Методы Оптимизации. Даниил Меркулов. Условия Оптимальности

Extreme value (Weierstrass) theorem

Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ - компактное множество и пусть $f(x)$ непрерывная функция на S. Тогда точка глобального минимума функции $f(x)$ на S существует.

Optimality Conditions

Общая задача оптимизации

$$f(x) \to \min_{x \in S}$$

Будем говорить, что задача имеет решение, если множество таких $x^* \in S$, что в них достигается минимум или инфимум данной задачи **не пусто**

Критерий оптимальности

Пусть $f(x)$ определена на множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда

- если x^* точка минимума $f(x)$ на S, то $\partial_S f(x^*) \neq \emptyset$ и $0 \in \partial_S f(x^*)$
- если для некоторой точки $x^* \in S$ существует субдифференциал $\partial_S f(x^*)$ и $0 \in \partial_S f(x^*)$, то x^* - точка минимума $f(x)$ на S.

Problemes в том, что подсчет субдифференциала может быть еще сложнее, чем подсчкт градмента. А часто у функций субдифференциала вообще нет во многих точках.

Критерий оптимальности выпуклой задачи

Пусть $f(x)$ выпуклая функция на $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда точка x^* - решение задачи безусловной минимизации $\Leftrightarrow$ найдется такой вектор

$$a \in \partial_S f(x^*) \qquad \langle a, x - x^* \rangle \geq 0, \;\; \forall x \in S$$

Задача БМ

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Достаточное условие

Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на $\mathbb{R}^n$ и x^* такая что $\nabla f(x^*) = 0$. Тогда если

$$\nabla^2 f(x^*) \succ 0,$$

то x^* точка строгого локального минимума $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$.

Критерий оптимальности выпуклой задачи

- Пусть $f(x)$ выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда точка x^* - решение задачи безусловной минимизации $\Leftrightarrow$

$$0 \in \partial f(x^*).$$

- Пусть $f(x)$ выпуклая дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда точка x^* - решение задачи безусловной минимизации $\Leftrightarrow$

$$0 = \nabla f(x^*).$$

Задачи с ограничениями типа равенств

Общая формулировка

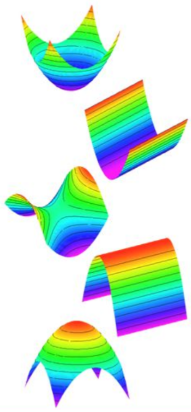
$$\begin{gathered} f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, m \end{gathered}$$

Решение: функция Лагранжа

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

Пусть $f(x)$ и $g_i(x)$ дважды дифференцируемы в точке x^* и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности x^*. Пусть также $\nabla_x L(x^*, \lambda) = 0$. Тогда если $h^T \nabla^2 L(x^*, \lambda) h > 0$, где $h \in T(x^* | S)$ - касательный конус, то x^* - точка локального минимума.

$\mathbf{y}^T\mathbf{H}\mathbf{y}$ λ_i	**Definiteness** $\mathbf{H}$	**Nature** $\mathbf{x}^*$
>0	Positive d.	Minimum
≥ 0	Positive semi-d.	Valley
$\neq 0$	Indefinite	Saddlepoint
≤ 0	Negative semi-d.	Ridge
<0	Negative d.	Maximum



Задачи с ограничениями типа неравенств

Общая формулировка

$$
\begin{split}
& f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & g_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, m \\
& h_j(x) \leq 0, \ j = 1, \ldots, p
\end{split}
$$

Данная формулировка представляет собой общую задачу математического программирования.

Решение: регулярная функция Лагранжа

$$
L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)
$$

Условия (необходимые) Каруша Куна Таккера:

Пусть x^* решение задачи математического программирования, и функции f, h_j, g_i дифференцирумы. Тогда найдутся такие μ^* и λ^*, что выполнены следующие условия:

- $g_i(x^*) = 0$
- $h_j(x^*) \leq 0$
- $\mu_j^* \geq 0$
- $\mu_j^* h_j(x^*) = 0$
- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$

В выпуклом случае эти условия являются достаточными!

Достаточные условия первого порядка

Если для стационарной точки (x^*, λ^*, μ^*) число активных неравенств $|J|$ такое что $n = m + |J|$ и $\mu_j > 0, \ j \in J$, то эта точка является точкой минимума.

Достаточные условия второго порядка

Если в задаче математического программирования число активных ограничений меньше размерности задачи, то точка x^* яляется решением задачи, если выполнены условия

$$z^T \nabla^2_{xx} L(x^*) z > 0$$

для

- $z \neq 0$ и $\nabla g_i^T(x^*) z = 0$
- при $j \in J$ и $\mu_j > 0$, $\nabla h_j^T(x^*) z = 0$
- при $j \in J$ и $\mu_j = 0$, $\nabla h_j^T(x^*) z \leq 0$

Примеры

Пример 1

$$\text{Найти } \min (x+2)^2 + |y+3| \text{ при условии } 8 + 2x - y \leqslant 0, \ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2.$$

Пример 2 (безусловная минимизация)

- $x_1 e^{x_1} - (1 + e^{x_2}) \cos x_2 \to \min$
- Функция Розенброка:
  $(1 - x_1)^2 + \alpha \sum\limits_{i=2}^{n} (x_i - x_{i-1})^2 \to \min, \ \alpha > 0$
- $x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 + e^{x_1 + x_2} \to \min$

Пример 3 (ограничения типа равенств)

- $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^4 \to \mathrm{extr}_{\mathbf{x} \in G}, \; G = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}^\top \mathbf{x} = 1\},$
  $\alpha_i > 0, \; c_i > 0$
- $x_1 + 4x_2 + 9x_3 \to \mathrm{extr}_{\mathbf{x} \in G}, \; G = \left\{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1\right\}$

Пример 4 (ограничения типа неравенств)

- Пример 1

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{extr}(x_1 - 3)(x_2 - 2) \\
\text{s.t. } & x_1 + 2x_2 = 4 \\
& x_1^2 + x_2^2 \le 5 \\
& x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

- Пример 2

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{extr} \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x_i} \\
\text{s.t. } & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \\
& x_i > 0, \; b > 0, \; c_i > 0, \; a_i > 0
\end{aligned}
$$

- Пример 3

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{extr}(x_1 x_3 - 2x_2) \\
\text{s.t. } & 2x_1 - x_2 - 3x_3 \le 10 \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\
& x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Take home message

- Любой локальный минимум выпуклой задачи - глобальный
- В сильно выпуклой задаче локальный минимум единственный
- Условия Каруша Куна Таккера - прекрасный способ решать задачи математического программирования. В выпуклом случае он еще и дает гарантии.