אלגוריתמים 2024 – תרגיל 6

מועד הגשה: 15.02.24 עד ל-23:00 באתר הקורס (הגשה בזוגות)

הערה כללית: בבעיות שבתרגיל זה מספיק רק לכתוב את הבעיה בצורה הסטנדרטית.

1. רפתן רוצה להאכיל את פרותיו ולדאוג שתהיינה בריאות. על מנת לעשות זאת הרפתן מכין תערובת אוכל מיוחדת עבור הפרות. כדי שיהיו בריאות צריכים להתקיים התנאים הבאים:

(1) כמות החלבון שכל פרה אוכלת צריכה להיות לפחות 40 גרמים,
(2) כמות הסיבים התזונתיים צריכה להיות בין 10 ל-20 גרמים,
(3) בכל יום כל פרה צריכה לאכול פחות מ-2000 קלוריות.

הרפתן יכול לקנות כמות לא מוגבלת של כל אחד משלושה סוגי אוכל. הרפתן כתב טבלה ובה איגד את הערכים התזונתיים ואת המחיר של כל אחד מסוגי האוכל. הנתונים הם ביחס ל-100 גרם מאותו סוג אוכל:

סוג אוכל	חלבון	סיבים תזונתיים	קלוריות	מחיר
פולי סויה	20	0	100	25
חיטה	5	2	1000	15
תבן	0	5	0	40

מטרת הרפתן היא למצוא את התערובת הזולה ביותר שמספקת את הדרישות המתוארות למעלה.
לדוגמה: אם נבחרו 200 גרם של פולי סויה, 0 גרם של חיטה ו-200 גרם של תבן כמות החלבון בסך הכל היא $2 \cdot 20 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 40$ גרם ועלות התערובת היא $2 \cdot 25 + 0 \cdot 15 + 2 \cdot 40 = 130$ שקלים.
יצגו את הבעיה כבעיית תכנון לינארי בצורה הסטנדרטית, כך שתתאר את האילוצים לעיל הרכב התערובת ותמזער את עלות התערובת. שימו לב: עליכם להגדיר במפורש את A, b, c ו x.

2. צוות אלגוריתמים ישב לחבר בוחן אמצע. הבוחן יכול להכיל שאלות מהנושאים: אלגוריתמים חמדניים, תכנון דינמי, אלגוריתמי קירוב, וצריך לעמוד בתנאים הבאים:

(4) רמת הקושי הכולל שלו צריכה להיות לפחות 4, אבל לא יותר מ-8,
(5) הזמן הכולל שהוא לוקח צריך להיות לכל היותר 1 שעות,
(6) מידת העניין בו צריכה להיות לפחות 6.

הצוות חיבר שלוש שאלות ולכל אחת ציין את רמת הקושי, הזמן, מידת העניין בה וכמות הדיו הנדרשת לשאלה:

נושא	רמת קושי	זמן	מידת עניין	כמות הדיו הנדרשת לשאלה
אלגוריתמים חמדניים	10	1.5	0	20
תכנון דינמי	3	1	14	6
אלגוריתמי קירוב	2	0	8	4

הניחו כי לכל שאלה יש המון סעיפים, ולכן ניתן לבחור גם רק חלק ממנה (כלומר מספר ממשי בין 0 ל-1). אם כן, כעת נותר לבחור מהו החלק מכל שאלה שיופיע בבוחן.
לדוגמה: אם נבחרו 0.2 משאלות האלגוריתמים החמדניים, 0.7 מהתכנון הדינאמי ו-0.35 מאלגוריתמי הקירוב, אזי רמת הקושי הינה $10 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.7 + 2 \cdot 0.35 = 4.8$.
יצגו את הבעיה כבעיית תכנון לינארי בצורה הסטנדרטית, כך שתתאר את האילוצים לעיל על הרכב השאלות בבוחן, תוך מזעור כמות הדיו הכוללת שהצוות יצטרך להוציא על הדפסת כל בוחן. שימו לב: עליכם להגדיר במפורש את A, b, c ו x.

3. עבור גרף לא מכוון $G = \langle V, E \rangle$, תת-קבוצה של הצמתים $S \subseteq V$ נקראת בלתי תלויה אם לכל זוג צמתים $v_1, v_2 \in S$, לא קיימת קשת (v_1, v_2). תת-קבוצה בלתי תלויה מקסימלית של V היא תת-קבוצה בלתי תלויה מגודל מקסימלי.
בבעיית מציאת קבוצה בלתי תלויה מקסימלית, הקלט הוא גרף לא מכוון G, והפלט הוא תת-קבוצה בלתי תלויה מקסימלית של צמתיו.

בשאלה זו, נציג את בעיית מציאת הקבוצה הבלתי תלויה המקסימלית כבעיית תכנון לינארי בשלמים.

- (סעיף עיכול – לא להגשה) ציירו גרף וסמנו בו מספר קבוצות צמתים בלתי תלויות.

1. הגדירו את x ואת c (מה אנחנו מנסים למקסם? מה הערך של כל x?). הגדירו מהם האילוצים על x.
2. נתבונן באוסף הפתרונות החוקיים לבעיה. מה הם האילוצים שמגדירים אוסף זה? כתבו את האילוץ שמגדירה כל קשת $(u, v) \in E$.

3. תרגמו את האילוצים הנ"ל לאילוצים לינאריים על המשתנים שהגדרתם בסעיף א'. במילים אחרות, לכל אילוץ שהגדרתם בסעיפים א' ו-ב', הגדירו וקטור a וסקלר s כך שהאילוץ מתקיים אמ"מ $\langle a, x\rangle \leq s$.
4. הגדירו מטריצה A ווקטור b שמגדירים, יחד עם x ו-c מסעיף א', תכנית לינארית בצורה סטנדרטית לבעיית מציאת קבוצה בלתי תלויה מקסימלית. שימו לב: הבעיה צריכה להיות מוגדרת כבעיית תכנון לינארי בשלמים - הוסיפו את האילוץ הנוסף הנדרש לשם כך.

4. בצורה הקנונית (הסטנדרטית) של תכנון לינארי הגדרנו שכל משתנה חייב להיות אי-שלילי. עם זאת, לפעמים נרצה לאפשר גם משתנים שליליים. בשאלה זו נראה כי בעזרת אלגוריתם שפותר בעיות תכנון לינארי בצורה הקנונית ניתן גם לפתור בעיות תכנון לינארי עם משתנה אחד שיכול להיות שלילי. יתרה מכך, נוכל לעשות את אותו תהליך מספר פעמים ולקבל בעיית תכנון לינארי בלי הגבלה זו על אף משתנה.
נניח כי נתונה לנו תכנית לינארית מהצורה הבאה:

$$c^T x$$

$$Ax \leq b$$

$$\forall j \neq i \; x_j \geq 0$$

כלומר, זוהי בעיית תכנון לינארי רגילה בה אנו מתירים למשתנה x_i להיות שלילי. הראו כי ניתן לפתור בעיה זאת בעזרת אלגוריתם הפותר בעיות תכנון לינארי בצורה הקנונית.
<u>הנחיה</u>: התחילו מהגדרת שני משתנים חדשים $x_i^+, x_i^- \geq 0$ ובנו בעיית תכנון לינארי על וקטור המשתנים: $\hat{x} = (x_1, \dots x_{i-1}, x_i^+, x_i^-, x_{i+1}, \dots, x_n)$. הבעיה אמורה להראות כך:

$$\hat{c}^T \hat{x}$$

$$\hat{A}\hat{x} \leq \hat{b}$$

$$\hat{x} \geq 0$$

עבור ערכים כלשהם $\hat{A}, \hat{c}, \hat{b}$ שתבחרו.
הוכיחו את הטענה הבאה: לכל פתרון חוקי x לבעיית התכנון הלינארי הראשונה קיים פתרון חוקי $\hat{x}$ לבעיה השנייה כך ש-$c^T x = \hat{c}^T \hat{x}$. כמו כן, לכל פתרון חוקי $\hat{x}$ לבעיית התכנון הלינארי השנייה קיים פתרון חוקי x לבעיה הראשונה שמקיים את אותו השוויון. הסיקו כי ניתן לפתור את הבעיה המקורית בעזרת אלגוריתם שפותר רק בעיות תכנון לינארי בצורה הקנונית.