MLO – BI-SPOL-12

Predikátová logika: jazyk, interpretace, pravdivost formulí, logický důsledek a ekvivalence. Formalizace matematických tvrzení a jejich negace. Teorie a jejich modely (např. uspořádání).

Obsah

1 Jazyk predikátové logiky

Jazyk obsahuje *logické symboly* a *mimologické symboly L*.

- symboly pro *proměnné* (x, y, z)
- symboly pro *logické spojky* ($\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow$)
- symboly pro *kvantifikátory* vždy následuje proměnná
  - obecný - "všichni" $\forall$
  - existenční - "některé/existuje" $\exists$
- pomocné symboly - závorky
- symboly pro *konstanty* (K, S, …)
- symboly pro *predikáty* (p, q, r) - dána četnost
- symboly pro *funkce* $(f, g, \ldots)$

1.1 Term

Řetězec symbolů se nazývá `term` jestliže vznikne použitím těchto pravidel v konečně mnoho krocích:

- každá proměnná a konstanta je term
- jsou-li $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termy a f je n-ární funkční symbol, potom $f(t_1, \ldots, t_n)$ je term

1.2 Formule

`Formule` je posloupnost symbolů, která vznikne aplikací následujících pravidel v konečné mnoha krocích:

- je-li n-ární predikátový symbol a $t_1, ..., t_n$ jsou termy, pak $p(t_1, ..., t_n)$ je formule - atomická formule
- jsou-li A a B formule, pak $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B) \ldots$ jsou formule
- je-li x proměnná a A formule, pak $(\forall x)$A a $(\exists x)$A jsou formule

1.3 Volné a vázané proměnné

- podformule B je část formule A, která je sama formulí
- proměnná x má vázaný výskyt v A právě, když se vyskytuje v její podformuli ve tvaru $(\forall x)B(x)$ nebo $(\exists x)B(x)$
- výskyt proměnné v A, který není vázaný, je volný výskyt
- uzavřená formule obsahuje pouze vázané proměnné
- otevřená formule obsahuje pouze volné proměnné

2 Interpretace jazyka

Interpretace (realizace, struktura) M $= < M, \ldots, K_M, \ldots, p_M, \ldots, f_M, \ldots >$ jazyka L obsahuje:

- neprázdnou množinu M, kterou nazýváme universum interpretace,
- je-li K konstanta, pak její interpretaci $K_M \in M$
- je-li p n-ární predikát, pak n-ární relaci $p_M \subseteq M^n \to M$ jako jeho interpretaci
- je-li f funkce mající n argumentů, pak funkci $f_M : M^n \to M$ jako její interpretaci

Jeden jazyk může mít více interpretací

3 Pravdivost formulí

L je jazyk a M je jeho interpretace

- ohodnocení proměnných je funkce e z množiny proměnných, které každé volné proměnné přiřazuje nějaký prvek univerza M
- výrazem $t[e]$ označujeme hodnotu termu t při ohodnocení e.
  - je-li term t proměnná x, pak $t[e] = e(x)$
  - je-li n-ární funkční symbol a term t je $f(t_1, ..., t_n)$, pak $t[e] = f(t_1[e], ..., t_n[e])$
- výraz e(x/m) se označuje hodnocení, které všem proměnným přiřadí stejnou hodnotu jako e, jenom e(x) = m

Pravdivost formule v interpretaci M při ohodnocení e se definuje indukcí podle složitosti formule Formule

i) $\mathcal{M} \models p(t_1, ..., t_n)[e]$, právě když $\langle t_1[e], ..., t_n[e] \rangle \in p_{\mathcal{M}}$

ii) $\mathcal{M} \models \neg A[e]$, právě když $\mathcal{M} \not\models A[e]$,

iii) $\mathcal{M} \models (A \wedge B)[e]$, právě když $\mathcal{M} \models A[e]$ a $\mathcal{M} \models B[e]$,

iv) $\mathcal{M} \models (A \vee B)[e]$, právě když $\mathcal{M} \models A[e]$ nebo $\mathcal{M} \models B[e]$,

v) $\mathcal{M} \models (A \Rightarrow B)[e]$, právě když $\mathcal{M} \not\models A[e]$ nebo $\mathcal{M} \models B[e]$,

vi) $\mathcal{M} \models (A \Leftrightarrow B)[e]$, právě když $\mathcal{M} \models A[e]$ právě tehdy, když $\mathcal{M} \models B[e]$,

vii) $\mathcal{M} \models (\forall x)A[e]$, právě když pro každý prvek m z M je $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$,

viii) $\mathcal{M} \models (\exists x)A[e]$, právě když pro nějaký prvek m z M je $\mathcal{M} \models A[e(x/m)]$.

Figure 1: Tarského definice pravdy

A je pravdivá (platná) v interpretaci M, právě když pro každé ohodnocení e je pravdivá, tj. $M \models A[e]$.
Formule A je splnitelná, právě když v nějaké interpretaci M pro nějaké ohodnocení e je pravdivá.
A je kontradikce, právě když není splnitelná.

4 Logická ekvivalence, logický důsledek

- A a B jsou logicky ekvivaletní, $A \models B \wedge B \models A$, právě když pro každou interpretaci M a pro každé ohodnocení e platí: $M \models A[e]$
- B je logickým důsledkem A, $A \models B$, právě když pro každou interpretaci M a pro každé ohodnocení e platí: jestliže $M \models A[e]$, pak $M \models B[e]$

5 Příklad matematického příkladu

- $(\exists u)(x = u + u)$ - x je sudé = negace = $(\forall u)\neg(x = u + u)$
- $\neg(\exists u)(x = u + u)$ - x je liché
- $(\exists x)(x = y * z)$ - x dělí y

6 Teorie a Model

- teorie je množina uzavřených formulí
- interpretace M jazyka L je modelem T, jestliže každá formule platí v M
- formule A je logický důsledek teroie T, jestliže v každém modelu teorie T platí A
- teorie T je splnitelná, právě když má model

Teorie ekvivalence:

- L = r(x,y). Predikát r(x, y) je ekvivalence, jestliže platí
  - R: $(\forall x)r(x,x)$ - reflexifita
  - T: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(r(x,y) \wedge r(x,y) \Rightarrow r(x,z))$ - tranzitivita
  - S $(\forall x)(\forall y)(r(x,y) \Rightarrow r(y,x))$ - symetrie

Teorie neostrého uspořádání

- L = q(x, y). Pro teorii neostrého uspořádání platí následující axiomy
  - R: $(\forall x)r(x,x)$ - reflexifita
  - T: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(r(x,y) \wedge r(y,z) \Rightarrow r(x,z))$ - tranzitivita
  - As $(\forall x)(\forall y)(r(x,y) \wedge r(y,x) \Rightarrow (x = y))$ - slabá asymetrie

Teorie ostrého uspořádání

- pro teorii ostrého uspořádání platí následující axiomy
  - T: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(r(x,y) \wedge r(x,y) \Rightarrow r(x,z))$ - tranzitivita
  - IR: $(\forall x)\neg p(x,x)$ - ireflexivita

Teorie neomezeného hustého lineárního uspořádání je teorie hustého lineárního uspořádání, pro kterou navíc platí: $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(y < x \wedge x < z)$ - neomezenost.