LIN – BI-SPOL-12

Soustavy lineárních rovnic: Frobeniova věta a související pojmy, vlastnosti a popis množiny řešení, Gaussova eliminační metoda.

Obsah

1 Frobeniova věta

Definice 1. *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$. ***Hodností matice*** $\mathbb{A}$ *nazýváme dimenzi lineárního obalu souboru řádků matice* $\mathbb{A}$ *(jako vektorů z* $T^{1,n}$*) a značíme ji* $h(\mathbb{A})$*:*

$$h(\mathbb{A}) = dim\langle \mathbb{A}_{1:}, \ldots, \mathbb{A}_{m:} \rangle. \tag{1}$$

Věta 2 (Frobeniova věta)**.** *Nechť* $\mathbb{A} \in T^{m,n}$*.*

1. *Soustava* m *lineárních rovnich o* n *neznámých* $\mathbb{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$ *je řešitelná, tj.* $S \neq \theta$*, právě tehdy, když*

$$h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{A}|\mathrm{b}).$$

2. *Je-li* $h(\mathbb{A}) = h$*, pak množina řešení* $\mathbb{A}\mathrm{x} = \theta$ *je podprostor dimenze* $n - h$*, tedy existuje LN soubor vektorů* $(\mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{z}_{n-h})$ *v* $T^{n,1}$ *takový, že*

$$S_0 = \begin{cases} \{\theta\}, & \textit{pokud } n = h, \\ \langle \mathrm{z}_1, \ldots, \mathrm{z}_{n-h} \rangle, & \textit{pokud } h < n. \end{cases}$$

   Je-li navíc $h(\mathbb{A}|\mathrm{b}) = h$*, potom platí:*

$$S = \widetilde{\mathrm{x}} + S_0,$$

   kde $\widetilde{\mathrm{x}}$ *je* ***partikulární řešení*** $\mathbb{A}\widetilde{\mathrm{x}} = \mathrm{b}$*.*

2 Vlastnosti a popis množiny řešení

Soustava lineárních rovnic (zapsaných v HST matice $\left(\mathbb{A}\mathrm{x} \mid \mathrm{b}\right)$) může mít:

- Žádné řešení – poslední sloupec je hlavní
- Jedno řešení – všechny sloupce, kromě posledního jsou hlavní
- Více řešení – sloupce jsou hlavní nebo vedlejší (poslední sloupec nesmí být hlavní) Pro popis množiny řešení se nalezne obal LN souboru možných řešení. *viz. Frobeniova věta*

3 Soustavy lineárních rovnic

Definice 3. *Nechť* $n, m \in \mathbb{N}$ *a pro všechna* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *a* $j \in \{1, \ldots, n\}$ *platí, že* $a_{ij} \in \mathbb{R}$ *a* $b_i \in \mathbb{R}$*. Systém rovnic*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{2}$$

nazýváme ***soustavou*** m ***lineárních rovnic o*** n ***neznámých*** $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$*.*
Číslu aij říkáme j***tý koeficient*** i***té rovnice****.*

Množinu všech uspořádaných ntic $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, pro které po dosazení do (2) je splněno všech* m *rovnic, nazýváme* ***množinou řešení soustavy*** *a značíme ji* S*. Platí-li* $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$*, říkáme, že soustava (2) je* ***homogenní****. Není-li soustava homogenní, je* ***nehomogenní****.*

3.1 Horní stupňovitý tvar

Definice 4. *O matici $\mathbb{D} \in R^{m,n}$ řekneme, že je v* ***horním stupňovitém tvaru****, jestliže všechny řádky jsou nulové, nebo existuje $k \in \hat{m}$ tak, že řádky 1 až k matice $\mathbb{D}$ jsou nenulové a řádky $k+1$ až m jsou nulové a jestliže platí následující:*

Označme pro každé $i \in \hat{k}$ index nejlevějšího nenulového prvku v itém řádku jako j_i, tj.

$$j_i = \min \{\ell \in \hat{n} | \mathbb{D} \neq 0\}.$$

Potom platí $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k$.

Je-li matice v horním stupňovitém tvaru, potom sloupcům s indexy $j_1, j_2, \ldots, j_k$ říkáme ***hlavní sloupce****, ostatním říkáme* ***vedlejší sloupce****.*

O soustavě $\mathbb{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$ řekneme, že je v horním stupňovitém tvaru, pokud matice této soustavy $(\mathbb{A}|\mathrm{b})$ je v horním stupňovitém tvaru.

3.2 Postup pro řešení SLR

- Převedu SLR do matice $(\mathbb{A}|\mathrm{b})$.
- Převedu do HST pomocí GEM.
- Poslední sloupec hlavní → nemá řešení.
- Jinak:
  - Najdu volné a vázané proměnné (odpovídá vedlejším a hlavním sloupcům).
  - Pro partikulární řešení zvolim volné proměnné libovolně a dopočítám vázané proměnné.
  - Pro S_0 zvolim libovolnou bázi (třeba standardní).
  - Pro každý bazický vektor dopočítám z homogenní rovnice vázané proměnné a dostanu bázi S_0.
  - Řešením je $S = \widetilde{\mathrm{x}} + S_0$, kde S_0 je lineární obal báze.

4 Gaussova eliminační metoda

Cílem GEM je převést matici do horního stupňovitého tvaru, pomocí úprav $(G1)$, $(G2)$ a $(G3)$.

$(G1)$ Prohození dvou řádků.

$(G2)$ Vynásobení jednoho řádku nenulovým číslem.

$(G3)$ Přičtení jednoho řádku k jinému.