Домашняя работа №10 [illegible]

№ 19.5

$$y'' + y' = \frac{1}{\sin x}$$

$$k^2 + 1 = 0$$

$$k^2 = -1, \quad k_{1,2} = \pm i$$

$$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$$

$$u = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}$$

$$W[\cos x, \sin x] = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix} = \operatorname{ctg} x$$

Сосонов

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{W} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$C_1(x) = -\int dx = -x$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{W} = \frac{ctg\,x}{1} = ctg\,x$$

$$\cancel{C_2(x) = \int tg\,x\,dx = -\ln|\cos x|}$$

$$\cancel{u = -x\cdot\cos x - \ln|\cos x|\sin x}$$

$$C_2(x) = \int ctg\,x\,dx = \ln|\sin x|$$

$$u = -x\cos x + \ln|\sin x|\sin x$$

Ответ:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \ln|\sin x|\sin x$$

№20.3 Силанов

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 3y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 8y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - kE) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ 8 & 1-k \end{vmatrix} = (3-k)(1-k) - 8 = 0$$

$$3 - 3k - k + k^2 - 8 = 0$$

$$k^2 - 4k - 5 = 0$$

$$D = 16 + 20 = 36$$

$$k_1 = \frac{4-6}{2} = -1$$

$$k_2 = \frac{4+6}{2} = 5$$

$\{e^{-x}; e^{5x}\}$ – фундаментальная система решений

Найти собственных векторов по формуле $(A - k_i E)x^{(i)} = 0$:

При $k = -1$:

$(3+1)C_1 + C_2 = 0$

$4C_1 + C_2 = 0$, $C_2 = -4C_1$

собственный вектор $\begin{pmatrix} C_1 \\ -4C_1 \end{pmatrix}$

При $k = 5$:

$(3-5)C_1 + C_2 = 0$

$-2C_1 + C_2 = 0$

$C_1 = \frac{1}{2}C_2$

Собственный вектор $\begin{pmatrix} C_2 \\ \frac{1}{2}C_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -4C_1 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} C_2 \\ \frac{1}{2} C_2 \end{pmatrix} e^{5x} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} \\ -4C_1 e^{-x} + \frac{1}{2} C_2 e^{5x} \end{pmatrix}$$

Ответ:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} C_1 e^{-x} + C_2 e^{5x} \\ -4C_1 e^{-x} + \frac{1}{2} C_2 e^{5x} \end{pmatrix}$$

[illegible]

№ 20.4

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -y_1 + 8y_2 \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - kE) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-k & 8 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = (-1-k)(1-k) - 8 = 0$$

$$-1 + k - k + k^2 - 8 = 0$$

$$k^2 = 9, \quad k_2 = -3, \quad k_1 = 3$$

$\{ e^{3x} ; e^{-3x} \}$ - фундаментальная система решений

Солнцева

Поиск собственных векторов по формуле $(A - k_i E) x^{(i)} = 0$:

При $k = 3$:

$(-1-3) C_1 + 8C_2 = 0$

$C_2 = \frac{1}{2} C_1$, собственный вектор $\begin{pmatrix} C_1 \\ \frac{1}{2} C_1 \end{pmatrix}$

При $k = -3$:

$(-1+3) C_1 + 8C_2 = 0$

$C_1 = -4C_2$, собственный вектор $\begin{pmatrix} C_2 \\ -4C_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \frac{1}{2} C_1 \end{pmatrix} e^{3x} + \begin{pmatrix} C_2 \\ -4C_2 \end{pmatrix} e^{-3x} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} \\ \frac{1}{2} C_1 e^{3x} + (-4) C_2 e^{-3x} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\vec{y} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} \\ \frac{1}{2} C_1 e^{3x} - 4C_2 e^{-3x} \end{pmatrix}$