MLO – BI-SPOL-14

Výroková logika: syntax a sémantika výrokových formulí, pravdivostní ohodnocení, logický důsledek, ekvivalence a jejich zjišťování. Universální systém logických spojek, disjunktivní a konjunktivní normální tvary, úplné a minimální tvary.

Obsah

1 Výroková logika: syntax a sémantika výrokových formulí

1.1 Prvotní výrok a formule

Prvotní výrok je jednoduchá oznamovací věta, u které má smysl se ptát, zda je či není pravdivá. Prvotní výrok se označuje velkým tiskacím písmenem A, B..., kterým se říká **prvotní formule**.

1.2 Negace

($\neg$) - negace formule je pravdivá, právě když je formule nepravdivá.

1.3 Konjunkce

($\wedge$) - konjunkce dvou formulí je pravdivá tehdy, když jsou obě formule pravdivé.

1.4 Disjunkce

($\vee$) - disjunkce dvou formulí je pravdivá, právě když alespoň jedna z nich je pravdivá.

1.5 Implikace

($\Rightarrow$)

- implikace je nepravdivá tehdy, když předpoklad je pravdivý a závěr nepravdivý
- implikace je pravdivá tehdy, když neplatí předpoklad nebo platí závěr

1.6 Formule výrokové logiky

1.6.1 Jazyk výrokové logiky

- symboly pro prvotní formule A, B, ...
- logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow$
- závorky ()

1.6.2 Formule výrokové logiky

Je definovaná:

- prvotní formule je výroková formule
- jsou-li A a B výrokové formule, pak jsou i $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B)$ výrokové formule
- formule je řetězec symbolů sestavený podle předchozích 2 pravidel v konečně mnoha krocích

1.7 Ekvivalence

($\Leftrightarrow$) - ekvivalence dvou formulí je pravdivá právě tehdy, když obě mají stejnou pravdivostní hodnotu

2 Pravdivostní ohodnocení

Pravdivostní ohodnocení množiny prvotních výroků je funkce v z množiny prvotních formulí do množiny {0,1}.
v: $\{A_1, ..., A_n\} \rightarrow \{0, 1\}$

Je-li $v(\mathrm{A}) = 1$, řekne se, že A je **pravdivý při ohodnocení** v.
Je-li $v(\mathrm{A}) = 0$, řekne se, že A je **nepravdivý při ohodnocení** v.

3 Logický důsledek

Formule B je logickým důsledkem formule A, právě když pro každé ohodnocení v, pro které v(A) = 1, je i v(B) = 1.
Píše se A $\models$ B.

3.1 Vztah logického důsledku a logické ekvivalence

Pro každé dvě formule výrokové logiky A, B platí:

- $A \models B \wedge B \models A$ právě, když $A \Leftrightarrow B$ je tautologie
- $A \models B$ právě, když $A \Rightarrow B$ je tautologie
- $A \models B$ právě, když $A \wedge \neg B$ je kontradikce

4 Ekvivalence a jejich zjišťování

Formule A a B jsou **logicky ekvivaletní** právě tehdy, když pro každé ohodnocení v je v(A) = v(B). Píšeme $A \models B \wedge B \models A$

4.1 Zjišťování

- pomocí porovnání pravdivosti výroků
- úpravou formulí, převedením na sebe

5 Universální systém logických spojek

Množina logických spojek tvoří universální systém, právě když ke každé formuli existuje logicky ekvivaletní formule, která obsahuje pouze tyto spojky. Například:

- $\{\neg, \vee\}$
- $\{\neg, \wedge\}$
- $\{\neg, \Rightarrow\}$
- NAND $\{\uparrow\} = \neg(A \wedge B)$
- NOR $\{\downarrow\} = \neg(A \vee B)$

6 Disjunktivní a konjunktivní normální tvary

6.1 DNT - disjunktivní normální tvar

- **literál** je prvotní formule nebo negace prvotní formule
- **implikant** je literál nebo konjunkce několika literálů
- formule je v **DNT**, jestliže je implikant nebo disjunkce několika implikantů

ukázka:

- A, $\neg B$ - literál
- $A \wedge B$, $A \wedge \neg B$, $\neg B$ - implikant
- A, $(A \wedge \neg B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee \neg B$, $A \wedge \neg B$ - DNT

6.2 KNT - konjunktivní normální tvar

- **literál** je prvotní formule nebo negace prvotní formule
- **klausule** je literál nebo disjunkce několika literálů
- formule je v **KNT**, jestliže je klausulí nebo konjunkce několika klausulí

ukázka:

- A, ¬B - literál
- A∨B, A∨¬B, ¬B - klausule
- A, $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$, $A \vee \neg B$, $A \wedge \neg B$ - KNT

6.3 POZOR

Některé vybrané KNT jsou i DNT (a obráceně)! Například:

- A
- A∧B
- A∨B

6.4 Existence DNT a KNT

Ke každé formuli existuje formule logicky ekvivalentní, která je v DNT, a formule logicky ekvivaletní, která je v KNT. (Důkaz na slidu 11 přednáška 3 - BI-MLO)

7 Úplné a minimální tvary

- **Minterm** formule A je implikant, který obsahuje všechny prvotní formule vyskytující se v A
- **Maxtern** formule A je klausule, která obsahuje všechny prvotní formule, vyskytující se v A
- formule je v **úplném disjunktivním normálním tvaru**, jestliže je disjukcí mintermů.
- formule je v **úplném konjunktivním normálním tvaru**, jestliže je konjunkcí maxtermů.

7.1 Existence úplného DNT a KNT

Ke každé formuli existuje formule logicky ekvivaletní, která je v úplném DNT, a formule logicky ekvivaletní, která je v úplném KNT.

Úplný KNT i DNT libovolné formule je dán jednoznačně až na pořadí (literálů, mintermů, maxtermů). Pokud má formule n prvotních formulí, pak součet mintermů a maxtermů je 2^n.

7.1.1 Ukázka převodu na ÚDNT

(Na ÚKNT se to udělá obdobně, jediné co se liší jsou ty konjunkce a disjunkce)

- $(A \wedge B) \vee C$

- $((C \lor \neg C) \land (A \land B)) \lor C$
- $(C \land A \land B) \lor (\neg C \land A \land B) \lor C$
- $(C \land A \land B) \lor (\neg C \land A \land B) \lor (C \land (\neg A \lor A)$
- $(C \land A \land B) \lor (\neg C \land A \land B) \lor (C \land \neg A) \lor (C \land A)$
- $(C \land A \land B) \lor (\neg C \land A \land B) \lor (C \land \neg A \land (\neg B \lor B)) \lor (C \land A \land (\neg B \lor B))$
- $(C \land A \land B) \lor (\neg C \land A \land B) \lor (C \land \neg A \land \neg B) \lor (C \land \neg A \land B) \lor (C \land A \land \neg B) \lor (C \land A \land B)$

7.2 Ekvivalence ÚDNT a ÚKNT

Následující tvrzení jsou ekvivaletní:

- $A \models B \land B \models A$
- ÚDNT obsahují stejné mintermy
- ÚKNT obsahují stejné maxtermy

7.3 Logický důsledek a ÚDNT/ÚKNT

Vezmou se dvě formule A a B, které obsahují stejné prvotní formule. A_d, A_k, B_d, B_d jsou jejich ÚDNT a ÚKNT. Následující tvrzení jsou ekvivaletní

- $A \models B$
- Všechny mintermy A_d jsou obsaženy v B_d
- Všechny maxterny B_k jsou obsaženy v A_k