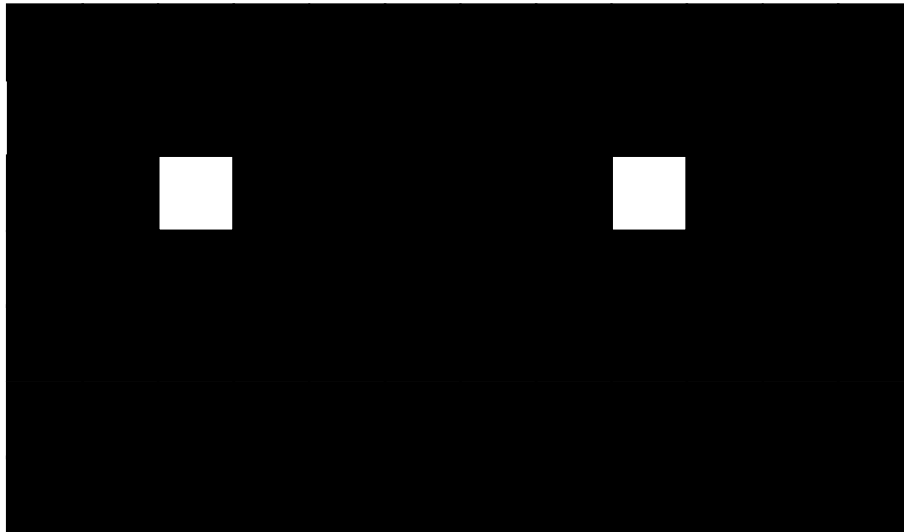
Após negativá-la...



e aplicar uma erosão com o elemento estruturante com o *don't care*....

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

O resultado será:



Indicando que existem dois objetos com forma semelhante à procurada

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

OUTRAS OPERAÇÕES DERIVADAS

Abertura e Fechamento

- Abertura = Aplicação de uma erosão seguida por uma dilatação com o mesmo elemento estruturante
- Fechamento = Aplicação de uma dilatação seguida por uma erosão com o mesmo elemento estruturante

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Abertura:

- Suavização de contornos
- Remoção de ramificações
- Aumenta as áreas de preto (expande)

Fechamento:

- Preenchimento de falhas em contornos
- Diminui as áreas de preto (contraí)

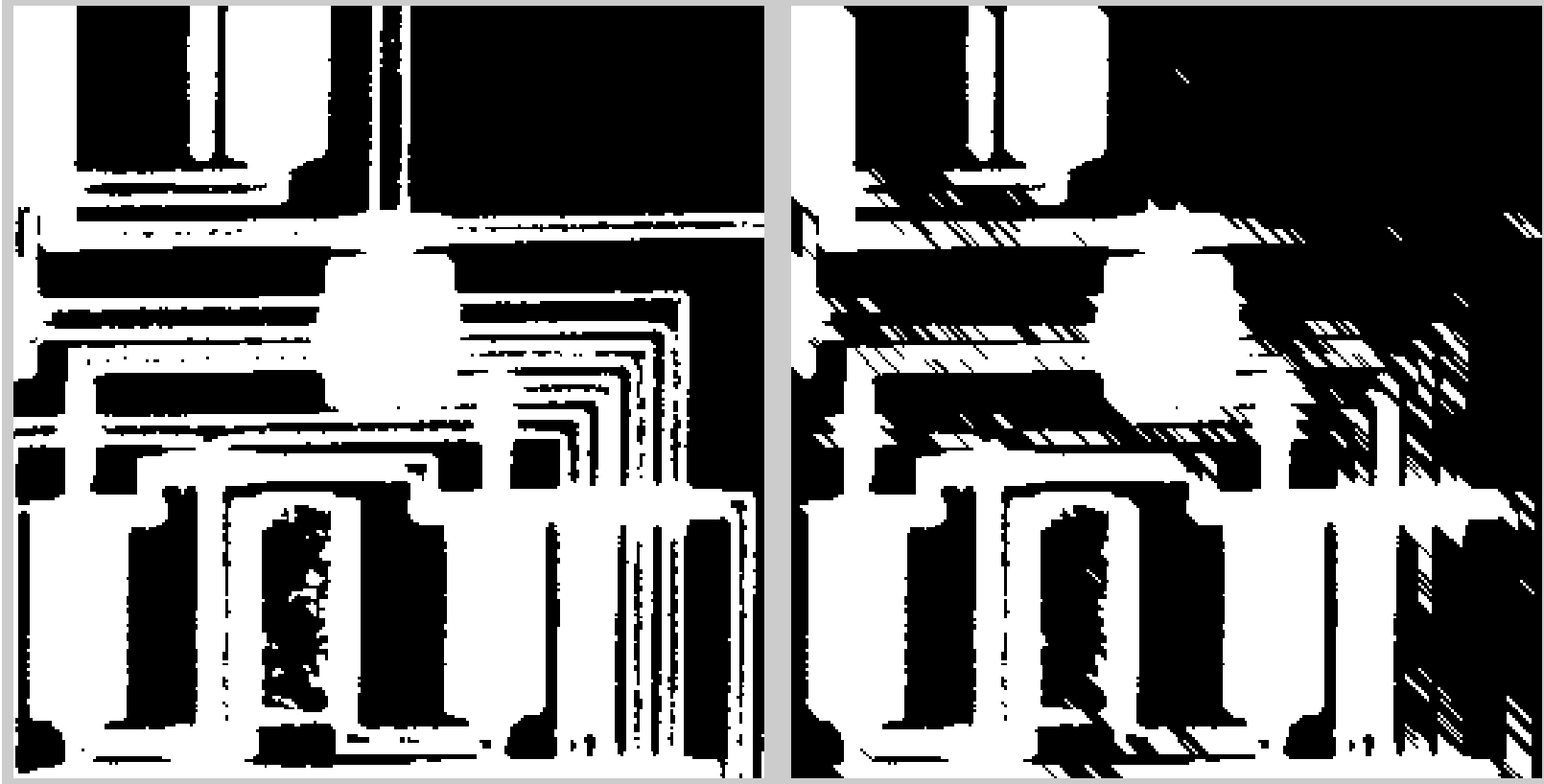
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Por que os termos Abertura e Fechamento?

- O nome abertura descreve uma operação que tende a ‘abrir’ pequenos espaços entre objetos em uma imagem
- Por outro lado, um fechamento preenche esses espaços entre objetos

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo de Abertura:



Elemento Estrutural: Matriz identidade 5x5 (diagonal)

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo de Abertura:

Cross-Correlation Used
To Locate A Known
Target in an Image

Text Running
In Another
Direction

Cross-Correlation Used
To Locate A Known
Target in an Image

Text Running
In Another
Direction

Elemento Estrutural: Matriz 3x3 de 1's

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo de Abertura:

[Redacted]		Número da conta	0	53861-6	0	Número do cheque	4	TV-000107	4	#422,55#
		53861-6	0		0	TV-000107				
Pague por este		#Quatrocentos e Vinte e Dois Reais								
Cheque a quantia de										
		e centavos acima								
a		SAGITARIUS - Com. de Essências e Colônias Ltda								
		ou à sua ordem								
		Piracicaba 02 de Maio de 2005								
[Redacted]		[Redacted]								
[Redacted]		[Redacted]								
		Dom Para								
		07/08/2005								

Imagem original

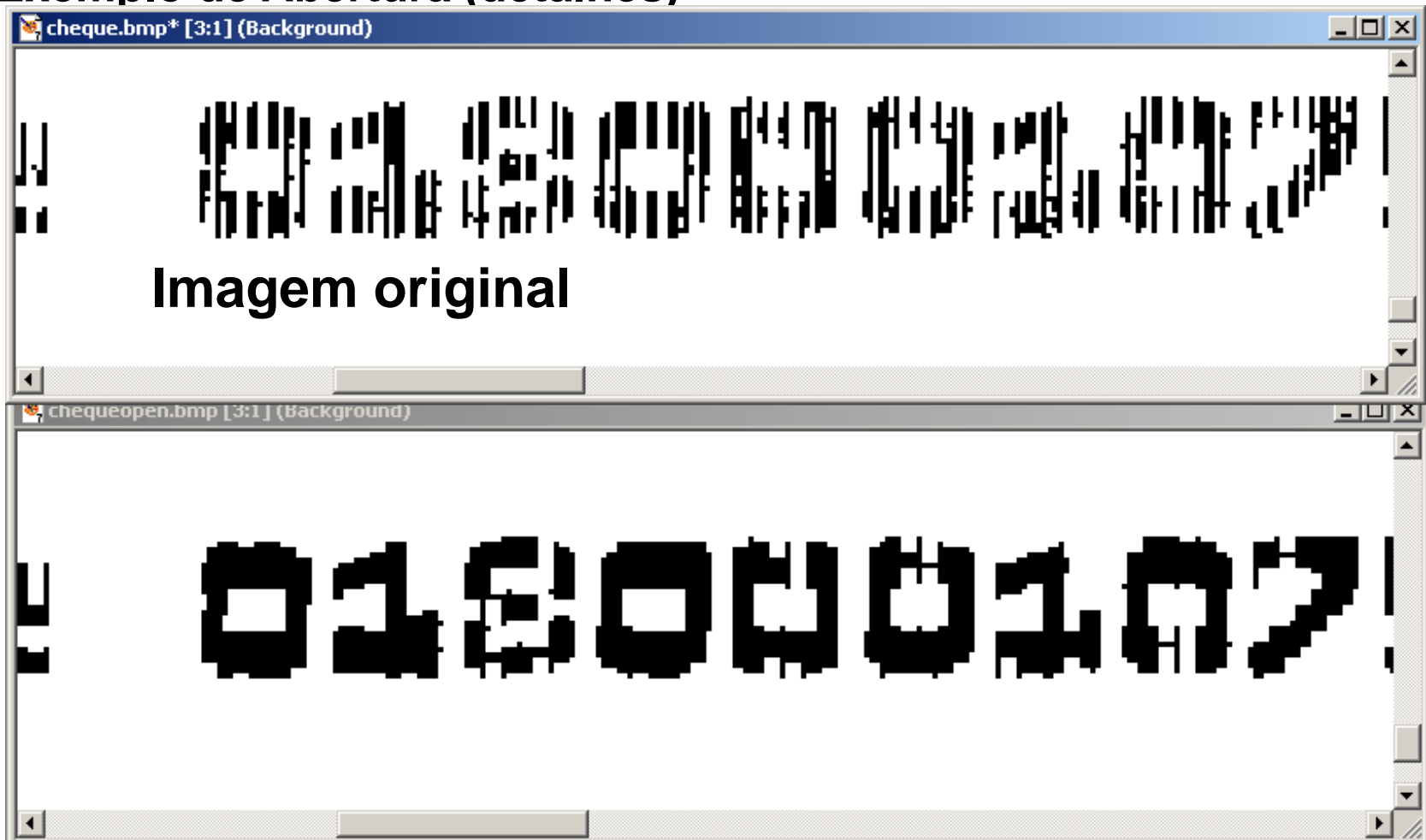
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo de Abertura:

[Redacted] 0 53861-6 0 0 TV-000107 4 422,50
 Pague por este Cheque a ordem de Quinhentos e Vinte e Dois Reais
 SAGETABUS - Com. de Exatidão e Colônias Ind.
 [Redacted] Paracaba RJ Maio de 2005
 [Redacted]
 [Redacted] Dom Para 07/08/2005
 0180001075# 551995386109#

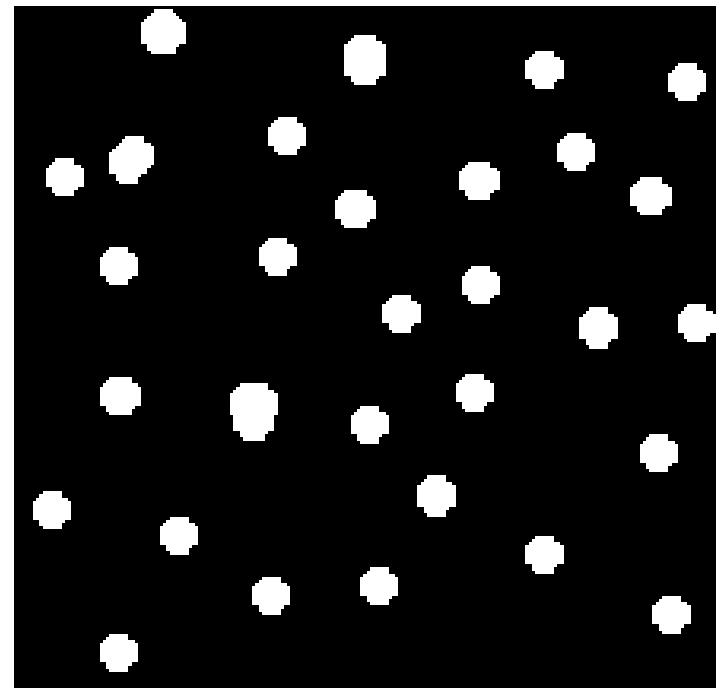
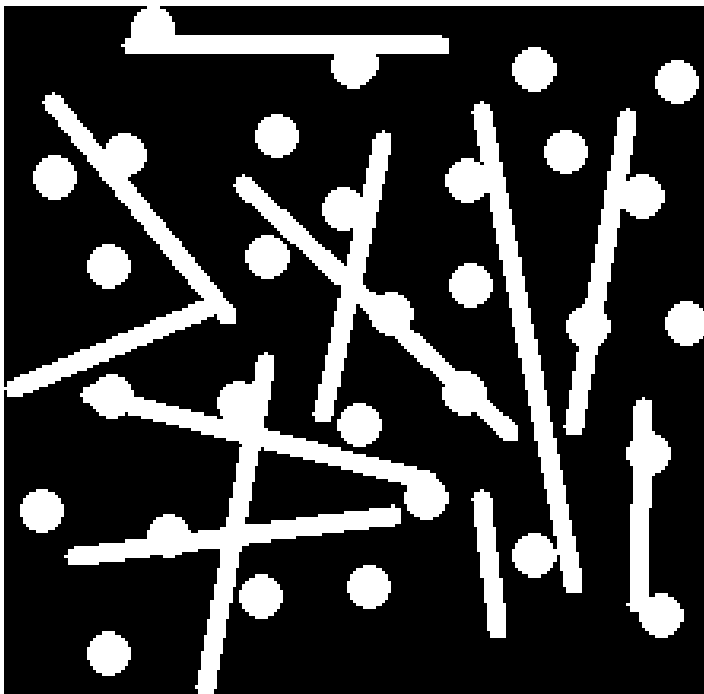
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo de Abertura (detalhes)



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

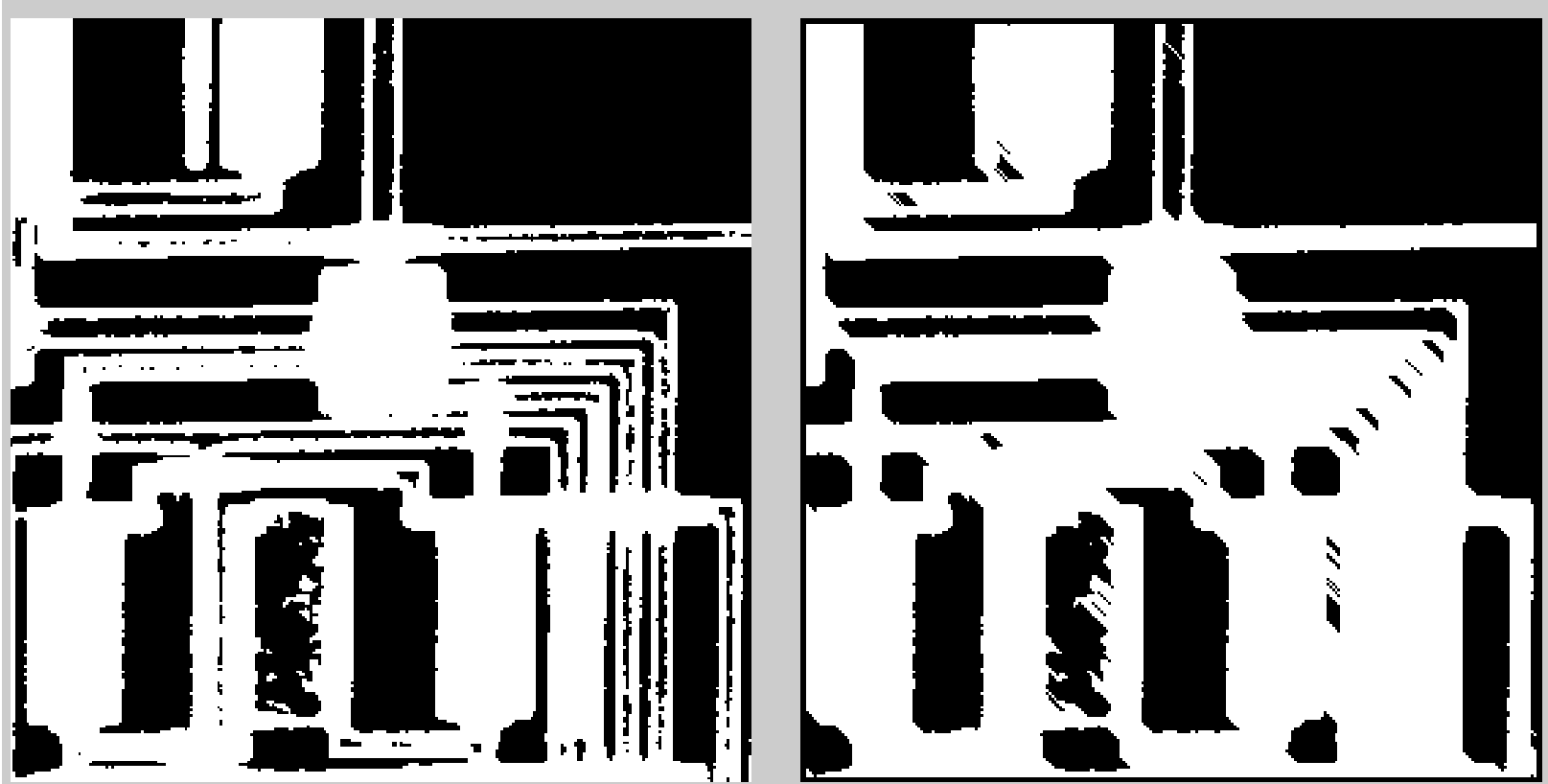
Exemplo de Abertura:



Elemento estruturante: uma matriz 11x11
na forma de um círculo

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo de Fechamento:

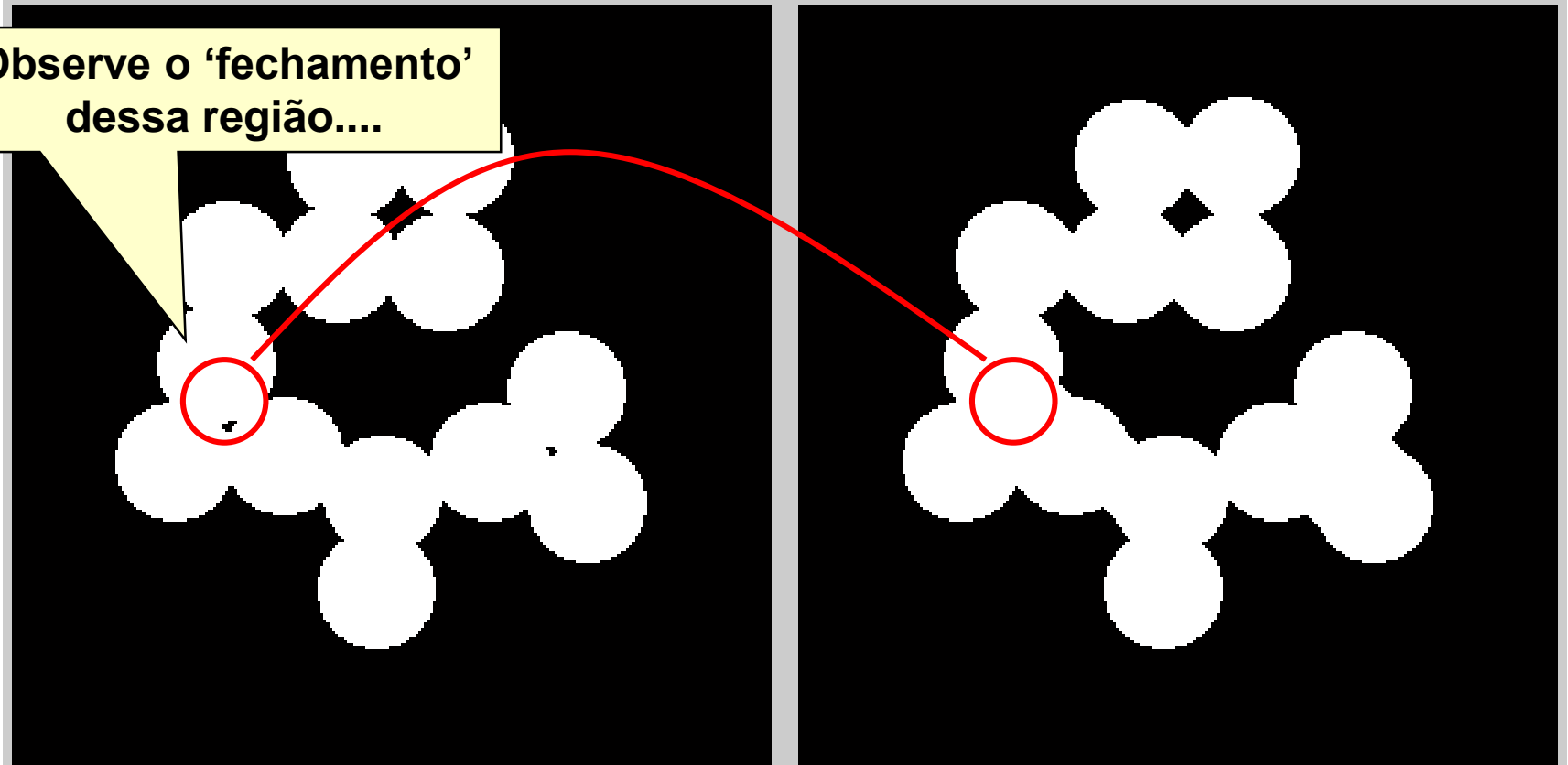


Elemento Estrutural: Matriz identidade 5x5 (diagonal)

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo de Fechamento:

Observe o 'fechamento'
dessa região....



Elemento Estrutural: Matriz identidade 5x5 (diagonal)

MORFOLOGIA MATEMÁTICA


Exemplo de Fechamento:

[Redacted]		Número da conta	0	53861-6	0	Número do cheque	4	TV-000107	4	#422,55#
[Redacted]		53861-6	0		0	TV-000107				
Pague por este		#Quatrocentos e Vinte e Dois Reais#								
Cheque a quantia de										
		e centavos acima								
a		SAGITARIUS - Com. de Essências e Colônias Ltd								
		ou à sua ordem								
		Piracicaba 02 de Maio de 2005								
[Redacted]		[Redacted]								
[Redacted]		Dom Para								
		07/08/2005								

Imagem original

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

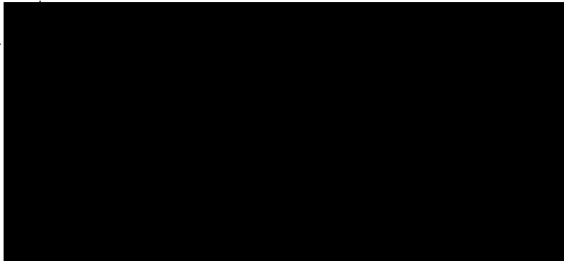
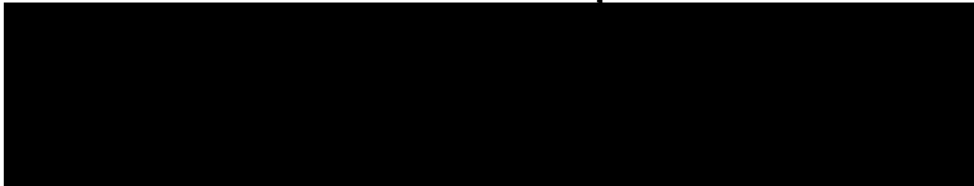
Exemplo de Fechamento:

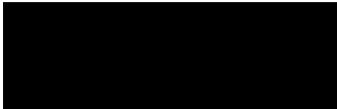
 0. 588010 0 7.00010 : #422, 50#

#Centos e Vinte e Dois Reais

SACITARIUS - Com. de Essências e Polântas (100)

Receber de 02. 1/10 2015

 07/08/2015

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo de Fechamento:

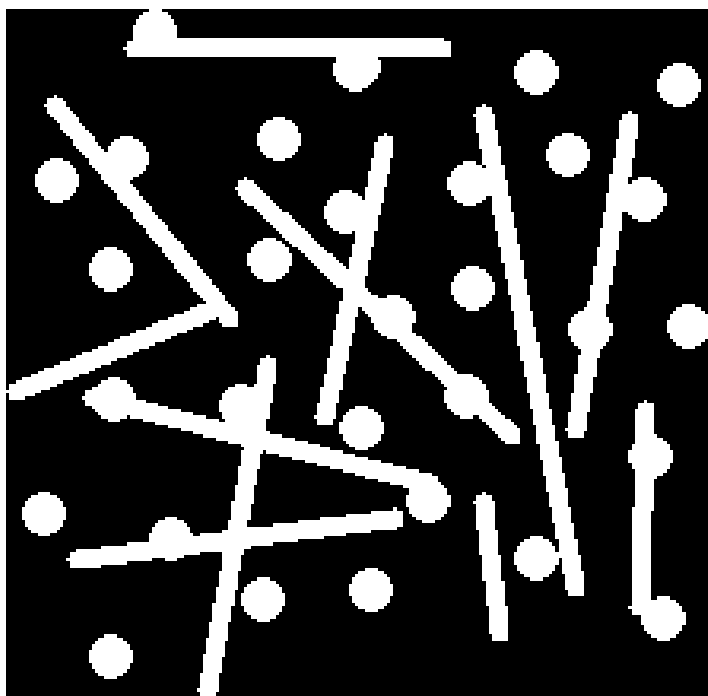
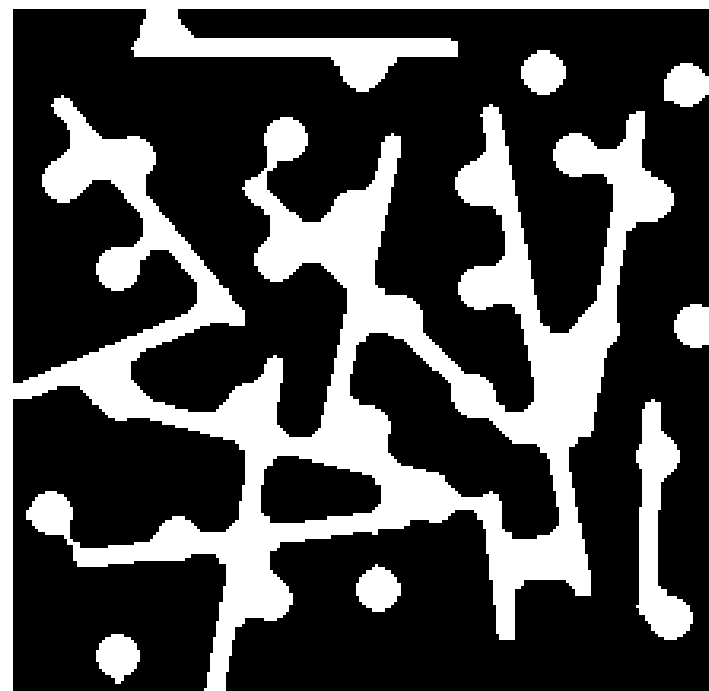
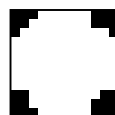


Imagem original



Elemento estruturante: uma matriz 11x11
na forma de um círculo

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Exemplo de Fechamento: Granulometria

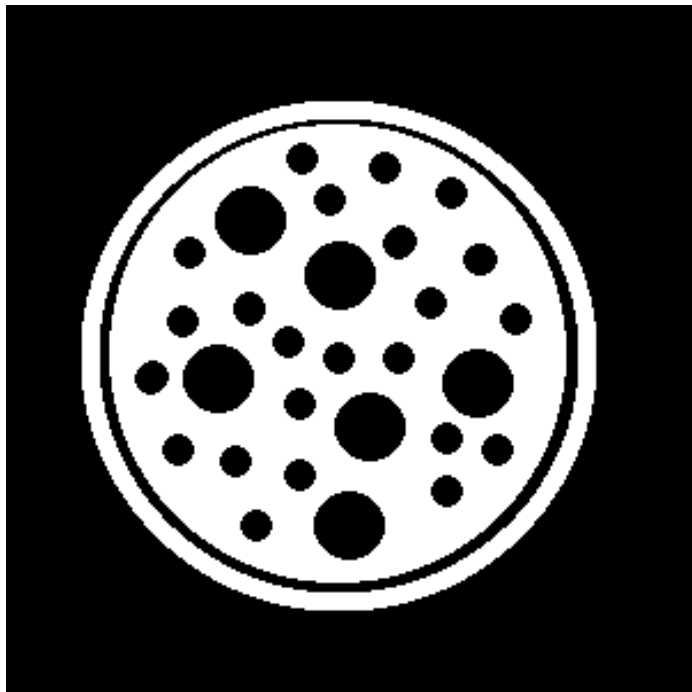
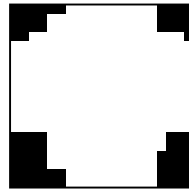
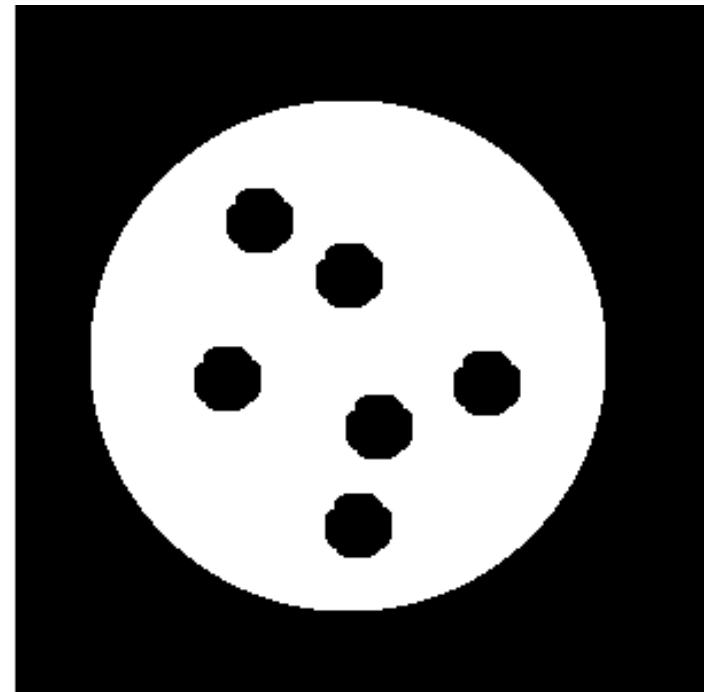


Imagem original



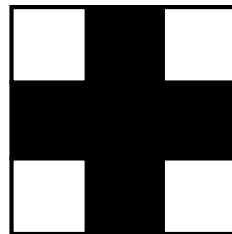
Elemento estruturante: uma matriz 30x30
na forma de um círculo



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Extração de Fronteiras

- $\beta(A) = A - (A \ominus B)$
- Ou seja, a diferença de conjuntos entre A e sua erosão pelo elemento B
- Exemplo: Considere o elemento estrutural B



B

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Extração de Fronteiras

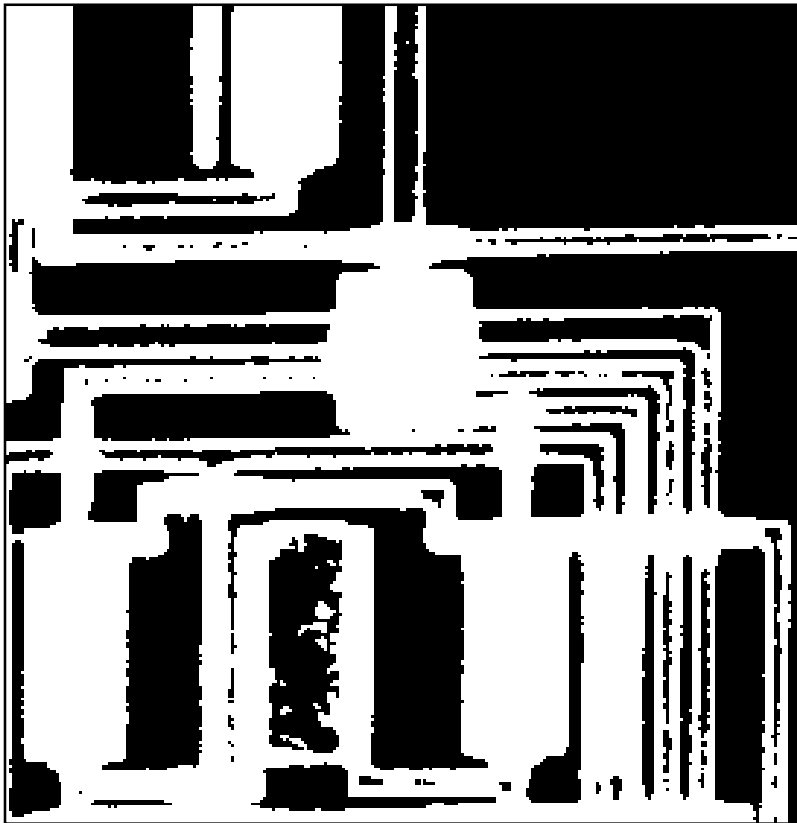
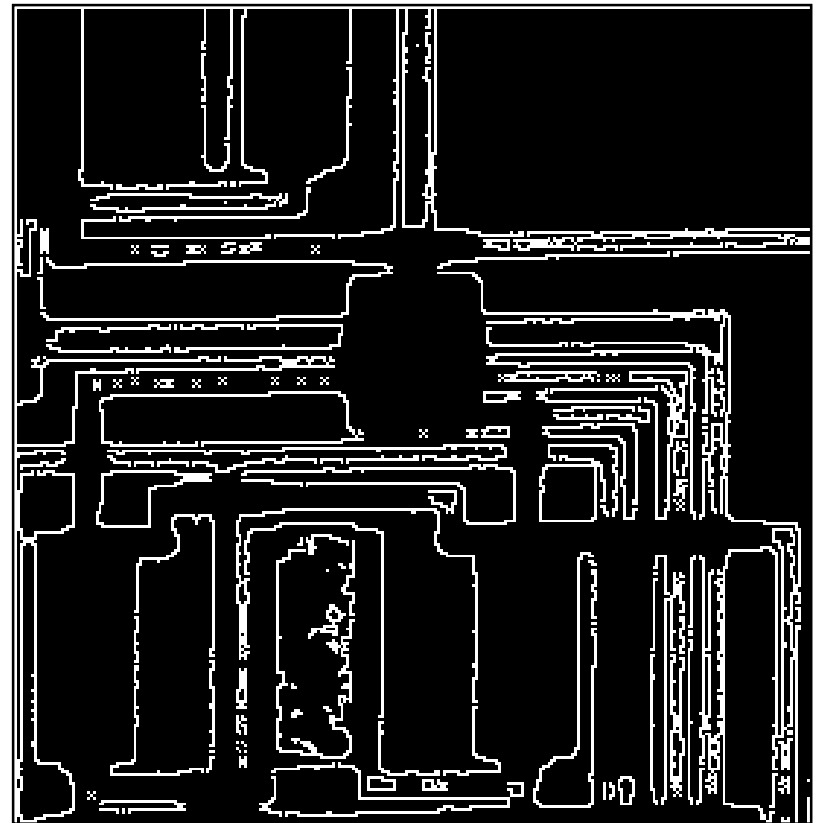


Imagem original



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Extração de Fronteiras

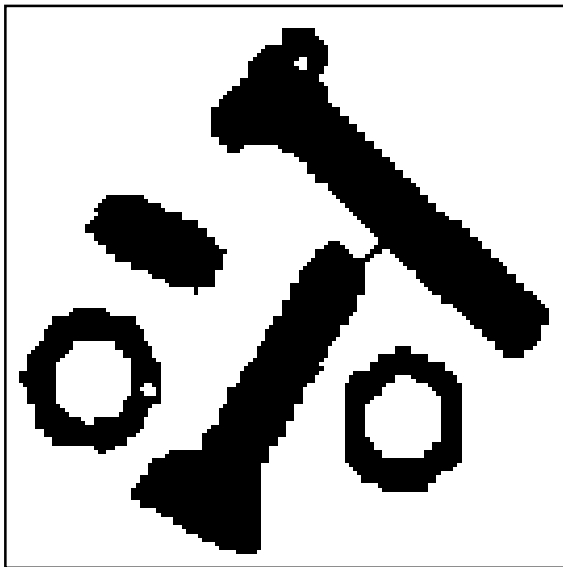
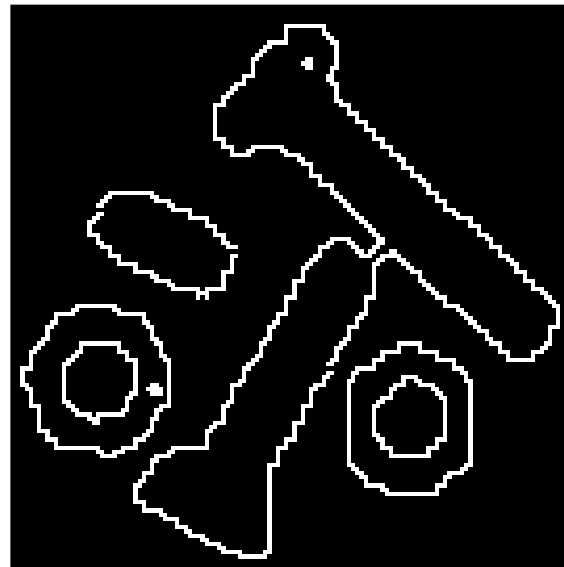


Imagem original



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Extração de Fronteiras

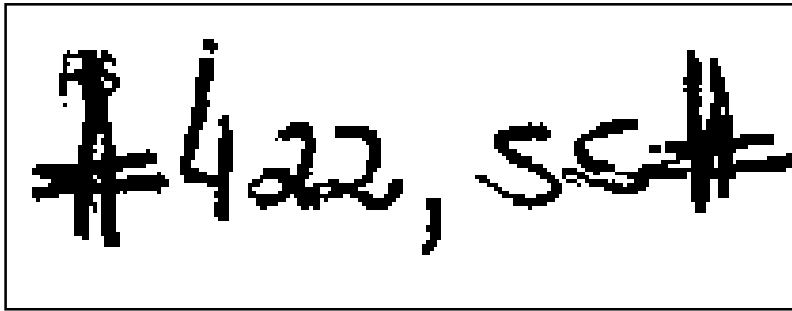
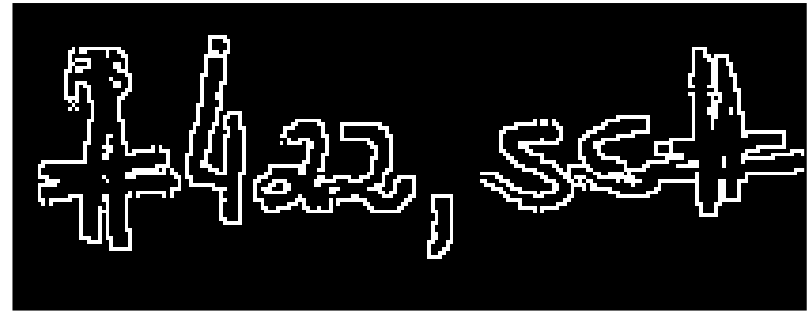


Imagem original



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

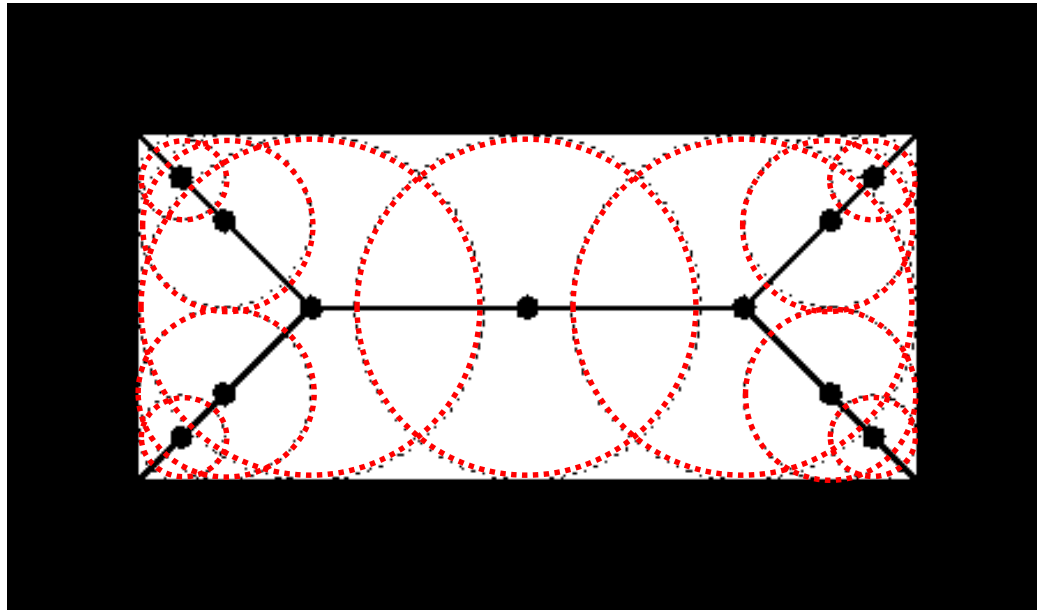
Outras operações

- *Watershed*
- Esqueletização
- Afinamento
- *Hit-and-Miss*
- Operações aplicadas a imagens em tons de cinza

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Esqueletização

- O esqueleto é o centro de círculos que tangenciam a região sendo considerada



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Esqueletização

- Alcançado por sucessivas erosões
 - `>> im = imread('numeros.bmp');`
 - `>> BW2 = bwmorph(im,'skel',Inf);`
 - 'Inf' provoca a aplicação do algoritmo infinitas vezes até que a imagem não mude

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Esqueletização

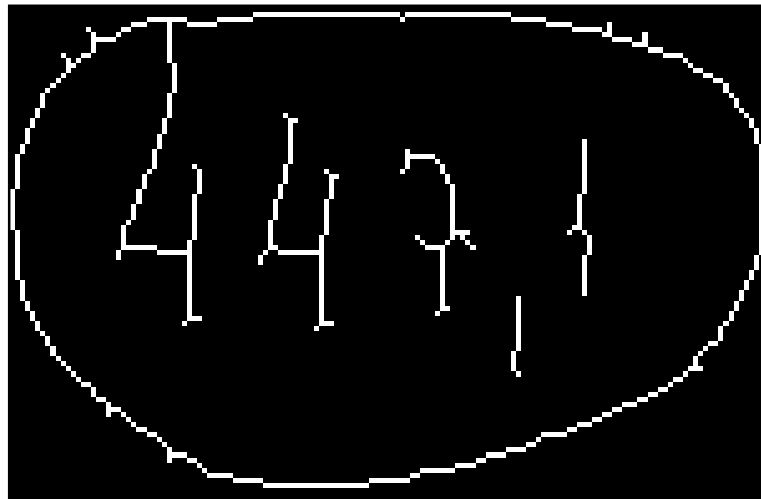
- Aplicação na imagem negativada



Imagem original

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Esqueletização



Esqueleto

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Esqueletização



Sobreposição

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Afinamento (*Thinning*)

- Diversos algoritmos
- Exemplo:
 - `>> im = imread('numeros.bmp');`
 - `>> BW2 = bwmorph(im,'thin',Inf);`

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Afinamento



Sobreposição

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Afinamento



Afinamento

MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Afinamento

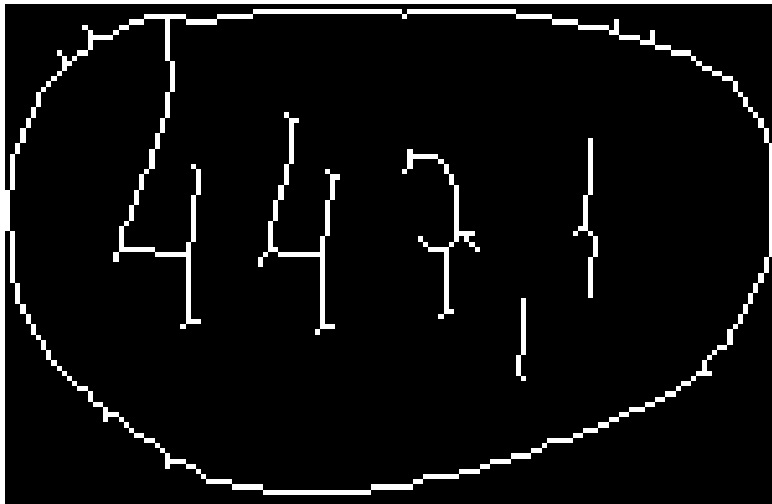


Sobreposição

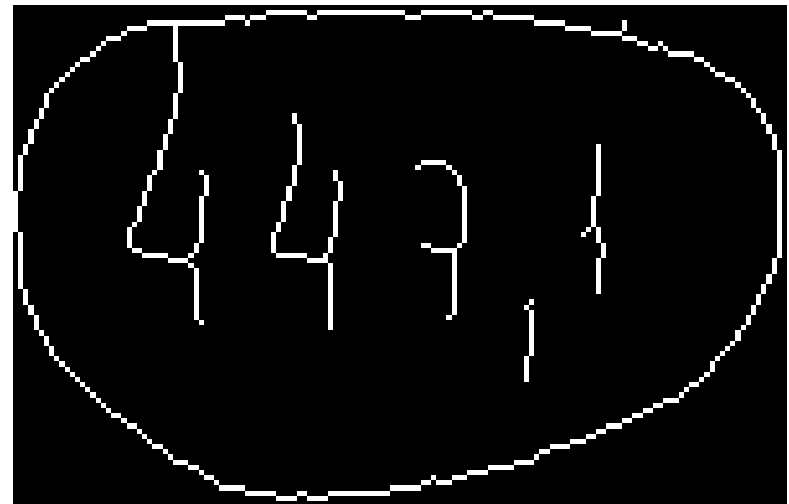
MORFOLOGIA MATEMÁTICA

Esqueletização x Afinamento

- Observe a diferença



Esqueleto



Afinamento

OPERAÇÕES EM IMAGENS EM TONS DE CINZA DILATAÇÃO

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento Estruturante

O resultado é o maior tom
sob o elemento estruturante...

10	23	16	19	111
42	19	255	198	111
76	11	32	56	16
16	54	123	78	61
169	49	23	19	139

Imagem de entrada

10	23	16	19	111
42	255	255	255	111
76	76	255	198	16
16	123	123	123	61
169	49	23	19	139

Imagem Final

OPERAÇÕES EM IMAGENS EM TONS DE CINZA DILATAÇÃO



Imagem com ruído
sal e pimenta



OPERAÇÕES EM IMAGENS EM TONS DE CINZA EROSÃO

0	1	0
1	1	1
0	1	0

Elemento Estruturante

O resultado é o menor tom
sob o elemento estruturante...

10	23	16	19	111
42	19	255	198	111
76	11	32	56	16
16	54	123	78	61
169	49	23	19	139

Imagem de entrada

10	23	16	19	111
42	11	16	19	111
76	11	11	16	16
16	11	23	19	61
169	49	23	19	139

Imagem Final

OPERAÇÕES EM IMAGENS EM TONS DE CINZA EROSÃO



Imagem com ruído
sal e pimenta



MORFOLOGIA MATEMÁTICA

No Octave:

- imerode
- imdilate
- bwmorph
 - thin, skel, etc...
- watershed