תרגיל 1- אלגוריתמים 67504:

שמות: דן קורנפלד, מתן קמינסקי

שאלה 1:

1. סעיף א: הפרכה
   (a) נפשט את הביטויים: $\sqrt{log(log(n))} \underset{\star}{=} \sqrt{log(m)}$
      i. ★ - נציב: $n = 2^m$
   (b) נפשט את הביטוי השני:

$$log(log(\sqrt{n}) \underset{\star}{=} log\left(log\left(2^{\frac{m}{2}}\right)\right) = log\left(\frac{m}{2}log(2)\right) = log\left(\frac{m}{2}\right) = log\left(\frac{1}{2}\right) + log(m)$$

      i. ★ - נציב: $n = 2^m$
   (c) כמו כן, אנחנו יודעים ש $n > 1$, $log(n) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, ומונוטוני עולה ממש, לכן הפעלת שורש תקטין את הביטוי.
   (d) נרצה להראות עתה ש: $\sqrt{log(log(n))} \neq \Omega(log\left(log\left(\sqrt{n}\right)\right)$
   (e) מהחישובים לעיל מספיק להוכיח שלא מתקיים $\sqrt{log(m)} = \Omega(log(m))$.
      i. נניח בשלילה שכן מתקיים $\sqrt{log(m)} = \Omega(log(m))$, לכן קיים $0 < c \in \mathbb{R}$ כך ש: $\sqrt{log(m)} > c \cdot log(m)$, נציב $t = log(m)$: $\sqrt{t} > c \cdot (t-1)$, אך אנחנו יודעים שלא קיים c כך שהתנאי מתקיים, לכן לא קיים $c \in \mathbb{R}$, לכן הטענה לא נכונה, אך נפרט בכל מקרה

$$\sqrt{t} > c \cdot (t-1)$$

      ii.

$$\frac{\sqrt{t}}{(t-1)} = \frac{\sqrt{t}-1+1}{(t-1)} = \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} + \frac{1}{t-1} = \frac{\sqrt{t-1}}{\left(\sqrt{t}-1\right)\left(\sqrt{t}+1\right)} + \frac{1}{t-1} =$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{t}+1\right)} + \frac{1}{t-1} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

      iii. ולכן לא קיים $c \in \mathbb{R}$ המקיים את הטענה, היות וביטוי כל אחד מהמחוברים שואף ל-0, ונוכל להגדיר את הt המקסימלי שכל אחד מהביטויים שווה ל-$\frac{c}{2}$ (כמו ε), לכן החל ממקום מסוים הביטוי כולו קטן מ ε (מ-C) , לכן **הטענה לא נכונה■**
   (f)
2. סעיף ב: הפרכה
   (a) $\left(\sum_{j=1}^{n^2} \frac{n}{2^j}\right) \leqslant \left(\sum_{j=0}^{n^2} \frac{n}{2^j}\right) \leqslant \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{n}{2^j}\right) \xrightarrow{j\to\infty} 2n$
   (b) כלומר, הטור שואף ל-$O(n)$, לכן הסכום החלקי קטן מהטור כולו, לכן לא מתקיים ש $n\ = \Omega\left(n^2\right)\ = \Omega\left(4n^2\right)$ (הוכחה מטה)

(c) הוכחה: אם $n = \Omega\left(n^2\right)$ היה מתקיים, היה קיים $0 < c \in \mathbb{R}$ כך ש
$n > c \cdot n^2 \,/\, : n \; (n > 0)$
$1 > c \cdot n$, אך לא קיים $c > 0$ שהביטוי יתקיים, לכן $n \neq \Omega\left(n^2\right)$, לכן
הטענה לא נכונה ■

3. סעיף ג: הפרכה
   (a) נבצע log על 2 האגפים ונקבל:
   $$n^n \text{"?"} \; n^{log(n)} \to log\left(n^n\right) \text{"?"} \; log\left(n^{log(n)}\right) \to nlog(n) \text{"?"} \; log(n) \cdot log(n)$$
   (b) לכן כל שנותר לנו להוכיח, זה $o(n) = log(n)$, כי נוכל לצמצם את ה$log(n)$ ב-2 האגפים (היות והוא חיובי לכל $n > 1$)
   (c) נניח בשלילה שמתקיים:$\Omega(n) = log(n)$, לכן קיים $0 < c \in \mathbb{R}$ כך שהחל ממקום מסוים מתקיים: $c \cdot n < log(n) \to c < \dfrac{log(n)}{n}$, נראה ש $\dfrac{log(n)}{n}$ שואף ל-0, ולא יתקיים שקיים c כזה:
   (d) הוכחה כך ש: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{log(n)}{n} = 0$, $log(n), n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, לכן נוכל להשתמש בלופיטל, נגזור מונה ומכנה: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{nlog(2)}}{\frac{1}{1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nlog(2)} = 0$ ■
      i. log(2) עבור הבסיס
   (e) ולכן לא קיים C המקיים את סעיף (c) ולכן הוכחנו ש $o(n) = log(n)$
   (f) ולא יתקיים ש $nlog(n) = \theta(log(n) \cdot log(n))$ כמבוקש ■

4. סעיף ד: הוכחה
   (a) נוכיח באינדוקציה את הטענה:
   (b) בסיס: עבור $n = 1$: הוכחה: $log(n) = O(n)$: יהא $0 < c \in \mathbb{R}$ כך ש $log(n) < c \cdot n$, כלומר $\dfrac{log(n)}{n} < c$, הוכחנו ש$\dfrac{log(n)}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, לכן בהכרח קיים $c \in R$, לדוגמה $c = \dfrac{1}{2}$
   (c) צעד: נניח שהטענה מתקיימת עבור $n-1$, ונוכיח עבור הצעד ה-n.
   (d) $\underbrace{log(\dots log(n))}_{n\ times} = log\Big(\underbrace{O(n)}_{\text{צעד האינדוקציה}}\Big) \leqslant log(k \cdot n) \underset{\star}{=} \underbrace{O(n)}_{\text{מהבסיס}}$
   (e) ★ - נבחר $0 < k \in \mathbb{R}$ להיות $k \cdot n$ כך שהחל ממקום מסוים $O(n) < k \cdot n$ שבתוך הlog.
   (f) ■

5. סעיף ה: הפרכה:
   (a) נגדיר את הפונקציות: $f(x) = \begin{cases} n^{n+1} & x \text{ זוגי} \\ n^n & x \text{ אי זוגי} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} n^n & x \text{ זוגי} \\ n^{n+1} & x \text{ אי זוגי} \end{cases}$
   (b) ראשית, הפונקציות מונו-עולות: $\forall n \in \mathbb{N}$ זוגי: $f(n) < f(n+1) \implies n^n < (n+1)^{n+1}$, אי זוגי: $n^{n+1} < (n+1)^{n+1}$
   (c) נוסף על כך, נוכיח שלא קיים a_1, a_2 כך שהחל ממקום מסוים $a_2 g(x) < f(x) \lor a_1 f(x) < g(x)$

(d) הוכחה: בלי הגבלת הכלליות נוכיח ש $f(n) \neq \Omega(g(n))$, נוכיח בשלילה:

נניח שאכן קיים $0 < c \in \mathbb{R}$, ומתקיים

$c \cdot g(n) < f(n) \implies c \cdot n^{n+1} < n^n \implies cn < 1 \implies n < \frac{1}{c}$. נגדיר

$$N_1 = max\left\{\left\lceil \frac{1}{c} \right\rceil, N\right\}$$

ההגדרה של N הוא אותו ה-N שאנחנו מניחים שקיים לפי ההגדרה.

(e) לכן לא הגיוני שn חסום, סתירה ■

שאלה 2:

1. סעיף א:
   (a) בניסיון ההוכחה באינדוקציה, ההנחה דורשת שיהיה מטבע מזויף כלשהו מבין n המטבעות, אבל כשמזיזים מטבע לא ידוע אם הקלט עדיין תקין.
   (b) מכיוון שאנחנו בכל פעם מחברים לקודקוד מס 1, ומגבילים את צורת העץ אנחנו לא מסתכלים על כל סוגי העצים
   (c) לא כל המקרים מטופלים, אם $y = 1, x > 1$ (ולהפך) אזי כשאנחנו מחסירים אחד מx, y לא נקבל מספר חיובי לכן תנאי האינדוקציה לא מתקיים.

שאלה 3:

1. סעיף א:

(a) נוכיח את הטענה באינדוקציה, שעבור קבוצה של 2k משתתפות אשר לוחצות את היד למשתתפות אחרות כך שאין מעגל של 3 בנות, אז בהכרח כמות לחיצות הידיים לא גדולה מk^2.

(b) בסיס: עבור $k = 1$: יש 2 משתתפות, ולחיצת יש 1, כלומר $1^2 = 1$ ✓.

(c) הנחה: נניח שהטענה נכונה עבור k, ואכן אם התנאים מתקיימים אין יותר מk^2 לחיצות ידיים, ונוכיח עבור $k+1$.

(d) צעד: עבור $k+1$, יש $2k+2$ משתתפות. עבור $2k$ המשתתפות, יש k^2 לחיצות ידיים. עבור 2 המשתתפות החדשות, ננסה למקסם את כמות לחיצות הידיים, לכן כל אחת מה-2k משתתפות הקיימות לוחצת יד לאחת מהמשתתפות החדשות, ובנוסף 2 המשתתפות החדשות לוחצות ביניהן ידיים. אם אחת מ-2k המשתתפות היו לוחצות ל-2 החדשות, היה נסגר מעגל.

(e) לכן עבור 2k+2 משתתפות יש

$$(k+1)^2 = \underbrace{1}_{\text{לחיצה בין 2 החדשות}} + \underbrace{2k}_{\text{לחיצות של המשתתפות הקיימות והחדשות}} + \underbrace{k^2}_{\text{לחיצות קודמות}}$$ כמבוקש, ולכן

הטענה נכונה מש"ל

2. סעיף ב:

(a) נוסחת הרקורסיה של $merge\ sort$: $T(1) = 1, T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

i. בכל איטרציה מפצלים את המערך ל-2 (חצי חצי) ומבצעים n עבודה בכל איטרציה

(b) $log(n)$ איטרציות $\frac{n}{2^k} = 1 \Longrightarrow n = 2^k \Longrightarrow log(n) = k \Longrightarrow log(n)$

(c) נוכיח באינדוקציה שאכן מתקיים: $T(n) = 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + k \cdot n$

(d) בסיס: $k = 1$, ונקבל $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$ קיבלנו מה שרצינו ✓

(e) נניח שאכן הטענה מתקיימת לכל $k-1 \in \mathbb{N}$: $T(n) = 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + kn$ ונוכיח עבור k:

(f) צעד:

$$T(n) = 2^{k-1}T\left(\frac{n}{2^{k-1}}\right) + (k-1)n = 2^{k-1}\left(2T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \frac{n}{2^{k-1}}\right) + (k-1)n =$$

$$2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + n + (k-1)n = 2^kT\left(\frac{n}{2^k}\right) + k \cdot n \ \blacksquare$$

(g) לכן, עכשיו נשאר להוכיח ש$T(n) = O(nlog(n))$:

i. עבור $T(1) = 1$, מהסיבה המפורטת הנ"ל נציב $k = log(n)$ ונקבל:

$$T(n) = 2^{log(n)}T(1) + nlogn = n + nlog(n) < 2nlog(n) = O(nlog(n))$$

כמבוקש ■

3. סעיף ג:

(a) נוכיח שניתן עבור כל מספר טבעי גדול שווה ל-1, להביע אותו באמצעות סכום חזקות שונות

של 2.

(b) בסיס: $n = 1$: $2^0 = 1$ ✓

(c) צעד: נניח כי עבור $n \in \mathbb{N}$ ניתן להביע אותו באמצעות סכום חזקות שונות של 2, ונוכיח את הטענה עבור $n+1$.

(d) נפצל את הצעד ל2:

i. n זוגי: $n+1$ אי זוגי: היות וניתן להביע את n בסכום חזקות שונות של 2, והיות ולכל חזקה של 2 שהיא גדולה מ-0 זהו מספר זוגי, הבעת המספר n לא משתמש ב2^0 לכן לביטוי נוסיף 1, כלומר 2^0 ונקבל פתרון חוקי.

ii. n אי זוגי: $n+1$ זוגי: עד עכשיו במקרה האי זוגי הסברנו מדוע ה2^0 הוא חלק מהסכום, לכן כשנרצה להוסיף 1, נצטרך להוסיף עוד 2^0, אך $2^0 + 2^0 = 2^1$, לכן אם בסכום לא קיים 2^1 נשאיר את הסכום כך (ונוסיף את ה2^1), אם כבר קיים 2^1, נחבר עם ה- 2^1 החדש, נקבל 2^2 ונבצע את התהליך שוב ושוב עד שנקבל 2^i כך שלא חלק מהסכום עד עתה. בהכרח קיים כזה כי יש אינסוף טבעיים ותמיד ניתן לכתוב 2^n $n \in \mathbb{N}$, בנוסף, נוריד את כל המחוברים שהשתמשנו בהם בתהליך (כל ה 2^j שהם חלק מהסכום), עד לאותו 2^i כדי שהוספת ה2^i תהיה הוספה תקינה בהתאם להסבר לעיל, ולכן הוכחנו את הטענה ■.

4.