

Теория Фильтрации и Прогнозирование данных

Липатов Данила МСМТ 243
Лабораторная работа №1

Пункт 1

Графики считанных данных из файла ‘AAMWPgfz0.050-year.dat’ X, Y относительно времени, выраженных в годах с шагом 18 суток или с шагом $\frac{18}{365} = 0.05$ год.

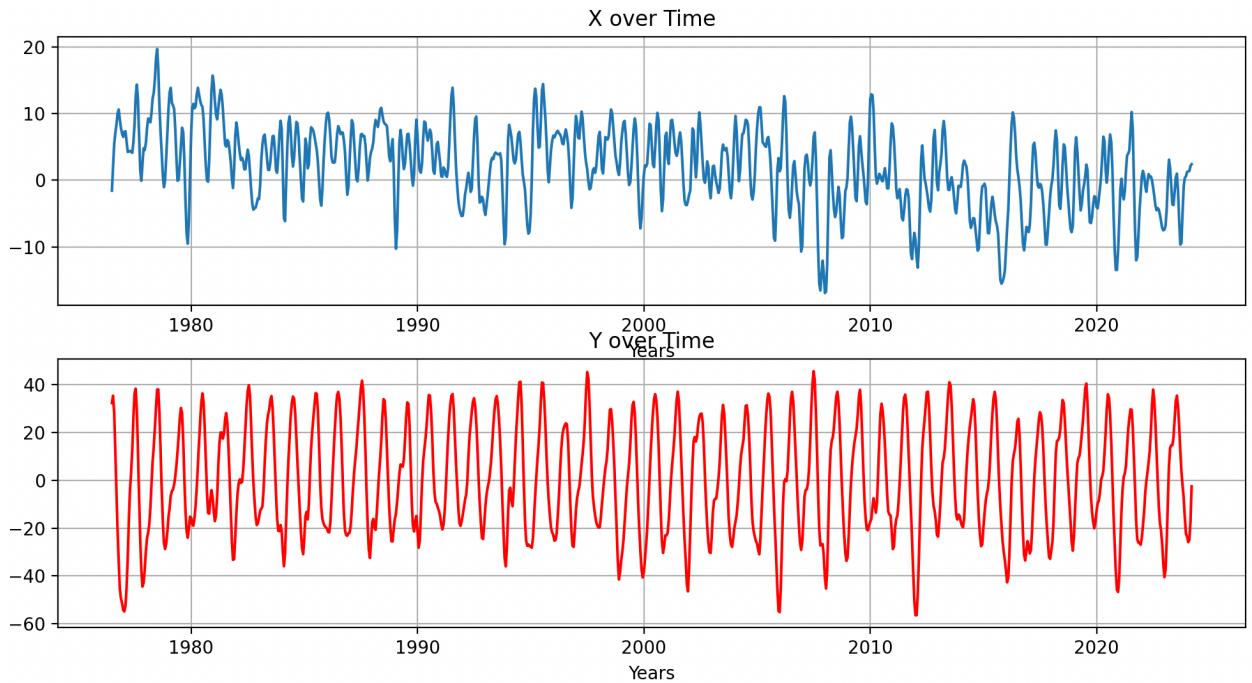


Рис. 1 Графики X , Y относительно времени в годах.

Далее применялось БПФ на исходные данные относительно X и Y и нормировались на кол-во элементов в массиве (т.к. данных по X и по Y одинаковое кол-во, то нет разницы длину какого массива выбирать)

Код для БПФ на ЯП Python представлен ниже

```
X_fft = np.fft.fft(X) / N
Y_fft = np.fft.fft(Y) / N
freqs = np.fft.fftfreq(N, dT)
```

Полученные спектрограммы (ограниченные положительной частью) представлены на Рис. 2, стоит отметить, что частота выражена через циклическую частоту $2\pi\nu$, где ν измеряется как рад / год (или для ν – цикл / год)

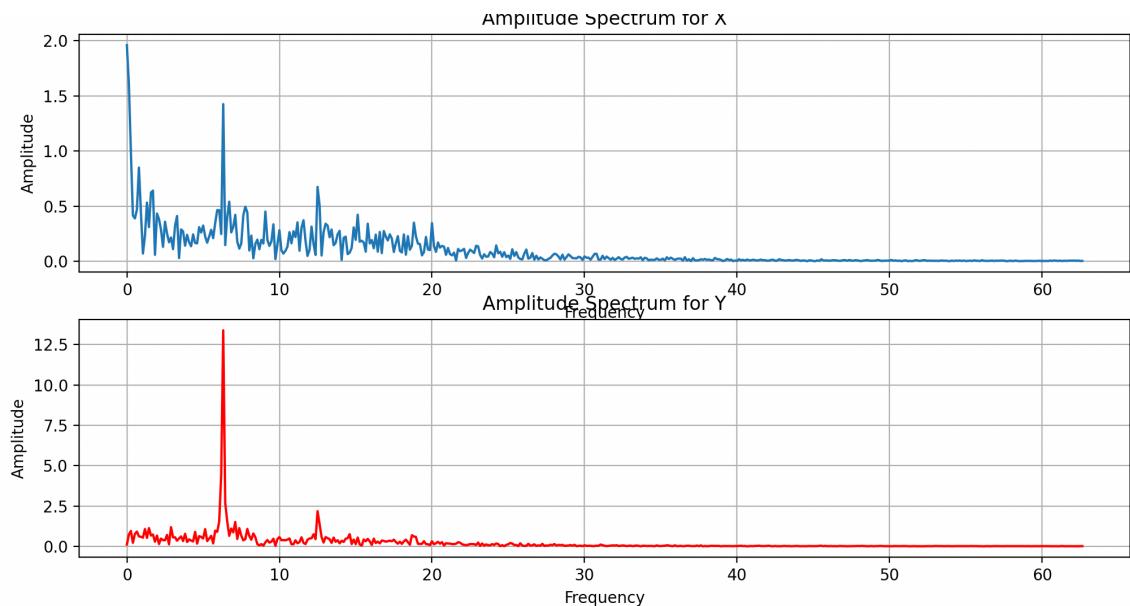


Рис. 2 Спектограммы для X и Y

На Рис.3 представлены графики периодограмм:

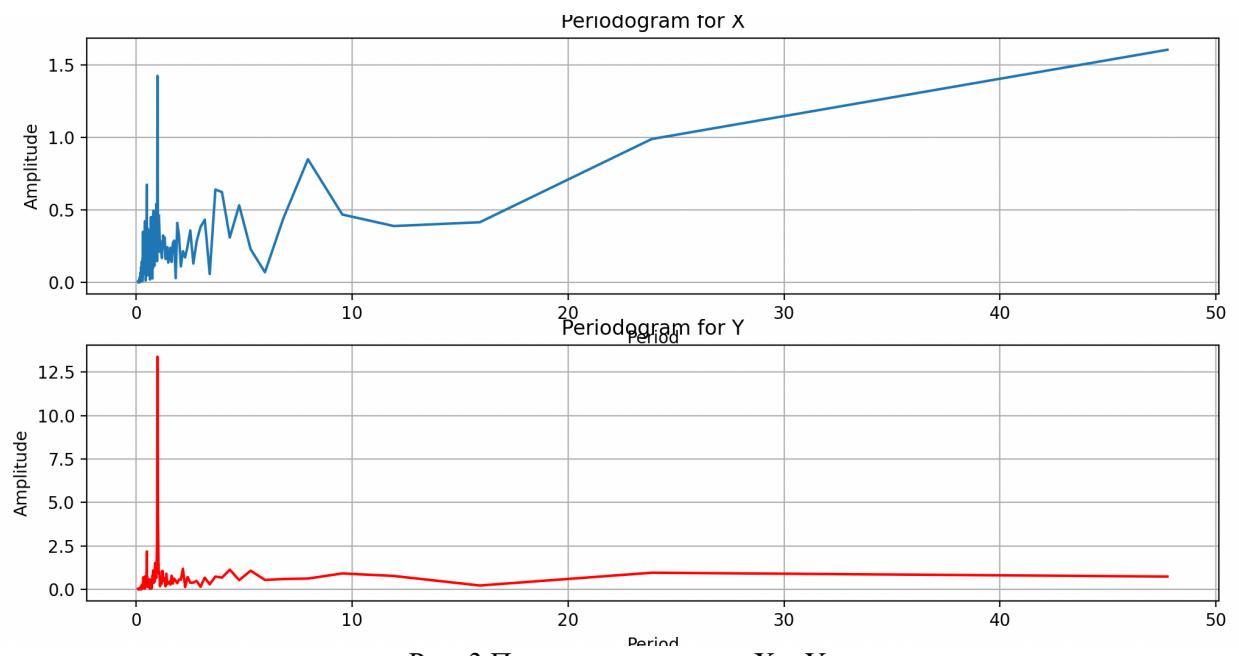


Рис. 3 Периодограммы для X и Y

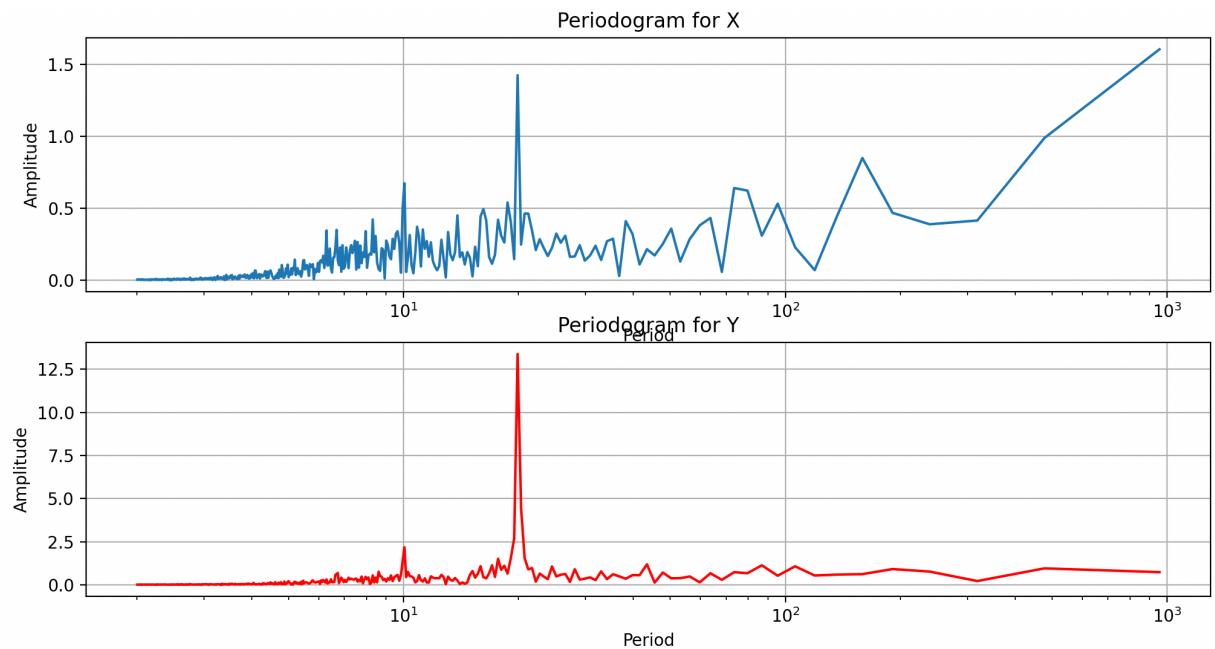


Рис. 3.2 Периодограммы для X и Y с лог. шкалой

Далее необходимо было объединить X, Y в комплексный ряд и так же найти спектrogramму

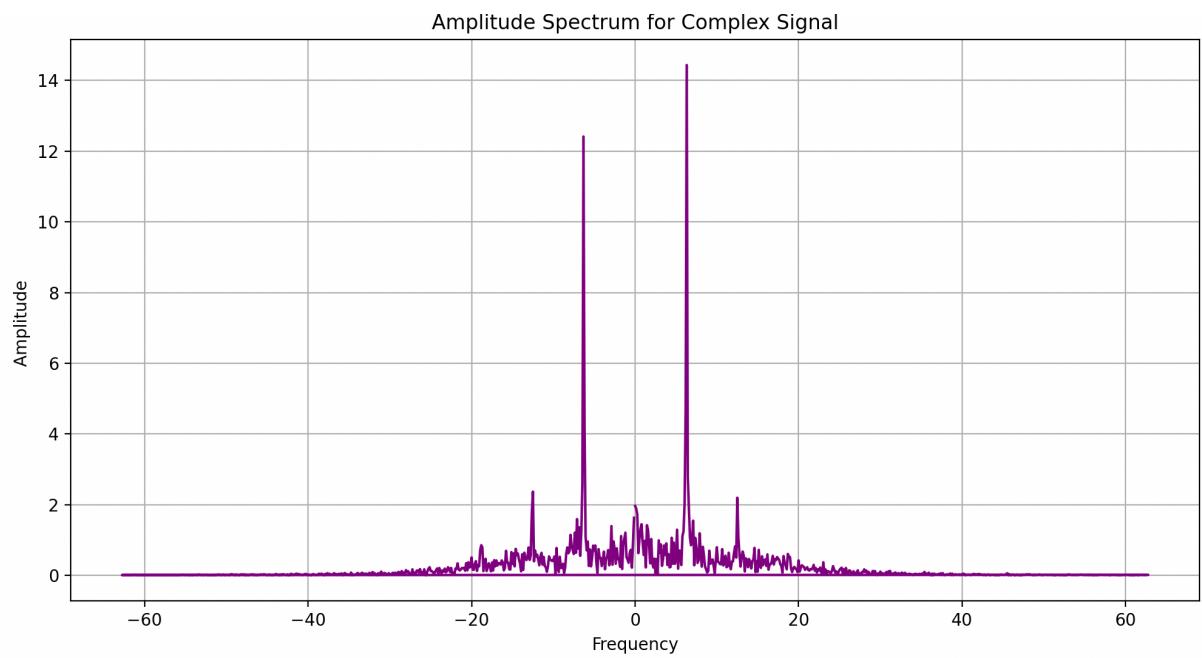


Рис. 4 Спектрограммы для комплексного ряда

Аналогично X, Y находим периодограмму комплексного ряда, представлен на Рис. 5

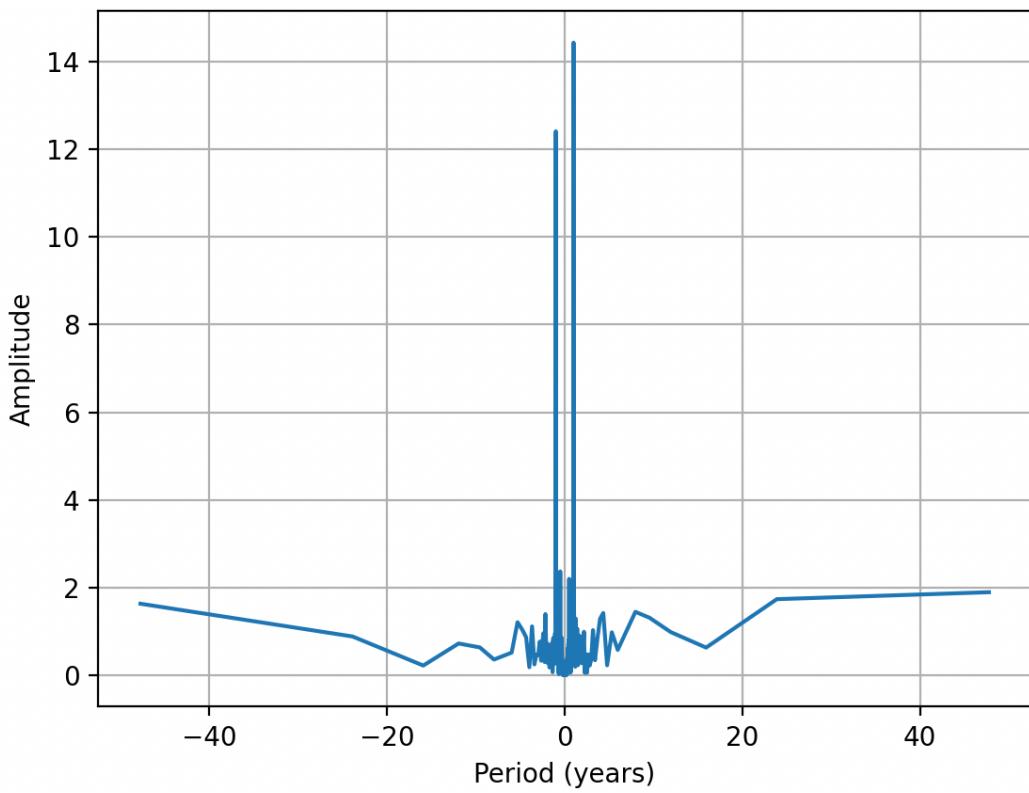


Рис. 5 Периодограммы для комплексного ряда

Пункт 2

Для нахождения C_k и C_{-k} было принято найти максимальную амплитуду в представленной спектрограмме комплексного сигнала

Через формулу (1.6)

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

Находилось значение и его индекс в массиве, соответственно:

$$\text{fft_k} (9.5725+10.808i)$$

Dominant frequency: 6.31 rad / year

Amplitude for positive frequency (FFT_k): 14.437969212443978

$$\text{FFT}_k = A_k e^{i\theta}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{10.808}{9.5725}\right)$$

Откуда фаза получилась равной:

Phase for positive frequency (FFT_k): 0.8459 rad

Аналогично для ретроградной

$$\text{fft_}-k (-6.74906+10.4199i)$$

Dominant frequency: -6.32 rad / year

Amplitude for negative frequency (FFT_{-k}): 12.414712572558162

$$\text{FFT}_{-k} = A_{-k} e^{i\theta}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{10.4199}{-6.74906}\right) + \pi$$

(Т.к. $\text{Re}(z) < 0, \text{Im}(z) > 0$)

Phase for negative frequency (FFT_{-k}): 2.14555676711411 rad

Найдем Ск и С-к по формуле 1.8, получим следующие результаты:

$$c_k = c_{-k}^* = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\omega_k t} dt = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = \frac{A_k}{2} e^{-i\varphi_k}.$$

$$\begin{aligned} C_k & (4.81064 - 5.36691i) \\ C_{-k} & (-3.34553 - 5.22865i) \end{aligned}$$

Оказывается, прямая реализация БПФ средствами доп модулей Python (numpy) считает элементы по определению $r * \exp(i*\theta)$

Если рассмотреть данные результаты как $r / 2 * \exp(-i * \theta)$ из приведенных выше вычислений, то результаты сойдутся.

Пункт 3

Для моделирование собственного сигнала на основе входных данных(где a, b, с дата, месяц и год рождения)

$$a = 18, b = 10, c = 2002$$

Необходимо было отнормировать амплитуды гармоник, согласно задаче и отмасштабировать их.

```
# Модельный сигнал как сумма трёх гармоник
X_model = (A1 * np.cos(2 * np.pi * t / T1 + phi1) +
            A2 * np.cos(2 * np.pi * t / T2 + phi2) +
            A3 * np.cos(2 * np.pi * t / T3 + phi3))
```

Где

Периоды (в годах)

T1 = 0.5

T2 = 1

T3 = 4.6

Амплитуды гармоник, нормализованные

A1 = (a / 31) * 20

A2 = (b / 12) * 20

A3 = ((c - 2000) / 50) * 20

phi1 = np.pi / 2

phi2 = np.pi / 2

phi3 = np.pi / 2

Получены следующие графики:

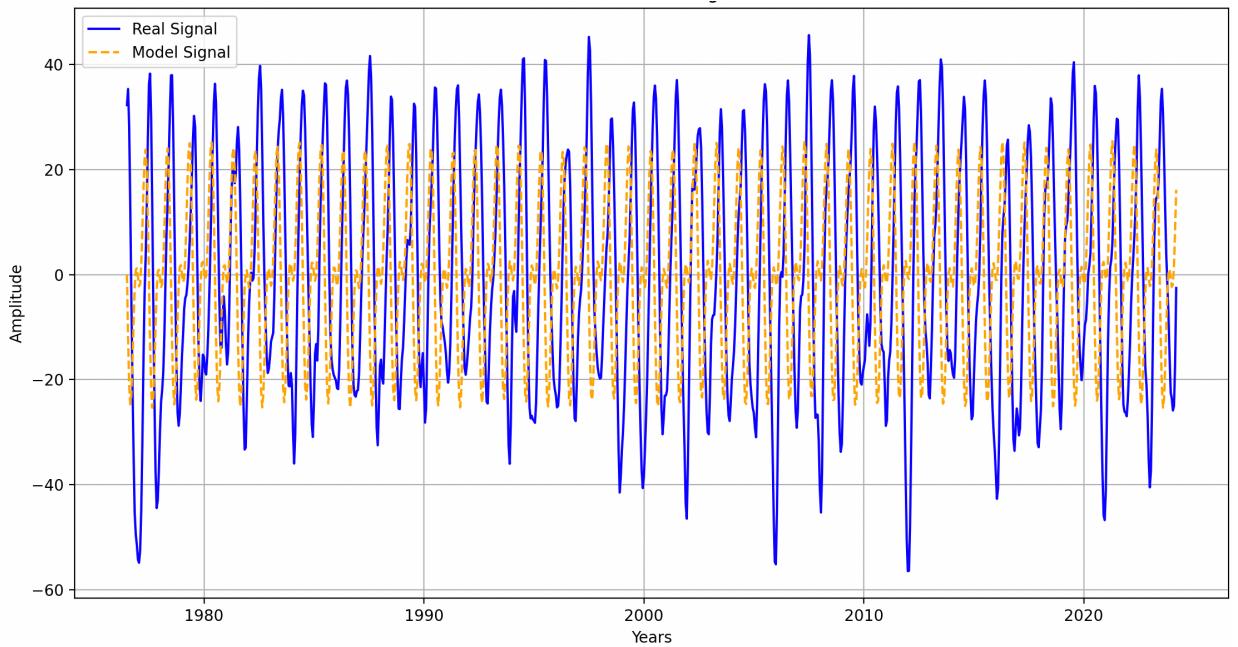


Рис. 6 Смоделированный сигнал против реального

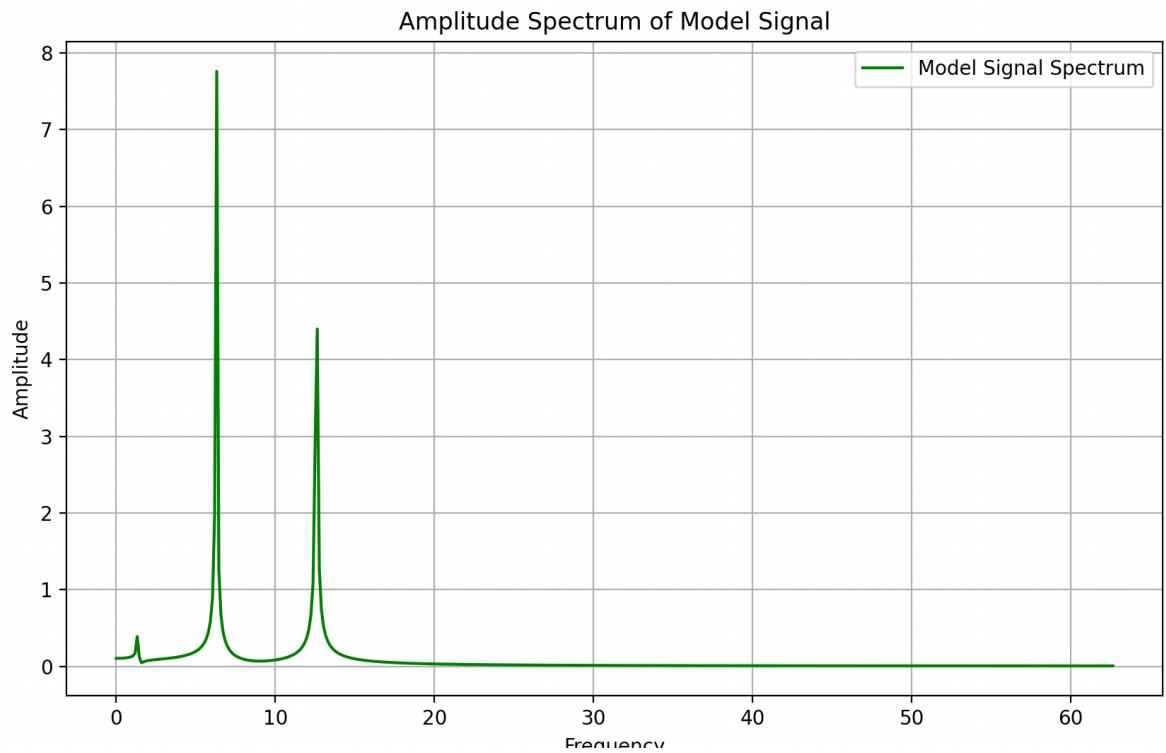


Рис. 7 Спектрограмма смоделированного сигнала

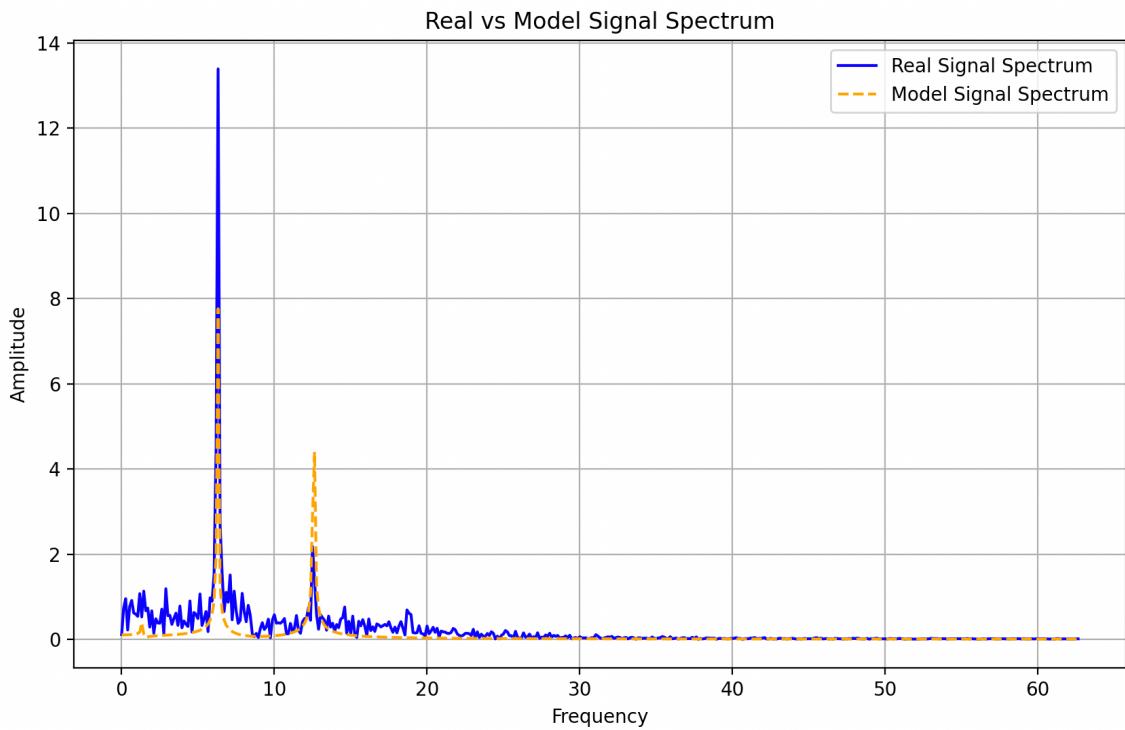


Рис. 8 Спектрограмма смоделированного сигнала, наложенного на реальный