

# CAPITOLUL I: SISTEME DINAMICE. TERMINOLOGIE

## § 1.1 Conceptul de sistem. Conceptul de semnal

### 1. Ce este un sistem? Ce este un semnal?

*Un sistem este o mulțime de obiecte care realizează prin interconectare un ansamblu unitar, structurat, bine încadrat în timp, bine delimitat față de mediul exterior de care este influențat, ansamblu care are ca scop îndeplinirea unei funcții.*

Potrivit definiției de mai sus un sistem se caracterizează prin:

- ✓ conectivitate (interconectări);
- ✓ încadrare în timp;
- ✓ delimitare față de mediu (ceea ce nu exclude interacțiunea cu acesta);
- ✓ exercitarea unei funcții corespunzătoare unui anumit scop.

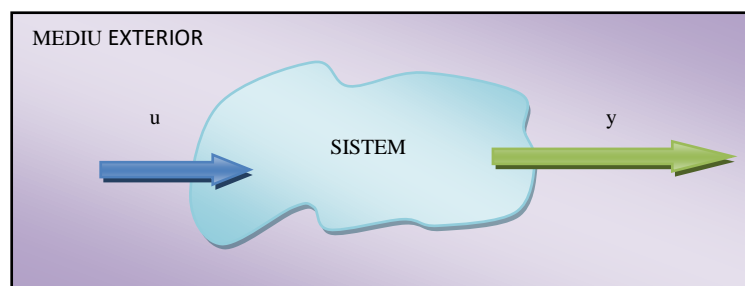
În teoria sistemelor operăm cu obiecte abstracte rezultate ca modele matematice (MM) ale sistemelor fizice. *Modelele matematice* redau o imagine mai mult sau mai puțin completă și corectă a sistemelor fizice, aproximând comportarea acestora și reținând doar ceea ce ne interesează.

Interacțiunile dintre obiectele unui sistem fizic se realizează prin fluxuri de energie / masă / informație care variază în timp. Aceste fluxuri descriu în esență transferuri de energie / masă / informație, de la un obiect la altul denumite *proces*. Modelele matematice ale sistemelor fizice sunt imagini ale acestor procese care redau transferurile și transformările numai din punct de vedere informațional.

Fluxurile dintre obiecte (în cazul sistemelor fizice) precum și transferurile și transformările din obiecte se descriu prin mărimi fizice care variază în timp. În mod obișnuit denumim aceste variații *semnale fizice*. În teoria sistemelor modelăm semnalele fizice prin funcții de timp denumite, simplu, *semnale*. Semnalele sunt funcții purtătoare de informație prin succesiunea de valori pe care le iau în timp.

Interacțiunea dintre un sistem și mediul exterior se realizează prin două categorii de semnale:

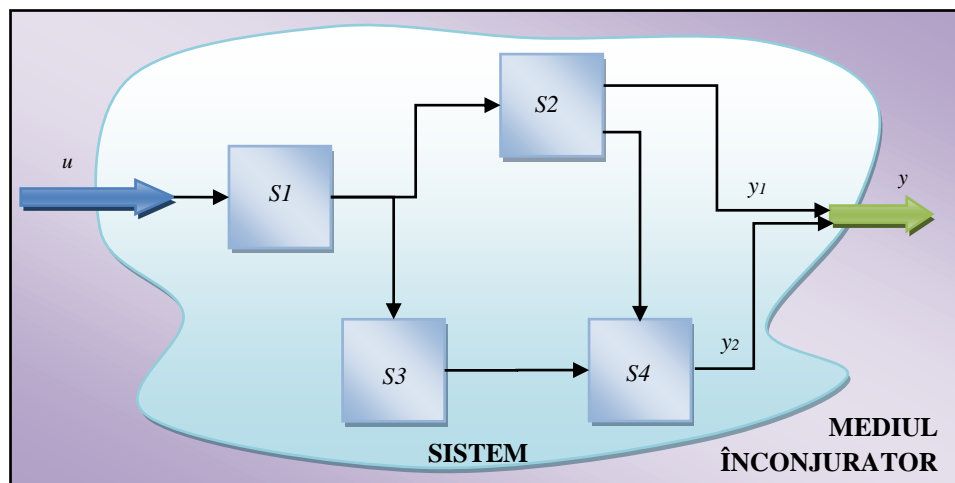
- ✓ *semnale de intrare* -  $u$ ; (denumiri alternative: variabile sau mărimi de intrare);
- ✓ *semnale de ieșire* -  $y$ ; (denumiri alternative: variabile sau mărimi de ieșire).



Terminologia (semnale, semnale de intrare, semnale de ieșire) se utilizează și la nivel de obiecte.

Prin *structura (arhitectura) unui sistem* înțelegem atât obiectele componente ale sistemului cât și modul în care obiectele sunt interconectate. Configurarea rezultată prin modul de interconectare asigură îndeplinirea funcției dorite. Aceasta înseamnă că îndeplinirea funcției se datorează *caracterului holistic al sistemului* (funcția nu este numai consecința proprietăților obiectelor componente ci și a modului de interconectare a acestora). În

figura următoare se prezintă un sistem alcătuit din patru obiecte,  $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$  și  $S4$ , (denumite adeseori și elemente sau subsisteme ale sistemului). A preciza structura acestui sistem înseamnă a ne referi atât la aceste 4 obiecte, cât și la semnalele prin care ele interacționează. Funcția sistemului este caracterizată de modul în care semnalul de intrare  $u$  influențează semnalul  $y$ .



În contextul celor prezentate, în teoria sistemelor se adoptă ca *ipoteză fundamentală de lucru* faptul că *semnalele de ieșire  $y$  rezultă prin prelucrarea de către sistem a semnalelor de intrare  $u$* . Precizarea mărimilor de intrare  $u$  și a celor de ieșire  $y$  se numește *orientare a sistemului*. Spunem că *sistemul este orientat de la  $u$  la  $y$*  și scriem  $u \rightarrow y$ .

La modul general,  $u$  și  $y$  sunt mărimi vectoriale. Convenim să operăm doar cu *vectori coloană*. Ei se scriu cu literă mică:

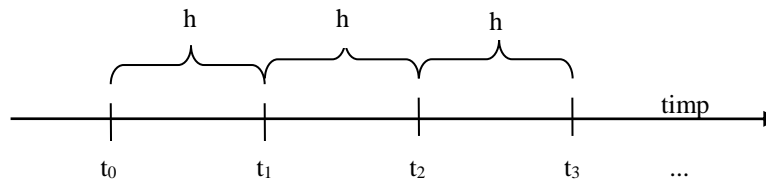
$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \text{ de dimensiune } (m, 1); \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, \text{ de dimensiune } (p, 1)$$

Ca urmare, *vectorii linie* se scriu ca transpuse ale vectorilor coloană; de exemplu  $c^T = [1 \ 0 \ 0 \ 2]$ .

Mulțimea timp pe care sunt definite semnalele de intrare și de ieșire ale unui sistem se notează cu  $T$ . Mulțimea  $T$  poate fi o mulțime:

- ✓ continuă (un interval), de exemplu:  $T = \mathbf{R}$ ,  $T = \mathbf{R}_+$ , sau  $T = [0.5, 23]$ ; în acest caz vorbim despre *semnale în timp continuu* și despre *sisteme cu semnale în timp continuu*;
- ✓ de momente discrete, de exemplu:  $T = \mathbf{Z}$ ,  $T = \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  sau  $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$ , cu  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ ; în acest caz în care vorbim despre *semnale în timp discret* și despre *sisteme cu semnale în timp discret*.

În general, în cazul utilizării echipamentelor numerice momentele  $t_1, t_2, t_3, \dots$  se consideră echidistante. Spunem că timpul este discretizat cu pas constant prin momente echidistante ca în figură. Cantitatea  $h$  se numește *pas de discretizare (a timpului)*. În cursul unui pas de discretizare echipamentul efectuează un anumit ciclu de operații, pe care îl reia în următorul pas cu noi date.



Atunci când semnalele în timp discret provin din semnale în timp continuu, una dintre primele operații care se face în intervalul de timp  $h$  este *operația de eșantionare*, adică prelevarea de valori ale semnalului în timp continuu la momente discrete de timp. În acest context  $h$  este denumit adeseori și *pas de eșantionare*.

Dacă în figura de mai sus  $t_0 = 0$ , atunci  $t_k = k \cdot h$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Din ultima egalitate putem scrie  $k = \frac{t_k}{h}$ . Ca urmare,  $k$  are semnificația de *timp în valori raportate la  $h$*  sau, simplu, *timp normat*. De observat că variabila  $k$  este o adimensională.

În acest context, pentru valorile unei semnal în timp discret  $f$  (un semnal) care provin dintr-un semnal în timp continuu prin eșantionare cu pasul  $h$  se folosesc următoarele notații echivalente:  $f(t_k) = f(k \cdot h) = f[k]$ . Argumentul dintre parantezele rotunde este timpul continuu, dimensional, măsurat în secunde (valori absolute). Argumentul dintre parantezele drepte este timpul normat, adimensional; el ia numai valori întregi.

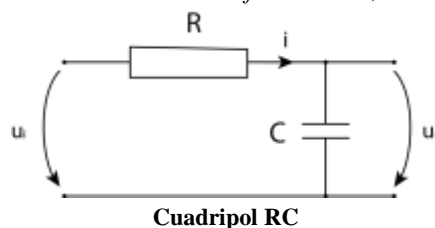
Întrucât  $k$  are semnificația de timp normat convenim să folosim în locul notației  $f[k]$  notația  $f[t]$ . Deci:

- ✓ valoarea unui semnal  $f$  în timp continuu la momentul  $t \in \mathcal{T} \subseteq \mathbf{R}$  se notează cu  $f(t)$ ,  $t$  fiind timpul în valori absolute;
- ✓ valoarea unui semnal  $f$  în timp discret la momentul normat  $t \in \mathcal{T} \subseteq \mathbf{Z}$  se notează cu  $f[t]$ ,  $t$  fiind timpul normat. Timpul absolut corespunzător timpului normat  $t$  are valoarea  $t \cdot h$ .

Pentru a pune în evidență întregul semnal în cazul timp continuu folosim notațiile  $f(t)$ , sau  $f(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , iar în cazul timp discret notațiile  $\{f[t]\}$  (notația pentru mulțimi) sau  $\{f[t]\}_{t \in \mathcal{T}}$ .

Iată câteva exemple de sisteme:

**Exemplul 1:** Schema electrică din figura de mai jos corespunde unui **cuadripolul RC** realizat cu un rezistor de rezistență  $R$  și un condensator de capacitate  $C$ . Cuadripolul se consideră ca sistem cu orientarea  $u_i \rightarrow u_e$ . Funcția sa este de a realiza în variantă electrică o dependență intrare-ieșire de forma  $T \cdot \dot{u}_e(t) + u_e(t) = u_i(t)$ . Cuadripolul poate îndeplini în diferite circuite electrice diferite roluri, iar acest aspect nu îl discutăm aici.

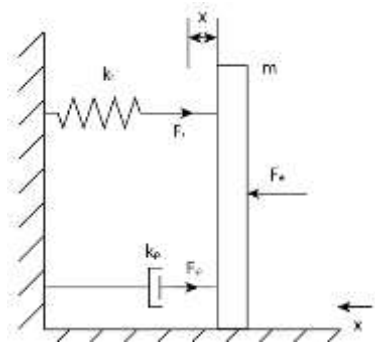


În figură apare în afara semnalelor  $u_i(t)$  și  $u_e(t)$  și semnalul  $i(t)$ . Îl folosim ca mărime intermediară la deducerea MM (1). Succesiunea calculelor este următoare:

$$\boxed{u_i(t) = R \cdot i(t) + u_e(t)}, \quad u_e(t) = u_e(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau \Rightarrow i(t) = C \cdot \dot{u}_e(t)$$

$$\Rightarrow RC \cdot \dot{u}_e(t) + u_e(t) = u_i(t) \quad (1)$$

**Exemplul 2:** Schema din figura alăturată corespunde unui **sistemul masă-resort-amortizor**. Interpretarea figurii este următoarea: un corp de masă  $m$  se deplasează pe un plan orizontal fără frecare sub acțiunea unei forțe exterioare  $F_e$ . Deplasarea este notată cu  $x$ . Corpul este legat de un perete rigid printr-un resort și un amortizor. Resortul este simbolizat printr-un arc și se opune deplasării printr-o forță rezistentă  $F_r(t) = k_r \cdot x(t)$ . Amortizorul este simbolizat printr-un piston care se opune deplasării printr-o forță proporțională cu viteza deplasării  $F_p(t) = k_p \cdot \dot{x}(t)$ . Se consideră că sistemul are orientarea  $F_e \rightarrow x$ , ceea ce înseamnă că ne interesează modul în care se modifică  $x$  ca urmare a modificării lui  $F_e$ . Săgețile simple din figură indică sensurile pozitive adoptate pentru mărimile cărora le sunt asociate. Sistemului îi corespunde MM în timp continuu (2). Succesiunea calculelor este următoarea.



$$F_r(t) = k_r \cdot x(t), F_p(t) = k_p \cdot \dot{x}(t) \Rightarrow m \cdot \ddot{x}(t) = F_e(t) - k_r \cdot x(t) - k_p \cdot \dot{x}(t)$$

$$\Rightarrow m \cdot \ddot{x}(t) + k_p \cdot \dot{x}(t) + k_r \cdot x(t) = F_e(t) \quad (2)$$

Dacă masa  $m$  se consideră neglijabilă, din (2) se obține MM (2'):

$$k_p \dot{x}(t) + k_r x(t) = F_e(t) \quad (2')$$

(2) și (2') sunt MM ale aceluiași sistem fizic. Ele furnizează imagini ale realității, pe care o redau cu diferite grade de aproximare, după cum  $m \neq 0$  sau  $m \approx 0$ .

De asemenea, vom observa că (1) și (2') sunt sisteme de aceeași formă, anume:

$$a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t) \quad (3)$$

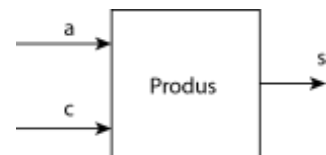
Așadar, un MM poate avea mai multe realizări fizice.

**Exemplul 3:** Considerăm o magazie în care urmărim un singur produs. Ne interesează gestionarea stocului din acel produs astfel încât să putem cunoaște stocul de la începutul fiecărei zile de lucru în cazul când pe parcursul zilei anterioare stocul se completează prin aprovizionări sau se diminuează prin consum.

Avem de a face cu un sistem în timp discret, pasul de discretizare a timpului fiind  $h = 1$  zi. Convenim să notăm stocul la începutul zilei curente  $t$  cu  $s[t]$ , cantitatea cu care se face aprovizionarea pe parcursul zilei curente cu  $a[t]$ , iar cantitatea consumată pe parcursul zilei curente cu  $c[t]$ . În acest caz stocul de la începutul următoarei zile,  $t+1$ , se obține cu modelul matematic:

$$s[t+1] = s[t] + a[t] - c[t] \quad (4).$$

Potrivit modelului (4) întregul proces de gestionare a stocului are orientarea:  $\{a, c\} \rightarrow \{s\}$ .



Cu privire la exemplele de mai sus este important să observăm că ele au fost obținute din egalități care redau bilanțuri de tensiuni, de forțe și de stocuri în care termeni sunt descriși folosind formule cunoscute din electro-tehnică, mecanică, economie. Egalitățile care descriu bilanțuri apar în chenare desenate cu linie întreruptă.

## 2. Sistem dinamic

Principala categorie de sisteme care ne interesează sunt **sistemele dinamice**, adică sistemele care modelează procese inerțiale. Sensul dat sintagmei **caracter dinamic** reprezintă o generalizare a principiului I al dinamicii cunoscut și sub denumirea de principiul inerției. Potrivit acestuia *un corp își menține starea de repaus relativ*

sau de mișcare rectilinie și uniformă, atâta timp cât asupra lui nu acționează alte corpuri care să-i modifice această stare. În momentul în care asupra corpului se exercită o acțiune exterioară starea lui se modifică. Astfel, vom considera că un sistem are caracter dinamic (spunem că sistemul este dinamic) atunci când mărimile sistemului se modifică în timp, valorile lor la un moment  $t + \Delta t$ , imediat următor momentului curent  $t$ , depinzând de valorile de la momentul  $t$  și de valorile mărimilor de intrare la momentul  $t$  de o manieră dependentă de structura sistemului.

În cazul modelului (3) caracterul dinamic este evidențiat de prezența derivatei  $\dot{y}(t)$  întrucât

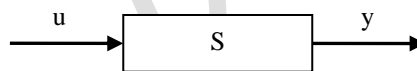
$$\dot{y}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{(t + \Delta t) - t}.$$

În modelele matematice ale sistemelor inerția poate fi apreciată în diferite moduri. De cele mai multe ori se folosește un parametru numit *constantă de timp*. Cu cât inerția sistemului este mai mare, cu atât valoarea constantei de timp este mai mare. În particular, pentru sistemul (1) constanta de timp este egală cu  $R \cdot C$ , iar pentru sistemul (3) cu raportul  $a_1/a_0$ .

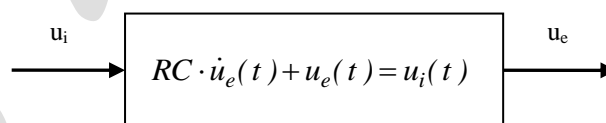
În cazul sistemului (4) caracterul dinamic este indicat de prezența argumentelor  $t$  și  $t+1$  (în general de prezența unor argumente temporale diferite), valoarea  $s[t+1]$  fiind în corelație cu valori de la momentul  $t$  ( $s[t]$ ,  $a[t]$  și  $c[t]$ ).

În unele cazuri lucrăm și cu *sisteme neinerțiale* introduse de cele mai multe ori ca modele idealizate ale sistemelor fizice. În cazul timp continuu nu apar derivate, iar în cazul timp discret apare doar momentul curent  $t$ . De exemplu, sistemul  $y(t) = k \cdot u(t)$  cu  $k$  constant, numit *sistem de tip proporțional*, este neinerțial. Ieșirea  $y$  variază instantaneu și proporțional cu intrarea  $u$  fără a depinde de valori ale lui  $y$  și  $u$  de la momente anterioare.

Un sistem dinamic îl reprezentăm în mod obișnuit printr-o *schemă bloc* care evidențiază orientarea sistemului:



Săgețile corespund semnalelor și sunt însoțite de numele semnalelor. Blocul dreptunghiular corespunde proceselor (interacțiunilor) din sistem. De la caz la caz, în interiorul blocului se inscripționează anumite informații, bunăoară MM al sistemului. De exemplu, sistemul (1) poate fi reprezentat astfel:



Când simbolizarea prin scheme bloc nu detaliază procesele din sistem, ci doar dependența dintre intrare și ieșire, spunem că aceasta este de tip *black box* (un bloc care nu oferă nici o informație despre ceea ce se petrece în interior, ci doar despre legătura intrare-ieșire care corespunde funcției îndeplinite de sistem).

### 3. Aspectul causal

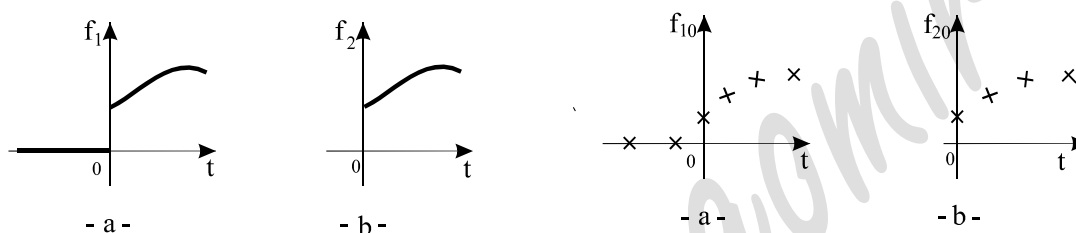
Ipoteza fundamentală de lucru din teoria sistemelor conține implicit o *relație de cauzalitate*: în sistemele dinamice, în care au loc interacțiuni redacte cu ajutorul semnalelor, semnale de intrare au rol de mărimi cauză, iar semnalele de ieșire au rol de mărimi efect. Calitativ, cauzalitatea este sugerată de orientarea sistemului.

Într-o accepțiune mai largă sintagma *aspect causal* exprimă atât faptul că în lipsa cauzei nu putem avea un efect, cât și faptul că efectul este întotdeauna o consecință a cauzei, neputând să precedă cauza.

Din punct de vedere matematic, studiul problemei a condus la următoarea definiție:

*Se consideră un sistem cu semnale definite pe  $T = \mathbf{R}$ . Sistemul este cauzal dacă, pentru oricare două semnale de intrare,  $u_1(t)$  și  $u_2(t)$ , care coincid până la un moment  $t_0$ , răspunsurile la cele două semnale,  $y_1(t)$  și  $y_2(t)$ , sunt, de asemenea, identice până la momentul  $t_0$ .*

Definiția dată are inconvenientul de a opera cu semnale definite pe  $\mathbf{R}$  (semnale bilaterale). În practică ne interesează însă procesele care au loc începând cu un moment dat  $t_0$ . Plecând de la definiția cauzalității această situație se tratează folosind semnale cauzale sau semnale unilaterale și condiții inițiale. În figură se exemplifică cele două tipuri de semnale în ipoteza că  $t_0 = 0$ . Semnalele  $f_1(t)$  și  $f_{10}[t]$  definite pe  $\mathbf{R}$ , respectiv  $\mathbf{Z}$ , sunt semnale cauzale. Caracteristica lor constă în faptul că iau valoarea 0 pentru  $t < t_0$ . Fiind definite pe  $\mathbf{R}$ , respectiv  $\mathbf{Z}$ , nu se pune problema unor condiții inițiale. Semnalele  $f_2(t)$  și  $f_{20}[t]$  definite pe  $\mathbf{R}_+$ , respectiv  $\mathbf{Z}_+$ , sunt semnale unilaterale. Caracteristica lor constă în faptul că iau valori doar de la momentul  $t_0 = 0$ . Fiind definite pe  $\mathbf{R}_+$ , respectiv  $\mathbf{Z}_+$ , ele pot fi utilizate numai însoțite de condiții inițiale.



În acest context, pentru soluționarea unor situații concrete se procedează astfel: i) se consideră că orizontul de timp  $T$  începe cu momentul  $t_0$ , context în care  $t_0$  este denumit *moment inițial* (de exemplu  $t_0 = 0$ ); ii) semnalul de intrare se consideră numai pe orizontul de timp  $T$  (pentru  $t \geq t_0$ ); iii) potrivit modelului matematic utilizat<sup>1</sup> se asociază semnalelor caracteristice ale sistemului la momentul  $t_0$  și/sau la momente anterioare valori concrete denumite *condiții inițiale*. Condițiile inițiale sintetizează preistoria sistemului (ceea ce s-a întâmplat până la momentul  $t_0$ ).

De exemplu, pentru sistemul (1), studiul a ceea ce se întâmplă începând de la un anumit moment când  $u_e = u_{e0}$  se poate face considerând  $t_0 = 0$ , pe  $u_i(t)$  pentru  $t \geq 0$  și considerând condiția inițială  $u_e(0) = u_{e0}$ .

În cazul sistemului (4), pentru a putea face calculele pentru orice valoare a lui  $t \in \mathbf{N}$ , trebuie să cunoaștem atât  $a[t]$  și  $c[t]$  pentru  $t \in \mathbf{N}$  cât și condiția inițială  $s[0]$ .

Semnalele cauzale și unilaterale sunt folosite pentru a studia procesele începând cu un moment dat, numit *moment inițial*. Această modalitate de studiu se numește „studiu prin decupare”, în sensul că studiul este realizat numai asupra unei părți din realitate, cea decupată începând cu momentul inițial.

#### 4. Sub sisteme. Conexiuni de sisteme. Separabilitate

*În măsura în care obiectele ce configurează un sistem au funcționalități distincte le numim subsisteme. Configurarea este asociată întotdeauna cu existența unei ierarhizări, în sensul că pot fi întâlnite mai multe niveluri de subsisteme (un subsistem poate fi, la rândul său, format din subsisteme).*

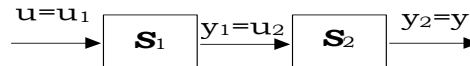
În acest context reiterăm ideea că un sistem are caracter holistic precizând că proprietățile unui sistem sunt consecință a proprietăților subsistemelor componente și a modului de interconectare a acestora (de configurare a sistemului).

<sup>1</sup> Este vorba despre modele matematice intrare-stare-ieșire sau modele matematice intrare-ieșire care vor fi definite ulterior.

Din punct de vedere informațional, în cadrul cursului vom opera cu 3 *conexiuni fundamentale de subsisteme*:

### 1. Conexiunea serie (conexiunea în cascadă)

Ea se caracterizează prin faptul că informația se transmite într-un singur sens și pe un singur canal.



$S_1$  se numește *element amonte*, iar  $S_2$  *element aval*. Numele semnalelor sunt raportate, pe de-o parte, la subsistemele cărora le corespund ( $u_1, y_1$  și  $u_2, y_2$ ), pe de altă parte, la întregul sistem ( $u, y$ ).

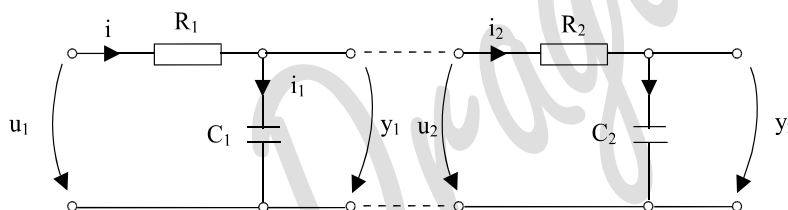
Atunci când modul de comportare al subsistemului  $S_1$  (transferul de informație prin  $S_1$ ) nu este influențat de prezența subsistemului  $S_2$  și invers, spunem că *subsistemele sunt separabile* în raport cu modul de interconectare. Este vorba de o separabilitate din punct de vedere informațional.

**Exemplu:** Considerăm doi cuadripoli RC cu orientarea  $u_1 \rightarrow y_1$ , respectiv  $u_2 \rightarrow y_2$ . Așa cum am văzut, ei au modelele matematice

$$R_1 C_1 \cdot \dot{y}_1(t) + y_1(t) = u_1(t) \quad (1),$$

respectiv

$$R_2 C_2 \cdot \dot{y}_2(t) + y_2(t) = u_2(t).$$



Dacă cei doi cuadripoli sunt interconectați electric (legătura reprezentată cu linie întreruptă), atunci modelul matematic ce descrie legătura dintre  $u_1$  și  $y_1$  (intrarea și ieșirea primului cuadripol) diferă de cazul anterior.

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \ddot{y}_1(t) + R_1 C_1 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1}\right) \dot{y}_1(t) + y_1(t) = R_2 C_2 \dot{u}_1(t) + u_1(t) \quad (2)$$

În consecință, după interconectare transferul de informație prin primul cuadripol nu se mai face corespunzător modelului (1). Aceasta înseamnă că *primul cuadripol nu este separabil față de cel de al doilea cuadripol în raport cu modul de interconectare folosit*. Ca urmare, pentru circuitul considerat nu putem folosi o reprezentare printr-o schemă bloc serie ca cea din figura de principiu în care  $S_1$  să corespundă primului cuadripol iar  $S_2$  celui de al doilea cuadripol. Înscrierii electrice a celor două circuite (pasive), nu îi corespunde o înscriere informațională.

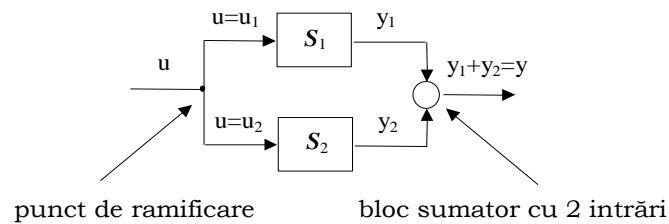
Din punct de vedere tehnic, separabilitatea se asigură interpunând între elementele interconectate subsisteme de cuplare care se caracterizează printr-o impedanță de intrare foarte mare și o impedanță de ieșire foarte mică și care sunt alimentate de la o sursă externă de energie (circuite active).

*Toate schemele bloc din cadrul cursului sunt concepute în ideea că sistemele sunt separabile în raport cu modul de interconectare.* În particular, modelele lui  $S_1$  și  $S_2$  se păstrează și în urma realizării conexiunilor fundamentale.

Din punct de vedere matematic, separabilitatea este importantă prin faptul că permite obținerea modelelor matematice ale sistemelor prin compunerea de funcții, respectiv de operatori asociați subsistemelor, prin operații de substituție.

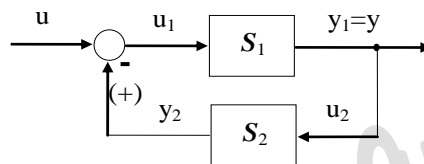
## 2. Conexiunea derivație (conexiunea paralel)

Ea se caracterizează prin faptul că informația se transmite într-un singur sens, pe mai multe canale iar rezultatele prelucrărilor intermediare se însumează.



## 3. Conexiunea cu reacție

Ea se caracterizează prin faptul că informația se transmite în ambele sensuri pe două canale distincte care interacționează.



În cadrul structurii conexiunii cu reacție distingem:

- ✓ *calea directă* ( $u \rightarrow y$ ) compusă din semnalul  $u$ , elementul sumator, semnalul  $u_1$ , subsistemul  $S_1$  și semnalul  $y$ ;
- ✓ *calea de reacție* ( $y \rightarrow y_2$ ) compusă din semnalul  $y$ , subsistemul  $S_2$  și semnalul  $y_2$ ;
- ✓ *bucla cu reacție* ( $u_1, S_1, y, S_2, y_2, \text{sumator}, u_1$ ):
  - dacă  $u_1 = u - y_2$ , *reacția se numește negativă*;
  - dacă  $u_1 = u + y_2$ , *reacția se numește pozitivă*.

Pe baza separabilității putem spune că modelul matematic (primar, neprelucrat) al conexiunii cu reacție este:

$$u_1 = u \mp y_2$$

$$y = y_1 = u_2$$

MM al sistemului  $S_1$

MM al sistemului  $S_2$

*Reacția negativă are caracter stabilizator*, în sensul că, într-un sistem cu reacție negativă dacă  $u(t) = \text{const.}$  mărimile  $y(t)$  sau secvența  $\{y[t]\}$  se stabilizează, de regulă, după un anumit interval de timp, la o valoare constantă. Acest aspect o face deosebit de importantă în tehnică.

Reacția negativă este specifică tuturor proceselor din natură care se găsesc în stare de echilibru (inclusiv în organismul uman). În tehnică, reacția negativă a fost „descoperită” (regulatorul centrifugal al lui Watt [https://en.wikipedia.org/wiki/Control\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Control_system)). Existența ei în natură a fost conștientizată ulterior.

Conexiunile serie și derivație pot fi generalizate pentru un număr oricât de mare, dar finit, de elemente. Conexiunea cu reacție nu poate fi generalizată.

## 5. Tipuri de semnale în tehnică

În secțiunea 1 am definit semnalul ca fiind o funcție de timp asociată variațiilor unei mărimi prin care se caracterizează interacțiunea dintre două obiecte ale unui sistem sau procesele din obiectele unui sistem. Din



punct de vedere informațional se poate considera că în primul caz un obiect emite informație, iar celălalt o recepționează, iar în al doilea caz că semnalele descriu transformările care au loc în obiecte. Totodată, am vorbit despre sisteme cu semnale în timp continuu și sisteme cu semnale în timp discret.

La modul general, un semnal este o aplicație de forma  $\chi : T \rightarrow M$ ,  $\chi$  fiind numele semnalului,  $T$  domeniul de definiție, așa-numita mulțime timp (sau orizont de timp), iar  $M$  mulțimea în care semnalul ia valori. Astfel de semnale se numesc *monodimensionale*. Exemple: amplitudinea curentului într-un circuit electric  $i(t)$ , deplasarea liniară a unui sistem mecanic  $x(t)$ , debitul printr-o conductă  $q(t)$ , soldul într-un cont bancar  $s[t]$ .

În tehnică se folosesc și *semnale multidimensionale*, de exemplu: imaginea de pe un monitor – este o funcție atât de timp cât și de două coordonate geometrice, temperatura într-o sală de concerte – este o funcție atât de timp cât și de trei coordonate geometrice.

În teoria sistemelor un sistem (în sensul de MM) este privit ca un operator definit pe o mulțime de semnale de intrare, cu valori într-o mulțime de semnale de ieșire. Spunem că el descrie *transferul de la intrare la ieșire*.

În mod obișnuit un sistem în timp continuu este reprezentat prin ecuații diferențiale:

- ✓ în cazul semnalelor monodimensionale, folosim *ecuații diferențiale ordinare* și vorbim de *sisteme cu parametri concentrați*;
- ✓ în cazul semnalelor multidimensionale, folosim *ecuații diferențiale cu derivate parțiale* și vorbim de sisteme cu parametri distribuiți.

Sistemele în timp discret sunt reprezentate de regulă prin *ecuații cu diferențe* (ecuații recursive).

După cum s-a precizat, prin *discretizarea timpului* se înțelege înlocuirea unui orizont de timp continuu cu o mulțime de momente discrete. În cazul discretizării cu un pas constant  $h$  mulțimea  $T = \mathbf{R}$  este înlocuită cu mulțimea  $T = \{kh\}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , iar prin *normare* cu mulțimea  $T = \{k\}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Prin *eșantionarea unui semnal în timp continuu* se înțelege extragerea din semnal a unui șir de valori corespunzătoare unui șir de momente de timp. Șirul extras formează un semnal în timp discret. Acesta reține o parte mai mare sau mai mică din informația purtată de semnalul în timp continuu.

Prin *cuantizare* se înțelege procesul de reprezentare cu aproximare a valorilor unei variabile continue prin valori discrete egale cu un multiplu întreg al unei cantități numită cuantă. Valorile discrete asociate prin cuantizare se numesc *valori cuantizate*. Asocierea se poate face în diferite moduri. De exemplu, valorile cuantizate se pot obține ca parte întreagă a numărelor care rezultă împărțind valorile variabilei continue la cuantă.

Pentru semnalele monodimensionale  $\chi : T \rightarrow M$  este valabilă clasificarea din tabel. Ea este realizată în funcție de mulțimile  $T$  și  $M$  și este denumită clasificare  $T$ - $M$ .

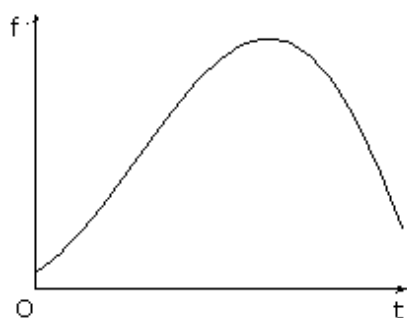
| $T$ (timp) $\rightarrow$     | continuu   | discret                       |
|------------------------------|--|-------------------------------|
| $\downarrow M$ (amplitudine) |  |                               |
| continuu                     | semnal analogic (SA)                                     | semnal eșantionat (SE)        |
| discret                      | semnal în timp continuu cuantizat în amplitudine (STCCA) | semnal numeric (digital) (SN) |

Figurile de mai jos exemplifică grafic cele 4 tipuri de semnale din tabel.

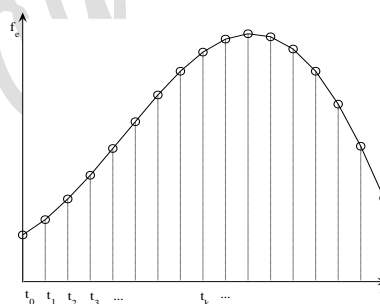
**Semnalul analogic** se caracterizează prin faptul că mulțimea timp este continuă și că are în orice moment o valoare în mulțimea  $M$ , continuă și ea. Acest lucru nu trebuie confundat cu faptul că semnalul nu poate conține discontinuități. Graficul poate fi o linie continuă, ca în figura a), sau o reuniune de segmente de curbă continue, cu salturi între segmente, adică o funcție continuă pe porțiuni.

**Semnalul eșantionat** este definit pe o mulțime timp discretă, dar în fiecare moment din mulțimea timp el poate lua orice valoare din mulțimea  $M$  care este continuă. Graficul semnalului este alcătuit dintr-o mulțime de puncte. În particular, un semnal eșantionat poate rezulta prin eșantionarea unui semnal analogic. În figura b) se prezintă un astfel de exemplu: semnal eșantionat se obține prin eșantionarea semnalului analogic din figura a).

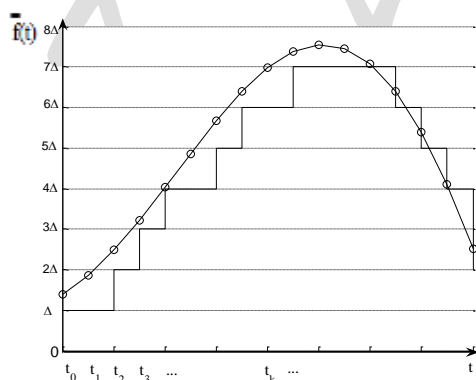
**Semnalul în timp continuu cuantizat în amplitudine** diferă de semnalul analogic prin faptul că mulțimea  $M$  este o mulțime discretă, de regulă rezultată prin cuantizare. Graficul semnalului este discontinuu, alcătuit dintr-o mulțime de segmente orizontale numite trepte. Un astfel de semnal se mai numește și **semnal scară**. Pentru succesiunea momentelor de discontinuitate nu se impune, neapărat, o anumită regulă. Un exemplu de semnalul în timp continuu cuantizat în amplitudine apare în figura c). Semnalul  $\bar{f}(t)$  este asociat umătoarei situații particulare: i) se eșantionează la momentele  $t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$  semnalul în timp continuu din figura a) rezultând punctele indicate prin ceruțele; ii) semnalul eșantionat se cuantizează cu cuanta  $\Delta$ , asociindu-i-se cel mai mare multiplu de cuante mai mic, cel mult egal cu valoarea semnalului analogic din momentul respectiv; iii) valorile cuantizate se asociază semnalului  $\bar{f}(t)$  pe tot subintervalul de timp până la următorul moment de eșantionare.



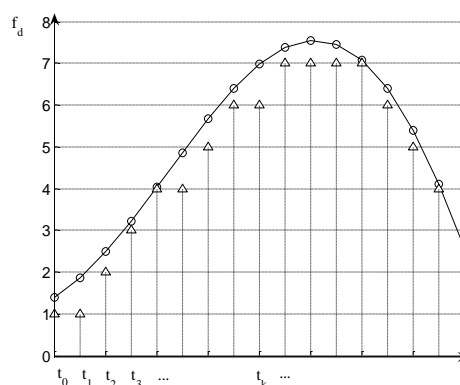
a) Reprezentarea grafică a unui semnal analogic



b) Reprezentarea grafică a unui semnal eșantionat prin puncte. Punctele corespund unei mulțimi  $T$  discrete



c) Reprezentarea grafică a unui semnal în timp continuu cuantizat în amplitudine (STCCA are forma de semnal scară. În figură STCCA se asociază unui semnal analogic efectuând succesiv operațiile: eșantionarea SA, cuantizarea valorilor eșantionate cu o cuantă de valoare  $\Delta$ , formarea semnalului scară.)



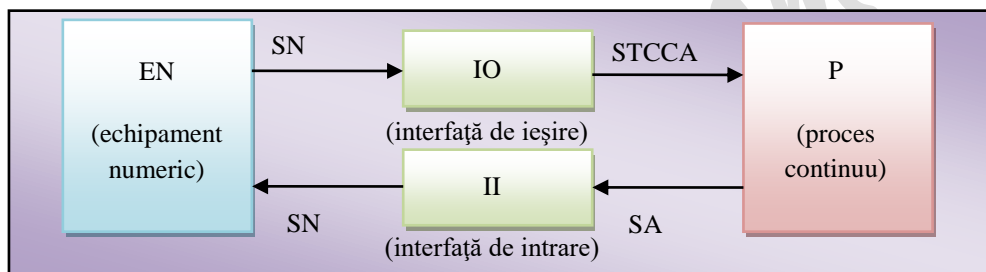
d) Reprezentarea grafică a unui semnal numeric (digital) (SN este reprezentat prin triunghiuri punctiforme. În figură SN se asociază unui semnal analogic efectuând succesiv operațiile: eșantionarea SA, cuantizarea valorilor eșantionate cu o cuantă de valoare  $\Delta$ .)

*Semnalul numeric (digital)* diferă de semnalul eșantionat prin faptul că valorile lui sunt valori cuantizate (multiplu al unei cuante). În figura d) este dat un exemplu. Semnalul numeric este reprezentat de punctele evidențiate sub formă de triunghiuri. Ele sunt asociate prin cuantizare, la fel ca în figura c), punctelor reprezentate cu cercuri.

O formă particulară de semnal care poate să apară în toate cele patru cazuri discutate este *semnalul binar* caracterizat prin faptul că mulțimea  $M$  conține doar două valori.

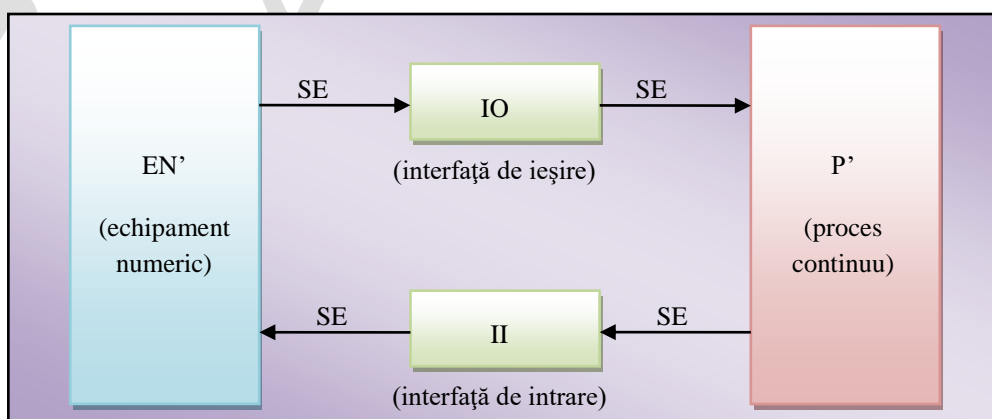
În tehnică se întâlnesc sisteme alcătuite din subsisteme dintre care unele lucrează în timp continuu iar altele în timp discret. În cadrul acestor *structuri hibride* se regăsesc, într-o formă sau alta, toate tipurile de semnale din tabel. Ca exemplu considerăm structura din figura următoare. Ea se întâlnește în cadrul sistemelor de conducere numerică a proceselor. Sistemul cuprinde 4 blocuri având la intrare și ieșire diferite tipuri de semnale:

- ✓ *procesul condus P* (la intrare i se aplică un STCCA, iar la ieșire furnizează un SA);
- ✓ *echipamentul numeric de conducere EN* (semnalele de intrare și de ieșire sunt SN);
- ✓ *interfața de ieșire IO* (denumire dată din punctul de vedere al EN) - un convertor numeric-analogic;
- ✓ *interfața de intrare II* (denumire dată din punctul de vedere al EN) - un convertor analogic-numeric.



Pentru a putea trata matematic o astfel de structură, este necesar să aproximăm comportarea sistemului folosind un model cu un singur tip de semnale. Cu toate că nu apare în figura anterioară, tipul de semnal folosit este *semnalul eșantionat (SE)*. Acest mod de lucru este ilustrat în figura de mai jos.

*Notă:* Deosebirea dintre semnalele eșantionate și semnalele numerice (așa cum au fost ele definite) constă în faptul că, spre deosebire de semnalele numerice, semnalele eșantionate nu sunt cuantizate în amplitudine.



Notațiile  $EN'$  și  $P'$  indică faptul că pentru tratarea unitară a sistemului se folosesc, atât pentru echipamentul numeric cât și pentru proces, modele de aproximare ( $EN'$  și  $P'$ ) care lucrează cu semnale eșantionate. De aceea, structura este denumită în mod frecvent *sistem cu semnale eșantionate*.

## 6. De la semnale, sisteme și teoria sistemelor la automatizări

Conceptele de semnal și sistem sunt de importanță fundamentală pentru teoria sistemelor și pentru toate domeniile în care acestea se aplică. Unul dintre domeniile de aplicare îl reprezintă automatizările. În acest context considerăm un exemplu de sistem automat, adică de sistem conceput de om, dar care funcționează fără intervenția directă a omului.

*Hard disk drive*-ul (HDD) reprezintă o memorie nevolatilă, de capacitate mare, care este folosită pentru stocarea datelor la calculatoare și la alte sisteme de procesare de date. HDD-urile actuale ating la capacități de 14TB de date stocabile pe 3 (5 sau 7) platane de 3.5" sau 2.5" diametru ( $1'' = 2.54 \text{ cm}$ ), fiecare cu rata de transfer de 6 Gbit/sec și viteză de rotație de până la 15.000 rpm. (<https://www.youtube.com/watch?v=p-JJp-oLx58>).

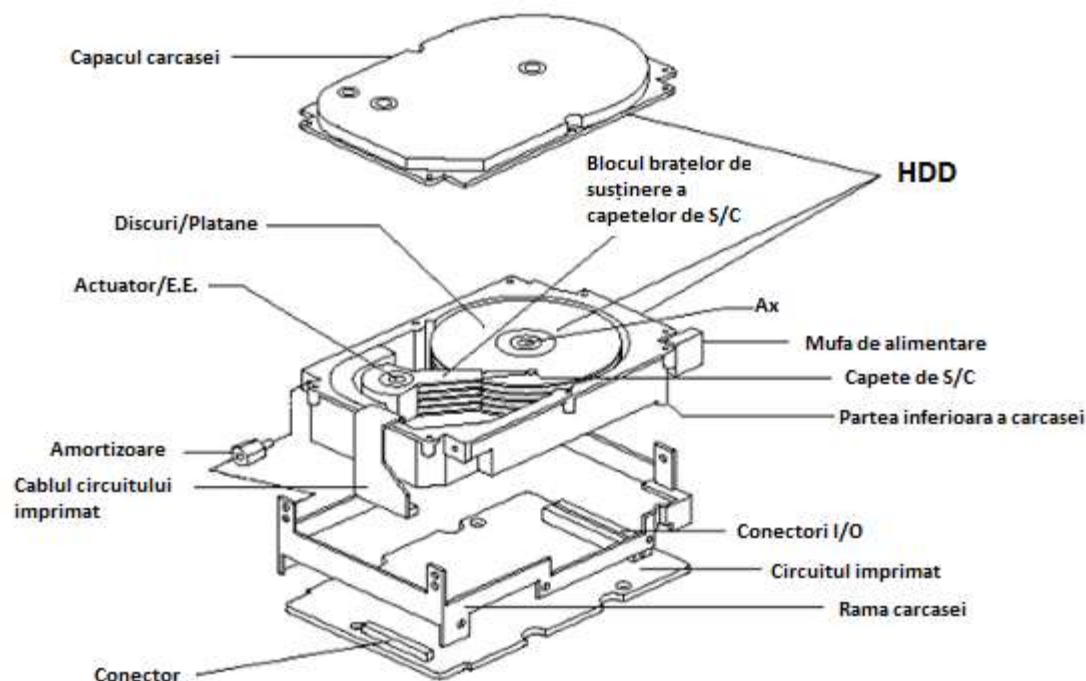
În figură sunt prezentate componentele fizice ale unui HDD tipic.

Din punct de vedere funcțional HDD conține amplasate într-o carcasă etanșă *două sisteme de acționare*:

- un sistem pentru poziționarea brațului purtător al capetelor de scriere și citire (sistem de poziționare a capetelor),
- un sistem pentru antrenarea discurilor (sistem de antrenare a platanelor).

Din punctul de vedere al sistemelor automate ambele sisteme de acționare sunt *sisteme de reglare (sisteme de conducere automată în circuit închis)*.

- *Sistemul de poziționare a capetelor* este un sistem de acționare electromecanic. El constă din: actuator (un motor electric cu bobină mobilă), cablu de date sau circuit imprimat, brațe purtătoare ale capetelor de S/C (scriere/citire), denumite brațele port-capete, și siguranțe mecanice, folosite în caz de șoc mecanic sau la atingerea limitelor de manevră. Rotirea stânga-dreapta a brațelor este comandată prin modificarea curentului cu care este alimentat motorul. Sistemul de poziționare este destinat scrierii/citirii pe/de pe platane a datelor folosind capetele de S/C montate dedesubtul și deasupra fiecărui platan. Pe fiecare platan există piste circulare împărțite în sectoare, aliniate astfel încât să fie accesabile prin rotirea simultană a brațelor port-capete.



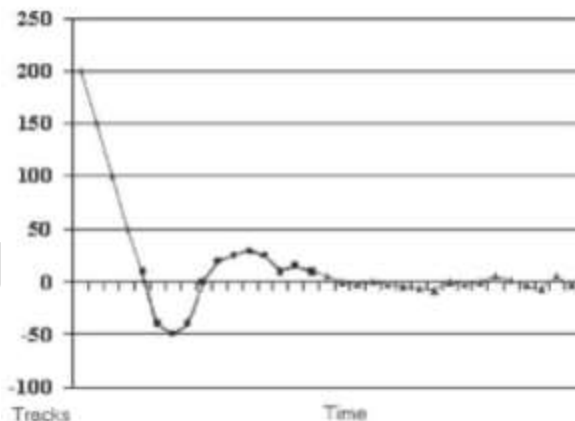
Pentru a realiza viteze mari de transfer, capetele de S/C se roteasc rapid fără a intra în contact cu platanele. Distanța dintre capetele de S/C și discuri este micrometrică pentru a nu avea nevoie de curenți prea mari de

scriere. Discurile neavând formă geometrică perfectă (prezintă ondulații), distanțarea dintre disc și capetele de scriere și citire se realizează aerodinamic, pe principiul pernei de aer, capetele „plutind” în vecinătatea suprafețelor platanelor aflate în mișcare de rotație. Acest lucru se obține prin forma specială a capetelor, care generează portanță, și prin folosirea unui sistem elastic de suspensie a fiecărui cap față de suport (braț port-capete), care permite adaptarea la suprafața platanului. Din cauza distanței foarte mici cap-disc și a vitezei relative, dintre acestea, foarte mari, o particulă foarte mică de murdărie poate provoca distrugerea discului (zgârierea acestuia). De aceea, etanșeizarea interiorului carcasei este esențială.

- *Sistemul de antrenare a discurilor* reprezintă un al doilea sistem de acționare al HDD. Rolul lui este de a realiza rotirea platanelor cu viteză constantă, respectiv porniri și opriri line pe parcursul a mii de ore de folosință continuă. Antrenarea pachetului de discuri este realizată prin montarea acestuia pe arborele unui al doilea motor. Componentele critice ale acționării sunt cei doi rulmenți din lagăre.

În principiu, un cap S/C trebuie să urmărească la un moment dat o pistă prescrisă și să se poziționeze în dreptul ei cu o eroare radială cel mult egală cu o valoare maxim admisibilă denumită TMR (track misregistration). TMR trebuie să fie  $< 10\%$  din lățimea pistei (track pitch). De exemplu pentru un HDD de 3.5" cu 25 kTPI (*Tracks Per Inch*) lățimea pistei este de  $1\mu\text{m}$ , iar TMR trebuie să fie  $< 0.1\mu\text{m}$ .

Limitarea erorii radiale se realizează concepând *sistemul de poziționare a capetelor* ca un *sistem de reglare* care urmărește așezarea capului S/C activ la un moment dat deasupra pistei prescrise pe principiul reducerii la 0 (zero) a erorii de poziționare. Un astfel de sistem se numește sistem de urmărire sau *servosistem*. Figura alăturată ilustrează modul în care se petrece acest lucru. La momentul inițial eroarea de poziționare este de 200 piste. Datorită caracterului oscilant-amortizat a sistemului de reglare capul de S/C ajunge deasupra pistei dorite prin câteva oscilații.

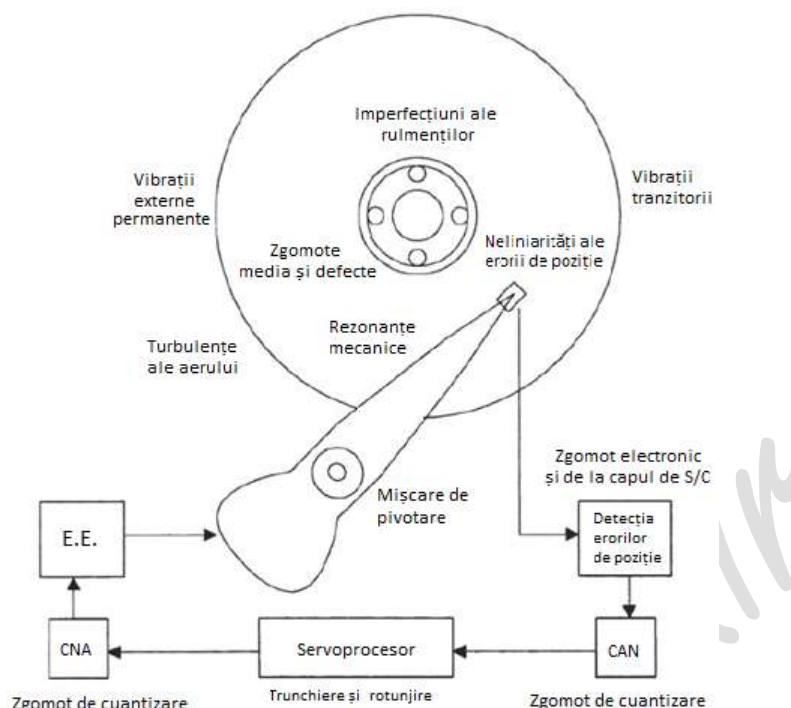


Proiectarea servosistemului, în particular a algoritmilor după care lucrează servoprocessorul (vezi figura următoare), impune o analiză riguroasă a cauzelor care pot genera erori de poziționare și elaborarea unor tehnici de reglare pentru compensarea acestor cauze, reducerea timpului de poziționare și a TMR în condițiile creșterii valorii TPI.

Figura următoare prezintă un servosistem tipic pentru capul de S/C al unui HDD. Ea indică, pe de-o parte, principalele elemente ale servosistemului și semnalele aferente, iar pe de altă parte sursele de perturbații și erori care afectează poziționarea exactă a capetelor. Servoprocessorul comandă mișcarea de pivotare (mișcarea oscilatorie a axului pe care este fixat capul S/C), aducând în permanență capetele de S/C în dreptul pistei prescrise și menținându-le în stricta vecinătate a acesteia în sensul celor precizate în exemplul anterior.

În ordinea descrescătoare a mărimii impactului (negativ) asupra performanțelor de reglare ale servosistemului, sursele perturbațiilor sunt:

- Șocurile externe și vibrațiile care apar la dispozitivele portabile;
- Histerezisul și excentricitățile rulmenților (lagărelor cu rulmenți);
- Eroarea de estimare a vitezei de rotație a platanelor în cursul așezării pe pistă a capetelor de S/C;
- Nelinariitățile și inexactitățile componentelor sistemului;
- Rezonanțele mecanice asociate suspensiei, elementului de execuție (actuator), platanelor și carcasei;
- Zgomotele electronice în canalele de la intrarea și ieșirea din servoprocessor;
- Variațiile abaterilor de poziție cauzate de deformări termice sau de altă natură.



În cursul funcționării HDD, cele două sisteme de acționare interacționează în diferite moduri. De exemplu, atunci când discurile nu se mai rotesc, nu mai există perna de aer dintre discuri și capetele de S/C, iar acestea tind să atingă suprafața discurilor, atingerea este permisă numai pe o zonă de disc care nu conține informații, numită LZ (*landing zone*). LZ are rolul de „loc de parcare pentru capetele de S/C” și are o acoperire specială. Retragera capetelor în această zonă se comandă de către servoprosesor înainte de oprirea alimentării motorului de antrenare a discurilor.

Exemplul HDD ilustrează ideea că unul dintre domeniile în care se folosește foarte mult conceptul de sistem este cel al automatizărilor care, pe de-o parte se folosește de domeniul CTI, iar pe de altă parte servește tehnologia din acest domeniu. Conceptul de sistem este folosit în faza de adoptare a structurii ansamblului, în faza de modelare a subsistemelor componente și a interacțiunii cu mediul exterior, respectiv în faza de proiectare a algoritmilor de conducere (în exemplul anterior este vorba despre algoritmi transpuși în servoprosesor).

În încheierea acestei secțiuni se prezintă câteva explicații utile pentru înțelegerea cursului.

**Teoria sistemelor** reprezintă ansamblul de cunoștințe, independente de aplicații, capabile de a da *interpretări și explicații asupra structurii și funcționalității sistemelor de orice natură*. Ea se bazează pe importarea și utilizarea unor rezultate remarcabile din matematică, mecanică, electrotehnică și tehnica informației. Teoria sistemelor se ocupă de *modalități de descriere, caracterizare, transformare și prelucrare a semnalelor prin sisteme*. Sarcina ei este de a furniza modele pentru sistemele care există în realitate, modele care sunt denumite sisteme, și metode de calcul cu aceste modele. Problemele abordate se referă în primul rând la:

- ✓ **Caracterizarea sistemelor în corelație cu cea a semnalelor** pentru a arăta cum reacționează un sistem la o anumită clasă de semnale.
  - Descrierea celor două sisteme de acționare se poate face folosind semnale și modele de sisteme în timp continuu sau în timp discret, iar pentru semnalele de referință, perturbatoare și de comandă se pot folosi diferite clase de semnale.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Textele precedate de buline reprezintă exemplificări referitoare la HDD.

- ✓ **Identificarea sistemelor** prin care se urmărește obținerea unui model adecvat pentru reprezentarea unui sistem fizic.
  - Pentru tipurile de model de sisteme în timp continuu sau în timp discret alese pentru sistemele de acționare se determină valorile parametrilor sistemelor.
- ✓ **Analiza sistemelor** având ca scop stabilirea proprietăților unui sistem.
  - Se analizează proprietățile modelelor identificate (dinamica, stabilitatea, controlabilitatea etc.).
- ✓ **Stabilizarea și corecția sistemelor** prin care cu ajutorul subsistemelor de conducere se contracarează proprietățile nedorite și se induc proprietăți dorite.
  - Se proiectează algoritmul de reglare implementat pe servoprocessorul sistemului de poziționare a capetelor și regulatorul sistemului pentru antrenarea discurilor ținând seama de semnalele de referință și de semnalele perturbatoare.

Lista problemelor cuprinde și **filtrarea semnalelor** (măsurile întreprinse pentru ca dintr-un semnal preluat cu erori și perturbații să se obțină informații despre semnalul adevărat), structurarea sistemelor, tratarea incertitudinilor ș.a.m.d.

Teoria sistemelor oferă metode și mijloace de investigare calitativă și cantitativă pentru automatică, informatică și cibernetică care împreună alcătuiesc ceea ce se numește *știința sistemelor*.

**Automatica** reprezintă o știință tehnică care încadrează *teoria și practica (metodele și mijloacele) realizării constructive a sistemelor de conducere*, destinate eliminării intervenției umane în elaborarea deciziilor directe privind funcționarea proceselor tehnice. Sistemele rezultate sunt denumite sisteme automate. În acest context vorbim de automatizări cu înțelesul de procedee destinate realizării de sisteme automate și/sau de implementări de sisteme automate.

- Realizarea efectivă a celor două sisteme de antrenare astfel încât să fie îndeplinite performanțele stabilite prin proiectare (diferitele componente ale sistemelor trebuie să fie compatibile, astfel încât să poată interacționa, iar elementele de antrenare să aibă puteri adecvate pentru a asigura viteza de acționare dorită).

**Informatica** reprezintă *știința prelucrării raționale a informației cu ajutorul unor sisteme automate de calcul*. Ea operează cu un ansamblu de cunoștințe și metode de lucru extrem de diverse care, la rândul lor, folosesc în bună măsură concepte și metode ale teoriei sistemelor. Teoria sistemelor servește în principal informatica aplicată și informatica industrială.

**Cibernetică** reprezintă știința de mare generalitate care *studiază din punctul de vedere al analogiilor formale, sistemic și informațional, procesele și conexiunile din natură în care se evidențiază autoreglarea, prin conexiune inversă sub aspectul acțiunilor de comandă, și comunicarea*, fără a lua în considerare în mod obligatoriu natura fizică concretă a elementelor componente. Abordările din cibernetică sunt în primul rând de natură principială. Partea de analiză este predominantă în raport cu partea de sinteză. Ea stă la baza observării asemănărilor și izomorfismelor din natură, pe care le formulează prin mijloace matematice. Termenul "cibernetică" nu are o definiție unică, interpretările asociate conduc adeseori spre prezentarea ciberneticii ca o metaștiință.

#### **Bibliografie suplimentară referitoare la HDD**

[1] Vetrimurugan, R., *Optimization of Hard Disk Drive Heads Cleaning by Using Ultrasonics and Prevention of Its Damage*, APCBEE Procedia 3 ( 2012 ) 222 – 230.

[2] Trawiński, T., *Mathematical model of multiactuator for HDD head positioning system*, AIP Conference Proceedings 2029, 020075 (2018).

Link: - [hard disk drive servo system - Google Scholar](#)