Статистическое исследование изменения рейтинга компаний, занимающихся экономической деятельностью

Л.В. Кирьянова,
канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры ВМ, ФГБОУ ВО «НИУ МГСУ» (e-mail: KiryanovaLV@mgsu.ru)
Д.В. Липатов,
аналитик службы валидации, ООО «Национальные Кредитные Рейтинги» (e-mail: danchik-lip@mail.ru)

Аннотация. *В статье представлены результаты расчета матриц миграции кредитных рейтингов методами статистики марковских случайных процессов на основе синтетических и реальных данных. Рассматриваются дискретный и непрерывный подходы к расчету матриц миграции. Приведены алгоритмы, сходимость и анализ двух методов. Верификация сходимости алгоритмов проводилась на малых шагах итерирования. Результаты данной работы могут использоваться для обновления методологий расчета матриц миграции кредитных рейтингов в кредитном рейтинговом агентстве, являться основой для поиска новых методов расчетов матриц миграции.*

Abstract. *The article presents the results of calculation of credit rating migration matrices by the methods of Markov random process statistics on the basis of synthetic and real data. Discrete and continuous approaches to the calculation of migration matrices are considered. The algorithms, convergence and analyses of the two methods are presented. Verification of convergence of the algorithms was carried out at small iteration steps. The results of this work can be used to update the methodologies for calculating migration matrices of credit ratings in a credit rating agency, and serve as the basis for finding new methods for calculating migration matrices.*

Ключевые слова: *матрицы миграции кредитных рейтингов, эконометрика, кредитные рейтинги, марковский процесс с дискретным временем, марковский процесс с непрерывным временем.*

Keywords: *credit rating migration matrices, econometrics, credit ratings, discrete time Markov process, continuous time Markov process.*

Российская отрасль кредитных рейтинговых агентств (далее - КРА) активно развивается, переход рынка на новую модель регулирования существенно повысил доверие со стороны инвесторов к кредитным рейтингам, а также обеспечил активное включение КРА в российскую нормативно-правовую базу. При разработке и применении кредитных методологий КРА сталкиваются с необходимостью многокритериальной оптимизации своих моделей: с одной стороны, модели должны показывать высокую дискриминирующую способность, т.е. хорошо отделять компании по критерию дефолтности, с другой стороны, желательно, чтобы кредитные рейтинги, за исключением отдельных случаев, демонстрировали относительную стабильность. В данной работе рассматривается проблематика расчета стабильности кредитных рейтингов, в т.ч. на фактических данных применяется набор различных методов расчета метрик стабильности.

Расчет матриц миграции кредитных рейтинговых агентств является актуальным по следующим причинам:

1. Оценка качества моделей рейтингования. Матрицы миграции позволяют анализировать, насколько точно и своевременно кредитные рейтинговые агентства предсказывают изменения в кредитном качестве оцениваемых компаний. Это важно для оценки эффективности и надежности используемых методологий и моделей рейтингования.

2. Прогнозирование рисков. Понимание того, как компании перемещаются между различными категориями кредитных рейтингов, помогает инвесторам и кредиторам оценить риски и принять обоснованные решения об инвестировании или кредитовании. Матрицы миграции предоставляют информацию о вероятности дефолта или смены категории рейтинга для портфеля активов.

3. Повышение прозрачности и доверия. Раскрытие информации о матрицах миграции способствует повышению прозрачности рынка и доверия к кредитным рейтингам. Инвесторы и участники рынка могут более полноценно оценивать риски и принимать обоснованные решения на основе этой информации.

4. Регуляторные требования. В ряде стран регуляторы финансовых рынков требуют от кредитных рейтинговых агентств раскрывать информацию о матрицах миграции в соответствии с нормативными требованиями. Это делает расчет матриц миграции необходимым для соблюдения законодательства и регулятивных норм.

Таким образом, расчет матриц миграции является важным инструментом для оценки эффективности моделей рейтингования, прогнозирования рисков, повышения прозрачности рынка и соблюдения регуляторных требований.

Реализация двух методов позволяет осуществлять различные подходы к оценке матриц миграций для анализа и предсказания изменения в кредитном качестве компаний с учетом различных временных интервалов и используемых моделей. Далее представим два подхода – процесс изменения рейтинга компании можно рассматривать, как марковский процесс с дискретным временем (цепь Маркова) либо как марковский процесс с непрерывным временем.

Самым простым методом прогнозирования изменения рейтингов является анализ матрицы переходных вероятностей Марковского случайного процесса с дискретным временем (см, например, [1] – [3]).

Алгоритм дискретного метода (согласно [4] – [5]:

1.Определить интервал итерирования, как правило начало интервала – начальная дата (первая запись) в массиве данных, конец интервала – конечная дата (последняя запись)

2.Задать шаг для вычисления переходов (как правило *h = 1* или *h = 3*)

3.Посчитать переходы из состояния *I* в состояние *J* для каждого шага отдельно

4.Для каждой пары $\{i;j\}$ оценить с помощью отношения $\frac{N_{ij}}{N_{total}}$ вероятность перехода за один шаг из состояния i в состояние j.

5.Усреднить полученные вероятности для итоговой оценки искомой переходной матрицы.

Матрицу, полученную в 5 пункте, можно использовать для прогноза распределения рейтингов через n лет, количественного прогноза рейтингов (получение состояния S_{n-1}).

Основной недостаток данного подхода связан с тем, что с тем, что в интервале итерирования могут быть (и зачастую бывают) дополнительные переходы, которые не учитываются, хотя их вклад в стабильность конечной матрицы довольно велик.

Для решения указанной проблемы подходит метод с непрерывным временем.

Марковский случайный процесс с непрерывным временем позволяет решить ограничения, возникающие в дискретном подходе. Данный метод базируется на вычислении матрицы плотностей переходных вероятностей.

Алгоритм непрерывного метода, согласно [2] и [6]:

1.Определить интервал итерирования, выраженный в годах

2.Задать шаг для вычисления переходов (в данной работе 1 или 3 года)

3.Посчитать переходы из состояния i в состояние j для каждого шага следующим образом (на всех интервалах итерирования):

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{N_{ij}}{\int_0^T Y_i(s)ds}, \lambda_{ii} = -\sum\hat{\lambda}_{ij}.$$

Здесь $\hat{\lambda}_{ij}$ оценка интенсивности перехода из состояния i в состояние j;

$Y_i(s)$ – количество компаний, находящихся в *i* состоянии на протяжении всего временного интервала

4.Составить матрицу интенсивностей *At* переходов из элементов $\hat{\lambda}_{ij}$.

5.Найти матрицу переходных вероятностей разложением экспоненты

$$P(t) = exp(At)$$

матрицы интенсивности переходов *At* в ряд Тейлора.

Данный подход является более точным в решаемой задаче, так как учитывает переходы состояний в течение временного интервала. Так же стоит отметить, что в отличии от дискретного подхода, непрерывный подход позволяет получить вероятности переходов в те состояния, в которые при дискретном подходе переходов не наблюдалось

Для сравнения двух подходов смоделируем следующий пример (см, например, [1], [2]). Рассмотрим в произвольный момент времени 20 компаний. Пусть 10 компаний на начальную дату имеют рейтинг А, 10 компаний на начальную дату имеют рейтинг В. Через месяц 1 компании понизили рейтинг до В, через 2 месяца другой компании повысили рейтинг до А, еще через полгода третья компания перешла в состояние дефолта (понизили рейтинг до D).

Найдем матрицу плотностей переходных вероятностей.

$$\hat{\lambda}_{AB} = \frac{N_{AB}(1)}{\int_0^1 Y_A(s)ds} = \frac{1}{9 + \frac{1}{12} + \frac{10}{12}} = 0.10084,$$

где $Y_A(s)$ – количество компаний, находящихся в состоянии А на протяжении всего временного интервала (Здесь 9 компаний с рейтингом А находились в этом рейтинге на всем интервале времени, $\frac{1}{12}$ – время (в месяцах), через которое 1 компания с рейтингом А перешла в состояние В, $10/12$ – время (в месяцах), которое провела компания из состояния В в состоянии А до конца временного интервала).

Аналогично посчитаем $\hat{\lambda}_{BA}$ и $\hat{\lambda}_{BD}$.

$$\hat{\lambda}_{BA} = \frac{N_{BA}(1)}{\int_0^1 Y_B(s)ds} = \frac{1}{8 + \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{11}{12}} = 0.104347$$

$$\hat{\lambda}_{BD} = \frac{N_{BD}(1)}{\int_0^1 Y_B(s)ds} = \frac{1}{8 + \frac{6}{12} + \frac{2}{12} + \frac{11}{12}} = 0.104347$$

Получим матрицу *At*

$$At = \begin{pmatrix} -0.10084 & 0.10084 & 0 \\ 0.104347 & -0.208694 & 0.104347 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Разложим экспоненту матрицы в ряд Тейлора

$$At^2 = \begin{pmatrix} 0.02069105708 & -0.0312130052 & 0.01052235148 \\ -0.03229852691 & 0.05407386758 & -0.02177617543 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$At^3 = \begin{pmatrix} -0.0053434696495516 & 0.0086003282511352 & -0.0032569834536044 \\ 0.00889942931397466 & -0.0145416588788746 & 0.00564244586037026 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверим сходимость для 4-его члена разложения

$$P(t) = exp(At) = E + \frac{1}{1!}At + \frac{1}{2!}At^2 + \frac{1}{3!}At^3 + \cdots = \begin{pmatrix} 0.908615 & 0.0866669 & 0.00471835 \\ 0.089681 & 0.814252 & 0.0925185 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При этом для подхода с дискретным временем матрица переходных вероятностей будет иметь вид:

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данные матрицы для наглядности запишем в виде таблиц (Таблица 1 и Таблица 2).

Таблица 1

Матрица процесса с дискретным временем

	A	B	D
A	0,9	0,1	0
B	0,1	0,8	0,1
D	0	0	1

Таблица 2

Матрица процесса с непрерывным временем

	A	B	D
A	0,908	0,087	0,005
B	0,090	0,816	0,094
D	0	0	1

Аналитический расчет в данном примере хорошо сошелся с численным. Заметим, что фактических переходов по условию задачи из состояния A в состояние D не было, однако при непрерывном подходе вероятность такого события положительная, что свидетельствует о преимуществе данного подхода при прогнозировании рейтингов.

Для расчета матриц миграции с дискретным и непрерывным временем необходимо ввести дополнительные предположения – гипотезы (для получения корректных результатов):

1) Для каждого нового среза S_n с шагом *h* может существовать состояние, в которое перешел объект на предыдущем срезе S_{n-1}, в противном случае данный срез пропускается и не учитывает в усреднении.

2) Если разница между датой предыдущего состояния и датой начала среза больше 1 года (независимо от шага *h*), то такой срез не учитывает в усреднении.

3) Если объект переходит в состояние дефолта (рейтинг *D*), то вернуться из него в любое другое состояние он не может (исключение для процесса с непрерывным временем, так как внутри интервала такие переходы могут быть, если на начало интервала объект находится в состоянии *D*, то такой интервал пропускается).

4) Не учитывается отзыв рейтинга (такие переходы пропускаются для упрощения модели, однако ничто не мешает включать их в модель для дополнительного анализа)

Рассмотрим набор данных одного КРА. Учитывая гипотезы и алгоритм каждого подхода, найдем матрицу переходных состояний для дискретного времени с шагом *h* = 1 год.

Для большого количества временных интервалов будет применяться следующая формула усреднения:

$$\hat{\lambda}_{ij} = \frac{\sum N_{ij}}{\sum \int_0^T Y(s)ds}$$

Трактуемая, как интенсивность перехода есть отношение суммы всех переходов из состояния *i* в состояние *j* на всем временном интервале.

Получим следующие результаты, представленные в Таблице 3:

Таблица 3

Усредненная годовая матрица процесса с дискретным временем

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	CC	C	D
AAA	0,914	0,043	0,031	0,011	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001
AA	0,046	0,848	0,086	0,018	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,002
A	0,028	0,054	0,832	0,064	0,016	0,002	0,000	0,001	0,000	0,003
BBB	0,000	0,005	0,105	0,736	0,103	0,032	0,001	0,001	0,001	0,017
BB	0,000	0,000	0,010	0,094	0,737	0,107	0,008	0,000	0,001	0,044
B	0,000	0,000	0,000	0,080	0,070	0,743	0,020	0,004	0,000	0,083
CCC	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,173	0,519	0,019	0,000	0,288
CC	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,125	0,063	0,563	0,000	0,250
C	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,750	0,250
D	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000

Расчет матрицы миграции с помощью подхода с непрерывным временем, дает результаты, приведенные в Таблице 4:

Таблица 4

Усредненная годовая матрица процесса с непрерывным временем

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	CC	C	D
AAA	0,911	0,043	0,035	0,009	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
AA	0,049	0,842	0,084	0,018	0,002	0,001	0,000	0,001	0,000	0,003
A	0,025	0,051	0,827	0,067	0,017	0,008	0,000	0,001	0,000	0,005
BBB	0,001	0,006	0,090	0,726	0,111	0,045	0,002	0,001	0,000	0,017
BB	0,000	0,001	0,016	0,086	0,690	0,154	0,007	0,004	0,003	0,038
B	0,000	0,000	0,004	0,067	0,059	0,713	0,032	0,012	0,005	0,108
CCC	0,000	0,000	0,000	0,008	0,005	0,111	0,342	0,045	0,037	0,452
CC	0,000	0,000	0,000	0,007	0,002	0,030	0,034	0,085	0,043	0,798
C	0,000	0,000	0,000	0,007	0,001	0,007	0,001	0,007	0,111	0,868
D	0,000	0,000	0,001	0,011	0,001	0,011	0,001	0,009	0,011	0,956

Анализ приведенных матриц миграции показывает, что до состояния **CCC** значения слабо отклоняются друг от друга, однако состояния **CCC** и ниже уже в значительной мере отличаются друг от друга. Этот факт является результатом того, что внутри интервала с шагом *h* = 1 год находилось довольно много наблюдений переходов в состояния D и прочие.

Далее, для анализа качества моделей используем MSE – среднеквадратическую ошибку:

$$MSE = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \widehat{y_i})^2 ,$$

где $\hat{y}_i$ – прогнозируемое значение, y_i – фактическое значение.

Рассчитаем усредненную матрицу миграции двумя методами (дискретным и непрерывным) с шагом *h* = 2 года, чтобы посмотреть и сравнить переходные вероятности через 2 года. Расчет, аналогичный приведенному выше приводит к среднеквадратической ошибке для дискретной матрицы MSE_{discr} = 13.23, а для непрерывной матрицы MSE_{cont}= 1.72. Их отношение

$$\Delta MSE = \frac{MSE_{discr}}{MSE_{cont}} = \frac{13.23}{1.72} = 7.69$$

показывает, что различие между сходимостями к своим прогнозируемым значениям довольно большое.

Для верификации шаг был уменьшен до *h* = 2 месяцев. За такое время наблюдается совсем немного переходов в различные состояния у непрерывного процесса, что позволило проверить сходимость к дискретному случаю и построить прогноз матрицы миграции на 6 месяцев, приведенный в Таблице 5 (для непрерывного времени) и Таблице 6 (для дискретного времени).

Таблица 5

Прогноз с помощью непрерывного подхода матрицы миграции на 6 месяцев

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	CC	C	D
AAA	0,910	0,046	0,033	0,008	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
AA	0,047	0,841	0,087	0,017	0,003	0,001	0,000	0,001	0,000	0,002
A	0,022	0,047	0,835	0,068	0,017	0,007	0,000	0,001	0,000	0,004
BBB	0,001	0,005	0,080	0,760	0,100	0,040	0,002	0,001	0,001	0,010
BB	0,000	0,001	0,015	0,083	0,720	0,149	0,006	0,003	0,003	0,019
B	0,000	0,000	0,004	0,062	0,056	0,768	0,029	0,011	0,006	0,065
CCC	0,000	0,000	0,001	0,033	0,006	0,117	0,409	0,049	0,049	0,336
CC	0,000	0,000	0,003	0,054	0,005	0,032	0,025	0,128	0,072	0,681
C	0,000	0,000	0,002	0,041	0,002	0,001	0,000	0,000	0,173	0,782
D	0,000	0,000	0,004	0,069	0,004	0,002	0,000	0,000	0,051	0,870

Таблица 6

Прогноз с помощью дискретного подхода матрицы миграции на 6 месяцев

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	CC	C	D
AAA	0,913	0,047	0,031	0,008	0,001	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
AA	0,048	0,839	0,089	0,017	0,003	0,001	0,000	0,000	0,001	0,002
A	0,022	0,048	0,835	0,067	0,017	0,006	0,000	0,001	0,001	0,002
BBB	0,001	0,005	0,082	0,762	0,100	0,036	0,002	0,001	0,000	0,011
BB	0,000	0,001	0,014	0,083	0,728	0,144	0,006	0,002	0,002	0,020
B	0,000	0,000	0,004	0,062	0,057	0,780	0,025	0,007	0,002	0,064
CCC	0,000	0,000	0,001	0,015	0,005	0,136	0,509	0,053	0,025	0,256
CC	0,000	0,000	0,000	0,002	0,002	0,053	0,052	0,345	0,025	0,520
C	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,445	0,555
D	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,000

Матрицы, соответствующие Таблицам 5 – 6 сравним с усредненными годовыми матрицами, приведенными в Таблицах 3 – 4 и заметим, что оба метода дали довольно близкие значения, что говорит о их сходимости при еще меньших шагах. Для шага h = 1 месяц так же получены достаточно близкие результаты.

В заключение отметим, что подходы, изложенные в данной работе, позволяют заменить общий для многих КРА подход расчета матриц миграций с учетом большого количества допущений на более точный непрерывный подход, для которого большую часть этих допущений можно опустить. Кроме того, можно в дальнейшем реализовать оценки Аалена-Йохансона из [1] – [3] и Байесовского подхода из [7] – [8] для прогнозирования матриц миграций и сравнения с уже существующими методами.

Библиографический список:

1. David Lando Analyzing rating transitions and rating drift with continuous observations // Journal of Banking & Finance, 2002, №26, С. 423 – 444
2. David Lando Credit Risk Modeling: Theory and Applications, 1 изд., United Kingdom: Princeton University Press, 2004, 329 с.
3. Muliaman D Hadad, Wimboh Santoso, Bagus Santoso, Dwityapoetra Besar, Ita Rulina Rating migration matrices: empirical evidence in Indonesia // IFC Bulletin, 2009, №31, С. 260 – 276.
4. Булинский А.В, Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. - учебное пособие изд. - М.: Физматлит, 2005, 400 с.
5. Шмидт А.В, Чурюкин В.А. Марковские модели экономических систем // Вестник ЮУрГУ, 2015, №3, С. 100 – 105.
6. Fei Fei, Ana-Maria Fuertes, Elena Kalotychou. Credit Rating Migration Risk and Business Cycles // Journal of Business Finance and Accounting, 2012, №39, С. 229 – 263.
7. Statistical Properties of Population Stability Index // Western Michigan University URL: http://www.stat.wmich.edu/naranjo/PSI.pdf (дата обращения: 15.12.2023).
8. Rating transitions forecasting: a filtering approach // hal.science URL: https://hal.science/hal-03347521v4 (дата обращения: 10.12.2023).