תרגיל 8- מבני נתונים 67109:

שם: דן קורנפלד

חלק א:

1. שאלה א:

(a) בחיפוש BFS כשאנחנו נמצאים בקודקוד x, בשורה מספר 10 בקוד ואנחנו עוברים בכל פעם על הרשימה המקושרת בשיטת adjacency-list, ואך ורק עליה (כלומר אנחנו לא עוברים על קודקודים שאין להם צלע משותפת בכלל). לעומת זאת, כשעוברים על מטריצת שכנויות, עבור כל קודקוד צריך לעבור בלולאה את כל הקודקודים, גם אם אין להם צלע משותפת ולבדוק בלולאה האם בכלל יש צלע משותפת, לפני שמכניסים את הקודקוד ללולאה.

(b) אם לכל קודקוד אנחנו עוברים על כל שורת הקודקודים בלולאה, מעבר על שורת הקודקודים עורכת $\theta(|V|)$, ומכיוון שבסופו של דבר אנחנו עוברים על כל הקודקודים, סיבוכיות זמן הריצה תהיה $\theta\left(|V|^2\right)$. מכיוון שמספר הקשתות המקסימלי לא יכול להיות גדול מ- $|V|^2$, $\theta\left(|V|^2+|E|\right) = \theta\left(|V|^2\right)$, ולכן סיבוכיות זמן הריצה תהיה $\theta\left(|V|^2\right)$

2. שאלה ב:

(a) עבור DFS אנחנו עוברים על רכיבי הקשירות השונים בגרף נתון.

(b) אם הגרף קשיר (עם מעגלים)- $O(|E|)$, הסבר: יש לפחות מספר שווה של קודקודים ושל צלעות, ויתכן שמספר הצלעות יהיה גדול משמעותית ממספר הקודקודים (כמו בגרף שלם המכיל $\frac{|V|(|V|-1)}{2} \approx O\left(|V|^2\right)$ צלעות. מכיוון שאנחנו עוברים על כל קודקוד וכל צלע סיבוכיות זמן הריצה תהיה בעיקר כתלות במספר הצלעות, כלומר $O(|E|)$.

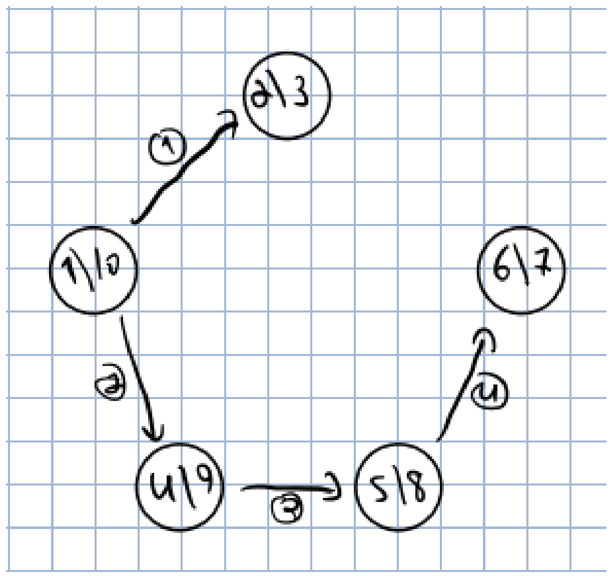
(c) עבור גרף עץ (קשיר וחסר מעגלים)- למדנו ש $|E| = |V|-1$ כלומר סדר הגודל של מספר הקודקודים ושל מספר הצלעות שווה, לכן סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם יהיה גם $O(|E|)$ וגם $O(|V|)$.

(d) אם הגרף חסר מעגלים (יער), מספר הקודקודים יהיה גדול ממספר הצלעות, והמעבר על הגרף וסיבוכיות זמן הריצה תהיה בעיקר כתלות במספר הקודקודים (ייתכן שכל קודקוד יהיה רכיב קשירות בפני עצמו, ולא יהיה כלל צלעות), כלומר $O(|V|)$

המשך בעמוד הבא:

3. שאלה ג:

(a) זוגות $1\backslash10, 2\backslash3, 4\backslash9, 5\backslash8, 6\backslash7$



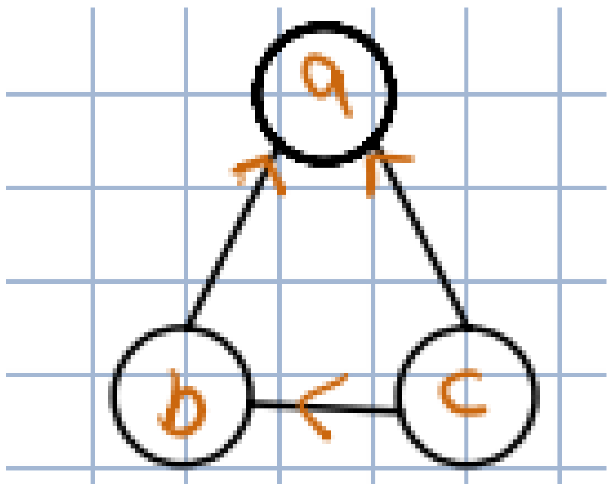
המשך בעמוד הבא

4. .

(a) שאלה ד:

i. טענה נכונה: מכיוון שהגרף קשיר ולא מכוון, ניתן להתקדם בכל 2 קודקודים שיש להם צלע המחברת ביניהם. מכיוון שהגרף קשיר מהגדרה: לכל 2 קודקודים בגרף קיים מסלול המחבר ביניהם, לכן לכל קודקוד שנבחר בגרף נוכל להגיע לכל קודקוד אחר בBFS, כך שעץ הרוחב המתקבל בסוף הרצת ה-BFS יכיל את כל הקודקודים בגרף G.

ii. טענה לא נכונה: עבור הדוגמה הנגדית המופיעה מטה אשר מקיימת את דרישות הטענה (G גרף מכוון בו ישנה קשת מכיוון אחר בלבד בין כל 2 קודקודים), קיים קודקוד a שלא ניתן להגיע אליו לשום קודקוד אחר, כלומר אם נפעיל עליו את BFS העץ רוחב יכיל רק את a בעצו, ולכן לא יכיל את כל הקודקודים בגרף.



4. המשך

(a) המשך שאלה ד:

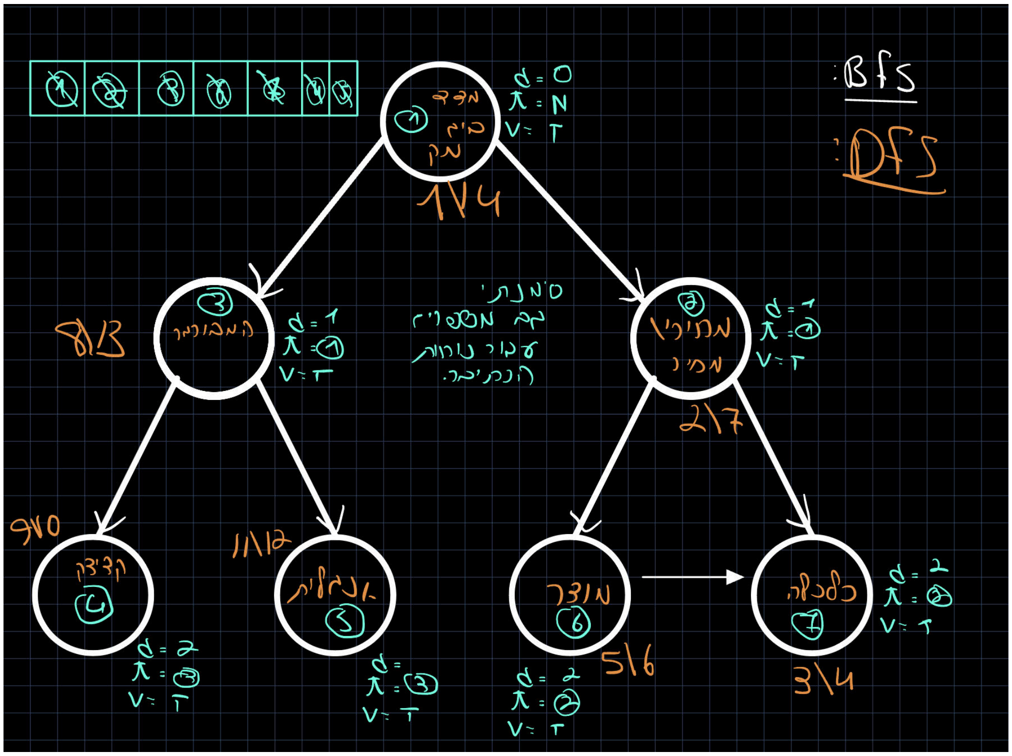
iii. טענה נכונה: מכיוון שגרף G לא מכוון והוא מעגל כלשהו, בהכרח קיים לs שכן שיהיה הגרף האחרון שיתווסף אליו (מעצם היות מעגל בגרף). מכיוון שיש לפחות 3 קודקודים, הגובה יהיה לכל הפחות 2, אמנם בפועל שכן של s בגובה 1, ולכן לא הגיוני שעץ העומק יכיל את **כל** המסלולים הקצרים ביותר מs.

תרגיל 8- מבני נתונים 67109:

שם: דן קורנפלד

חלק 2:

1. שאלה א:



2. שאלה ב:

(a) אלגוריתם לבדיקת מספר הצלעות בגרף עבור רשימת שכנויות: מכיוון שיש לנו את כל הערכים של ויקיפדיה במערך, ועבור כל תא במערך יש מצביע לרשימה מקושרת שמכילה את כל הצלעות שיש לאותו ערך שאנחנו סורקים, אם נסרוק את רשימת השכנויות (כלומר הרשימה המקושרת) נעבור בכל פעם על כמה שפחות מידע מיותר (מכיוון שברשימה כבר אין כפילויות, בשונה מBFS וDFS לא בודקים כלל האם כבר עברנו בצלע הזו או לא וכדו). לכן: בתחילת האלגוריתם נגדיר מונה (counter) שבכל פעם שסופרים את מספר הקודקודים בכל ערך המונה גדל ב-1, בסיום כל רשימה מקושרת עוברים לתא הבא במערך עד שנגיע לתא האחרון במערך של הרשימה המקושרת. במצב זה אנחנו עוברים על $O(|E| + |V|)$, כלומר על כל תא במערך, וסהכ על כל הצלעות.

המשך בעמוד הבא:

3. שאלה ג:

(a) כשנרצה לתעדף חסכון בזיכרון על פני דברים אחרים, נעדיף להשתמש ברשימת שכנויות, מכיוון שברשימה נשמרים אך ורק הקודקודים אשר מחוברים לקודקוד אליו הרשימה שייכת, בניגוד למטריצה ששומרת מקום רב לקודקודים שאין להם קשר כלל לקודקוד אליו השורה במטריצה שייכת. מתוך כל הערכים בויקיפדיה ($\forall v \in V$) רוב מוחלט של ההערכים לא מופיעים בכל ערך וערך, כלומר בכל שורה יהיה בזבזו רב של מקום שלא ממומש בפועל. למדנו שגודל הייצוג של מטריצת שכנויות הוא $O(|V| + |E|)$ אשר יהיה קטן אסימפטוטית מ $\theta\left(|V|^2\right)$ מההסבר הנ"ל.

4. שאלה ד:

(a) אנחנו נדרשים למצוא את מספר הזוגות של הקודקודים שלא קיים מסלול בניהם. מכיוון שניתן להניח שנוכל לחזור אחורה מכל קודקוד לקודקודים אחורה (למרות שזהו גרף מכוון) מאפשר להתייחס לקבוצת כל הקודקודים שניתן להגיע אליהם כאל רכיב קשירות 1.

(b) נסרוק את רכיבי הקשירות בעזרת חיפוש BFS, בעת החיפוש ניצור מערך שכל תא שלו יכיל 2 איברים: קודקוד מרכיב הקשירות (כדי לסמן באיזה רכיב קשירות אנחנו נמצאים) ובנוסף נשמור את מספר הקודקודים ברכיב הקשירות (בעזרת counter בסריקת ה-BFS).

(c) לאחר שיש לנו מיפוי של הגרף מבחינת רכיבי הקשירות ומספר הקודקודים בכל רכיב, נבדוק עבור כל רכיב קשירות: כמה קודקודים הוא מכיל ונכפול במספר הקודקודים שלא מוכלים ברכיב הקשירות (כלומר שלא מחוברים לקודקודים) כך נספור כמה קודקודים לא מחוברים לכל אחד מרכיב הקשירות. נבצע את התהליך על כל הרכיבי הקשירות ולאחר שנסכום את כל הרכיבים נחלק ב-2 (מכיוון שאנחנו סופרים כל זוג פעמיים [פעם אחת עבור כל קודקוד]) וכך נקבל את מספר הזוגות של הקודקודים שלא קיים מסלול בניהם

תרגיל 8- מבני נתונים 67109:

שם: דן קורנפלד

חלק 3:

שאלה א:

- ראשית, נגדיר פונקציה שמחזירה את רשימת כל הקודקודים שנמצאים ברכיב קשירות של קודקוד s כלשהו. פעולה זו תשתמש באלגוריתם BFS, כך שכל קודקוד שנעבור עליו באותו רכיב הקשירות יתווסף לרשימה.
- אלגוריתם: נגדיר משתנה עזר counter שיאותחל לערך 0 בתחילת האלגוריתם. נבדוק בעזרת הפעולה הנ"ל את מספר הקודקודים ברכיב הקשירות ש s נמצא בו, ונשמור במשתנה x. נעבור בלולאה על כל הצלעות שמחוברות ל-s, נוריד אותה זמנית ונבדוק כמה קודקודים עכשיו יש ברכיב הקשירות שמכיל את s: אם קיימים פחות קודקודים, נגדיל ב-1 את ה-counter, נחזיר את הצלע שהסרנו וכך נתקדם לצלע הבאה עד לסיום הלולאה. בסיום הלולאה, נחזיר את counter.
- הסבר: ידוע לנו שאנחנו רוצים למצוא צלע שמפצלת רכיב קשירות מסוים, ל2 רכיבי קשירות. אם נבצע באופן שיטתי בדיקה על ידי הורדת צלע מקודקוד מסוים ובדיקה על גודל רכיב הקשירות, נדע אילו צלעות מהוות "צלע בקבוק".
- זמן ריצה: עבור s קודקוד עם p צלעות, סיבוכיות זמן הריצה תהיה $O(|V| + |E|)*p$, כלומר לכל קודקוד עושים BFS, אך יתכן ש P תהיה שווה ל-V ולכן במקרה הגרוע ביותר יתקיים $O\left(|V|^2\right) \Leftarrow O\left(|E||V| + |V|^2\right)$

המשך בעמוד הבא:

שאלה ב:

- בגרף דו צדדי נבדוק בכל שלב אם לקודקוד מסוים יש צלעות רק עם הקבוצה השניה (הקבוצה הזרה)
- באלגוריתם נבדוק בעזרת סריקת BFS האם לכל קודקוד בקבוצה מסוימת רק צמתים בקבוצה השניה.
- פירוט: נאתחל את כל הצמתים באותם משתנים כמו עבור ריצה של BFS ובפרט לכל צומת במקום $v.visited$ שמכיל רק אמת או שקר, נשמור משתנה מספרי שיכיל 3 אופציות:
  - 0- האלגוריתם לא עבר כלל על הקודקוד
  - 1- אם הקודקוד בקבוצה U
  - 2- אם הקודקוד בקבוצה W
- בסריקת הBFS כשבודקים האם כבר עברו על הקודקוד, נבדוק על כל רכיב קשירות בנפרד:
  - אם כרגע אנחנו נמצאים בקודקוד שלא ביקרו בו $(v.visited = 0)$ נבדוק באיזה ערך הקודקוד שקדם לו נמצא $(1 \setminus 2)$ ונשים את הערך השונה.
  - במידה ונגיע לקודקוד בעל ערך שונה מ-0 נבדוק:
    - אם הערך הנוכחי של הקודקוד שונה מהערך של הקודקוד שהגיעו ממנו? המצב תקין, נמשיך בסריקת ה-BFS
    - אם הערך הנוכחי של הקודקוד שווה לערך של הקודקוד שהגיעו ממנו, כלומר קיימים 2 קודקודים עם אותו צבע- הגרף לא דו צדדי, נסיים את הסריקה ונחזיר "שקר"
    - בסוף הסריקה אם לא החזרנו "שקר", הגרף אכן דו צדדי, ונחזיר אמת.
- הסבר: מכיוון שבכל פעם עוברים על קודקוד כלשהו, מסמנים אותו בערך מסוים שיביע קבוצה כלשהי ואת הקודקודים המחוברים אליו בערך השני, בדיקת הגרף הדו צדדי יתקיים, מכיוון שהתנאי הבסיסי ביותר שאסור ל2 קודקודים עם צלע משותפת להיות מאותה קבוצה, ולכן אנחנו מסווגים באמצעות האלגוריתם את הגרף ל-2 קבוצות שרירותיות שמקיימות את התנאי.
- סיבוכיות זמן: כדי למצוא רכיבי קשירות סיבוכיות זמן הריצה תהיה כמו של BFS $O(|V| + |E|)$, ביצוע האלגוריתם בעזרת BFS $O(|V| + |E|)$ ולכן סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם יהיה $O(|V| + |E|)$.