Соколов

№ 43

$$\begin{cases} y^2 = 4x - x^2, & y = \sqrt{4x - x^2} \\ y^2 = 2x, & y = \sqrt{2x} \end{cases}$$

$$y^2 - y^2 = 4x - x^2 - 2x$$

$$x(2 - x) = 0 \qquad x = 0,\ y = 0$$

$$x = 2,\ y = 2$$

$$S = \iint\limits_{D} dx\,dy = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{4x - x^2}} dy =$$

$$= \int_0^2 y \Big|_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{4x - x^2}} dx = \int_0^2 \left(\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x}\right) dx$$

Вычислим интегралы:

$$\int \sqrt{2x}\,dx = \frac{2\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$\int \sqrt{4x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x-2 \\ du = dx \end{array} \right\} =$$

$$= \int \sqrt{4-u^2}\,du = \left\{ \begin{array}{l} u = 2\sin(v), \quad v = \arcsin\frac{u}{2} \\ du = 2\cos(v)\,dv \end{array} \right\} =$$

$$= \int 2\cos v \cdot \sqrt{4 - 4\sin^2(v)}\,dv =$$

$$= \int 2\cos(v) \cdot 2\sqrt{1-\sin^2(v)}\,dv =$$

$$= 4\int \cos^2(v)\,dv.$$

Понижаем степень, согласно формуле

$$\int \cos^n(v)\,dv = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(v)\,dv +$$

$$+ \frac{\cos^{n-1}(v)\sin(v)}{n}$$

При $n = 2$:

$$4\int \cos^2(v)\,dv = 4\left(\frac{\cos(v)\sin(v)}{2} + \frac{1}{2}\int dv\right) =$$

$$= 2\cos(v)\sin(v) + 2v + C$$

[illegible]

Сокола

4) $\int \cos^2(v)\,dv = 2\cos(v)\sin(v) + 2v =$

$= \left\{ \begin{array}{l} v = \arcsin\left(\frac{u}{2}\right) \\ \cos v = \sqrt{1 - \frac{u^2}{4}} \end{array} \right\} = 2\cos\left(\arcsin\frac{u}{2}\right)$

$\cdot \sin\left(\arcsin\frac{u}{2}\right) + 2\arcsin\left(\frac{u}{2}\right) = u\sqrt{1 - \frac{u^2}{4}} +$

$+ 2\arcsin\frac{u}{2} = \{ u = (x+2) \} = (x-2)\sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{4}} +$

$+ 2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)$

Подставим вычисленные интегралы в выражение:

$$S = \int_0^2 \left(\sqrt{4x - x^2} - \sqrt{2x}\right) dx =$$

$$= \left[(x-2)\sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{4}} + 2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{2\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]\Bigg|_0^2$$

Решение

$$S = \left[(x-2)\sqrt{1-\frac{(x-2)^2}{4}} + 2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right) - \frac{2\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]\Bigg|_0^2 =$$

$$= 0\cdot\sqrt{1-0} + 2\arcsin(0) - \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}{3} -$$

$$- (-2)\cdot\sqrt{1-1} - 2\arcsin(-1) + 0 =$$

$$= -\frac{8}{3} + \pi = \pi - \frac{8}{3}$$

Согласно условию задачи необходимо вычислить площадь <u>вне параболы</u>, для этого вычисленную площадь умножим на 2.

$$S\cdot 2 = 2\pi - \frac{16}{3}$$

Ответ: $2\pi - \frac{16}{3}$