TRANSFORMADA DE FOURIER

PROF. VALMIR MACARIO FILHO

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

INTRODUÇÃO

BREVE HISTÓRIA DAS SÉRIES E TRANSFORMADAS DE FOURIER

O matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em 1768.

Fourier é lembrado pela teoria desenvolvida em 1807 e publicada em 1822 no livro, La Théorie Analitique de la Chaleur (A Teoria Analítica do Calor).

INTRODUÇÃO

- **Série de Fourier: qualquer função periódica pode ser expressa como uma soma de senos e/ou cossenos de diferentes frequências. Cada uma multiplicada por um coeficiente diferente.**

- **Transformada de Fourier: funções não periódicas, mas cuja área sob a curva é finita, podem ser expressas como integral de senos e /ou cossenos multiplicados por uma função peso.**

- **Podem ser reconstruídas completamente usando um processo inverso.**

CONCEITOS PREMILINARES

Números complexos:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{j}$$

onde $\boldsymbol{R}$ e $\boldsymbol{I}$ são números reais e j é um número imaginário igual a raiz quadrada de -1, ou seja,

$$j = \sqrt{-1}$$

Números complexos em coordenadas polares:

$$\boldsymbol{C} = |\boldsymbol{C}|(\cos\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{j}\sin\boldsymbol{\theta})$$

onde

$$|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$$

FUNÇÃO SENO E COSSENO

- $f(x) = \cos(x)$

- Valor 1 na origem (cos(0)=1) e completa um ciclo entre a origem e o ponto 2π

- Função periódica com (período) T = 2π

- *Ex:* $\cos(x) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cdot\cdot\cdot = \cos(x + k2\pi)$

- O mesmo se aplica a função seno, exceto que a origem possui valor 0 (sen(0)=0)

FUNÇÃO SENO E COSSENO

- **O número de oscilações de cos (x) sobre a distância T = 2π é um e assim, o valor da frequência angular é:**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

- **A função cos(3x) executa 3 ciclos sobre o período 2π e possui o valor angular** *ω = 3*

- O Valor do período T relacionado com o ângulo *ω é:*

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

FUNÇÃO SENO E COSSENO

- **As funções seno e cosseno possuem amplitude igual a 1**

- **Multiplicando por uma constante a** $\in$ IR **troca os valores das funções para ± *a e amplitude a*.**
  - $a \cdot \cos(\omega x)$
  - $a \cdot \sin(\omega x)$

- **A Frequência *f* é igual:**

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{or} \quad \omega = 2\pi f$$

FUNÇÃO SENO E COSSENO

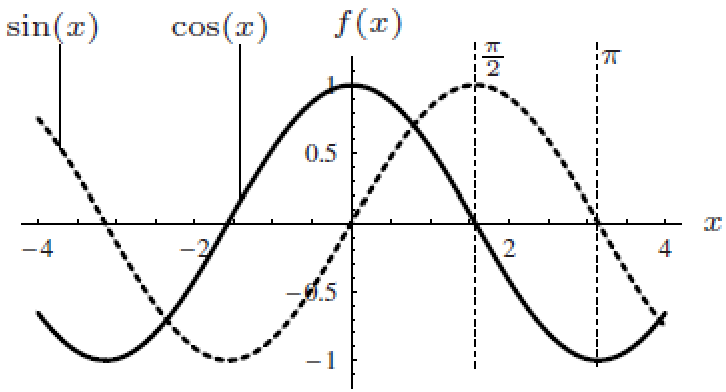
- **Fase:**
  - Deslocamento de uma função cosseno sobre o eixo x por uma distância ϕ (ângulo de fase)
  - cos(x) → cos(x - ϕ)

  - A função seno é apenas uma função cosseno deslocada para a direita por período ϕ=π/2

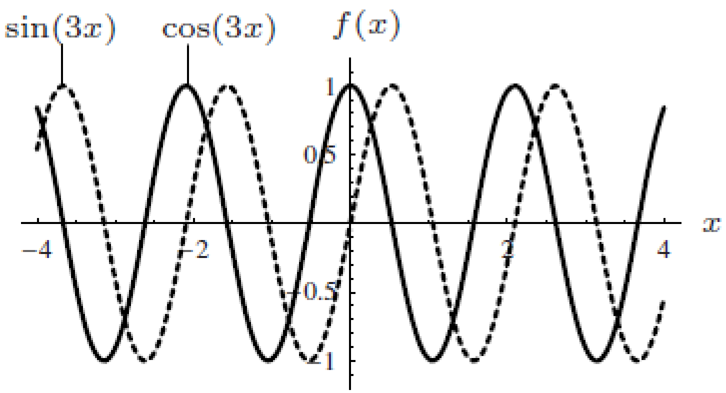
$$\sin(\omega x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{2}\right)$$

FUNÇÃO SENO E COSSENO

- **Funções seno e cosseno**



- **Função Seno e Cosseno com período T=2*π*/ *ω***



NOTAÇÃO DE EULER

- **Representação do número complexo:**

$$z = a + \mathrm{i}\, b$$

- **Notação de Euler:**

$$z = e^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i} \cdot \sin(\theta)$$

  - e= 2.71828 (número de euler)

SÉRIE DE FOURIER

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \cos(k\omega_0 x) + B_k \sin(k\omega_0 x) \right)$$

- **As constantes A_k e B_k são chamados de coeficientes de Fourier da função g(x)**

- **Os coeficientes A_k e B_k podem ser derivados da função g(x)**

SÉRIE DE FOURIER

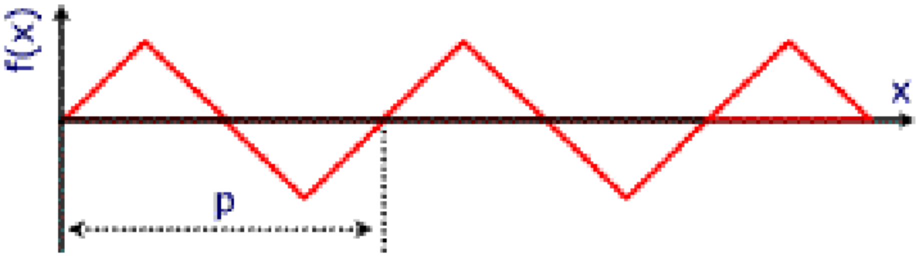
$$g(x) = \int_0^\infty A_\omega \cos(\omega x) + B_\omega \sin(\omega x)\, \mathrm{d}\omega$$

- **Os coeficientes A_k e B_k são os pesos das funções seno e cosseno respectivamente com a frequência contínua ω**

- **Assim, A_k e B_k correspondem à amplitude das funções seno e cosseno correspondentes**

ENTENDENDO A SÉRIE DE FOURIER

- **Uma função f(x) é dita periódica de período T se f(x)=f(x+nT) para qualquer n positivo**



- **Seja f(x) uma função periódica de período 2. A série de fourier para esta função é a representação em forma de uma soma infinita de senos e cossenos:**

$$f(x) = a_0/2 + \Sigma_{k=1,\infty}\, a_k \cos kx + \Sigma_{k=1,\infty}\, b_k \,\text{sen}\, kx$$

- **ou**

$$f(x) = a_0/2 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + b_1 \,\text{sen}\, x + b_2 \,\text{sen}\, 2x + \ldots$$

ENTENDENDO A SÉRIE DE FOURIER

Exemplo:

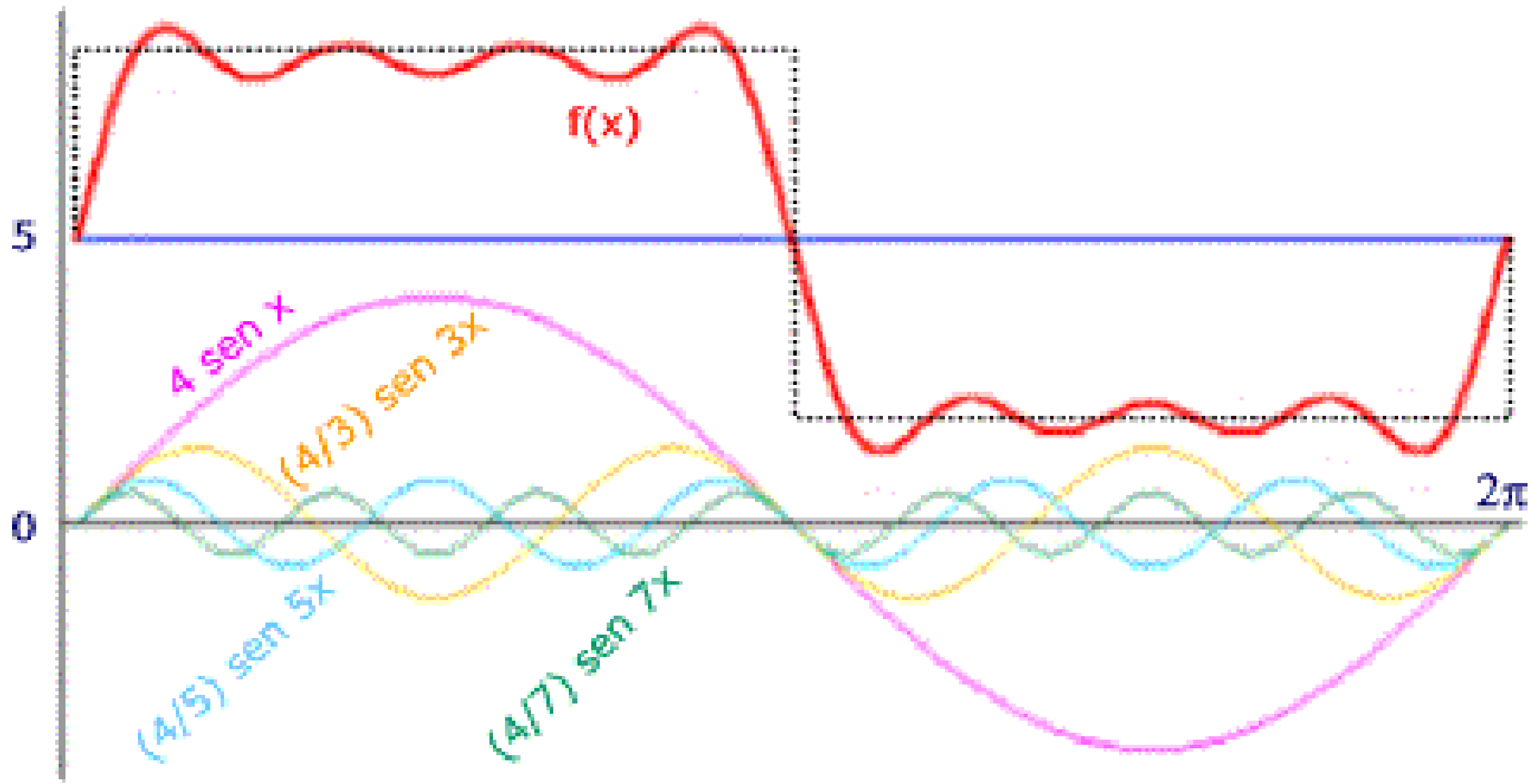
- **Na prática, não é possível trabalhar com infinitas parcelas e um número possível deve ser empregado. O exemplo da Figura do próximo slide, a curva vermelha é uma função resultante de:**

$$f(x) = 5 + 4 \text{ sen } x + (4/3) \text{ sen } 3x + (4/5) \text{ sen } 5x + (4/7) \text{ sen } 7x + \ldots$$

- **(apenas com 5 parcelas da equação)**

- **Notar que com 5 parcelas já ocorre uma aproximação. Se fossem infinitas, o resultado séria uma forma perfeita conforme indicado na linha tracejada.**

ENTENDENDO A SÉRIE DE FOURIER



ENTENDENDO A SÉRIE DE FOURIER

- A primeira parcela (5) é constante

- A segunda parcela (4 sen(x)) tem o mesmo período ou mesma frequencia do sinal. Por esta igualdade, é chamada de oscilação fundamental do sinal

- As parcelas seguintes têm frequências múltiplas (sen(3x), sen(5x), ...) da fundamental. São chamadas osciliações harmônicas ou simplesmente harmônicos do sinal

- Portanto, pode-se dizer que todo sinal periódico é formado por um componente contínuo (que pode ser nulo), uma oscilação fundamental e oscilações harmônicas. Um sinal senoidal puro somente tem a oscilação fundamental

ENTENDENDO A SÉRIE DE FOURIER

- **Os pesos atribuídos constituem o espectro de Fourier:**
- **Este espectro estende-se (em princípio) para o infinito e qualquer sinal pode ser reproduzido com precisão arbitrária. Assim, o espectro de Fourier é uma representação completa e válida, a alternativa do sinal.**

$$A_\omega = A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \cos(\omega x) \, \mathrm{d}x$$

$$B_\omega = B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \sin(\omega x) \, \mathrm{d}x$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

- **A transformada de Fourier G(x) trata ambos sinais: original e espectro:**

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot \left[\cos(\omega x) - \mathrm{i} \cdot \sin(\omega x)\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-\mathrm{i}\omega x} \, \mathrm{d}x.$$

- **Onde g(x) é uma função contínua**
- **i=número complexo**
- **A integral mostra que G(x) é composta por uma soma infinita de termos seno e cosseno.**

TRANSFORMADA DE FOURIER

A função original pode ser reconstruída pela transformada inversa $G(x)^{-1}$:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot \left[\cos(\omega x) + \mathrm{i} \cdot \sin(\omega x)\right] \, \mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cdot e^{\mathrm{i}\omega x} \, \mathrm{d}\omega.$$

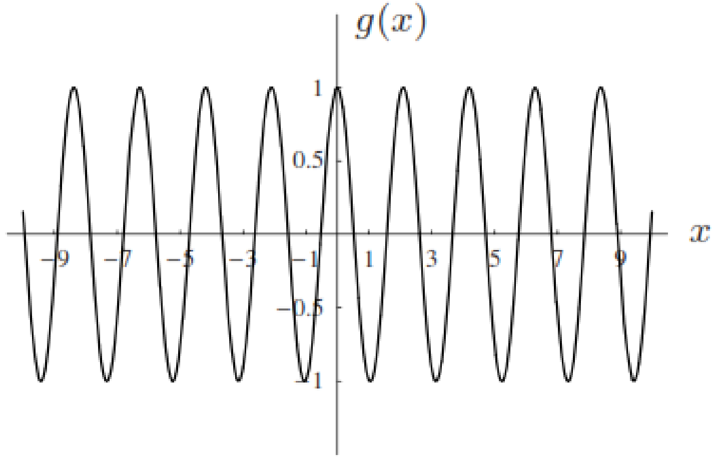
As equações G(x) e g(x) são chamadas de par de transformada de Fourier

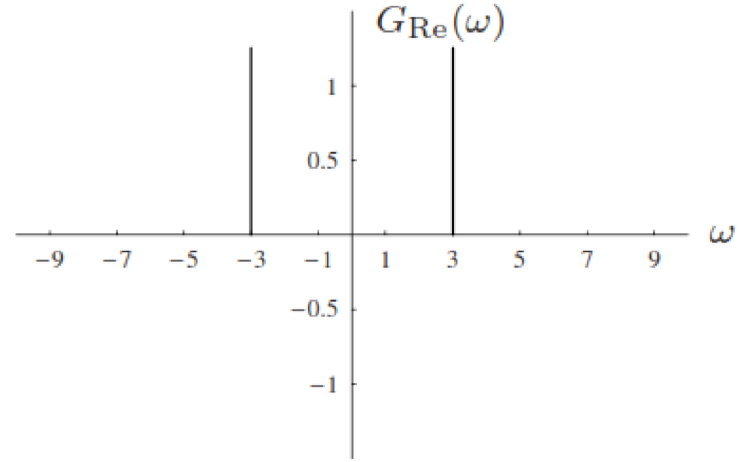
TRANSFORMADA DE FOURIER

Par da transformada de Fourier:

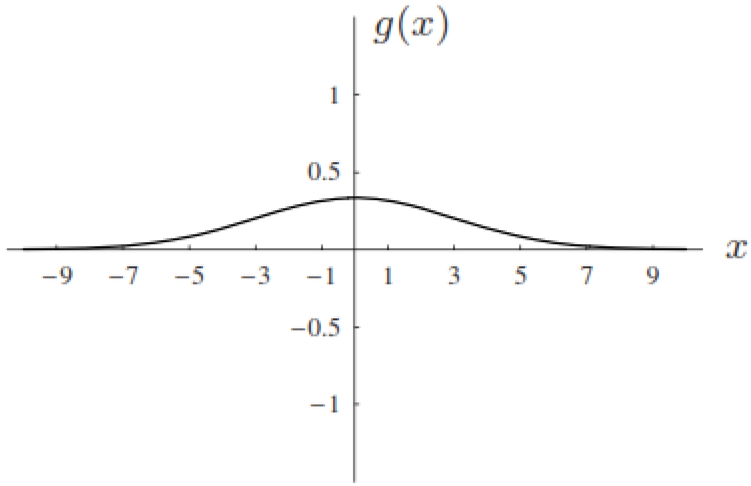
Function	*Transform Pair* $g(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(\omega)$	*Figure*
Cosine function with frequency ω_0	$g(x) = \cos(\omega_0 x)$ $G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \big(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\big)$	7.3 (a, c)
Sine function with frequency ω_0	$g(x) = \sin(\omega_0 x)$ $G(\omega) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \big(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\big)$	7.3 (b, d)
Gaussian function of width σ	$g(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ $G(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$	7.4 (a, b)
Rectangular pulse of width $2b$	$g(x) = \Pi_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } \|x\| \le b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ $G(\omega) = \frac{2b\sin(b\omega)}{\sqrt{2\pi}\omega}$	7.4 (c, d)

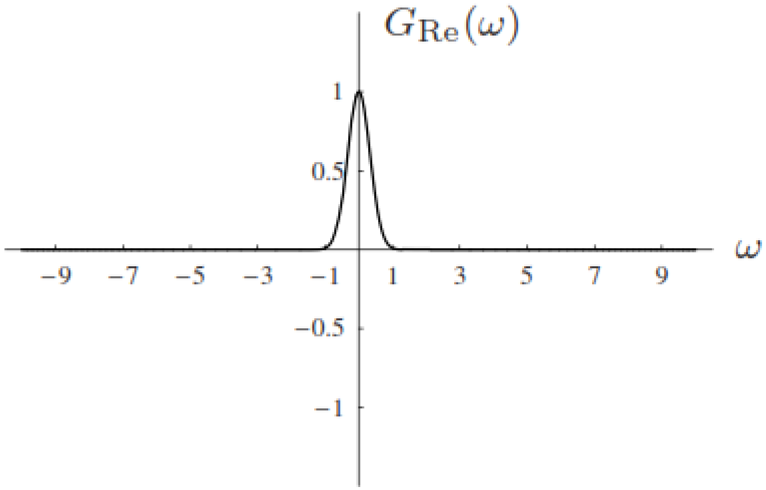
TRANSFORMADA DE FOURIER





(a) cosine $(\omega_0 = 3)$: $g(x) = \cos(3x)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\delta(\omega+3) + \delta(\omega-3)\right)$





) Gaussian $(\sigma = 3)$: $g(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\cdot 9}}$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$ $G(\omega) = e^{-\frac{9\omega^2}{2}}$

TRANSFORMADA DE FOURIER

- **Espectro de Fourier:**

$$\left|F(u)\right| = \left[R^2(u) + I^2(u)\right]^{1/2}$$

- **Fase**

$$\phi(u) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right]$$

- **Espectro de potência:**

$$P(u) = \left|F(u)\right|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

DISCRETIZAÇÃO

- **Função impulso contínua:**

$$\delta(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \neq 0 \qquad \text{and} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

- **Função impulso discreta:**

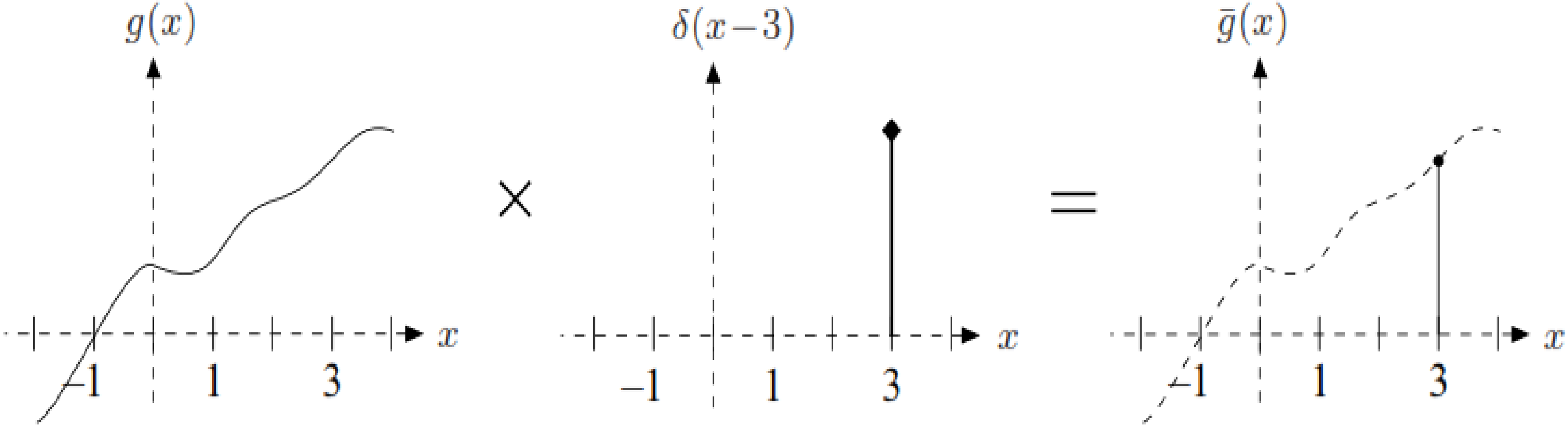
$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \delta(x) = \begin{cases} g(0) & \text{for} \quad x = 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- **Função impulso deslocada de x_0:**

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \delta(x - x_0) = \begin{cases} g(x_0) & \text{for} \quad x = x_0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

DISCRETIZAÇÃO

- **A função impulso é discretizada na posição xo=3 multiplicando g(x) por uma função impulso f(x-3)**



- **Para várias parcelas Xi=1,2,3,..N a função pode ser descrita como a soma das parcelas individuais**

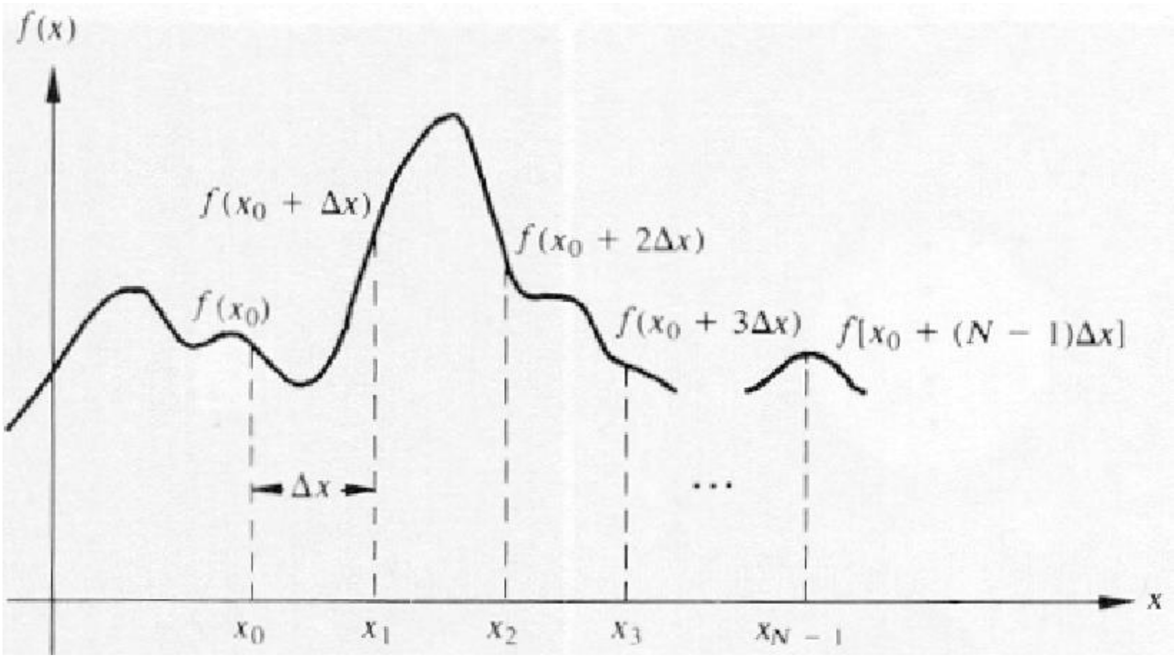
$$\begin{aligned}\bar{g}(x) &= g(x) \cdot \left[\delta(x-1) + \delta(x-2) + \ldots + \delta(x-N)\right] \\ &= g(x) \cdot \sum_{i=1}^{N} \delta(x-i).\end{aligned}$$

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

- **Uma função contínua f(x) pode ser discretizada na sequencia:**

$$\{ f(x_0), f(x_0+\Delta x), f(x_0+2\Delta x), \ldots, f(x_0+[N-1]\Delta x) \}$$

- **Tomando N amostras de X unidades:**



TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

- Onde x assume os valores discretos (0,1,2,3,..,M-1) então

$$f(x) = f(x_0 + x\Delta x)$$

- A sequência {f(0),f(1),...,f(M-1)} denota qualquer amostragem de N valores uniformemente espaçados de uma função contínua correspondente

TRANSFORMADA DE FOURIER

- **Transformada de Fourier:**

$$\Im\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j2\pi ux} dx$$

- **Inversa da Transformada de Fourier:**

$$\Im^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot e^{j2\pi ux} du$$

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

O par de transformadas discretas de Fourier é

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N]$$

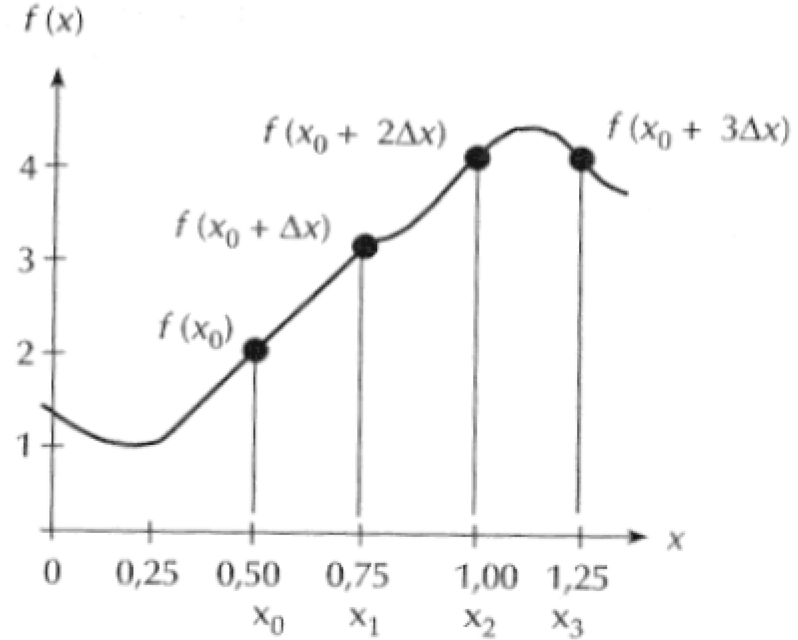
Para u = 0,1,2,........N-1

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u)\exp[j2\pi ux/N]$$

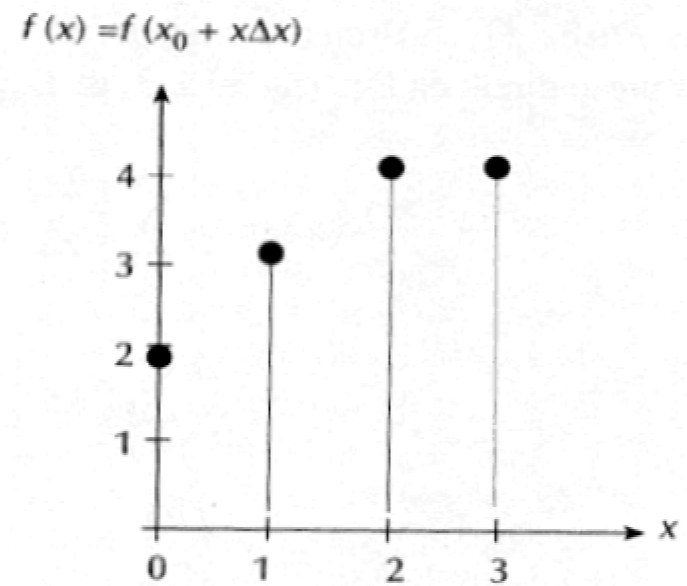
Para x = 0,1,2,........ N-1

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT)

Função contínua 1-D amostrada:



Função discreta :



$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux / N]$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(1) &= 3 \\ f(2) &= 4 \\ f(3) &= 4 \end{aligned}}$$

EXEMPLO

$$F(u) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\exp[-j2\pi ux/N]$$

$$\boxed{\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\exp[0] \\ &= \frac{1}{4}[f(0)+f(1)+f(2)+f(3)] \\ &= \frac{1}{4}[2+3+4+4] = 3{,}25 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} F(1) &= \frac{1}{4}\sum_{x=0}^{3} f(x)\exp[-j2\pi x/4] \\ &= \frac{1}{4}[2e^{0} + 3e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2}] \\ &= \frac{1}{4}\left[2+3(\cos\frac{\pi}{2} - j sen\frac{\pi}{2}) + 4(\cos\pi - j sen\pi) + 4(\cos\frac{3\pi}{2} - j sen\frac{3\pi}{2})\right] \\ &= \frac{1}{4}[2+3(0-j)+4(-1-j0)+4(0-j(-1))] \\ &= \frac{1}{4}[2-3j-4+4j] \\ &= \frac{1}{4}(-2+j) \end{aligned}$$

$$\boxed{F(2) = -\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{F(3) = -\frac{1}{4}[2+j]}$$

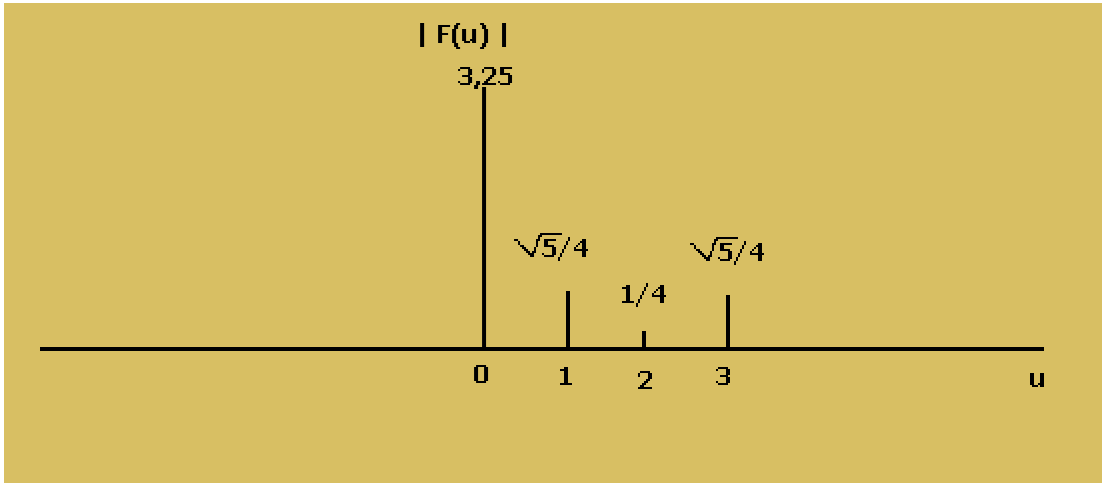
EXEMPLO

$$|F(0)| = 3{,}25$$

$$|F(2)| = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{1}{4}$$

$$|F(1)| = \left[\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$|F(3)| = \left[\left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$



EXEMPLO: DFT INVERSA

$$f(x)=\sum_{u=0}^{N-1}F(u)\exp[j2\pi ux/N]$$

$$\begin{aligned}
f(0) &= \sum_{u=0}^{3}F(u)\exp[0] \\
&= F(0)+F(1)+F(2)+F(3) \\
&= 3{,}25+\frac{1}{4}(-2+j)-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(2+j) \\
&= 3{,}25-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}j\right)-\left(\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}j\right) \\
&= 3{,}25-1{,}25 \\
&= 2
\end{aligned}$$

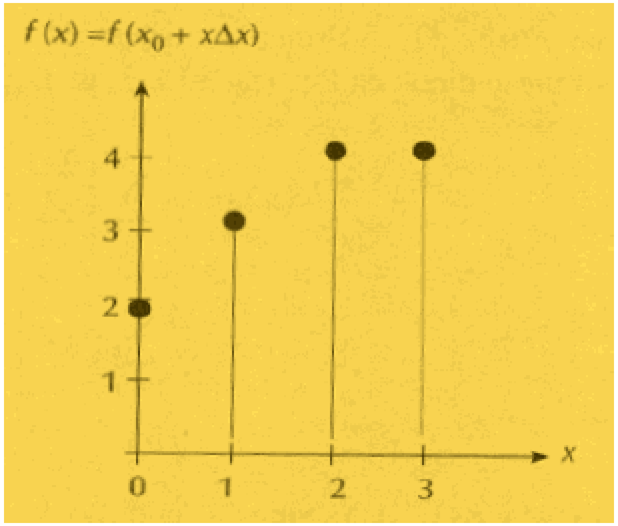
$$\begin{aligned}
f(1) &= \sum_{u=0}^{3}F(u)\exp[j2\pi u/4] \\
&= 3{,}25e^{0}+\frac{\sqrt{5}}{4}e^{j\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{4}e^{j\pi}+\frac{\sqrt{5}}{4}e^{j\frac{3\pi}{2}} \\
&= 3{,}25+\frac{1}{4}\left[\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{2}+j\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)+(\cos\pi+j\,\mathrm{sen}\,\pi)+\sqrt{5}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+j\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)\right] \\
&= 3{,}25+\frac{1}{4}\left[\sqrt{5}(0+j)+(-1+j0)+\sqrt{5}(0-j)\right] \\
&= 3{,}25-0{,}25 \\
&= 3
\end{aligned}$$

$$f(2)=4$$

$$f(3)=4$$

EXEMPLO

As duas representações da função podem ser obtidas uma da outra, com o mesmo número de amostras, sendo uma no domínio do tempo e outra no domínio da frequência



TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER (DFT) 2D

- **Filtragem para uma função f(u,v)**
- **Imagem de tamanho MxN:**
- **DFT:**

$$G(m,n) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u,v) \cdot e^{-\mathrm{i}2\pi \frac{mu}{M}} \cdot e^{-\mathrm{i}2\pi \frac{nv}{N}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u,v) \cdot e^{-\mathrm{i}2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N}\right)}$$

- **DFT Inversa:**

$$g(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m,n) \cdot e^{\mathrm{i}2\pi \frac{mu}{M}} \cdot e^{\mathrm{i}2\pi \frac{nv}{N}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m,n) \cdot e^{\mathrm{i}2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N}\right)}$$

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER

- **Propriedade da Periodicidade e Simetria do Conjugado**

$$\boxed{F(u,v) = F(u+M, v+N) = F^*(-u,-v)} \Rightarrow \boxed{|F(u,v)| = |F(-u,-v)|}$$

SIMETRIA

- **Periodicidade e Simetria Conjugada:**

$$F(u,v) = F(u+M, v+N) = F^{*}(-u,-v) \Rightarrow |F(u,v)| = |F(-u,-v)|$$

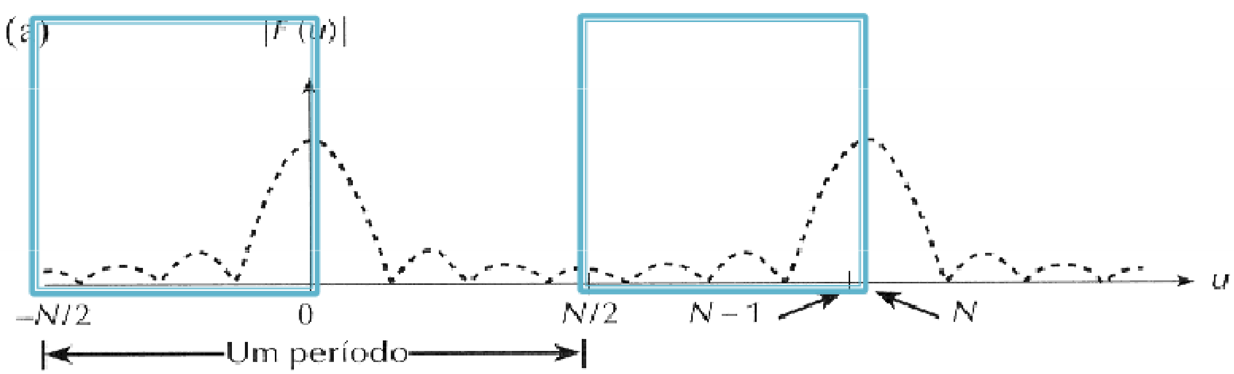
- **A transformada é formulada para valores de u no intervalo [0, 1]**

$$F(u) = F(u+N)$$

$$|F(u)| = |F(-u)|$$

Magnitude centrada na origem

Reflexões



TRANSLAÇÃO

- **Multiplicar g(x) pelo termo exponencial, e fazer a transformada desse produto, resulta num deslocamento da origem do plano das frequências para o ponto (u,v)**

$$f(x,y)\exp\left[\, i2\pi\left(u_0x+v_0y\right)/N\right]\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

Exemplo:

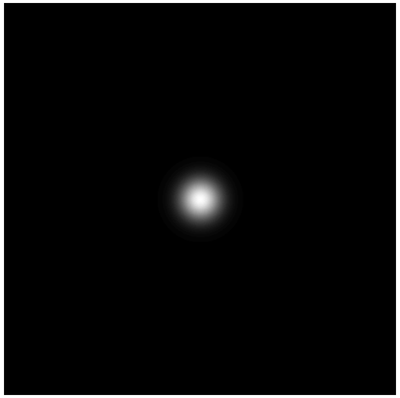
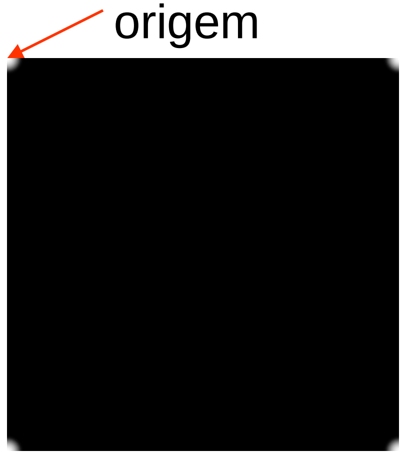
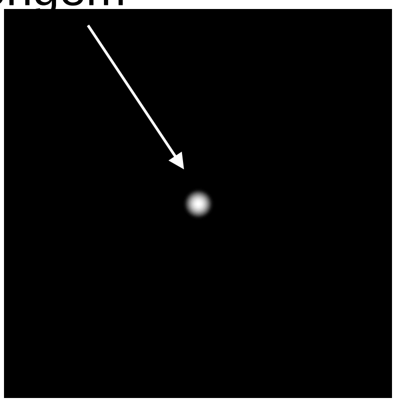


Imagem Original



Transformada
sem deslocamento



Transformada com
origem no centro
da matriz

ROTAÇÃO

- **A rotação de f(x,y) de um ângulo θ implicará em uma rotação de F(u,v) deste mesmo ângulo**

$$\boxed{f\left(r,\theta+\theta_0\right)\Leftrightarrow F\left(\omega,\phi+\theta_0\right)}$$

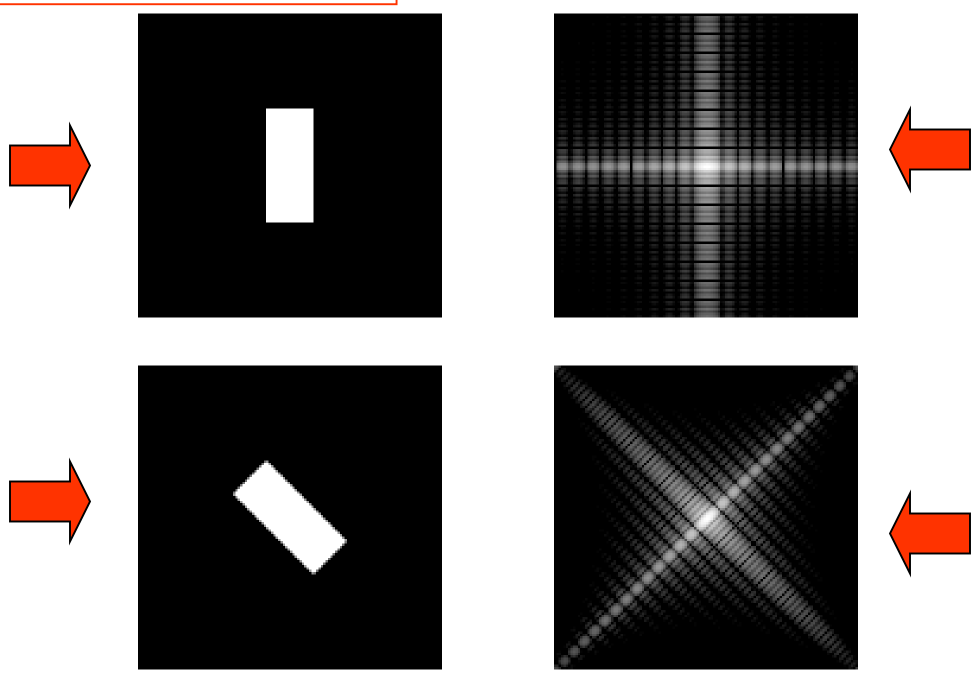


Imagem original

Espectro

Imagem rotacionada

Espectro resultante

CONVOLUÇÃO

Sejam

$F(u,v)$ a transformada de Fourier de $f(x,$y), isto é,

$$f(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)$$

e $H(u,v)$ a transformada de Fourier de $h(x,y)$, isto é,

$$h(x,y) \Leftrightarrow H(u,v)$$

então vale a relação

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x,y) * h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v) \\ f(x,y)h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) * H(u,v) \end{array}}$$

O símbolo $\Leftrightarrow$ indica que a expressão do lado esquerdo pode ser obtida pela transforma inversa de Fourier da expressão do lado direito, e vice-versa.

A Função de Transferência $H(u,v)$ **usada na filtragem no domínio da freqüência é** (quase) **a transformada de Fourier da máscara** $h(x,y)$ **usada nos filtros lineares espaciais.**

OUTRAS PROPRIEDADES

•Distributividade: $\boxed{\Im\{f_1(x,y)+f_2(x,y)\}=\Im\{f_1(x,y)\}+\Im\{f_2(x,y)\}}$

$$\Im\{f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\}\neq\Im\{f_1(x,y)\}\cdot\Im\{f_2(x,y)\}$$

•Escala: $\boxed{af(x,y)\Leftrightarrow aF(u,v)}$

•Similaridade: $\boxed{f(ax,by)\Leftrightarrow\frac{1}{|ab|}F(u/a,v/b)}$

•Valor Médio: $\boxed{\overline{f}(x,y)=\frac{1}{N}F(0,0)}$

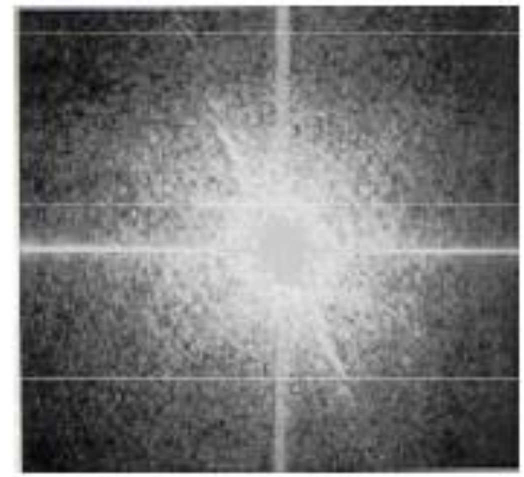
depende da implementação

MAGNITUDE X FASE

O que é mais importante?

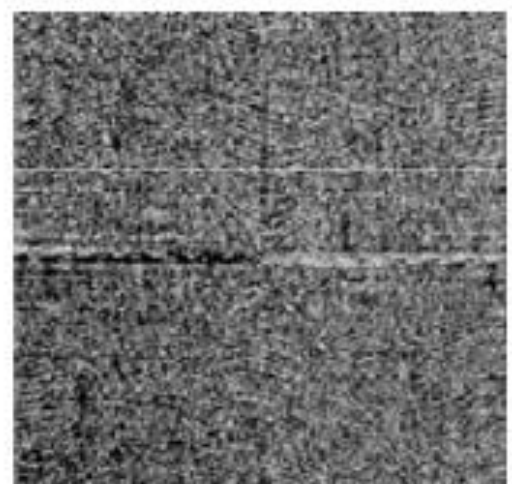
MÓDULO:

Amplitude de cada onda 2D

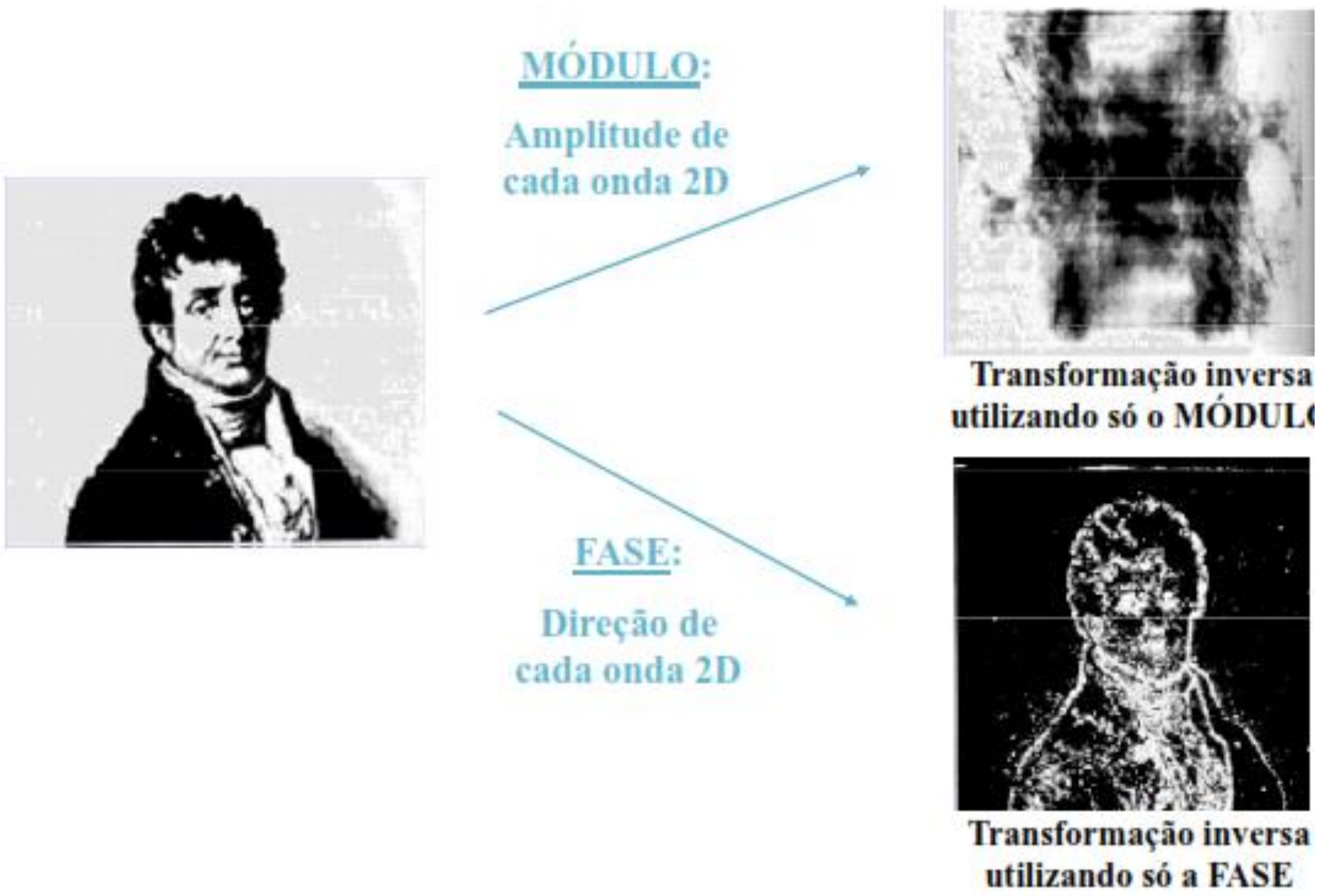


FASE:

Direção de cada onda 2D



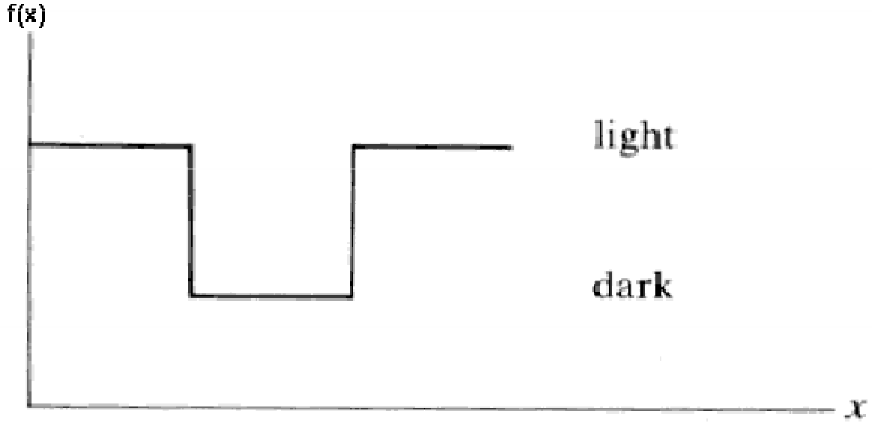
MAGNITUDE X FASE



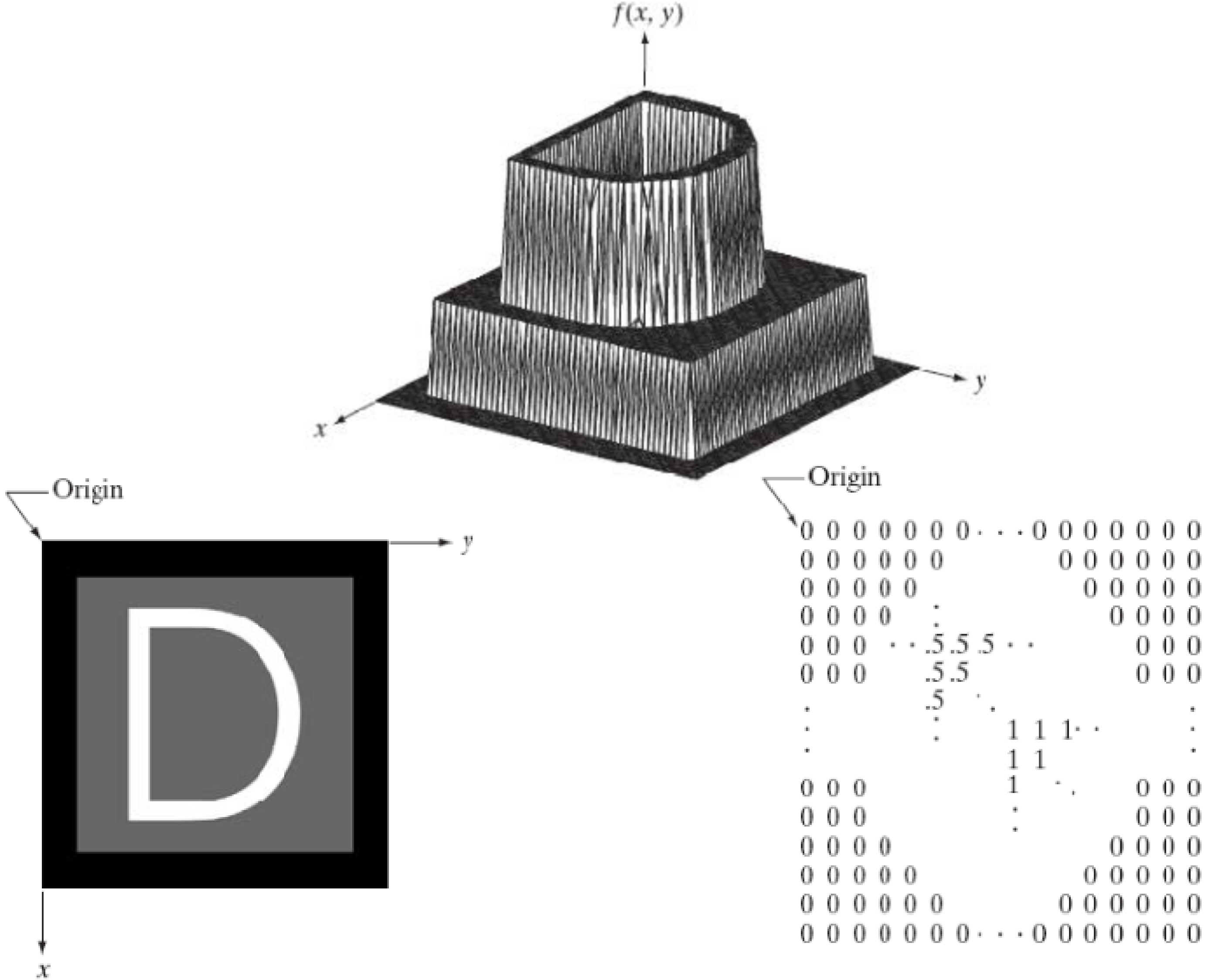
REPRESENTAÇÃO DE UMA IMAGEM

Uma linha de uma imagem formada por uma sequência de pixels de diferentes intensidades:

Pode ser representada no domínio do espaço como uma forma de onda:

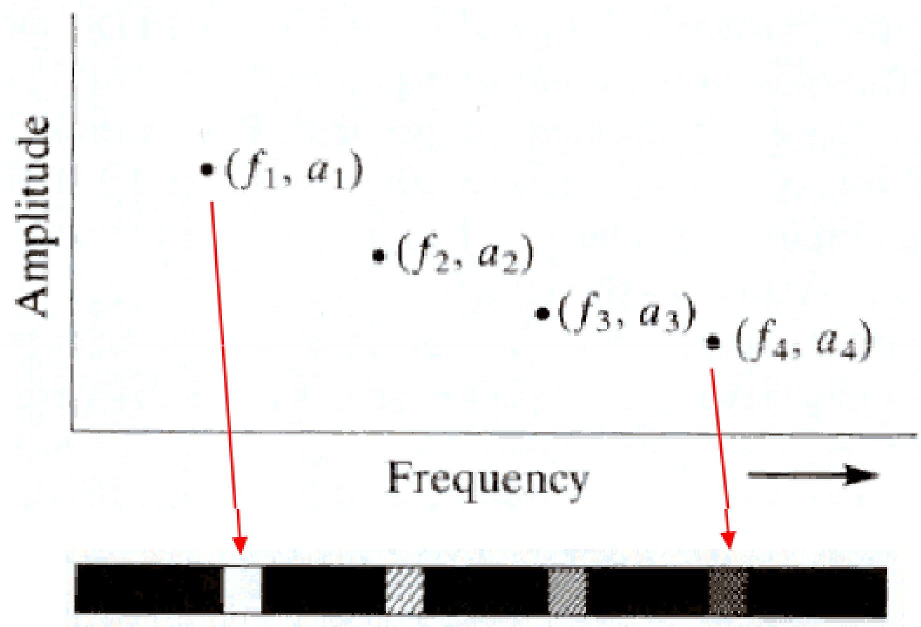


REPRESENTAÇÃO DE UMA IMAGEM



DOMÍNIO DA FREQUENCIA

- **E no Domínio da Frequência pode ser representada por uma soma de senos e cossenos, através de suas frequências (f) e amplitudes (a):**



- **Que podem ser colocadas no formato de uma imagem como uma linha de amplitudes em escala de cinza**

DOMÍNIO DA FREQUENCIA

- Para uma função unidimensional, o espectro de Fourier fornece informação (frequência, amplitude e fase) sobre as senóides (1D) que devem ser somadas para formar a função desejada

- Para uma função bidimensional, o espectro de Fourier fornece informação (frequência, amplitude, fase e direção) sobre as ondas senoidais (2D) que devem ser somadas para formar a função desejada.

TRANSFORMADA DE FOURIER

- **Espectro de Fourier:**

$$|F(u,v)| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

- **Fase:**

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[I(u,v) / R(u,v)\right]$$

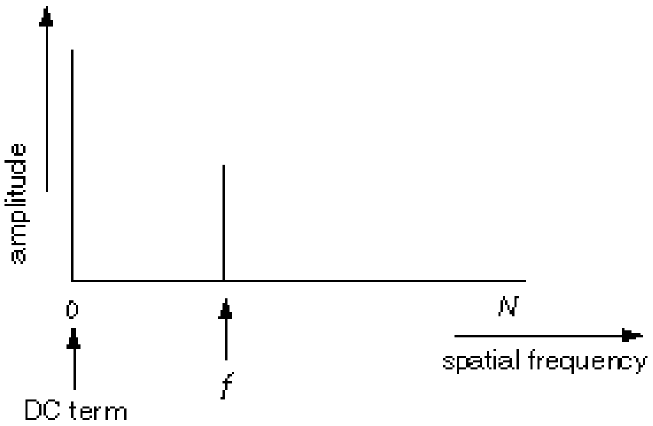
- **Espectro de potência:**

$$P(u,v) = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER

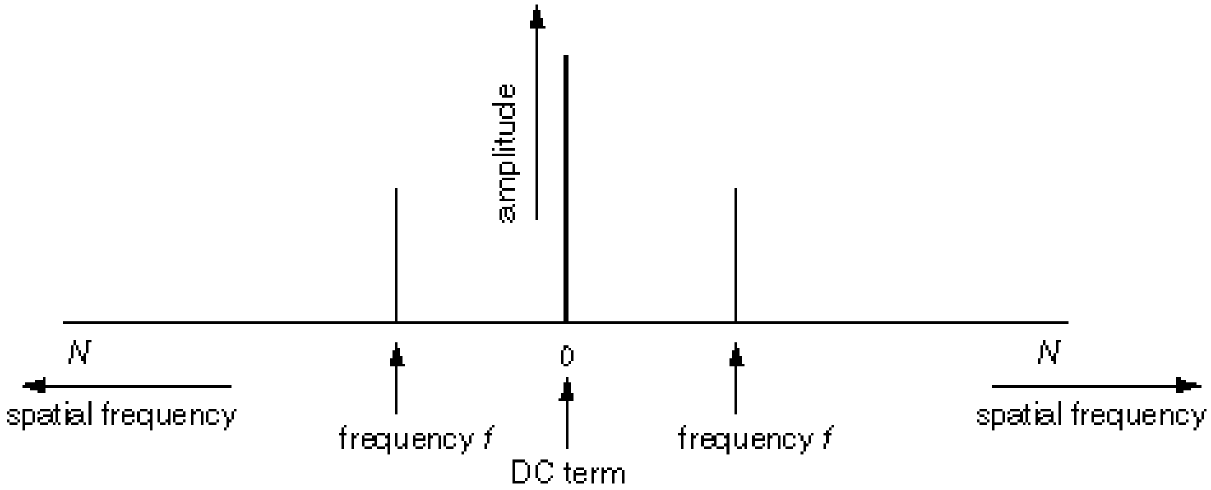
•O "termo DC" correspondente a frequência zero, representa ao intensidade média ao longo de toda a imagem.

•Um termo zero DC poderia significar qual a imagem apareceria ao se adicionar uma sinusoidal alternada entre valores positivos e negativos na imagem média. Como não existe brilho negativo, todas as imagens reais tem um termo DC positivo.



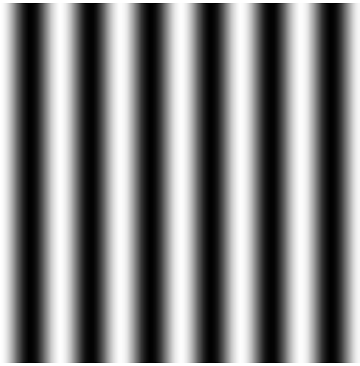
TRANSFORMADA DE FOURIER

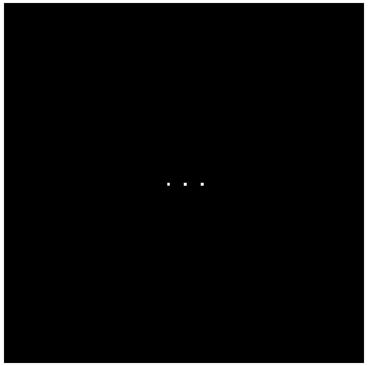
- O que foi mostrado anteriormente é a transformada Fourier de uma única linha de varredura da imagem sinusoidal, que é um sinal unidimensional.
- Uma transformada Fourier completa 2D desenvolve uma transformada 1D em cada linha da imagem, e outra transformada 1-D em cada coluna da imagem, produzindo uma transformada Fourier 2-D do mesmo tamanho da imagem original.



TRANSFORMADA DE FOURIER

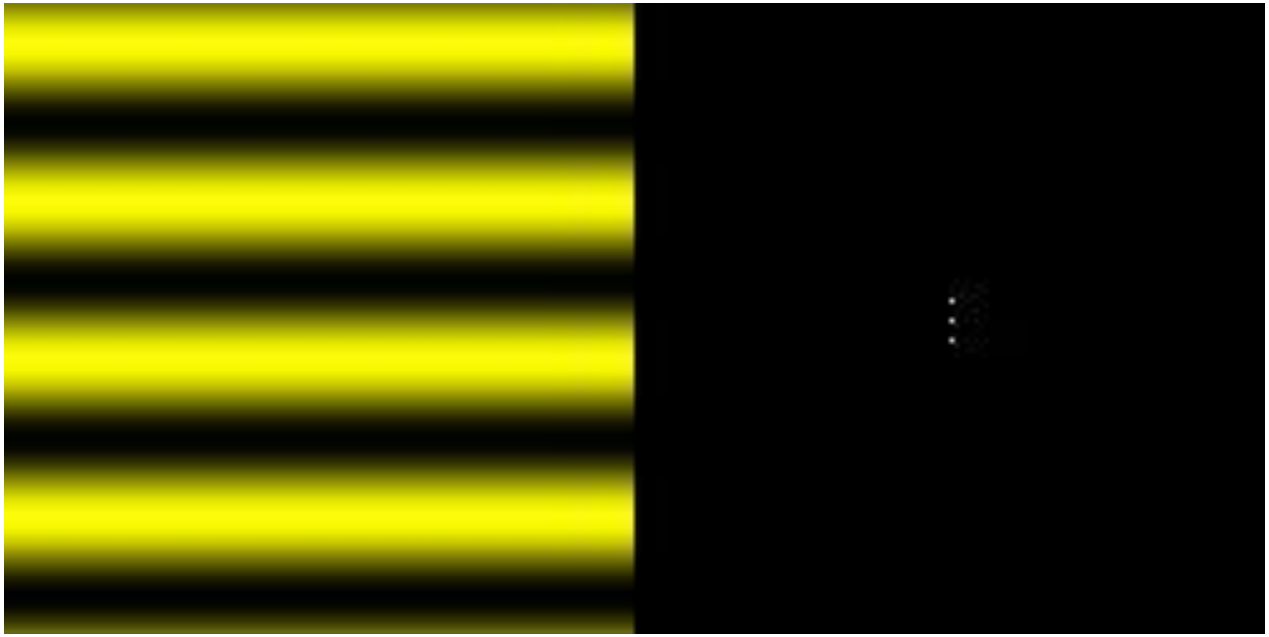
- **Cada pixel da imagem da TF é um valor da frequência espacial, a magnitude daquele valor é codificado pelo brilho do pixel.**
- **Repare que há um pixel bem no centro - esse é o termo DC, ladeado por dois pixels, que codificam o padrão sinusoidal.**
- **Como tem apenas um componente Fourier nessa imagem, todos os outros valores na TF são zero e por isso mostrados em preto.**





TRANSFORMADA DE FOURIER

- O ponto central é o componente DC e os dois outros representam a frequência da função senoidal.
- Não há pixels na direção x, porque a imagem é uma constante (a mesma em qualquer nessa direção).



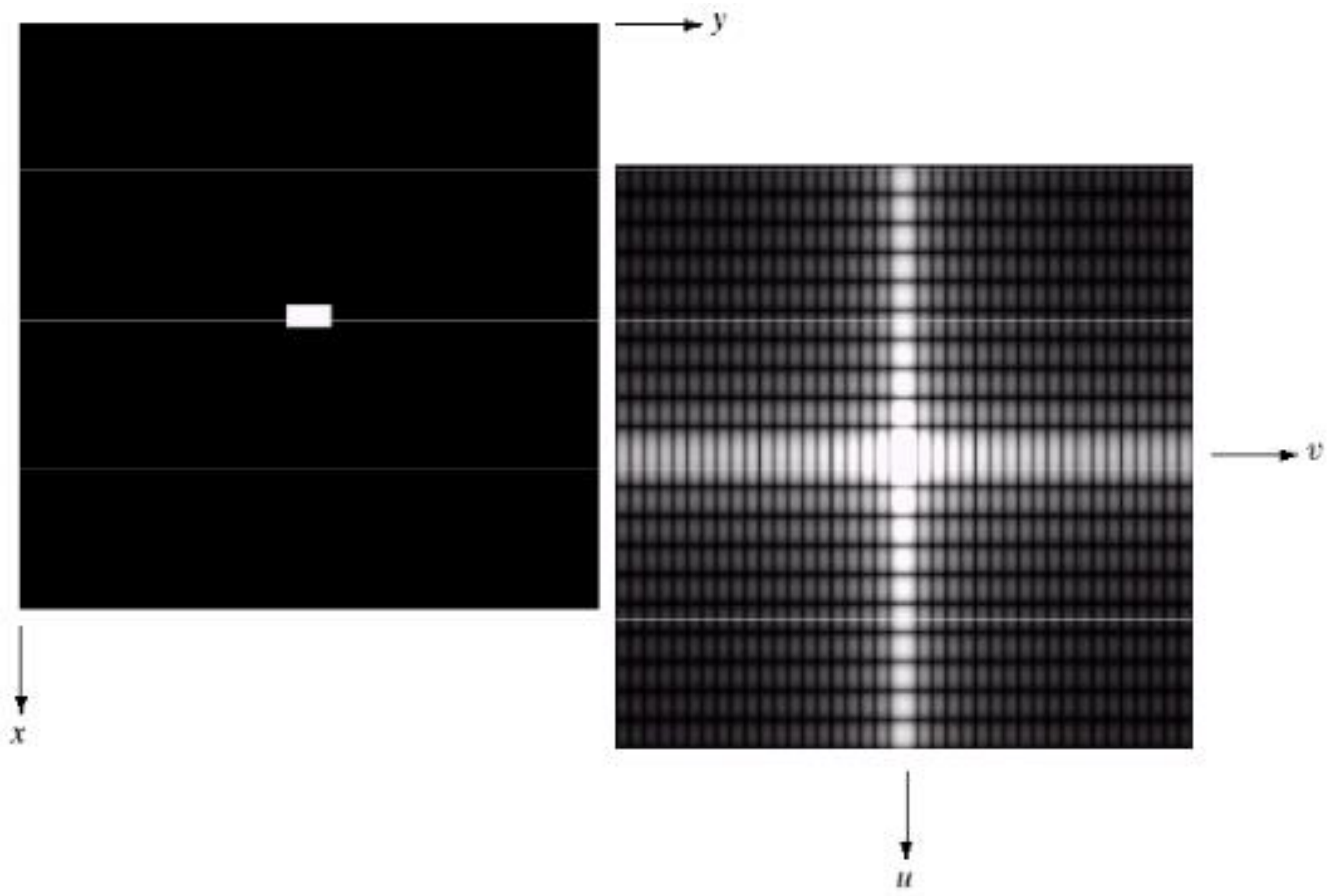
TRANSFORMADA DE FOURIER

- Função senoidal com uma frequência maior.
- E seu espectro de Fourier: os dois pontos estão mais separados da origem, ou em uma maior frequência.

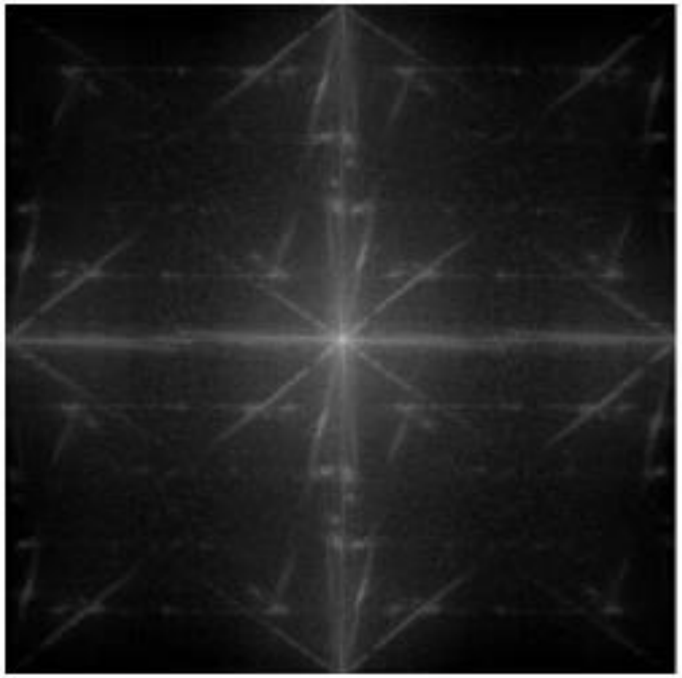
TRANSFORMADA DE FOURIER

- Somado duas imagens senoidais uma em cima da outra, você não tem apenas um seno na direção y, assim o espectro dela não contém apenas dois pontos, mas uma linha.

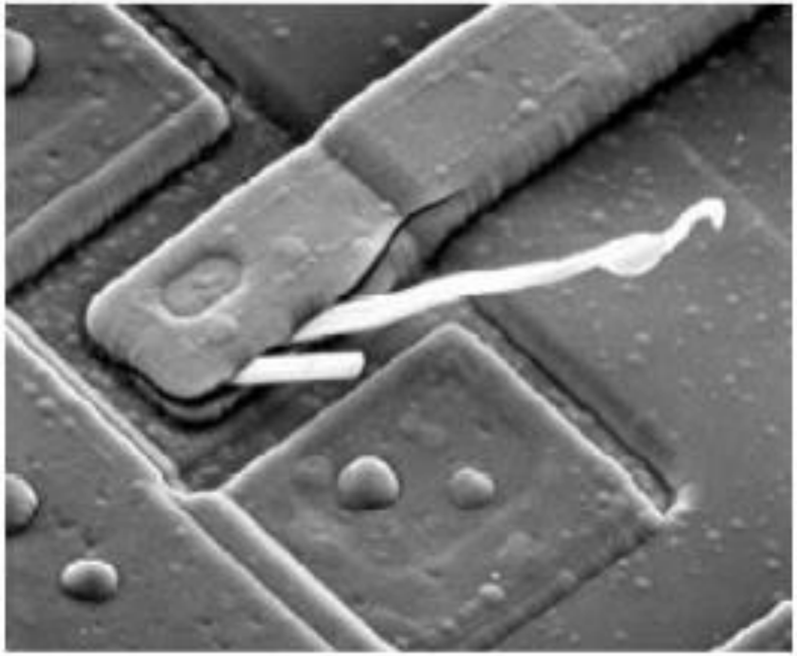
ESPECTRO DE UMA IMAGEM

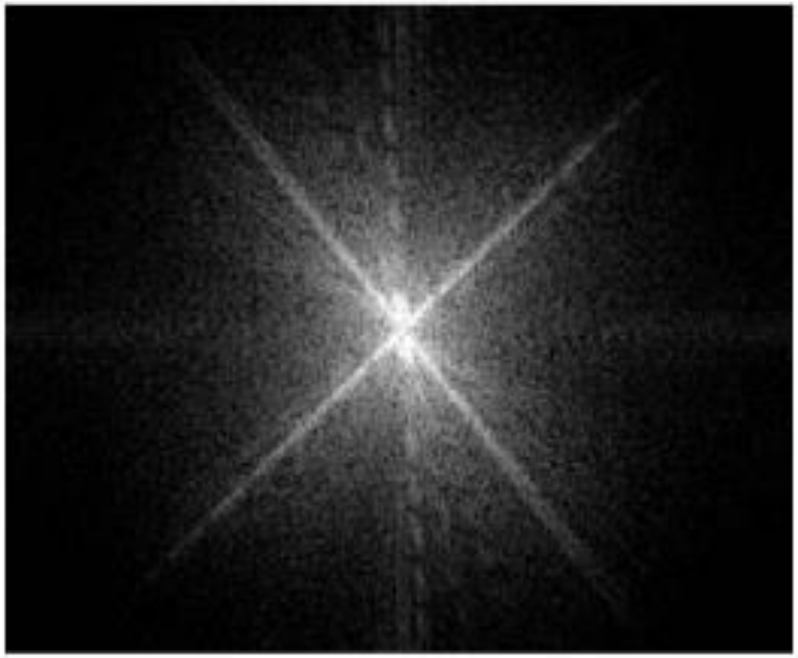


ESPECTRO DE UMA IMAGEM



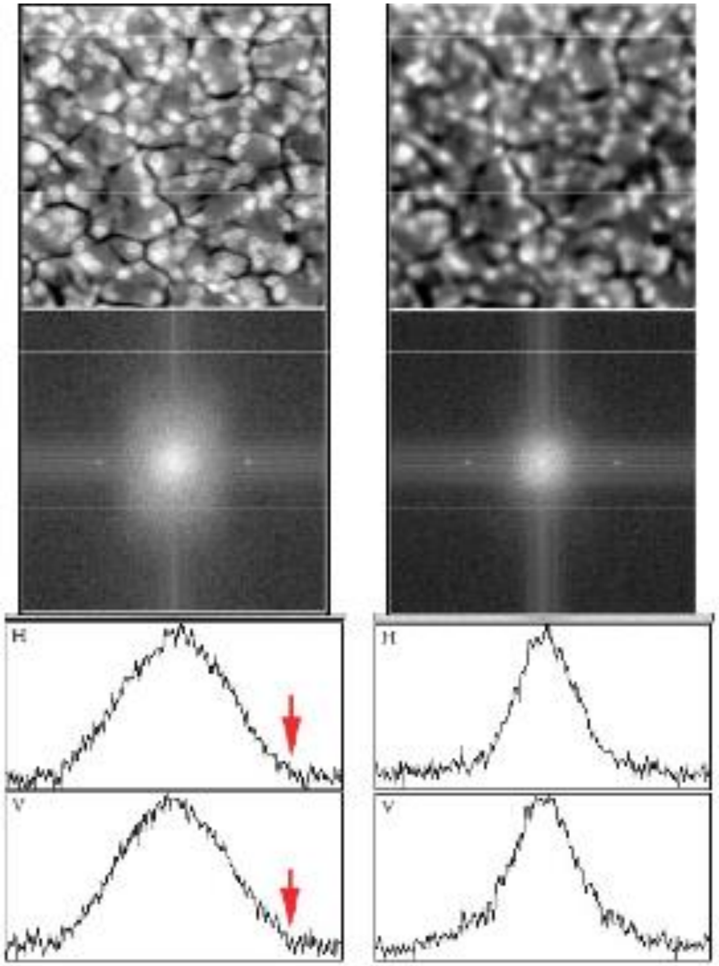
ESPECTRO DE UMA IMAGEM





ESPECTRO DE UMA IMAGEM

Alta resolução espacial: presença de componentes de alta frequência



Baixa resolução espacial: perda de componentes de alta frequência

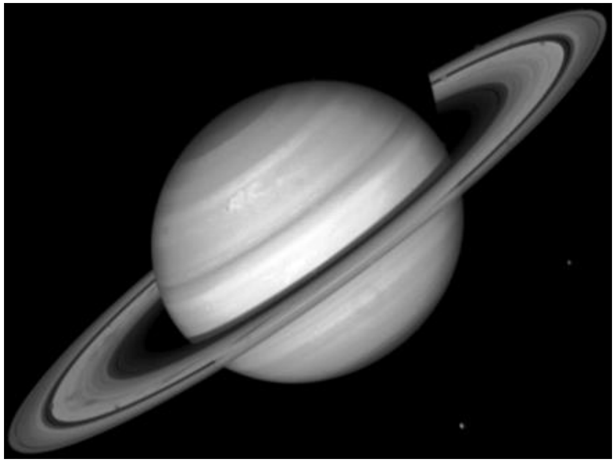
VISUALIZAÇÃO DA TRANSFORMADA EM 2D

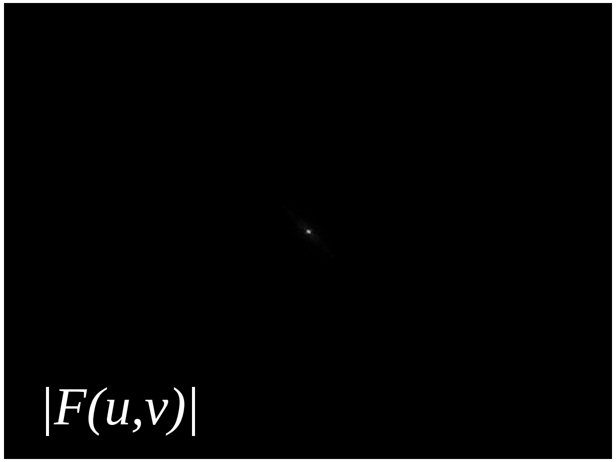
A transformada de Fourier Discreta bidimensional é frequentemente visualizada como uma função de intensidade. Para facilitar a visualização, ao invés de se apresentar $|F(u,v)|$, o que se apresenta é a função:

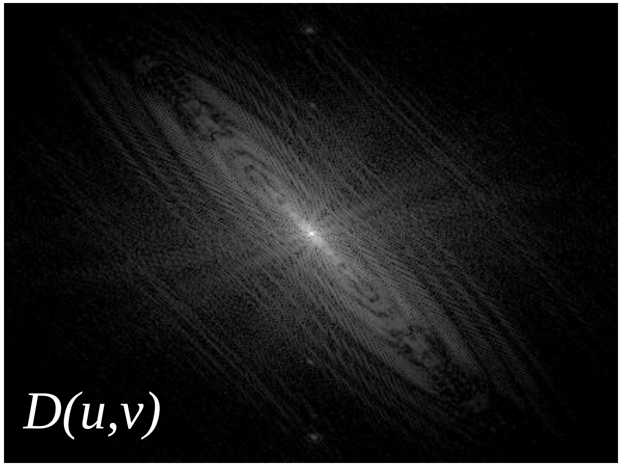
$$D(u,v) = c \log\left[1 + \left|F(u,v)\right|\right]$$

onde c é uma constante arbitrária.

Exemplo

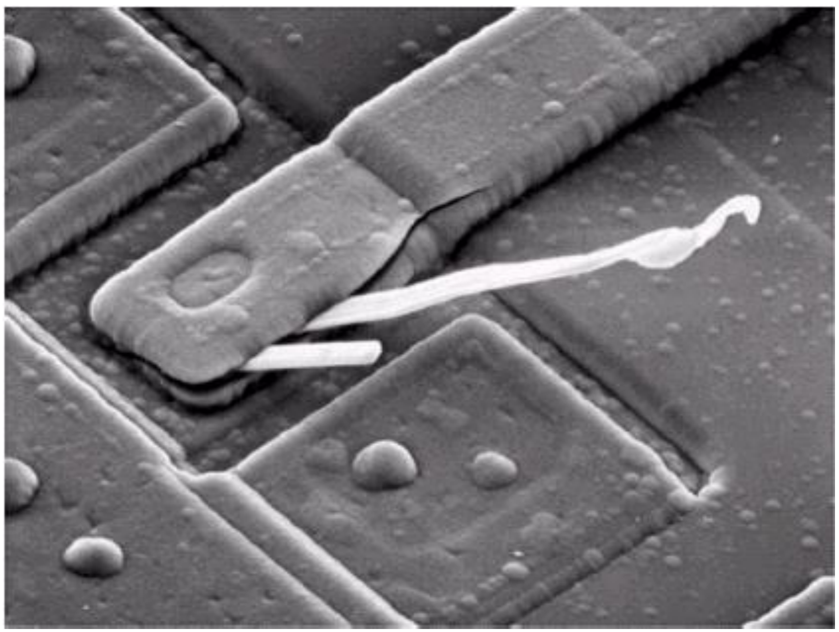




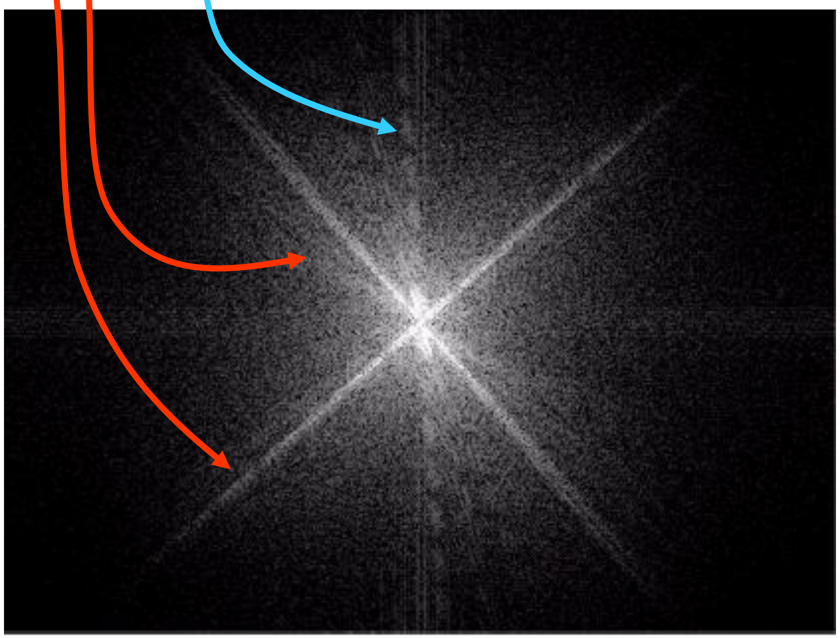


RELAÇÕES ESPAÇO × FREQÜÊNCIA

Características:
- bordas a ±45º
- duas incrustações de óxido



imagem

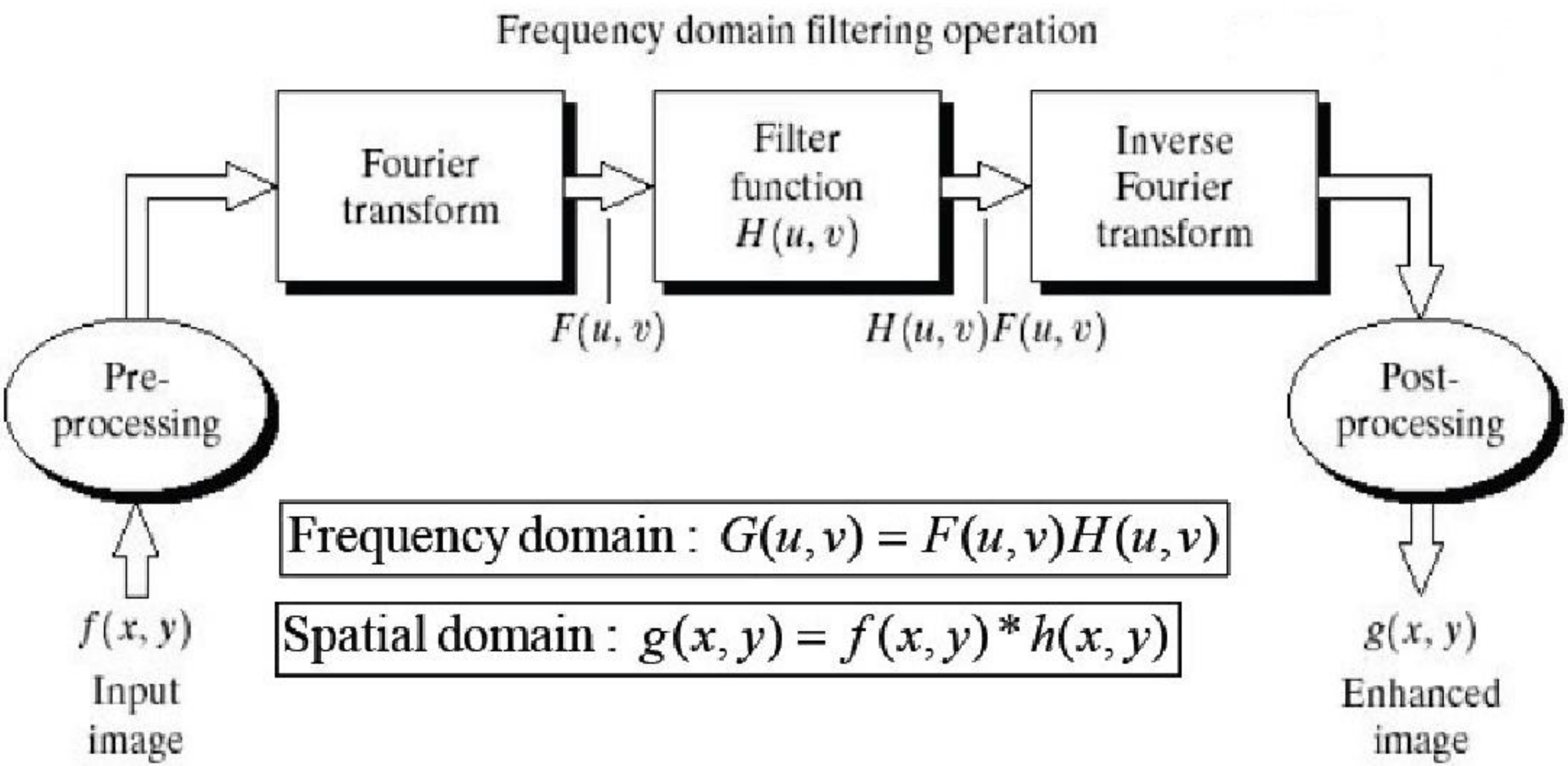


transformada

imagem microscópica de um circuito integrado

FILTRAGEM NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

FILTRAGEM NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA



FILTRAGEM NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

- **Procedimento:**
  - Centrar a transformada, multiplicando a imagem por $(-1)^{x+y}$ Calcular F(u,v), a tranformada discreta de Fourier da imagem
  - Multiplicar F(u,v) por uma função filtro G(u,v)
  - Calcular a transformada discreta inversa que produz a nova imagem realçada
  - Obter a parte real
  - Multiplicar o resultado por $(-1)^{x+y}$
  - Resumindo
    - G(u,v) = H(u,v)F(u,v)
    - Imagem filtrada $\Im^{-1}[G(u,v)]$

FILTRAGEM NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

- **Filtros passa-baixa (suavização, borramento)**
  - Preserva as baixas frequencias especiais
  - Suprime as altas frequencias espaciais

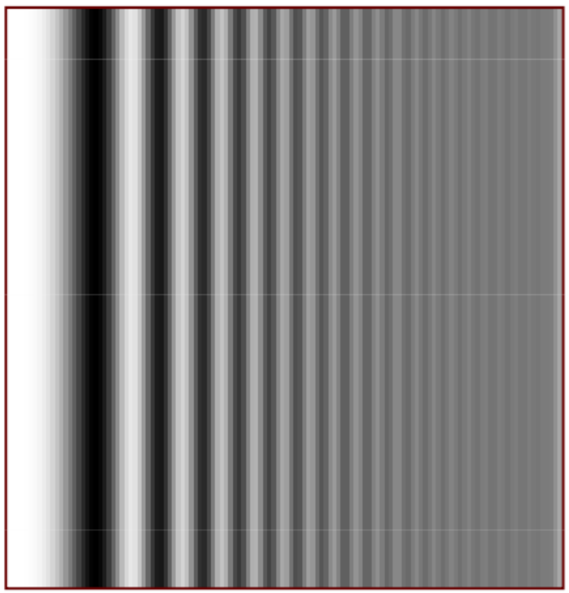
- **Filtros passa-alta (realce das bordas, aguçamento)**
  - Preserva as altas frequencias espaciais
  - Suprime as baixas frequencias espaciais

- **Filtros passa-faixa (restauração de imagens)**
  - Preserva frequencias espaciais específicas
  - Suprime outras frequencias espaciais

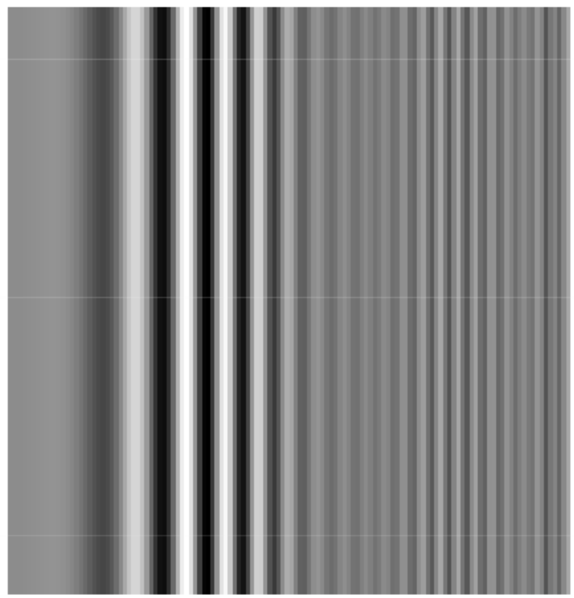
Baixas frequencias: área de suavização

Altas frequencias: detalhes, como bordas e ruídos

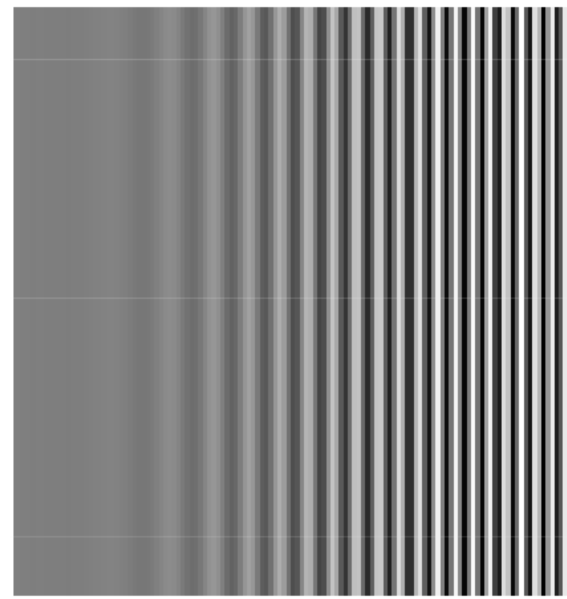
FILTRAGEM NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA



Filtro passa-baixa



Filtro passa-banda



Filtro passa-alta

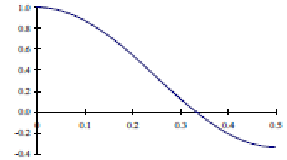
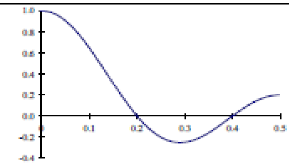
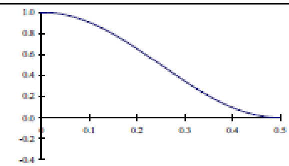
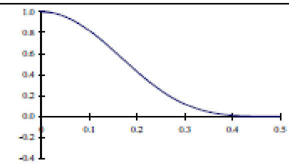
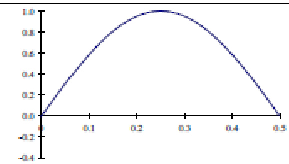
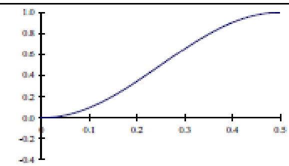
Name	Kernel	Transform	Plot
box-3	$\frac{1}{3}\,\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$	$\frac{1}{3}(1+2\cos\omega)$	
box-5	$\frac{1}{5}\,\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$	$\frac{1}{5}(1+2\cos\omega+2\cos 2\omega)$	
linear	$\frac{1}{4}\,\boxed{1}\boxed{2}\boxed{1}$	$\frac{1}{2}(1+\cos\omega)$	
binomial	$\frac{1}{16}\,\boxed{1}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{4}\boxed{1}$	$\frac{1}{4}(1+\cos\omega)^2$	
Sobel	$\frac{1}{2}\,\boxed{-1}\boxed{0}\boxed{1}$	$\sin\omega$	
"Laplacian"	$\frac{1}{2}\,\boxed{-1}\boxed{2}\boxed{-1}$	$\frac{1}{2}(1-\cos\omega)$	

Table 3.3: *Fourier transforms of the separable kernels shown in Figure 3.13.*

FILTRO IDEAL (PASSA-BAIXA)

- **Um filtro ideal passa-baixa é definido por:**

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 \text{ se } D(u,v) \le D_0 \\ 0 \text{ se } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

- **Onde D_0 é um valor não negativo específico e D(u,v) é a distância do ponto (u,v) à origem do plano da frequencia:**

$$D(u,v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$$

- **O centro do plano da frequencia: (u,v)=(m/2,n/2)**

FILTRO IDEAL (PASSA-BAIXA)

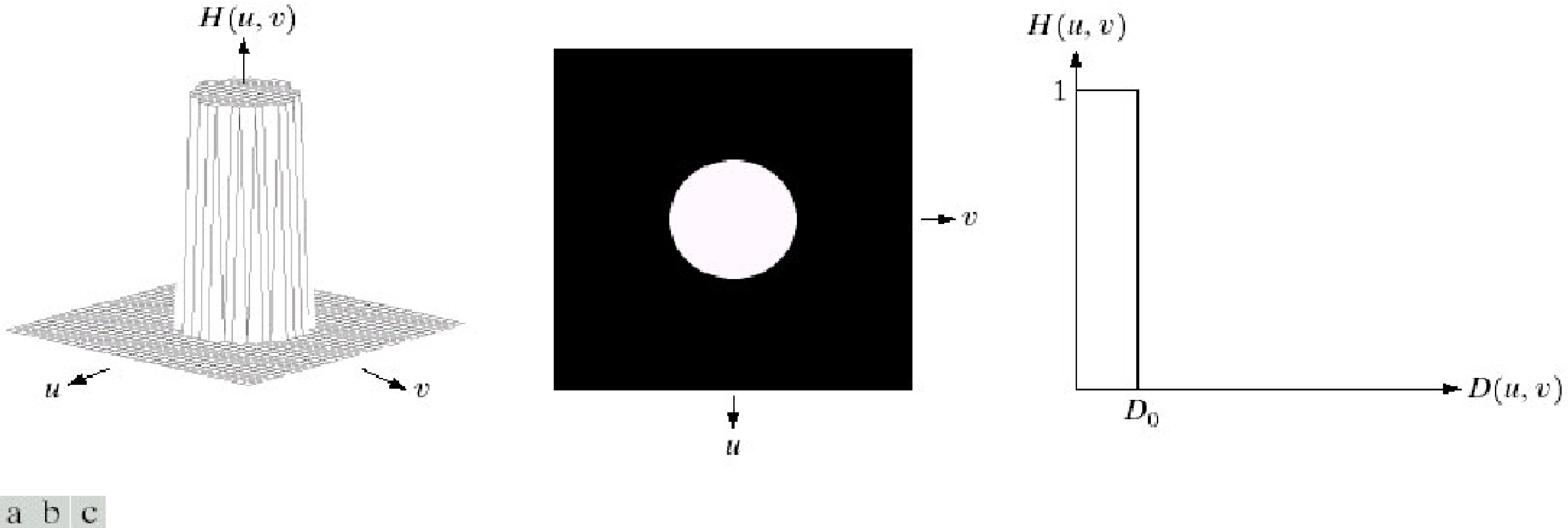


FIGURE 4.10 (a) Perspective plot of an ideal lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

FILTRO IDEAL (PASSA-BAIXA)

- **Todas as frequências dentro do círculo de raio D_0 são passadas sem atenuação**

- **Todas as frequências fora deste círculo são completamente atenuadas**

- **Frequência de corte: ponto de transição entre $H(u,v)=1$ e $H(u,v)=0$, neste exemplo ela é definida por (D_0)**

EFEITO OSCILATÓRIO (RINGING PROBLEM)

- Os filtros ideais possuem uma variação abrupta de valor na frequência resulta
- Surgimento do efeito Ringing (falsas bordas) no domínio espacial

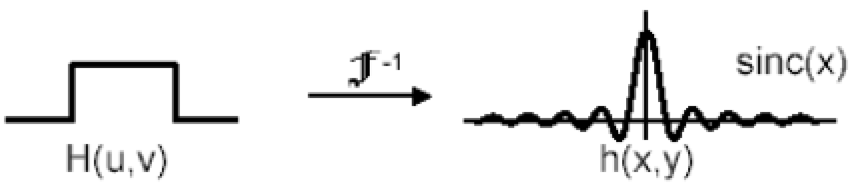
EFEITO OSCILATÓRIO (RINGING PROBLEM)

The Ringing Problem

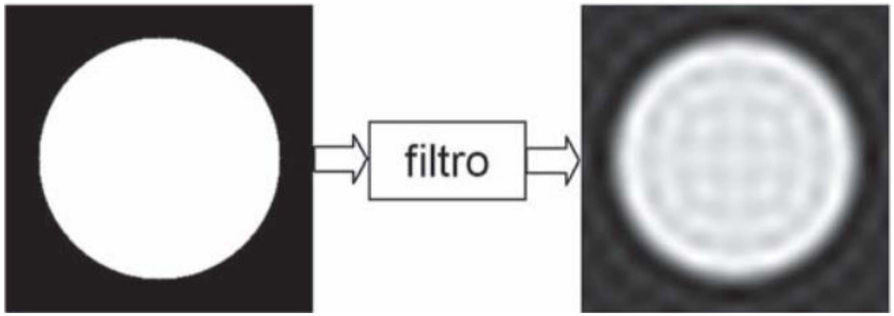
$$G(u,v) = F(u,v) \cdot H(u,v)$$

Convolution Theorm

$$g(x,y) = f(x,y) * h(x,y)$$



$\uparrow D_0 \longrightarrow \downarrow$ Ringing radius + blur



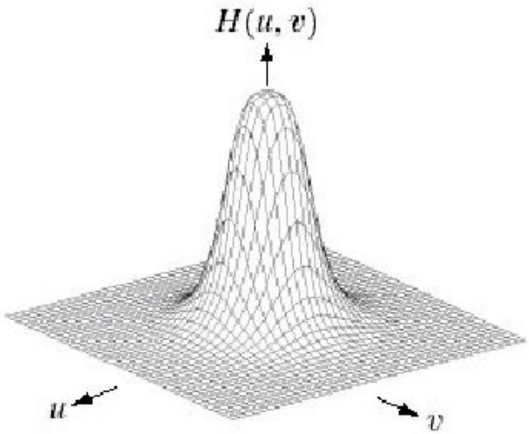
EFEITO OSCILATÓRIO (RINGING PROBLEM)

- **Solução**
  - Usar filtros que possuem uma variação mais suave em torno das frequências de corte
- **Exemplos**
  - Filtro Butterworth
    - Corte mais abrupto em relação ao Gaussiano
    - Ainda apresenta ruído oscilatório
  - Filtro Gaussiano
    - Corte suave
    - Não apresenta ruído oscilatório

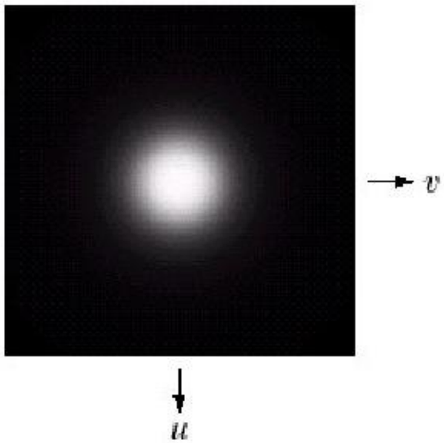
FILTROS SUAVES PASSA-BAIXA

- **Filtro de butterworth**

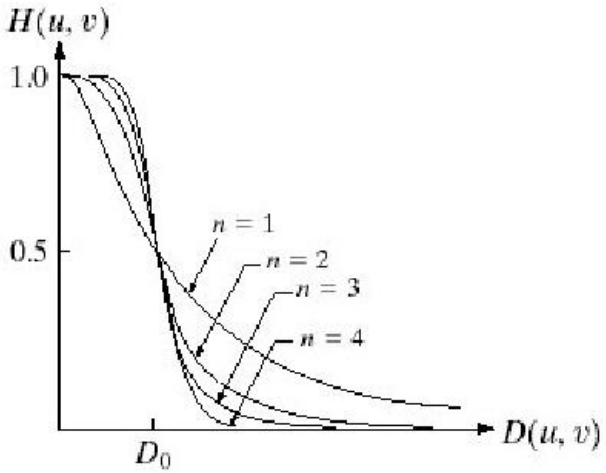
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$$



Função do Filtro



Filtro como imagem



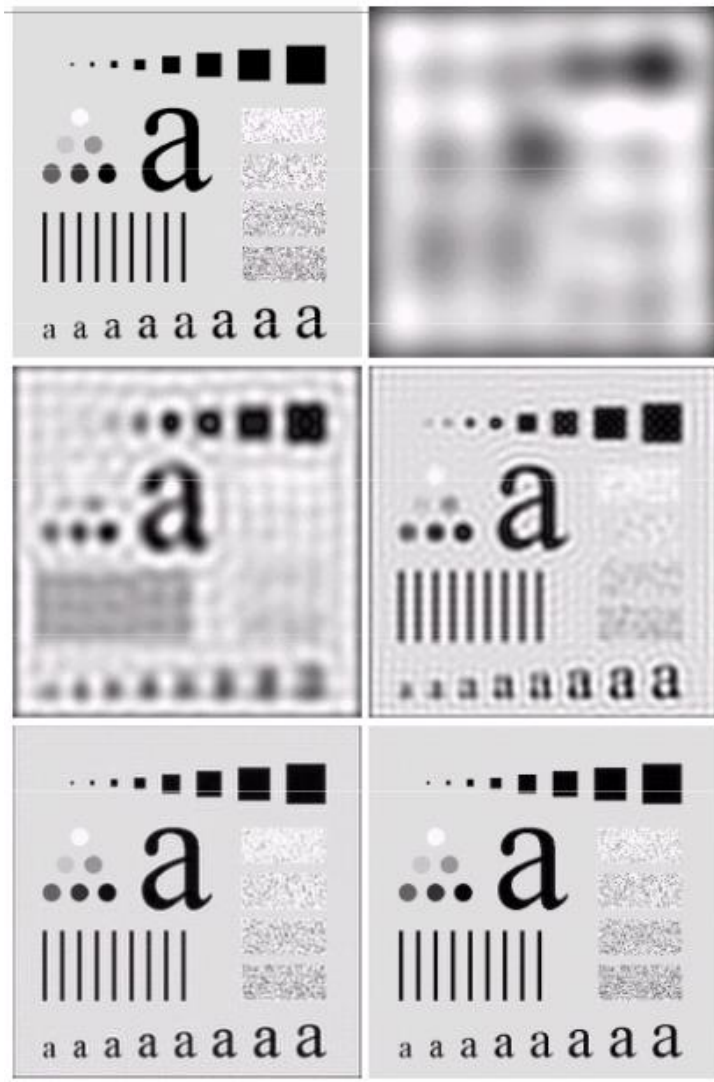
Seção Radial de 1 a 4

FILTROS SUAVES PASSA-BAIXA

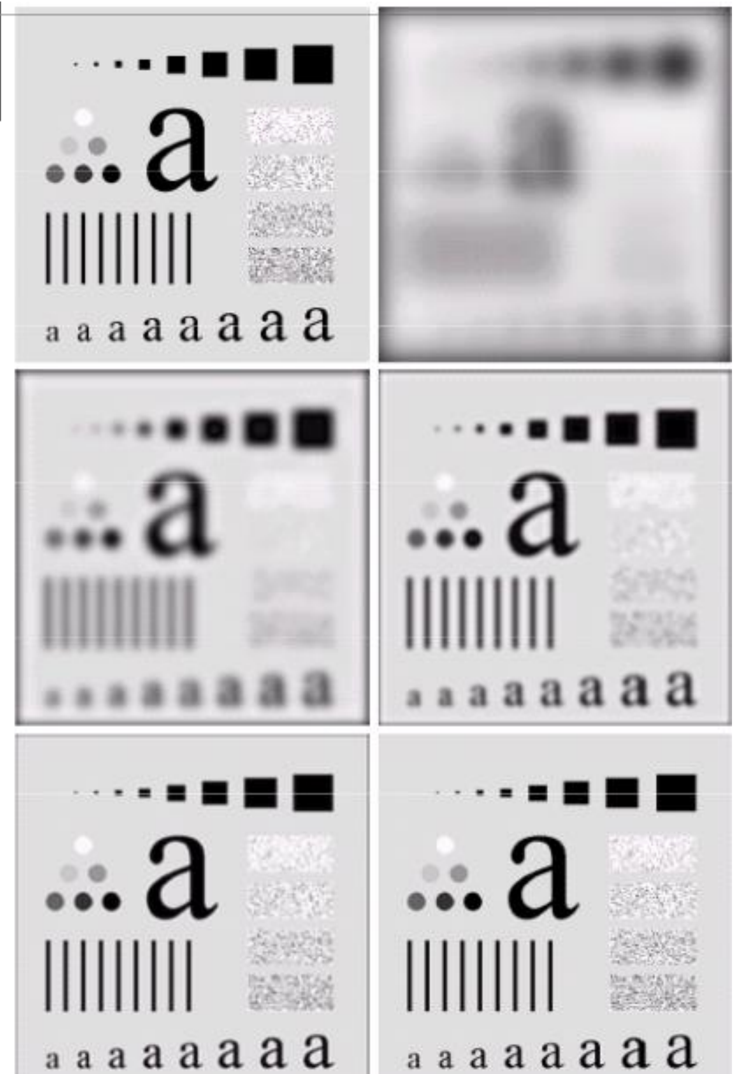
- **Filtro de butterworth:**
  - A frequência de corte (D_0) define o valor onde a amplitude do espectro é reduzida em 50%
  - As altas-frequências são cada vez mais atenuadas na imagem a medida que são maiores que D_0, ou seja, o filtro possui transição mais suave que o filtro ideal
  - O valor de n (ordem do filtro) determina a “suavidade” do filtro

FILTROS SUAVES PASSA-BAIXA

Filtro PB Ideal



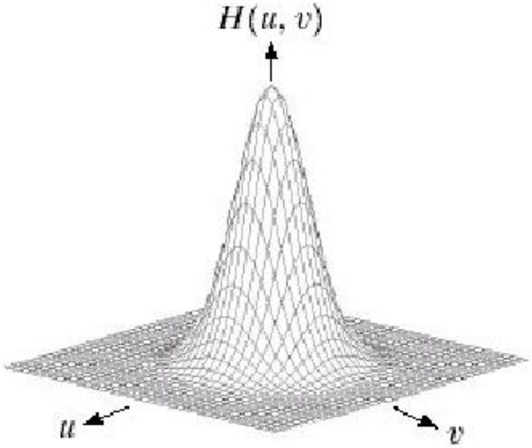
Filtro PB Butterworth

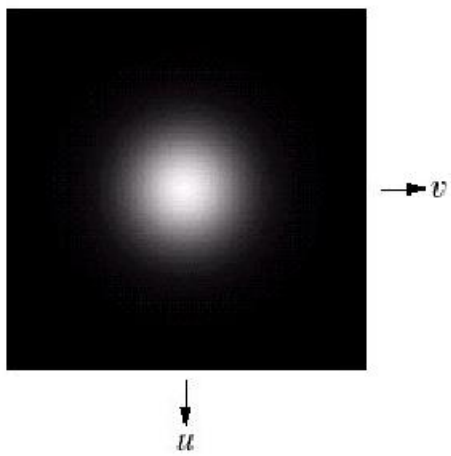


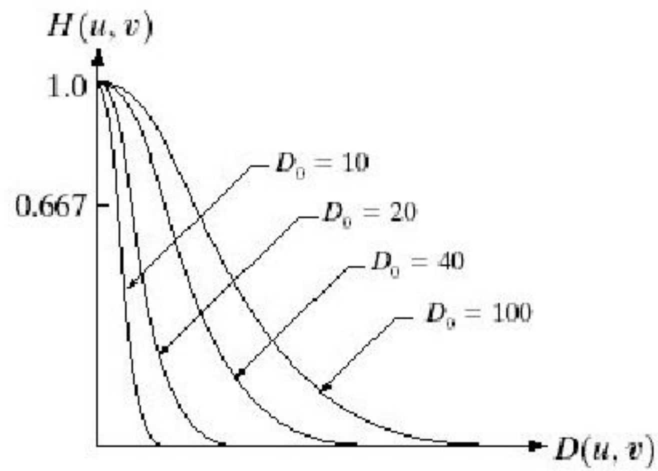
FILTROS SUAVES PASSA-BAIXA

- **Filtro Gaussiano:**

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2} = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$$







Função do Filtro **Filtro como imagem** **Seção Radial de 1 a 4**

FILTROS SUAVES PASSA-BAIXA

- **Filtro Gaussiano:**

  - A frequência de corte (D_0) define o valor onde a amplitude do espectro é reduzida em 60,7%

  - Altas-frequências são cada vez mais atenuadas na imagem a medida que são maiores que D_0 ,ou seja, o filtro possui transição mais suave que o filtro ideal;

  - O filtro Gaussiano pode ser bem mais suave que o filtro Butterworth

FILTROS SUAVES PASSA-BAIXA

Filtro PB Butterworth

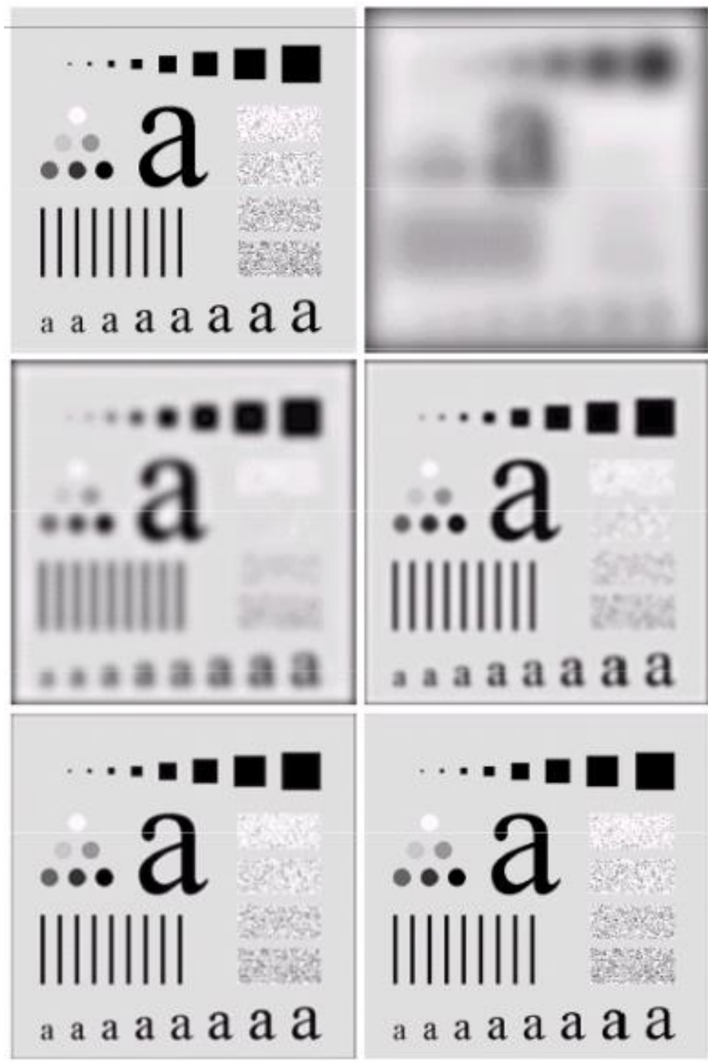


FIGURE 4.15 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering with BLPFs of order 2, with cutoff frequencies at radii of 5, 15, 30, 80, and 230, as shown in Fig. 4.11(b). Compare with Fig. 4.12.

Filtro PB Gaussiano

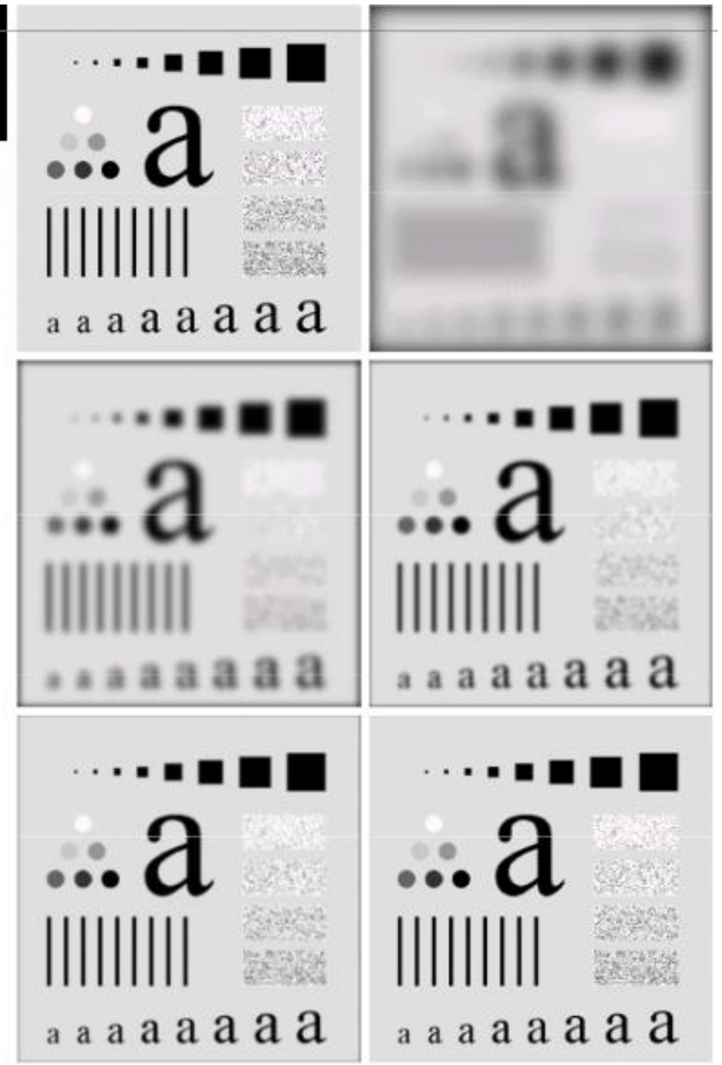
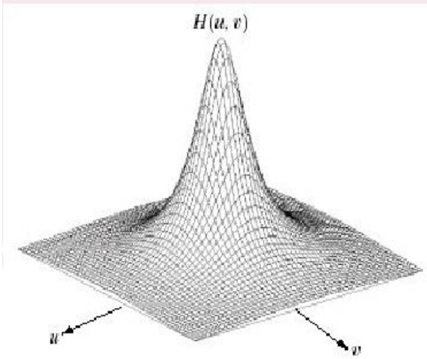
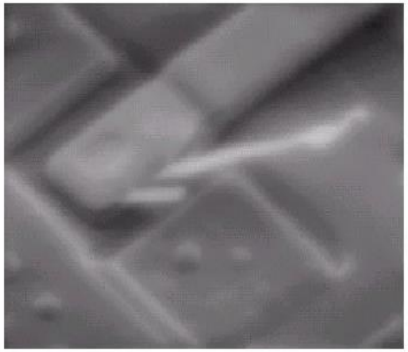


FIGURE 4.18 (a) Original image. (b)–(f) Results of filtering with Gaussian lowpass filters with cutoff frequencies set at radii values of 5, 15, 30, 80, and 230, as shown in Fig. 4.11(b). Compare with Figs. 4.12 and 4.15.

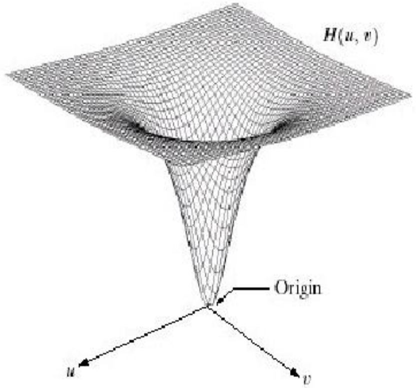
FILTRO PASSA-ALTA

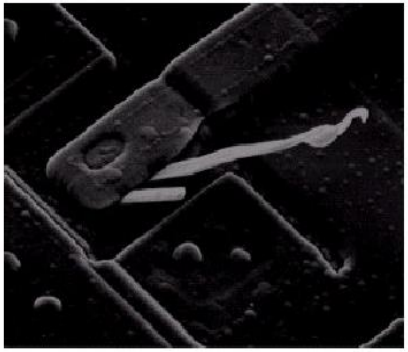
- **Filtro passa-baixa**



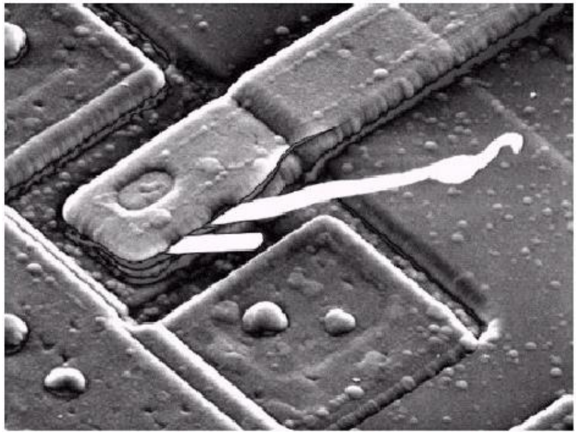


- **Filtro passa-alta**
- **Hpa(u,v)=1-Hpb(u,v)**





- **Filtro passa-alta+ constante**

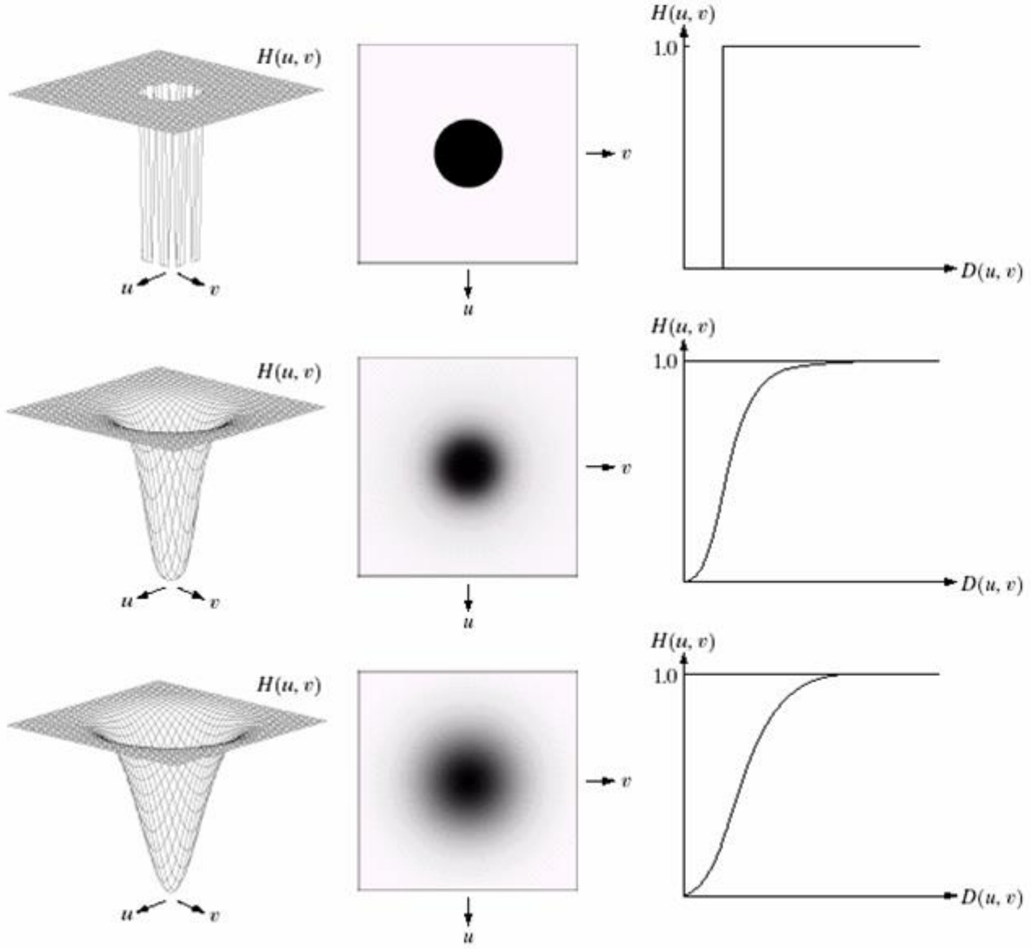


FILTRO PASSA-ALTA

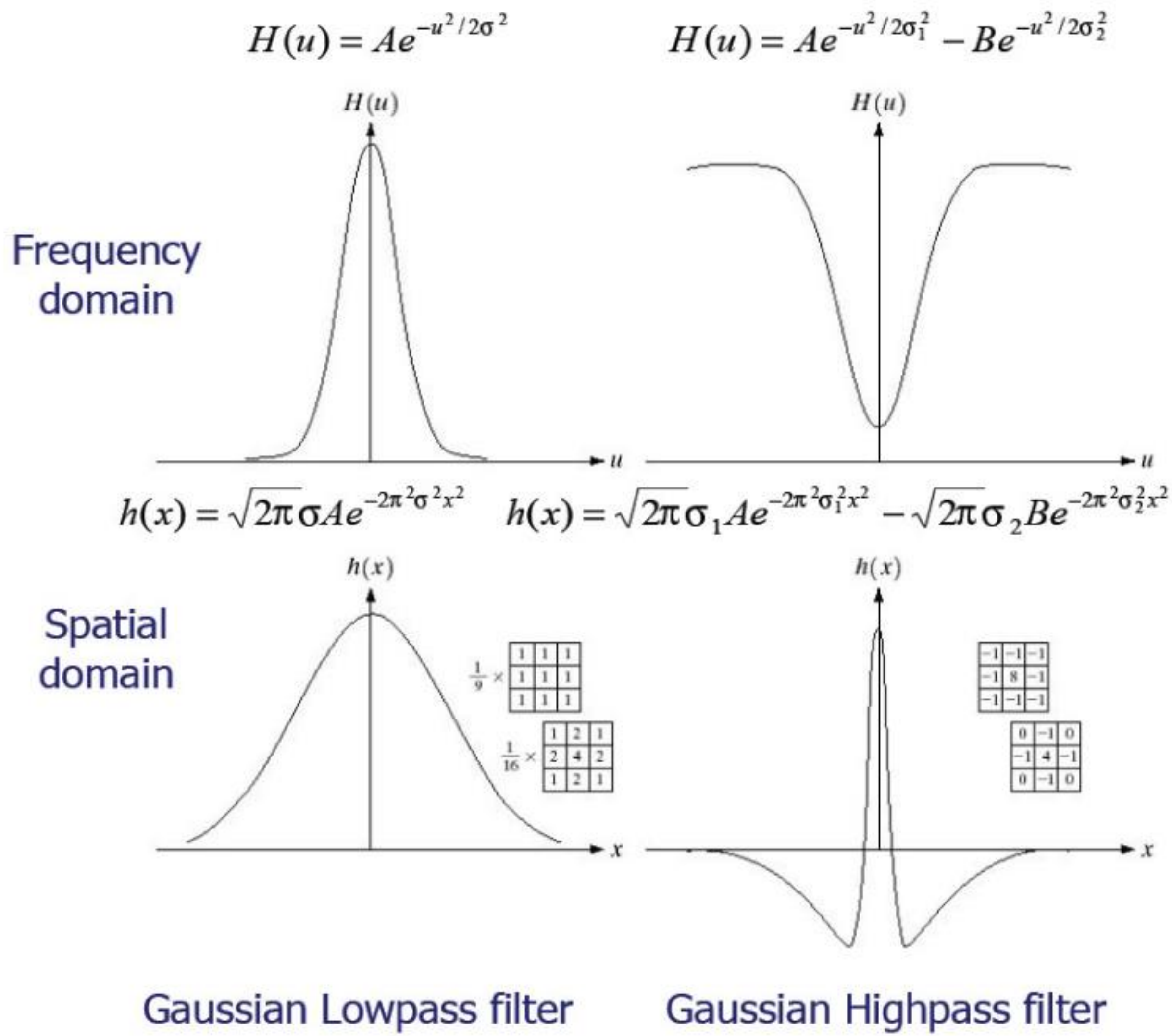
$H_{fpai}=1-H_{fpbi}$

$H_{fpab}=1-H_{fpbb}$

$H_{fpag}=1-H_{fpbg}$



FILTRO PASSA-ALTA



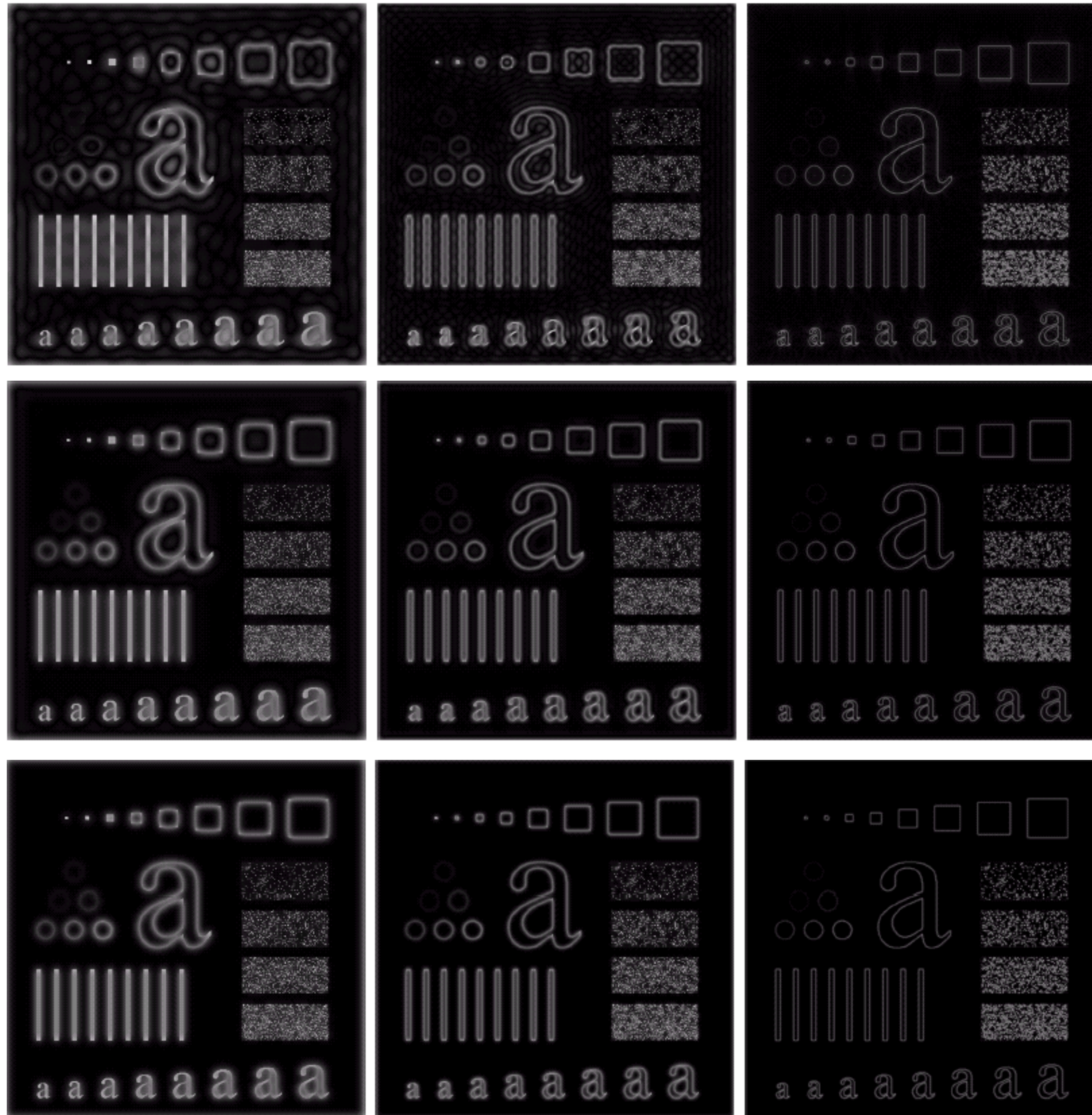
FILTRO PASSA-ALTA

$D_0 = 15$ $D_0 = 30$ $D_0 = 80$

Passa-alta Ideal

Passa-alta Butterworth

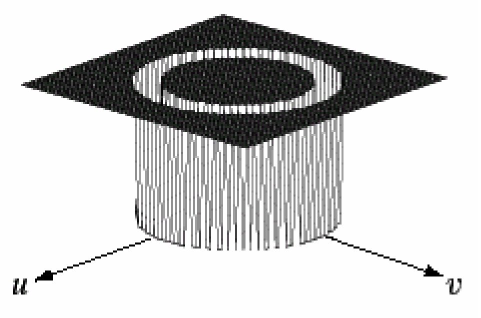
Passa-alta Gaussiano



PASSA-FAIXA

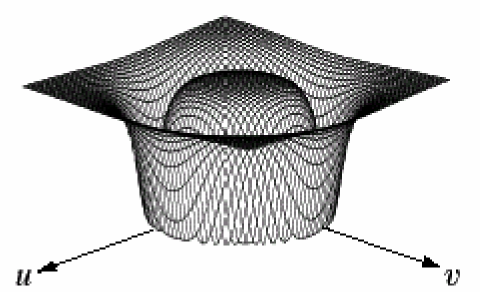
Ideal

$$H(u,v)=\begin{cases} 1 \text{ se } & D(u,v) < D_0 - W/2 \\ 0 \text{ se } & D_0 - W/2 \le D(u,v) \le D_0 + W/2 \\ 1 \text{ se } & D(u,v) > D_0 + W/2 \end{cases}$$



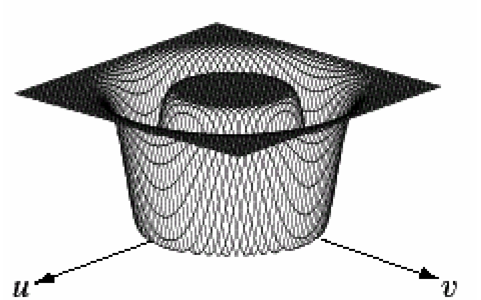
Butterworth

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[\dfrac{D(u,v)W}{D^2(u,v)-D_0^2}\right]^{2n}}$$



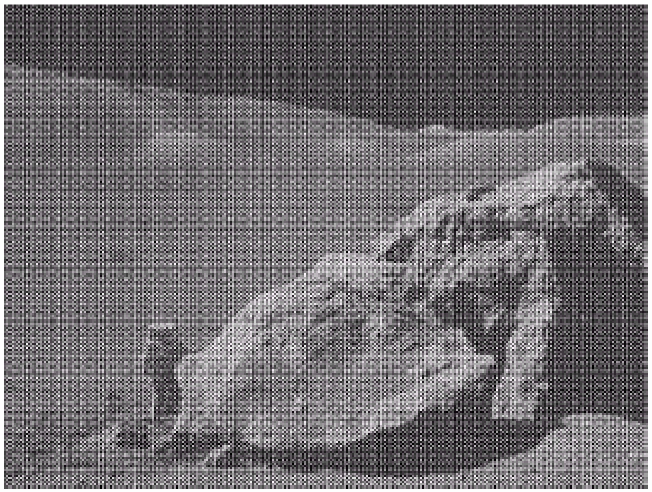
Gaussiano

$$H(u,v)=1-e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{D^2(u,v)-D_0^2}{D(u,v)W}\right]^2}$$

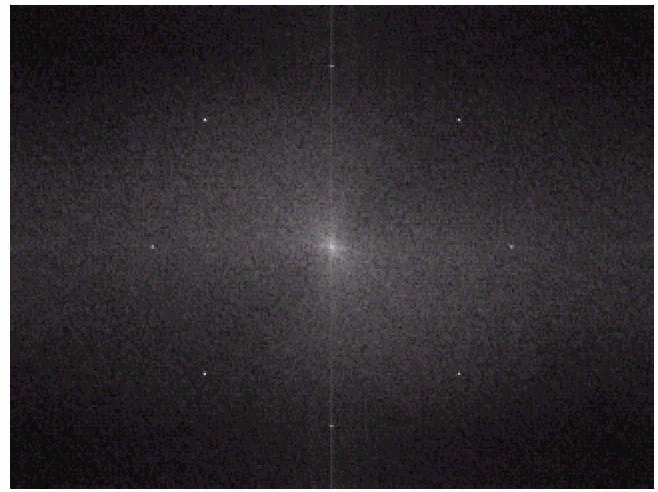


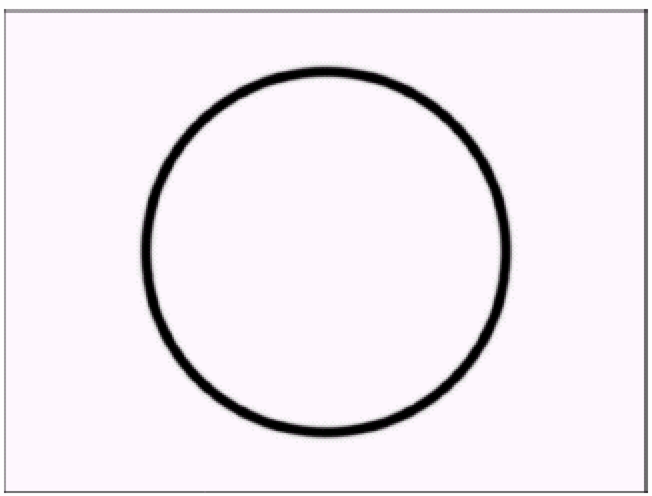
PASSA-FAIXA

imagem com ruído senoidal

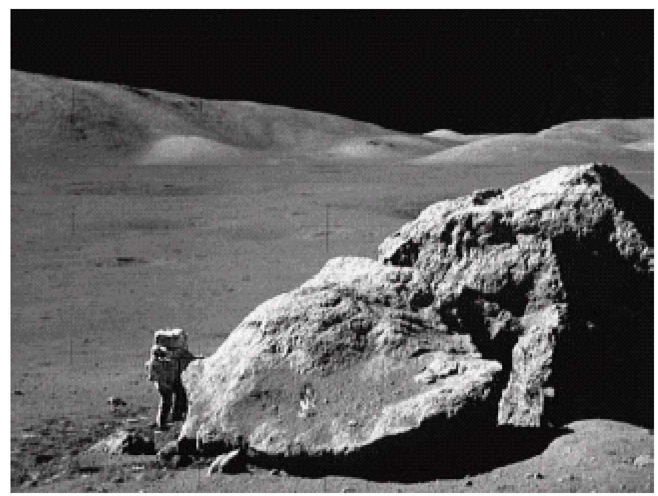


espectro da imagem





filtro rejeita-faixa de Butterworth



resultado da filtragem

REFERÊNCIAS

- **C. Solomon e T. Breckon, Fundamentals of Digital Image Processing: A Practical Approach with Examples in Matlab, John Wiley & Sons, 2011**

- **W. Burger e M. J. Burge, Principles of Digital Image Processing: Core Algorithms, Springer, 2009**