ЛЕКЦИЯ

Лекция № 13 Солонов

Числовые знакопеременные ряды. Сходимость абсолютная и условная

Признак Даламбера.

Задача. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k$ и пусть

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_k+1}{u_k} = l$. Показать, что если $l < 1$,

то ряд сходится, а если $l > 1$, то ряд расходится.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k+1}{u_n} = l \iff l-\epsilon < \frac{u_k+1}{u_k} < l+\epsilon,$$

при $k > N$

$$(l-\epsilon)\,u_k < u_k+1 < (l+\epsilon)\,u_k$$

ϵ - произвольная постоянная.

при $l<1$, $l+\epsilon<1$,

при $l>1$, $l-\epsilon>1$

Сопоставим заданному ряду ряды геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=N}^{\infty} u_k = u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} v_k = u_N + u_N(l+\epsilon) + u_N(l+\epsilon)^2 + \dots$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} v'_k = u_N + u_N(l-\epsilon) + u_N(l-\epsilon)^2 + \dots$$

$$\boxed{v'_k \le u_k \le v_k}$$

1) Пусть $l<1$ и $l+\epsilon<1$, тогда ряд $\sum\limits_{k=N}^{\infty} v_k$ сходится, а значит, согласно второму нерав-ву и признаку сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_k$ сходится.

Соломон

• При $\alpha = 1$ ряд Дирихле становится гармоническим.

Задача. Исследовать на сходимость ряд Дирихле.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \text{ и } \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$$

Этот ряд и интеграл сходятся или расходятся одновременно.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \; - \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1 \\ \text{расходится при } \alpha < 1 \end{cases}$$

Пример. Подсчитать N-частичную сумму расходящегося гармонического ряда, если число слагаемых в нём равно ~~числу одному чис~~ числу атомов во вселенной.

Соломоb

② Пусть $l > 1$ и $1 - \varepsilon > 1$, тогда ряд

$\sum_{k=N}^{\infty} v_k'$ расходящийся, а значит, согласно

первому неравенству и признаку сравнений ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то $\begin{cases} \text{при } l<1 \text{ - ряд сходится} \\ \text{при } l>1 \text{ - ряд расходится} \end{cases}$

Пример. Исследовать на сходимость

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = 0 = l < 1 \text{ - ряд сходится}$$

Соколов

Признак Коши.

Задача. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_k$ и пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = l$. Доказать, что если $l < 1$, то ряд сходится, а если $l > 1$, то ряд расходится.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = l \iff l - \epsilon < \sqrt[k]{u_k} < l + \epsilon$$

при $k > N$

$$\underbrace{(l-\epsilon)^k < u_k}_{1} \underbrace{< (l+\epsilon)^k}_{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (l-\epsilon)^k < \sum_{n=1}^{\infty} u_k < \sum_{n=1}^{\infty} (l-\epsilon)^k$$

если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = l$, то $\begin{cases} \text{при } l<1 \text{ — ряд сходится} \\ \text{при } l>1 \text{ — ряд расходится} \end{cases}$

Сегодня

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)^n}} = 0 < 1$$ – ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость и вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

1) Исп. признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1 = l$$

Если $l = 1$, то признак Коши и Даламбера не позволяют судить о сходимости ряда.

Согласно

(2) Пусть несобств. интеграл сходится, тогда из признака сравнения согласно нер-ву 1, ряд сходится.

(3) Пусть левый ряд ~~сходится~~ расходится, тогда из признака сравнения, согласно нер-ву 1, несобственный интеграл расходится.

(4) Пусть несобственный интеграл расходится, тогда из признака сравнения, согласно неравенству 2, ряд расходится.

Ряд Дирихле

* Рядом Дирихле называется знакоположительный ряд

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \ldots + \frac{1}{k^{\alpha}}}$$

Соломол

• При $\alpha = 1$ ряд Дирихле становится гармоническим.

Задача. Исследовать на сходимость ряд Дирихле.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{и} \quad \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$$

этот ряд и интеграл сходятся или расходятся одновременно.

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx \; - \begin{cases} \text{сходится при } \alpha > 1 \\ \text{расходится при } \alpha < 1 \end{cases}$$

Пример. Подсчитать N-частичную сумму ~~расходящуюся~~ расходящегося гармонического ряда, если число слагаемых в нём равна ~~числу одному атомо~~ числу атомов во вселенной.

Соловов

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \simeq \int_{1}^{N} \frac{dn}{n} = \ln N = \ln 10^{84} \simeq 194$$

$$N \sim 10^{84}$$

Знакопеременные ряды.

* Числовой ряд назыв-ся знакопеременным, если он содержит как положительные, так и отрицательные слагаемые.

* $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \quad u_n > 0}$ - знакочередующийся ряд.

Признак Лейбница.

Задача. Пусть знакоперем. ряд удовлетворяет следующим условиям:

- ряд знакочередующийся
- ряд не возрастающий $u_{k+1} \le u_k$
- выполняется $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Доказать, что в этом случае ряд сходится, причём его сумма не превышает первое слагаемое

Если число слагаемых чётно, то

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - \dots - u_{2n-2} + u_{2n-1} - u_{2n} =$$

$$= u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} <$$

$$< u_1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_{2n} < u_1$$

Если число слагаемых нечётно:

$$\lim_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \to \infty} S_{2n} + \underbrace{\lim_{n \to \infty} u_{2n+1}}_{=0} = S < u_1$$

Условия решённой задачи составляют признак Лейбница.

Сложное

Абсолютная и условная сходимость

* Знакочередующийся ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей его слагаемых.

* Знакочередующийся ряд называется условно сходящимся, если он сходится по признаку Лейбница, но ряд из модулей его слагаемых расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln 2} = \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x\ln x} = \ln\ln x \Big|_{2}^{\infty} = \infty$$

Ответ: данный ряд сходится условно.

Сложная

Задача. Показать на примере знакочередующегося гармони-го ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$, что сумма условно сходящегося ряда зависит от порядка суммирования слагаемых этого ряда.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+$$

$$\ldots = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\ldots=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}=$$

$$=\frac{1}{2}S$$

От перестановки слагаемых сумма условно сход-гося ряда меняется, а сумма абсол-го сход-ся ряда не меняется

ПРАКТИКА(СЛЕДУЮЩАЯ СТРАНИЦА)

сосна

Практическая работа № 13

№ 283

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Применим признак Коши.

$$u_n = \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{2}e$$

т.к. $C > 1$, то ряд расходится

№ 284.

Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \dots + \frac{2^n}{n^{10}} + \dots$$

Применим признак Даламбера:

$$u_n = \frac{2^n}{n^{10}}, \quad u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{10}}{(n+1)^{10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}} = 2$$

$D > 1$, то ряд расходится

№ 285 Соловов

Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{n}{3^{n/2}} + \dots$$

$$u_n = \frac{n}{3^{n/2}}, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{3^{(n+1)/2}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)}{n\sqrt{3}}$$

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n\sqrt{3}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$D < 1$, следовательно, ряд сходится.

№ 286

Исследовать сходимость ряда.

$$\frac{10}{1!} + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \dots + \frac{10^n}{n!} + \dots$$

Соколов

$u_n = \frac{10^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10}{(n+1)}$$

$D = \lim_{n \to \infty} \frac{10}{(n+1)} = 0$; $D < 1$ - ряд сходится

№ 287

Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

имеем $u_n = \frac{1}{n^2}$, $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(1+n)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$$

$D = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$. Т.к. $D = 1$, то с помощью признака Даламбера не удается судить о сходимости.

Сазонов

Применим интегральный признак.

$u_n = 1/n^2$, $f(x) = 1/x^2$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1.$$

Интеграл сходится, поэтому сходится и данный ряд.

№ 289

Исследовать сходимость ряда.

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + \ldots + (-1)^n \frac{n}{n^2+1} + \ldots$$

Признак Лейбница:

$$\frac{2}{2^2+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \quad \frac{3}{3^2+1} = \frac{1}{3+\frac{1}{3}},$$

$$\frac{4}{4^2+1} = \frac{4}{4+\frac{1}{4}}, \ldots$$

$$\frac{1}{2} > \frac{2}{2^2+1} > \frac{3}{3^2+1} > \frac{4}{4^2+1} > \ldots$$

[illegible]

Следовательно, выполнено первое условие признака Лейбница. Далее, т.к.

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n + \frac{1}{n}} = 0$$

то выполнено и второе условие. Значит, данный ряд сходится

Домашняя работа

Домашняя работа № 13

№ 305

Пользуясь признаком Коши, исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$

$$u_n=\left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n,\quad \sqrt[n]{u_n}=\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}$$

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{5+\overset{\to 0}{\frac{2}{n}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}=$$

$$=\frac{2}{5}<1$$ – ряд сходится

Ответ: ряд сходится

Соломе

№ 307

Пользуясь признаком Даламбера, исследовать сходимость ряда

$$\frac{10}{11} + \left(\frac{10}{11}\right)^2 \cdot 2^5 + \left(\frac{10}{11}\right)^3 \cdot 3^5 + \ldots + \left(\frac{10}{11}\right)^n \cdot n^5 + \ldots$$

$$u_n = \left(\frac{10}{11}\right)^n \cdot n^5, \quad u_{n+1} = \left(\frac{10}{11}\right)^{n+1} \cdot (n+1)^5$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(\frac{10}{11}\right)^{n+1} \cdot (n+1)^5}{\left(\frac{10}{11}\right)^n \cdot (n)^5} = \frac{\left(\frac{10}{11}\right) \cdot (n+1)^5}{n^5}$$

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{10}{11} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 =$$

$$= \frac{10}{11} \cdot \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 =$$

$$= \frac{10}{11} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1}{n^5} =$$

$$= \frac{10}{11} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^5}{n^5} + \frac{5}{n} + \frac{10}{n^2} + \frac{10}{n^3} + \frac{5}{n^4} + \frac{1}{n^5}}{\frac{n^5}{n^5}} = \frac{10}{11}$$

Симонов

$D = \frac{10}{11} < 1$ - ряд сходится

Ответ. ряд сходится

Соловая

Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная):

№ 311

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{3n-2}{3n-1} +$$

Первый признак Лейбница (абсолютные величины членов знакочередующегося ряда монотонно убывают) не выполняется: $\frac{1}{2} < \frac{4}{5} < \frac{7}{8} < \frac{10}{11} < \ldots$

Ответ: ряд расходится

Солонос

№312

$$1{,}1 - 1{,}02 + 1{,}003 - 1{,}0004 + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\left(1 + \frac{n}{10^n}\right)$$

Решение:

Первый признак Лейбница выполняется:

$1{,}1 > 1{,}02 > 1{,}003 > 1{,}0004 > \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n}{10^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{10^n + n}{10^n}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(10^n+n)'}{(10^n)'} = \lim_{n\to\infty}\frac{(10^n \ln 10 + 1)'}{(10^n \ln 10)'} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10^n \ln 10 \cdot \ln 10}{10^n \ln 10 \cdot \ln 10} = 1 \neq 0$$

Не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Ответ: ряд расходится

Соловов

№ 313

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}$$

Решение.

Выпишем 4 первых членов ряда.

$$a_1 = \frac{(-1)^0(1+1)}{1^2+1+1} = \frac{2}{3}$$

$$a_2 = \frac{(-1)^1(2+1)}{2^2+2+1} = -\frac{3}{7}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^2(3+1)}{3^2+3+1} = \frac{4}{13}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^3(4+1)}{4^2+4+1} = -\frac{5}{21}$$

Первый признак Лейбница выполняется:

$$\frac{2}{3} > \frac{3}{7} > \frac{4}{13} > \frac{5}{21} > \ldots$$

Соснова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+n+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0$$

Второй признак Лейбница выполняется. Следовательно, ряд сходится

Проверим, сходится ли ряд из модулей его слагаемых.

Используем признак Даламбера

$$u_n = \frac{k+1}{k^2+k+1},$$

$$u_{k+1} = \frac{k+2}{(k+1)^2+k+2} = \frac{k+2}{k^2+2k+k+2+1} = \frac{k+2}{k^2+3k+3}$$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(k+2)\cdot(k^2+k+1)}{(k^2+3k+3)\cdot(k+1)} =$$

$$= \frac{k^3+k^2+k+2k^2+2k+2}{k^3+3k^2+3k+k^2+3k+3} = \frac{k^3+3k^2+3k+2}{k^3+4k^2+6k+3}$$

Соловьев

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+4n^2+6n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{3}{n^3}} = 1 = l$$

$l = 1$, следовательно, признак Даламбера не позволяет судить о сходимости ряда. Применим интегральный признак сходимости

$$\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

Вычислим интеграл $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$:

$$x+1 = \frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int\left(\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} + \frac{1}{2(x^2+x+1)}\right)dx$$

[illegible]

$$\int \left(\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} + \frac{1}{2(x^2+x+1)} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx \,;$$

Вычислим по отдельности слагаемые:

$$1)\ \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2+x+1, & dx = \dfrac{du}{(2x+1)} \\ du = (2x+1)\,dx; & \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} \ln |x^2+x+1|$$

$$2)\ \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\, dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}, & dx = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, du \\ du = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, dx, & \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{2\sqrt{3}}{3u^2+3}\, du$$

Соломия

$$\frac{1}{2}\int \frac{2\sqrt{3}}{3u+3}\,du = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}\,du =$$

$$= \cancel{\frac{2}{\sqrt{3}}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}(u) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

В результате получим,

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{\ln|x^2+x+1|}{2} + \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}$$

$$\int_1^6 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \left(\frac{\ln|x^2+x+1|}{2} + \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_1^6 =$$

$$= \frac{\ln|6^2+6+1|}{2} + \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{2 6+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{\ln 3}{2} -$$

$$- \frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}$$

Соломов

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\frac{\ln|b^2+b+1|}{2} + \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2b+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} - \frac{\ln 3}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} \right) = (\infty + \infty) = \infty$$

Ответ:

ряд сходится условно

№ 374 Семенов

$$\frac{1}{10} + \frac{7}{10^2} - \frac{13}{10^3} + \frac{19}{10^4} + \frac{25}{10^5} - \frac{31}{10^6} + \ldots$$

Решение:

Найдем общий член ряда.

Показатель знаменателя совпадает с номером этого члена, а числители образуют арифметическую прогрессию с разностью 6 и первым членом 1. Ряд знакопеременный, каждый 3-ий член ряда имеет знак −.

Введем функцию DEL(n, c), где n - переменная величина, а c - постоянная

$$DEL(n, c) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ делится на } c \text{ с остатком} \\ 1, & \text{если } n \text{ делится на } c \text{ без остатка} \end{cases}$$

Тогда,

$$a_n = \frac{6(n-1)+1}{10^n} \cdot (-1)^{DEL(n,3)}$$

$$a_2 = \frac{7}{10^2} \cdot (-1)^0 = \frac{7}{10}, \quad a_1 = \frac{1}{10} \cdot (-1)^0 = \frac{1}{10}$$

$$a_3 = \frac{13}{10^3} \cdot (-1)^1 = -\frac{13}{10^3}$$

$$a_4 = \frac{19}{10^5} \cdot (-1)^0 = \frac{19}{25},$$ и т. д.

Первый признак Лейбница выполнен.

$$\frac{1}{10} > \frac{7}{10^2} > \frac{13}{10^3} > \frac{19}{10^4} > \frac{25}{10^5} > \frac{31}{10^6} > \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6(n-1)+1}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n-5}{10^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(6n-5)'}{(10^n)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{10^n \ln 10} = 0$$

Второй признак Лейбница выполняется.

Следовательно, ряд сходится

Проверим, сходится ли ряд составленный из модулей его членов.

Применим признак Даламбера

$$u_k = \frac{6(k-1)+1}{10^k}, \quad u_{k+1} = \frac{6(k+1-1)+1}{10 \cdot 10^k}$$

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(6k+1) \cdot \cancel{10^k}}{10 \cdot \cancel{10^k} \cdot (6k-5)} = \frac{6k+1}{60k-50}$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{6k+1}{60k-50} = \lim_{k \to \infty} \frac{6 + \overbrace{\frac{1}{k}}^{\to 0}}{60 - \underbrace{\frac{50}{k}}_{\to 0}} =$$

$$= \frac{1}{10} = l < 1$$ – ряд сходится

Ответ: ряд сходится абсолютно

[illegible]

№ 335

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$$

Решение:

Первый признак Лейбница выполняется:

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \frac{1}{\ln 5} > \ldots$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

Второй признак Лейбница выполняется.

Следовательно, ряд сходится

Проверим, сходится ли ряд из модулей его слагаемых:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\ln(x+1)} dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{1}{\ln(x+1)} dx$$

Соловье

$$\int_1^b \frac{1}{\ln(x+1)}\,dx = \ln(x+1)\Big|_1^b = \ln(b+1) - \ln 2$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{\ln(x+1)}\,dx = \lim_{b \to \infty} \left(\ln(b+1) - \ln 2\right) = \infty$$

Ответ: ряд сходится условно