

# אלגוריתמים 2023/4 – תרגיל 7

שימו לב: כאשר אתם מציגים אלגוריתם מקרב, יש להוכיח נכונות ולספק זמן ריצה. שימו לב שהוכחת נכונות לאלגוריתם מקרב כוללת הוכחה של חוקיות הפתרון והוכחה שהוא מקרב כפי שנדרש.

1. (אלגוריתמי קירוב) בהנתן גרף מכוון  $G = (V, E)$ , יש להחזיר  $G' = (V, E')$  - תת גרף חסר מעגלים עם  $E'$  בגודל מקסימלי. הציעו אלגוריתם 2-מקרב, הוכיחו את נכונות ונתחו את זמן הריצה שלו. רמז: מספרו באקראי את הקודקודים והסתכלו על הצלעות ביניהם.

2. (אלגוריתמי קירוב) בסקר שעשתה חברת "אכלו לי שתו לי", כל משתתף בחר את חמשת החטיפים האהובים עליו מבין מגוון המוצרים הענק של החברה, ולכל מוצר שבחר ציין האם יעדיף לקנות את הגרסה הרגילה, את הגרסה דלת הנתרן או שאין לו דעה בנושא. החברה מעוניינת לשנות את פס הייצור כך שכל חטיף ייוצר או בגרסתו הרגילה או בגרסתו דלת הנתרן (לא ניתן לייצר את שניהם יחד), באופן כזה שכמה שיותר מהמשתתפים בסקר ימצאו חטיף שקולע להעדפותיהם. שימו לב כי אם אין למישהו דעה בנוגע לחטיף מסוים, שתי הגרסאות קולעות להעדפותיו. הציעו פתרון 2-מקרב לבעיה. הוכיחו נכונות וזמן ריצה.

3. (אלגוריתמי קירוב הסתברותיים) ראינו בכיתה אלגוריתם  $\frac{8}{7}$ -מקרב הסתברותי לבעיית ה-Max-3SAT. 3.1. ניתן להרחיב את האלגוריתם המדובר כך שיפתור גם את בעיית ה-Max-5SAT (הזהה לבעיית ה-Max-3SAT, רק שבה בכל פסוקית מובטח כי ישנם חמישה ליטרלים עם  $V$  ביניהם, במקום שלושה) באמצעות שינויים קלים בלבד. השלימו את הפרטים החסרים בתיאור האלגוריתם והסבירו את בחירותיכם.

הצעה לאלגוריתם (i) \_\_\_\_\_ -מקרב לבעיית ה-Max-5SAT:

אלגוריתם בסיסי:

1. לכל משתנה  $x_i$  נטיל מטבע הוגן: אם יצא עץ נגדיר  $x_i = T$  ואחרת  $x_i = F$ .
2. אם ההשמה שהגרלנו מספקת לפחות (ii) \_\_\_\_\_ פסוקיות – נחזיר אותה. אחרת, נחזיר fail.

אלגוריתם כללי:

נחזור על האלגוריתם הבסיסי (iii) \_\_\_\_\_ פעמים באופן בלתי תלוי. אם באחת הריצות הייתה הצלחה – נחזיר את ההשמה שהתקבלה, אחרת – נחזיר fail.

**התשובה שאתם מגישים צריכה להכיל לכל אחד מהפרטים (i)-(iii), ביטוי מתמטי בודד והסבר קצר.**

3.2. נתבונן בבעיה דומה שמוגדרת באופן הבא: בהינתן נוסחת 3CNF נרצה להחזיר השמה שממקסמת את מספר הפסוקיות שבהן יש לפחות ליטרל אחד שמקבל ערך אמת ואחד שמקבל ערך שקר. הציעו אלגוריתם  $\frac{4}{3}$ -מקרב הסתברותי לבעיה, ציינו את מקדם הקירוב והוכיחו את נכונותו.

4. (אלגוריתמי קירוב הסתברותיים) בבעיית ה-Max-3-Coloring נתון גרף לא מכוון  $G = (V, E)$ . אלגוריתם הפותר את הבעיה מחזיר פונקציה  $\chi: V \rightarrow \{1, 2, 3\}$  ("צביעה" של הקודקודים במספרים 1, 2, או 3) עבורה מספר הצלעות שקודקודיהן צבועים בצבעים שונים מקסימלי. כלומר צביעה עבורה **גודל** הקבוצה הבאה מקסימלי:  $\{(v, u) \in E | \chi(v) \neq \chi(u)\}$

הראו אלגוריתם  $\frac{3}{2}$  - מקרב הסתברותי לבעיית ה-Max-3-Coloring, הוכיחו את נכונות הקירוב ונתחו את זמן הריצה שלו.