אלגוריתמים 2024 – תרגיל 1

מועד הגשה ***11.1.24*:** עד השעה 23:00 באתר הקורס – יש להגיש בזוגות

1. (חזרה על נוטציות אסימפטוטיות) אילו מהטענות הבאות נכונות? הוכיחו או הפריכו.

a) $\sqrt{log\ log\ (n)} = \Theta\left(log\ log\ \left(\sqrt{n}\right)\right)$

b) $\left(\sum_{j=1}^{n^2} \frac{n}{2^j}\right) = \Omega(4n^2)$

c) $n^n = \Theta(n^{log\ n})$

d) לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים: $\underbrace{log\ log\ \ log\ log\ \ log\ log\ \ ...log\ log\ n}_{k\ times} = O(n)$

e) תהיינה $f, g: N \to N$ פונקציות עולות מונוטונית. תמיד מתקיים $g(n) = \Omega\big(f(n)\big)$ או $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$.

2. (אינדוקציה) ביומנו הסודי של שרגא נמצאו הוכחות אינדוקציה רבות, אולם כאשר ביקש לפרסמן נמצאו בהן מספר שגיאות. התוכלו לעזור לאתרן? שימו לב – הסבירו <u>במדויק</u>, ו<u>במשפט או שניים בלבד</u>, מה חסר בכל הוכחה ומדוע היא נכשלת. להלן קטעים מהיומן:

a) בעיה מוכרת היא לזהות בעזרת מאזניים מבין n מטבעות זהים בצורתם ($n \geq 2$) מהו המזויף אשר קל יותר מהשאר, בעזרת מספר שקילות מינימלי (הניחו כי בהכרח יש מטבע מזויף, ואחד בלבד). מעטים יודעים, עם זאת, שמצאתי הוכחה שגורסת כי ניתן לעשות זאת בארבע שקילות בלבד! נוכיח זאת באינדוקציה על מספר המטבעות, n.

עבור מקרה הבסיס, $n = 2$, מספיקה שקילה בודדת.

כעת נניח באינדוקציה כי ניתן בעזרת ארבע שקילות למצוא את המזויף מבין n מטבעות ונראה נכונות עבור $n + 1$. במקרה זה, נוציא מטבע כלשהו הצידה. נפעיל את התהליך על n המטבעות שנותרו. אם יש בהם מטבע מזויף – נהדר, אחרת – המטבע המזויף הוא זה שהוצאנו.

b) מצאתי הוכחה פשוטה יותר להראות שלכל עץ בעל n קודקודים יש $n - 1$ קשתות. נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הקדקודים n. תנאי הבסיס הוא $n = 1$. זהו עץ עם קודקוד אחד ולכן אין כלל צלעות. כעת נניח כי לכל עץ עם n קודקודים יש $n - 1$ צלעות ונראה שהדבר נכון עבור עץ עם $n + 1$ קודקודים. יהי עץ עם n קודקודים. מהנחת האינדוקציה הוא מכיל $n - 1$ צלעות. נחבר את הקדקוד החדש באמצעות צלע לקודקוד מס' 1 בעץ. קיבלנו עץ עם $n + 1$ קדקודים ו-
$(n - 1) + 1 = n$ צלעות.

c) אאוריקה! הצלחתי להראות שכל המספרים השלמים החיוביים שווים זה לזה! נוכיח זאת בעזרת הטענה הבאה: אם המקסימום של שני מספרים שלמים חיוביים שווה ל-n, אזי שני המספרים שווים.

נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n = 1$, אם שני מספרים שלמים חיוביים שהמקסימום שלהם 1, אזי שניהם חייבים להיות 1.

נניח כי הטענה נכונה עבור n כלשהו ונראה עבור $n + 1$. נסמן את המספרים $x, y \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ ונתון כי $(x, y) = n + 1$. אם כן, נסתכל על $n = (x - 1, y - 1)$. מהנחת האינדוקציה, $x - 1 = y - 1$ ולכן $x = y$.

3. הוכיחו באינדוקציה את הטענות הבאות:

a) יהא $n \in \mathbb{N}$. במסיבה עם $2n$ משתתפות, כל משתתפת לוחצת יד עם משתתפות אחרות, אך לא קיימות שלוש משתתפות שלחצו ידיים כל אחת עם אחרת (לא "נסגר מעגל" לחיצות ידיים ביניהן). הוכיחו כי מספר לחיצות הידיים לא גדול מ– n^2.

b) רשמו את נוסחת הרקורסיה לזמן הריצה של אלגוריתם MergeSort והוכיחו באינדוקציה כי הוא חסום ע"י $O(n\ log\ \ n)$. לנוחיותכם מצורף הקוד לאלגוריתם. ניתן להניח כי $n = 2^k$ עבור $k \in \mathbb{N}$.

```
MergeSort(A,n):
if n != 1:
      p = ⌊n/2⌋
      B = MergeSort(A[1,…,p[,p)
      C = MergeSort(A[p+1,…,n],n-p)
      A = Merge(B, p, C, n-p)
return A

Merge(A, n, B, m):
init C[n+m]
init i=1, j=1
for k=1…n+m:
      if i = n+1: // finished loading A into C
            C[k..n+m] = B[j..m]
            return C
      else if j = m+1:
            C[k..n+m] = A[i..m]
            return C
      else if A[i] < B[j]:
            C[k] = A[i]
            i += 1
      else:
            C[k] = B[j]
            j += 1
```

c) ניתן לכתוב כל $1 \le n \in \mathbb{N}$ כסכום של חזקות <u>שונות</u> של 2.

לדוגמה:

$$23 = 1 + 2 + 4 + 16 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^4$$
$$15 = 1 + 2 + 4 + 8 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3$$

<u>הדרכה</u>: פצלו את המקרה הכללי לשניים, אחד עבור n זוגי ואחד עבור n אי-זוגי.