Лекции

Лекция № 14 [illegible]

Функциональные ряды

* Функциональным рядом называется такой ряд

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x)}$$

каждое слагаемое которого является функцией x.

* Функциональный ряд называется сходящимся в области опр. D, если сущ. конечный предел n-частичной суммы его, т.е.

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x), \quad x \in D}$$

D - область сходимости.

* Функциональный ряд называется равномерно сходящимся в области D, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое N, что вып-ся

$$\boxed{|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad n > N}$$

Соловов

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса

* Функцион. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно при $x \in D$, если ему можно сопоставить сходящийся знакополож-ный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_n$, такой, что вып-ся $u_n(x) \le V_n$

Задача: Применить признак сходимости Даламбера для функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}(x)|}{|u_k(x)|} < 1$$

При всех x, когда предел < 1, функцио-ный ряд сходится абсолютно, а само множество x является его областью сходимости.

Соколов

Область сходимости степенного ряда

* Если $u_n(x) = a_n x^n$, то ряд наз-ся степенным

Задача. Найти обл. сходимости степ-го ряда

$$u_n(x) = a_n x^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

отсюда следует

$$\boxed{|x| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R}$$ – радиус сходимости по Даламберу

• Обл. абсолютной сходимости степенного ряда является интервал $(-R; R)$

Соколов

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

1) $$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1} = 1$$

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n = 1 \pm 1 \pm 1 + \ldots$$ – расходится

Ряд геометри-ой прогрессии абсолютно сходится при $x \in (-1; 1)$, и расходится при $|x| \geq 1$.

Задача. Получить R (радиус сходи-и) степенного ряда, исп. признак сходимости Коши.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} < 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1 \Rightarrow$$

Сильное

$$\Rightarrow |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$

Откуда следует

$$\boxed{|x| < \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} = R}$$

– радиус сходимости по Коши

Разложение функций в степенные ряды

* Пусть функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема в точке x_0, тогда в окрестности этой точки функция раскладывается в степенной ряд

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

– ряд Тейлора

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}$$

– ряд Маклорена

Соколов

Пример. Разложить e^x в ряд Маклорена и исследов-ть его на сходимость.

1) $f^{(n)}(0) = (e^x)^{(n)}\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1 \Rightarrow e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

2) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$

Ответ: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, при О: $(-\infty; \infty)$

Пример. Разложить $\sin x$ в ряд Маклорена и исследовать его на сходимость

$f^{(n)}(0) = (\sin x)^{(n)}\Big|_{x=0} = \sin x\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim (n+1) = \infty$

Соланов

Ответ: $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$,

при D: $(-\infty; \infty)$

Интегрирование и дифференцирование степенных рядов

Задача.

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_n(x) = S(x) \text{ при } x \in [a, b] \quad (1)$$

равномерно сходится. Показать, что в этом случае ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_n(x) = V(x) \text{ при } x \in [a, b] \quad (2)$$

будет сходится, если

$$v_n(x) = \int_a^x u_n(t)\,dt, \text{ причём } V(x) = \int_a^x S(t)\,dt$$

Согласно

Поскольку ряд (1) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x) \Rightarrow \left| S_n(x) - S(x) \right| < \frac{\epsilon}{b-a},$$

при этом, если опр. равн. сход., ϵ не зависит от x при $n > N$. Покажем, что

$$\left| V_n(x) - V(x) \right| < \epsilon \text{ при } n > N,\ x \in [a, b]$$

$$V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} V_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x u_n(t)\,dt = \int_a^x \sum_{k=1}^{n} u_n(t)\,dt =$$

$$= \int_a^x S_n(t)\,dt$$

$$\left| \int_a^x S_n(t)\,dt - \int_a^x S(t)\,dt \right| = \left| \int_a^x \left(S_n(t) - S(t) \right) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_a^x \left| S_n(t) - S(t) \right| dt < \int_a^x \frac{\epsilon}{b-a}\,dt = \frac{\epsilon}{b-a}(x-a) \leq \epsilon$$

Соколов

Пример. Вычислить: $0{,}3 + \frac{(0{,}3)^2}{2} + \frac{(0{,}3)^3}{3} + \dots$

1) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

2) Исследуем этот ряд на сходимость

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

3) $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ –

– сходится при $|x| < 1$

$$\int_0^x 1\,dt + \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt + \dots = \int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

$$\Downarrow$$

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = -\ln|1-x|$$

Ответ: $V(0{,}3) = -\ln|1-0{,}3| = -\ln 0{,}7 \approx 0{,}35$

Соловов

Пример. Разложить в степенной ряд $\operatorname{arctg} x$ для $|x|<1$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} x$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \dots$$

Задача. Пусть задан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x), \text{ при } x \in [a, b] \quad (1)$$

и пусть ряд из его производных $w_n(x) =$

$= u'_n(x),$

Следствие

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) = W(x), \text{ при } x \in [a, b] \quad (2)$$

равномерно сходится. Показать, что

$S'(x) = W(x)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x w_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)) =$$

$$= S(x) - S(a) = \int_a^x W(t)\,dt \Rightarrow S'(x) = W(x)$$

Пример. Вычислить: $1 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot (0{,}3)^2 + 4 \cdot (0{,}3)^3 + \dots$

1) $1 + 2 \cdot x + 3 \cdot \cancel{x}^2 + 4 \cdot x^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) x^k \quad (x = 0{,}3)$

2) ряд сходится при $|x| < 1$

3) $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$

$\Downarrow$

$$1 + 2 \cdot x + 3x^2 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ответ: $W(0{,}3) = \frac{1}{(1-0{,}3)^2} = \frac{1}{0{,}49} \approx 2{,}04$

Пример. Выразить интеграл вероятности $\int_0^x e^{-t^2}dt$ в виде степенного ряда.

$$\int_0^x e^{-t^2}dt = \left\{ e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)\,k!}$$

Вычисление иррациональных чисел и опр. интегралов

Задача (о вычислении числа e).

Вычислить e с точностью 0,01.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad R = \infty$$

$$e = e^x\Big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots \approx$$

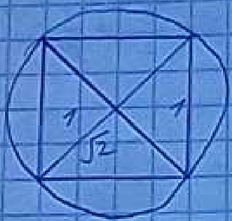
$$\approx 2,7$$

Ответ: ~~2,4~~ $e \approx 2,7$

Соколов

Задача (о вычислении квадратуры круга)

Вычислить $\sqrt{2}$ с точностью 0,01.



$$\left((1+x)^p\right)^{(n)}\Big|_{x=0} = p(p-1)\cdot \ldots (p-n+1),$$

$$(1+x)^p = 1 + \frac{p}{1!}x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}\cdot x^n + \ldots$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{p-n}\right| = 1$$

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\sqrt{1+x}, \quad x = -0{,}02$$

$$\sqrt{2} = \frac{10}{7}\left(1 - \frac{1}{2}0{,}02 - \frac{1}{4}0{,}0004 - \ldots\right) = \frac{10}{7}(1-0{,}01) \approx$$

$$\approx 1{,}41$$

Ответ: $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

Сомов

Задача (о вычислении числа π)

Вычислить π с точностью 0,01

$$\pi = 6\arcsin 0{,}5 = 6\int_0^{0{,}5}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 6\int_0^{0{,}5}\left[1+\frac{t^2}{2}+\frac{3}{8}t^4+\frac{5}{16}t^6+\dots\right]dt = 6\left[t+\frac{1}{6}t^3+\frac{3}{40}t^5+\frac{5}{112}t^7+\dots\right]\Big|_0^{0{,}5} =$$

$$= 3+\frac{1}{8}+\frac{9}{640}+\dots \approx 3{,}14$$

Ответ: $\pi \approx 3{,}14$

Вычисление определённых интегралов.

Задача (о вычислении интеграла вероятнос-ти).

Вычислить $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{3}}\,dx$ с точностью до 0,0-

Сложное

$$\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{3}}\,dx = \left\{ e^{-\frac{x^2}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{3^k k!}, \quad R=\infty \right\} =$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{3^k k!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{3^k k!(2k+1)} \Bigg|_0^1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{3^k k!(2k+1)} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\cdot 2\cdot 5} - \frac{1}{27\cdot 6\cdot 7} + \ldots =$$

$$= 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{90} - \frac{1}{1134} + \ldots \approx 1 - 0{,}11 + 0{,}01 = 0{,}90$$

Задача (о вычислении интегрального синуса)

Вычислить $\int_0^{0{,}2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,001.

$$\int_0^{0{,}2} \frac{\sin x}{x}\,dx = \left\{ \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}, \quad R=\infty \right\} =$$

$$= \int_0^{0{,}2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} \Bigg|_0^{0{,}2} =$$

Согласно

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{0,2^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!} = 0,2 - \frac{(0,2)^3}{3\cdot 3!} + \frac{(0,2)^5}{5\cdot 5!} - \ldots =$$

$$= 0,2 - \frac{4}{9} 10^{-3} + \frac{16}{3} 10^{-4} - \ldots \approx 0,199$$

Ответ: $\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 0,199$

Практическая работа(см. лист ниже)

Склонов

Практическая работа №14.

№338

Дан функциональный ряд

$$\frac{4-x}{7x+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{4x+2}\right)^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n + \ldots$$

Исследовать сходимость ряда в точках $x=0$, и $x=1$

Решение:

В точке $x=0$ получаем ряд

$$2 + \frac{1}{3}\cdot 2^2 + \frac{1}{5}\cdot 2^3 + \ldots + \frac{1}{2n-1}\cdot 2^n + \ldots$$

Здесь $u_n = \frac{2^n}{(2n-1)}$, $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(2n+1)}$

Применим признак Даламбера

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(2n-1)}{2^n(2n+1)} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = 2, \text{ т.е. } D > 1$$

ряд расходится

сходится

В точке $x=1$ получаем ряд:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3^n}+$$

Здесь $u_n=\dfrac{1}{3^n(2n-1)}$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{3^{n+1}(2n+1)}$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n(2n-1)}{3^{n+1}(2n+1)}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\frac{1}{3}<1,$$ ряд сходится

Ответ: ряд сходится

№339

Найти область сходимости ряда

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+x^6}+\ldots+\frac{1}{1+x^{2n}}+\ldots$$

Если $|x|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}=1$,

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд расходится

Если $|x| = 1$, то также получаем расходящийся ряд $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$

Если $|x| > 1$, то члены заданного ряда меньше членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \ldots$, т.е. ряд ~~..~~ сходится

Область сходимости ряда опр. неравенством $|x| > 1$. Отсюда следует, что ряд сходится, если $1 < x < +\infty$ или $-\infty < x < -1$.

№ 364

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$

Применим признак Коши, полагая

$$u_n = \frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}, \quad \sqrt[n]{|u_n|} = \frac{|x-1|^{n+1}}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \begin{cases} 0 \text{ при } |x-1| \leq 1, \\ \infty \text{ при } |x-1| > 1 \end{cases}$$

Ответ: ряд сходится в промежутке $0 \leq x \leq 2$

Сологов

№382

Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = 2^x$.

Решение:

Найдём значения функции и ее производных при $x = 0$:

$$f(x) = 2^x, \qquad f(0) = 1,$$
$$f'(x) = 2^x \ln 2, \qquad f'(0) = \ln 2,$$
$$f''(x) = 2^x \ln^2 2, \qquad f''(0) = \ln^2 2,$$
$$\ldots \qquad \ldots$$
$$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2 \qquad f^{(n)}(0) = \ln^n 2$$

т.к. $0 < \ln 2 < 1$, то при фиксированном x имеет место неравенство $|f^{(n)}(x)| < 2^x$ для любого n. Следов-но функция может быть представлена в виде суммы маклорена:

$$f(x) = f(0) = \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

Сложное

В данном случае

$$2^x = 1 + \ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 2}{3!} + \dots,$$

$$-\infty < x < +\infty$$

Это разложение можно получить и иначе: достаточно в разложении

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

заменить x на $\ln 2$:

$$e^{\ln 2} = 1 + \ln 2 + \frac{\ln^2 2}{2!} + \frac{\ln^3 2}{3!}$$

№ 384

Разложить e^{-x^2} в ряд по степеням x

Решение:

Из разложения $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

$$x \in (-\infty; +\infty)$$

заменим x на $-x^2$, получим

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

$$x \in (-\infty; +\infty)$$

Соколова

№ 429

Вычислить $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ с точностью до 0,0001

Решение

Заменив в подынтегральном выражении $\cos x$ его разложением в степенной ряд, получим:

$$\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\ldots}{x^2}\,dx =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx = \left[\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ldots\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2!\cdot 2}-\frac{1}{4!\cdot 3\cdot 2^3}+\frac{1}{6!\cdot 5\cdot 2^5}-\ldots \approx 0{,}25-0{,}0017 =$$

$= 0{,}2483$

Ответ: 0,2483

[illegible]

№ 430

Вычислить $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ с точностью до 0,001.

Решение:

$$\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \int\limits_0^{0,1} \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots}{x}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{0,1} \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \ldots\right)dx = \left[x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}x^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{16}x^4 + \ldots\right]_0^{0,1} = 0,1 - \frac{1}{4}\cdot 0,01 + \frac{1}{9}\cdot 0,001 - \ldots \approx 0,098$$

Домашняя работа

Домашняя работа № 14

Исследовать сходимость степенных рядов.

№ 370

$$\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{2^3}+\dots+\frac{(x-1)^n}{2^n}$$

Решение:

Применим признак Коши

$$u_n=\frac{(x-1)^n}{2^n},\quad \sqrt[n]{|u_n|}=\frac{|x-1|}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=l,\ \text{то}\ \begin{cases}\text{при } l<1, \text{ ряд сходится}\\ \text{при } l>1, \text{ ряд расходящийся}\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|}{2}=l$$

Чтобы ряд сходился необходимо выполнение условия $\frac{|x-1|}{2}<1$.

$\frac{|x-1|}{2}<1$, при $x\in(1,3)$

Ответ: $1<x<3$

Солома

№ 371

$$x + (2x)^2 + (3x)^3 + \ldots + (nx)^n + \ldots$$

Решение:

Применим признак Коши.

$u_n = (nx)^n$, $\sqrt[n]{|u_n|} = nx$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = l, \quad \begin{cases} \text{при } l < 1, \text{ ряд сходится} \\ \text{при } l > 1, \text{ ряд расходится} \end{cases}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} |nx| = \infty$ - ряд расходится

Ответ: ряд расходится

Соколов

№ 372

$$5x + \frac{5^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{5^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{5^n x^n}{n!} +$$

Решение:

Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{5^n x^n}{n!}, \quad u_{n+1} = \frac{5^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1} x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 5^n x^n} = \frac{5x}{(n+1)}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{5x}{n+1} = 0$$ – ряд сходится

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{5x}{n} \to 0}{1 + \frac{1}{n} \to 0} = 0$$

Ответ: ряд сходится при любых x

Сизова

№ 375

$$\frac{x}{2+3} + \frac{x^2}{2^2+3^2} + \frac{x^3}{2^3+3^3} + \dots + \frac{x^n}{2^n+3^n} + \dots$$

Решение:

Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{x^n}{2^n+3^n}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}+3^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x\cdot x^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} \cdot \frac{2^n+3^n}{x^n} = \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}} \cdot x = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\left(2^n\cdot 3^{-n-1}+\frac{1}{3}\right)}{3^{n+1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-n-1}+1\right)} x =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot 3^{\overset{\to 0}{-n-1}}+\frac{1}{3}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\overset{\to 0}{-n-1}}+1} x = \frac{1}{3}x < 1$$

$$\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \Rightarrow x \in (-3; 3)$$

Ответ: $-3 < x < 3$

№391. Сазонов

Разложить в ряд по степеням x функцию

$$f(x) = e^{-2x}$$

Решение:

В разложении $e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

заменим x на $-2x$:

$$e^{-2x} = 1 - \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \ldots$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

Ответ:

$$e^{-2x} = 1 - \frac{2x}{1} + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \ldots$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

Фамилия

№ 393

Разложить в ряды по степеням x функцию $f(x) = sh^2 x$

Решение.

Найдём значения функции и её производные при $x = 0$.

$f(x) = sh^2(x) = \sinh^2(x)$ $f(0) = 0$

$f'(x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = 2\sinh(x)^2 + 2\cosh(x)^2$ $f''(0) = 2$

$f'''(x) = 8\sinh(x)\cosh(x),$ $f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = 8\sinh(x)^2 + 8\cosh(x)^2$ $f^{IV}(0) = 8$

$f^{V}(x) = 32\sinh(x)\cosh(x)$ $f^{V}(0) = 0$

$$Ch^2(x) = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{8}{4!}x^4 + \frac{0}{5!}x^5$$

Ответ: $\frac{2}{2!}x^2 + \frac{8}{4!}x^4 + \frac{32}{6!}x^6 + \dots$

№ 436 Соколов

Вычислить $\int_0^{0,5} x \ln(1+x^2)\,dx$ с точностью до 0,001.

Решение.

Разложим $\ln(1+x^2)$ в степенной ряд:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 + \ldots$$

Вычислим интеграл.

$$\int_0^{0,5} x\cdot\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{4}x^8 + \ldots\right)dx =$$

$$= \int_0^{0,5} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{3}x^7 - \frac{1}{4}x^9 + \ldots\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^6}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^8}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^{10}}{10} + \ldots\right]\Bigg|_0^{0,5} \approx$$

$$\approx 0,015 - 0,001 + 0,00016 - \ldots \approx 0,015$$

Ответ: 0,015