

Лабораторная работа №5

Численное дифференцирование и интегрирование

Михалькевич Д.Н.
гр. 221701

Вариант 8

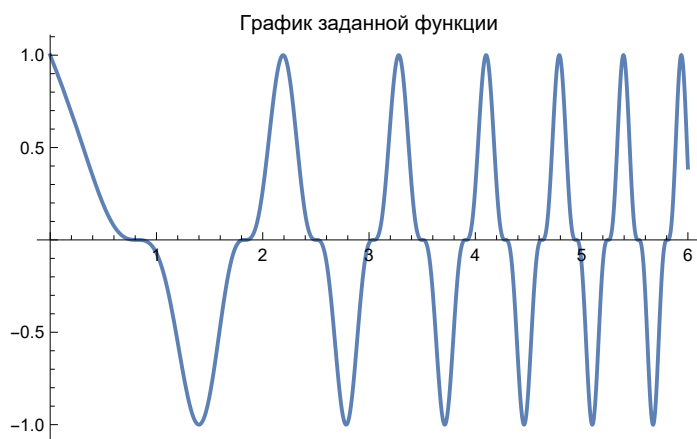
Задание 1.

Найти приближенные значения производных первого и второго порядков
функции а) функцию D системы Mathematica; б) формулы численного дифференцирования...

In[370]:=

```
f[x_] := (Cos[x^2 + Sqrt[x]])^3;  
x0 = 5.37;  
initialPlot = Plot[f[x], {x, 0, 6}, PlotLabel -> "График заданной функции"];  
Show[initialPlot]
```

Out[373]=



а) функция D системы Mathematica

In[374]:=

```
Print["Производная 1-го порядка: ", d1 = D[f[x], x] /. x -> x0]  
Print["Производная 2-го порядка: ", d2 = D[f[x], {x, 2}] /. x -> x0]
```

Производная 1-го порядка: 7.93433

Производная 2-го порядка: -276.544

б) формулы численного дифференцирования

In[376]:=

```
(* Функции конечных разностей 3 порядков*)
FDifference1[y_, y1_] := y1 - y;
FDifference2[y_, y1_, y2_] := y2 - 2 y1 + y;
FDifference3[y_, y1_, y2_, y3_] := y3 - 3 y2 + 3 y1 - y;
```

In[379]:=

```
h = 0.1; (* Для шага 0.1 *)
```

In[380]:=

$$y1 = \frac{1}{h} \left(\text{FDifference1}[f[x_0], f[x_0 + h]] - \frac{1}{2} * \text{FDifference2}[f[x_0], f[x_0 + h], f[x_0 + 2 h]] + \frac{1}{3} * \text{FDifference3}[f[x_0], f[x_0 + h], f[x_0 + 2 h], f[x_0 + 3 h]] \right);$$

In[381]:=

$$y2 = \frac{1}{h^2} (\text{FDifference2}[f[x_0], f[x_0 + h], f[x_0 + 2 h]] - \text{FDifference3}[f[x_0], f[x_0 + h], f[x_0 + 2 h], f[x_0 + 3 h]]);$$

In[382]:=

```
Print["Производная 1-го порядка: ", y1]
```

[печатаТЬ](#)

```
Print["Производная 2-го порядка: ", y2]
```

[печатаТЬ](#)

```
Print["Разница между вычисленными значениями 1-й производной: ", Abs[d1 - y1]]
```

[печатаТЬ](#)

[абсолютное зна](#)

```
Print["Разница между вычисленными значениями 2-й производной: ", Abs[d2 - y2]]
```

[печатаТЬ](#)

[абсолютное зна](#)

Производная 1-го порядка: -10.17

Производная 2-го порядка: 110.009

Разница между вычисленными значениями 1-й производной: 18.1044

Разница между вычисленными значениями 2-й производной: 386.553

In[386]:=

```
h = 0.01; (* Для шага 0.01 *)
```

In[387]:=

$$y1 = \frac{1}{h} \left(\text{FDifference1}[f[x_0], f[x_0 + h]] - \frac{1}{2} * \text{FDifference2}[f[x_0], f[x_0 + h], f[x_0 + 2 h]] + \frac{1}{3} * \text{FDifference3}[f[x_0], f[x_0 + h], f[x_0 + 2 h], f[x_0 + 3 h]] \right);$$

$$y2 = \frac{1}{h^2} (\text{FDifference2}[f[x_0], f[x_0 + h], f[x_0 + 2 h]] - \text{FDifference3}[f[x_0], f[x_0 + h], f[x_0 + 2 h], f[x_0 + 3 h]]);$$

In[389]:=

```
Print["Производная 1-го порядка: ", y1]
```

```
[печатать]
```

```
Print["Производная 2-го порядка: ", y2]
```

```
[печатать]
```

```
Print["Разница между вычисленными значениями 1-й производной: ", Abs[d1 - y1]]
```

```
[печатать]
```

```
[абсолютное зна
```

```
Print["Разница между вычисленными значениями 2-й производной: ", Abs[d2 - y2]]
```

```
[печатать]
```

```
[абсолютное зна
```

```
Производная 1-го порядка: 8.0033
```

```
Производная 2-го порядка: -301.359
```

```
Разница между вычисленными значениями 1-й производной: 0.0689647
```

```
Разница между вычисленными значениями 2-й производной: 24.8149
```

Вывод: Уменьшение шага приводит к получению более точных результатов

Задание 1.

а) Вычислить с помощью формулы второго порядка точности и составить таблицу приближенных значений производной функции на отрезке $[-1, 3]$ с шагом $h = 0,2$.

In[393]:=

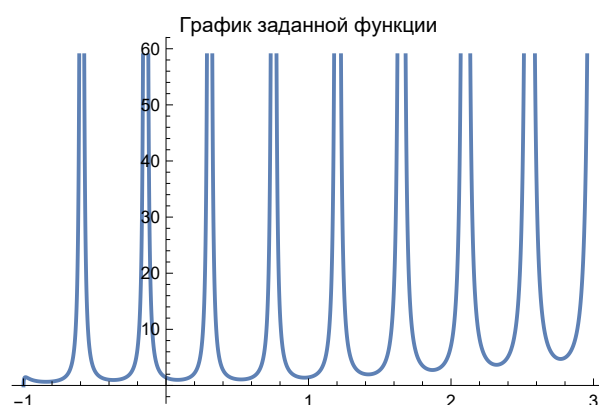
$$f[x_] := \frac{\sqrt{1+x^3}}{\sin[7x+1]^2}$$

```
Plot[f[x], {x, -1, 3}, PlotLabel -> "График заданной функции"]
```

```
[график функции]
```

```
[пометка графика]
```

Out[394]=



In[395]:=

a = -1;**b = 3;****h = 0.2;**
data = Table $\left[\left\{x, \frac{f[x+h] - f[x-h]}{2h}\right\}, \{x, a, b, h\}\right];$
TableForm[data, **TableHeadings** → {None, {"x_i", "y'_i"}}]

табличная форма	табличные заголо...	ни одного/отсутствует
------------------------	----------------------------	------------------------------

Out[399]//TableForm=

x_i	y'_i
-1.	1.76867 - 2.641 i
-0.8	649.616
-0.6	0.781656
-0.4	-633.197
-0.2	0.98038
0.	-10.9183
0.2	3.35756
0.4	-1.96918
0.6	24.7844
0.8	0.079858
1.	6695.3
1.2	1.4152
1.4	-6683.
1.6	3.82526
1.8	-26.2419
2.	12.1021
2.2	-4.93659
2.4	70.4632
2.6	-0.427103
2.8	168760.
3.	2.54325

б) Изобразить...

In[400]:=

Derivate = D[f[x], x]**дифференци**

Out[400]=

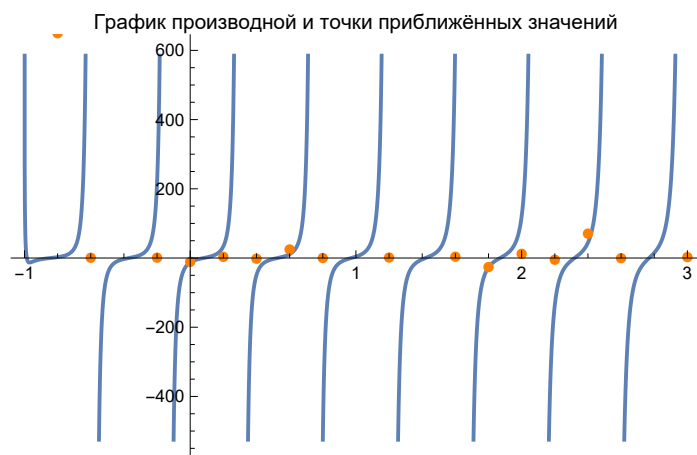
$$\frac{3x^2 \operatorname{Csc}[1+7x]^2}{2\sqrt{1+x^3}} - 14\sqrt{1+x^3} \operatorname{Cot}[1+7x] \operatorname{Csc}[1+7x]^2$$

```

In[401]:=
graph = Plot[Derivate, {x, -1, 3}];
      график функции
points = ListPlot[data, PlotStyle -> {PointSize[0.015], Orange}];
      диаграмма раз...   стиль графика   размер точки   оранжевый
Show[graph, points, PlotLabel -> "График производной и точки приближённых значений"]
      показать   пометка графика

```

Out[403]=



Задание 3

Вычислить определенный интеграл: а) по формуле средних прямоугольников;
б) по формуле трапеций.

In[404]:=

$$f[x_] := \frac{\sqrt{2x + 2.8}}{0.7x^2 + \sqrt{x^2 + 1.3}}$$

a = 0.8;

b = 1.6;

x₀ = a;

In[408]:=

n1 = 8;

step = $\frac{(b - a)}{n1}$;

For[i = 1, i ≤ n1, i++, x_i = step + x_{i-1};

цикл для

$$\text{AverageRectangle1} = \frac{(b - a)}{n1} * \sum_{i=1}^{n1} f\left[x_{i-1} + \frac{(b - a)}{2 * n1}\right]$$

Out[411]=

0.695637

In[412]:=

```

n2 = 10;
step =  $\frac{(b - a)}{n2}$ ;
For[i = 1, i ≤ n2, i++, xi = step + xi-1];

```

Цикл ДЛЯ

$$\text{AverageRectangle2} = \frac{(b - a)}{n2} * \sum_{i=1}^{n2} f\left[x_{i-1} + \frac{(b - a)}{2 * n2}\right]$$

Out[415]=

0.695693

In[416]:=

```

k = 2;
Richardson = AverageRectangle2 +
 $\frac{n1^k}{n2^k - n1^k}$  (AverageRectangle2 - AverageRectangle1) (*Уточнение по Ричардсону*)

```

Out[417]=

0.695791

Б) Метод трапеций

In[418]:=

```

n1 = 8;
x0 = a;
step =  $\frac{(b - a)}{n1}$ ;
For[i = 1, i ≤ n1, i++, xi = step + xi-1];

```

Цикл ДЛЯ

$$\text{Trapezoidal1} = \frac{(b - a)}{n1} * \left(\sum_{i=1}^{n1-1} f[x_i] + \frac{f[x_0]}{2} + \frac{f[x_{n1}]}{2} \right)$$

Out[422]=

0.696099

In[423]:=

```

n2 = 10;
x0 = a;
step =  $\frac{(b - a)}{n2}$ ;
For[i = 1, i ≤ n2, i++,

```

Цикл ДЛЯ

```

xi = step + xi-1];

```

$$\text{Trapezoidal2} = \frac{(b - a)}{n2} * \left(\sum_{i=1}^{n2-1} f[x_i] + \frac{f[x_0]}{2} + \frac{f[x_{n2}]}{2} \right)$$

Out[427]=

0.695988

```
In[428]:=
Richardson =
Trapezoidal2 +  $\frac{n1^k}{n2^k - n1^k}$  (Trapezoidal2 - Trapezoidal1) (*Уточнение по Ричардсону*)

Out[428]=
0.695791
```

Задание 4

Вычислить определенный интеграл от таблично заданной функции по формуле Симпсона (парабол) для разбиений отрезка интегрирования на 8 и на 16 частей.

```
In[429]:=
data =  $\begin{pmatrix} 1.04 & 0.9519 \\ 1.16 & 0.8534 \\ 1.28 & 0.7734 \\ 1.4 & 0.7071 \\ 1.52 & 0.6513 \\ 1.64 & 0.6036 \\ 1.76 & 0.5625 \\ 1.88 & 0.5265 \\ 2 & 0.4950 \end{pmatrix}$ ;

In[430]:=
a = 1.04;
b = 2;
n = 4;
h =  $\frac{(b - a)}{2 n}$ ;

In[434]:=
For[i = 1, i ≤ 2 * n, i++, yi = data[[i, 2]];]
|_цикл ДЛЯ

In[435]:=
Simpsons =  $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} * (y_{2 i} + 4 y_{2 i+1} + y_{2 i+2})$ 

Out[435]=
{{0.70252}, {0.70126}}
```

Разбиение отрезка интегрирования на 16 частей

In[436]:=

```
data = {
  {1.04, 0.9519},
  {1.1, 0.9181},
  {1.16, 0.8534},
  {1.22, 0.8278},
  {1.28, 0.7734},
  {1.34, 0.7537},
  {1.4, 0.7071},
  {1.46, 0.6917},
  {1.52, 0.6513},
  {1.58, 0.6392},
  {1.64, 0.6036},
  {1.7, 0.5941},
  {1.76, 0.5625},
  {1.82, 0.5549},
  {1.88, 0.5265},
  {1.94, 0.5206},
  {2, 0.4950}
};
```

In[437]:=

```
n = 8;
h = (b - a) / (2 n);
For[i = 0, i <= 2 * n, i++, y_i = data[[i + 1, 2]];]
|_цикл ДЛЯ
```

In[440]:=

```
Simpsons = Sum[h/3 * (y_2i + 4 y_2i+1 + y_2i+2), {i, 0, n-1}]
```

Out[440]=

0.656058

Задание 5

Вычислить определенный интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса с n узлами.

In[441]:=

```
f[x_] = (3 + Cos[x + 2]) / (x + 2.4);
a = 1.6;
b = 3.2;
n = 4;
polynomial = LegendreP[n, x]
|_P-функция Лежанд
```

Out[445]=

$$\frac{1}{8} (3 - 30x^2 + 35x^4)$$

In[446]:=

```
soluton = NSolve[polynomial == 0, x];
```

```
⏟численное решение уравнений
```

```
xx = x /. soluton
```

Out[447]=

```
{-0.861136, -0.339981, 0.339981, 0.861136}
```

In[448]:=

```
T = Table[If[i == 1, 1, (xx[[j]])i-1], {i, n}, {j, n}]; MatrixForm[T]
```

```
⏟таб... ⏟условный оператор
```

```
⏟матричная форми
```

Out[448]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -0.861136 & -0.339981 & 0.339981 & 0.861136 \\ 0.741556 & 0.115587 & 0.115587 & 0.741556 \\ -0.638581 & -0.0392974 & 0.0392974 & 0.638581 \end{pmatrix}$$

In[449]:=

```
B = Table[If[EvenQ[i] == True, 0,  $\frac{2}{i}$ ], {i, n}] // N
```

```
⏟таб... ⏟... ⏟чётное чи... ⏟истина
```

```
⏟чи
```

Out[449]=

```
{2., 0., 0.666667, 0.}
```

In[450]:=

```
A = LinearSolve[T, B]
```

```
⏟решить линейные ура
```

Out[450]=

```
{0.347855, 0.652145, 0.652145, 0.347855}
```

In[451]:=

$$\text{Integral} = \frac{(b-a)}{2} * \sum_{i=1}^n A[[i]] * f\left[\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} * xx[[i]]\right]$$

Out[451]=

```
0.903332
```