אלגוריתמים 2023 – תרגיל 7

מועד הגשה: 22.2.24 עד ל23:00 באתר הקורס

שימו לב: כאשר אתם מציגים אלגוריתם מקרב, יש להוכיח נכונות ולספק זמן ריצה. שימו לב שהוכחת נכונות לאלגוריתם מקרב כוללת הוכחה של חוקיות הפתרון והוכחה שהוא מקרב כפי שנדרש.

1. **(אלגוריתמי קירוב)** אתם מחליטים לצאת לחופשה מהלימודים ולנסוע לאתר סקי. באתר אתם יכולים לשכור מגלשיים במחיר של שקל ליום, או לקנות מגלשיים תמורת תשלום חד פעמי של 20 שקלים. אתם מעוניינים למזער את המחיר שתשלמו, אך אינכם יודעים כמה ימים תשארו.
בעקבות השבוע הראשון בנושא "אלגוריתמי קירוב" בקורס החלטתם לפעול לפי האסטרטגיה הבאה: לשכור מגלשיים בעשרים הימים הראשונים, ובסוף היום ה-20, אם עדיין נשארה בכם חדוות הגלישה – לקנות אותם.

1. מחיר אופטימלי הוא המחיר שהייתם משלמים לו ידעתם מראש כמה ימים תשארו. הראו שהאסטרטגיה שלכם נותנת 2-קירוב למחיר האופטימלי, עבור כל מספר ימים שהחלטתם להשאר.
2. חברכם החליט לשכור מגלשיים בעשרת הימים הראשונים לשהותו, ולקנות אותם בסוף היום העשירי. האם האלגוריתם שלו הוא c-מקרב למחיר האופטימלי, עבור c כלשהו? אם כן, עבור איזה c?
3. נשארתם באתר הסקי 50 ימים יחד עם חברכם. מי מכם שילם פחות? האם בהכרח זה מעיד על כך שהקירוב שלו טוב יותר? הסבירו בקצרה מדוע.

2. **(אלגוריתמי קירוב)** בעיות MAX-CUT

1. בתרגול ראינו אלגוריתם 2-מקרב לבעיית MAX-CUT. עבור הדוגמה שהצגנו, האלגוריתם מחזיר פתרון אופטימלי. הראו דוגמה לגרף עבורו אלגוריתם הקירוב מחזיר פתרון שאינו אופטימלי. שימו לב: סדר בחירת הקודקודים יכול להשפיע על התוצאה.
2. בבעיית kMAX-CUT נתון גרף $G = (V, E)$, ונדרש להחזיר k-חתך בגודל מקסימלי. k-חתך הוא חלוקה של V ל k קבוצות זרות, $V_1, \ldots, V_k$, המכסות את הגרף כולו. גודלו של החתך מוגדר כמספר הצלעות החוצות קבוצות שונות, כלומר

$$\left|\left\{(x, y) \in E: \exists i, j\ s.t.\ i \neq j,\ x \in V_i, y \in V_j\right\}\right|$$

הראו אלגוריתם $\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)$-מקרב עבור בעיית kMAX-CUT . הוכיחו נכונות וחשבו זמן ריצה.

3. **(אלגוריתמי קירוב)** בגרף <u>לא מכוון</u> $G = (V, E)$ קבוצת קודקודים $S \subseteq V$ תקרא בלתי תלויה אם בין כל שני קודקודים בקבוצה אין צלע, כלומר $\forall u, v \in S\ \{u, v\} \notin E$.
בהנתן גרף <u>לא מכוון</u> $G = (V, E)$ **בו דרגת כל קודקוד נמוכה או שווה ל-d**, הציעו אלגוריתם $(d + 1)$-מקרב לבעיית מציאת קבוצה בלתי תלויה מקסימלית בגרף (כלומר, הציעו אלגוריתם אשר מחזיר קבוצה שגודלה הוא לכל הפחות $\frac{1}{d+1}$ מגודלה של הקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית בגרף). הוכיחו נכונות וחשבו זמן ריצה.

4. **(אלגוריתמי קירוב)** בבעיית התרמיל השלם נתונים n פריטים המתוארים כזוגות $\left(v_1, w_1\right), \ldots, \left(v_n, w_n\right)$ של ערך ומשקל. כמו כן נתון משקל כולל $W \in N$. ניתן להניח שלכל i מתקיים $w_i \leq W$ ושלא קיימים $i \neq j$ עבורם $\frac{v_i}{w_i} = \frac{v_j}{w_j}$.
הפלט עבור הבעיה הוא קבוצת איברים שמשקלם לא עובר את W ושערכם הכולל מקסימלי. באופן פורמלי, מבין כל קבוצות הקודקודים $I \in [n]$ המקיימות $\sum_{i \in I} w_i \leq W$ נרצה להחזיר אחת עבורה $\sum_{i \in I} v_i$ מקסימלי. הציעו אלגוריתם 2-מקרב לפתרון הבעיה.
רמז: הסתכלו על פתרון הבעיה השברית שראינו בכתה והשתמשו בו כחסם לפתרון האופטימלי של הבעיה השלמה.

5. **(אלגוריתמי קירוב)** בבעיית האריזה נתונים n פריטים שמשקליהם $a_1, \ldots, a_n$ ק"ג $(0 < a_i \leq 1)$. המטרה היא לארוז את כלל הפריטים במספר מינימלי של אריזות, כאשר מגבלת המשקל של כל אריזה היא 1 ק"ג ואי אפשר לחלק פריט ליותר מאריזה אחת. הציעו אלגוריתם 2-מקרב לפתרון הבעיה.