

אלגוריתמים - תרגיל 3

שאלה 1

לפנינו שתי הבעיות הבאות:

1. בהינתן גרף $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ יש למצוא קבוצת צלעות ללא מעגלים עם משקל מקסימלי.
2. בהינתן קבוצת וקטורים $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ופונקציית משקל $w : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ יש למצוא קבוצה בת"ל עם משקל מקסימלי.

הראו כי הבעיה הראשונה היא מקרה פרטי של הבעיה השנייה.

הדרכה: יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר עם $|V| = n$. לכל צלע $e \in E$ נתאים וקטור $v_e \in \mathbb{Z}_2^n$ שערכו "1" בקואורדינטות מתאימות לקודקודי הצלע e , ו-"0" בשאר הקואורדינטות. הראו כי קבוצת צלעות כלשהי היא ללא מעגלים אם ורק אם קבוצת הווקטורים המתאימה לצלעות היא קבוצה בלתי תלויה לינארית. הסיקו כי ניתן לתרגם את הבעיה הראשונה לבעיה השנייה, ובעזרת הפתרון של הבעיה השנייה למצוא קבוצת צלעות ללא מעגלים עם משקל מקסימלי.

בהמשך התרגיל אתם מתבקשים לפתור בעיות שונות באמצעות תכנון דינאמי. ודאו שהפתרון שלכם כולל את כל השלבים בסכמה שהצגנו בתרגול האחרון:

1. ניסוח בהיר של תתי הבעיות.
 2. נוסחת רקורסיה והסבר לבנייתה.
 3. תיאור של הטבלה, סדר המילוי שלה ואופן חילוץ הפתרון.
 4. ניתוח של זמן הריצה.
 5. הוכחת נכונות (במידה ומבקשים).
- בשאלות שבהן לא הוגדרו דרישות סיבוכיות, זמן הריצה צריך להיות פולינומי בגודל הקלט.

שאלה 2

1. כתבו אלגוריתם תכנון דינמי המקבל סדרה של מספרים טבעיים, $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, ומחזיר את אורך התת-סדרה העולה הארוכה ביותר שלה. זמן הריצה של האלגוריתם צריך להיות $O(n^2)$, כאשר n אורך הסדרה A .
2. הסבירו כיצד ניתן לשנות את האלגוריתם שכתבתם כך שיחזיר גם תת-סדרה ארוכה ביותר, בנוסף לאורך. במקרה שיש יותר מאחת אפשר לבחור באופן שרירותי איזו תת-סדרה להחזיר.
3. הוכיחו את נכונות האלגוריתם.

תזכורת: תת-סדרה היא אוסף איברים המופיעים בסדרה המקורית באותו הסדר, אך לא דווקא ברצף.

דוגמא

עבור הקלט

$$A = (1, 4, 2, 1, 9)$$

הפלט יהיה 3, כי למשל הסדרה $B = (1, 4, 9)$ היא תת סדרה עולה של A באורך 3, ואין ל- A תת-סדרה עולה באורך גדול מ-3 (ניתן לוודא זאת ע"י בדיקת כל האפשרויות).

שאלה 3

נניח שיש לנו מערכת תקשורת פשוטה שבה ניתן לשלוח רק ספרות $\{0, 1, \dots, 9\}$, ואנו רוצים להשתמש בה כדי לשלוח מילים באנגלית.

נתבונן בשיטת הקידוד הבאה: כל אות אנגלית מקבלת ערך מספרי לפי המיקום שלה בסדר האלפבית, $A = 1, B = 2, \dots, Z = 26$. כשנרצה לשלוח מילה נחליף כל אות בערך המספרי שלה, למשל המילה *ALGO* תקודד כך: 112715, כי

$$A = 1, L = 12, G = 7, O = 15$$

הבעיה בשיטת קידוד זו היא שיש יותר מדריך אחת לפרש את ההודעה, למשל את זו ששלחנו קודם אפשר לפרש גם כך: *AABGAE*. כתבו אלגוריתם תכנון דינמי אשר מקבל כקלט הודעה (רצף סופי של מספרים) ומחזיר את מספר הדרכים האפשריות לפענח אותה.

שאלה 4

כתבו אלגוריתם תכנון דינמי אשר מקבל

* גרף מכוון חסר מעגלים בעל n קדקודים, $G = (V, E)$

* קדקוד בור בגרף, $t \in V$

* פונקציית משקל על הצלעות, $w : E \rightarrow \mathbb{R}_+$

ומחזיר את משקל המסלול הכבד ביותר בין כל קודקוד $v \in V$ לקדקוד t , או $-\infty$ אם לא קיים מסלול מ- v ל- t .

רמז: השתמשו במיון טופולוגי של הקודקודים.

תזכורת:

* בגרף מכוון חסר מעגלים DAG - Directed Acyclic Graph אם יש מסלול מקדקוד v לקדקוד u , אז אין מסלול מ- u ל- v .

* קדקוד בור (sink) הוא קדקוד שלא יוצאות ממנו צלעות.

* קדקוד מקור (source) הוא קדקוד שלא נכנסות אליו צלעות.

* ב-DAG יש לפחות קדקוד מקור אחד ולפחות קדקוד בור אחד.

* מיון טופולוגי של DAG הוא סידור של הקדקודים באופן שבו אם יש מסלול מקדקוד v לקדקוד u , אז v מופיע לפני u . קיים אלגוריתם למיון טופולוגי שזמן הריצה שלו פולינומי במספר הקדקודים.