

LOGIC MỆNH ĐỀ

LOGIC HỌC

Khái niệm mệnh đề

❖ **Mệnh đề** (hay phán đoán) là một phát biểu khẳng định/phủ định về một đối tượng xác định nào đó (có thể đúng hay sai, không thể vừa đúng vừa sai) và thường ký hiệu bởi các chữ cái $A, B, C...$ hay $a, b, c...$

❖ **Chân trị của mệnh đề** (giá trị chân lý của mệnh đề) là giá trị đúng hay sai của nó

➤ Được ký hiệu là **Đ (T, 1)** nếu nó có giá trị *đúng*; **S (F, 0)** nếu nó có giá trị *sai*

2

Ví dụ

❖ Phát biểu nào là mệnh đề

- $1 + 1 = 2 \Rightarrow$ MĐ; Chân trị: T
- $1 = 0 \Rightarrow$ MĐ; Chân trị: F
- Trời sẽ mưa vào ngày mai \Rightarrow MĐ; Chân trị: T/F
- Giải phương trình $x^2 = 4$ theo biến $x \Rightarrow$ không là MĐ
- Phát biểu này sai \Rightarrow không là MĐ

3

Các phép toán logic – Phép phủ định

Phép phủ định

❖ Phủ định mệnh đề P , $\neg P$ ($\sim P$ hay \bar{P}) là mệnh đề "*Không P*", có chân trị đúng khi P sai và ngược lại

P	$\neg P$
T	F
F	T

4

Các phép toán logic – Phép phủ định

Ví dụ:

❖ $P = "1 = 0"$

$\neg P = "Không phải 1 = 0"$ hay $\neg P = "1 \neq 0"$

❖ $Q = "Vật chất quyết định ý thức"$

$\neg Q = "Vật chất không quyết định ý thức"$

❖ Mệnh đề "**Trời không mưa**" \rightarrow "Không phải Trời mưa"

Có cấu trúc logic: $\neg P$ với $P = "Trời mưa"$

5

Các phép toán logic – Phép phủ định

❖ Mệnh đề $\neg(\neg P)$ và P tương đương logic với nhau

Ta có: $\neg(\neg P) \equiv P$

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
T	F	T
F	T	F

6

Các phép toán logic – Phép phủ định

❖ Ví dụ:

➤ $P = "Được đổ rác nơi đây"$

➤ $\neg P = "Không được đổ rác nơi đây"$

➤ $\neg(\neg P) = "Không phải không được đổ rác nơi đây"$

7

Các phép toán logic – Phép hội

❖ **Phép hội:** hội của các mệnh đề P, Q :

➤ Ký hiệu: $P \wedge Q$

➤ Là mệnh đề " P và Q " có chân trị đúng khi P, Q cùng đúng và sai trong các trường hợp còn lại

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

8

Các phép toán logic – Phép hội

❖ Ví dụ:

➤ P = "Trời nắng", Q = "Tôi đi trên đường"

$P \wedge Q$ = "Trời nắng **và** tôi đi trên đường"

➤ P = "9 chia hết cho 3", Q = "8 chia hết cho 4"

$P \wedge Q$ = "9 chia hết cho 3 và 8 chia hết cho 4"

9

Các phép toán logic – Phép hội

❖ Ví dụ:

➤ Cho mệnh đề: "Sinh viên lớp HTTT0119 học Logic học và Sinh viên HTTT0120 học Nhập môn HTTT"

Có cấu trúc logic là: $P \wedge Q$ với

• P = "Sinh viên lớp HTTT0119 học Logic học"

• Q = "Sinh viên lớp HTTT0120 học Nhập môn HTTT"

❖ Ngoài liên từ "và" phép hội còn sử dụng các liên từ khác như: đồng thời, nhưng, mà, song, vẫn, cùng, còn... và dấu phẩy

10

Các phép toán logic – Phép tuyển

❖ **Tuyển** của hai mệnh đề P, Q ký hiệu $P \vee Q$ là mệnh đề "P hoặc Q" có chân trị sai khi P, Q cùng sai và đúng trong các trường hợp khác

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

11

Các phép toán logic – Phép tuyển

❖ Ví dụ:

➤ P = "20 chia hết cho 2", Q = "20 là số lẻ"

$P \vee Q$ = "20 chia hết cho 2 hoặc 20 là số lẻ"

➤ P = "Tôi đi bộ đến trường", Q = "Tôi đi xe máy đến trường"

$P \vee Q$ = "Tôi đi bộ đến trường hoặc tôi đi xe máy đến trường"

➤ Cho mệnh đề: "Sinh viên học môn Logic năm thứ nhất hoặc năm thứ hai"

Cấu trúc logic: $A \vee C$

Với A = "Sinh viên học môn Logic năm thứ nhất"

Và C = "Sinh viên học môn Logic năm thứ hai"

12

Các phép toán logic – Phép tuyển

❖ Các liên từ có thể sử dụng: hay, hay là, hoặc...

❖ Ví dụ:

- "Hôm nay là ngày lễ hay là ngày bình thường".
- "Sinh viên cần đến trường đúng 07 giờ hay trễ học".
- "Cần bảo hành xe sau 2 tháng hoặc khi đã đi 2000 km".

13

Các phép toán logic – Phép tuyển loại

❖ **Tuyển loại** (tuyển chặt) của hai mệnh đề P, Q

➤ Ký hiệu $P \oplus Q$

➤ Là mệnh đề "hoặc P hoặc Q" có chân trị đúng khi cả hai không cùng đúng hoặc cùng sai và sai trong các trường hợp còn lại

P	Q	$P \oplus Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

14

Các phép toán logic – Phép tuyển loại

❖ Ví dụ:

➤ P = "An 20 tuổi", Q = "An 21 tuổi"

$P \oplus Q$ = "An 20 tuổi hoặc 21 tuổi"

➤ P = "m là số chẵn", Q = "m là số lẻ"

$P \oplus Q$ = "m là số chẵn hoặc là số lẻ"

➤ Mệnh đề "Hôm nay là ngày Chủ nhật hoặc thứ Bảy"

Có cấu trúc logic là: $P \oplus Q$

Với P = "Hôm nay là ngày Chủ nhật"

Và Q = "Hôm nay là ngày thứ Bảy"

15

Các phép toán logic – Phép tuyển loại

❖ $P \oplus Q \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	$(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F

16

Các phép toán logic – Phép kéo theo

❖ P kéo theo Q là mệnh đề “Nếu P thì Q ”

➤ Ký hiệu: $P \Rightarrow Q$

➤ Là mệnh đề có chân trị sai khi P đúng Q sai và đúng trong các trường hợp khác

➤ P gọi là tiền đề, Q gọi là hậu đề

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

17

Các phép toán logic – Phép kéo theo

❖ Ví dụ:

➤ P = “Công ty hoạt động tốt”, Q = “Công ty có lợi nhuận”

$P \Rightarrow Q = \text{“”}$

➤ P = “Tam giác ABC cân”, Q = “Tam giác ABC có 02 cạnh bằng nhau”

$P \Rightarrow Q = \text{“”}$

➤ Mệnh đề “Nếu sinh viên được học bổng thì sinh viên được khen thưởng vào cuối năm”

Cấu trúc logic:

18

Các phép toán logic – Phép kéo theo

❖ Các phát biểu khác của phép kéo theo

Với mệnh đề $P \Rightarrow Q$, có nhiều cách phát biểu

Nếu như P thì Q

Nếu quả P thì Q

Nếu mà P thì Q

Giả dụ P thì Q

Giá như P thì Q

Giá mà P thì Q

Hễ cứ P thì Q

Hễ mà P thì Q

Đã P là Q

P , thành thử Q

P , nên Q

Q , nếu như P

Q trừ khi không P

19

Các phép toán logic – Phép kéo theo

❖ Các phát biểu khác của phép kéo theo

Với mệnh đề $P \Rightarrow Q$, có nhiều cách phát biểu

Khi có P thì có Q

Có Q khi có P

Vì có P nên có Q

Có Q vì có P

Do có P mà có Q

Nhờ có P nên có Q

Có Q do có P

Đã P là Q

Phải chỉ có P để có Q

Bao giờ có P thì có Q

20

Các phép toán logic – Phép kéo theo

❖ Ví dụ:

- Bao giờ cây lúa còn bông
Thì còn ngọn cỏ ngoài đồng trâu ăn
- Chiều nay tôi sẽ đi học trừ phi trời mưa

21

Các phép toán logic – Phép kéo theo

❖ Liên hệ của phép kéo theo và phép tuyển

$$\neg P \rightarrow Q \equiv P \vee Q$$

❖ Ví dụ:

- Số cô không giàu thì nghèo
Sinh con đầu lòng chẳng gái thì trai

$P = \text{" "}$

$Q = \text{" "}$

22

Các phép toán logic – Phép kéo theo

❖ **Mệnh đề đảo:** mệnh đề $Q \rightarrow P$ gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \rightarrow Q$

Ví dụ:

$P = \text{"Tam giác ABC là tam giác đều"}$

$Q = \text{"Tam giác ABC có các góc bằng nhau"}$

$P \rightarrow Q = \text{" "}$

$Q \rightarrow P = \text{" "}$

Không phải lúc nào cả hai mệnh đề cũng đều đúng

23

Các phép toán logic – Phép kéo theo

❖ **Mệnh đề phản đảo:** mệnh đề $\neg Q \rightarrow \neg P$ gọi là mệnh đề phản đảo của mệnh đề $P \rightarrow Q$

Ví dụ:

- Nếu sinh viên có cố gắng thì sinh viên vượt qua kỳ thi

24

Các phép toán logic – Phép kéo theo

$$\diamond P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$$

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

25

Các phép toán logic – Phép kéo theo

❖ Điều kiện đủ. Điều kiện cần:

Xét mệnh đề $P \rightarrow Q$: "P là điều kiện đủ để có Q" và "Q là điều kiện cần để có P"

Ví dụ:

➤ Để được điều khiển xe máy thì bạn phải được cấp bằng lái xe

P là điều kiện đủ để có Q, nhưng đó không là điều kiện duy nhất để có Q

26

Các phép toán logic – Phép tương đương

❖ P tương đương Q làm mệnh đề "Nếu P thì Q và nếu Q thì P"

➤ Ký hiệu $P \Leftrightarrow Q$

➤ Mệnh đề đúng khi P, Q cùng chân trị và ngược lại

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

27

Các phép toán logic – Phép tương đương

❖ Ví dụ:

P = "Số a có tổng các chữ số chia hết cho 3"

Q = "Số a chia hết cho 3"

$P \Leftrightarrow Q$ = "Số a có tổng các chữ số chia hết cho 3 tương đương số a chia hết cho 3"

Lưu ý: $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ có thể chứng minh bằng bảng chân trị

28

Các phép toán logic – Phép tương đương

❖ Điều kiện cần và đủ: Xét mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

P là điều kiện đủ và cũng là điều kiện cần để có Q và ngược lại

❖ Ví dụ:

➤ Để tam giác ABC vuông tại A điều kiện cần và đủ là $BC^2 = AB^2 + AC^2$

29

Các phép toán logic – Phép tương đương

❖ Với các định nghĩa hay các luật dạng “P nếu Q” chúng ta phải hiểu “Có P là có Q và ngược lại có Q là có P”

❖ Ví dụ:

- Tam giác ABC là tam giác cân nếu tam giác ABC có 03 cạnh bằng nhau
- Các phát biểu khác: Có P khi và chỉ khi có Q; Có Q khi và chỉ khi có P...

30

Các phép toán logic

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

31

Các phép toán logic

❖ Thứ tự ưu tiên các phép toán

1	2	3	4	5
\neg	\wedge	\vee	\Rightarrow	\Leftrightarrow

32

Sự tương đương của các mệnh đề

Mệnh đề phức hợp

- ❖ Mỗi mệnh đề phức hợp X là mệnh đề được tạo thành từ các mệnh đề P_1, P_2, \dots, P_n thông qua các phép toán logic.
- ❖ Tìm chân trị mệnh đề X :
 - Lập bảng chân trị gồm có 2^n dòng, n cột chân trị của các mệnh đề P_1, P_2, \dots, P_n
 - Cột trung gian và cột cuối cùng là cột chân trị của X

33

Sự tương đương của các mệnh đề

Ví dụ: tìm chân trị của các mệnh đề sau

- ❖ $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$
- ❖ $\neg Q \vee P \wedge Q$
- ❖ $P \Rightarrow (\neg Q \vee R)$
- ❖ $(Q \wedge \neg R) \Rightarrow P$

34

Sự tương đương của các mệnh đề

- ❖ $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ (*) là mệnh đề cần tìm chân trị

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P \wedge Q$	(*)
T	T	F	F	F	F	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	F

35

Sự tương đương của các mệnh đề

- ❖ $\neg Q \vee P \wedge Q$ (*) là mệnh đề cần tìm chân trị

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	(*)
T	T	F	T	T
T	F	T	F	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	T

36

Sự tương đương của các mệnh đề

$$\diamond P \Rightarrow (\neg Q \vee R)$$

(*) là mệnh đề cần tìm chân trị

P	Q	R	$\neg Q$	$\neg Q \vee R$	(*)
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

37

Sự tương đương của các mệnh đề

❖ Mệnh đề hằng đúng (tautology)

➤ Ký hiệu **1**

➤ Là mệnh đề luôn có chân trị đúng

❖ Mệnh đề hằng sai hay mâu thuẫn (contradiction)

➤ Ký hiệu **0**

➤ Là mệnh đề luôn có chân trị sai

❖ Ví dụ:

➤ $P \wedge \neg P, P \vee \neg P$

38

Sự tương đương của các mệnh đề

❖ Ví dụ: các mệnh đề sau là hằng đúng hay hằng sai

➤ $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$

➤ $\neg P \wedge (P \Rightarrow Q)$

➤ $(P \vee Q) \vee \neg P$

➤ $(P \wedge Q) \wedge \neg P$

➤ $((P \Rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$

➤ $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow Q$

39

Sự tương đương của các mệnh đề

❖ Hai mệnh đề P, Q gọi là tương đương logic (logically equivalent)

➤ Ký hiệu $P \equiv Q$

➤ Nếu $P \Leftrightarrow Q = 1$

❖ Ví dụ: Các mệnh đề sau có tương đương logic?

➤ $P \Rightarrow Q$ và $\neg P \vee Q$

➤ $\neg(P \vee Q)$ và $\neg P \wedge \neg Q$

40

Sự tương đương của các mệnh đề

❖ $P \Rightarrow Q$ và $\neg P \vee Q$

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	(*)
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

41

Một số quy luật logic

$$\begin{array}{l} P \wedge 1 \equiv P \\ P \vee 0 \equiv P \end{array} \quad \text{Luật đồng nhất}$$

$$\begin{array}{l} P \vee 1 \equiv 1 \\ P \wedge 0 \equiv 0 \end{array} \quad \text{Luật nuốt}$$

$$\begin{array}{l} P \wedge P \equiv P \\ P \vee P \equiv P \end{array} \quad \text{Luật lũy đẳng}$$

$$\neg(\neg P) \equiv P \quad \text{Luật phủ định kép}$$

$$\begin{array}{l} P \wedge Q \equiv Q \wedge P \\ P \vee Q \equiv Q \vee P \\ P \oplus Q \equiv Q \oplus P \end{array} \quad \text{Luật giao hoán}$$

42

Một số quy luật logic

$$\begin{array}{l} (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \\ (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \end{array} \quad \text{Luật kết hợp}$$

$$\begin{array}{l} P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \\ P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \end{array} \quad \text{Luật phân phối}$$

$$\begin{array}{l} \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q \\ \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Luật đối ngẫu} \\ \text{Luật De Morgan} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} P \vee \neg P \equiv 1 \\ P \wedge \neg P \equiv 0 \\ P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \end{array} \quad \text{Tương đương có ích}$$

43

Chứng minh các mệnh đề tương đương

❖ Phương pháp lập bảng chân trị

➤ Chứng tỏ chân trị các mệnh đề cần chứng minh luôn bằng nhau

❖ Phương pháp biến đổi tương đương

Áp dụng các tương đương logic

➤ Khử các phép kéo theo, tương đương (nếu có)

➤ Đưa phép phủ định về trực tiếp từng mệnh đề

➤ Chuyển về dạng các tuyển hay các hội các mệnh đề sơ cấp và thực hiện rút gọn

44

Chứng minh các mệnh đề tương đương

❖ Các tương logic giúp khử các phép kéo theo

$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$
$P \vee Q \equiv \neg P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q \equiv \neg P \Rightarrow \neg Q$
$P \wedge Q \equiv \neg(P \Rightarrow \neg Q)$	$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$	$\neg(P \Leftrightarrow Q) \equiv P \Leftrightarrow \neg Q$
$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R) \equiv P \Rightarrow (Q \wedge R)$	$(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R) \equiv (P \vee Q) \Rightarrow R$
$(P \Rightarrow Q) \vee (P \Rightarrow R) \equiv P \Rightarrow (Q \vee R)$	$(P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$

45

Chứng minh tương đương

❖ Ví dụ: chứng minh tương đương logic

$$\triangleright (P \wedge Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \equiv 1$$

46

Ví dụ

47

Ví dụ 1

❖ Cho P = "Sinh viên A hát hay" (T); Q = "Sinh viên B nhảy giỏi" (F). Cho biết cấu trúc logic và chân trị các mệnh đề sau và phát biểu mệnh đề phủ định các mệnh đề đó:

- Sinh viên A hát hay, sinh viên B nhảy giỏi
- Sinh viên A hát hay hoặc sinh viên B nhảy giỏi
- Hoặc sinh viên A hát không hay hoặc sinh viên B nhảy dở
- Sinh viên A hát dở nhưng sinh viên B nhảy giỏi
- Không phải sinh viên A hát hay hoặc sinh viên B nhảy giỏi

48

Ví dụ 1

49

Ví dụ 2

❖ Cho $P = \text{"An đi xe máy"}; Q = \text{"An đi học"}$. Cho biết cấu trúc logic các mệnh đề sau

- Nếu An đi xe máy thì An đi học
- Nếu An đi học thì An đi xe máy
- Vì An đi học nên An đi xe máy
- An đã đi học là An đi xe máy
- An đi xe máy do An đi học
- Nếu An không đi học thì An không đi xe máy
- Nếu An không đi xe máy thì An đi học
- An đi xe máy trừ khi An không đi học

50

Ví dụ 3

❖ Cho các phát biểu sau:

- "Phúc vui vẻ"
- "Quân vui vẻ"
- "Phúc vẽ tranh"
- Cho biết cấu trúc của các câu sau:
 - "Nếu Phúc đang vui vẻ và vẽ tranh thì Quân không vui"
 - "Nếu Phúc vui vẻ thì anh ta vẽ tranh"
 - "Phúc vui vẻ khi và chỉ khi anh ta vẽ tranh"

51

Ví dụ 4

❖ Giả sử phát biểu sau:

- Nếu tôi có tội thì tôi phải bị trừng phạt và bây giờ tôi có tội
- Hỏi: Tôi có bị trừng phạt không?

52

Ví dụ 5

❖ Xác định mệnh đề hằng đúng, hằng sai hoặc không phải hằng đúng hay hằng sai

- $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \vee Q)$
- $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$
- $(P \wedge Q) \Rightarrow P$
- $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee Q)$
- $(\neg P \wedge Q) \wedge (P \vee \neg Q)$

53

Ví dụ 6

❖ Chứng minh tương đương logic

- $(R \vee P) \Rightarrow (R \vee Q)$ và $R \vee (P \Rightarrow Q)$
- $P \Rightarrow Q$ và $((P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P)$
- $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow Q \equiv 1$

54

Ví dụ 7

❖ Trên một hòn đảo có 02 nhóm dân cư đang sống. Một nhóm luôn nói thật và một nhóm luôn nói dối. Bạn gặp 02 người là Zoey và Mandy.

- Zoey nói: Mandy là người nói dối
 - Mandy nói: Cả Zoey và tôi không ai là người nói dối
- Ai là người nói dối và ai là người nói thật

55

Ví dụ 8

❖ Có 03 người tham gia phỏng vấn gồm có A, B, C. Các câu trả lời

- A: B là người nói thật
- B: Nếu A nói thật thì C cũng vậy

❖ A, B, C ai là người nói thật? Ai là người nói dối

56

Ví dụ 9

❖ Giả sử một người có thể là người nói dối hoặc là người nói thật. Anh ta trả lời 02 câu:

- Tôi thích Linda
- Nếu tôi thích Linda thì tôi cũng thích Kathy

Người đó là người nói dối hay nói thật