אלגוריתמים 2023 – תרגיל 8

תזכורות:

רשת זרימה היא חמישייה $N = (V, E, c, s, t)$ כאשר: $G = (V, E)$ *גרף מכוון*, $c: E \to R_{>0}$ *פונקציית קיבול על הצלעות,*
$s, t \in V$ *שני קדקודים מיוחדים (מקור ובור).*
(הנחה: אין צלעות הנכנסות לקדקוד המקור s ואין צלעות היוצאות מקדקוד הבור t)

זרימה חוקית ברשת זרימה היא פונקציה $f: E \to R_{+}$ המקיימת שני אילוצים:
(1) אילוץ הקיבול: לכל $e \in E$ מתקיים: $f(e) \leq c(e)$.
(2) חוק שימור החומר: לכל $x \in V \setminus \{s, t\}$: $\sum_{v:(x,v) \in E} f(x, v) = \sum_{u:(u,x) \in E} f(u, x)$.

שטף של הזרימה f ברשת זרימה מוגדר להיות $|f| := \sum_{v:(s,v) \in E} f(s, v)$.

בעיית הזרימה: קלט: רשת זרימה $N = (V, E, c, s, t)$.
פלט: זרימה חוקית ברשת הזרימה הנתונה N בעלת שטף $|f|$ מקסימלי.

1. נגדיר **רשת זרימה מרובת מקורות ומרובת בורות באופן הבא:**
חמישייה $N = (V, E, c, S, T)$ כאשר: $G = (V, E)$ *גרף מכוון*, $c: E \to R_{>0}$ *פונקציית קיבול על הצלעות,* $S, T \subseteq V$
שתי קבוצות קודקודים מיוחדים (קבוצות מקורות וקבוצת בורות).
(הנחה: אין צלעות הנכנסות לקדקודי מקור S ואין צלעות היוצאות מקדקודי בור T)

זרימה חוקית ברשת זרימה כזו היא פונקציה $f: E \to R_{+}$ המקיימת שני אילוצים:
(3) אילוץ הקיבול: לכל $e \in E$ מתקיים: $f(e) \leq c(e)$.
(4) חוק שימור החומר: לכל $x \in V \setminus \{S \cup T\}$: $\sum_{v:(x,v) \in E} f(x, v) = \sum_{u:(u,x) \in E} f(u, x)$.

שטף של הזרימה f ברשת זרימה כזו מוגדר להיות $|f| := \sum_{v \in V, s \in S:(s,v) \in E} f(s, v)$.

בעיית הזרימה: קלט: רשת זרימה כזו $N = (V, E, c, S, T)$.
פלט: זרימה חוקית ברשת הזרימה הנתונה N בעלת שטף $|f|$ מקסימלי.
כלומר זו רשת זרימה רגילה, למעט שני שינויים: אנו מתירים מספר קודקודי מקור ומספר קודקודי בור.
הציעו אלגוריתם שפותר את הבעיה. הוכיחו כי הפתרון שלכם מחזיר זרימה מקסימלית ברשת הנתונה.
רמז: מתוך הרשת הנתונה בנו רשת רגילה, הריצו אלגוריתמים FF/EK **על רשת זו**, והיעזרו בפלט המתקבל על מנת לבנות פלט נדרש.

2. בשאלה זו נתונות בעיות. הציעו אלגוריתם לפתרון כל אחת מבעיות אלו בהנחה שיש בידיכם אלגוריתם פולינומיאלי המוצא זרימה חוקית מקסימלית ברשת זרימה (אדמונדס-קארפ). הניחו כי הדרך בה האלגוריתם עובד מבטיחה כי אם פונקציית הקיבול היא בשלמים ($c: E \to N$), אז הזרימה שתוחזר מהאלגוריתם גם היא בשלמים ($f: E \to N \cup \{0\}$).
הסבירו **בקצרה** את תשובותיכם. אין צורך להוכיח את נכונות האלגוריתמים ולנתח זמן ריצה.

   1. **קלט:** גרף **לא** מכוון $G = (V, E)$ עם קיבולות על הצלעות $c: E \to R^{+}$, קדקוד מקור s וקדקוד בור t.
   פלט: זרימה מקסימלית בגרף. זרימות עדיין מוגדרות כמכוונות, על אף שהצלעות עצמן אינן מכוונות. בכל צלע ניתן להזרים את מלוא הקיבול בכל אחד מהכיוונים.
   2. **קלט:** רשת זרימה $N = (V, E, c, s, t)$, כאשר גם לכל קדקוד בגרף יש חסם קיבולי $\mu: V \to R^{+}$. כלומר, כמות החומר העוברת בקדקוד חסומה אף היא.
   פלט: זרימה מקסימלית ברשת, תחת כלל המגבלות.
   3. **קלט:** גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קדקודים $s, t \in V$.

<u>פלט</u>: המספר המקסימלי של מסלולים בגרף מ-s ל-t הזרים בצלעות. כאשר שני מסלולים מ-s ל-t יקראו **זרים בצלעות** אם אין אף צלע משותפת ביניהם.

4. **<u>קלט</u>:** גרף מכוון $G = (V, E)$ ושני קדקודים $s, t\in V$.

<u>פלט</u>: המספר המקסימלי של מסלולים בגרף מ-s ל-t הזרים בקדקודים. כאשר שני מסלולים מ-s ל-t יקראו **זרים בקדקודים** אם אין אף קדקוד משותף ביניהם, פרט ל-s ול-t.

3. יהי $n\in N$ ותהי $\pi: [n] \rightarrow [n]$ תמורה (פונקציה חח"ע ועל מקבוצה לעצמה). בהנתן קבוצה $A\subseteq[n] \times [n]$ נאמר שהתמורה π היא **חוקית** ביחס ל-A אם:

$$\{(i, \pi(i))| i = 1, ..., n\}\subseteq A$$

1. הציעו אלגוריתם יעיל אשר בהינתן הזוג $(n, A\subseteq[n] \times [n])$ מחזיר האם קיימת תמורה חוקית או לא, כלומר האם קיימת תמורה π כך שמתקיים $\{(i, \pi(i))| i = 1, ..., n\}\subseteq A$.
2. הוכיחו את נכונות האלגוריתם לבעיית ההכרעה הנתונה.
3. נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם (שימו לב שזמן הריצה צריך להיות מבוטא כתלות בנתונים לבעיה המקורית).

4. נגדיר את בעיית כיסוי המסלולים המינמלי: בהינתן קלט $G = (V, E)$ גרף מכוון ללא מעגלים, הפלט הוא k מסלולים חוקיים ב-G, $\{P_1, P_2, ..., P_k\}$ כך ש-k מינימלי, המכסים את כל הקודקודים ב-V (כל מסלול מתואר כ-סדרת קודקודים $(P = (v_1, ..., v_m)$. זאת, כך שהחלוקה מקיימת שלכל $i\neq j$ - $P_i \cap P_j = \emptyset$, כלומר המסלולים אינם חולקים קודקודים.
כמה נקודות לשים לב אליהן: (1) לא כל המסלולים P_i צריכים להיות באותו אורך. (2) כיסוי המסלולים המקסימלי לכל גרף הוא הכיסוי הטריוויאלי בו כל $P_i = (v_i)$, כלומר קבוצת המסלולים באורך 0 המכסים את V.

1. *הוכיחו כי כיסוי מסלולים מינימלי מכיל מספר צלעות מקסימלי ביחס לכל כיסוי מסלולים אחר (כאשר מספר הצלעות בכיסוי הוא סכום מספר הצלעות בכל אחד מהמסלולים).*
2. *הציעו אלגוריתם לפתרון בעיית כיסוי המסלולים המינימלי והוכיחו את נכונותו בעזרת סעיף א'.*

<u>הדרכה:</u> בהינתן גרף $G = (V, E)$ כך ש-$V = \{1, 2, ..., n\}$, הגדירו רשת זרימה עבורה:

$$V' = \{s, t\} \cup \{v_1, v_2, ..., v_n\}\cup\{u_1, u_2, ..., u_n\}$$

$$E' = \{i\in[n]\} \cup \{i\in[n]\} \cup \{(i, j)\in E\}$$

(כלומר, נשכפל כל קודקוד בגרף המקורי ונחבר את קודקודי צד שמאל v_i עם קודקודי צד ימין u_j אמ"מ קיימת צלע (i, j) בגרף המקורי. בנוסף, בדומה לתרגול נחבר את קודקודי צד שמאל למקור ואת צד ימין לבור).