Методы Оптимизации. Даниил Меркулов. Сопряженная функция

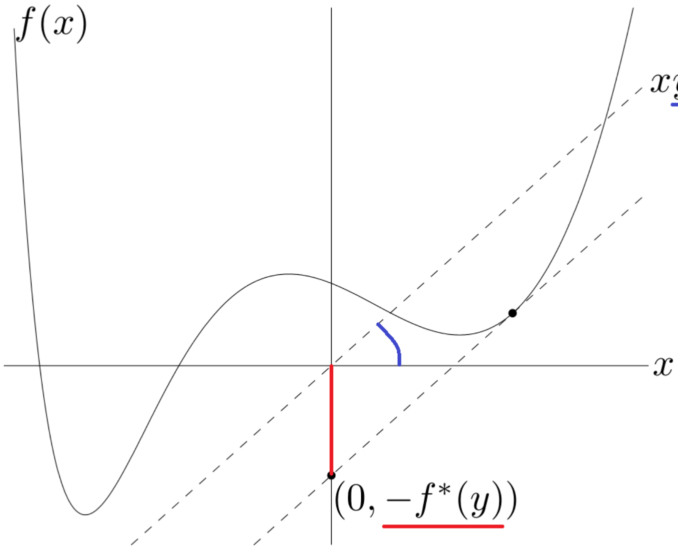
Conjugate function

Сопряженная Функция

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Функция $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется сопряжённой функцией к функции $f(x)$ и определена как

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbf{dom}\ f} \left(\langle y, x \rangle - f(x) \right).$$

Область определения f^* это множество таких y, что супремум конечен.

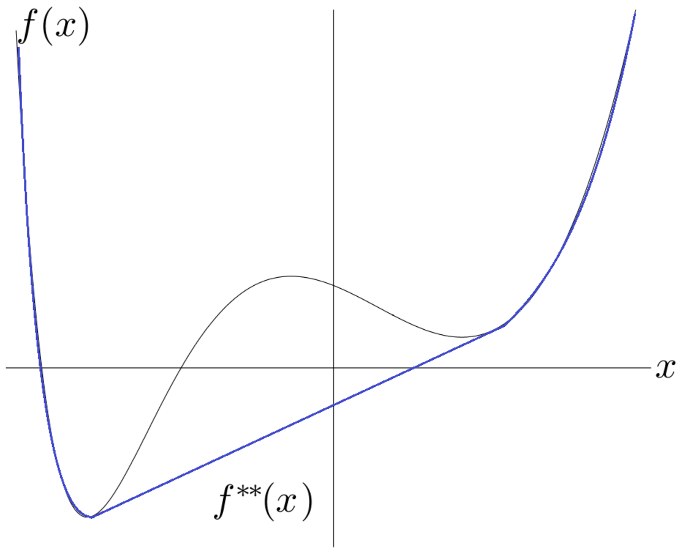


Свойства сопряженной функции

- $f^*(y)$ - выпуклая функция как поточечный супремум функций выпуклых по y
- Неравенство Фенхеля - Юнга:

$$f(x) + f^*(y) \geq \langle y, x \rangle$$

- Пусть функции $f(x)$. $f^*(y)$, $f^{**}(x)$ определены на $\mathbb{R}^n$. Тогда $f^{**}(x) = f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ - выпуклая функция.



- Частный случай сопряжения, когда функция дифференцируема называется преобразованием Лежандра. Пусть $f(x)$ - выпукла и дифференцируема, $\mathbf{dom}\ f = \mathbb{R}^n$. Тогда $x^* = \underset{x}{\mathbf{argmin}}\langle x, y\rangle - f(x)$. В этом случае $y = \nabla f(x^*)$. Стало быть:

$$f^*(y) = \langle \nabla f(x^*), x^* \rangle - f(x^*)$$

$$f^*(y) = \langle \nabla f(z), z \rangle - f(z), \qquad y = \nabla f(z), \quad z \in \mathbb{R}^n$$

- Пусть $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, где f_1, f_2 - выпуклые функции, тогда

$$f^*(p, q) = f_1^*(p) + f_2^*(q)$$

- Пусть $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$. Пусть так же $f^*(y), g^*(y)$ определены на Y. Тогда $\forall x \in X, \forall y \in Y$

$$f^*(y) \geq g^*(y) \qquad f^{**}(y) \leq g^{**}(y)$$

Примеры

Схема поиска сопряженной функции, в целом, стандартна:

1. Запись $f^*(y) = \sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\ f} (\langle y, x\rangle - f(x)) = \sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\ f} f(x, y)$
2. Поиск тех значений y, при которых $\sup\limits_{x \in \mathbf{dom}\ f} f(x, y)$ конечен. Эти значения составляют область определения сопряженной функции $f^*(y)$
3. Поиск x^*, при котором $f(x, y)$ достигает своего максимального значения как функция по x. $f^*(y) = f(x^*, y)$

Пример 1

Найти $f^*(y)$, если $f(x) = ax + b$

Решение:

- Рассмотрим функцию, супремумом которой является сопряженная: $\langle y, x \rangle - f(x) = yx - ax - b$
- Построим область определения (т.е. те y, для которых $\sup$ конечен). Это одна точка $y = a$
- Значит, $f^*(a) = -b$

Пример 2

Найти $f^*(y)$, если $f(x) = -\log x, \quad x \in \mathbb{R}_{++}$

Решение:

- Рассмотрим функцию, супремумом которой является сопряженная: $\langle y, x \rangle - f(x) = yx + \log x$.
- Эта функция не ограничена сверху при $y \geq 0$. Значит, $\mathbf{dom}\ f^* = \{y < 0\}$
- Её максимум достигается при $x = -1/y$. Значит, $f^*(y) = -\log(-y) - 1$

Пример 3

Найти $f^*(y)$, если $f(x) = e^x$

Решение:

- Рассмотрим функцию, супремумом которой является сопряженная: $\langle y, x \rangle - f(x) = yx - e^x$.
- Эта функция не ограничена сверху при $y < 0$. Значит, $\mathbf{dom}\ f^* = \{y \geq 0\}$ (с нулем лучше поработать аккуратнее)
- Её максимум достигается при $x = \log y$. Значит, $f^*(y) = y \log y - y$. Полагая, что $0 \log 0 = 0$.

Пример 4

Найти $f^*(y)$, если $f(x) = x \log x, x \neq 0, \quad f(0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+$

Решение:

- Рассмотрим функцию, супремумом которой является сопряженная: $\langle y, x \rangle - f(x) = xy - x \log x$.
- Эта функция ограничена сверху при всех y. Значит, $\mathbf{dom}\ f^* = \mathbb{R}$ (с нулем лучше поработать аккуратнее)
- Её максимум достигается при $x = e^{y-1}$. Значит, $f^*(y) = e^{y-1}$.

Пример 5

Найти $f^*(y)$, если $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x, \quad A \in \mathbb{S}^n_{++}$

Решение:

- Рассмотрим функцию, супремумом которой является сопряженная: $\langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \frac{1}{2} x^T A x$.
- Эта функция ограничена сверху при всех y. Значит, $\mathbf{dom}\ f^* = \mathbb{R}$ (с нулем лучше поработать аккуратнее)
- Её максимум достигается при $x = A^{-1} y$. Значит, $f^*(y) = \frac{1}{2} y^T A^{-1} y$.

Пример 6

Найти $f^*(y)$, если $f(x) = \max\limits_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$

Решение:

- Рассмотрим функцию, супремумом которой является сопряженная: $\langle y, x\rangle - f(x) = y^T x - \max\limits_i x_i$.
- Заметим, что если вектор y имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, то эта функция не ограничена по x.
- Пусть теперь $y \succeq 0, \quad 1^T y > 1$. $y \notin \mathbf{dom\ f^*(y)}$
- Пусть теперь $y \succeq 0, \quad 1^T y < 1$. $y \notin \mathbf{dom\ f^*(y)}$
- Остается только $y \succeq 0, \quad 1^T y = 1$. Тогда $x^T y \leq \max\limits_i x_i$
- Значит, $f^*(y) = 0$.

Домашнее задание 8

1. Найти $f^*(y)$, если $f(x) = -\dfrac{1}{x}, \;\; x \in \mathbb{R}_{++}$
2. Найти $f^*(y)$, если $f(x) = -0,5 - \log x, \;\; x > 0$
3. Найти $f^*(y)$, если $f(x) = \log\left(\sum\limits_{i=1}^n e^{x_i}\right)$
4. Найти $f^*(y)$, если $f(x) = -(a^2 - x^2)^{1/2}, \quad |x| \leq a, \quad a > 0$