LOGIC VỊ TỪ

LOGIC HỌC

Vị từ và lượng từ

Hàm mệnh đề

- Xét phát biểu: $P(n) =$ "n là số nguyên tố" với n là một số tự nhiên thuộc tập hợp con S của tập hợp các số tự nhiên $\mathbb{N}$
- Phát biểu trên chưa phải là một mệnh đề vì giá trị đúng hay sai của nó phụ thuộc vào việc số n là bao nhiêu
  - Nếu $n = 5$: "5 là số nguyên tố" (T)
  - Nếu $n = 4$: "4 là số nguyên tố" (S)

Vị từ và lượng từ

- Phát biểu: $P(x) =$ "x là nhạc sĩ" với x là một người Việt Nam nào đó thuộc tập hợp S những người Việt Nam.

Tùy thuộc x được chọn là người Việt Nam nào

- Với x là nhạc sĩ Văn Cao

P(Văn Cao) = "Văn Cao là nhạc sĩ" (T)

- Với x là nhà thơ Xuân Diệu

P(Xuân Diệu) = "Xuân Diệu là nhạc sĩ" (F)

Vị từ và lượng từ

- Phát biểu: $P(x, y) = "x, y$ là nghiệm phương trình $x^2 - y = 0"$ với x, y là số thực thuộc $\mathbb{R}$

Mệnh đều có giá trị T/F phụ thuộc vào x, y

- Với $x = 3, y = 9$: "3, 9 là nghiệm của phương trình" (T)
- Với $x = -2, y = 6$: "-2, 6 là nghiệm của phương trình" (F)

Có những phát biểu tính Đúng hay Sai phụ thuộc vào các yếu tố bên trong nó

Vị từ và lượng từ

Các phát biểu gồm 02 phần

- $P(n) =$ "n là số nguyên tố"
- $P(x) =$ "x là nhạc sĩ"
- $P(x, y) =$ "x, y là nghiệm phương trình $x^2 - y = 0$"

Phần thứ nhất là các biến; phần thứ hai là vị từ

- $P(n), P(x), P(x, y)$: hàm mệnh đề
- $P(n), P(x)$: hàm mệnh đề một biến
- $P(x, y)$: hàm mệnh đề hai biến

Vị từ và lượng từ

- Các hàm mệnh đề là các phát biểu có chứa biến mà khi thay các biến bởi các giá trị cụ thể nó trở thành các mệnh đề có chân trị xác định
- Các biến có thể nhận giá trị thuộc một tập hợp S, giá trị cụ thể khi thay thế cho biến gọi là hằng
- Hàm mệnh đề xác định trên tập hợp S nếu các biến nhận giá trị thuộc tập S.
- Hàm mệnh đề có thể có một hay nhiều biến

Cú pháp của logic vị từ

- Logic vị từ gồm các ký hiệu
  - Hằng (constant): tên các đối tượng
  - Vị từ (predicate): các quan hệ
  - Ký hiệu hàm (function symbols): biểu diễn ánh xạ (quan hệ hàm) từ các đối tượng của miền giá trị này sang các đối tượng của miền khác
  - Biến (variable)

Cú pháp của logic vị từ

- Logic vị từ gồm các ký hiệu
  - Toán tử: $\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow$
  - Phép định lượng: $\forall \quad \exists$
  - Ký hiệu nhóm: dấu ngoặc, dấu phẩy

Cú pháp của logic vị từ

- Một **phần tử (term)** có thể là:
  - Một ký hiệu hằng
  - Một ký hiệu biến
  - Một ký hiệu hàm theo sau bởi một hoặc nhiều term phân cách bởi dấu phẩy và ngoặc

Cú pháp của logic vị từ

- Một **biểu thức đơn (atomic formula)**:
  - Ký hiệu vị từ
  - Ký hiệu vị từ với một hoặc nhiều term cách nhau bằng dấu phẩy, dấu ngoặc
  - Các term phân tách bằng ký hiệu =

Cú pháp của logic vị từ

- Một **biểu thức (formula)**
  - Một biểu thức nguyên tử
  - Toán tử $\neg$ theo sau bởi một biểu thức
  - Hai biểu thức nối nhau bằng $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
  - Phép định lượng theo sau bởi biến và biểu thức

Cú pháp của logic vị từ

- Một **câu (sentence)**
  - Biểu thức không có biến tự do
  - Biến trong biểu thức gọi là biến tự do nếu nó không được định lượng bằng ∀ hoặc ∃. Ngược lại gọi là biến bị ràng buộc

Lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại

- Lượng từ phổ biến của hàm mệnh đề $P(x)$ là mệnh đề

$$\forall x \in S, P(x) = \text{“Với mọi } x \text{ thuộc tập } S, P(x)\text{”}$$

Ví dụ:

- S là tập hợp người Việt Nam. $P(x) =$ “x là nhạc sĩ”

$\forall x \in S, P(x) =$ “Mọi người Việt Nam là nhạc sĩ” (F)

- S là tập hợp số thực $\mathbb{R}$. $P(x) = x^2 \geq 0$

$\forall x \in S, P(x) =$ “Với mọi x là số thực, $x^2 \geq 0$” (Đ)

Lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại

- Nếu $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ thì

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_1}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_2}) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_n})$$

Lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại

- Lượng từ tồn tại của hàm mệnh đề $P(x)$ là mệnh đề

$$\exists x \in S, P(x) = \text{"Tồn tại } x \text{ thuộc } S, P(x)\text{"}$$

Ví dụ:

- S là tập hợp người Việt Nam. $P(x) =$ "x là nhạc sĩ".

$\exists x \in S, P(x) =$ "Có người Việt Nam là nhạc sĩ" (T)

- S là tập hợp số thực $\mathbb{R}$. $P(x) = "x^2 - 1 = 0"$

$\exists x \in S, P(x) =$ "Có số thực x: $x^2 - 1 = 0$" (T)

Lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại

- Nếu $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ thì

$$\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_1}) \vee \boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_2}) \vee \cdots \vee \boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_n})$$

Phủ định của các lượng từ

- Phủ định của lượng từ phổ biến

$$\neg\left(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\right) = \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Ví dụ:

- $P =$ "Mọi người Việt Nam đều là nhà thơ"

$\neg P =$ "Có người Việt Nam không phải là nhà thơ"

- $Q =$"$\forall x \in R,\ x^2+1>0$"

$\neg Q =$"$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$"

Phủ định của các lượng từ

- Nếu $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ thì

$$\neg\left(\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\right) = \neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_1}) \vee \neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_2}) \vee \cdots \vee \neg\boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_n})$$

Phủ định của các lượng từ

- Phủ định của lượng từ tồn tại

$$\neg\left(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\right) = \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

Ví dụ:

- $A =$ "Có người Việt Nam đạt huy chương vàng Olympic"

  $\neg A =$ "Mọi người Việt Nam đều chưa đạt huy chương vàng Olympic"
- $B =$ "$\exists x \in \mathbb{N}, 3x + 1$ là số lẻ"

  $\neg B =$ "$\forall x \in \mathbb{N}, 3x + 1$ là số chẵn"

Phủ định của các lượng từ

- Nếu $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ thì

$$\neg\left(\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})\right) = \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_1}) \wedge \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_2}) \wedge \cdots \wedge \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{s_n})$$

Tóm tắt

Mệnh đề	**Đúng khi**	**Sai khi**
$\forall x \in S, P(x)$	Với mọi x thuộc S, $P(x)$ đúng	Tồn tại x thuộc S mà $P(x)$ sai
$\exists x \in S, P(x)$	Tồn tại x thuộc S mà $P(x)$ đúng	Với mọi x thuộc S, $P(x)$ sai
$\forall x \in S, \neg P(x)$	Với mọi x thuộc S, $P(x)$ sai	Tồn tại x thuộc S mà $P(x)$ đúng
$\exists x \in S, \neg P(x)$	Tồn tại x thuộc S mà $P(x)$ sai	Với mọi x thuộc S, $P(x)$ đúng

Hàm mệnh đề nhiều biến

Ví dụ:

- $P(x, y)$ = "Số thực x lớn hơn số thực y"

  $P(7,5) =$ "7 lớn hơn 5" (T)

  $P(7,15) =$ "7 lớn hơn 15" (F)

- $P(x, y) =$ "Ông x là cha của ông y"

  P(Trần Liễu, Trần Quốc Tuấn) = "Ông Trần Liễu là cha của ông Trần Quốc Tuấn" (T)

  P(Trần Quốc Tuấn, Trần Liễu) = "Ông Trần Quốc Tuấn là cha của ông Trần Liễu" (F)

Các lượng từ dạng mở rộng

Cho hàm mệnh đề hai biến $P(x, y)$

- Lượng từ phổ biến toàn phần là mệnh đề

$$\forall x \in S, \forall y \in T, P(x, y)$$

- Lượng từ phổ biến bán phần trước là mệnh đề

$$\forall x \in S, \exists y \in T, P(x, y)$$

- Lượng từ phổ biến bán phần sau là mệnh đề

$$\exists x \in S, \forall y \in T, P(x, y)$$

- Lượng từ tồn tại toàn phần là mệnh đề

$$\exists x \in S, \exists y \in T, P(x, y)$$

Các lượng từ dạng mở rộng

Ví dụ:

- S là tập hợp sinh viên lớp HTTT0119, T là tập hợp tất cả các môn học của Khoa CNTT

$P(x, y) =$ "x sẽ học môn y"

$\forall x \in S, \forall y \in T, P(x, y) =$ ""

$\exists x \in S, \forall y \in T, P(x, y) =$ ""

- S là tập hợp mọi chìa khóa, T là tập hợp mọi ổ khóa

$Q(x, y) =$ "Chìa khóa x mở được ổ khóa y"

$\forall x \in S, \forall y \in T, Q(x, y) =$ ""

$\exists x \in S, \forall y \in T, Q(x, y) =$ ""

Phủ định của các lượng từ dạng mở rộng

❖ Phủ định của lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại dạng mở rộng

$$\neg\big(\forall x \in S, \forall y \in T, P(x,y)\big) = \exists x \in S, \exists y \in T, \neg P(x,y)$$

$$\neg\big(\forall x \in S, \exists y \in T, P(x,y)\big) = \exists x \in S, \forall y \in T, \neg P(x,y)$$

$$\neg(\exists x \in S, \forall y \in T, P(x,y)) = \forall x \in S, \exists y \in T, \neg P(x,y)$$

$$\neg\big(\exists x \in S, \exists y \in T, P(x,y)\big) = \forall x \in S, \forall y \in T, \neg P(x,y)$$

Phủ định của các lượng từ dạng mở rộng

Ví dụ:

- $\forall x \in S, \forall y \in T, P(x,y) =$ "Mọi sinh viên lớp HTTT0119 học tất cả các học phần có mã bắt đầu TT"

Phủ định của mệnh đề trên:

$\exists x \in S, \exists y \in T, \neg P(x,y)$

= "Không phải mọi sinh viên lớp HTTT0119 học tất cả học phần có mã bắt đầu TT"

= "Có sinh viên lớp HTTT0119 không học môn nào đó có mã bắt đầu TT"

Các mệnh đề A, I, E, O

❖**Mệnh đề khẳng định chung (A)** là mệnh đề "Mọi S đều là P" hay "Mọi x có thuộc tính $S(x)$ đều có thuộc tính $\mathrm{P}(x)$" hay (SaP)

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P} \text{ hay } \forall \boldsymbol{x}, (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})) \text{ hay } (\boldsymbol{SaP})$$

<u>Ví dụ:</u>

$S(x) =$ "x là sinh viên CNTT", $\mathrm{P}(x) =$ "x là người biết lập trình"

"Mọi sinh viên CNTT đều là người biết lập trình" (SaP)

"Mọi người biết lập trình đều là sinh viên CNTT" (PaS)

Các mệnh đề A, I, E, O

- Các phát biểu có thể có: mọi người…; ai mà chẳng…; mọi lúc…; ai ai…; mọi khi…; mọi lúc…; mọi vật…; mọi cảnh…;

Ví dụ:

- Mọi người ở Việt Nam đều biết đến Bác Hồ
- Ai mà chẳng mong muốn thành công

Các mệnh đề A, I, E, O

❖ **Mệnh đề khẳng định riêng (I)** là mệnh đề: một số S là P; một số x có thuộc tính $S(x)$ cũng có thuộc tính $P(x)$; (SiP)

$$\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{P} \text{ hay } \exists \boldsymbol{x}, (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})) \text{ hay } (\boldsymbol{SiP})$$

Ví dụ:

- $S(x) =$ "x là sinh viên CNTT", $P(x)$ = "x là người học môn Kỹ thuật lập trình"
  - SiP: "Một số sinh viên CNTT là người học môn Kỹ thuật lập trình"
  - PiS: "Một số người học môn Kỹ thuật lập trình là sinh viên CNTT"

Các mệnh đề A, I, E, O

- Các phát biểu có thể có: một người…; một số người…; một ai đó…; nhiều người…; một khi (lúc) nào đó…

Ví dụ:

- Nhiều sinh viên CNTT chọn học môn Marketing căn bản
- Một số sinh viên là Đoàn viên

Các mệnh đề A, I, E, O

❖ **Mệnh đề phủ định chung (E)** là mệnh đề "Mọi S đều không là P" hay "Mọi x có thuộc tính $S(x)$ đều không có thuộc tính $P(x)$" hay (SeP)

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{P} \text{ hay } \forall \boldsymbol{x}, (\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})) \text{ hay } (\boldsymbol{SeP})$$

Ví dụ

- $S(x)$ = "x là con chó", $P(x) =$ "x là động vật hai chân"
  - SeP: "Mọi con chó đề không là động vật hai chân"
  - PeS: "Mọi động vật hai chân đều không phải là chó"

Các mệnh đề A, I, E, O

- Các phát biểu có thể có: không người nào…; không ai…; nào ai…; không khi nào…; không lúc nào…; không vật nào…; không cảnh nào…

Ví dụ:

- Không một sinh viên CNTT nào đạt được giải Oscar
- Không một ai nhất thiết phải giúp bạn khi bạn cần

Các mệnh đề A, I, E, O

- **Mệnh đề phủ định riêng** (O) là mệnh đề "Một số S không là P" hay "Một số x có thuộc tính $S(x)$ nhưng không có thuộc tính $\mathrm{P}(x)$" hay (SoP)

$\exists x \in S, x \notin P$ hay $\exists x, (S(x) \wedge \neg P(x))$ hay (SoP)

Ví dụ:

- $S(x) =$ "x là sinh viên", $P(x) =$ "x là diễn viên"
  - SoP: "Một số sinh viên không phải là diễn viên"
  - PoS: "Một số diễn viên không phải là sinh viên"

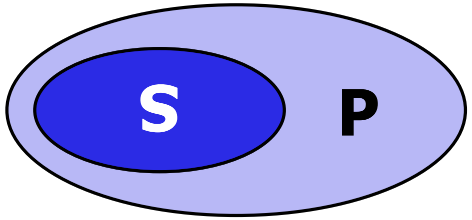
Các mệnh đề A, I, E, O

- Các phát biểu có thể có: một người… không…; nhiều người… không…; một số người… không…; một ai đó… không…; một khi nào đó… không;

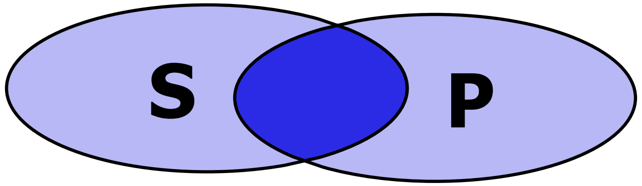
Ví dụ:

- Một số người không cho rằng Truyện Kiều mang tính giáo dục
- Một số sinh viên không làm đúng chuyên ngành khi tốt nghiệp.

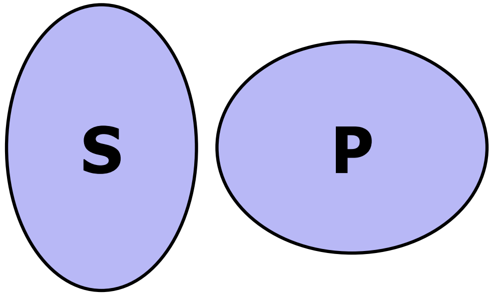
Biểu đồ Venn



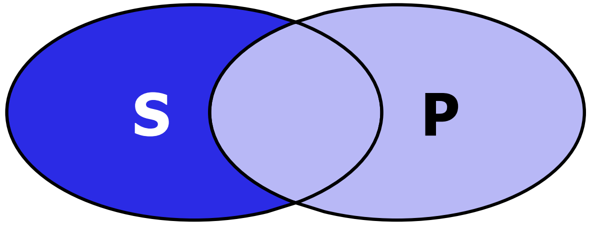
(SaP)



(SiP)



(SeP)



(SoP)

Các mệnh đề A, I, E, O

- Quan hệ giữa các mệnh đề A, I, E, O
  - $\neg(A) = (O)$
  - $\neg(I) = (E)$
  - $(A) = \neg(O)$
  - $(I) = \neg(E)$
  - Ví dụ:
    - "Không phải mọi người Việt Nam đều là nhà thơ" cũng tương tự như "Có người Việt Nam không phải là nhà thơ"

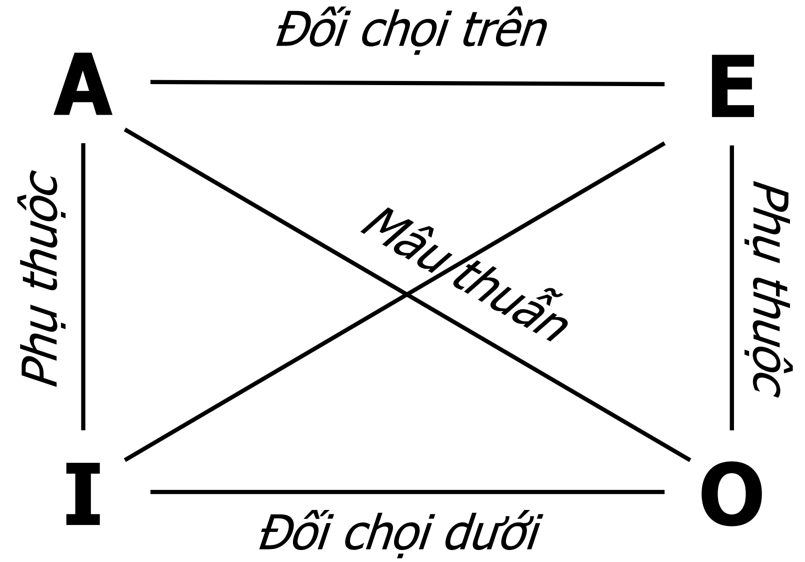
Các mệnh đề A, I, E, O

Quan hệ	Mệnh đề	Giá trị logic
Đối chọi trên	(A) và (E)	Không cùng đúng
Đối chọi dưới	(I) và (O)	Không cùng sai
Mâu thuẫn	(A) và (O) (I) và (E)	Không cùng đúng và không cùng sai
Phụ thuộc	(A) và (I) (E) và (O)	$A \Rightarrow I$ $E \Rightarrow O$
Đồng nhất	$\neg(A)$ và (O) $\neg(I)$ và (E) (A) và $\neg(O)$ (I) và $\neg(E)$	Cùng đúng và cùng sai

Các mệnh đề A, I, E, O

❖ Sơ đồ quan hệ (Hình vuông logic)

Cho theo đề



Ngữ nghĩa của logic vị từ

- **Mô hình (model)** bao gồm
  - Miền biện luận/miền không gian: $\mathcal{D}$
  - Diễn giải (interpretation):
    - Các thực thể trong $\mathcal{D}$ được gán một ký hiệu hằng
    - Với mỗi hàm, một thực thể được gán cho mỗi đầu vào đối với hàm
    - Với mỗi vị từ, giá trị T hay F được gán cho đầu vào

Ngữ nghĩa của logic vị từ

- Khi mô hình được xác định, chân trị của các mệnh đề được gán theo quy tắc:
  - Chân trị với các toán tử $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ được gán như logic mệnh đề
  - Chân trị của 2 phần tử nối nhau bằng ký tự $=$ là T nếu cả 2 chỉ cùng 1 thực thể; ngược lại là F
  - Chân trị của $\forall x\ P(x)$:
    - T: nếu $P(x)$ nhận giá trị T với mọi phép gán đối với x trong miền giá trị

Ngữ nghĩa của logic vị từ

- Khi mô hình được xác định, chân trị của các mệnh đề được gán theo quy tắc:
  - Chân trị của $\exists x\ P(x)$:
    - T: nếu $P(x)$ nhận giá trị T nếu có ít nhất một phép gán x cho một thực thể trong miền giá trị
  - Bộ định lượng ưu tiên hơn toán tử

Ví dụ 1

- Giả sử xem xét 4 các thể Socrates, Plato, Zeus và Fido
  - Biểu tượng hằng = {Socrates, Plato, Zeus và Fido}
  - Vị từ = {human, mortal, legs} (1 biến)
  - Bảng chân trị

x	Socrates	Plato	Zeus	Fido
human(x)	T	T	F	F
mortal(x)	T	T	F	T
legs(x)	T	T	T	T

Ví dụ 1

- Các câu sau có chân trị
  - (human(Zeus) ∧ human(Fido)) ∨ human(Socrates)
  - human(Zeus) ∧ (human(Fido) ∨ human(Socrates))
  - $\forall x$ human(x)
  - $\forall x$ mortal(x)
  - $\forall x$ legs(x)
  - $\forall x$ (human(x) ⇒ mortal(x))

Ví dụ 2

Chuyển sang mệnh đề logic vị từ

- An yêu quý mọi người (giả sử D chỉ gồm con người)
- An yêu quý mọi người (giả sử D chỉ gồm tất cả sinh vật)
- Không ai nói chuyện cả
- Ai cũng yêu chính mình
- Mọi người yêu quý lẫn nhau
- Mọi sinh viên đều cười
- Mọi người nói chuyện hoặc đi lại
- Mọi sinh viên nói chuyện hoặc đi lại

Ví dụ 2

- An không thích ai cả
- Tất cả luật sư đều là thành viên của Hội luật sư
- Một số bông hoa không thơm
- Tất cả laptop đều có pin

Ví dụ 3

- Cho các ký hiệu hằng {An, Bảo, Chi, Dũng} và bảng chân trị

x	An	Bảo	Chi	Dũng
young(x)	F	F	T	T
happy(x)	T	T	T	T

Ví dụ 3

- Xác định chân trị
  - $\forall x$ young(x)
  - $\exists x$ young(x)
  - $\forall x$ happy(x)
  - $\exists x$ happy(x)
  - $\forall x$ young$(x) \Rightarrow$ happy(x)
  - $\forall x$ happy$(x) \Rightarrow$ young(x)
  - $\exists x$ young$(x) \wedge$ happy(x)