№ 18. б [illegible]

$y'' - y = e^x \cdot x \cdot \sin x$

$k^2 - 1 = 0$

$k = \pm 1$

$\alpha = 1$ - корень характеристического уравнения

Вид для u:

$$u = x^r e^{\alpha x} P_n(x)$$

$$u = x^r e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x]$$

$l = 1$

$P_l(x)$, $Q_l(x)$ - многочлены 1-го порядка

$\alpha = 1$, $\beta = 1$

Ответ:

$$u = x e^x [(Ax+B) \cos x + (Cx+D) \sin x]$$

№ 18.7 Соколов

$y'' + 2y' + y = x^2 \cdot e^{-x} \cdot \cos x$

$k^2 + 2k + 1 = 0$

$D = 4 - 4 = 0, \quad k_{1,2} = -1$ - корень 2-й кр-и.

$\alpha = -1$ - корень характеристического уравнения

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} \cdot \cos x$$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$$

$P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлены 2-го порядка (x^2)

$\alpha = -1, \quad \beta = 1$

$$u = x^r e^{\alpha x}\left[P_l(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$$

$r = 2$

Ответ:

$$u = x^2 e^{-x}\left[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + (Dx^2 + Ex + F)\sin x\right]$$

№ 18.8 Соколов

$y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

$k^2 - 2k - 3 = 0$

$y_{о.р.} = y_0 + \bar{y}$

$D = 4 + 12 = 16$

$k_1 = \frac{6}{2} = 3$

$k_2 = \frac{-2}{2} = -1$

$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

$f(x) = e^{4x}$, $\alpha = 4$ - не корень хар-го уравнения

$u = e^{\alpha x} P_n(x)$, $P_n(x) = 1$ - многочлен порядка 0

$u = A e^{4x}$

$u'' = 4Ae^{4x} + 16Ax^2e^{4x}$

$u' = 4Axe^{4x}$,

$\times$

$$(16Ax^2e^{4x} + 4Ae^{4x}) - 2(4Axe^{4x}) - 3\cdot Ae^{4x} = e^{4x}$$

$$16Ax^2 + 4A - 8Ax - 3A - 1 = 0$$

$$16Ax^2 - 8Ax + A - 1 = 0 \quad (*)$$

$$D = 64A^2\cancel{6} - 64A^2 + 64A = 64A$$

Чтобы уравнение (*) имело решения, необходимо выполнение неравенства

$$A \geqslant 0$$

Следовательно,

$$u = Ae^{4x}, \quad A \geqslant 0$$

Ответ:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + Ae^{4x}, \quad A \geqslant 0$$

18.9

$y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + \sin x$

$k^2 - 3k = 0$

$k(k-3) = 0, \quad k_1 = 0$

$k_2 = 3$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$

1) $f_1(x) = 1, \quad u_1 = Ax, \quad \alpha = 0$ - корень

2) $f_2(x) = e^x, \quad u_2 = Be^x, \quad \alpha = 1$ - не корень

3) $f_3(x) = \cos x + \sin x,$

$u = C\cos x + D\sin x, \quad \pm i$ - не корень

$u = Ax + Be^x + C\cos x + D\sin x$

Ответ:

$u = Ax + Be^x + C\cos x + D\sin x$

№ 18.10

$$y'' + 6y' + 10y = 80e^x \cos x$$

$$k^2 + 6k + 10 = 0$$

$$D = 36 - 40 = -4$$

$$k_1 = \frac{-6-2i}{2} = -3 - i \qquad y_{o.n} = y_0 + \bar{y}$$

$$k_2 = \frac{-6+2i}{2} = -3 + i$$

$$y_0 = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$\alpha = 1$ - не корень

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$$

$$u = e^x [A \cos \beta x + B \sin \beta x] \quad \beta = 1$$

$$u = e^x [A \cos x + B \sin x]$$

$$u = e^x (A \cos x + B \sin x)$$

$$u' = e^x (A \cos x + B \sin x) + e^x(-A \sin x + B \cos x)$$

$$u''' = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x)$$

$$+ e^x(-A\sin x + B\cos x) + e^x(-A\cos x - B\sin x) =$$

$$= e^x(-2A\sin x + 2B\cos x)$$

$$y'' + 6y' + 10y = 80e^x\cos x$$

$$e^x(-2A\sin x + 2B\cos x) + 6(e^x(A\cos x + B\sin x) +$$

$$+ e^x(-A\sin x + B\cos x)) + 10e^x(A\cos x + B\sin x) =$$

$$80e^x\cos x$$

$$e^x(-2A\sin x + 2B\cos x) + 6e^x(A(\cos x - \sin x) +$$

$$+ B(\cos x + \sin x)) + 10e^x(A\cos x + B\sin x) =$$

$$= 80e^x\cos x$$

$$e^x\cos x: \quad 2B + 6A + 6B + 10A = 80$$

$$e^x\sin x: \quad -2A - 6A + 6B + 10B = 0$$

$$\begin{cases} 10B + 16A = 80 & /:2 \\ 16B - 8A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5B + 8A = 40 \\ 16B - 8A = 0 \end{cases}$$

$$16B + 5B + 8A - 8A = 40 + 0$$

$$21B = 40, \quad B = \frac{40}{21}$$

$$5 \cdot \frac{40}{21} + 8A = 40$$

$$8A = 40 - \frac{200}{21} = \frac{840 - 200}{21} = \frac{640}{21}$$

$$A = \frac{80}{21}$$

$$A = \frac{80}{21}, \quad B = \frac{40}{21}$$

Ответ:

$$y = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{40}{21} e^{x}(2\cos x + \sin x)$$

Сошнов

№12.3

$$y'' + y' = \frac{1}{1+e^{x}}$$

$$k^2 + k = 0$$

$$k(k+1) = 0, \quad k_1 = 0$$

$$k_2 = -1$$

$$y_0 = C_1 + Ce^{-x}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = e^{0} = 1 \\ y_2 = e^{-x} \end{array}\right\} \text{независимые решения}$$

$$u = C_1(x) + C_2 e^{-x} = C_1(x) + C_2(x) e^{-x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) \cdot 0 - C_2'(x) e^{-x} = \dfrac{1}{1+e^{x}} \end{cases}$$

Солнце

$$C_2'(x)\, e^{-x} = -\frac{1}{1+e^x}$$

$$C_2'(x) = -\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$C_2(x) = -\int \frac{e^x+1-1}{1+e^x}\,dx =$$

$$= -\left(x - \int \frac{1}{1+e^x}\,dx\right) = -(x - \ln|1+e^x|)$$

$$C_2(x) = \ln|1+e^x| - x$$

Подставим $C_2'(x)$ в первое уравнение системы

$$C_1'(x) + \left(-\frac{e^x}{1+e^x}\right)\cdot e^{-x} = 0$$

$$C_1'(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

$$C_1(x) = \int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \ln|1+e^x|$$

№ 19.3

Ответ:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} - x + \ln|1+e^x| + \ln|1+e^x| e^{-x}$$