תרגיל 7- אלגוריתמים 67504:

שמות: דן קורנפלד, מתן קמינסקי

שאלה 1:

1. אלגוריתם:
   (a) נמספר את הקודקודים לפי סדר אקראי מ$1,..,|V|$.
   (b) נגדיר 2 קבוצות: $A=\left\{(i,j)\in E|i<j\right\}$, $B=\left\{(i,j)\in E|i>j\right\}$. נשים לב ש $E=A\uplus B$.
   (c) נחזיר את הקבוצה כך ש $max\left\{|A|,|B|\right\}$.

   הערה: נשים לב, כל קבוצה לא מכילה מעגלים היות וכל קבוצה פונה קדימה\אחורה בהתאמה כלומר DAG. כמו כן, בהכרח אחת הקבוצות היא לפחות חצי מE, ועל כן ניקח את המקסימום וכך האלגוריתם יחזיר תוצאה שהיא 2-קירוב לתוצאה האופטימלית (במידה וכל הצלעות לא יוצרות מעגל, התוצאה האופטימלית תהיה E).
2. זמן ריצה:
   (a) מספור הקודקודים $O(|V|)$
   (b) מעבר על כל הצלעות והשמת הצלעות בקבוצות A ו-B בהתאמה $O(|E|)$
   (c) החזרת המקסימום וחישובו $O(1)$
   (d) לכן סיבוכיות זמן הריצה הכוללת הינה $O(|E|+|V|)$
3. הוכחת חוקיות:
   אלגוריתם זה מחזיר צלעות אשר לא סוגרות מעגל מהנימוקים לעיל, לכן האלגוריתם הוא חוקי.
4. הוכחת קירוב:
   היות ו $E=A\uplus B$, כמו כן, בהכרח אחת הקבוצות היא לפחות חצי מE, לכן ניקח את הקבוצה בגודל המקסימלי, לכן היא תכיל בהכרח לפחות חצי מכלל הצלעות. יתר על כן במצב האופטימלי $OPT=|E|$, והאלגוריתם שהצענו מחזיר תוצאה f כך ש$f\geqslant\frac{1}{2}|E|\geqslant\frac{1}{2}OPT$ על כן האלגוריתם עומד בדרישות השאלה ■.

שאלה 2:

1. אלגוריתם:

עבור כל החטיפים מבין החטיפים שנבחרו על ידי לפחות אדם שענה על הסקר, נסכום את כמות האנשים שמעדיפים חטיף עם שמחת חיים (רגיל :)), חטיף דל נתרן, והאנשים בלי העדפה ספציפית.
לבסוף נעבור על כל חטיף ונבחר בפס היצור שבה כמות האנשים גדולה יותר מבין רגיל ודל נתרן.
הערה: אם יש כמות שווה בין רגיל לדל נתרן, נבחר ברגיל.
נשים לב, שעבור כל חטיף נבחר את פס היצור כך שרוב האנשים יהיו מרוצים (פירוט בהמשך)

2. זמן ריצה:

n- כמות אנשים
כמו כן: כמות החטיפים $\leqslant 5n$
לעבור על כל הצבעות החטיפים $O(n)$
עבור כל השמה של הצבעה $O(1)$ בתוחלת (טבלת גיבוב, בפועל כדי להוריץ זמן ריצה נשתמש ברשימה המכילה את כל המוצרים)
מעבר נוסף על כל החטיפים ובחירת פס יצור $O(n)$
לכן סיבוכיות זמן הריצה הכללי יהיה $O(n)$.

3. הוכחת חוקיות:

עבור כל חטיף נבחר 1 מבין 2 האפשרויות לפס ייצור עבור כל החטיפים שמשתתפי הסקר מילאו.

4. הוכחת קירוב:

עבור כל חטיף נרצה להכריע סוג פס ייצור כך שלפחות חצי מהאנשים יהיו מרוצים.
עבור כל חטיף שמרנו באלגוריתם את הנתונים של מספר האנשים שיעדיפו פס יצור רגיל, פס יצור דל נתרן, והאנשים ללא העדפה. היות והאלגוריתם בוחר פס יצור כך ש:
קבוצת האנשים שיכולים לא להיות מרוצים (כל האנשים שבחרו פס יצור רגיל\ דל נתרן), ומבניהם בוחרים את המקסימום שכן יהיו מרוצים. כלומר, כבר במצב זה, לפחות חצי מהאנשים שיכולים לא להיות מרוצים, יהיו מרוצים, כלומר לכל היותר חצי מהקבוצה הזו לא יהיו מרוצים. לקבוצה שבה האנשים יהיו מרוצים נוסיף את האנשים ש"לא אכפת להם" לכן קבוצת האנשים שלא יהיו מרוצים תהיה קטנה מחצי.

שאלה 3:

סעיף 1:

1. (i). $\frac{32}{31}$ - מקרב לבעיית ה-$Max-5SAT$
הסבר: כפי שנראה בסעיף הבא
2. (ii). $\frac{31}{32}m$ נחזיר אותה. אחרת, נחזיר fail.

הסבר: בתרגול ראינו טענה כך ש סיכוי ההצלחה של האלגוריתם הבסיסי $\geqslant \frac{1}{m+1}$
שם השתמשנו בכך שיש לנו משתנה מקרי X_i מחזיר אחד אם הפסוקית ה-i היא חיובית, אחרת מחזיר 0.
לאחר מכן, רצינו לחשב את התוחלת, למצוא תשובה נכונה, ורצינו למצוא את המאורע המשלים.
המאורע המשלים (הפסוקית יצאה false) הינו מקרה יחיד (היות ובין כל ליטרל יש "או"), לכן כדי לחשב את ההסתברות נבצע: עבור כל ליטרל ההסתברות היא מקרית כלומר $\frac{1}{2}$ ובמצב יש 5 ליטרלים בפסוקית לכן נקבל $\mathbb{E}(x_i) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5$

כלומר ההסתברות הכללית $\mathbb{E}(X) = \ldots = \sum_{i=1}^{m} \frac{31}{32} = \frac{31}{32}m$

3. (iii). $(m+1)k$ פעמים באופן בלתי תלוי.
הסבר: בתרגול למדנו שההסתברות לכישלון (והצלחה) של האלגוריתם הכולל, תלויה ב m, k ללא תלות בכמות הליטרלים בכל פסוקית, לכן השינוי לא ישפיע על חישוב הסיכוי. וישאר e^{-k}

סעיף 2:

1. נבצע את האלגוריתם מהתרגול ונשים לב למספר שינויים:

השינוי באלגוריתם הוא: כאשר אנחנו מגרילים תוצאה שהיא גדולה או שווה מ$\frac{3}{4}m$, נחזיר את התשובה, אחרת נחזיר fail ונבצע שוב את האלגוריתם.
2. חוקיות: האלגוריתם מחזיר פתרון חוקי (עבור כל ליטרל יחזיר תוצאה של אמת או שקר).
3. זמן ריצה: האלגוריתם הבסיסי עולה $O(n+m) = O(m)$. n עבור הגרלת המשתנים, m עבור בדיקה ההשמה (ידוע כי $n \leqslant 3m$). חוזרים עליו $k(m+1)$ פעמים כאשר k הוא מידת הדיוק בה מעוניין המשתמש. סה"כ זמן הריצה הוא $O\left(k \cdot m^2\right)$
4. נכונות (קירוב): אם האלגוריתם מצליח להחזיר השמה מספקת של $\frac{3}{4}m$ אז הוא $\frac{4}{3}$- מקרב שכן, $m \geqslant OPT$ גורר $f \geqslant \frac{3}{4}m \geqslant \frac{3}{4}OPT$, כאשר f הינו הפתרון של האלגוריתם שלנו ■.
5. נכונות (הסתברות)
היות ואנו רוצים שלא תהיה פסוקית שכולה בעלת אותו ערך בליטרלים, נסיר את האופציות ה-לא

תקינות כלומר (התוצאה שבה כולם $\mathbb{F}$, והתוצאה שכולם T) כלומר $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ מהאופציות הכלליות.

לכן, $\mathbb{E}(x_i) = 1 - \frac{1}{4} \Longrightarrow \mathbb{E}(x) = \frac{3}{4}m$

נעבוד באותה צורה מהתרגול ונגיע ל $P(the\ basic\ algorithm\ fails) \leqslant \frac{1}{m+1}$.

כמו כן, מהתרגול נראה ש

$$P(general\ algorithm\ fails) \ \leqslant \ \frac{1}{e^k} \Longrightarrow P(general\ algorithm\ succeeds) \geqslant 1 \ - \frac{1}{e^k}$$

כנדרש ■

שאלה 4:

הערה: בשאלה נסמן: $|V| = n,\ |E| = m$.

1. אלגוריתם: נבצע $k \cdot (m+1)$ את האלגוריתם הבסיסי <u>באופן בלתי תלוי</u>, אם באחת הריצות הייתה הצלחה נחזיר את התוצאה, אחרת נמשיך, עד שסיים את האיטרציות ונחזיר fail.
2. אלגוריתם בסיסי:
   (a) לכל משתנה x_i נבחר בצורה אחידה-רנדומלית מספר בין 1-3.
   (b) אם ההשמה שהגרלנו מספקת לפחות $\frac{2}{3}m$ - נחזיר אותה, אחרת נחזיר fail.
3. זמן ריצה: האלגוריתם הבסיסי עולה $O(n+m)$. n עבור הגרלת המשתנים, m עבור בדיקה ההשמה. חוזרים עליו $k(m+1)$ פעמים כאשר k הוא מידת הדיוק בה מעוניין המשתמש. סה"כ זמן הריצה הוא $O(k \cdot m(n+m))$
4. נכונות:
   (a) חוקיות: האלגוריתם מחזיר חלוקה של הקודקודים ל-3 קבוצות (כל קודקוד נמצא בקבוצה אחת בלבד).
   (b) נכונות (קירוב): אם האלגוריתם מצליח להחזיר השמה מספקת של $\frac{2}{3}m$ אז הוא $\frac{3}{2}$ - מקרב שכן, $m \geqslant OPT$ גורר $f \geqslant \frac{2}{3}m \geqslant \frac{2}{3}OPT$, כאשר f הינו הפתרון של האלגוריתם שלנו ■.
   (c) נכונות (הסתברות):
   נגדיר $A = \left\{(v,u) \in E \,\middle|\, y(v) \neq y(u)\right\}$
   ראשית נגדיר משתנה מקרי $X_i = \begin{cases} 1 & \text{אם הצלע שייכת לקבוצה}A \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$
   נשים לב $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$, עתה לכל e מתקיים:
   $$\mathbb{E}(X_i) = 0 \cdot P\Big(\underbrace{X_i = 0}_{\substack{\text{ההסתברות ש2 הקודקודים} \\ \text{של צלע להיות באותה הקבוצה}}}\Big) + 1 \cdot P(X_1 = 1) = 1 - P(X_i = 0) = \frac{2}{3}$$
   לכן: $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}(X_i) = \frac{2}{3}m$
   נגדיר $Y = m - X$ ולכן: $\mathbb{E}(Y) = E(m-X) = \mathbb{E}(m) - \mathbb{E}(X) = m - \frac{2}{3}m = \frac{1}{3}m$ נרצה לבדוק מה ההסתברות שמתקיים: $Y > \frac{1}{3}m$
   $$P\left(Y > \frac{1}{3}m\right) = P\left(Y \geqslant \frac{1}{3}m + \frac{1}{3}\right) = P\left(Y \geqslant \frac{1}{3}m + \left(1 + \frac{1}{m}\right)\right) \overset{\substack{\text{א"ש} \\ \text{מרקוב}}}{\leqslant} \frac{m}{m+1}$$ ולכן

ההסתברות שהאלגוריתם יצליח גדולה שווה ל- $\frac{1}{m+1}$.

ההסתברות שהאלגוריתם הכללי יכשל, יקרה כאשר האלגוריתם הבסיסי יכשל $k(m+1)$ פעמים.

מאי-תלות האיטרציות ההסתברות שקולה להסתברות של האלגוריתם הבסיסי יכשל פעם אחת בחזקת $k(m+1)$.

כפי שהוכחנו לעיל, ההסתברות שהאלגוריתם הבסיסי יכשל פעם אחת קטנה שווה ל- $1-\frac{1}{m+1}$,

לכן המצוין לעיל קטן שווה מ- $\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{k\cdot(m+1)} = \left(\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{(m+1)}\right) > \frac{1}{e^k}$, כנדרש

■.