מבנה נתונים - תרגיל בית 6

10 במאי 2023

חלק 1

שאלה 1

הגדרה: עומק של קודקוד בעץ מושרש, הוא אורך המסלול שלו מהשורש.
הגדרה: גובה של קודקוד בעץ מושרש, הוא מספר הקשתות במסלול הפשוט הארוך ביותר מהקודקוד לעלה.
הגדרה: גובה של עץ בינארי, הוא העומק המקסימלי של קודקוד בעץ.
הגדרה: עץ בינארי כמעט שלם -nearly complete binary tree- הוא עץ בינארי מגובה h, כך שישנם 2^d קודקודים מעומק d לכל $d \in \{0,1,...,h-1\}$. וכל הקודקודים בעומק h מיושרים לשמאל ככל הניתן.

1. הוכיחו שכל קודקוד בעץ בינארי כמעט שלם, היינו שורש של תת-עץ בינארי כמעט שלם (שימו לב שיש להוכיח כאן שלושה דברים: תת-העץ הוא עץ, הוא עץ בינארי והוא כמעט שלם).
2. הוכיחו שלעץ בינארי יש לכל היותר 2^k קודקודים מעומק k.
3. יהי עץ בינארי כמעט שלם מגודל n ומגובה h. הוכיחו שמתקיים $2^h \leq n \leq 2^{h+1}-1$. הסיקו שהגובה של עץ בינארי כמעט שלם הוא בין $\log_2 n - 1$ לבין $\log_2 n + 1$.
4. יהי עץ בינארי כמעט שלם גודל n. הוכיחו שהגודל של כל תת-עץ הוא לכל היותר $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$.

שאלה 2

ראיתם בכיתה פסאודו קוד עבור האלגוריתם $Max-Heapify$, כתבו בפסאודו קוד גרסה איטרטיבית עבור אלגוריתם זה, והוכיחו את נכונותה.
רמז: הטענה לשמורת הלולאה יכולה להיראות כך: "בתחילת האיטרציה ה-j, בערימה המושרשת ב-i_1 הזוגות היחידים של אב קדמון וצאצא שיכולים להפר את תכונת הערימה, הם i_j וצאצאיו." כאשר i_j הוא התא עליו מבצעים את ההשוואות באיטרציה j.

שאלה 3

הריצו את הפעולות הבאות על ערימת המקסימום $A = [7,2,5,3,4,9]$. כלומר הקלט לכל פעולה הוא המערך כפי שהוא אחרי שהפעולה הקודמת לה ברשימה הסתיימה. ציירו את מצב הערימה בכל שלב ולידה את המערך המתאים.

1. Build-Max-Heap (A)
2. Extract-Max (A)
3. Delete $(A, p(4))$ כאשר $p(4)$ הוא פוינטר לקודקוד שמכויל את המספר 4.
4. Max (A) (ולא Extract-Max (A)!)
5. Insert $(A, 4)$

חלק 2

שאלה 4

תהי H ערימת מקסימום בעלת n מספרים שונים.

1. הציעו אלגוריתם המחזיר את המספר העשירי הכי גדול (מספר שיש בדיוק 9 מספרים אחרים שגדולים ממנו) בסיבוכיות $O(1)$. הוכיחו שזמן הריצה הוא אכן $O(1)$. (אין צורך בפסאודו קוד ואין צורך בהוכחת נכונות האלגוריתם, אך הוא צריך להיות נכון).
2. כתבו אלגוריתם המדפיס את k המספרים הגדולים ביותר בערימה. על זמן הריצה של האלגוריתם להיות $O(k \log(k))$. נתחו את זמן הריצה ואת המקום שהאלגוריתם דורש והוכיחו את נכונותו.
   כתבו פסאודו קוד עבור האלגוריתם
   רמז: זיכרו כי יש לכם גישה לכל התאים בערימה בסיבוכיות זמן $O(1)$. היעזרו בתור קדימויות נוסף (שניתן לממש על ידי ערימה) ועדכנו אותו באופן דינאמי במהלך ריצת האלגוריתם.

חלק 3

שאלה 5

נתון מערך $A[1,\dots,n]$ של מספרים לא ממויינים, כאשר $n = 2^h$, $h > 0$ שלם.
ברצוננו לבנות מבנה נתונים המאפשר לנו למצוא לכל זוג של אינדקסים $1 \le i \le j \le m$ את האיבר המינימאלי בתת המערך $A[i,\dots,j]$, $Find - Min(A,i,j)$ (אין צורך בפסאודו קוד).

1. עליכם להציע כיצד לבנות מבנה שכזה בזמן קבוע כך שכל קריאה ל-$Find - Min$ תתבצע בזמן ליניארי במקרה הגרוע, וכן הסבירו בקצרה את $Find - Min$.

2. כעת עלינו לבנות מבנה שכזה בזמן ליניארי כך שכל קריאה ל-$Find - Min$ תתבצע בסיבוכיות זמן $O(\log n)$ במקרה הגרוע. הציעו אלגוריתמים עבור $Build - DS$ שגרה שבונה את מבנה הנתונים וגם עבור $Find{-}Min$. הסבירו בפירוט את נכונות האלגוריתמים. תנו הסבר זמני הריצה. אין צורך לכתוב פסאודו קוד, אפשר לתאר את האלגוריתם במילים
רמז: עבור $Build - DS$, התחילו עם ערימת מינימום בגודל $m = 2n - 1$ כך שאיברי המערך המקורי יהיו העלים של ערימה זו, השלימו את ערכי התאים האחרים בעזרת בניו כך שכל צומת גם ישמר את תכונת הערימה וגם ישמור מידע שימושי.
רמז: בישביל ניתוח סיבוכיות הזמן נסו לחשוב כמה צמתים בערימה אתם צריכים כדי לדעת את המינימום. בהינתן שכתבתם אלגוריתם רקורסיבי נסו להבין כמה צמתים בכל רמה מבצעים את הקריאות הרקורסיביות (התשובה היא לכל היותר שני צמתים!)