תרגיל 8- אלגוריתמים 67504:

שמות: דן קורנפלד, מתן קמינסקי

שאלה 1:

1. נציע את האלגוריתם הבא: נגדיר קודקוד s אשר יהיה קודקוד המקור החדש ו t קודקוד הבור החדש.
   עבור כל קודקוד S מהקבוצה, נגדיר צלע היוצאת מs לצלע ב S, באותו אופן עבור כל קודקוד ב-T נוציא צלע ל-t.
   עבור כל צלע היוצאת מ-s לקודקוד ב-S, נגדיר את הקיבול להיות סכום הקיבולים של כל הצלעות היוצאות מהקודקוד הנוכחי, באותו אופן נבצע זאת עבור כל צלע שהוספנו מקודקוד ב-T ל-t.
   נריץ FF
2. נציע את האלגוריתם הבא: נגדיר גרף חדש $\widetilde{G} = \left(\widetilde{V}, \widetilde{E}\right)$ המוגדר באופן הבא $\widetilde{V} = V \cup \left\{\tilde{s}, \tilde{t}\right\}$
   כאשר $\tilde{s}, \tilde{t}$ הינם קודקודים חדשים אשר אינם נמצאים בגרף המקורי. נגדיר
   $\widetilde{E} = E \cup E_{\tilde{t}} \cup E_{\tilde{s}}$ כך ש $E_{\tilde{t}} = \left\{\left(\tilde{t}, t\right);\ \forall t \in T\right\}, E_{\tilde{s}} = \left\{\left(\tilde{s}, s\right);\ \forall s \in S\right\}$
   כעת, נגדיר פונקצית קיבול $\tilde{c} : \widetilde{E} \to \mathbb{R}^+$ כך ש $\tilde{c}(e) = \begin{cases} c(e) & e \in E \\ \sum_{v \in \widetilde{V}} c(s, v) & \left(\tilde{s}, s\right) = e \in E_{\tilde{s}} \\ \sum_{v \in \widetilde{V}} c(v, t) & \left(t, \tilde{t}\right) = e \in E_{\tilde{t}} \end{cases}$ נגדיר רשת
   זרימה $\widetilde{N} = \left(\widetilde{V}, \widetilde{E}, \tilde{c}, \tilde{s}, \tilde{t}\right)$. נריץ FF ונקבל זרימה $\tilde{f}$. נגדיר f שווה ל-$\tilde{f}$ לאחר הצמצום ל-E.
3. נוכיח כי הפתרון מחזיר זרימה חוקית ברשת:
   (a) חוק שימור החומר: $\forall x \in V \setminus S \cup T$ מתקיים ש
   $$\sum_{u:(u,x)\in E} f(u,x) = \sum_{u:(u,x)\in E} \tilde{f}(u,x) = \sum_{v:(x,v)\in E} \tilde{f}(x,v) = \sum_{v:(x,v)\in E} f(x,v)$$
   (b) אילוץ הקיבול: מתקיים $\forall e \in E$, $f(e) = \tilde{f}(e) \leqslant \tilde{c}(e) = c(e)$
4. נוכיח כי הפתרון מחזיר זרימה מקסימלית:
   נניח בשלילה כי קיים f' כך ש $|f'| > |f|$, נשים לב כי השטף של f הינו סכום השטפים של כל קודקודי S, ומאופן הגדרת $\widetilde{N}$ ומחוק שימור החומר נובע שהשטף של $\tilde{f}$ שווה לסכום השטפים של קודקודי S. כלומר לאחר שנרחיב את הרשת נקבל ש $|\tilde{f'}| > |\tilde{f}|$ מכאן ש$\tilde{f}$ אינה זרימה מקסימלית ברשת $\widetilde{N}$ סתירה.

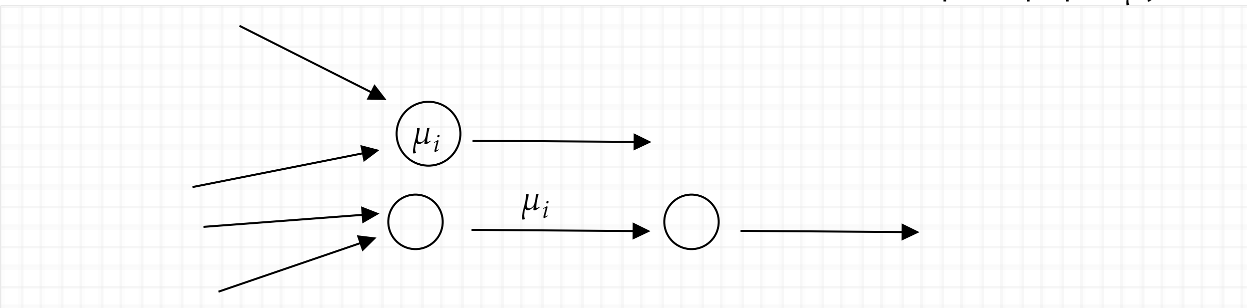
שאלה 2:

סעיף א:

1. עבור כל צלע בין 2 קודקודים $u, v \in V$ נגדיר 2 צלעות: $(u, v), (v, u)$ (עם כיוון). כמו כן, נתון לנו s, t, אולם עם הוספת הצלעות נקבל מצב שנכנסת צלע לקודקוד המקור ויוצאת צלע מקודקוד הבור, לכן נרצה להגדיר s', t' חדשים כך שתצא צלע אחת מ-s' ל-s ומ-t ל-t' כדי שההנחה שלא נכנסות לקודקוד המקור ולא יוצאות צלעות מקודקוד הבור תתקיים. בהרצאות הנוכחנו למה טכנית אשר דנה בסוגיה אם קיים מצב בו יש 2 צלעות בין 2 קודקודים ויש להן $f > 0$, הוכחנו שניתן להסיר את הצלעות הרלוונטיות ולקבל פתרון חוקי ואופטימלי, לכן נוכל להפעיל את האלגוריתם EK שלמדנו גם על המצב המתואר לעיל ונקבל פתרון חוקי ואופטימלי כמבוקש העונה על דרישות השאלה.

סעיף ב:

1. עבור כל קודקוד i, נוסיף צלע וקודקוד, כך שעבור קיבול הקודקוד μ_i, נגדיר את הקיבול של הצלע להיות μ_i ונוריד את מגבלת הקיבול עבור הקודקוד. כמו כן, נוסיף קודקוד לאחר הצלע שהוספנו כך שהוספת הצלע והקודקוד תהווה לחלוטין את המגבלה של הקיבול, כך נוודא שלא יעבור זרם גדול מ-μ_i מהקודקוד המקורי.



סעיף ג:

1. נגדיר רשת זרימה $N = (V, E, c, s, t)$ כאשר לכל $e \in E$ $c : E \to \{0, 1\}$ $c(e) = 1,$. נריץ את האלגוריתם EK, נחזיר את השטף של f. היות ואנחנו סופרים את מספר המסלולים, בדומה לתרגול אנו רוצים ברגע שהעברנו זרם מסוים במסלול כלשהו, לא נוכל להעביר שוב זרם באותו מסלול ולכן השטף של f סופר מסלולים זרים בגרף. לדוגמה: אם קיים קודקוד כלשהו שאליו נכנסות 2 צלעות בעלות זרימה 1, אזי בהכרח קיימות לפחות 2 צלעות היוצאות ממנו (מחוק שימור החומר), ולכן לא נקבל מצב בו המסלול אינו זר.

סעיף ד:

1. נשלב בין הרעיונות שהעלנו בסעיפים ב+ג, עבור כל קודקוד נגדיר קיבול 1, כלומר שניתן להעביר מסלול אחד בלבד דרכו. לכן, נשתמש בפתרון בסעיף ב' (נבנה את הגרף החדש) ונריץ את הפתרון בסעיף ג' כדי למצוא את המספר המקסימלי של מסלולים ☺.

הסבר: עבור כל קודקוד אנו מגדירים שלא ניתן להעביר יותר ממסלול אחד דרכו, לכן כשאנו מגדירים שהקיבול 1 ופועלים לפי ההגבלה של סעיף ב' אנו בהכרח מחייבים את הקודקוד להעביר לכל היותר מסלול אחד. כמו כן, בסעיף ג' הצענו אלגוריתם שיספור עבור גרף חוקי N את מספר המסלולים כאשר הצלעות זרות, לכן הפעלת הפתרון בסעיף ב' ולאחר מכן הפעלת הפתרון בסעיף ג' יתן פתרון תקין.

שאלה 3:

1. אלגוריתם: נבנה גרף דו-צדדי בעל n קודקודים בכל צד ו-2 קודקודים s, t באופן הבא: $G = (V, E)$, $V = L \cup R \cup \{s, t\}$ ל-$L = R = [n]$. כמו כן, $E = \left\{(i, j) \in A \middle| i \in L, j \in R\right\} \cup \left\{(s, l) \middle| l \in L\right\} \cup \left\{(r, t) \middle| r \in R\right\}$. נגדיר פונקצית קיבול $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ כך ש $\forall e \in E :\ c(e) = 1$. נגדיר את רשת הזרימה להיות $N = (V, E, c, s, t)$. נריץ את אלגוריתם EK ונסמן ב-f את הזרימה שהחזיר. נשים לב ש $f : E \rightarrow \mathbb{Z}$ היות וכל הקיבולים היו שלמים, ולכן לכל $e \in E$ מתקיים ש $f(e) \in \{0, 1\}$. נגדיר את הקבוצה $M = \left\{e \in E \middle| f(e) = 1 \wedge e = (u, v)\ u \neq s,\ v \neq t\right\}$ אם גודל הקבוצה שווה ל-n נחזיר אמת, כלומר קיים תמורה חוקית, אחרת נחזיר שקר.
2. הוכחת נכונות: ראינו בתרגול כי האלגוריתם מחזיר את הזיווג המקסימלי בגרף, כמו כן הנכונות הינה זהה לכן האלגוריתם חוקי ונכון מההוכחה בתרגול עבור המקסימליות, נפרט עבור המקרה שלנו. היות והאלגוריתם בודק התאמה חד חד ערכית ועל של $L = [n] \rightarrow [n] = R$, כלומר אם נמצא התאמה כזו, נקבל מיפוי מכל מספר ב-L למספר ב-R כך שעבור כל מספר לא חוזר על עצמו (הגדרת התמורה), לכן בהכרח נכון אם גודל הקבוצה הוא n.
3. זמן ריצה: הגדרת גרף $|V| = n,\ |E| = \underbrace{2n + |A|}_{\substack{\text{מהגדרת} \\ E}} \implies O(|E| + |V|) \implies O(n + |A|)$. זמן ריצת האלגוריתם $EK \implies O\left(|V| \cdot |E|^2\right) \implies O\left(n^2\right)$, בדיקת המניה של n הינו $O(n)$, לכן סיבוכיות זמן הריצה הכוללת הינה $O\left(n^2 + |A|^2\right)$ ■.

שאלה 4: :)

סעיף א:

1. עבור כיסוי מסלולים כלשהו, אנו צריכים 2 דברים
   (a) מסלולים (קבוצת קודקודים עבור כל מסלול)- איחוד כל המסלולים יכיל את כל הקודקודים
   (b) לכל 2 מסלולים אין קודקוד משותף
2. כלומר אם נניח שיש לנו כיסוי כלשהו, וקיימים 2 קודקודים $i, j \in V$ כך שאם מחברים אותם בצלע, לא גורמים לחיתוך בין המסלולים, נקבל כיסוי חדש, כך שבכיסוי החדש יש פחות מסלולים (הרי איחדנו בין 2 מסלולים), ומספר הצלעות גדול יותר מהכיסוי הקודם.
3. נניח יש לנו כיסוי כלשהו, ולא קיימת צלע שניתן לחבר בין 2 קודקודים, כלומר הגענו למצב של כיסוי מינימלי, היות ולא ניתן לצמצם את מספ המסלולים, ולכן גם לא ניתן להגדיל את כמות הצלעות בכיסוי מהנקודה הקודמת, לכן סכום הצלעות בהכרח מקסימלי במצב זה.

סעיף ב:

1. בהינתן גרף $G = (V, E)$ מכוון ללא מעגלים, נגדיר את הגרף $G' = (V', E')$ באופן הבא:
   $V' = \{s, t\} \cup \{v_1, .., v_n\} \cup \{u_1, .., u_n\}$, $E' = \{i \in [n]\} \cup \{i \in [n]\} \cup \{(i, j) \in E\}$.
   (כלומר נשכפל כל קודקוד בגרף המקורי ונחבר את קודקודי צד שמאל v_i עם קודקודי צד ימין u_j אם ורק אם $(i. j) \in E$), בנוסף s, t קודקוד בור ומקור בהתאמה.
   נגדיר פונקצית קיבול $c : E' \to \mathbb{R}^+$ לכל $e \in E,\ c(e) = 1$. עבור רשת הזרימה $N = (V', E', c, s, t)$ נפעיל את אלגוריתם FF ונקבל רשת זרימה f.
   נגדיר $M = \left\{ e \in E \middle| f(e) = 1 \wedge e = (u, v)\ u \neq s,\ v \neq t \right\}$.
   נתחיל לבנות את קבוצות ה-P_i: יהא קודקוד v_i ונוסיפו ל-P_i נבדוק האם קיים u_j כך ש $(v_i, u_j) \in M$, אם כן ניקח את המקביל (v_j) ונוסיף למסלול P_i. נמשיך לעשות כך עד אשר קורה אחד מ2 התרחישים הבאים:
   (a) לקודקוד v_k לא קיים $(v_k, u_z) \in M$ ולכן v_k יסגור את המסלול.
   (b) נגיע לקודקוד u_z עבורו v_z מתחיל מסלול P_j כך ש $j < i$ (כלומר מסלול קיים). במקרה זה, נאחד בין המסלולים, למסלול ארוך יותר המתחיל ב P_i וממשיך ל-P_j.
   את ההסבר לעיל נבצע בצורה שיטתית החל מv_1 עד v_n בכדי לוודא שעברנו על כל קודקודי הגרף ושייכנו כל קודקוד למסלול.
2. הוכחה:
   (a) תחילה נראה מדוע קיבלנו כיסוי: מאופן פעולת האלגוריתם ומעבר על הקודקודים, כל קודקוד משויך למסלול כלשהו. לא יתכן שנקבל קודקוד המוכל ב-2 מסלולים, היות ונתון לנו גרף G ללא מעגלים.
   בנוסף,בכל פעם שהאלגוריתם נתקל בקודקוד שכבר טיפל בו הוא מאחד בין המסלולים, ולכן לא יכול להיות קודקוד ב-2 מסלולים שונים. אם נתקלנו בקודקוד שטופל, הקודקוד חייב להיות בתחילת מסלול שבנינו, שכן נניח בשלילה שלא, נקבל שעבור קודקוד מסוים בגרף דוצ קיימות 2 צלעות מ-2 קודקודים שונים שיוצאים לאותו קודקוד ושניהם בהתאמה, בסתירה לאופן פעולת האלגוריתם. בנוסף, קודקוד לא יכול לצאת ל-2 קודקודים שונים ב-u, ולכן לא יכול להיות חיתוך בין מסלולים.
   (b) לפי סעיף א' הכיסוי המינימלי מכיל כמות צלעות מקסימלית. לכן, לפי אופן פעולת האלגוריתם

האלגוריתם מאחד מסלולים כל עוד ניתן (לפי ההוכחה בסעיף א' והמימוש באלגוריתם) לכן בהכרח האלגוריתם מחזיר פתרון לבעית כיסוי המסלולים המינימלי כמבוקש :)