ZDM – BI-SPOL-32

Metody řešení rekurentních rovnic, sestavování a řešení rekurentních rovnic při analýze časové složitosti algoritmů.

Obsah

1 Rekurentní rovnice

1.1 Obecná rekurentní rovnice

Obecnou rekurentní rovnicí rozumíme jakýkoliv vztah typu

$$a_{n+k} = f(a_(n+k-1), a_(n+k-2), ..., a_n, n).$$

Nadále se ale budeme spíše zabývat lineárními rekurentními rovnicemi řádu $k \in N$:

$$a_{n+k} + c_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \; + c_1(n)a_{n+1} + c_0(n)a_n = b_n \text{ pro každé } n \geq n_0,$$

kde:

- $n \geq n_0$
- $n_0 \in Z$
- $c_i(n)\ pro\ i = 0, ..., k-1$ jsou funkce $Z \to R$
- $c_0(n) \neq 0$
- $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ (pravá strana rovnice)
- $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ (řešení)
- pokud $\{\bar{a_n}\}_{n=n_0}^{\infty}$ je řešení, potom je $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ řešením této rovnice právě tehdy, když se dá zapsat jako $\{a_n\}_{n=n_0}^{\infty} = \{\bar{a_n}\}_{n=n_0}^{\infty} + \{\tilde{a_n}\}_{n=n_0}^{\infty}$, kde $\{\tilde{a_n}\}_{n=n_0}^{\infty}$ je nějaké řešení přidružené homogení rovnice.

1.2 Rekurentní rovnice s konstantími koeficienty (LRRsKK)

Lineární rekurentní rovnice řádu k s konstantními koeficienty je libovolná rekurentní rovnice ve tvaru:

$$a_{n+k} + c_{k1}a_{n+k1} + \; + c_1a_{n+1} + c_0a_n = b_n$$

- $n \geq n_0$
- $n_0 \in Z$
- $c_i \in R$ pro $i = 0, ..., k1$ jsou konstanty
- $c_0 \neq 0$
- $\{b_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ (pravá strana rovnice)
- $p(\lambda) = \lambda^k + c_{k1}\lambda^{k1} + \; + c_1\lambda + c_0$ je charakteristický polynom této rovnice
- λ je chararistické, či vlastní číslo
- $\{\lambda\}_{n=n_0}^{\infty}$ je řešení homogení LRRsKK, pokud je λ vlastní číslo této LRRsKK
- pokud existuje k ruzných λ_i, potom $\{\lambda\}_{n=n_0}^{\infty}$ tvoří bázi prostoru řešení dané rovnice (stačí najít prvních k členů)

1.3 Moivre-ova věta

$\alpha \pm i\beta = r[\cos(\Phi) \pm i\sin(\Phi)] \implies (\alpha \pm i\beta)^n = r^n[\cos(n\Phi) \pm i\sin(n\Phi)]$

Tuto větu použijeme při hledání dvou nezávislých realných posloupností.

2 Řešení

2.1 Substituční metoda

- Odhadneme (uhádneme) tvar řešení (=indukční hypotéza).
- Pomocí matematické indukce nalezneme konstanty a ověříme správnosti odhadnutého řešení

- Využívá se k odhadu horní a dolní meze

Uvažujme rovnici $t(n) = 2t(\lfloor n/2 \rfloor) + n$. Jako horní odhad řešení zkusme $t(n) \leq cn \log n$, kde $c > 0$ je vhodně zvolená konstanta. Indukcí dokážme správnost odhadu, tedy že pro řešení rovnice platí $t(n) = O(n \log n)$.

Indukční krok (ověření, že $t(n) \leq cn \log n$ vyhovuje rekurenci $t(n) = 2t(\lfloor n/2 \rfloor) + n$) Předpokládejme, že platí pro $\lfloor n/2 \rfloor$ a dosaďme $t(\lfloor n/2 \rfloor) \leq c\lfloor n/2 \rfloor \log \lfloor n/2 \rfloor$ do počáteční rovnice. Dostaneme

$$\begin{aligned}
t(n) &\leq 2(c\lfloor n/2 \rfloor \log \lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&= cn \log (n/2) + n \\
&= cn \log n - cn \log 2 + n \\
&= cn \log n - cn + n \\
&= cn \log n - (c-1) \cdot n \\
&\leq cn \log n, \text{ pokud } c \geq 1
\end{aligned}$$

2.2 Iterační metoda

- Expandujeme rovnici dle iterací a získáme rozvoj na konečnou řadu a zkusíme najt aritmetickou či geometrickou posloupnost
- Využívá se k odhadu horní a dolní meze

Uvažujme rovnici $t(n) = 3t(\lfloor n/4 \rfloor) + n$ Protože platí $\lfloor \lfloor n/4 \rfloor /4 \rfloor = \lfloor n/4^2 \rfloor$ atd., postupnou iterací dostaneme

$$\begin{aligned}
t(n) &= n + 3t(\lfloor n/4 \rfloor) \\
&= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 3^2 t(\lfloor n/4^2 \rfloor) \\
&= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 3^2 \lfloor n/4^2 \rfloor + 3^3 t(\lfloor n/4^3 \rfloor) \\
&= \ldots \\
&= n + 3\lfloor n/4 \rfloor + 3^2 \lfloor n/4^2 \rfloor + 3^3 \lfloor n/4^3 \rfloor) + \; + 3^{\log_4 n} \Theta(1).
\end{aligned}$$

Po zanedbání zaokrouhlovacích chyb a doplněním na nekonečnou konvergentní geometrickou řadu dostaneme $t(n) \leq n \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^i = 4n$.

2.3 Mistrovská metoda

Nech $a \geq 1 ab > 1$ jsou konstanty, $f(n)$ funkce jedné proměnné. Uvažujme rekurentní rovnici: (zanedbáváme ceil a floor)

$$t(n) = at(n/b) + f(n)$$

Pak $t(n)$ má následující řešení:

1. Pokud $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ pro nějakou konstantu $\epsilon > 0$, pak $t(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
2. Pokud $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, pak $t(n) = \Theta(n^{\log_b a} \mathrm{log} n)$.
3. Pokud $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ pro nějakou konstantu $\epsilon > 0$ a pokud $af(n/b) \leq cf(n)$ pro nějakou konstantu $c < 1$ a všechna $n \geq n_0$, pak $t(n) = \Theta(f(n))$.
4. Pokud je rozdíl mezi funkcemi menší než polynomiální, nelze tuto metodu použít!

Příklad 1

Rovnice $t(n) = 6t(n/4) + n$.
$a = 6, b = 4$

$n^{\log_4 6} \doteq n^{1,3} = \Omega(n) \implies f(n) = O(n^{log_4 6-0,1}) \implies$ případ (1).
Čili $t(n) = \Theta(n^{\log_4 6})$.

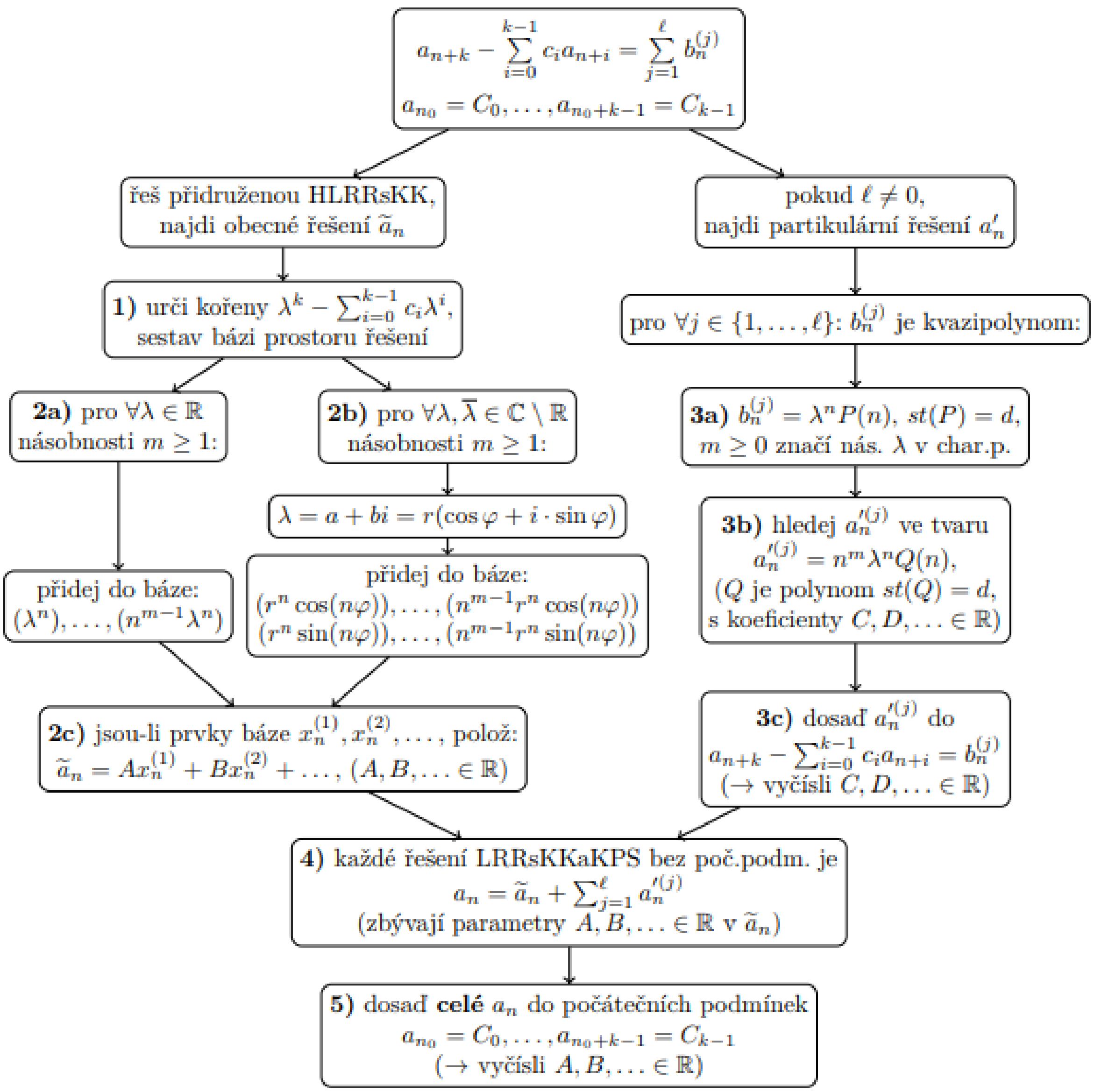
Příklad 2

Rovnice (MergeSort) $t(n) = 2t(n/2) + n$
$a = 2, b = 2$
$n^{\log_2 2} = n = \Theta(n) \implies$ případ (2).
Čili $t(n) = \Theta(n \log n)$.

Příklad 3

Rovnice $t(n) = 3t(n/4) + n^2$
$a = 3, b = 4$
$n^{log_4 3} \doteq n^{0,7} = o(n^2)$ a platí, že $3 \cdot (\frac{n}{4})^2 \leq cn^2$ pro nějakou $c < 1 \implies$ případ (3).
Čili $t(n) = (n^2)$

$f(n) = O(g(n))$	$\exists c \in \mathbb{R}^+$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :$	$f(n) \leq c \cdot g(n)$
$f(n) = o(g(n))$	$\forall c \in \mathbb{R}^+$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :$	$f(n) < c \cdot g(n)$
$f(n) = \Omega(g(n))$	$\exists c \in \mathbb{R}^+$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :$	$c \cdot g(n) \leq f(n)$
$f(n) = \omega(g(n))$	$\forall c \in \mathbb{R}^+$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :$	$c \cdot g(n) < f(n)$
$f(n) = \Theta(g(n))$	$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :$	$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$



$a_{n+k} - \sum_{i=0}^{k-1} c_i a_{n+i} = \sum_{j=1}^{\ell} b_n^{(j)}$
$a_{n_0} = C_0, \ldots, a_{n_0+k-1} = C_{k-1}$
řeš přidruženou HLRRsKK, najdi obecné řešení $\widetilde{a}_n$
pokud $\ell \neq 0$, najdi partikulární řešení a'_n
1) urči kořeny $\lambda^k - \sum_{i=0}^{k-1} c_i \lambda^i$, sestav bázi prostoru řešení
pro $\forall j \in \{1, \ldots, \ell\}$: $b_n^{(j)}$ je kvazipolynom:
2a) pro $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ násobnosti $m \geq 1$:
2b) pro $\forall \lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ násobnosti $m \geq 1$:
3a) $b_n^{(j)} = \lambda^n P(n)$, $st(P) = d$, $m \geq 0$ značí nás. λ v char.p.
$\lambda = a + bi = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$
3b) hledej $a_n'^{(j)}$ ve tvaru $a_n'^{(j)} = n^m \lambda^n Q(n)$, ($Q$ je polynom $st(Q) = d$, s koeficienty $C, D, \ldots \in \mathbb{R}$)
přidej do báze: $(\lambda^n), \ldots, (n^{m-1}\lambda^n)$
přidej do báze: $(r^n \cos(n\varphi)), \ldots, (n^{m-1} r^n \cos(n\varphi))$ $(r^n \sin(n\varphi)), \ldots, (n^{m-1} r^n \sin(n\varphi))$
2c) jsou-li prvky báze $x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \ldots$, polož: $\widetilde{a}_n = A x_n^{(1)} + B x_n^{(2)} + \ldots, (A, B, \ldots \in \mathbb{R})$
3c) dosaď $a_n'^{(j)}$ do $a_{n+k} - \sum_{i=0}^{k-1} c_i a_{n+i} = b_n^{(j)}$ ($\rightarrow$ vyčísli $C, D, \ldots \in \mathbb{R}$)
4) každé řešení LRRsKKaKPS bez poč.podm. je $a_n = \widetilde{a}_n + \sum_{j=1}^{\ell} a_n'^{(j)}$ (zbývají parametry $A, B, \ldots \in \mathbb{R}$ v $\widetilde{a}_n$)
5) dosaď **celé** a_n do počátečních podmínek $a_{n_0} = C_0, \ldots, a_{n_0+k-1} = C_{k-1}$ ($\rightarrow$ vyčísli $A, B, \ldots \in \mathbb{R}$)