Типовой расчет

Михалькевич Д.Н.
гр. 221701

Вариант 8

In[∘]:=

$$table = \begin{pmatrix} 0.50 & 0.443179 \\ 0.56 & 0.469718 \\ 0.62 & 0.509651 \\ 0.68 & 0.523462 \\ 0.74 & 0.551931 \\ 0.8 & 0.551792 \\ 0.86 & 0.566707 \\ 0.92 & 0.551781 \\ 0.98 & 0.551341 \\ 1.04 & 0.521204 \\ 1.1 & 0.503945 \\ 1.16 & 0.458602 \\ 1.22 & 0.42344 \\ 1.28 & 0.363326 \\ 1.34 & 0.309594 \\ 1.4 & 0.235574 \\ 1.46 & 0.163046 \\ 1.52 & 0.0764054 \\ 1.58 & -0.014687 \\ 1.64 & -0.112269 \\ 1.7 & -0.221226 \\ 1.76 & -0.327705 \\ 1.82 & -0.45336 \\ 1.88 & -0.566363 \\ 1.94 & -0.707094 \\ 2 & -0.823971 \end{pmatrix}; a = 0.5; b = 2; h = 0.06; dots = \frac{(b-a)}{h} + 1;$$

```
data = Table[{table[[i, 1]], table[[i, 2]]}, {i, 1, dots}];
```

таблица значений

```
f = Fit[data, {1, x, x^2}, x]
```

согласовать

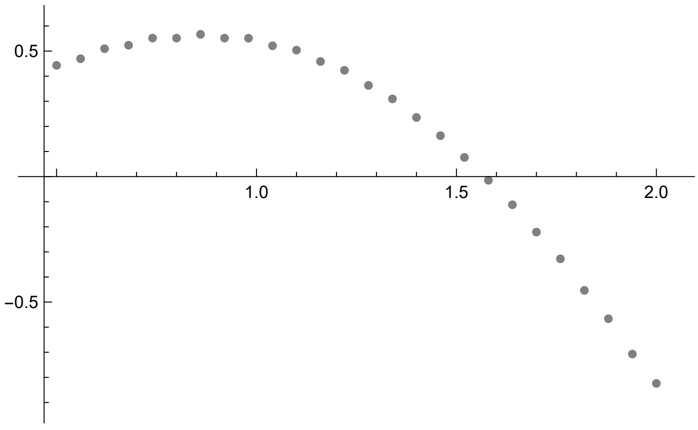
Out[∘]=

$-0.190028 + 1.78112\, x - 1.05464\, x^2$

In[•]:=
```
Show[ListPlot[table, PlotStyle → Gray, PlotLabels → Automatic],
 PlotRange → {{a - h, b + h}, {-0.9, 0.6}}]
```
по⋯ диаграмма разб⋯ стиль граф⋯ серый пометки на г⋯ автоматически

отображаемый диапазон графика

Out[•]=



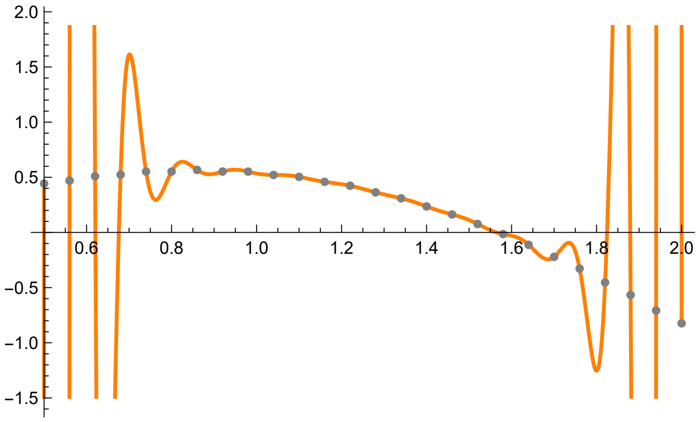
Задание 1.

Постройте для функции f(x) интерполяционный многочлен степени n=25 и многочлены меньшей степени на отрезке, используя не все узлы сетки:
- используете значения функции в нечетных узлах (n=12);
- используете значения функции в каждом 3- узле (n=8);
- используете значения функции в каждом 5- узле (n=5).
Выведите графики интерполяционных многочленов и оцените их поведение на отрезке. Сравните результаты и сделайте выводы о зависимость погрешности интерполирования от числа узлов.

Построение многочлена степенью 25 :

In[∘]:=
```
Poly25 = InterpolatingPolynomial[data, x];
         интерполяционный многочлен
Plot25 = Plot[Poly25, {x, a, b}, PlotStyle → {Orange}];
         график функции         стиль графика оранжевый
Dots25 = ListPlot[data, PlotStyle → Gray];
         диаграмма раз…  стиль граф…  серый
Show[Plot25, Dots25]
показать
```

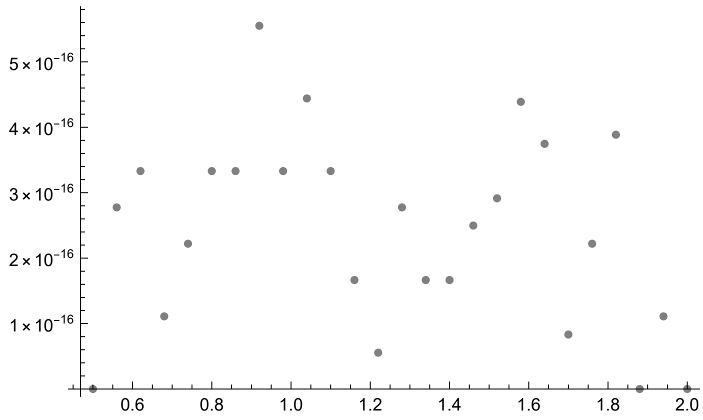
Out[∘]=



In[∘]:=
```
(*Найдём абсолютную погрешность многочлена в заданных точках*)
```

In[◦]:=
```
Diff25 =
  Table[{data⟦i, 1⟧, (Poly25 /. x → data⟦i, 1⟧) - data⟦i, 2⟧}, {i, 1, dots}];
  таблица значений
Show[ListPlot[Diff25, PlotStyle → Gray]]
по⋯ диаграмма разбро⋯ стиль граф⋯ серый
```

Out[◦]=



In[◦]:=
```
Sum[((Poly25 /. x → data⟦i, 1⟧) - data⟦i, 2⟧)^2, {i, dots}]
сумма
```

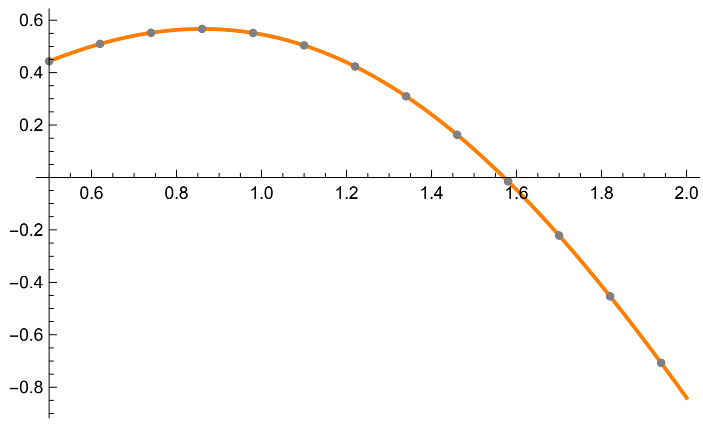
Out[◦]=

2.06193×10^{-30}

Используя значения функции в нечетных узлах:

In[◦]:=
```
data12 = Table[{data⟦i, 1⟧, data⟦i, 2⟧}, {i, 1, 26, 2}];
         таблица значений
Poly12 = InterpolatingPolynomial[data12, x];
         интерполяционный многочлен
plot12 = Plot[Poly12, {x, a, b}, PlotStyle → Orange];
         график функции          стиль граф⋯ оранжевый
dots12 = ListPlot[data12, PlotStyle → Gray]; Show[plot12, dots12]
         диаграмма разброс⋯ стиль граф⋯ серый показать
```

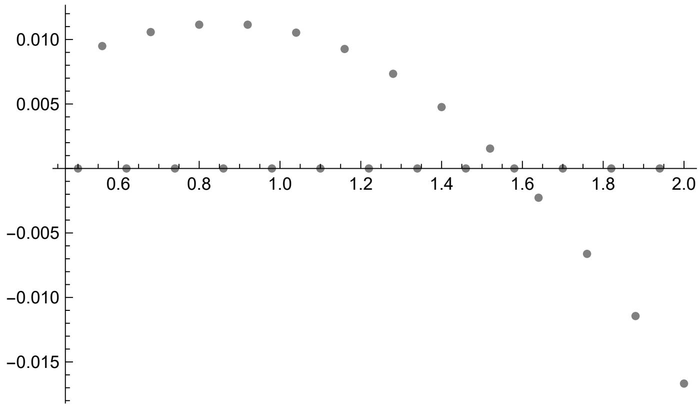
Out[◦]=



In[◦]:=
```
(*Найдём абсолютную погрешность многочлена в заданных точках*)
```

In[ ]:=
```
Diff12 =
  Table[{data〚i, 1〛, (Poly12 /. x → data〚i, 1〛) - data〚i, 2〛}, {i, 1, dots}];
  таблица значений
Show[ListPlot[Diff12, PlotStyle → Gray]]
по⋯ диаграмма разбро⋯ стиль граф⋯ серый
```

Out[ ]=



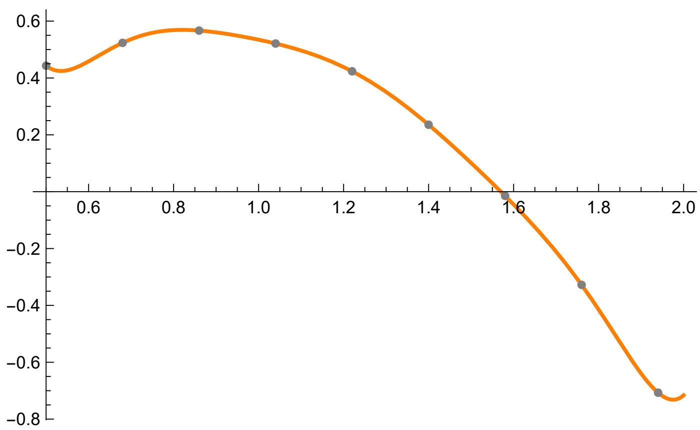
In[ ]:=
```
Sum[((Poly12 /. x → data〚i, 1〛) - data〚i, 2〛)^2, {i, dots}]
сумма
```

Out[ ]=
```
0.00118394
```

Используя значения функции в каждом третьем узле:

In[ ]:=
```
data8 = Table[{data〚i, 1〛, data〚i, 2〛}, {i, 1, 26, 3}];
        таблица значений
Poly8 = InterpolatingPolynomial[data8, x];
        интерполяционный многочлен
plot8 = Plot[Poly8, {x, a, b}, PlotStyle → Orange];
        график функции           стиль граф⋯ оранжевый
dots8 = ListPlot[data8, PlotStyle → Gray]; Show[plot8, dots8]
        диаграмма разбр⋯ стиль граф⋯ серый показать
```

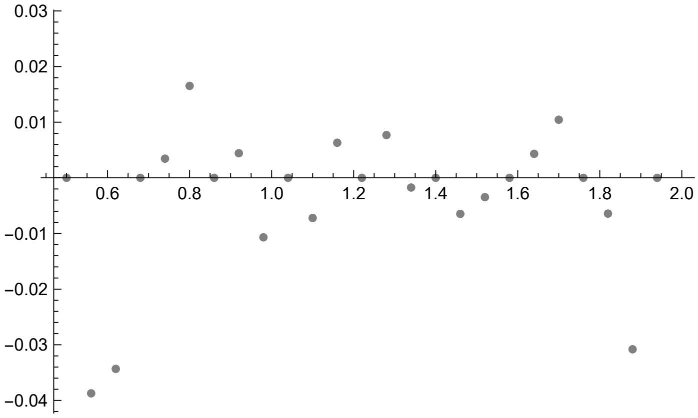
Out[ ]=



In[ ]:=
```
(*Найдём абсолютную погрешность многочлена в заданных точках*)
```

In[∘]:=
```
Diff8 =
  Table[{data[[i, 1]], (Poly8 /. x → data[[i, 1]]) - data[[i, 2]]}, {i, 1, dots}];
  таблица значений
Show[ListPlot[Diff8, PlotStyle → Gray]]
по··· диаграмма разб··· стиль граф··· серый
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Sum[((Poly8 /. x → data[[i, 1]]) - data[[i, 2]])^2, {i, dots}]
сумма
```

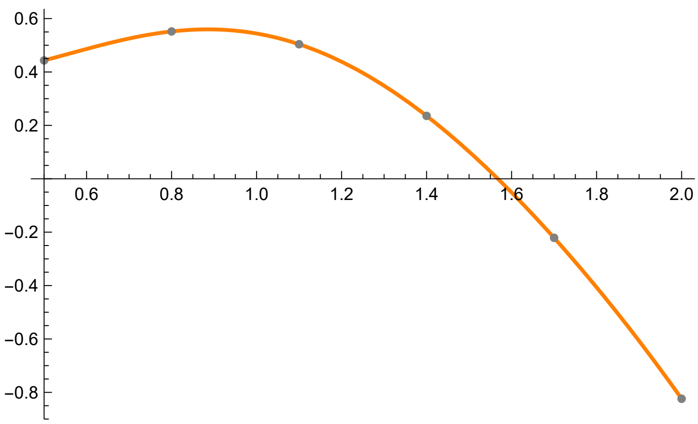
Out[∘]=

```
0.0160538
```

Используя значения функции в каждом пятом узле:

In[∘]:=
```
data5 = Table[{data[[i, 1]], data[[i, 2]]}, {i, 1, 26, 5}];
        таблица значений
Poly5 = InterpolatingPolynomial[data5, x];
        интерполяционный многочлен
plot5 = Plot[Poly5, {x, a, b}, PlotStyle → Orange];
        график функции          стиль граф··· оранжевый
dots5 = ListPlot[data5, PlotStyle → Gray]; Show[plot5, dots5]
        диаграмма разбр··· стиль граф··· серый показать
```

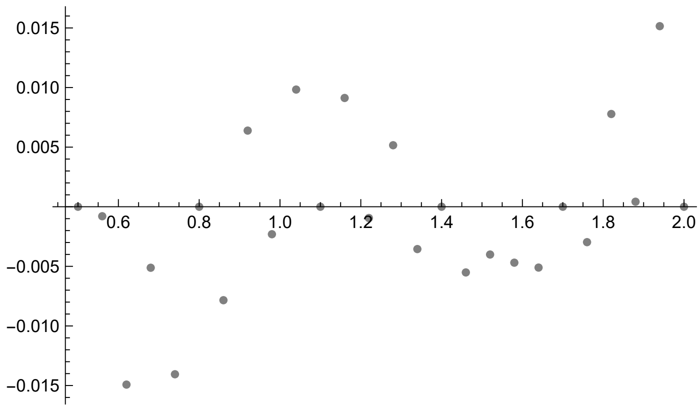
Out[∘]=



In[∘]:=
```
(*Найдём абсолютную погрешность многочлена в заданных точках*)
```

In[∘]:=
```
Diff5 =
  Table[{data[[i, 1]], (Poly5 /. x → data[[i, 1]]) - data[[i, 2]]}, {i, 1, dots}];
  таблица значений
Show[ListPlot[Diff5, PlotStyle → Gray]]
по··· диаграмма разб···  стиль граф··· серый
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Sum[((Poly5 /. x → data[[i, 1]]) - data[[i, 2]])^2, {i, dots}]
сумма
```

Out[∘]=
```
0.00116817
```

Вывод: наилучшим в сравнении по сумме квадратов разностей функции в заданных узлах оказался многочлен 25-й степени.
По графикам можно заметить, что погрешность увеличивается ближе к крайним значениям интерполируемой функции. Но несмотря на это, интерполяция не гарантирует, что поведение полученной функции между узлами интерполяции будет повторять поведение исходной функции (погрешность увеличивается в узлах, которые не были выбраны для интерполяции 5, 8 и 12 степеней).

Задание 2.

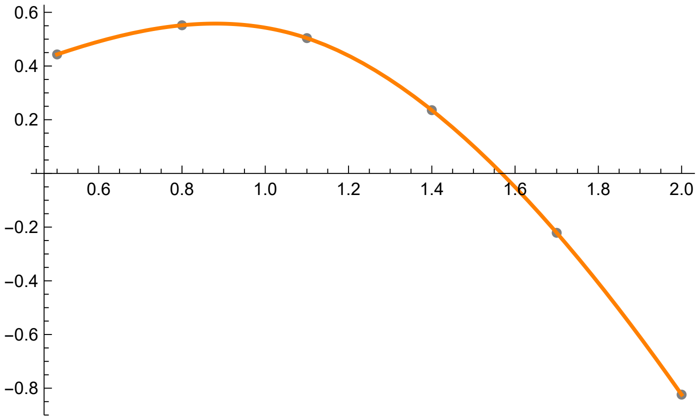
Постройте сплайны, аппроксимирующие функцию f(x) по значениям в узлах, выведите графики и сравните с графиками интерполяционных многочленов степени n = 5, 8, 12, 25, построенных по тем же узлам.

Построим аппроксимирующий сплайн заданного многочлена 5 степени

In[∘]:=
```
Spline5 := Interpolation[data5, x, Method → "Spline"]
           интерполировать          метод
SplinePlot5 = Plot[Spline5, {x, a, b}, PlotStyle → {Orange}];
              график функции            стиль графика оранжевый
```

In[•]:=
```
Show[ListPlot[data5, PlotStyle → {PointSize[0.015], Gray}], SplinePlot5]
```
по··· диаграмма разбр··· стиль графика размер точки серый

Out[•]=



In[•]:=
```
Sum[((Spline5 /. x → data[[i, 1]]) - data[[i, 2]])^2, {i, dots}]
```
сумма

Out[•]=

```
0.000908471
```

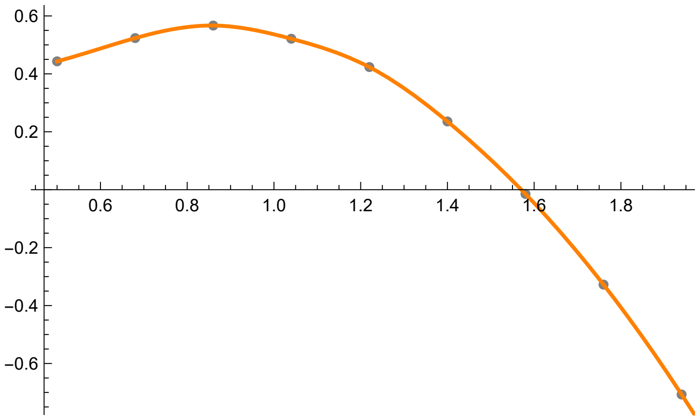
Построим аппроксимирующий сплайн заданного многочлена 8 степени

In[•]:=
```
Spline8 := Interpolation[data8, x, Method → "Spline"]
```
интерполировать метод

```
SplinePlot8 = Plot[Spline8, {x, a, b}, PlotStyle → {Orange}];
```
график функции стиль графика оранжевый

```
Show[ListPlot[data8, PlotStyle → {PointSize[0.015], Gray}], SplinePlot8]
```
по··· диаграмма разбр··· стиль графика размер точки серый

Out[•]=



In[•]:=
```
Sum[((Spline8 /. x → data[[i, 1]]) - data[[i, 2]])^2, {i, dots}]
```
сумма

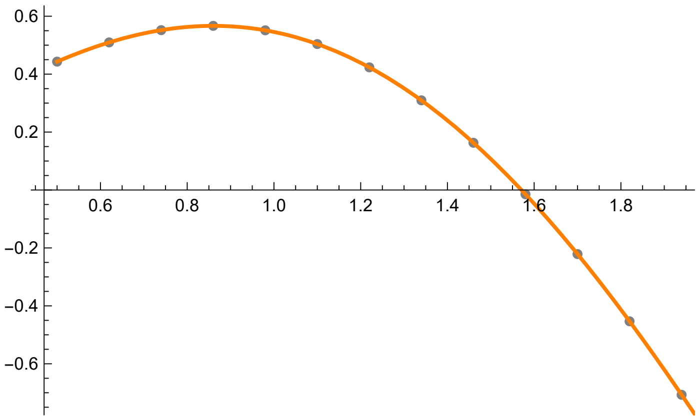
Out[•]=

```
0.00132162
```

Построим аппроксимирующий сплайн заданного многочлена 12 степени

In[∘]:=
```
Spline12 := Interpolation[data12, x, Method → "Spline"]
            ⌊интерполировать          ⌊метод
SplinePlot12 = Plot[Spline12, {x, a, b}, PlotStyle → {Orange}];
               ⌊график функции          ⌊стиль графика ⌊оранжевый
Show[ListPlot[data12, PlotStyle → {PointSize[0.015], Gray}], SplinePlot12]
⌊по⋯ ⌊диаграмма разброс⋯ ⌊стиль графика ⌊размер точки  ⌊серый
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Sum[((Spline12 /. x → data[[i, 1]]) - data[[i, 2]])^2, {i, dots}]
⌊сумма
```

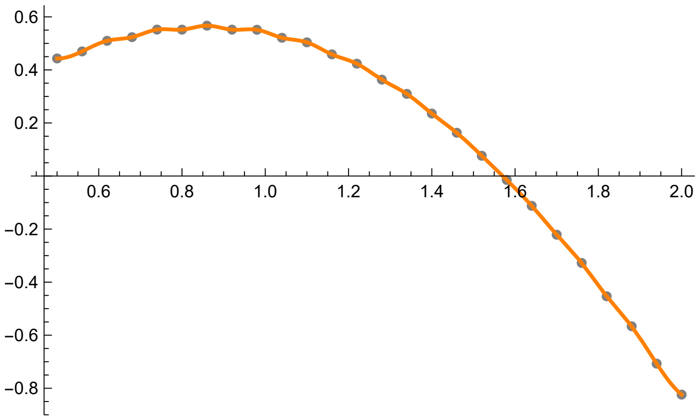
Out[∘]=

```
0.00118744
```

Построим аппроксимирующий сплайн заданного многочлена 25 степени

In[∘]:=
```
Spline25 := Interpolation[data, x, Method → "Spline"]
            ⌊интерполировать        ⌊метод
SplinePlot25 = Plot[Spline25, {x, a, b}, PlotStyle → {Orange}];
               ⌊график функции          ⌊стиль графика ⌊оранжевый
Show[ListPlot[data, PlotStyle → {PointSize[0.015], Gray}], SplinePlot25]
⌊по⋯ ⌊диаграмма разб⋯ ⌊стиль графика ⌊размер точки  ⌊серый
```

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Sum[((Spline25 /. x → data[[i, 1]]) - data[[i, 2]])^2, {i, dots}]
```
сумма

Out[∘]=
5.95233×10^{-32}

Вывод: наилучшим в сравнении по сумме квадратов разностей функции в заданных узлах оказался сплайн 25-й степени . Погрешность оказалась меньше, чем в случае интерполяционного многочлена из Задания 1.

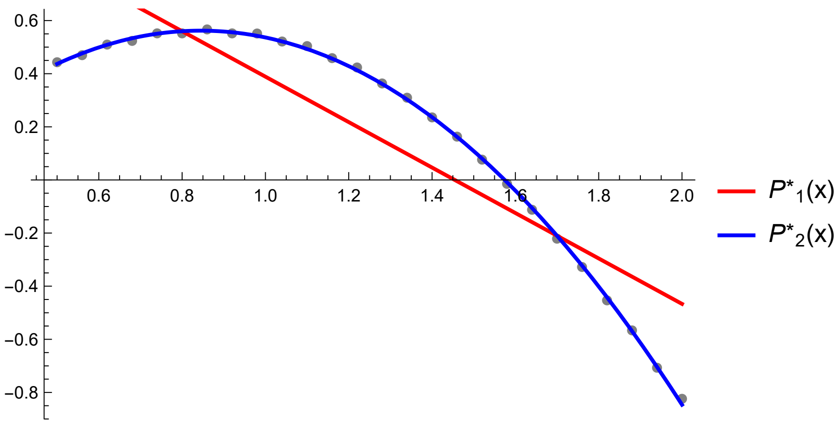
Задание 3.

Постройте для функции f(x) многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения Pn*(x) степени n = 1,2. Вычислите для каждого многочлена сумму квадратов отклонения в узлах, сравните их значения и сделайте выводы. Выведите графики узлов и многочленов Pn*(x), аппроксимирующих функцию.

In[∘]:=
```
P1 = Fit[data, {1, x}, x];
P2 = Fit[data, {1, x, x^2}, x];
```
согласовать
согласовать

In[∘]:=
```
PPlot = Plot[{P1, P2}, {x, a, b},
   PlotStyle → {Red, Blue}, PlotLegends → {"P*1(x)", "P*2(x)"}];
Show[ListPlot[data, PlotStyle → {PointSize[0.015], Gray}], PPlot]
```
график функции
стиль графика | кр··· | синий | легенды графика
по··· | диаграмма разб··· | стиль графика | размер точки | серый

Out[∘]=



In[∘]:=
```
Sum[((P1 /. x → data[[i, 1]]) - data[[i, 2]])^2, {i, dots}]
```
сумма

Out[∘]=
0.946032

In[ ]:=
```
Sum[((P2 /. x → data[[i, 1]]) - data[[i, 2]])^2, {i, dots}]
```
сумма

Out[ ]=
```
0.00155621
```

Вывод: многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения второго порядка показал лучшую точность графически и исходя из высчитанной суммы квадратов разностей.

Задание 4.

Вычислите определенный интеграл следующими методами :
-методами левых, правых и средних прямоугольников;
-методом трапеций;
-методом парабол (Симпсона).
Сравните полученные приближенные значения интеграла и сделайте выводы о точности результата.

In[ ]:= (*метод левых прямоугольников*)

$$\text{LeftS} = h * \sum_{i=1}^{dots-1} \text{data}[[i, 2]]$$

Out[ ]= 0.32232

In[ ]:= (*метод правых прямоугольников*)

$$\text{RightS} = h * \sum_{i=2}^{dots-1} \text{data}[[i, 2]]$$

Out[ ]= 0.295729

In[ ]:= (*метод средних прямоугольников*)

$$\text{MiddleS} = h * \sum_{i=1}^{dots-1} \frac{\text{data}[[i, 2]] + \text{data}[[i+1, 2]]}{2}$$

Out[ ]= 0.284305

In[ ]:= (*Метод трапеций*)

In[ ]:=
$$\text{TrapezoidMethod} = h * \left(\frac{\text{data}[[1, 2]] + \text{data}[[2, 2]]}{2} + \sum_{i=3}^{dots-2} \text{data}[[i, 2]]\right)$$

Out[ ]= 0.337358

In[ ]:= (*Метод парабол*)

```
In[]:= n = 12;
h = (b - a)/(2 n);
For[i = 0, i ≤ 2 * n, i++, y_i = data[[i + 1, 2]];]
цикл ДЛЯ
SimpsonFormula = Sum[h/3 * (y_{2 i} + 4 y_{2 i+1} + y_{2 i+2}), {i, 0, n-1}]
```

$$h = \frac{(b - a)}{2\,n};$$

$$\text{SimpsonFormula} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} * (y_{2\,i} + 4\,y_{2\,i+1} + y_{2\,i+2})$$

Out[]= 0.343728

Вывод: Методы средних треугольников, трапеций и парабол позволяют получить более точный результат.

Задание 5.

Постройте с помощью формул численного дифференцирования первого и второго порядка точности таблицу первых и вторых производных функции f (x) в узлах сетки. Сравните полученные результаты и сделайте выводы.

```
In[]:= (*Первый уровень точности первой производной*)
```

In[∘]:=

```
FirstT = Table[{i, data[[i, 1]], (data[[i + 1, 2]] - data[[i, 2]])/h}, {i, 1, dots - 1}];
         таблица значений

TableForm[FirstT, TableHeadings → {None, {"Node", "xi", "y'i"}}]
табличная форма    табличные заголо⋯ ни одного/отсутствует
```

Out[∘]//TableForm=

Node	x_i	y'_i
1	0.5	0.424624
2	0.56	0.638928
3	0.62	0.220976
4	0.68	0.455504
5	0.74	-0.002224
6	0.8	0.23864
7	0.86	-0.238816
8	0.92	-0.00704
9	0.98	-0.482192
10	1.04	-0.276144
11	1.1	-0.725488
12	1.16	-0.562592
13	1.22	-0.961824
14	1.28	-0.859712
15	1.34	-1.18432
16	1.4	-1.16045
17	1.46	-1.38625
18	1.52	-1.45748
19	1.58	-1.56131
20	1.64	-1.74331
21	1.7	-1.70366
22	1.76	-2.01048
23	1.82	-1.80805
24	1.88	-2.2517
25	1.94	-1.87003

In[∘]:=

```
(*Второй уровень точности первой и второй производной*)
```

```
In[*]:= FirstT = Table[{i, data[[i, 1]], (data[[i + 1, 2]] - data[[i - 1, 2]]) / (2 * h)}, {i, 2, dots - 1}];
              таблица значений

SecondT = Table[{(data[[i + 1, 2]] - 2 * data[[i, 2]] + data[[i - 1, 2]]) / h^2}, {i, 2, dots - 1}];
              таблица значений

(*Для второй производной уровни точности идут со второго и только четные*)
tab = Join[FirstT, SecondT, 2];
      соединить

TableForm[tab, TableHeadings → {None, {"Node", "xi", "y'i", "y''i"}}]
табличная форма  табличные заголо…  ни одного/отсутствует
```

Out[*]//TableForm=

Node	x_i	y'_i	y''_i
2	0.56	0.531776	3.42886
3	0.62	0.429952	-6.68723
4	0.68	0.33824	3.75245
5	0.74	0.22664	-7.32365
6	0.8	0.118208	3.85382
7	0.86	-0.000088	-7.6393
8	0.92	-0.122928	3.70842
9	0.98	-0.244616	-7.60243
10	1.04	-0.379168	3.29677
11	1.1	-0.500816	-7.1895
12	1.16	-0.64404	2.60634
13	1.22	-0.762208	-6.38771
14	1.28	-0.910768	1.63379
15	1.34	-1.02202	-5.19373
16	1.4	-1.17238	0.381952
17	1.46	-1.27335	-3.61283
18	1.52	-1.42186	-1.13966
19	1.58	-1.5094	-1.66134
20	1.64	-1.65231	-2.912
21	1.7	-1.72349	0.634368
22	1.76	-1.85707	-4.90906
23	1.82	-1.90926	3.23891
24	1.88	-2.02987	-7.09837
25	1.94	-2.06086	6.10662

Вывод : мы можем получить удовлетворительные результаты при нахождении производных 1 и 2 порядка . Однако при шаге сетки, близком к нулю, неустранимые погрешности в значениях функции оказывают сильное влияние на результат, о чём свидетельствуют вычисленные значения 2 ой производной .