Estruturas de Dados 1

Disciplina 193704

Prof. Mateus Mendelson

mendelson@unb.br

Universidade de Brasília

Faculdade do Gama

Engenharia de Software

Recursividade

1. Recursividade

- É uma das ferramentas de programação mais poderosas e menos entendidas pelos principiantes em programação.

- Como vocês já não são mais principiantes, suponho eu, esse capítulo será mamão com açúcar.

- Após termos trabalhado com funções, alguns devem ter se perguntado:

Uma função pode chamar ela mesma?

- A resposta é sim, e esta técnica se chama RECURSIVIDADE.

- Algumas vezes ela facilita a interpretação de certos problemas.

1. Recursividade

- Uma questão fundamental é:

Quando parar de chamar a função?

- A recursão requer a repetição explícita de um processo até que determinada condição seja satisfeita.

- Se você não garantir isto, o algoritmo entrará num laço infinito.

1. Recursividade

- Exemplo:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int loop(int);

int main(int argc, char *argv[])
{
  int n;

  n = loop(5);

  system("PAUSE");
  return 0;
}

int loop(int x){

    if(x < 10)

    return loop(x);

}
```

1. Recursividade

Problema: Escreva uma função que recebe como parâmetro um inteiro positivo **N** e retorna a soma de todos os números inteiros entre 0 e **N**.

- Solução iterativa:

```
int somatorio(int N)
{
        int i, resp = 0;

        for( i = 1; i <= N; i++ )
                resp += i;

return resp;
}
```

1. Recursividade

Problema: Escreva uma função que recebe como parâmetro um inteiro positivo **N** e retorna a soma de todos os números inteiros entre 0 e **N**.

- Solução recursiva:

```
int somatorio(int N)
{
        if( N == 1 )
                return 1;
        else
                return N + somatorio(N - 1);
}
```

1. Recursividade

- A função fatorial:

$$n! = \begin{cases} 1 & se\ n = 0 \\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 & se\ n > 0 \end{cases}$$

➢ Exemplos

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

1. Recursividade

- A função fatorial:

  ✓ De forma iterativa:

fatorial (n) = 1 * 2 * 3 .... n

  ✓ De forma recursiva:

fatorial (n) = n * fatorial (n – 1),
fatorial (0) = 1

1. Recursividade

- Solução:

  ✓ De forma iterativa:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(int argc, char *argv[])
{
  int n, i, fat = 1;

  printf("Digite n:");
  scanf("%d", &n);

  for(i = 1; i<=n;i++) fat = fat*i;

  printf("%d \n", fat);

  system("PAUSE");
  return 0;
}
```

1. Recursividade

- Solução:

  ✓ De forma recursiva:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int fatorial (int);

int main(int argc, char *argv[])
{
  int n, fat;

  printf("Digite n:");
  scanf("%d", &n);

  fat = fatorial(n);
```

1. Recursividade

- Solução:
  - ✓ De forma recursiva:

```
   printf("%d \n", fat);

  system("PAUSE");
  return 0;
}

int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
     return 3*fatorial(3-1);
                [fatorial(2)];
                return 2*fatorial(2-1);
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
             return 2*fatorial(2-1);
                      [fatorial(1)];
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
             return 2*fatorial(2-1);
                      [fatorial(1)];
                      return 1*fatorial(1-1);
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
             return 2*fatorial(2-1);
                      [fatorial(1)];
                      return 1*fatorial(1-1);
                               [fatorial(0)]
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
             return 2*fatorial(2-1);
                          [fatorial(1)];
                          return 1*fatorial(1-1);
                                      [fatorial(0)]
                                      return 1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
             return 2*fatorial(2-1);
                      [fatorial(1)];
                      return 1*fatorial(1-1);
                               return 1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
             return 2*fatorial(2-1);
                         [fatorial(1)];
                         return 1*1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
             return 2*fatorial(2-1);
                      [fatorial(1)];
                      return 1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
             return 2*fatorial(2-1);
                      return 1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
             return 2*1;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             [fatorial(2)];
             return 2;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*fatorial(3-1);
             return 2;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 3*2;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

```
N = fatorial(3);
    return 6;
```

1. Recursividade

- Exemplo - fatorial(3):

```
int fatorial (int n){

    if(n==0)
        return 1;
    else
        return n*fatorial(n-1);
}
```

N = **6;**

1. Recursividade

- Escrevendo programas recursivos:

  - Primeiro podemos reconhecer um grande número de casos a solucionar: 0!, 1!, 2!, 3!, 4! etc.

  - Podemos também identificar um caso "trivial", não-recursivo, diretamente solucionável: 0!=1.

  - Encontramos um método para solucionar um caso "complexo" em termos de um caso "mais simples": n! = n*(n-1)!

  - A transformação do caso mais complexo no caso mais simples deve ocasionalmente resultar num caso "trivial".

1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:

$$F(n) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n = 0\,; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{outros casos.} \end{cases}$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

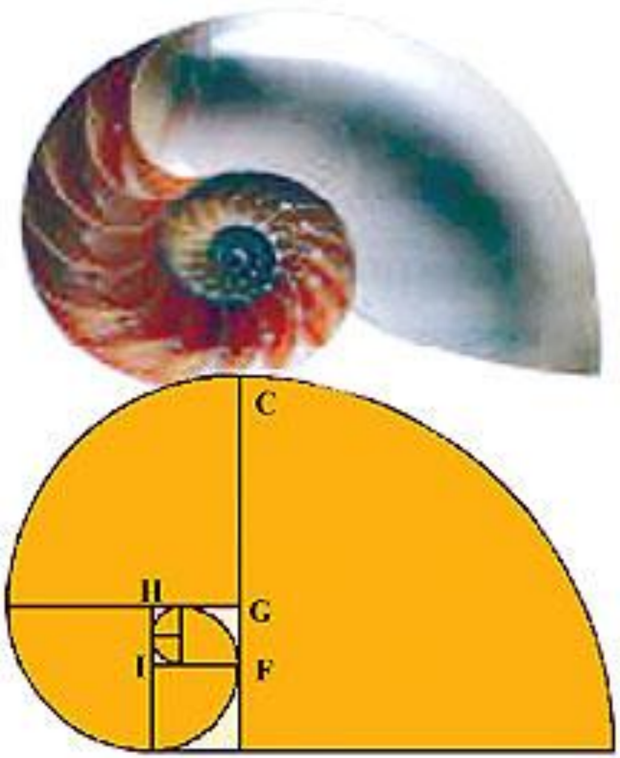
- Razão Áurea:

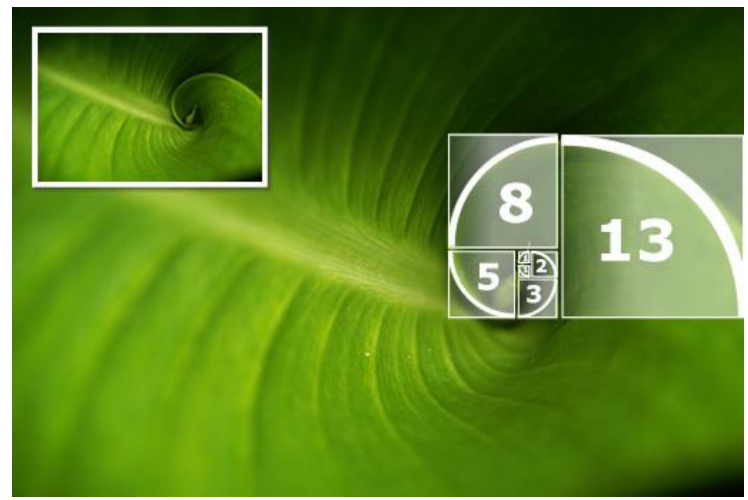
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\,033\,989\,.$$

55/34 ≈ 1,61765

1. Recursividade

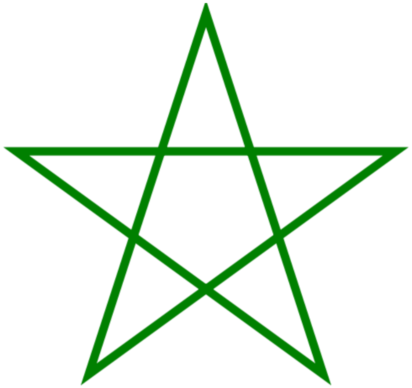
- Fibonacci e razão áurea:

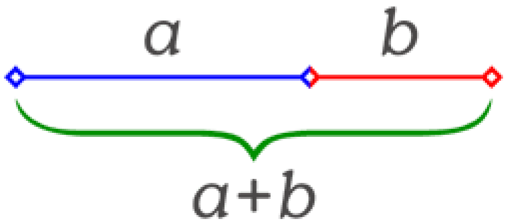


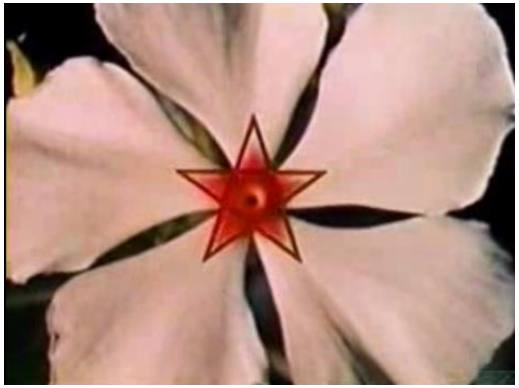


1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:

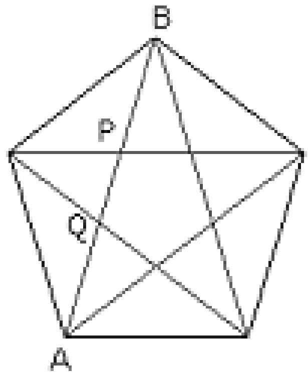






1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:

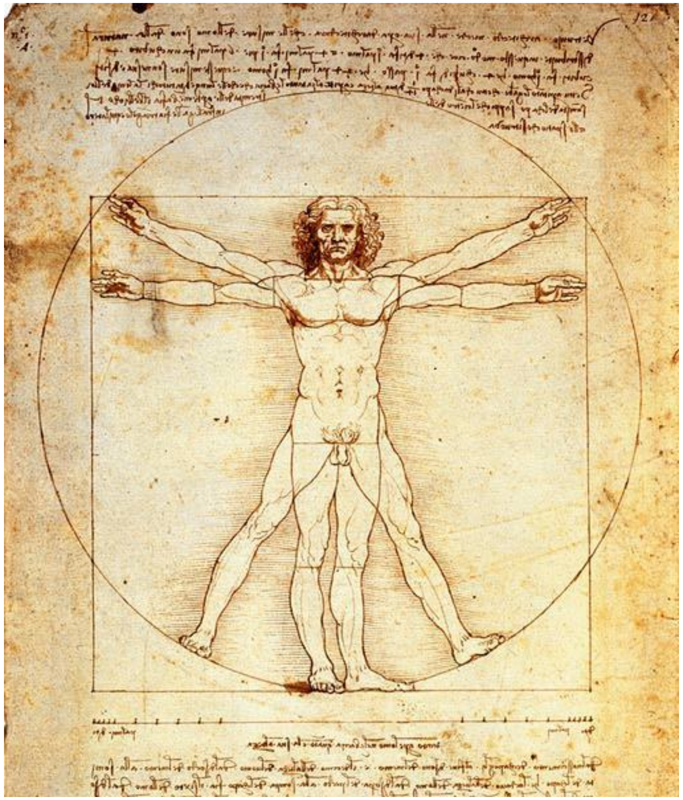


1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:

1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:



1. Recursividade

- Fibonacci e razão áurea:

  ✓ Mais em “Donald no País da Matemágica”.

http://www.youtube.com/watch?v=hWLAtn3KVw8

1. Recursividade

- Fibonacci:

$$F(n) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } n = 0\,; \\ 1, & \text{se } n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{outros casos.} \end{cases}$$

`0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...`

Pro lar, implementar
a solução recursiva em C.

1. Recursividade

- Multiplicação de números naturais:

  ➢ A multiplicação de a*b pode ser vista a soma de a, b vezes, ou seja:

$$a \cdot b = \begin{cases} a & se\ b = 1 \\ a \cdot (b-1) + a & se\ b > 1 \end{cases}$$

  ➢ 6*3 = 6*(3-1)+6
  = 6*2+6
  = 6*(2-1)+6+6
  = 6*1+6+6
  = 6+6+6
  = 18

1. Recursividade

- Multiplicação de números naturais:

  - A multiplicação de a*b pode ser vista a soma de a, b vezes, ou seja:

$$a \cdot b = \begin{cases} a & se\ b = 1 \\ a \cdot (b-1) + a & se\ b > 1 \end{cases}$$

  - 6*3 = 6*(3-1)+6
    = 6*2+6
    = 6*(2-1)+6+6
    = 6*1+6+6
    = 6+6+6
    = 18

Pro lar, implementar
a solução recursiva em C.

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$
- $4^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5}}_{3^2}+7$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$
- $4^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5}}_{3^2}+7$
- $3^2 = \underbrace{\boxed{1+3}}_{2^2}+5$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$
- $4^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5}}_{3^2}+7$
- $3^2 = \underbrace{\boxed{1+3}}_{2^2}+5$
- $2^2 = \underbrace{\boxed{1}}_{1^2}+3$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5+7}}_{4^2}+9$
- $4^2 = \underbrace{\boxed{1+3+5}}_{3^2}+7$
- $3^2 = \underbrace{\boxed{1+3}}_{2^2}+5$
- $2^2 = \underbrace{\boxed{1}}_{1^2}+3$
- $1^2 = 1$

1. Recursividade

Exercício: O quadrado de um número natural n é dado pela soma dos n primeiros números ímpares consecutivos. Por exemplo, $1^2=1$, $2^2=1+3$, $3^2=1+3+5$, $4^2=1+3+5+7$, etc. Dado um número n, escreva uma função recursiva que calcula seu quadrado usando a soma de ímpares.

- $5^2 = 1+3+5+7+9 = 25$
- $5^2 = \underbrace{1+3+5+7}_{4^2}+9$
- $4^2 = \underbrace{1+3+5}_{3^2}+7$
- $3^2 = \underbrace{1+3}_{2^2}+5$
- $2^2 = \underbrace{1}_{1^2}+3$
- $1^2 = 1$

$$\mathbf{n^2 = (2*n-1) + (n-1)^2}$$

1. Recursividade

- Solução:

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int quadrado (int);

int main (int argc, char *argv[])
{
    int n = 6, result;

    result = quadrado(n);
    printf("%d \n", result);

    system("PAUSE");
    return 0;
}

int quadrado (int n){

    if (n==1)
       return 1;
    else
       return (2*n-1) + quadrado(n-1);
}
```