LIN – BI-SPOL-13

Matice: součin matic, regulární matice, inverzní matice a její výpočet, vlastní čísla matice a jejich výpočet, diagonalizace matice.

Obsah

1 Součin matic

Nechť $m, n, p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{A} \in T^{m,n}$ a $\mathbb{B} \in T^{n,p}$. Součinem těchto matic je matice $\mathbb{D} = \mathbb{A}\mathbb{B}$, pro jejíž prvky platí:

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

2 Regulární a inverzní matice

Definice 1 (Regulární a inverzní matice)**.** *Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Pokud existuje $\mathbb{A} \in T^{n,n}$ tak, že*

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{E}$$

*Potom nazveme matici $\mathbb{A}$ **regulární** a matici $\mathbb{B}$ **inverzní**. Inverzní matici značíme $\mathbb{B} = \mathbb{A}^{-1}$.*

Věta 2. *Buď $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- *$\mathbb{A}$ je regulární.*
- *Soubor řádků matice $\mathbb{A}$ je LN.*
- *$h(\mathbb{A}) = n$.*
- *$\mathbb{A} \sim \mathbb{E}$.*

2.1 Výpočet inverzní matice

Nechť $\mathbb{A} \in T^{n,n}$. Ověřte, zda je matice regulární a pokud je, nalezněte k ní matici inverzní $\mathbb{A}^1$.

1. Hledáme matici $\mathbb{A}^{-1}$ s vlastností $\mathbb{A}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{E}$.
2. Doplněním zadané matice o jednotkovou matici stejného rozměru sestavme dvoublokovou rozšířenou matici $(\mathbb{A}|\mathbb{E}) \in T^{n,2n}$.
3. Na celou $(\mathbb{A}|\mathbb{E})$ používáme řádkové úpravy GEM, pro libovolnou posloupnost řádkových úprav realizovaných regulární maticí $\mathbb{P}$ pak platí

   $$(\mathbb{A}|\mathbb{E}) \sim (\mathbb{P}\mathbb{A}|\mathbb{P}\mathbb{E}) = (\mathbb{P}\mathbb{A}|\mathbb{P}).$$

   Víme, že levou část je možné převést na jednotkovou matici právě tehdy, když je $\mathbb{A}$ regulární. Vznikne-li při úpravách $\mathbb{A}$ na horní stupňovitý tvar **nulový řádek**, pak $\mathbb{A}$ je singulární a **inverze neexistuje**.
4. Je-li $\mathbb{A}$ regulární, pak pro úpravy $\mathbb{P}$ vedoucí k převedení levého bloku matice $(\mathbb{A}|\mathbb{E})$ na jednotkovou matici platí $\mathbb{P} = \mathbb{A}^{-1}$, tedy $(\mathbb{A}|\mathbb{E}) \sim (\mathbb{E}|\mathbb{A}^{-1})$ a pravý blok výsledné matice obsahuje hledanou $\mathbb{A}^{-1}$.

3 Vlastní čísla

Definice 3. *Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní číslo operátoru** $A \in \mathcal{L}(V)$, právě když existuje $x \in V$, $x \neq \theta$, takový, že $Ax = \lambda x$. Vektor x pak nazýváme **vlastním vektorem operátoru** A **příslušejícím vlastnímu číslu** λ. Množinu všech vlastních čísel A nazýváme **spektrem** operátoru A a značíme symbolem $\sigma(A)$.*

Analogicky pro matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, kde $\mathbb{A} = {}^{\varepsilon}A$.

Charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$ (ozn. $p_{\mathbb{A}}$) definujeme předpisem $p_{\mathbb{A}}(\lambda) := \det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{E})$.

Definice 4. *Je-li $\lambda \in C$ vlastní číslo operátoru $A \in \mathcal{L}(V_n)$, pak podprostor $\ker(A - \lambda E)$ nazýváme **vlastním podprostorem operátoru** A příslušejícím vlastnímu číslu λ.*

Definice 5. *Nechť $\lambda \in C$ je vlastní číslo operátoru $A \in \mathcal{L}(V_n)$. Číslo $d(A - \lambda E) = \dim \ker (A - \lambda E)$ nazýváme* ***geometrickou násobností*** *vlastního čísla λ a značíme ji $\nu_g(\lambda)$.*

Definice 6. *Nechť $A \in \mathcal{L}(V_n)$ a $\lambda \in \sigma(A)$. Násobnost čísla λ jako kořene charakteristického polynomu p_A operátoru A nazýváme* ***algebraickou násobností*** *vlastního čísla λ a značíme ji $\nu_a(\lambda)$.*

Definice 7 (determinant)**.** ***Determinant*** *matice $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ je číslo:*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

3.1 Výpočet determinantu

Determinant se dá vypočítat kombinací následujících postupů:

- Přes definici.
- Sarrusovo nebo křížové pravidlo. (Soros zde asi nepomůže)
- Je-li matice $\mathbb{A}$ trojúhelníková (tj. $\mathbb{A}_{ij} = 0$ pro $i > j$), lze determinant spočítat vynásobením čísel na diagonále.
- $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$
- Úprava GEM

  ($G1$) Prohození dvou řádků - mění znaménko determinantu.

  ($G2$) Vynásobení jednoho řádku nenulovým číslem - determinant se tím číslem musí vydělit.

  ($G3$) Přičtení k jednomu řádku αnásobek jiného řádku - determinant se nemění.

3.2 Výpočet vlastních čísel

- Pro danou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ hledáme nenulové vektory x a čísla $\lambda \in \mathbb{C}$ splňující rovnici

$$\mathbb{A}x = \lambda x.$$

- To je ekvivalentní hledání λ takové, že homogenní soustava rovnic

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E})x = \theta$$

  má nenulové řešení.

- To nastává ale tehdy a jen tehdy (vzpomeňme Frobeniovu větu), když je matice $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E}$ singulární (neregulární).
- A to je zase ekvivalentní tomu, že determinant matice $\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E}$ je roven nule: abychom tedy našli vlastní číslo, řešíme rovnici

$$\det(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{E}) = 0.$$

- Pro zadané vlastní číslo λ už najdeme vlastní vektory snadno jako řešení homogenní soustavy uvedené výše.

4 Diagonalizace matice

Definice 8. *Matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{C}^{n,n}$ nazveme* ***podobné****, právě když existuje regulární $\mathbb{P} \in \mathbb{C}^{n,n}$ tak, že:*

$$\mathbb{A} = \mathbb{P}^{-1} \mathbb{B} \mathbb{P}$$

Ekvivalentně platí, že matice $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in C^{n,n}$ jsou podobné právě tehdy, když jsou obě maticemi stejného lineárního operátoru (v nějakých bázích), tedy když existuje $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(V)$ a báze $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ takové, že

$$^{\mathcal{X}}\mathbb{A} = \mathbb{A} \text{ a současně } ^{\mathcal{Y}}\mathbb{A} = \mathbb{B}.$$

Operátor $\mathbb{A} \in \mathcal{L}(V)$ nazveme **diagonalizovatelný**, jestliže existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru V_n taková, že matice $^{\mathcal{X}}\mathbb{A}$ je diagonální (matice je **diagonalizovatelná**, je-li podobná diagonální matici).

- Operátor $A \in \mathcal{L}(V)$ je diagonalizovatelný právě když $\forall \lambda_0 \in \sigma(A) : \nu_a(\lambda_0) = \nu_g(\lambda_0)$.
- Libovolný soubor vlastních vektorů, ve kterém každý přísluší jinému vlastnímu číslu, je vždy LN.
- Zadání „ověřte, zda je operátor diagonalizovatelný, a nalezněte bázi, ve které je jeho matice diagonální“ tedy znamená:
  - nalézt spektrum $\sigma(A)$,
  - ke každému vlastnímu číslu nalézt bázi vlastního podprostoru,
  - porovnat algebraické a geometrické násobnosti u každého $\lambda \in \sigma(A)$,
  - rovnají-li se pro každé $\lambda \in \sigma(A)$, bázi $\mathcal{X}$ sestavíme popořadě z bazických vektorů všech vlastních podprostorů. Matice přechodu $^{\mathcal{X}}E^{\varepsilon}$ je bude obsahovat ve sloupcích, diagonální matice operátoru $^{\mathcal{X}}A$ bude na diagonále obsahovat v odpovídajícím pořadí všechna vlastní čísla (každé zopakované tolikrát, kolik je jeho násobnost).