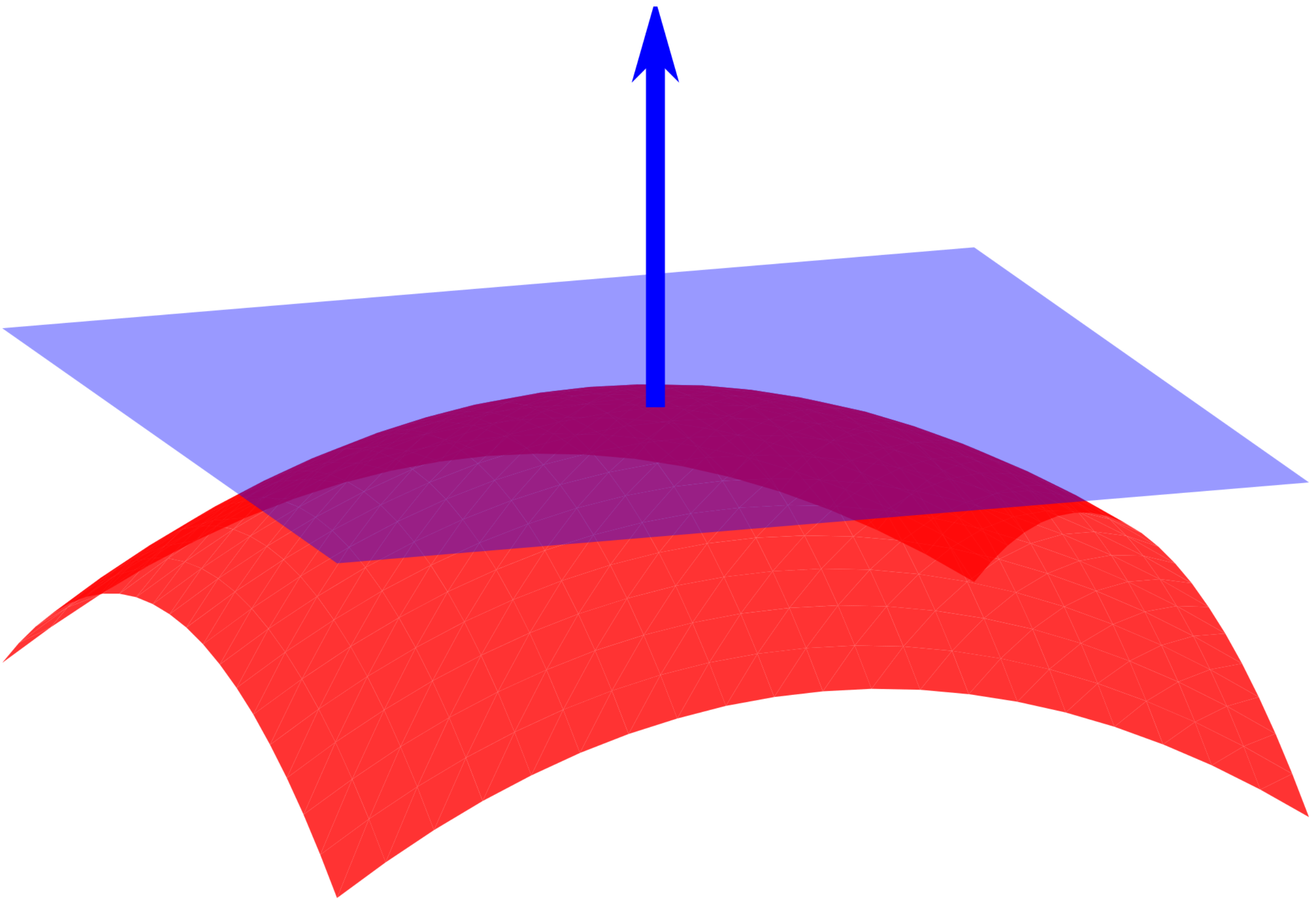
Методы Оптимизации. Даниил Меркулов. Сопряженные множества. Двойственные конусы. Многогранники. Лемма Фаркаша

Conjugacy

Сопряженное (двойственное) множество

Пусть $S \in \mathbb{R}^n$ - произвольное непустое множество. Тогда сопряженное к нему множество определяется, как: $S^* = \{y \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -1 \ \ \forall x \in S\}$



Второе сопряженное множество

Множество S^{**} называется вторым сопряженным к множеству S, если:

$S^{**} = \{x \ \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \geq -1 \ \ \forall x \in S^*\}$

Взаимосопряженные множества и самосопряженные множества

Множества S_1 и S_2 называются **взаимосопряженными**, если $S_1^* = S_2, S_2^* = S_1$.

Множество S называется **самосопряженным**, если $S^* = S$

Свойства сопряженных (двойственных) множеств

- Сопряженное множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$: $S^{**} = \overline{\mathbf{conv}(S \cup \{0\})}$
- Если $S_1 \subset S_2$, то $S_2^* \subset S_1^*$
- $\left(\bigcup\limits_{i=1}^m S_i \right)^* = \bigcap\limits_{i=1}^m S_i^*$
- Если S - замкнуто, выпукло, включает 0, то $S^{**} = S$
- $S^* = \left(\overline{S}\right)^*$

Пример 1

Доказать, что $S^* = \left(\overline{S}\right)^*$

Решение:

- $S \subset \overline{S} \rightarrow \left(\overline{S}\right)^* \subset S^*$
- Пусть $p \in S^*$ и $x_0 \in \overline{S}, x_0 = \lim\limits_{k \to \infty} x_k$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x) = p^Tx$, имеем: $p^T x_k \ge -1 \rightarrow p^Tx_0 \ge -1$. Значит, $p \in \left(\overline{S}\right)^*$, отсюда $S^* \subset \left(\overline{S}\right)^*$

Пример 2

Доказать, что $(\mathbf{conv}(S))^* = S^*$

Решение:

- $S \subset \mathbf{conv}(S) \rightarrow (\mathbf{conv}(S))^* \subset S^*$
- Пусть $p \in S^*$, $x_0 \in \mathbf{conv}(S)$, т.е. $x_0 = \sum\limits_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in S, \sum\limits_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \ge 0$.

  Значит, $p^T x_0 = \sum\limits_{i=1}^k \theta_i p^T x_i \ge \sum\limits_{i=1}^k \theta_i (-1) = 1 * (-1) = -1$. Значит, $p \in (\mathbf{conv}(S))^*$, отсюда $S^* \subset (\mathbf{conv}(S))^*$

Пример 3

Доказать, что если $B(0,r)$ - шар радиуса r по некоторой норме с центром в нуле, то $(B(0,r))^* = B(0, 1/r)$

Решение:

- Пусть $B(0,r) = X, B(0,1/r) = Y$. Возьмем вектор нормали $p \in X^*$, тогда для любого $x \in X: p^Tx \ge -1$

- Из всех точек шара X возьмем такую $x \in X$, что скалярное произведение её на p: $p^T x$ было бы минимально, тогда это точка $x = -\frac{p}{\|p\|}r$
$p^T x = p^T \left(-\frac{p}{\|p\|}r\right) = -\|p\|r \geq -1$
$\|p\| \leq \frac{1}{r} \in Y$
Значит, $X^* \subset Y$
- Теперь пусть $p \in Y$, возьмем так же $x = -\frac{p}{\|p\|}r$.
$p^T x = -r\|p\| \geq -1 \rightarrow p \in X^*$
Значит, $Y \subset X^*$

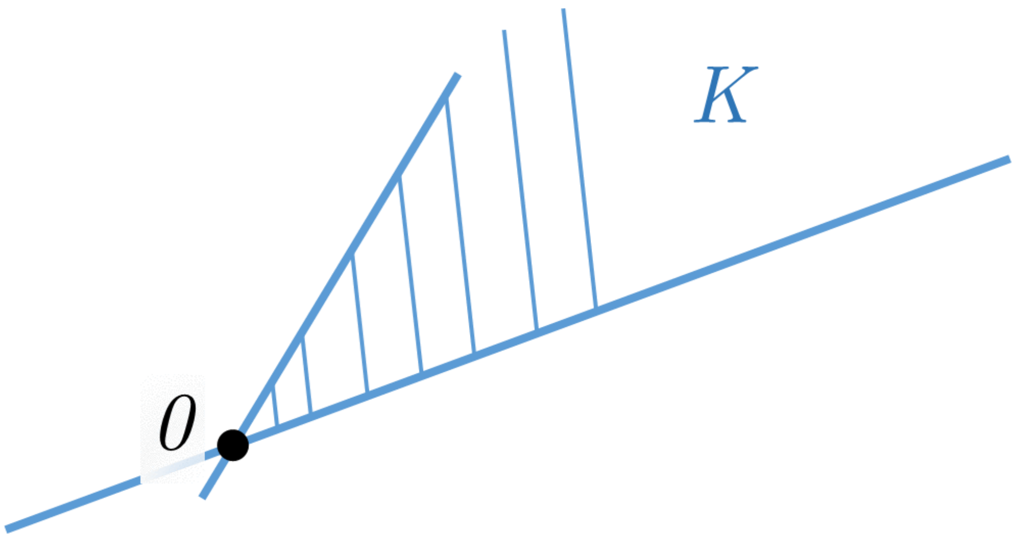
Dual cones

Двойственный (сопряженный) конус

Сопряженным конусом к конусу K называется такое множество K^*, что:

$$K^* = \{y \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

Добавить про соотношение с определением



Свойства сопряженных (двойственных) конусов

- Если K - замкнутый выпуклый конус. Тогда $K^{**} = K$
- Для произвольного множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и конуса $K \subseteq \mathbb{R}^n$:
$(S + K)^* = S^* \cap K^*$
- Пусть $K_1, \ldots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$, тогда:
$\left(\sum\limits_{i=1}^m K_i\right)^* = \bigcap\limits_{i=1}^m K_i^*$

- Пусть $K_1, \dots, K_m$ - конусы в $\mathbb{R}^n$. Пусть так же, их пересечение имеет внутреннюю точку, тогда: $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \sum\limits_{i=1}^{m} K_i^*$

Пример 4

Найти сопряженнй конус для монотонного неотрицательного конуса:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0\}$$

Решение:

Заметим, что:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y_1(x_1 - x_2) + (y_1 + y_2)(x_2 - x_3) + \ldots + (y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})(x_{n-1} - x_n) + (y_1 + \ldots + y_n)x_n$$

[redacted]

Так как в представленной сумме в каждом слагаемом второй множитель положительный, то:

$$y_1 \geq 0, \quad y_1 + y_2 \geq 0, \quad \ldots, \quad y_1 + \ldots + y_n \geq 0$$

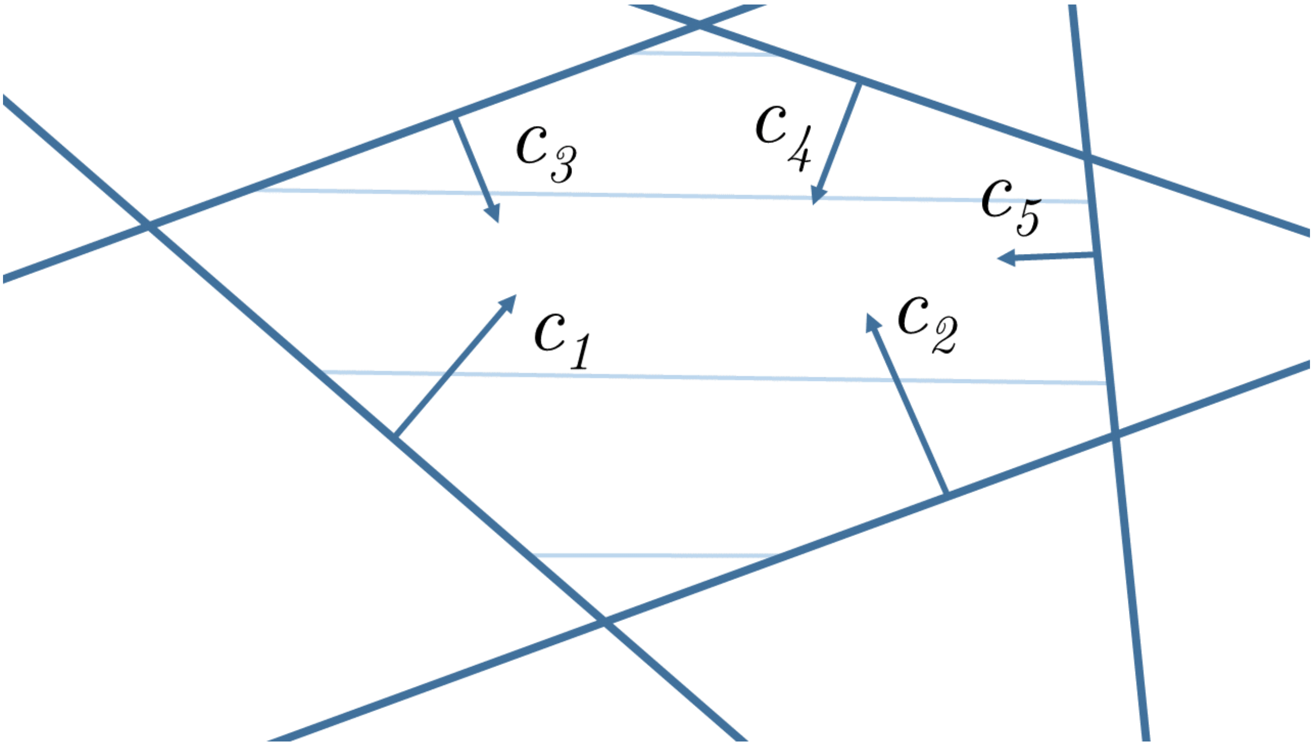
Значит, $K^* = \left\{y \mid \sum\limits_{i=1}^{k} y_i \geq 0, k = \overline{1,n}\right\}$

Polyhedra

Многогранник

Множество решений системы линейных неравенств и равенств представляет собой многогранник:

$Ax \preceq b, \quad Cx = d$ Здесь $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, а неравенство - поэлементное.



Теорема:

Пусть $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Сопряженным к многогранному множеству:

$$S = \mathbf{conv}(x_1, \ldots, x_k) + \mathbf{cone}(x_{k+1}, \ldots, x_m)$$

является полиэдр (многогранник):

$$S^* = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1,k}; \langle p, x_i \rangle \geq 0, i = \overline{k+1,m} \right\}$$

Доказательство:

- Пусть $S = X, S^* = Y$. Возьмем некоторый $p \in X^*$, тогда $\langle p, x_i \rangle \geq -1, i = \overline{1,k}$.

  В то же время для любых $\theta > 0, i = \overline{k+1,m}$: $\langle p, x_i \rangle \geq -1 \to \langle p, \theta x_i \rangle \geq -1$

  $$\langle p, x_i \rangle \geq -\frac{1}{\theta} \to \langle p, x_i \rangle \geq 0$$

Значит, $p \in Y \to X^* \subset Y$

- Пусть, напротив, $p \in Y$. Для любой точки $x \in X$:

  $$x = \sum_{i=1}^m \theta_i x_i \qquad \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$$

Значит: $\langle p, x \rangle = \sum\limits_{i=1}^m \theta_i \langle p, x_i \rangle = \sum\limits_{i=1}^k \theta_i \langle p, x_i \rangle + \sum\limits_{i=k+1}^m \theta_i \langle p, x_i \rangle \geq \sum\limits_{i=1}^k \theta_i (-1) + \sum\limits_{i=1}^k \theta_i \cdot 0 = -1$

Значит, $p \in X^* \to Y \subset X^*$

Пример 5

Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу:

$S = \mathbf{cone}\,\{(-3,1),(2,3),(4,5)\}$

Решение:

Используя теорему выше: $S^* = \{-3p_1 + p_2 \geq 0, 2p_1 + 3p_2 \geq 0, 4p_1 + 5p_2 \geq 0\}$

Лемма (теорема) Фаркаша (Фаркаша - Минковского)

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$1)\ Ax = b, x \geq 0 \qquad 2)\ pA \geq 0, \langle p, b\rangle < 0$

$Ax = b$ при $x \geq 0$ означает, что b лежит в конусе, натянутым на столбцы матрицы A

$pA \geq 0,\ \langle p, b\rangle < 0$ означает, что существует разделяющая гиперплоскость между вектором b и конусом из столбцов матрицы A.

Следствие:

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Тогда имеет решение одна и только одна из следующих двух систем:

$1)\ Ax \leq b \qquad\qquad 2)\ pA = 0, \langle p, b\rangle < 0, p \geq 0$

Если в задаче линейного программирования на минимум допустимое множество непусто и целевая функция ограничена на нём снизу, то задача имеет решение.

Теорема

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Если полиэдр (многогранник) $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ непуст, то

сопряженным к нему является множество $P^* = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p = qA \text{ при некотором } q \geq 0, \langle q, b\rangle \geq -1\}$

Домашнее задание 4

1. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к многогранному конусу: $S = \mathbf{conv}\,\{(-4,-1),(-2,-1),(-2,1)\} + \mathbf{cone}\,\{(1,0),(2,1)\}$
2. Найти и изобразить на плоскости множество, сопряженное к полиэдру: $S = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid -3x_1 + 2x_2 \leq 7, x_1 + 5x_2 \leq 9, x_1 - x_2 \leq 3, -x_2 \leq 1\right\}$
3. Доказать, что если понятие сопряженного множества к множеству S вводить как: $S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x\rangle \leq 1 \ \ \forall x \in S\}$, то единичный шар с центром в нуле - единственное самосопряженное множество в $\mathbb{R}^n$.
4. Найти множество, сопряженное к эллипсоиду: $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 \leq \varepsilon^2\right\}$