

אלגוריתמים 2022 – תרגיל 2

שימו לב (!): עבור כל אלגוריתם שאתם מציעים לפתרון בעיה עליכם לצרף הוכחת נכונות וניתוח זמן ריצה אלא אם כן נכתב אחרת!

1. ניזכר שוב באלגוריתם קרוסקל:

קלט: גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w: E \rightarrow R$.
 פלט: תת-גרף $T \subseteq G$ שהוא עץ פורש בעל משקל מינימלי.
 האלגוריתם:

- נאתחל $T = \emptyset$
- נמייין את הקשתות בסדר עולה לפי משקלן, כלומר $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_{|E|})$
- עבור $k = 1, \dots, |E|$ (הקשתות הקלה לכבדה)
 - אם הקשת e_k לא סוגרת מעגל נסיף אותה ל- T
- נחזיר את T

השלימו את ההוכחה שראינו בתרגול והראו כי הפלט המוחזר על ידי האלגוריתם הוא חוקי, כלומר שהוא אכן עץ פורש, דהיינו גרף קשיר מעל כל קדקודי G וחסר מעגלים.
טיפ: כאשר מתקשים להסביר מדוע תנאי מסוים מתקיים, לרוב נוה להניח בשלילה שהוא לא מתקיים ולהראות כיצד הדבר סותר את אופן פעולת האלגוריתם.

2. בהנתן n נקודות על ציר המספרים נרצה למצוא את המספר המינימלי של קטעים באורך 1 המכסים את כל הנקודות.

פורמלית, הקלט לאלגוריתם הינו: $x_1 < x_2 < \dots < x_n \in R$ - הנקודות שנרצה לכסות.
 פתרון חוקי יוגדר להיות $y_1, \dots, y_m \in R$ כך שמתקיים: לכל $1 \leq i \leq n$, קיים $1 \leq j \leq m$ כך ש-
 $x_i \in [y_j, y_j + 1]$. כלומר הנקודה y_j היא תחילת הקטע ה- j .
 פלט האלגוריתם: פתרון חוקי כך שמספר איבריו, m , מינימלי.
 הוכיחו את נכונות האלגוריתם שאתם מציעים. ניתן להיעזר בסכימה שנלמדה בכיתה.

3. נתבונן בוריאציה הבאה לבעיית תא הדלק הקטן: יש לנו מכונית הנוסעת על מסלול מהמקור a_1 אל היעד a_n . על כל ליטר דלק ניתן לנסוע קילומטר אחד בדיוק. גודל מיכל הדלק שלנו הוא N ליטרים. מטרתנו היא לתכנן אלגוריתם שמחליט כמה דלק עלינו למלא בכל תחנה כך שנגיע ליעדנו ונמלא כמה שפחות דלק בסך הכל.
 פורמלית:

הקלט לאלגוריתם הוא:

- גודל מיכל הדלק, $N \in \mathbb{N}$.
 - מיקום תחנות הדלק: $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ כך שלכל $1 < i \leq n$ מתקיים $a_{i-1} \leq a_i$ וגם $a_i - a_{i-1} \leq N$.
- פלט האלגוריתם הוא:
- $l_1, l_2, \dots, l_n \in \mathbb{N}$ כך שלכל $1 \leq i \leq n$, המספר l_i הוא כמות הליטרים שממלאים בתחנה ה- i .

מטרת האלגוריתם היא אכן להגיע מהמקור ליעד כשממלאים כמה שפחות דלק. כחלק מתיאור האלגוריתם חשבו כיצד לתאר מתמטית פתרון "חוקי" בו באמת ניתן להגיע מהמקור ליעד מבלי להיתקע בדרך בלי דלק. כמו כן, חשבו איזה ערך אנו רוצים למזער באלגוריתם. שימו לב בפתרון כי בכל רגע נתון אסור שיהיו יותר מ-N ליטרים של דלק במיכל הדלק. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שאתם מציעים. ניתן להעזר בסכימה שנלמדה בכיתה.

4. בהינתן מספר שלם $n \in \mathbb{N}$, יש לבחור במספר הצעדים המינימלי הנדרש על מנת להגיע אליו החל מהספרה 1, בעזרת הפעולות $DOUBLE(k) = 2k$ ו- $INCREMENT(k) = k + 1$. למשל עבור $n = 5$, מספר הפעולות המינימלי הוא 3, למשל באופן הבא:

$$5 = INCREMENT(DOUBLE(INCREMENT(1))) = 1 + (2 \cdot (1 + 1))$$

i. נתון האלגוריתם החמדני הבא:

Algorithm 4: Does a thing

Input : $n \in \mathbb{N}$

Output: m , the minimal number of steps required to generate n from 1

```

1  $result \leftarrow []$ 
2  $k \leftarrow 1$ 
3 while  $2k \leq n$  do
4    $k \leftarrow DOUBLE(k)$ 
5    $result.append(DOUBLE)$ 
6 end
7 while  $k < n$  do
8    $k \leftarrow INCREMENT(k)$ 
9    $result.append(INCREMENT)$ 
10 end
11 return  $result$ 
```

קבעו האם האלגוריתם הינו אופטימלי או לא. אם כן – הוכיחו, אם לא – הראו דוגמה נגדית.

ii. הציעו אלגוריתם חמדן (אחר?) הפותר את הבעיה לעיל (שימו לב שלבעיה אין בהכרח פתרון יחיד). ייתכן כי בחינת הייצוג הבינארי של מספרים תעזור בתכנון אלגוריתם. הוכיחו את נכונות האלגוריתם שאתם מציעים. ניתן להעזר בסכימה שנלמדה בכיתה.

5. נתונות שתי רשימות לא ממוינות בעלות אורך זהה $A = [a_1, \dots, a_m], B = [b_1, \dots, b_m]$ כך ש- $1 \neq$ $a_i, b_i \in \mathbb{N}$. **הציעו אלגוריתם** המחזיר רשימה $C = [c_1, c_2, \dots, c_m]$ של זוגות $c_k = (a_i, b_j)$ (כאשר i יכול להיות שווה או שונה ל- j), כך שמתקיים שהפונקציה הבאה ממוקסמת:

$$f(C) = \prod_{i:c_i=(a,b)} a^b$$

הוכיחו את נכונות האלגוריתם (חוקיות ואופטימליות) וחשבו זמן ריצה. שימו לב כי לכל a צריך למצוא b , ניתן להשתמש באותו a פעם אחת בלבד.