תרגיל 5- אלגוריתמים 67504:

שמות: דן קורנפלד, מתן קמינסקי

שאלה 1:

1. ראשית, האילוץ הראשון שאנחנו מסתכלים עליו עבור תוצאה מינימלית\מקסימלית, הינו המחיר. נרצה למצוא דרך לייצג את מחיר סוגי האוכל כדי למצוא עלות מינימלית. באופן פתרון בעית הקירוב הלינארי, אנו נדרשים למצוא $max\ c^T x$, לכן נרצה להגדיר את וקטור c כ**מינוס** המחירים של כל סוג אוכל, כך שהמחיר המקסימלי עבור תוצאת האלגוריתם, יהיה המינימלי של המזון ללא הוספת המינוס. כלומר נגדיר: $c = \begin{pmatrix} -25 \\ -15 \\ -40 \end{pmatrix}$
$$25 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 40 \cdot x_3 \geqslant min \ \rightarrow -25 \cdot x_1 - 15 \cdot x_2 - 40 \cdot x_3 \leqslant max$$ ($-Min \Longleftrightarrow Max$)
2. נגדיר את $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, וקטור בגודל 3, המבט את הכמות של כל סוג אוכל עבור הפרות, x_1- פולי סויה, x_2- חיטה, x_3- תבן.
3. עבור A, b נרצה ליצור מטריצה הכוללת את אוסף התנאים הנדרשים לפתרון.
   (a) תנאי: כמות החלבון שכל פרה אוכלת צריכה להיות לפחות 40 גרמים:
   עמידה בתנאי:
   $$20 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \geqslant 40 \Longrightarrow \ -20 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 - 0 \cdot x_3 \leqslant \ -40$$
   (b) תנאי: כמות הסיבים התזונתיים צריכה להיות לפחות 10 גרמים:
   עמידה בתנאי: $0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \geqslant 10 \Longrightarrow \ -0 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 5 \cdot x_3 \leqslant \ -10$
   (c) תנאי: כמות הסיבים התזונתיים צריכה להיות לכל היותר 20 גרמים:
   עמידה בתנאי: $0 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leqslant 20$
   (d) תנאי: בכל יום כל פרה צריכה לאכול פחות מ-2000 קלוריות:
   עמידה בתנאי: $100 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \leqslant 2000$

   את התנאים הנ"ל נשים במטריצה A כך שכל התנאים יהיו בוקטור b, כך שנקבל:
   $$Ax = \begin{pmatrix} -20 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 100 & 1000 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} -40 \\ -10 \\ 20 \\ 2000 \end{pmatrix} = b$$

$$\max c^T x$$
$$s.t\ Ax \leqslant b,$$
$$x \geqslant 0$$

שאלה 2:

1. ראשית, נרצה להתייחס לדרישה בשאלה עבור שימוש מינימלי בכמות הדיו. באופן פתרון התכנון הלינארי, אנו נדרשים למצוא $\max c^T x$. נגדיר את הוקטור c להיות הוקטור האחראי על השימוש בדיו. היות והאלגוריתמים אשר פותרים את הבעיה מחפשים c מקסימלי, נרצה להוסיף מינוס עבור כל שימוש, כדי שהשימוש יהיה מינימלי ($-Min \iff Max$) כלומר נגדיר: $c = \begin{pmatrix} -20 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$: עמודה 1 עבור אלגוריתמים חמדניים, עמודה 2 עבור תכנון דינמי, עמודה 3 עבור אלגוריתמי קירוב.
2. נגיד את הוקטור $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ כך ש $0 \leqslant x_1, x_2, x_3 \leqslant 1$ המהווים את החלק היחסי מהשאלות: אלגוריתמים חמדניים, תכנון דינמי, אלגוריתמי קירוב בהתאמה. היחס צריך להיות בין 0 ל-1, כלומר החלק היחסי בשאלה.
3. עבור A, b נרצה ליצור מטריצה הכוללת את אוסף התנאים הנדרשים לפתרון.
   (a) תנאי: רמת הקושי הכולל שלו צריכה להיות לפחות 4:
   עמידה בתנאי: $10 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \geqslant 4 \Longrightarrow -10 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 \leqslant -4$
   (b) תנאי: רמת הקושי הכולל שלו צריכה להיות לכל היותר 8:
   עמידה בתנאי: $10 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \leqslant 8$
   (c) תנאי: הזמן הכולל הוא לכל היותר 1 שעות:
   עמידה בתנאי: $1.5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \leqslant 1$
   (d) תנאי: מידת העניין בו צריכה להיות לפחות 6
   עמידה בתנאי: $0 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \geqslant 6 \Longrightarrow 0 \cdot x_1 - 14 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \leqslant -6$

   את התנאים הנ"ל נשים במטריצה A כך שכל התנאים יהיו בוקטור b, כך שנקבל:
$$Ax = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -2 \\ 10 & 3 & 2 \\ 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 1 \\ -6 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

$$\begin{aligned} &max\ c^T x \\ &s.t\ Ax \leqslant b, \\ &\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

שאלה 3:

★ נמספר בשאלה את קודקודי הגרף: $(v_1,....,v_n)$

סעיף 1:

1. עבור פתרון תכנון לינארי, נרצה למצוא דרך להגדיר את וקטור ה-x יבטא אילו קודקודים נמצאים בקבוצה S ואילו לא, כך שמספר הקודקודים הוא מקסימלי. נרצה להגדיר את וקטור ה-x כך ש: עבור כל קודקוד שנמצא ב-S $x_i = 1$, אחרת $x_i = 0$. נרצה ש $\sum_{i\in|V|} x_i$ יהיה מקסימלי, לכן נבחר את c להיות וקטור שכולו 1-ים, כך שנקבל: $max\ c^T x = max \sum_{i\in|V|} 1 \cdot x_i$

סעיף 2:

1. עבור כל קשת לא יתכן ש-2 הקודקודים יהיו (אם הקודקודים נמצא בקבוצה, בהכרח השני לא תהיה)

סעיף 3:

1. עבור כל צלע נגדיר וקטור a כך ש-2 הקודקודים של צלע יהיו עם הערך 1, וכל שאר הקודקודים יהיו עם הערך 0. מסעיף 2, נרצה שהסכום יהיה לכל היותר 1, כלומר: $< a, x > \quad \leqslant 1$

סעיף 4:

1. עבור פתרון תכנון לינארי נשתמש בסעיפים הקודמים עבור הפתרון.
2. נגדיר וקטור c כך ש: $c = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
3. נגדיר את וקטור x ך ש: עבור כל קודקוד שנמצא ב-S $x_i = 1$, אחרת $x_i = 0$. נרצה ש $\sum_{i\in|V|} x_i$ יהיה מקסימלי, כך שנקבל: $max\ c^T x = max \sum_{i\in|V|} 1 \cdot x_i$
4. לכל $(u, v) \in E$, נגדיר a_{uv} וקטור בגודל $|V|$ כך שלכל קורדינטה שאינה u, v הערך יהיה 0, ועבור u, v הערך יהיה 1. מאחר וכל צלע מופיעה פעם אחת במטריצה, אף שורה לא תופיע פעמיים.
5. נגדיר מטריצה A כך שכל שורה תהיה מהצורה a_{uv}^T עבור כל צלע בגרף, כלומר A מטריצה בגודל $|E| \times |V|$ של אחדות ואפסים..
6. כמו כן נגדיר ווקטור $b = \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. כלומר קיבלנו את בעית ILP בשלמים.

$$\begin{aligned} & max\ c^T x \\ & s.t\ Ax \leqslant b, \\ & \quad x \geqslant 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^{|V|} \end{aligned}$$

8. כמו כן, עבור הקודקודים ללא צלעות אין דרישות קדם, לכן הם בהכרח יהיו חלק מהפתרון הכללי בנוסף לקודקודים שמצאנו באלגוריתם של התכנון הלינארי.

9. פלט:

$$S = \underbrace{\left\{v_i : x_i = 1\right\}}_{\text{הקודקודים שהאלגוריתם שהתכנון הלינארי מצא (עם דרישות נוספות)}} \cup \underbrace{\left\{v_j : \forall z \in V,\ (v_j, z) \notin E\right\}}_{\text{קודקודים ללא צלעות, אין דרישות מגבילות}}$$

10.

$$Ax = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \\ & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{|V|} \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

שאלה 4:

1. נגדיר $\widehat{x} = \left(x_1,..., x_i^+, x_i^-,..., x_n\right)$ כאשר לכל $j \neq i$ $\widehat{x}_j = x_j$.
2. נגדיר $\widehat{c} = (c_1,..., c_i, -c_i,..., c_n)$ כאשר לכל j $\widehat{c}_j = c_j$.
3. ונגדיר, $\widehat{b} = b$.
4. נגדיר את x_i^-, x_i^+ באופן הבא: אם $x_i \geqslant 0$ אזי $x_i^+ = x_i$, $x_i^- = 0$, אחרת $x_i^+ = 0$, $x_i^- = -x_i$
5. כעת, נבנה את המטריצה $\widehat{A}$: עבור השורה ה-j במטריצה נגדיר: $(\widehat{A})_j = (a_{j1},.., a_{ji}, -a_{ji},..., a_{jn})$
6. נראה כי מכפלת $(\widehat{A}\widehat{x})_j = (Ax)_j$:

$$(\widehat{A}\widehat{x})_j = \sum_{k=1}^{n+1} a_{jk} \cdot x_k = \sum_{k \neq i} (a_{jk} \cdot x_k) + a_{ji} \cdot x_i^+ - a_{ji} \cdot x_i^- = \sum_{k \neq i} (a_{jk} \cdot x_k) + a_{ji} \cdot x_i = (Ax)_j.$$

7. נראה ש$\widehat{c^T}\widehat{x} = c^T x$:

$$\widehat{c^T}\widehat{x} = \sum_{k=1}^{n+1} c_k \cdot x_k = \sum_{k \neq i} (c_k \cdot x_k) + c_i \cdot x_i^+ - c_i \cdot x_i^- = \sum_{k \neq i} (c_k \cdot x_k) + c_i \cdot x_i = c^T x$$

8. לכן, מתקיים $\widehat{A}\widehat{x} = Ax \leqslant b = \widehat{b}$
9. עתה, יש לנו וקטור $\widehat{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ אשר הוא פתרון חוקי, אזי נרצה להגדיר את x להיות:
$x = \left(x_1,..., x_i^+, -x_i^-,..., x_n\right)$.
10. נרצה להראות $Ax \to \widehat{A}\widehat{x}$:

$$(Ax)_j \Leftarrow \sum_{k \neq i} (a_{jk} \cdot x_k) + a_{ji} \cdot \left(x_i^+ - x_i^-\right) \Leftarrow \sum_{k \neq i} (a_{jk} \cdot x_k) + a_{ji} \cdot x_i^+ - a_{ji} \cdot x_i^-$$

$$\Leftarrow \sum_{k=1}^{n+1} a_{jk} \cdot x_k = (\widehat{A}\widehat{x})_j$$

11. ונקבל $Ax = \widehat{A}\widehat{x} \leqslant \widehat{b} = b$
12. נראה ש$\widehat{c^T}\widehat{x} = c^T x$:

$$\widehat{c^T}\widehat{x} = \sum_{k=1}^{n+1} c_k \cdot x_k = \sum_{k \neq i} (c_k \cdot x_k) + c_i \cdot x_i^+ - c_i \cdot x_i^- = \sum_{k \neq i} (c_k \cdot x_k) + c_i \cdot \left(x_i^+ - x_i^-\right) = c^T x$$

13. הראנו כי קיימת התאמה בין פתרון חוקי x לפתרון חוקי $\widehat{x}$. מאחר ופתרון $\widehat{x}$ מקיים בהכרח את תנאי התכנון הלינארי, מתקיים ש $\widehat{c^T}\widehat{x}$ הינו מקסימלי. נראה מדוע x הינו הפתרון האופטימלי בבעיה המקורית. נניח בשלילה כי קיים y כך שמתקיים $c^T y > c^T x$. מהנימוקים לעיל $\widehat{c^T}\widehat{y} = c^T y$ ומאופטימליות $\widehat{x}$, נובע כי $\widehat{c^T}\widehat{x} \geqslant \widehat{c^T}\widehat{y}$, לכן קיבלנו כי $c^T x > \widehat{c^T}\widehat{x}$, סתירה.
14. ולכן הוכחנו את הטענה המבוקשת ■