Методы Оптимизации. Даниил Меркулов. Оптимизация for dummies

Задача преподавателя: избежать подобных ситуаций

Задача 1

Доказать, что для того, чтобы $S \subseteq \mathbb{R}^n$ было афинным множеством необходимо и достаточно, чтобы S содержало все возможные афинные комбинации своих точек.

Идея:

- Пусть S содержит все афинные комбинации своих точек $\to S$ - афинно
  Достаточно очевидно.
- Пусть S - афинно $\to S$ содержит все афинные комбинации своих точек
  Доказывать по индукции. Проверить для одного, поверить для k доказать для $k+1$

Задача 2

Доказать, что для того, чтобы $K \subseteq \mathbb{R}^n$ было выпуклым конусом необходимо и достаточно, чтобы K содержало все возможные неотрицательные комбинации своих точек.

Идея:

- Пусть K содержит все конические комбинации своих точек $\to K$ - выпуклый конус
  Достаточно очевидно.
- Пусть K - выпуклый конус $\to K$ содержит все конические комбинации своих точек
  Доказывать по индукции. Проверить для одного, поверить для k доказать для $k+1$

Задача 3

Найти проекцию точки $y \in \mathbb{R}^n$ на афинное множество $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = Ay, y \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times m}\}$, $\quad m < n, \quad \textbf{rank } A = m, \;\; y \notin S$

Идея:

- Интуиция в том, что это чистейший метод наименьших квадратов в линейном случае.

$$A^T c = 0, \quad \pi_S(y) = \pi = y + \beta c$$

- Докажем с помощью критерия, что проекция будет искаться в таком виде:

$$\pi = A \cdot (A^T A)^{-1} A^T y$$

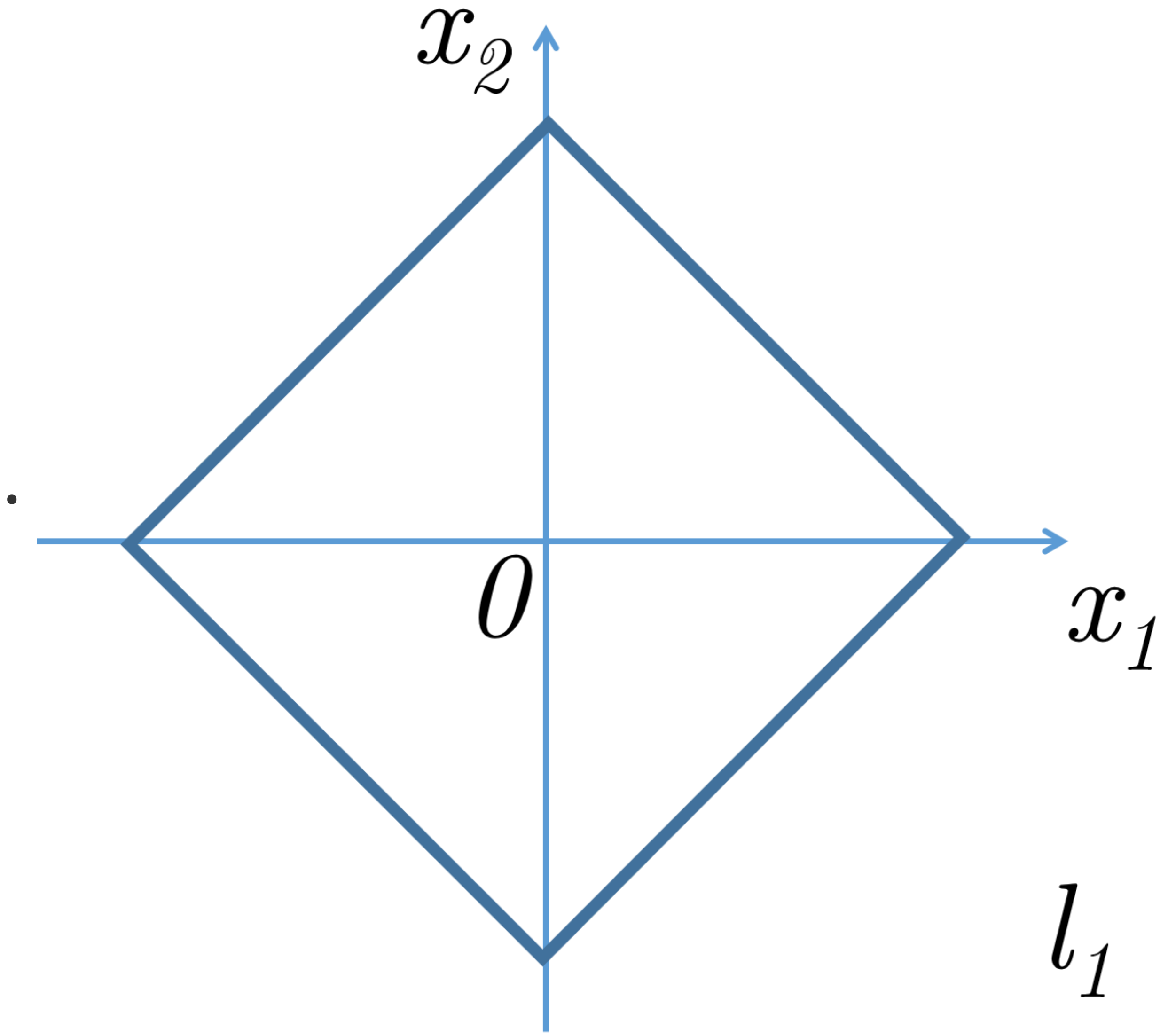
- Так как целевое множество - афинно, то необходимо и достаточно показать:

$$(\pi - y)^T (x - \pi) = 0$$

Задача 4

Найти проекцию $\pi_S(y)$ точки y множество $S = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$ в $\| \cdot \|_1$ норме. Рассмотреть различные положения y.

Идея:



Задача 5

Используя лемму о конусе, сопряженному к сумме конусов и лемму о конусе, сопряженном к пересечению замкнутых выпуклых конусов, доказать, что конусы

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = Ay, y \geq 0, y \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{n \times m}\}, \quad K_2 = \{p \in \mathbb{R}^n \mid A^T p \geq 0\}$$

взаимодвойственны

Задача 6

Найти множества S^*, S^{**}, S^{***}, если

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 \geq 0, \quad 2x_1 + x_2 \geq -4, \quad -2x_1 + x_2 \geq -4\}$$

Идея:

- Представить множество как выпуклую + коническую оболочку точек и применить теорему.

Задача 7

Проверить, что функция $f(x) = \sqrt{1 + x^T x}$ выпукла на $\mathbb{R}^n$. Будет ли она строго выпуклой?

Идея:

- Использовать критерий второго порядка

Задача 8

Для каких значений $x \in \mathbb{R}^3$ функция $f(x) = \dfrac{x_1^3}{3} + \dfrac{x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2}{2}$ выпукла и строго выпукла?

Идея:

- Использовать критерий второго порядка

Задача 9

Пусть задана функция двух переменных:

$$f(x, y) = \max\left\{|x-1| + e^{|y-1|}, |x-y-1|\right\}$$

Кроме того, есть множество:

$$S = \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1, x - y \geq 0\right\}$$

Найти $\partial f(A), \partial_S f(A)$, если $A = (1, 1)^T$.

Задача 10

Используя условие оптимальности $0 \in \partial_S f(x_*)$, решить задачу

$$\begin{aligned} &\min |x| + |y| \\ &\text{s.t. } (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Задача 11

Даня Чернявский всю сознательную жизнь торговал криптовалютой. В определенный момент ему показалось, что он выучил оптимизацию и он может подойти к задаче формирования криптопортфеля с умом. У него имелись на выбор криптовалюты, индексируемые $1, \ldots, C$. Текущие курсы криптовалют к рублю: $\lambda_1, \ldots, \lambda_C$. Для Дани существует лишь два исхода: криптовалюта вырастет в $\dfrac{\pi}{e}$ раз - успех и провал в других случаях. Пользуясь секретными телеграм чатами, он сумел оценить вероятности успеха для каждой криптовалюты как $p_1, \ldots, p_C$. Однако, Даня - бедный трейдер и имеет ограниченный бюджет, составляющий z рублей. Давайте поможем сформулировать оптимизационную задачу выбора инвестиционного криптопортфеля Дане так, чтобы максимизировать средний выигрыш. Является ли эта задача выпуклой, если она, конечно, разрешима?

Задача 12

$$extr(x_1-3)(x_2-2), x\in R^2$$
$$x_1+2x_2=4(1); x_1^2+x_2^2\le 5(2); x_1\ge 0(3); x_2\ge 0(4)$$

Идея:

$$L(x,y)=(x_1-3)(x_2-2)+\lambda_1(x_1+2x_2-4)+\lambda_2(x_1^2+x_2^2-5)-\lambda_3x_1-\lambda_4x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=x_2-2+\lambda_1+2\lambda_2x_1-\lambda_3=0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=x_1-2+2\lambda_1+2\lambda_2x_2-\lambda_4=0;$$
$$x_1+2x_2=4; \quad \lambda_2(x_1^2+x_2^2-5)=0, \quad \lambda_2\ge 0$$
$$\lambda_3x_1=0, \quad \lambda_3\ge 0; \lambda_4x_2=0, \lambda_4\ge 0$$

Таким образом надо рассмотреть 8 случаев, когда $\lambda_i=0, \quad i\in\overline{2,4}$, т.е. ограничение неактивно или $\lambda_i\ge 0, \quad i\in\overline{2,4}$ - ограничение активно. Составим таблицу вариантов, где 0 - ограничение неактивно; A - ограничение активно.

λ	1	2	3	4	5	6	7	8
λ_2	0	0	0	0	A	A	A	A
λ_3	0	0	A	A	0	0	A	A
λ_4	0	A	0	A	0	A	0	A