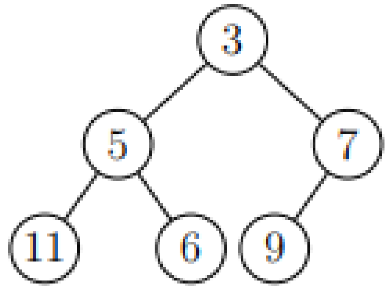
AG1 – BI-SPOL-5

Binární haldy, binomiální haldy. Vyhledávací stromy a jejich vyvažování. Tabulky s rozptylováním (hešováním).

Obsah

1 Binární haldy



Binární minimová halda je datová struktura tvaru binárního stromu, v jehož každém vrcholu x je uložen jeden klíč $k(x)$ a která splňuje tyto dvě vlastnosti:

- **Tvar haldy**: Strom má všechny hladiny kromě poslední plně obsazené. Poslední hladina je zaplněna od levého okraje směrem k pravému.
- **Haldové uspořádání**: Je-li v vrchol a s jeho syn, plat $k(v) \leq k(s)$.
- Binární halda s n prvky má $\lfloor \log n \rfloor + 1$ hladin.
- Binární halda s n prvky má $\lceil n/2 \rceil$ listů a $\lfloor n/2 \rfloor$ vnitřních vrcholů.

1.1 Vložení prvku do haldy

- $O(\log n)$
- Tvar haldy dovoluje přidat okamžitě nový prvek na konec nejspodnější hladiny.
- Pokud by již byla plná, založíme novou hladinu.
- Pokud je haldové uspořádání mezi novým listem l a jeho otcem o v pořádku, můžeme skončit. Pokud ne, prohodíme $k(l)$ a $k(o)$.
- Tím ale může nastat problém mezi klíčem vrcholu o a klíčem otce vrcholu $o \implies$ prohodíme a opakujeme BubbleUp

1.2 Odstranění minima

- $O(\log n)$
- Odstranění kořene r stromu haldy by porušilo vlastnost Tvar haldy.
- Prohoď klíče vrcholů *root* a *last*, odstraň vrchol *last* a potom přesuň klíč z *root* na správné místo tak, aby opět platilo haldové uspořádání. BubbleDown

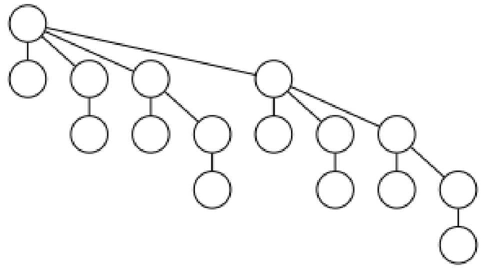
1.3 Reprezentace pomocí pole

Kořen haldy uložíme do nultého prvku pole ($array[0]$). Poté pro každý prvek $array[n]$ jsou jeho následníci uloženi v $array[2n + 1]$ a $array[2n + 2]$.

2 Binominální strom

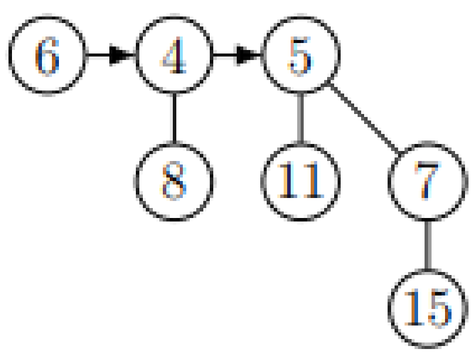
Binomiální strom řádu k (značíme B_k) je uspořádaný (záleží na pořadí synů) zakořeněný strom, pro který platí:

- B_0 je tvořen pouze kořenem.
- Pro $k \geq 1$ získáme B_k ze stromů $B_0, B_1, ..., B_k1$ tak, že přidáme nový kořen a kořeny těchto stromů uděláme (takto popořadě) syny nového kořene.



Algoritmus BHMergeTree
Vstup: Binomiální stromy T_1, T_2 takové,
že řád(T_1) = řád(T_2)
Výstup: Výsledný strom T_{out}
(1) Pokud $k(\text{kořen}(T_1)) \leq k(\text{kořen}(T_2))$:
(2) Připoj kořen(T_2) jako nejpravějšího syna
pod kořen(T_1).
(3) $T_{out} := T_1$
(4) Jinak:
(5) Připoj kořen(T_1) jako nejpravějšího syna
pod kořen(T_2).
(6) $T_{out} := T_2$

3 Binominální halda



Binomiální halda obsahující n prvků se skládá ze souboru binomiálních stromů $T = T_1, ..., T_i$, kde

- Uchovávané prvky jsou uloženy ve vrcholech stromů T_i. Prvek uložený ve vrcholu $v \in V(T_i)$ značíme $k(v)$.
- Pro každý strom T_i platí tzv. haldové uspořádání, neboli pro každý $v \in V(T_i)$ a jeho syny $s_1, ..., s_k$ platí $k(v) \leq k(s_j)$, $j = 1, ..., k$.
- V souboru T se žádný řád binomiálního stromu nevyskytuje více než jednou.
- Soubor stromů T je uspořádán vzestupně podle jejich řádů (tedy podle stupňů jejich kořenů a tedy podle velikosti).

Binomiální strom B_k se vyskytuje v souboru stromů n-prvkové binomiální haldy právě tehdy, když je v dvojkovém zápisu čísla n nastavený k-tý nejnižší bit na 1.

n-prvková binomiální halda sestává z $O(\log n)$ binomiálních stromů.

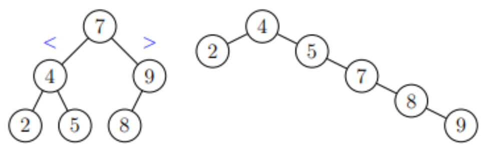
Složitost

- Vložení $O(\log n)$
- Nalezení minima při udržení pointeru na minimum: $O(1)$, jinak $O(\log n)$
- Extrakce minima $O(\log n)$
- Merge $O(\log n)$
- Build $O(n)$
- Delete $O(\log n)$

Merge hald probíhá stejně, jako sčítání dvou binárních čísel.

4 Vyhledávací stromy

4.1 BVS



Binární vyhledávací strom (BVS) je binární strom, v jehož každém vrcholu v je uložen unikátní klíč $k(v)$. Přitom pro každý vrchol v musí platit:

- Pokud $a \in L(v)$, pak $k(a) < k(v)$.
- Pokud $b \in R(v)$, pak $k(b) > k(v)$.

Binární vyhledávací strom nazveme dokonale vyvážený, pokud pro každý jeho vrchol v platí $|L(v)| - |R(v)| \leq 1$.

Složitost základních operací na BVS je průměrně $O(\log n)$, ale může dosáhnout až $O(n)$.

4.2 AVL

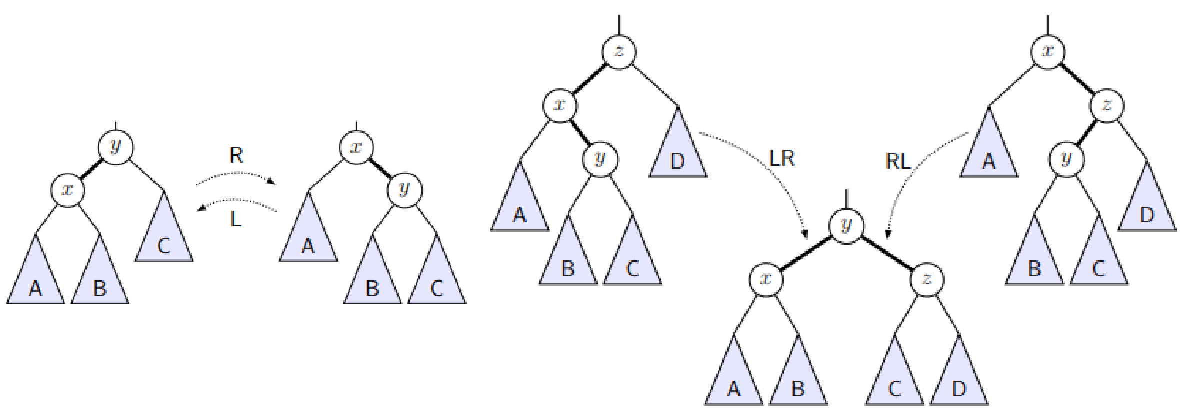
Binární vyhledávací strom nazveme AVL stromem, pokud pro každý jeho vrchol v platí $h(l(v)) \;\; h(r(v)) \leq 1$.

Budeme v každém vrcholu v udržovat číslo $(v) = h(r(v)) - h(l(v))$, které nazveme znaménko vrcholu v.

V korektním AVL stromu může nabývat jen těchto hodnot:

- (v) = +1 (pravý podstrom hlubší) – takový vrchol značíme $\oplus$,
- (v) = −1 (levý podstrom hlubší) – značíme $\ominus$,
- (v) = 0 (oba podstromy stejně hluboké) – značíme $\odot$.

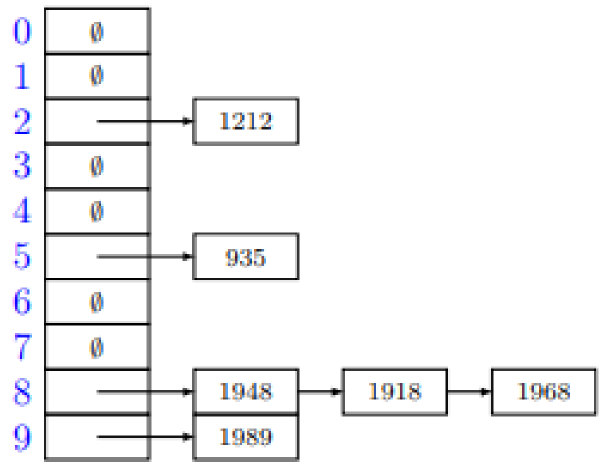
Složitost základních operací na AVL je $O(\log n)$.



5 Hešovací tabulky

5.1 Hešování s řetízky

Prvky jsou ukládány do pole či spojového seznamu odpovídající příslušnému heši.



5.2 Otevřená adresace

Prvky jsou ukládány na další následující místo v poli získané za pomoci dvojité hešovací funkce. V případě mazání prvku se zamění za značku smazaného prvku, který značí možnou existenci dalších prvků s ekvivalentním hešem. Následně, pokud narazíme na značku smazaného prvku při vkládání, tak se prvek vloží na místo značky. V případě, že na tuto značku narazíme při vyhledávání, tak pokračujeme na další iteraci algoritmu, protože jestli při uložení byla tato pozice již zaplněná, může hledaný prvek být jinde.

Dvojité hešování:

Prohledávací posloupnost je dána funkcí $h(k, i) = (f(k) + i \cdot g(k)) \bmod m$, kde $f : U \to \{0, ..., m-1\}$ a $g : U\{1, ..., m-1\}$ jsou dvě různé hešovací funkce, m je prvočíslo a i je počet neúspěšných pokusů v aktuální operaci Protože je m prvočíslo, je s ním $g(k)$ vždy nesoudělné a posloupnost navštíví každou přihrádku právě jednou. m odpovídá velikosti pole, které se používá pro ukládání.

```
OpenInsert(k)
Pro i = 0, ..., m − 1:
    j := h(k, i)
    Pokud A[j] = ∅:
        A[j] := k a skonči
Ohlaš zaplnění hešovací tabulky
```