

Лабораторная работа № 5
Липатов Данила Вячеславович
МСМТ 243

I пункт.

В данном пункте необходимо реализовать следующие подпункты:

- 1) Добавить коррелированный шум (авторегрессию, попробовать более высокий порядок) к гармоникам
- 2) Вычислить АКФ (дана смещенная оценка, изменить на несмещенную, сравнить)
- 3) Построить СПМ взятием фурье-преобразования АКФ, показать, как на спектре отражается наличие цветного шума

Сгенерируем двухсинусоидальный сигнал с шумом следующим образом:

```
# Генерация двухсинусоидального сигнала
N_signal = 1024
k = np.arange(N_signal)
signal = np.sin(2 * np.pi / 10 * (k - 1)) + np.sin(2 * np.pi / 100 * (k - 1))

# Добавление шума
eps = 0.2 * np.random.randn(N_signal)
```

Посмотрим на гистограмму шума (рис. 1) и график сигнала с шумом (рис.2)

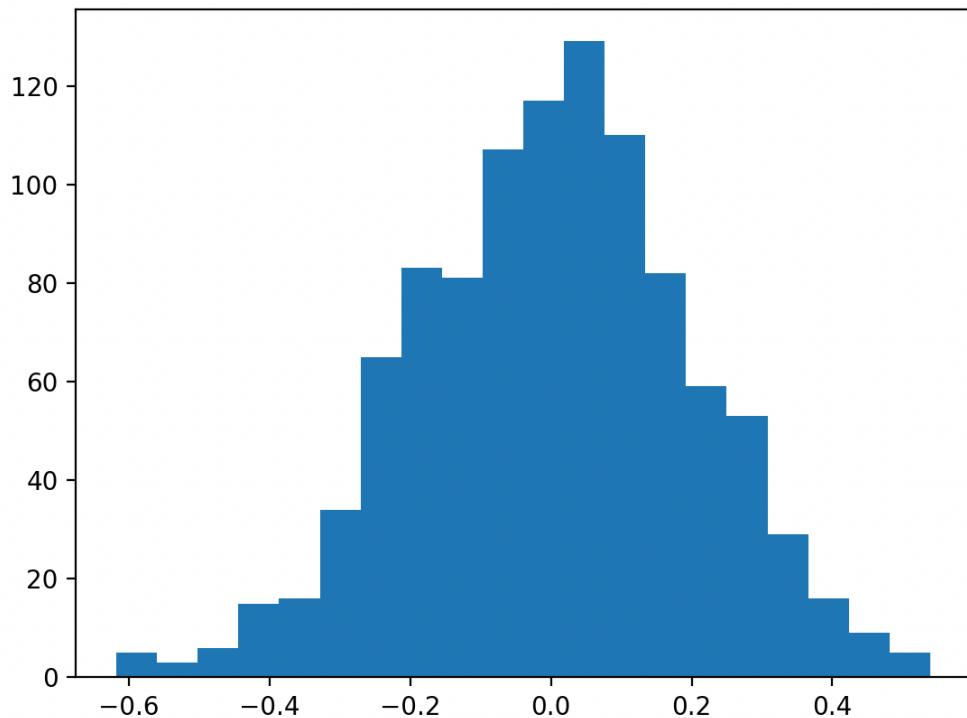


Рис. 1

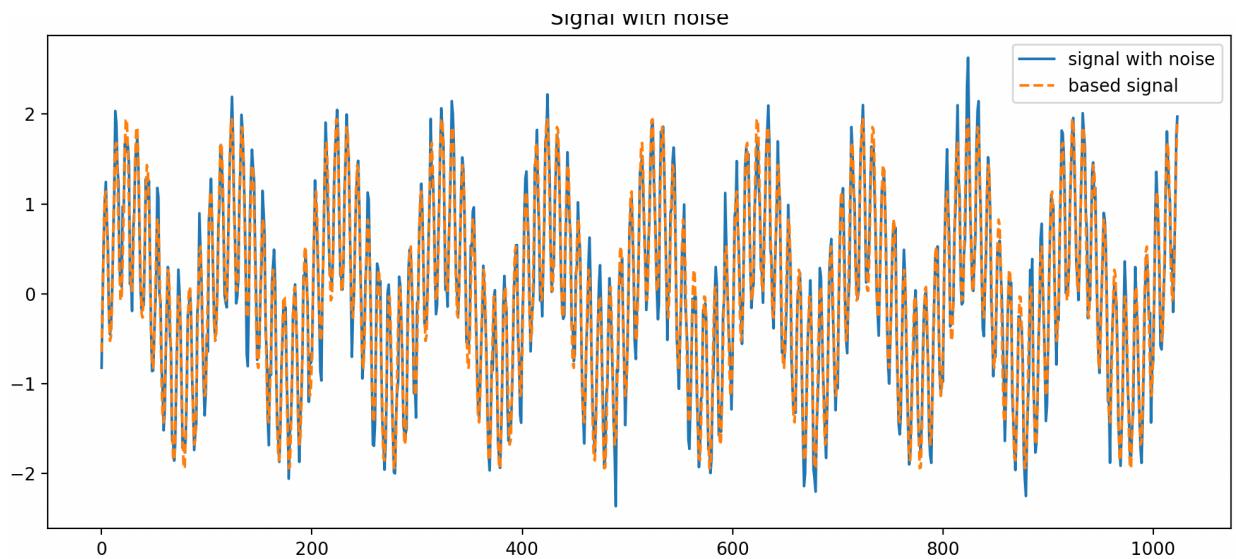


Рис. 2

Добавим коррелированный шум:

```
# Генерация ARMA процесса
ar = np.zeros(N_signal)
ar[0] = eps[0]
ar[1] = -0.7 * ar[0] + eps[1]

for i in range(2, N_signal):
    ar[i] = -0.7 * ar[i - 1] + 0.2 * ar[i - 2] + eps[i]
```

И посмотрим отдельно на его график (рис.3)

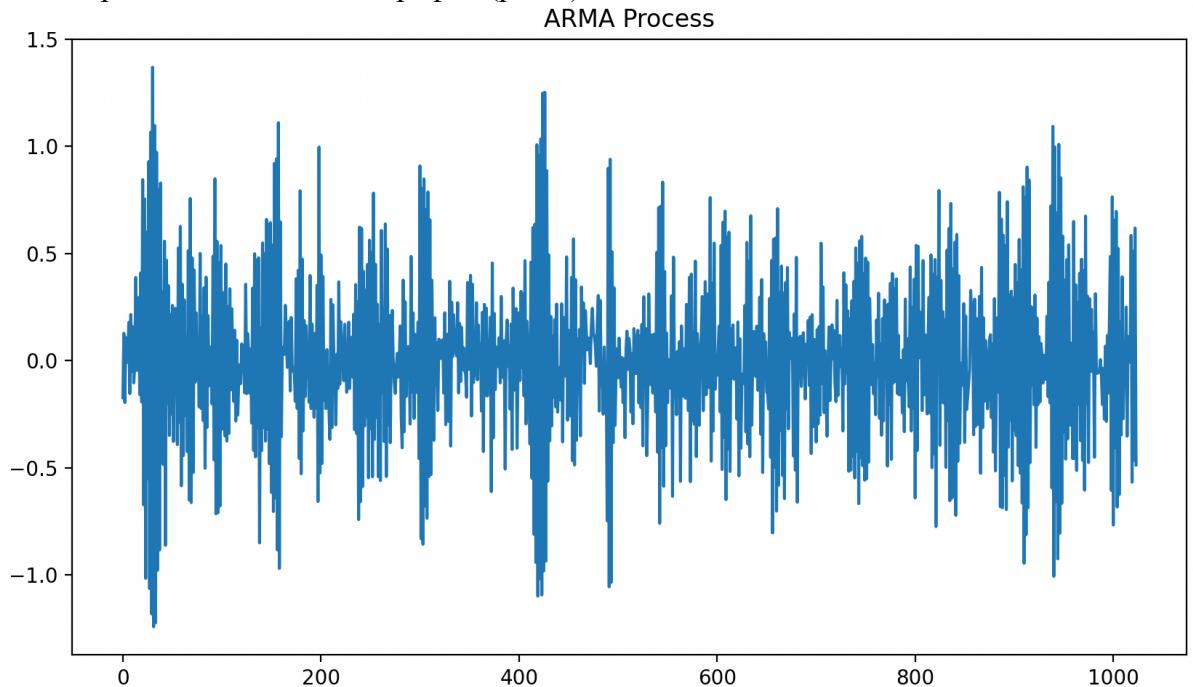


Рис.3

А так же рассмотрим график исходного сигнала с коррелированным шумом (рис.4)

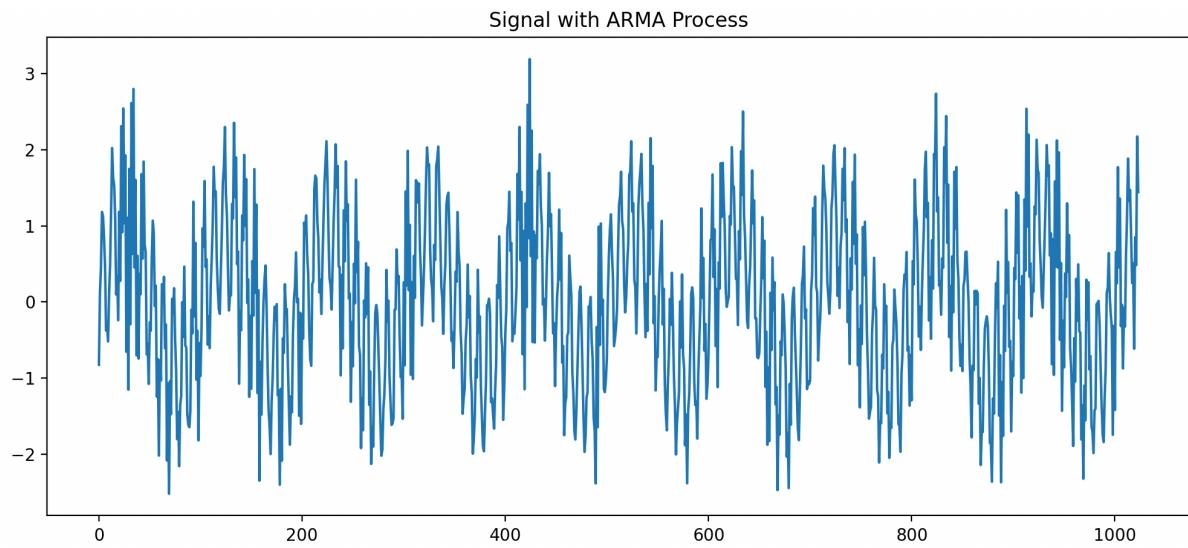


Рис.4

Далее для вычисления АКФ (смещенной и несмещенной) воспользуемся реализацией из лабораторной работы №2 (деление на $N-k$ для несмещенной). Получим следующие графики (рис. 5)

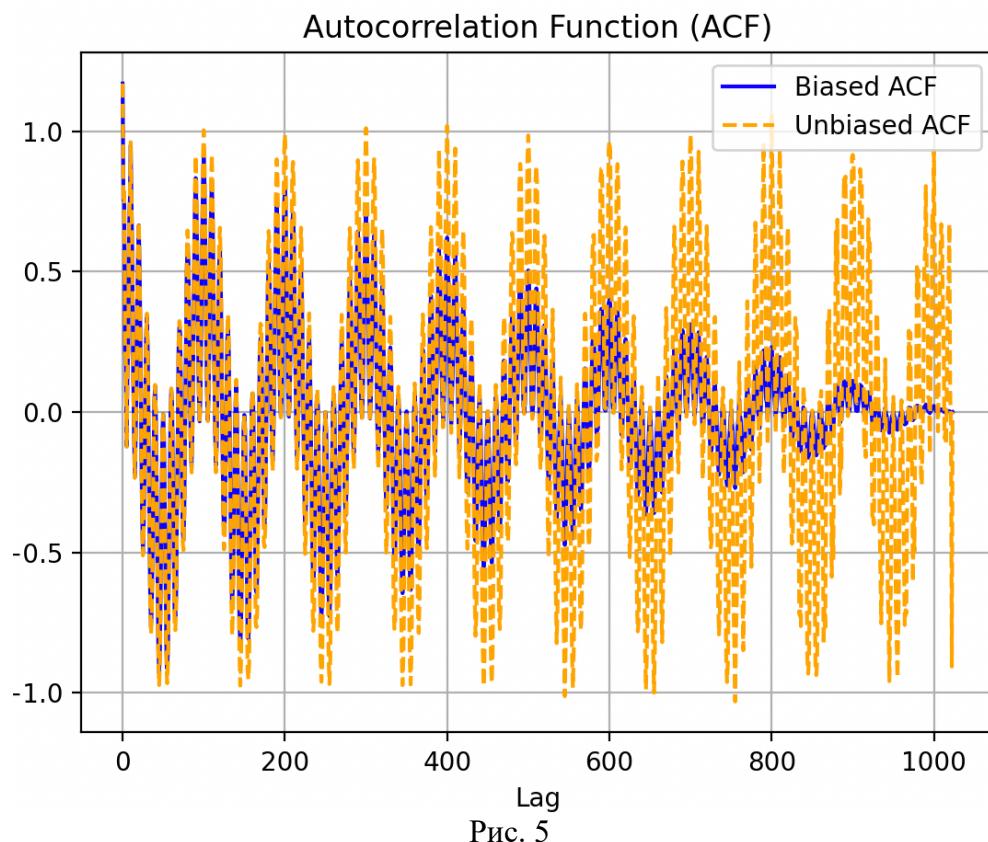


Рис. 5

Ну и наконец, построим БПФ и посмотрим на вклад белого шума и цветного, как они отражаются на спектрограмме (рис. 6)

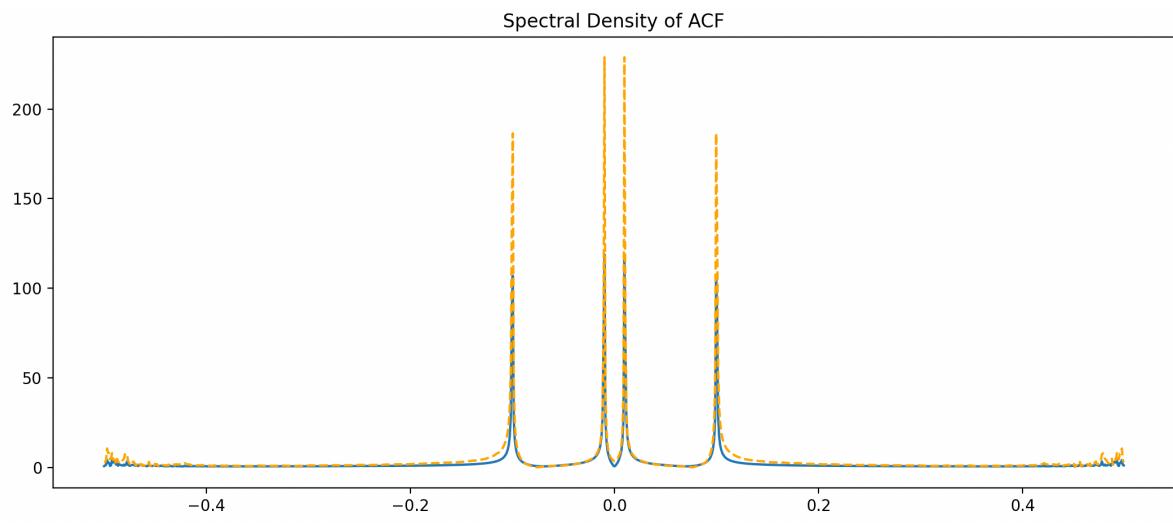


Рис. 6

На концах наблюдается колебание, но не совсем понятно, насколько сильно. Для этого отмасштабируем по логарифмической шкале (рис. 7)

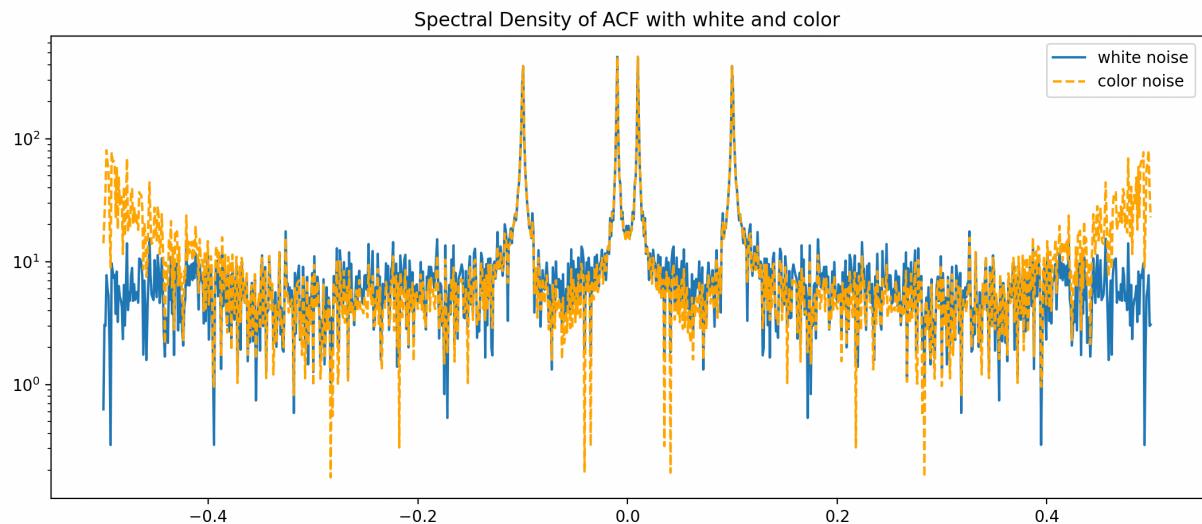


Рис. 7

Вот здесь уже более детально можно различить поведение белого шума от цветного (eps / ar).

Теперь реализуем все те же шаги для смоделированного сигнала из ЛР1, где сигнал генерируется со след. параметрами:

$$a=18, b=10, c=2002$$

$$\begin{aligned} \# \text{Периоды (в годах)} \quad &T1 = 0.5 \\ &T2 = 1 \\ &T3 = 4.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A1 &= (a / 31) * 20 \\ A2 &= (b / 12) * 20 \\ A3 &= ((c - 2000) / 50) * 20 \end{aligned}$$

$$X_{\text{model}} = (A1 * \text{np.cos}(2 * \text{np.pi} * t / T1 + \phi_1) + A2 * \text{np.cos}(2 * \text{np.pi} * t / T2 + \phi_2) + A3 * \text{np.cos}(2 * \text{np.pi} * t / T3 + \phi_3))$$

Посмотрим на данный сигнал с шумом (рис. 8)

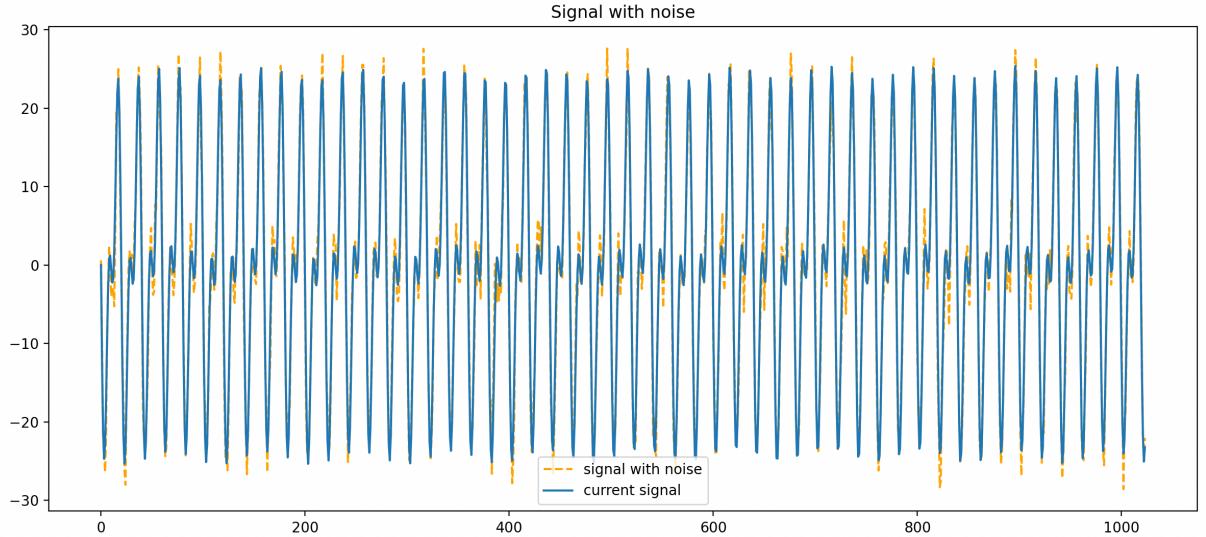


Рис. 8

Здесь в целом наблюдается шум, хотя и плохо различимый. Возьмем тот же коррелированный шум, что и для двухсинусоидального сигнала и посмотрим на график с смоделированным сигналом из ЛР1 (рис. 9)

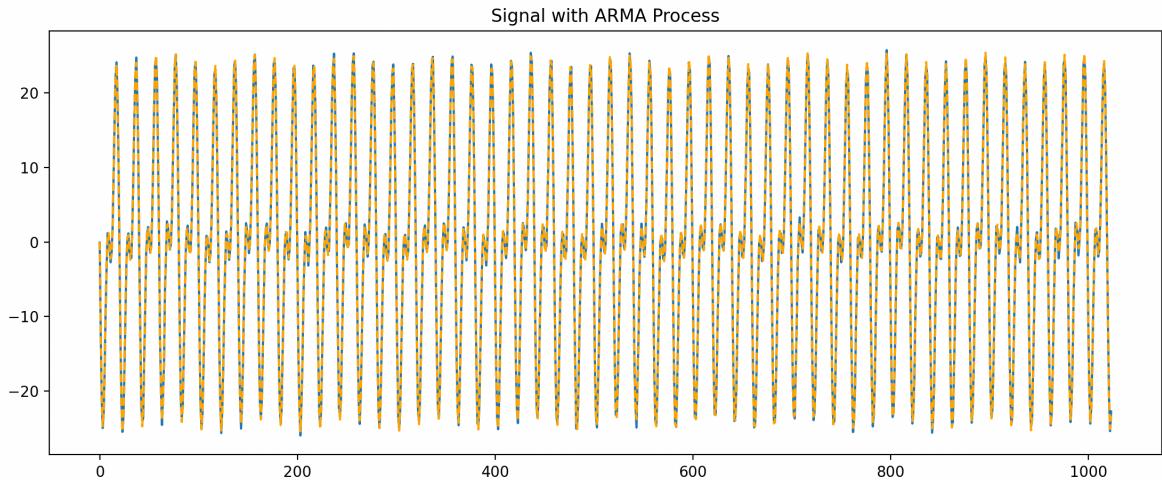


Рис. 9

Здесь для сигнала из ЛР1 очень плохо заметен шум, почти незаметно. Посмотрим, как для этого варианта будет выглядеть АКФ (смещенная и несмещенная) и спектрограмма (БПФ). (рис. 10, рис. 11)

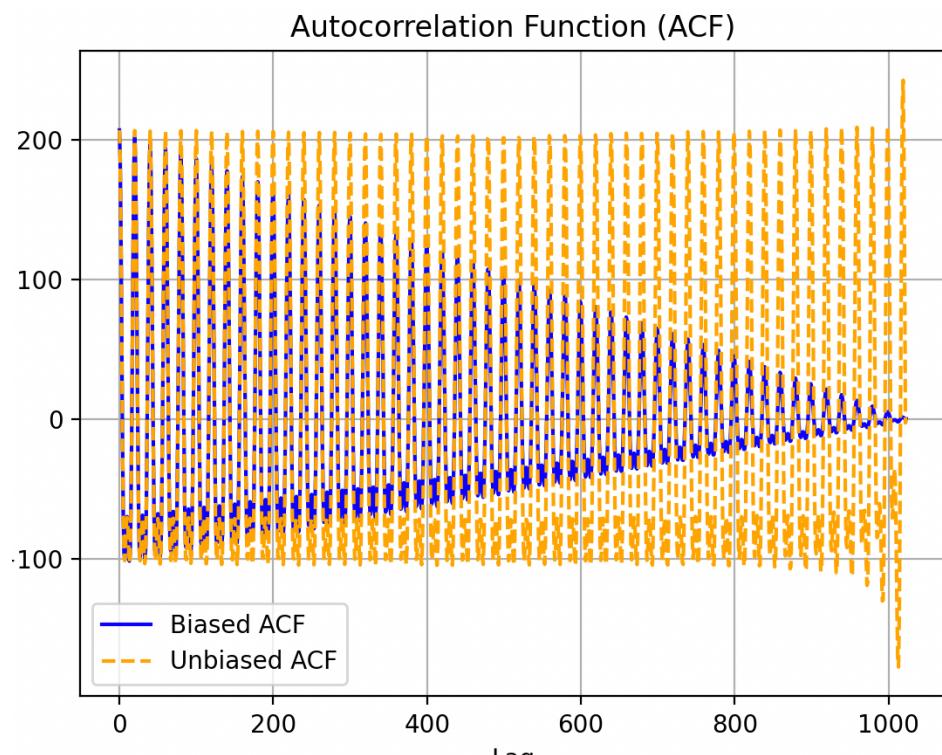


Рис. 10

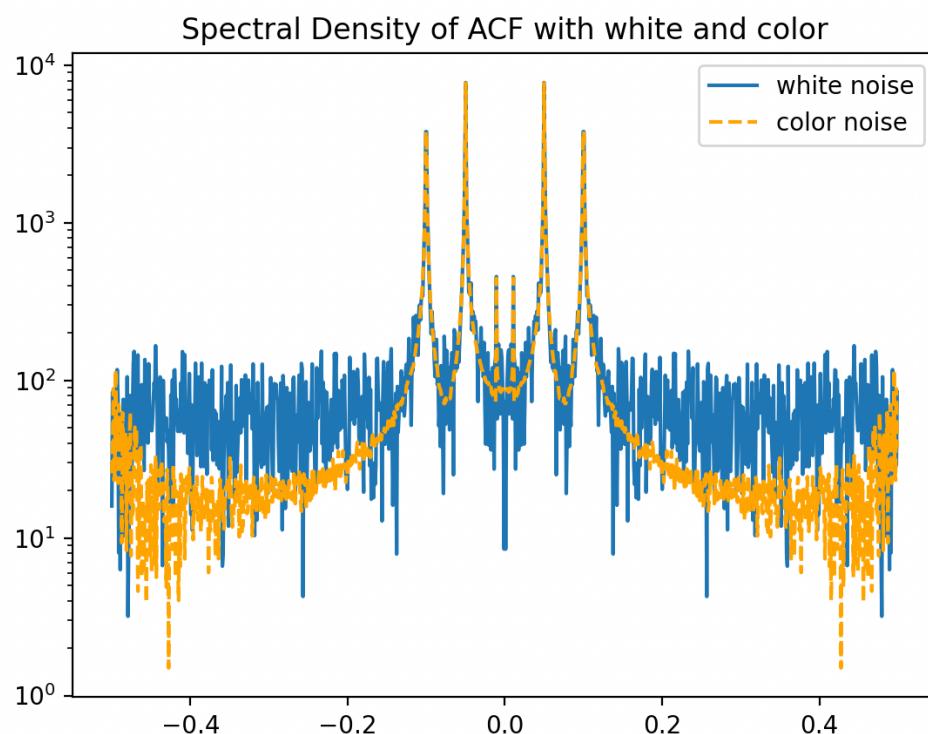


Рис. 11

В отличии от БПФ двухсинусоидального сигнала, здесь AR меньший имеет вклад. Заменим коррелированный шум на измененную и рассмотрим на графики AR+signal, ACF, FFT (рис. 12, рис.13, рис.14)

Signal with ARMA Process

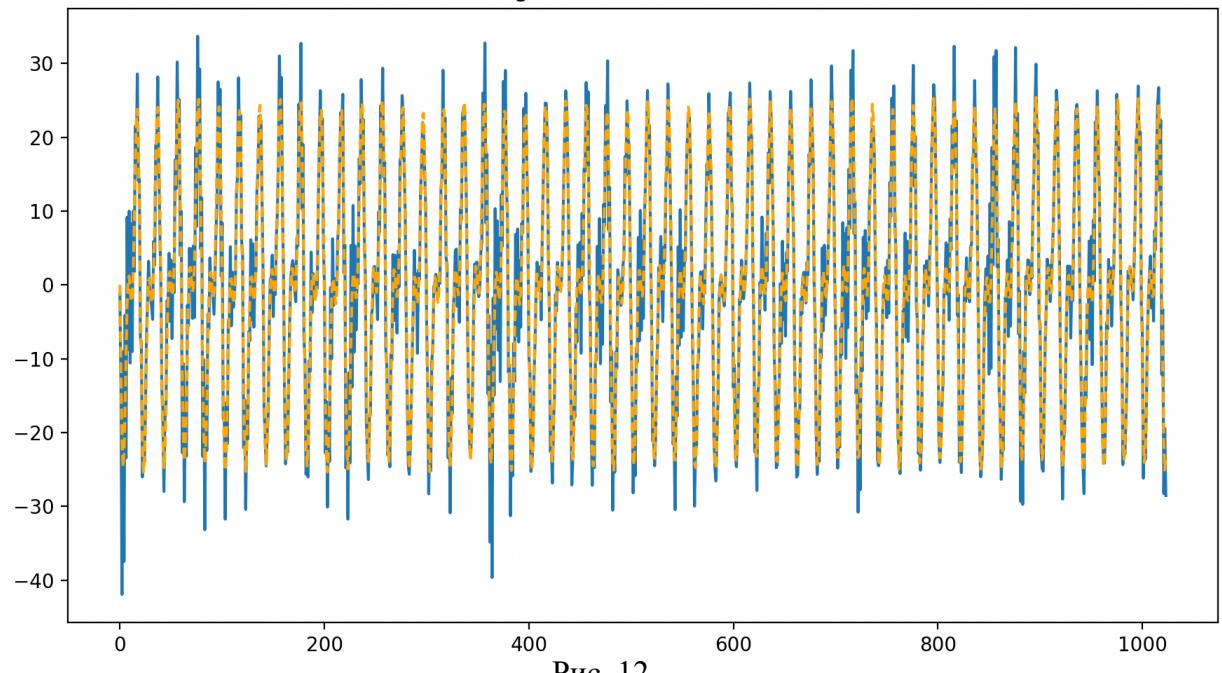


Рис. 12

Autocorrelation Function (ACF)

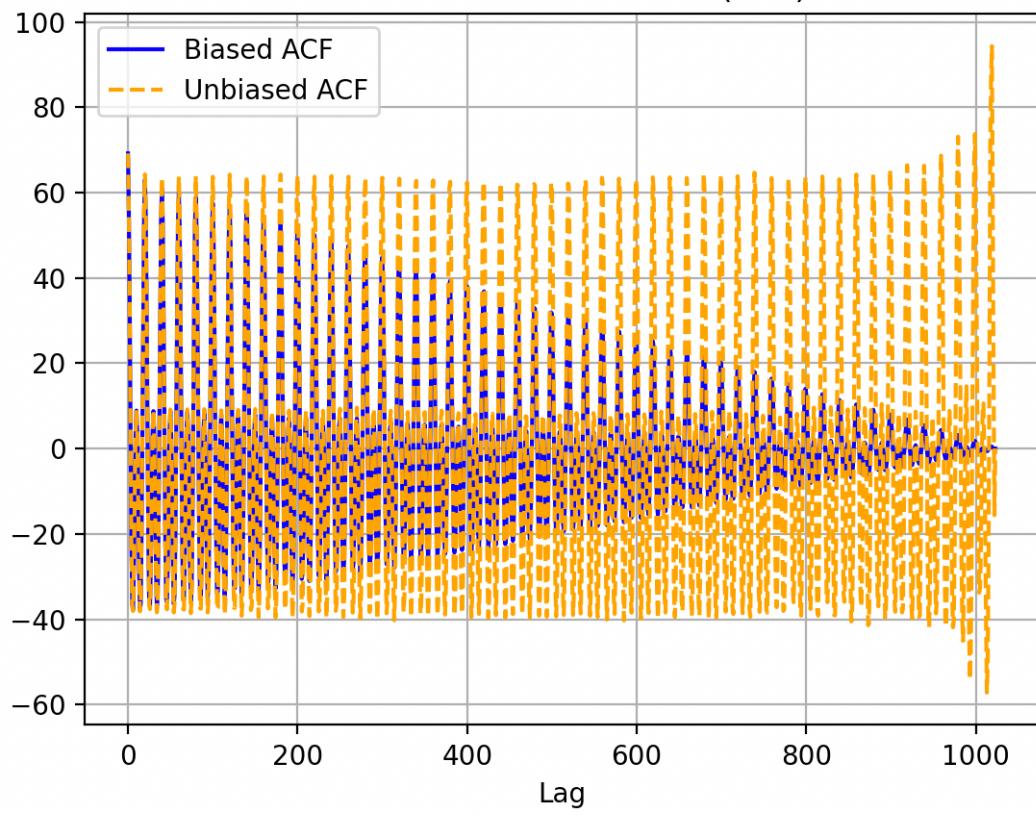


Рис. 13

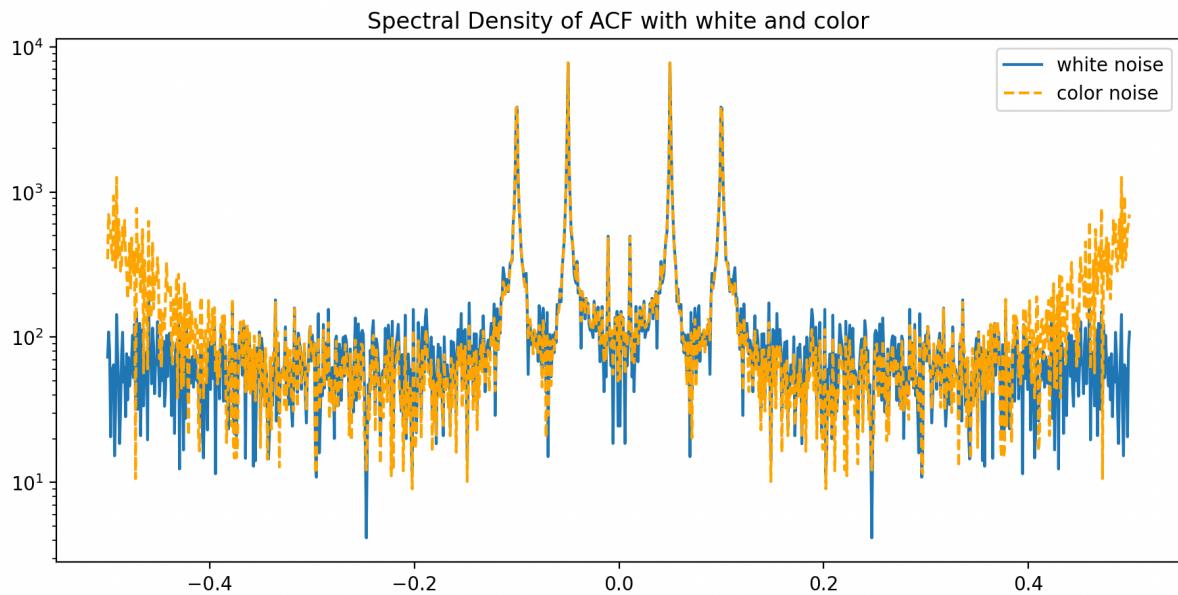


Рис. 14

Добавление одного элемента в AR довольно сильно сказался на его поведение, и, в целом, в чем то даже стало похоже на спектрограмму двухсинусоидального сигнала с коррелированным шумом.

II пункт.

В данном пункте необходимо для своего варианта выполнить следующие шаги:

- 1) Вычислить оценку АКФ (смещенную, несмещенную)
- 2) Построить спектральную плотность (правильно определив шкалу частот)
- 3) Подобрать полиномиальную модель (можно поменять порядок)
- 4) Подобрать гармоники (периоды выбрать самим)
- 5) Подобрать авторегрессию – поменять порядок
- 6) Построить графики моделей и прогноза

Вариант № 1. В целом, шаги не так сильно отличаются от того, что было в предыдущем пункте. Для первого шага и наших данных построим АКФ, аналогично ЛБ2 и пункту 1 ЛБ5 (рис.15)

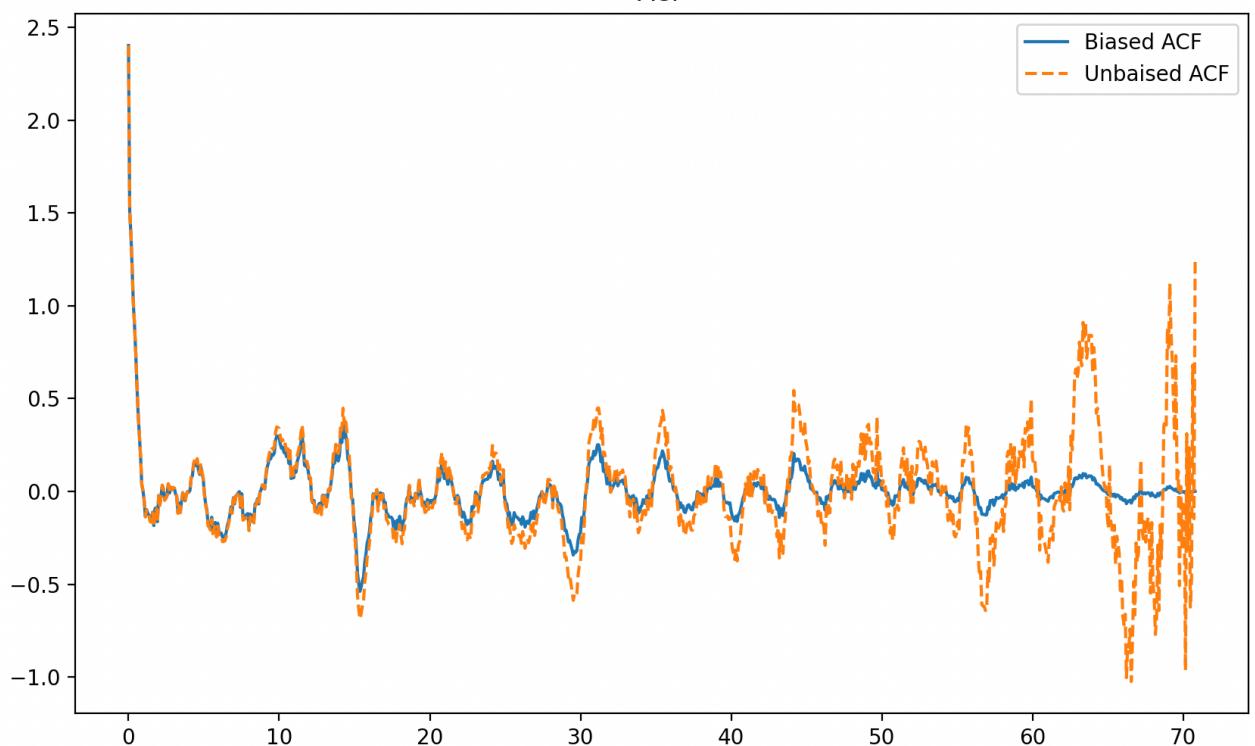


Рис.15

Заметим, что по оси X сдвиги по времени.

Для БПФ снова для более детальной визуализации сделаем лог. шкалу. Построим спектр. плотность для смещенной и несмещенной АКФ (рис. 16)

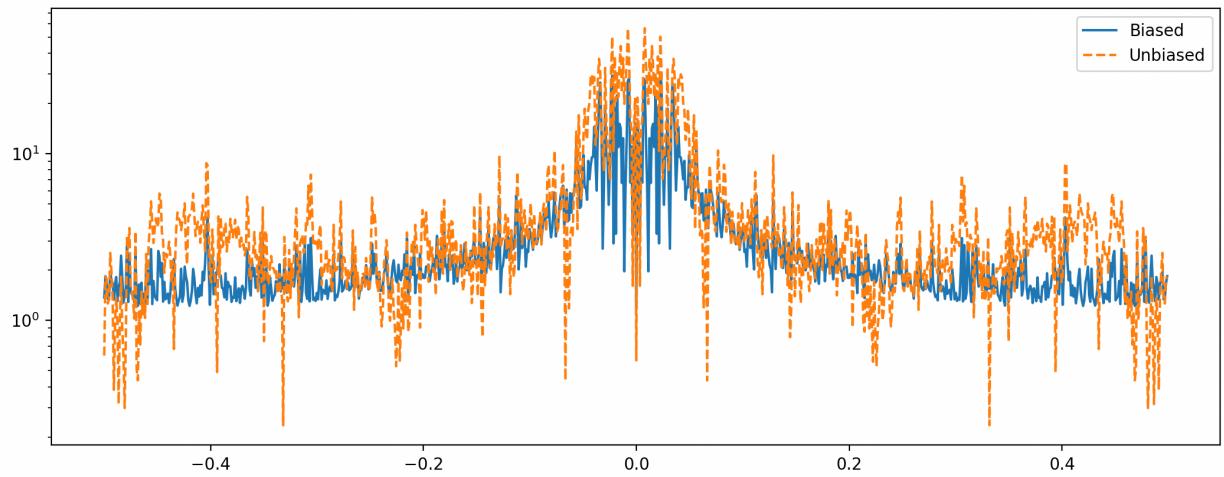


Рис.16

Аналогично ЛР2 пункту 1 подберем полином для наших данных, причем попробуем то, что представлено в Matlab, затем возьмем чуть больше и совсем большое значение (рис. 17 – рис. 19) и для более детальной визуализации сделаем прогноз, скажем, на 15 лет.

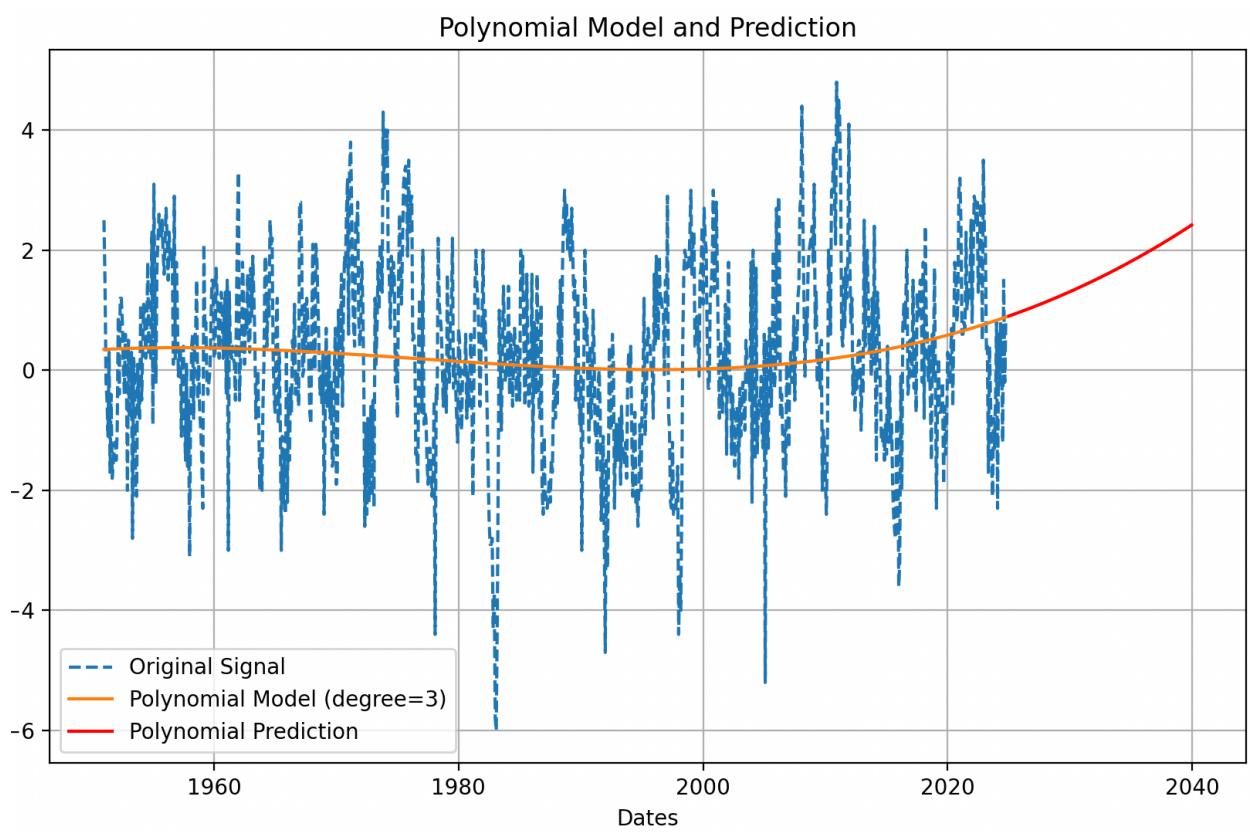


Рис. 17
Polynomial Model and Prediction

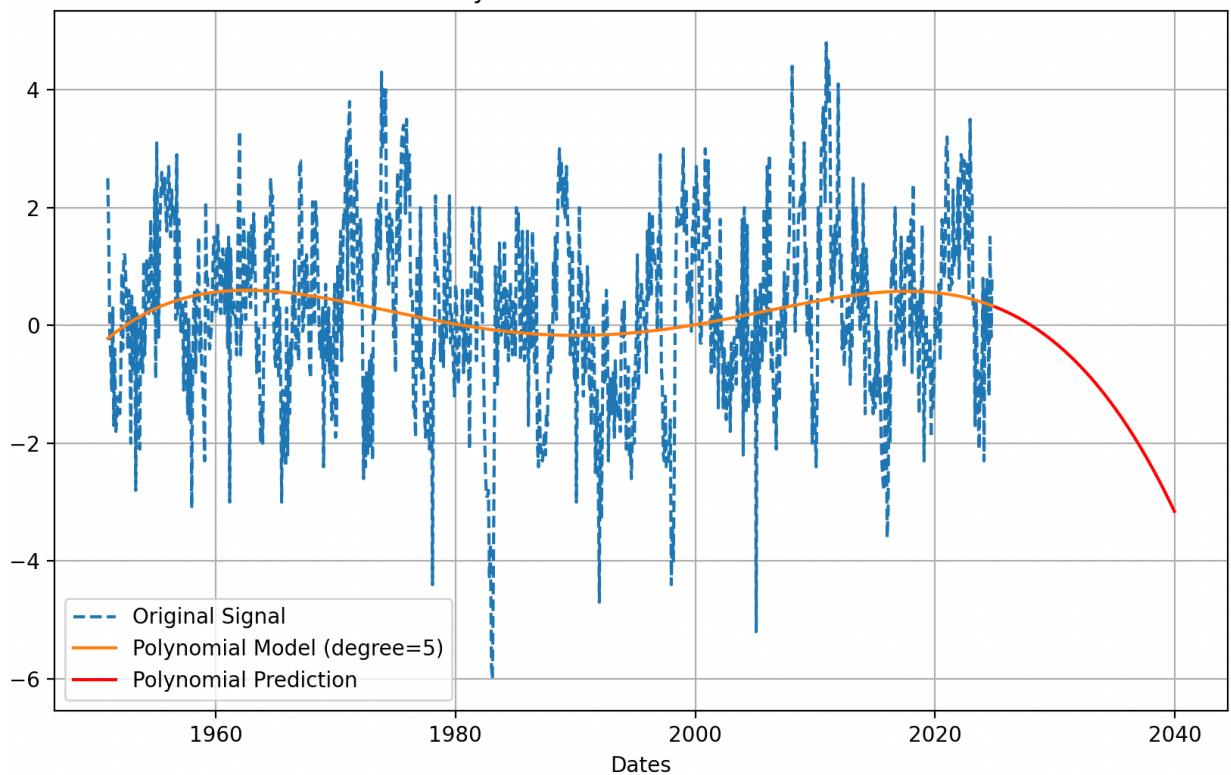


Рис. 18

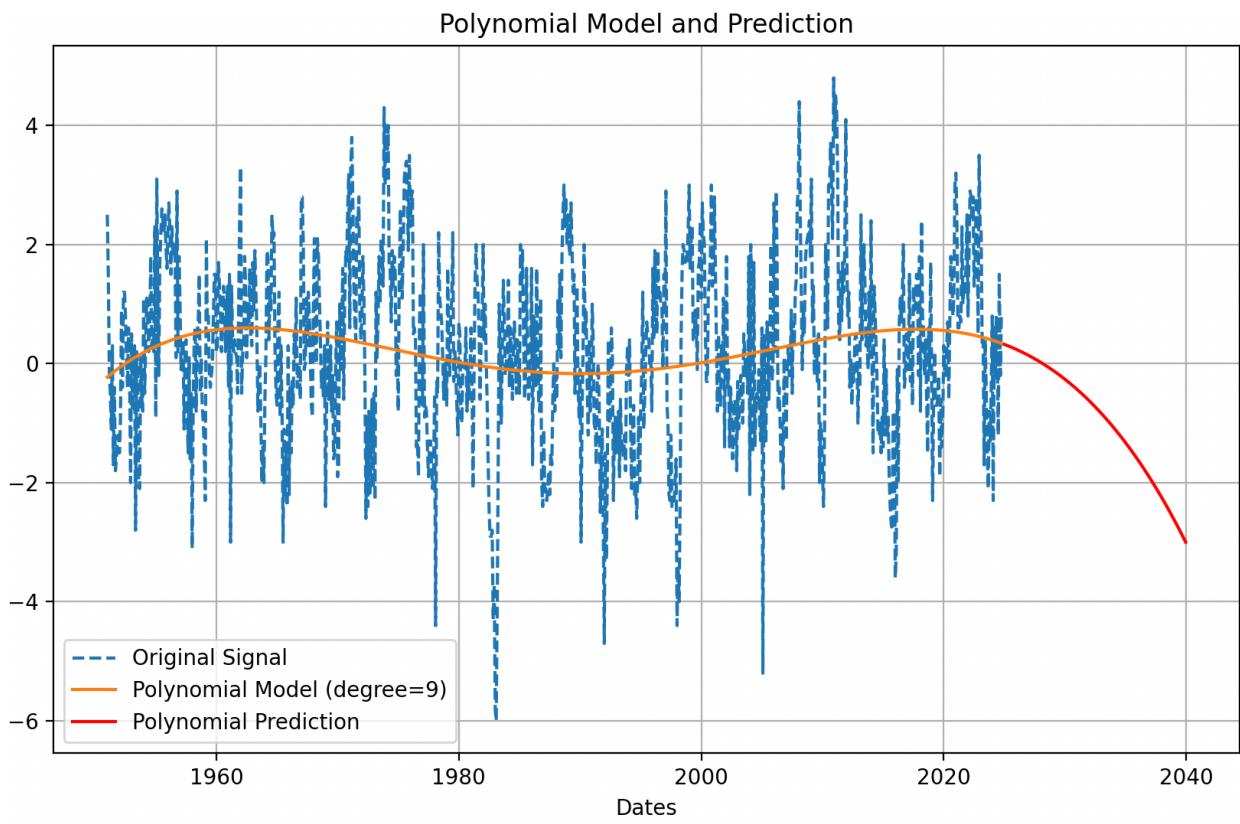


Рис. 19

В целом полином с ростом порядка начинает все лучше описывать нашу модель, однако, чем выше порядок мы берем, тем сильнее начинает его предикт отклоняться от своей модели. Это достаточно сильно скажется в дальнейшем на комбинированном прогнозе (обязательно рассмотрим все три варианта).

Теперь необходимо подобрать гармоники и так же их спрогнозировать, сначала подставим те значения (периоды), что приведены в примере: `Periods=[1 4.6 0.5]`, что получим (рис. 20)

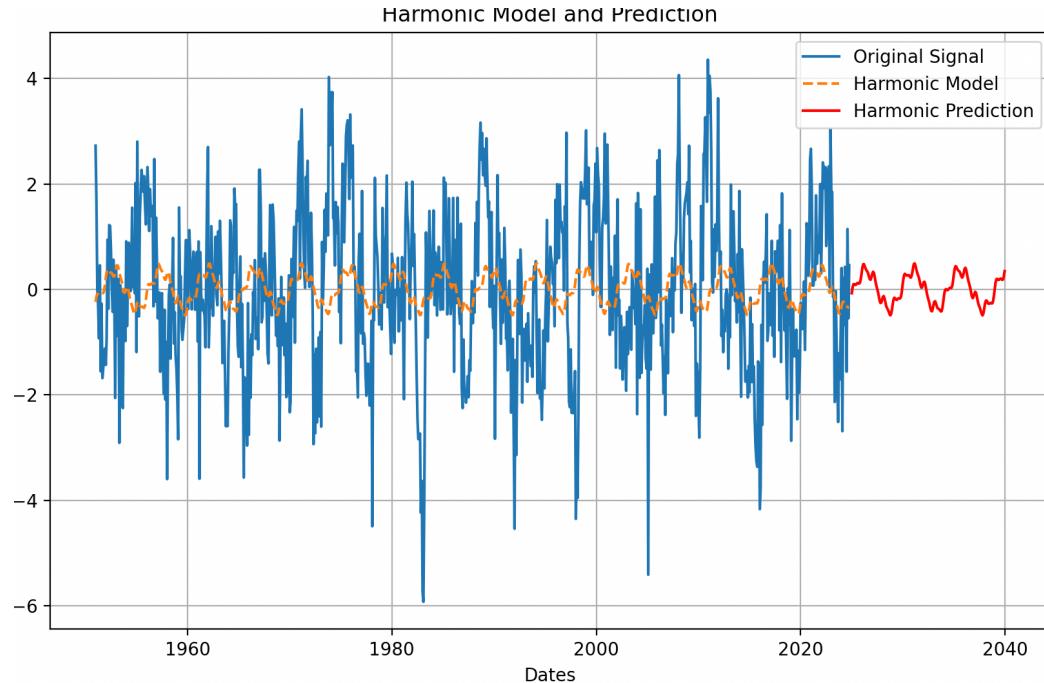


Рис. 20

Однако задача состоит в том, чтобы подогнать модель к нашему сигналу и на основе этого спрогнозировать поведение. Увеличим количество периодов на 1 и поставим значение, например, 8 (рис.21)

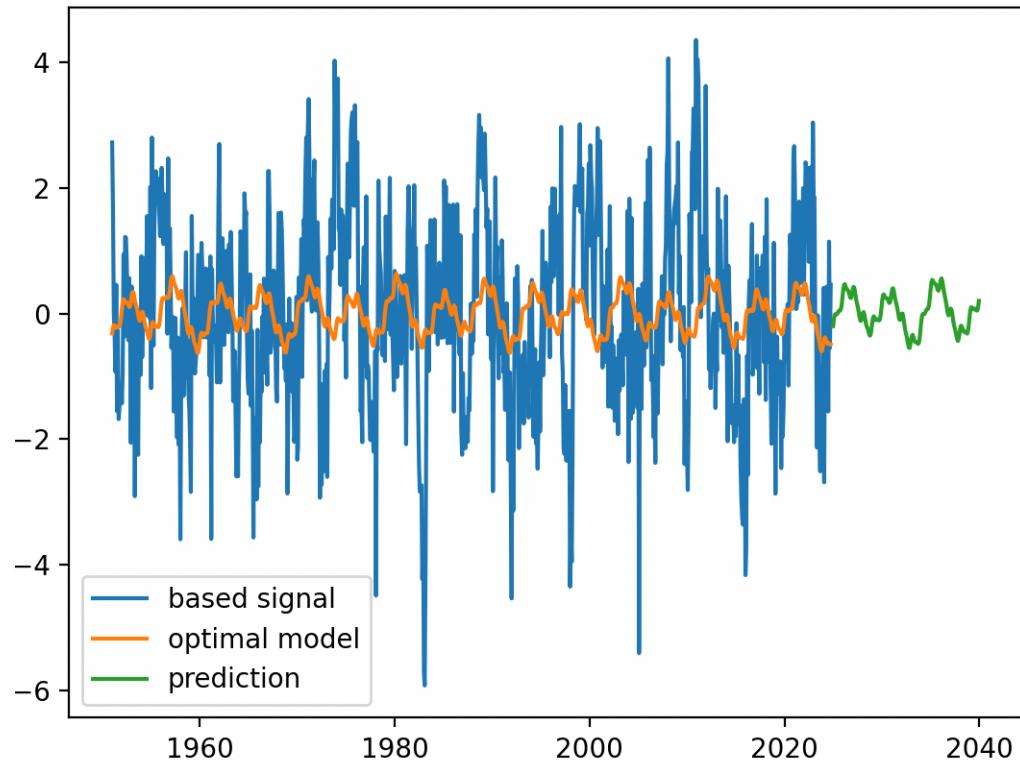


Рис.21

Уже лучше, но все равно надо еще подработать (на рис. 22 изображена максимально близкая модель)
 $\text{periods} = [0.6, 2.4, 6]$

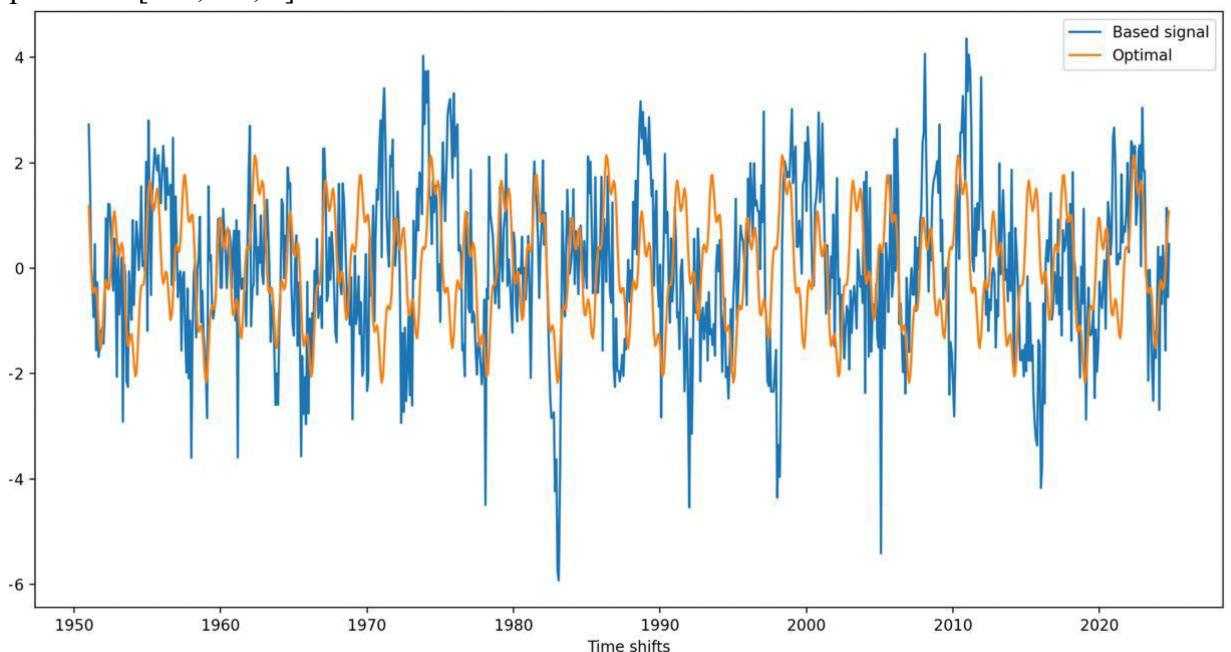


Рис. 22

И посмотрим на предикт (рис.23)

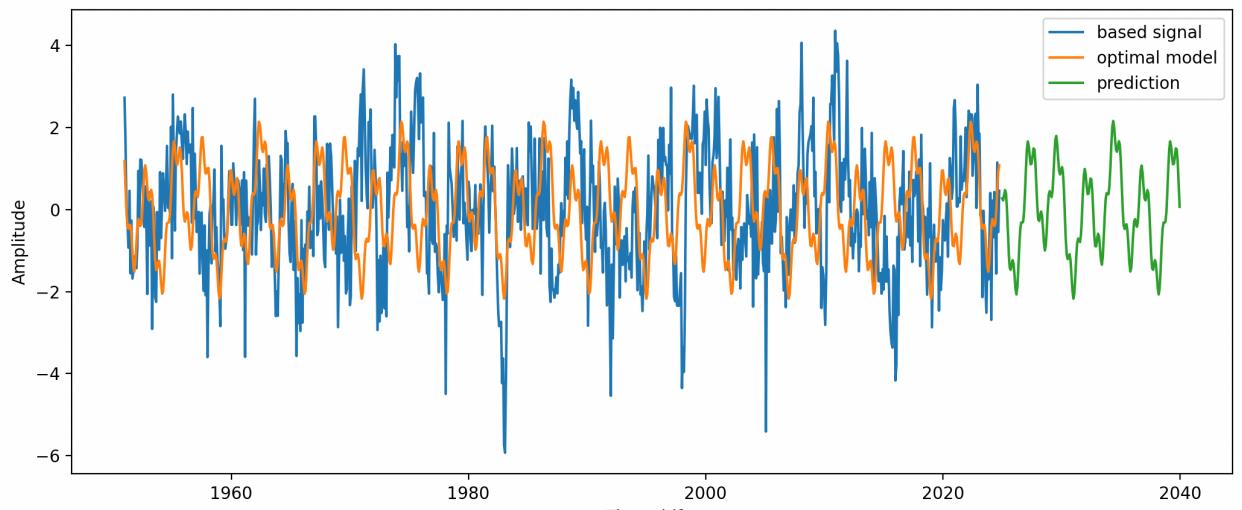


Рис.23

Теперь, подберем AR для нашего сигнала. Так же рассмотрим 3 порядка, например, 3, 5 , 9 (рис. 24 – рис. 26)

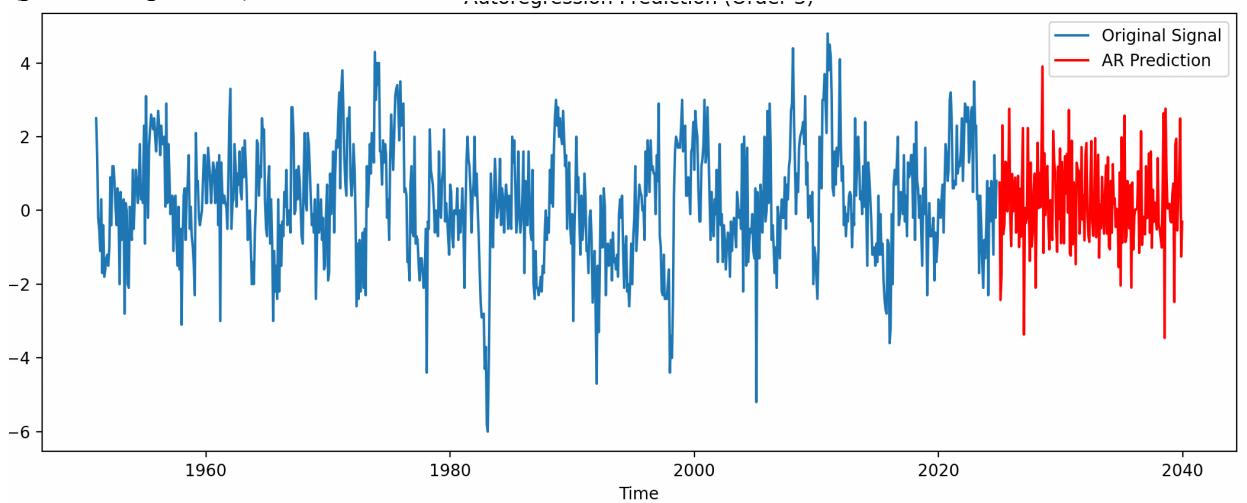


Рис. 24
Autoregression Prediction (Order 3)

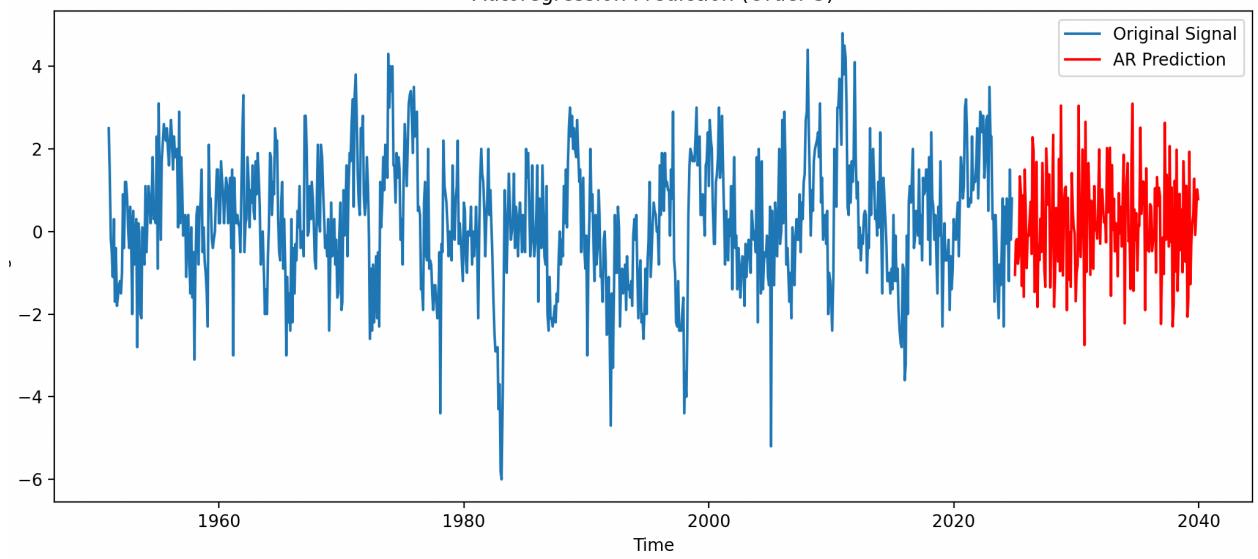


Рис. 25

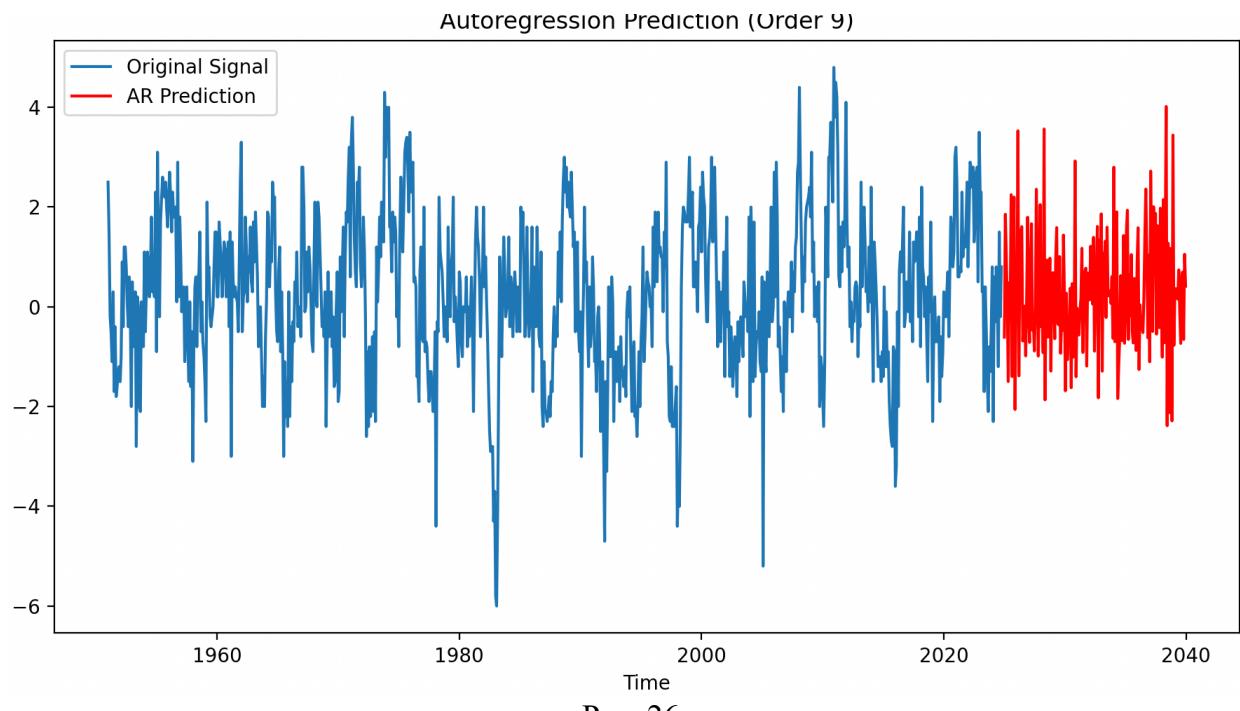


Рис. 26

А теперь соберем все предикты в один и посмотрим, что из этого всего получится (рис. 27 – рис. 29)

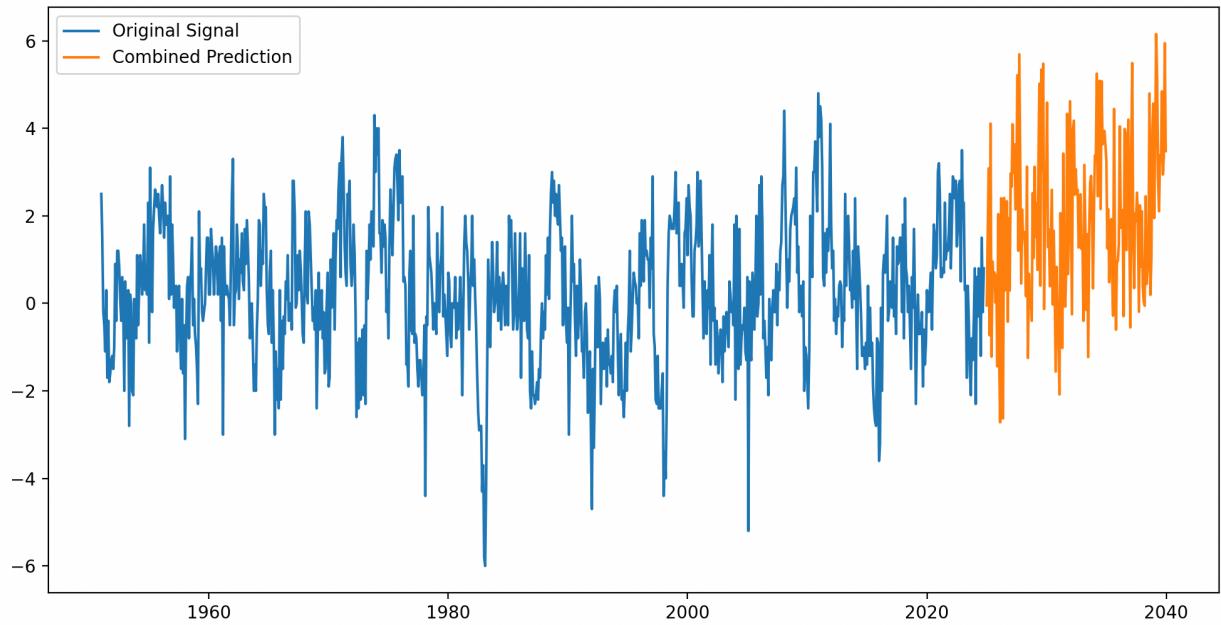


Рис. 27

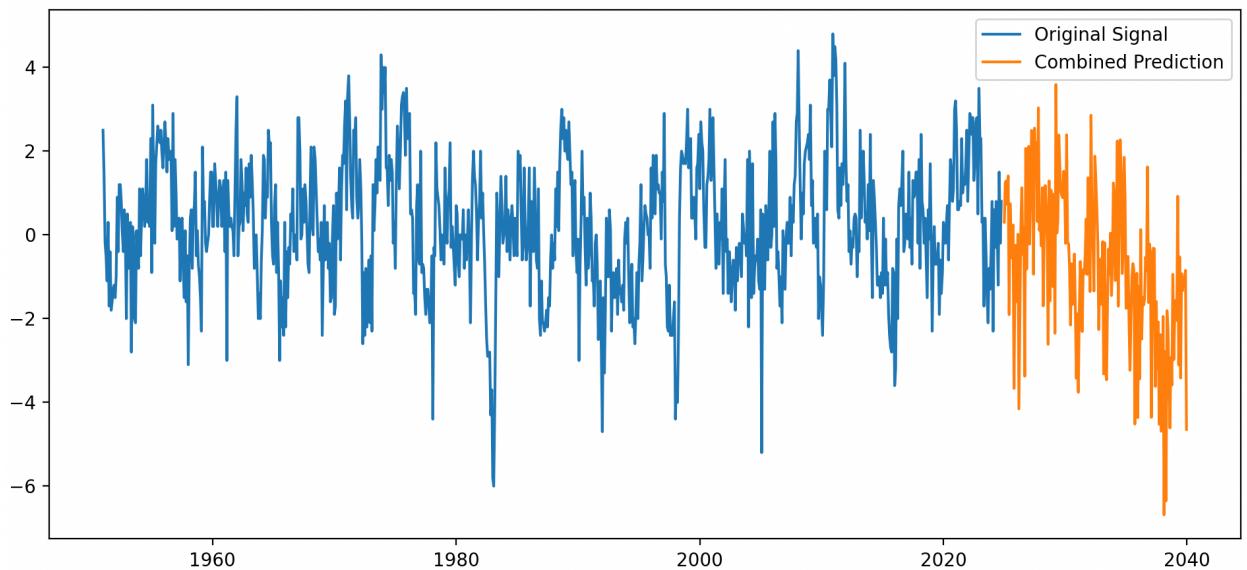


Рис. 28

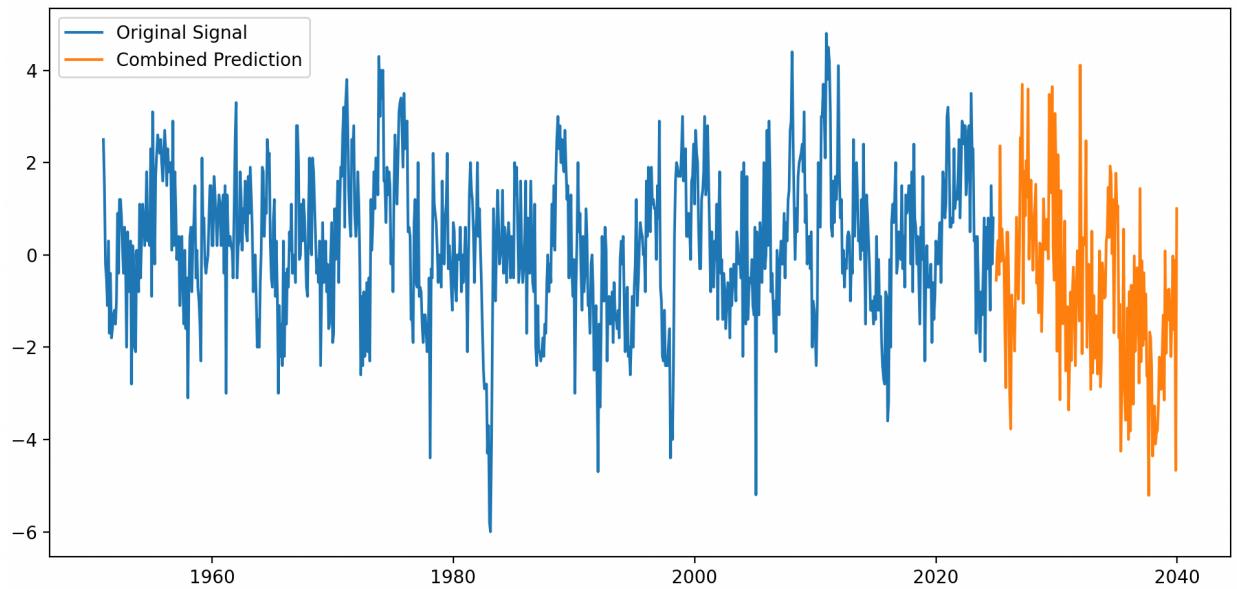


Рис. 29

Что можно сказать? Довольно сильно зависит движение предикта от полинома, тот что с порядком 3 растет вверх и существенно тянет за собой остальные. Несмотря на то, что порядок 5 по идеи должен отличаться от 9, мы наблюдаем, что существенных различий в поведении нет. Шаг был взять dt для синхронизации с исходным сигналом.

III пункт.

В данном пункте рассмотрим сигнал из ЛР1 (и предыдущих пунктов) и выполним для него все те же шаги, что и в пункте 2.

Для начала построим АКФ (смешенную и несмешенную) (рис. 30)

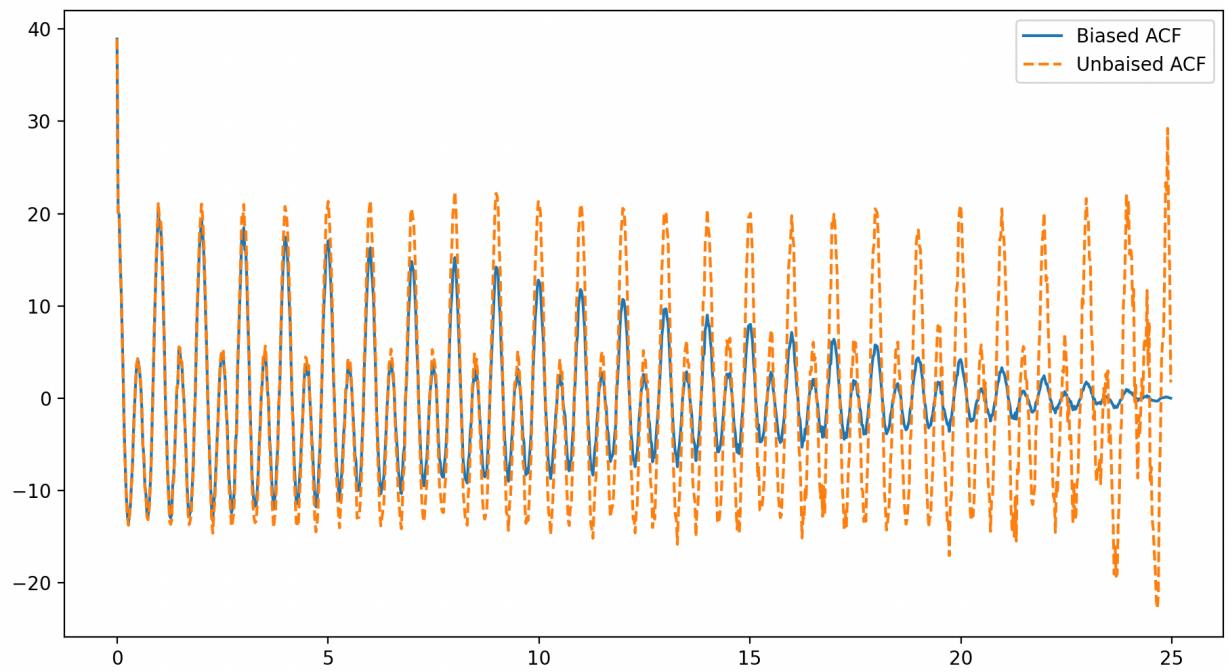


Рис. 30

В целом мы наблюдаем все тоже самое, что и ранее. Смешенная АКФ затухает, несмешенная, наоборот, начинает колебаться сильнее.

Аналогично предыдущим пунктам к смешенной и несмешенной АКФ строим спек. плотность так же смешенную и несмешенную (рис. 31)

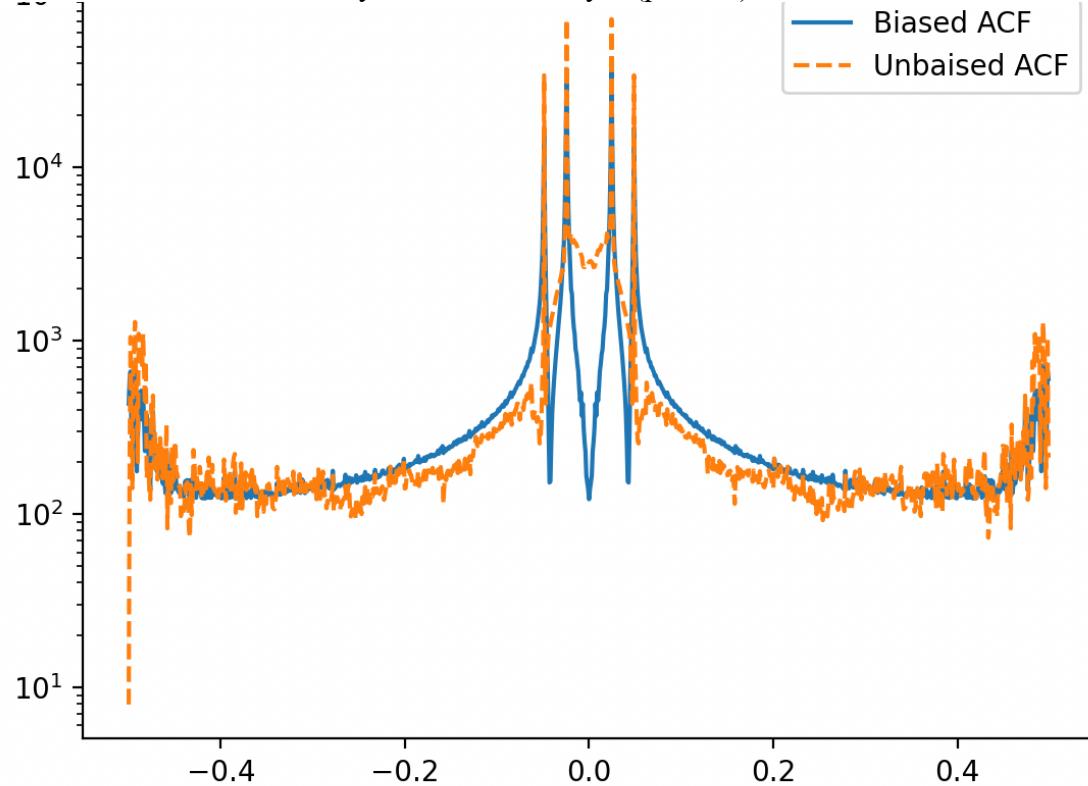


Рис. 31

В этот раз рассмотрим 2 порядка полинома. (2 и 4, чтобы были характерные различия). Изобразим их (рис. 32 – рис. 33)

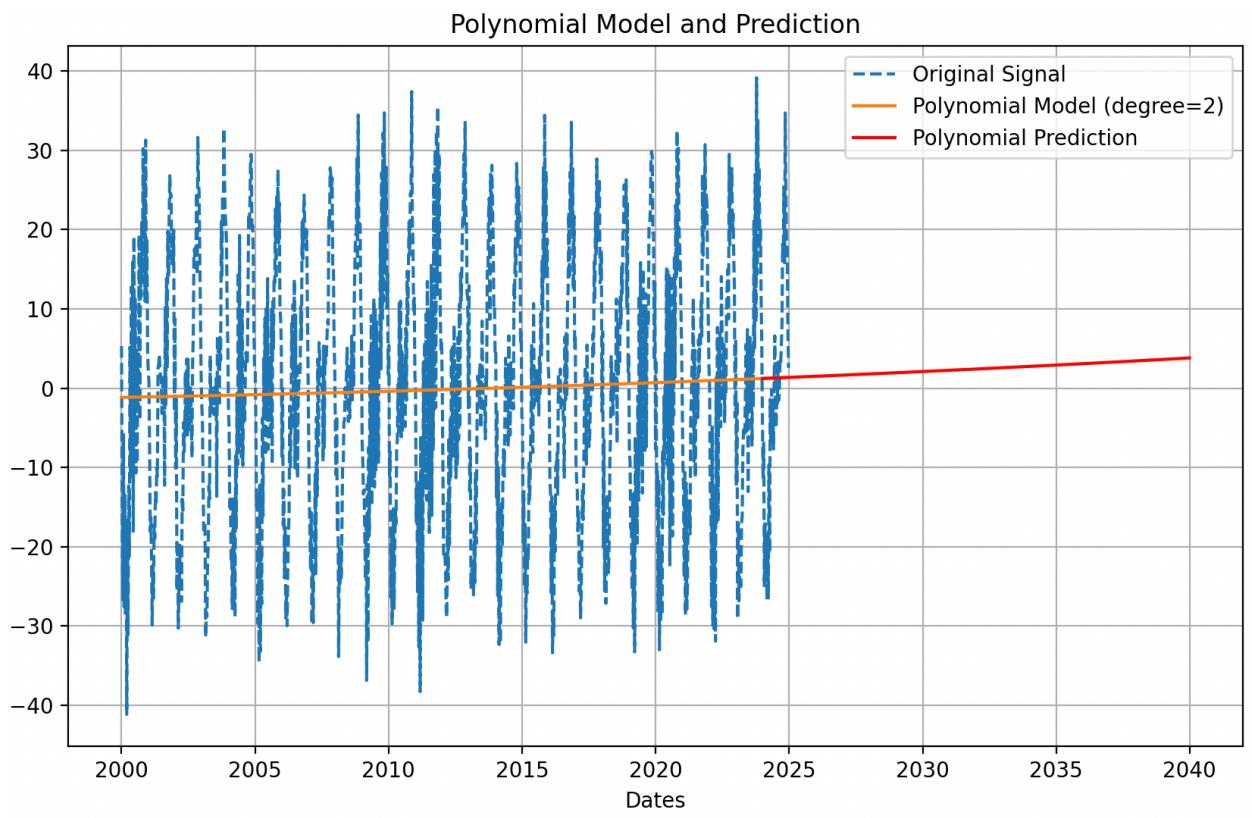


Рис. 32

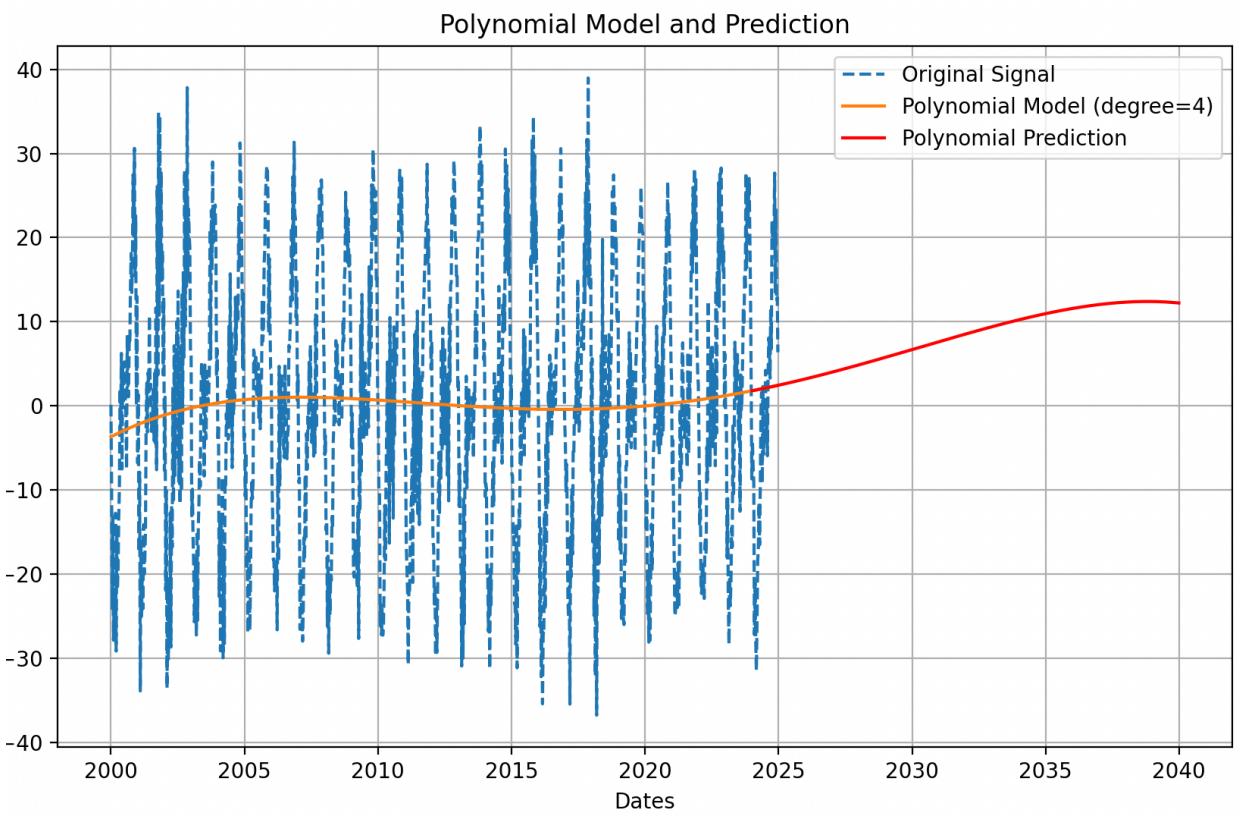


Рис. 33

Теперь построим гармоники с периодом почти схожим, но отличающимся на некоторые значения (рис. 34):
 $\text{periods} = [1, 4.6, 6]$

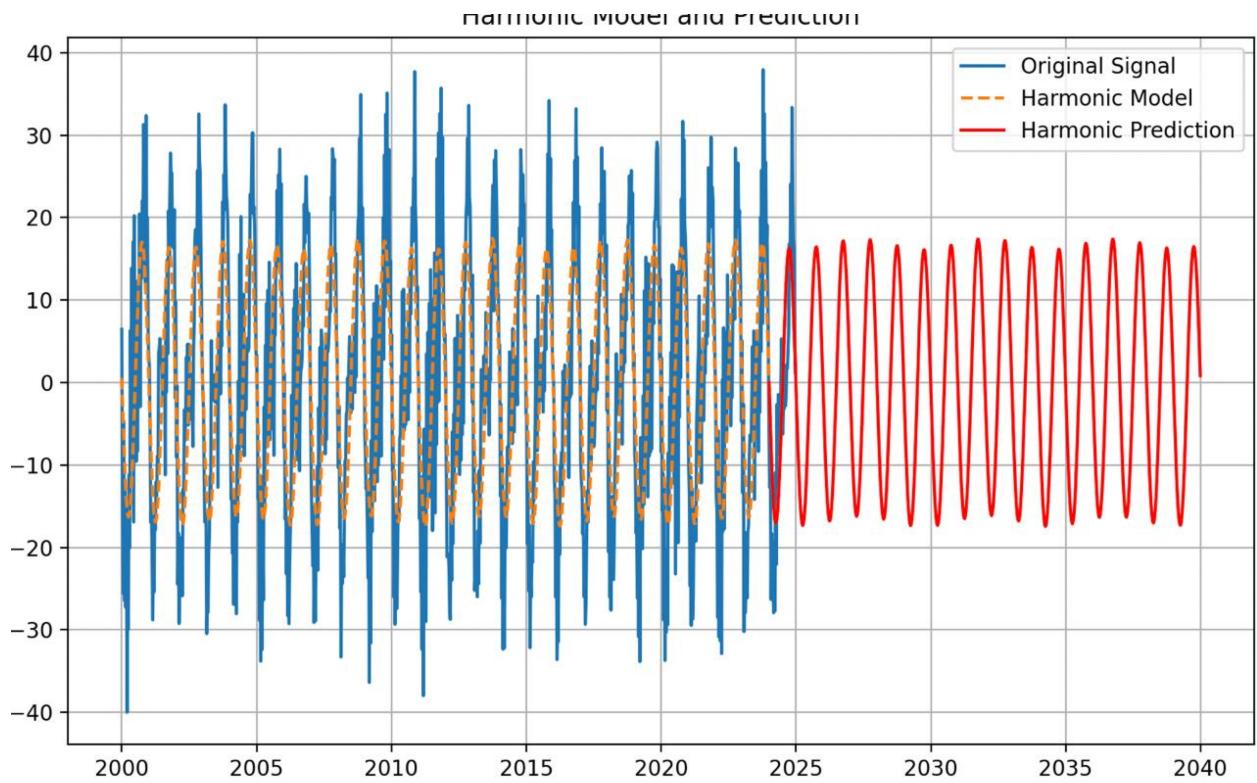


Рис.34

Теперь построим AR с минимальным допустимым порядком (=6), так как менее – начинается сильное расхождение в духе (рис. 35)

Autoregression Prediction (order 6)

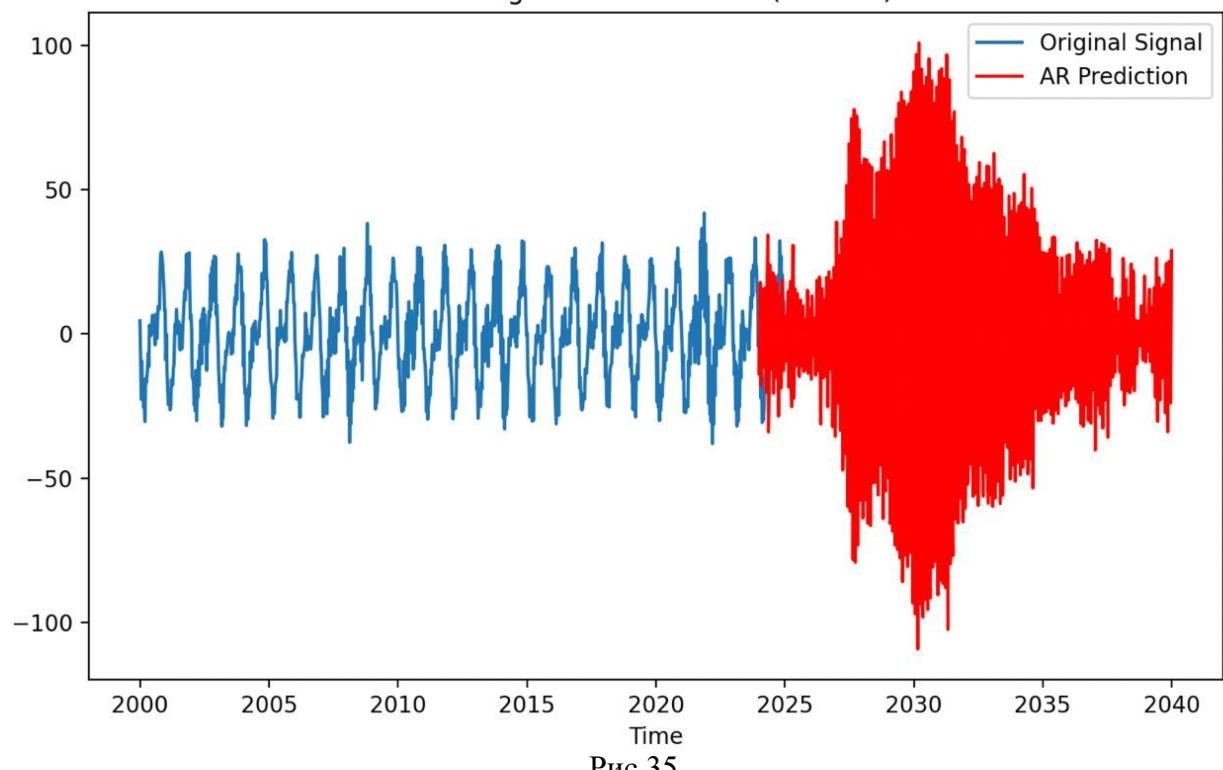


Рис.35

На рис.36 изображен AR предикт с порядком = 6

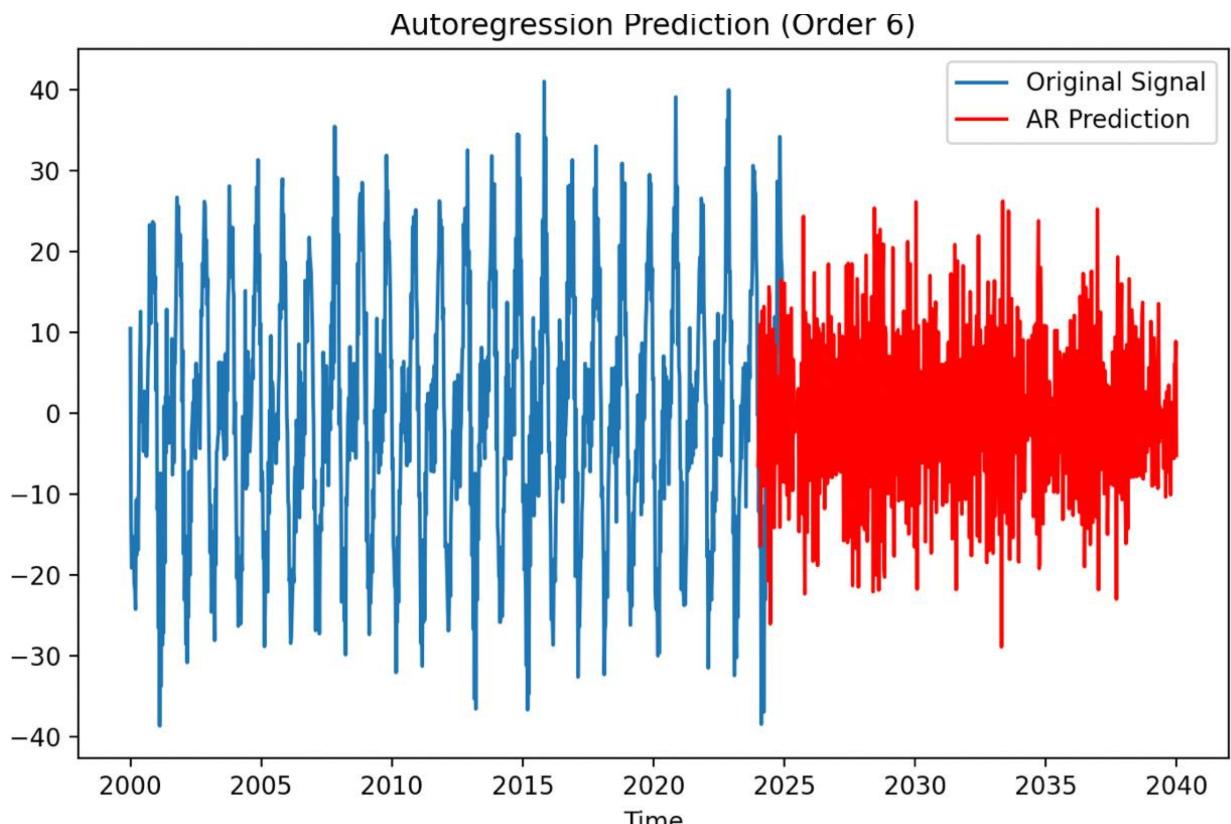


Рис. 36

Теперь соберем воедино все модели предиктов и посмотрим что получится (рис. 37 – рис.38)

Для полинома порядка = 2 (рис. 37)

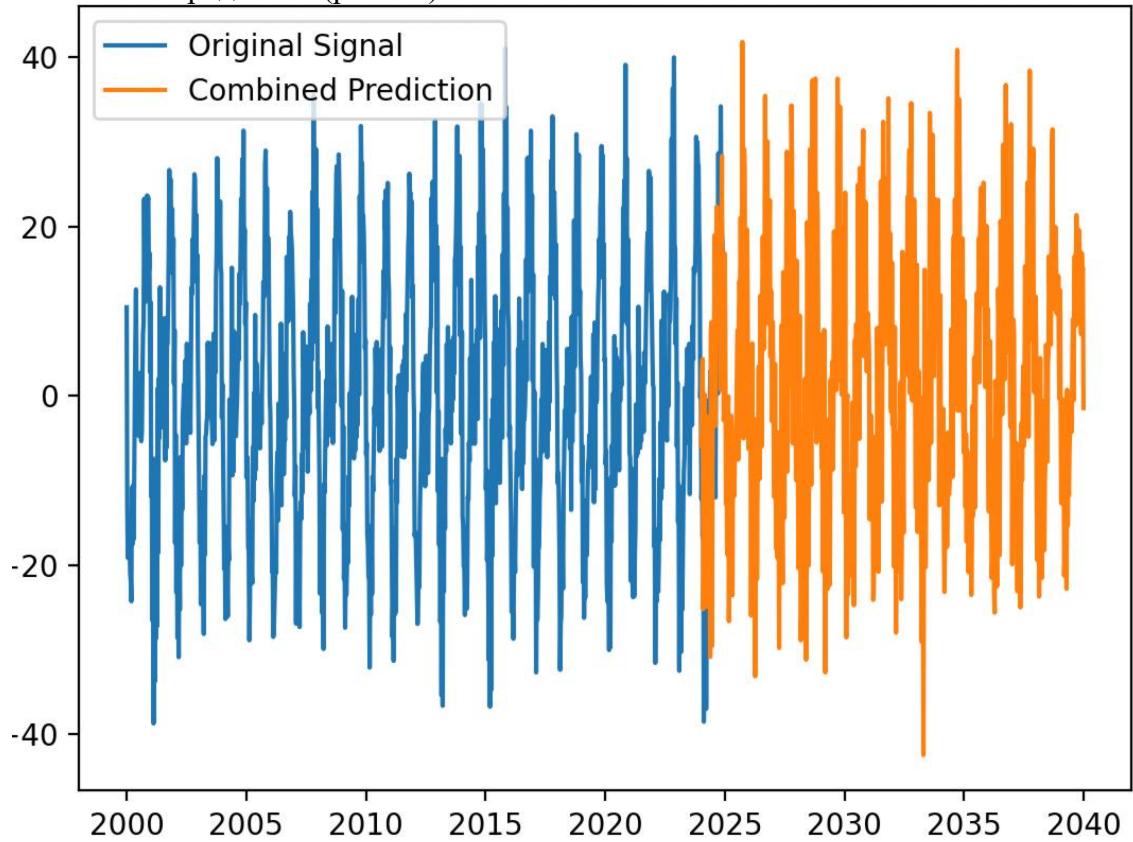


Рис. 37

Для полинома порядка = 4 (рис. 38)

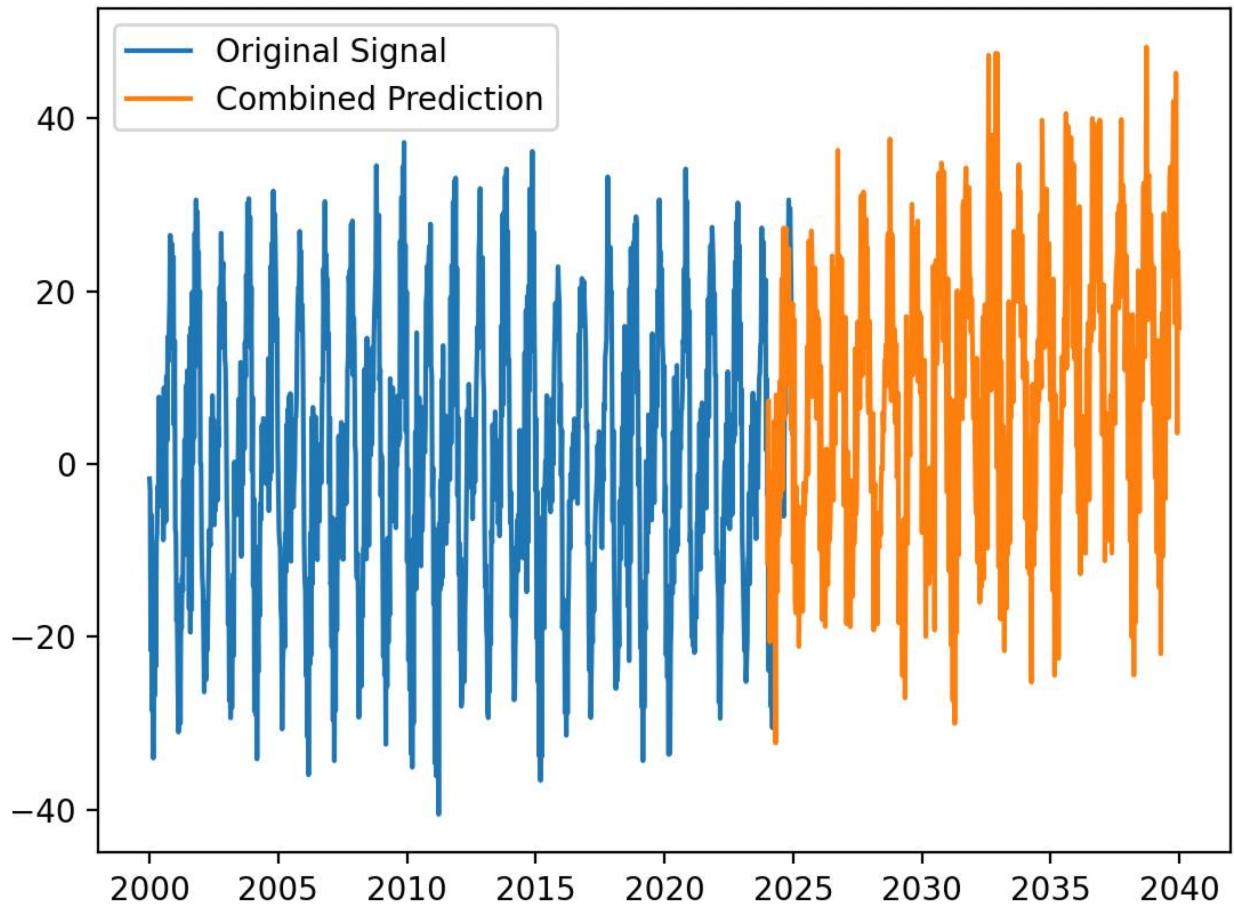


Рис. 38

Что можно сказать? Так как это смоделированный сигнал, то можно опираться лишь на его характер поведения + значения полинома выше порядка 2 были достаточно непредсказуемыми, поэтому оптимальный вариант – полином второго порядка с минимальным порядком AR = 6 и периодами, представленными выше.

IV Вывод.

В данной работе были реализованы пункты и шаги для прогнозирования сигналов, основываясь на получении предиктов полинома, гармоник, AR. Для смоделированного сигнала и сигнала из настоящих данных (Эль Ниньо) были продемонстрированы эти шаги и получены довольно неплохие результаты для первого приближения.