Методы Оптимизации. Даниил Меркулов. Субградиент. Субдифференциал.

Directional derivative

Производная по направлению

Пусть $f(x)$ - выпуклая функция на выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и пусть $x_0 \in \mathbf{ri} S$. Тогда в x_0 существует производная по любому направлению $s \in \mathbf{Lin} S$:

$$f'(x_0; s) = \lim_{\alpha \to 0+} \frac{f(x_0 + \alpha s) - f(x_0)}{\alpha}$$

Важные факты о производной по направлению

- Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее производная по любому направлению $s \in \mathbb{R}^n$ существует и равна:

$$f'(x_0; s) = \langle \nabla f(x_0), s \rangle$$

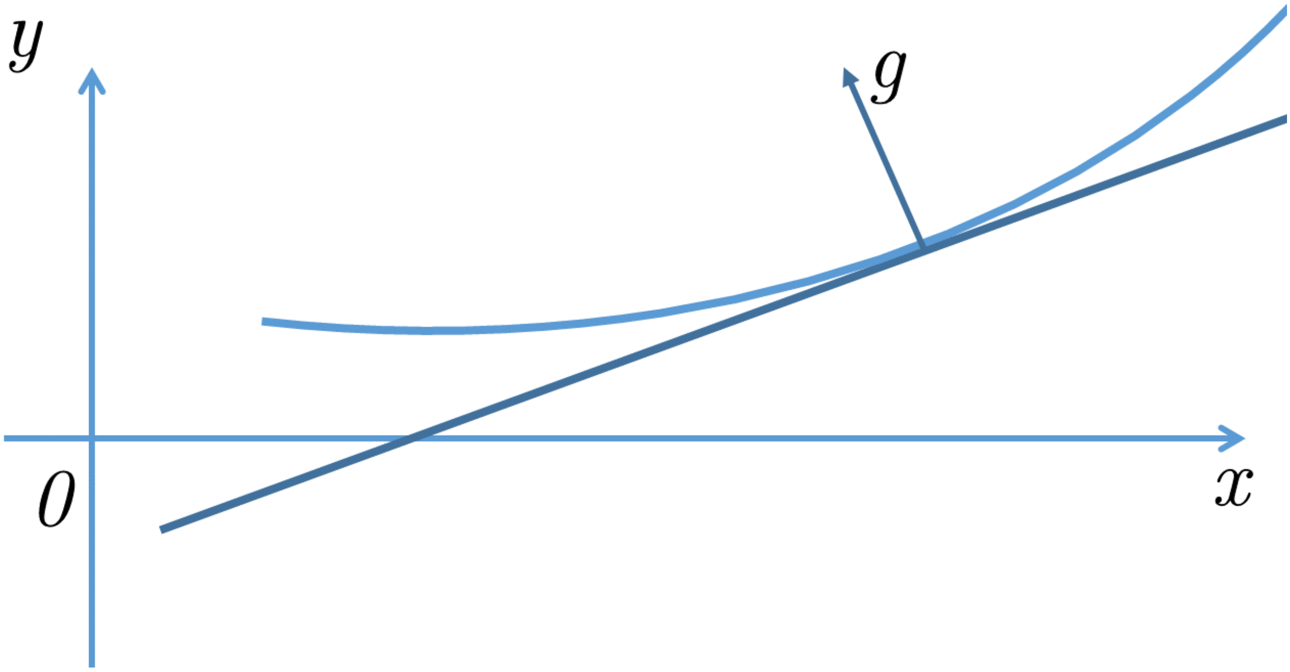
Subgradient

Мотивация

Важным свойством непрерывной выпуклой функции $f(x)$ является то, что в выбранной точке x_0 для всех $x \in \mathbf{dom}\ f$ выполнено неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g, то есть касательная к графику функции является *глобальной* оценкой снизу для функции.



- Если $f(x)$ - дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы :)

Не хочется лишаться такого вкусного свойства.

Субградиент

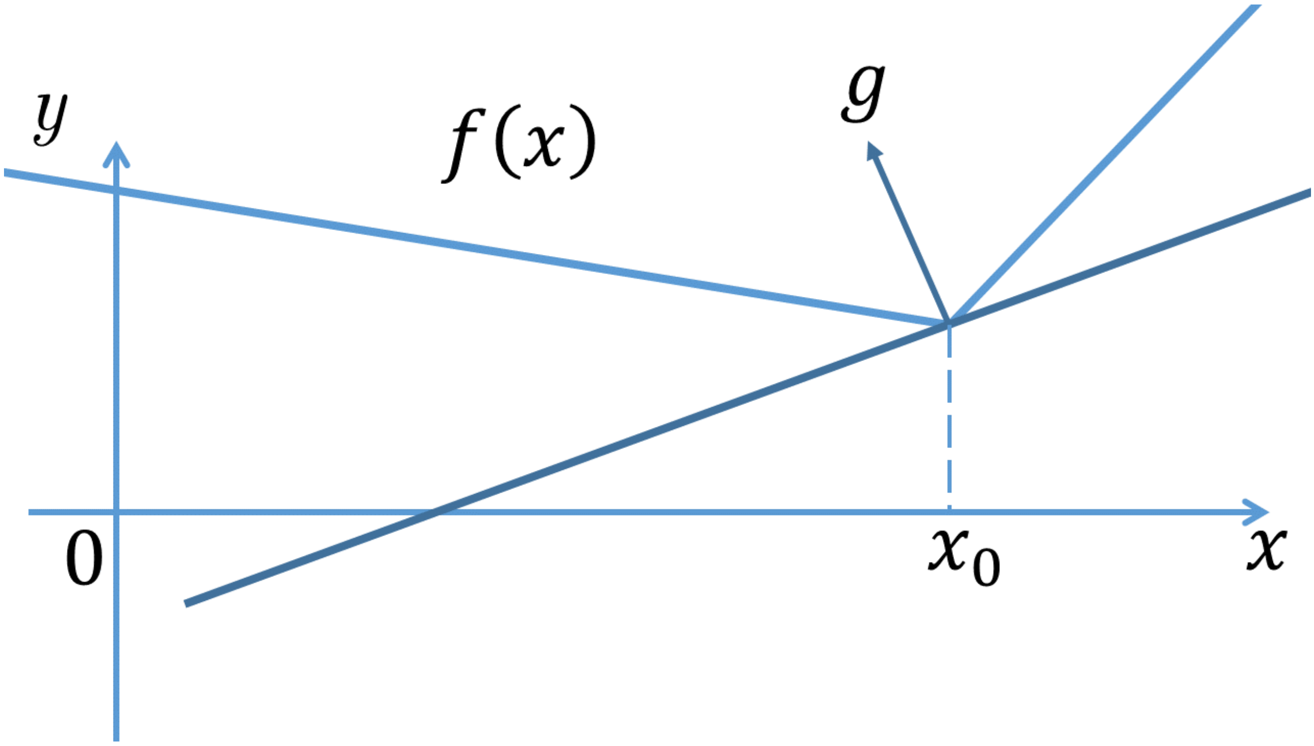
Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Субдифференциал

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** f в x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

- Если $x_0 \in \mathbf{ri} S$, то $\partial f(x_0)$ выпуклое компактное множество.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \iff \partial f(x_0) = \nabla f(x_0)$
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ - выпукла на S.



Теорема Моро - Рокафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ - выпуклые функции на выпуклых множествах $S_i,\ i = \overline{1,n}$.
Тогда, если $\bigcap\limits_{i=1}^n \mathbf{ri} S_i \neq \emptyset$ то функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^n a_i f_i(x),\ a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap\limits_{i=1}^n S_i$ и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x)$$

Важное следствие (субдифференциал максимума)

Пусть $f_i(x)$ - выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n,\ x_0 \in S$, а поточечный максимум определяется как $f(x) = \max\limits_i f_i(x)$. Тогда:

$$\partial_S f(x_0) = \mathbf{conv} \left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_S f_i(x_0) \right\}$$

где $I(x) = \{i \in [1:m] : f_i(x) = f(x)\}$

Теорема (субдифференциал сложной функции)

Пусть $g_1, \ldots, g_m$ - выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $g = (g_1, \ldots, g_m)$ - образованная из них вектор - функция, φ - монотонно неубывающая выпуклая функция на открытом выпуклом множестве $U \subseteq \mathbb{R}^m$, причем $g(S) \in U$. Тогда субдифференциал функции $f(x) = \varphi(g(x))$ имеет вид:

$$
\partial f(x) = \bigcup_{p \in \partial \varphi(u)} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i \partial g_i(x) \right),
$$

где $u = g(x)$

Важное следствие

В частности, если функция φ дифференцируема в точке $u = g(x)$, то формула запишется так:

$$
\partial f(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u) \partial g_i(x)
$$

Conditional subgradient

Определение

Множество

$$
\{g | f(x) - f(x_0) \geq \langle g, x - x_0 \rangle, \; \forall x \in S\}
$$

называется **субдифференциалом f в x_0 на множестве S** и обозначается $\partial_S f(x_0)$.

Примеры

Концептуально, различают три способа решения задач на поиск субградиента:

- Теоремы Моро - Рокафеллара, композиции, максимума
- Геометрически
- По определению

Пример 1

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$

Пример 2

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$

Пример 3

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = [\max(0, f_0(x))]^q$. Здесь $f_0(x)$ - выпуклая функция на открытом выпуклом множестве S, $q \geq 1$.

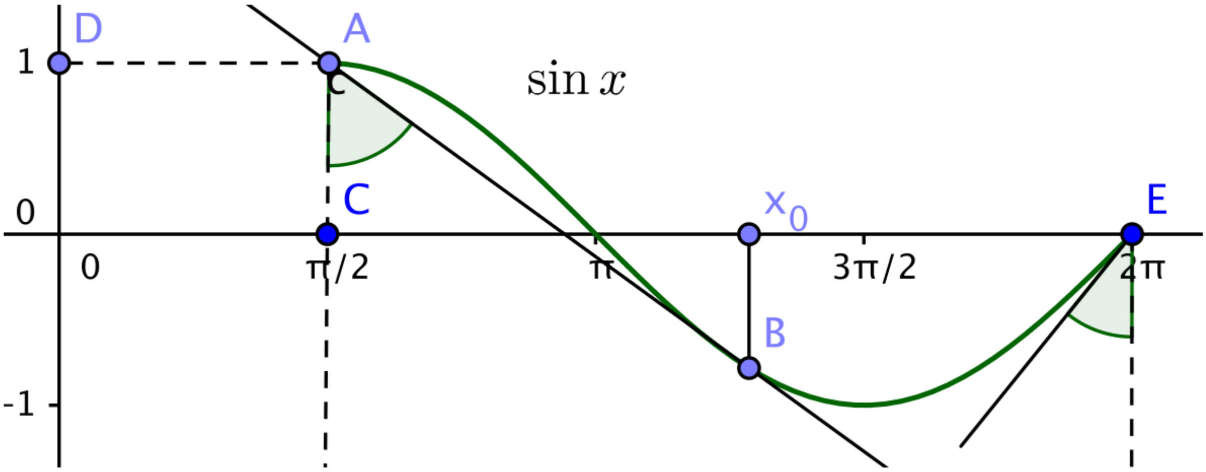
Решение:
Согласно теореме о композиции (функция $\varphi(x) = x^q$ - дифференцируема), а $g(x) = \max(0, f_0(x))$ имеем: $\partial f(x) = q(g(x))^{q-1} \partial g(x)$

По теореме о поточечном максимуме:

$$\partial g(x) = \begin{cases} \partial f_0(x), & f_0(x) > 0, \\ \{0\}, & f_0(x) < 0 \\ \{a \mid a = \lambda a', \ 0 \le \lambda \le 1, \ a' \in \partial f_0(x), & f_0(x) = 0\} \end{cases}$$

Пример 4

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \sin x, x \in [\pi/2; 2\pi]$



$$\partial f_G(x) = \begin{cases} (-\infty, \cos x_0], & x = \pi/2; \\ \varnothing, & x \in (\pi/2, x_0); \\ \cos x, & x \in [x_0, 2\pi); \\ [1, +\infty], & x = 2\pi. \end{cases}$$

Пример 5

Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = |c_1^T x| + |c_2^T x|$

Домашнее задание 7

1. Докажите, что точка x_0 - является точкой минимума выпуклой функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда $0 \in \partial f(x_0)$
2. Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \mathrm{ReLU}(x) = \max\{0, x\}$
3. Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \|x\|_p$ при $p = 1, 2, \infty$
4. Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = \|Ax - b\|_1^2$
5. Найти $\partial f(x)$, если $f(x) = e^{\|x\|}$