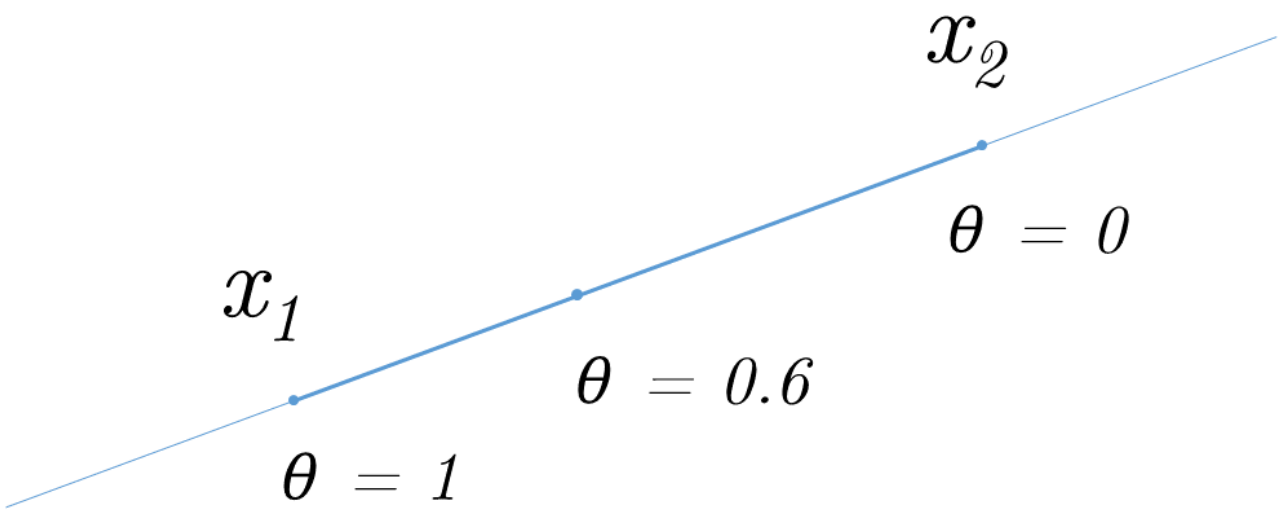
Методы Оптимизации. Даниил Меркулов. Выпуклость. Выпуклые множества.

Affine set

Даны 2 точки x_1, x_2. Тогда прямая, проходящая через них определяется следующим образом:

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2, \theta \in \mathbb{R} \qquad (1)$$



Афинное множество

Множество A называется афинным, если для любых x_1, x_2 из A прямая, проходящая через них так же лежит в A, т.е.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in A : \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in A \qquad (2)$$

Примеры:

$\mathbb{R}^n$, множество $\{x \mid \mathbf{A}x = \mathbf{b}\}$

Афинная комбинация

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k \in S$, тогда точка $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_k x_k$ называется афинной комбинацией точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ при условии $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1$

Афинная оболочка

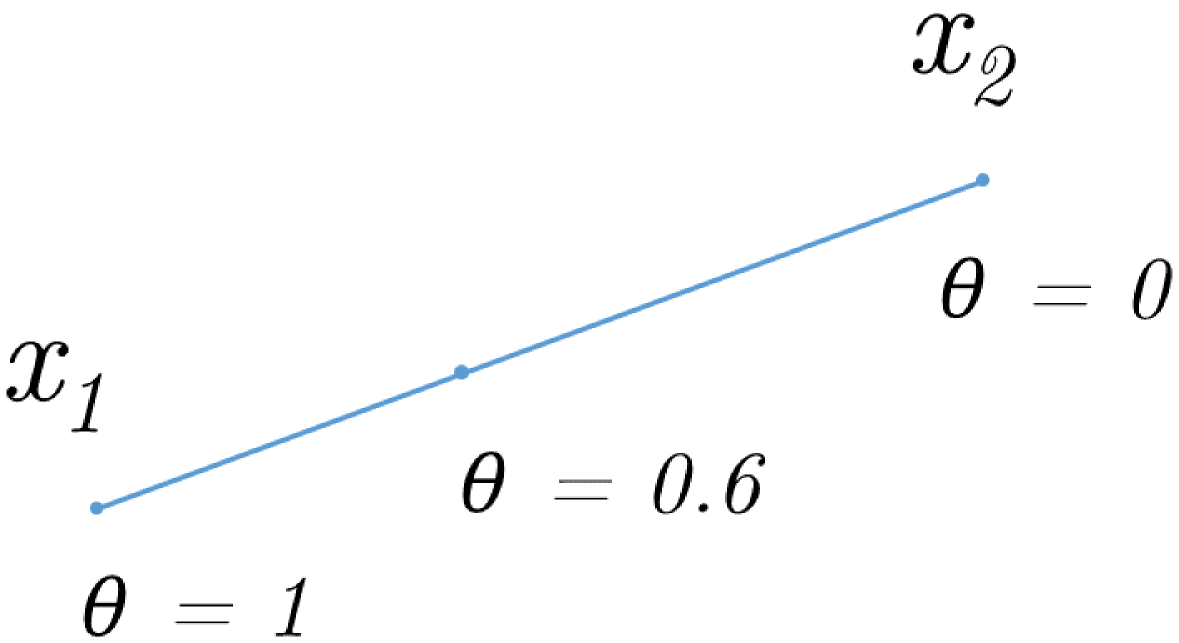
Наименьшее множество всех афинных комбинаций точек множества S называется афинной оболочкой множества S.

$$\mathbf{aff}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in S, \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1 \right\} \tag{3}$$

Convex set

Даны 2 точки x_1, x_2. Тогда отрезок, соединяющий их определяется следующим образом:

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta) x_2, \theta \in [0, 1] \quad (4)$$



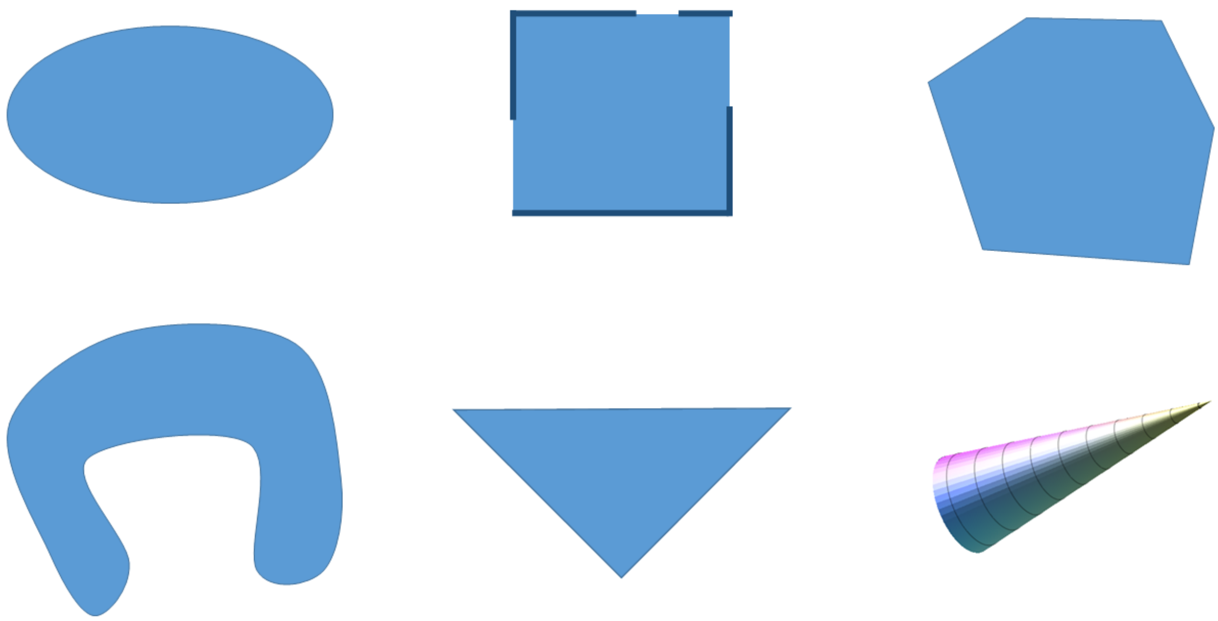
Выпуклое множество

Множество C называется выпуклым, если для любых x_1, x_2 из A отрезок, соединяющий их, так же лежит в C, т.е.

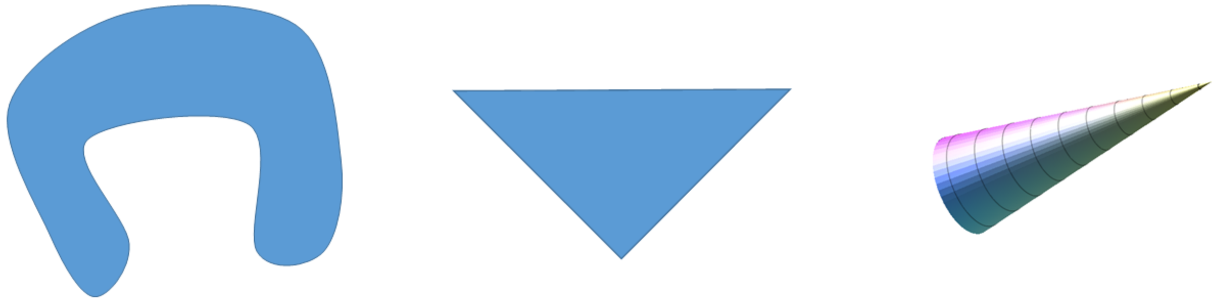
$$\begin{gathered} \forall \theta \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in C : \\ \theta x_1 + (1 - \theta) x_2 \in C \end{gathered} \tag{5}$$

Примеры:

Любое афинное множество, луч, отрезок.



БРО НЕ БРО БРО



НЕ БРО БРО БРО

Выпуклая комбинация

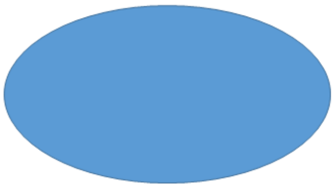
Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k \in S$, тогда точка $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_k x_k$ называется выпуклой комбинацией точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ при условии $\sum\limits_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$

Выпуклая оболочка

Наименьшее множество всех выпуклых комбинаций точек множества S называется выпуклой оболочкой множества S.

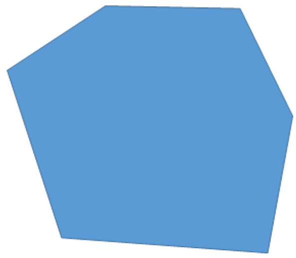
$$\mathbf{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in S, \sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\} \tag{6}$$

Примеры:

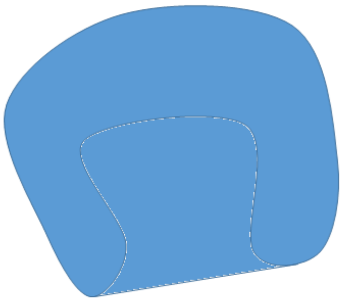


БРО

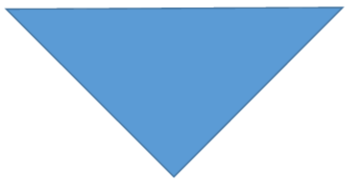
БРО



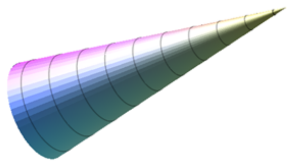
БРО



БРО



БРО



БРО

Неуловимая выпуклость

На практике очень важно бывает понять, выпукло конкретное множество или нет. Для этого применяют 2 подхода в зависимости от контекста.

По определению

Показать, что S получено из простых выпуклых множеств с помощью операций, сохраняющих выпуклость:

По определению

$$x_1, x_2 \in S, 0 \leq \theta \leq 1 \quad \rightarrow \quad \theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S \tag{7}$$

Показать, что S получено из простых выпуклых множеств с помощью операций, сохраняющих выпуклость:

Линейная комбинация выпуклых множеств выпукла

Пусть есть 2 выпуклых множества S_x, S_y, пусть множество
$S = \{s \mid s = c_1 x + c_2 y, x \in S_x, y \in S_y, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$

Возьмем две точки из S: $s_1 = c_1x_1 + c_2y_1, s_2 = c_1x_2 + c_2y_2$ и докажем, что отрезок между ними $\theta s_1 + (1-\theta)s_2, \theta \in [0,1]$ так же принадлежит S

$$\theta s_1 + (1-\theta)s_2 \quad (8)$$

$$\theta(c_1x_1 + c_2y_1) + (1-\theta)(c_1x_2 + c_2y_2) \quad (9)$$

$$c_1(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) + c_2(\theta y_1 + (1-\theta)y_2) \quad (10)$$

$$c_1x + c_2y \in S \quad (11)$$

Пересечение любого (!) числа выпуклых множеств выпукло

Если искомое пересечение пусто или содержит одну точку - свойство доказано по определению. В противном случае возьмем 2 точки и отрезок между ними. Эти точки должны лежать во всех пересекаемых множествах, а так как все они выпуклы, то и отрезок между ними лежит во всех множествах, а значит и в их пересечении.

Образ выпуклого множества при афинном отображении выпуклый

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \text{ convex} \;\; \rightarrow \;\; f(S) = \{f(x) \mid x \in S\} \text{ convex} \quad (f(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}) \qquad (12)$$

Примеры афинных функций: растяжение, проекция, перенос, множество решений линейного матричного неравенства $\{x \mid x_1A_1 + \ldots + n_mA_m \preceq B\}$ Здесь $A_i, B \in \mathbf{S}^p$ - симметричные матрицы $p \times p$.

Отметим так же, что прообраз выпуклого множества при афинном отображении так же выпуклый.

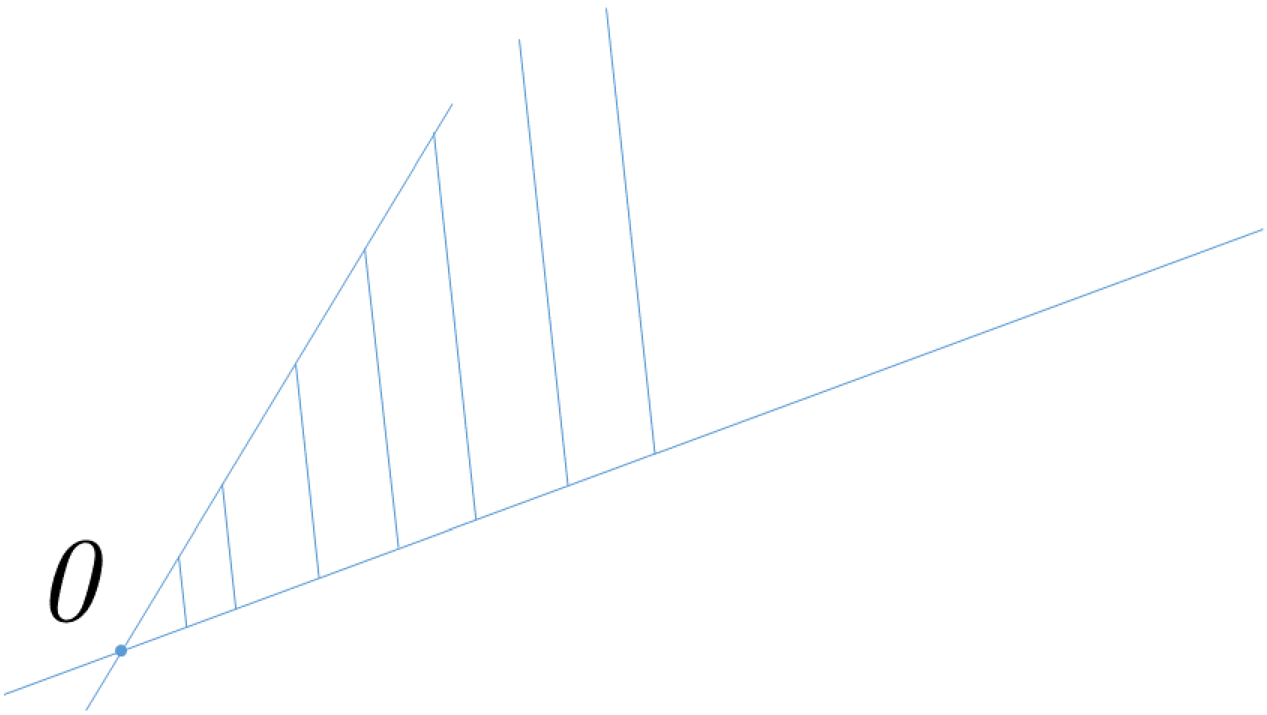
$$S \subseteq \mathbb{R}^m \text{ convex} \;\rightarrow\; f^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in S\} \text{ convex} \;\; (f(x) = \mathbf{A}x + \mathbf{b}) \qquad (13)$$

Convex cone

Выпуклый конус

Множество S называется выпуклым конусом, если:

$$\forall x_1, x_2 \in S, \theta_1, \theta_2 \geq 0 \;\; \rightarrow \;\; \theta_1x_1 + \theta_2x_2 \in S \qquad (14)$$



Примеры:

$\mathbb{R}^n$; афинное множество, содержащее 0; луч, $\mathbf{S}_+^n$ - множество симметричных положительно определенных матриц

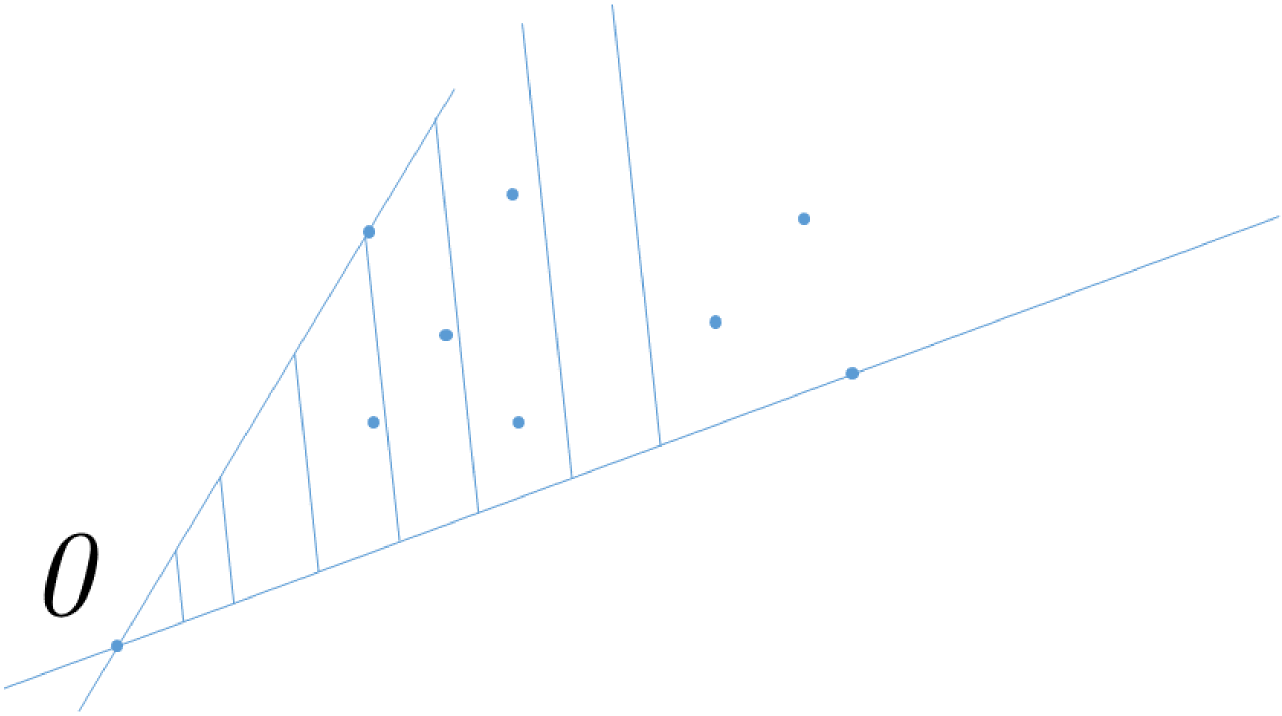
Неотрицательная коническая комбинация точек

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k \in S$, тогда точка $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_k x_k$ называется неотрицательной конической комбинацией точек $x_1, x_2, \ldots, x_k$ при условии $\theta_i \geq 0$

Коническая оболочка точек

Наименьшее множество всех неотрицательных конических комбинаций точек множества S называется конической оболочкой множества S.

$$\mathbf{cone}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i \mid x_i \in S, \theta_i \geq 0 \right\} \tag{15}$$



Примеры решения задач

Пример 1

Покажите, что множество выпукло тогда и только тогда, когда его пересечение с любой прямой выпукло.

Решение:

1. Заметим, что прямая - выпуклое множество, а пересечение двух выпуклых множетсв всегда выпукло. Таким образом, если множество выпукло, то его пересечение с любой прямой выпукло.
2. Теперь пусть пересечение множества S с любой прямой выпукло. Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in S$. Пересечение S и прямой через x_1, x_2 выпукло, т.е. содержит отрезок между x_1 и x_2. Если любое пересечение содержит две точки и отрезок между ними, то и множество S его так же содержит, а стало быть - выпукло.

Пример 2

Покажите, что выпуклая оболочка множества S есть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих S.

Решение:

1. Обозначим за H выпуклую оболочку множества S, а за I - пересечение всех выпуклых множеств, содержащих S. Таким образом:

   $$H = \mathbf{conv}(S)$$

   $$I = \bigcap \{I_s \mid I_s \text{ - } \mathbf{convex}\ , I_s \supseteq S\}$$

   Требуется доказать, что $H = I$.

2. Пусть $x \in H$, т.е. x - выпуклая комбинация некоторых точек $x_1, \ldots, x_k \in S$. Теперь пусть I_s - некоторое выпуклое множество содержащее S: $I_s \supseteq S$. Значит эта выпуклая комбинация точек $x_1, \ldots, x_k \in S \in I_s$ лежит и в I_s, так как оно выпукло (и содержит все выпуклые комбинации своих точек), т.е. $x \in I_s$. Но I_s - произвольное выпуклое множество, содержащее x, а значит, $x \in \bigcap I_s$ или I. Таким образом $H \subseteq I$
3. Заметим, что выпуклая оболочка выпукла и содержит исходное множество, а значит, сама по себе является одним из тех множеств, которые мы пересекаем для построения I, т.е. $I_s = H$. А значит, $I \subseteq H$.
4. Широкий взгляд на предыдущие два пункта завершает доказательство.

Пример 3

Пусть $x \in \mathbb{R}$ - случайная величина с заданным вероятностным распределением $\mathbb{P}(x = a_i) = p_i$, где $i = 1, \ldots, n$, а $a_1 < \ldots < a_n$. Говорят, что вектор вероятностей исходов $p \in \mathbb{R}^n$ принадлежит вероятностному симплексу, т.е. $P = \left\{ p \mid \mathbf{1}^Tp = 1, p \succeq 0\right\} = \left{ p \mid p_1 + \ldots + p_n = 1, p_i \ge 0 \right\}$.
Определите, выпукло ли множество таких p, которые удовлетворяют условию:

- $\alpha < \mathbb{E}f(x) < \beta$, где $\mathbb{E}f(x)$ означает математическое ожидание заданной функции $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, т.е. $\mathbb{E}f(x) = \sum\limits_{i=1}^n p_i f(a_i)$

По условию: $\alpha < \sum\limits_{i=1}^n p_i f(a_i) < \beta$. Это означает, что на p наложено два линейных неравенства, каждое из которых определяет выпуклое множество (полупространство), что в пересечении с выпуклым симплексом даст выпуклое множество.

- $\mathbb{E}x^2 \le \alpha$

По условию: $\sum\limits_{i=1}^n p_i a_i^2 \le \alpha$. Это условие является линейным неравенством, что так же задает выпуклое множество ограничений, что в пересечении с симплексом дает выпуклое множество.

- $\mathbb{V}x \le \alpha$

По условию: $\mathbb{V}x = \mathbb{E}\left\{(x - \mathbb{E}x)^2\right\} = \mathbb{E}x^2 - (\mathbb{E}x)^2$ = $\sum\limits_{i=1}^n p_i a_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^n p_i a_i\right)^2 \le \alpha$
Множество, вообще говоря, не выпукло. Для этого достаточно ограничиться минимальным контрпримером, когда $n = 2$, а один из линейных коэффициентов равен 0, а другой 1, пусть α так же равен $\frac{1}{228}$: $p_2 - p_2^2 \le \dfrac{1}{228}$. Подставьте точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$ - они удовлетворяют неравенству, в то время как середина отрезка между ними $(0.5, 0.5)$ этим свойством не обладает.

Домашнее задание 2

0. Покажите, что множество афинно тогда и только тогда, когда его пересечение с любой прямой афинно.
1. Пусть $S_1, \ldots, S_k$ - произвольные непустые множества в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что:
    - $\mathbf{cone}\left(\bigcup\limits_{i=1}^k S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^k \mathbf{cone}\left(S_i\right)$

- $\mathbf{conv}\left(\sum\limits_{i=1}^k S_i\right) = \sum\limits_{i=1}^k \mathbf{conv}\left(S_i\right)$

2. Докажите, что множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукло тогда и только тогда, когда $(\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$ для всех неотрицательных α и β
3. Пусть $x \in \mathbb{R}$ - случайная величина с заданным вероятностным распределением $\mathbb{P}(x = a_i) = p_i$, где $i = 1, \ldots, n$, а $a_1 < \ldots < a_n$. Говорят, что вектор вероятностей исходов $p \in \mathbb{R}^n$ принадлежит вероятностному симплексу, т.е. $P = \left\{p \mid \mathbf{1}^T p = 1, p \succeq 0\right\} = \{p \mid p_1 + \ldots + p_n = 1, p_i \geq 0\}$.

   Определите, выпукло ли множество таких p, которые удовлетворяют условию:

   - $\mathbb{P}(x > \alpha) \leq \beta$
   - $\mathbb{E}|x^{2017}| \leq \alpha\mathbb{E}|x|$
   - $\mathbb{E}|x^2| \geq \alpha$
   - $\mathbb{V}x \geq \alpha$

В качестве решения необходимо предоставить либо:

- `.pdf` файл, сверстанный с помощью $\LaTeX$ с решениями задач
- `.ipynb` с оформленным решением