

Лабораторная работа №2

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Михалькевич Д.Н.
гр. 221701

Вариант 8

Задание 1.1

Задаём матрицы A и B

In[1324]:=

```
k = 8; (*Номер варианта*)  
A = Table[If[i > j, 1, If[i == j, i + 1, If[i < j, 2]]], {i, 7}, {j, 7}];  
      |таб... |условный ... |условный опер... |условный оператор  
B = Table[2 i k - i2, {i, 7}];  
      |таблица значений
```

In[1327]:=

```
MatrixForm[A]  
|матричная форма
```

Out[1327]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

In[1328]:=

```
MatrixForm[B]  
|матричная форма
```

Out[1328]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 28 \\ 39 \\ 48 \\ 55 \\ 60 \\ 63 \end{pmatrix}$$

а) найти число обусловленности матрицы A в норме-максимум $\| \cdot \|_{\infty}$

```
In[1329]:=
normaA = Norm[A, Infinity] (*Норма матрицы A*)
      норма бесконечность

Out[1329]=
14

In[1330]:=
normaInvA = Norm[Inverse[A], Infinity] (*Норма матрицы обратной A*)
      но... обратная ма... бесконечность

Out[1330]=
25
14

In[1331]:=
condA = normaA * normaInvA (*Находим число обусловленности*)

Out[1331]=
25
```

Ответ зцн

б) решить точную систему линейных уравнений $AX = B$

```
In[1332]:=
X = LinearSolve[A, B] (*Найдем решение AX=B*)
  решить линейные уравнения

Out[1332]=
```

$$\left\{ -\frac{471}{28}, -\frac{107}{28}, \frac{47}{28}, \frac{131}{28}, \frac{45}{7}, \frac{52}{7}, \frac{111}{14} \right\}$$

в) решить три возмущенные системы вида $AX = B + \Delta B$, увеличив значение правой части только последнего уравнения системы $AX = B$ последовательно на 0,01%; 0,1% и на 1%

```
In[1333]:=
ΔB1 = B;
ΔB1 = ReplacePart[ΔB1 * 0.0001, Except[7] → 0] (*Получаем ΔB с 0.01%*)
      заменить часть за исключением

ΔB2 = B;
ΔB2 = ReplacePart[ΔB2 * 0.001, Except[7] → 0] (*Получаем ΔB с 0.1%*)
      заменить часть за исключением

ΔB3 = B;
ΔB3 = ReplacePart[ΔB3 * 0.01, Except[7] → 0] (*Получаем ΔB с 1%*)
      заменить часть за исключением

Out[1333]=
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0063}

Out[1334]=
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.063}

Out[1335]=
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.63}
```

In[1336]:=

(*Решаем возмущенную систему с 0.01%*)

X1 = LinearSolve[A, B + ΔB1]

[\[решить линейные уравнения\]](#)

Out[1336]=

{-16.8216, -3.82158, 1.67842, 4.67842, 6.42842, 7.42842, 7.92947}

In[1337]:=

(*Решаем возмущенную систему с 0.1%*)

X2 = LinearSolve[A, B + ΔB2]

[\[решить линейные уравнения\]](#)

Out[1337]=

{-16.8229, -3.82293, 1.67707, 4.67707, 6.42707, 7.42707, 7.93757}

In[1338]:=

(*Решаем возмущенную систему с 1%*)

X3 = LinearSolve[A, B + ΔB3]

[\[решить линейные уравнения\]](#)

Out[1338]=

{-16.8364, -3.83643, 1.66357, 4.66357, 6.41357, 7.41357, 8.01857}

г) найти прогнозируемую предельную относительную погрешность решения каждой возмущенной системы

In[1339]:=

$$\text{PrognosePX1} = \text{condA} * \frac{\text{Norm}[\Delta B1, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[B + \Delta B1, \text{Infinity}]} // \text{PercentForm}$$
[\[форма процен\]](#)

Out[1339]//PercentForm=

0.25%

In[1340]:=

$$\text{PrognosePX2} = \text{condA} * \frac{\text{Norm}[\Delta B2, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[B + \Delta B2, \text{Infinity}]} // \text{PercentForm}$$
[\[форма процен\]](#)

Out[1340]//PercentForm=

2.498%

In[1341]:=

$$\text{PrognosePX3} = \text{condA} * \frac{\text{Norm}[\Delta B3, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[B + \Delta B3, \text{Infinity}]} // \text{PercentForm}$$
[\[форма процен\]](#)

Out[1341]//PercentForm=

24.75%

д) найти относительную погрешность решения каждой возмущенной системы сделать вывод о зависимости относительной погрешности от величины возмущения и числа обусловленности матрицы A.

In[1342]:=

```
PX1 = condA *  $\frac{\text{Norm}[X - X1, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[X1, \text{Infinity}]}$  // PercentForm
[форма процен
```

Out[1342]//PercentForm=

0.1338%

In[1343]:=

```
PX2 = condA *  $\frac{\text{Norm}[X - X2, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[X2, \text{Infinity}]}$  // PercentForm
[форма процен
```

Out[1343]//PercentForm=

1.337%

In[1344]:=

```
PX3 = condA *  $\frac{\text{Norm}[X - X3, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[X3, \text{Infinity}]}$  // PercentForm
[форма процен
```

Out[1344]//PercentForm=

13.36%

Вывод: чем выше величина возмущения и \hat{A} или \hat{A} число обусловленности матрицы A, тем выше относительная погрешность

Задание 1.2

In[1345]:=

```
ClearAll
[очистить всё
```

Out[1345]=

```
ClearAll
```

Задаём матрицы A и B

In[1346]:=

```
k = 8; (*Номер варианта*)
A = Table[ $\frac{1}{i + j - 1}$ , {i, 7}, {j, 7}];
[таблица значений

B = Table[3 i - 2 k, {i, 7}];
[таблица значений
```

In[1349]:=

MatrixForm[A]
 [матричная форма]

Out[1349]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

In[1350]:=

MatrixForm[B]
 [матричная форма]

Out[1350]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -13 \\ -10 \\ -7 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

а) найти число обусловленности матрицы A в норме-максимум $\| \cdot \|_{\infty}$

In[1351]:=

normaA = Norm[A, Infinity] (*Норма матрицы A*)
 [норма] [бесконечность]

Out[1351]=

$$\frac{363}{140}$$

In[1352]:=

normaInvA = Norm[Inverse[A], Infinity] (*Норма матрицы обратной A*)
 [но...] [обратная ма...] [бесконечность]

Out[1352]=

$$379\,964\,970$$

In[1353]:=

condA = N[normaA * normaInvA] (*Находим число обусловленности*)
 [численное приближение]

Out[1353]=

$$9.85195 \times 10^8$$

Ответ 39.85195×10^8

б) решить точную систему линейных уравнений $AX = B$

In[1354]:=

```
X = LinearSolve[A, B] (*Найдем решение AX=B*)
      |
      |_решить линейные уравнения
```

Out[1354]=

```
{917, -43 008, 472 500, -2 049 600, 4 123 350, -3 858 624, 1 357 356}
```

в) решить три возмущенные системы вида $AX = B + \Delta B$, увеличив значение правой части только последнего уравнения системы $AX = B$ последовательно на 0,01%; 0,1% и на 1%

In[1355]:=

```
 $\Delta B1 = B;$ 
 $\Delta B1 = \text{ReplacePart}[\Delta B1 * 0.0001, \text{Except}[7] \rightarrow 0]$  (*Получаем  $\Delta B$  с 0.01%*)
      |               |
      |_заменить часть |_за исключением
 $\Delta B2 = B;$ 
 $\Delta B2 = \text{ReplacePart}[\Delta B2 * 0.001, \text{Except}[7] \rightarrow 0]$  (*Получаем  $\Delta B$  с 0.1%*)
      |               |
      |_заменить часть |_за исключением
 $\Delta B3 = B;$ 
 $\Delta B3 = \text{ReplacePart}[\Delta B3 * 0.01, \text{Except}[7] \rightarrow 0]$  (*Получаем  $\Delta B$  с 1%*)
      |               |
      |_заменить часть |_за исключением
```

Out[1355]=

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.0005}
```

Out[1356]=

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.005}
```

Out[1357]=

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.05}
```

In[1358]:=

```
(*Решаем возмущенную систему с 0.01%*)
X1 = LinearSolve[A, B +  $\Delta B1$ ]
      |
      |_решить линейные уравнения
```

Out[1358]=

```
{923.006, -43 260.3, 475 023., -2.05969  $\times 10^6$ , 4.14227  $\times 10^6$ , -3.87527  $\times 10^6$ , 1.36291  $\times 10^6$ }
```

In[1359]:=

```
(*Решаем возмущенную систему с 0.1%*)
X2 = LinearSolve[A, B +  $\Delta B2$ ]
      |
      |_решить линейные уравнения
```

Out[1359]=

```
{977.06, -45 530.5, 497 725., -2.1505  $\times 10^6$ , 4.31254  $\times 10^6$ , -4.02511  $\times 10^6$ , 1.41285  $\times 10^6$ }
```

In[1360]:=

```
(*Решаем возмущенную систему с 1%*)
X3 = LinearSolve[A, B +  $\Delta B3$ ]
      |
      |_решить линейные уравнения
```

Out[1360]=

```
{1517.6, -68 233.2, 724 752., -3.05861  $\times 10^6$ , 6.01524  $\times 10^6$ , -5.52349  $\times 10^6$ , 1.91231  $\times 10^6$ }
```

г) найти прогнозируемую предельную относительную погрешность решения каждой возмущенной системы

In[1361]:=

$$\text{PrognosePX1} = \text{condA} * \frac{\text{Norm}[\Delta B1, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[B + \Delta B1, \text{Infinity}]} // \text{PercentForm} \quad \text{[форма процен]}$$

Out[1361]//PercentForm=

3789211%

In[1362]:=

$$\text{PrognosePX2} = \text{condA} * \frac{\text{Norm}[\Delta B2, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[B + \Delta B2, \text{Infinity}]} // \text{PercentForm} \quad \text{[форма процен]}$$

Out[1362]//PercentForm=

37892111%

In[1363]:=

$$\text{PrognosePX3} = \text{condA} * \frac{\text{Norm}[\Delta B3, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[B + \Delta B3, \text{Infinity}]} // \text{PercentForm} \quad \text{[форма процен]}$$

Out[1363]//PercentForm=

378921110%

д) найти относительную погрешность решения каждой возмущенной системы сделать вывод о зависимости относительной погрешности от величины возмущения и числа обусловленности матрицы A.

In[1364]:=

$$\text{PX1} = \text{condA} * \frac{\text{Norm}[X - X1, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[X1, \text{Infinity}]} // \text{PercentForm} \quad \text{[форма процен]}$$

Out[1364]//PercentForm=

449966114%

In[1365]:=

$$\text{PX2} = \text{condA} * \frac{\text{Norm}[X - X2, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[X2, \text{Infinity}]} // \text{PercentForm} \quad \text{[форма процен]}$$

Out[1365]//PercentForm=

4322002381%

In[1366]:=

$$\text{PX3} = \text{condA} * \frac{\text{Norm}[X - X3, \text{Infinity}]}{\text{Norm}[X3, \text{Infinity}]} // \text{PercentForm} \quad \text{[форма процен]}$$

Out[1366]//PercentForm=

30985968253%

Вывод: чем выше величина возмущения и κ (или α) число обусловленности матрицы A , тем выше относительная погрешность

Задание 2

Решить методом прогонки трехдиагональную систему, составить таблицу прогоночных коэффициентов

In[1367]:=

ClearAll
 |ОЧИСТИТЬ ВСЁ

Out[1367]=

ClearAll

In[1368]:=

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 13 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} -14 \\ 7 \\ -23 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix};$$

Прогоночные коэффициенты:

In[1370]:=

a = {0, 1, 2, 1, 3};

In[1371]:=

b = {7, 12, -9, 13, 15};

In[1372]:=

c = {2, 3, -4, 2, 0};

In[1373]:=

d = {-14, 7, -23, -8, 12};

In[1374]:=

In[1375]:=

L = {0, 0, 0, 0, 0};

In[1376]:=

M = {0, 0, 0, 0, 0};

In[1377]:=

$$L[[1]] = -\frac{c[[1]]}{b[[1]]};$$

$$M[[1]] = \frac{d[[1]]}{b[[1]]};$$

In[1379]:=

```
For[i = 2, i ≤ 5, i++,
  |цикл для
  
$$L[i] = - \frac{c[i]}{b[i] + a[i] \times L[i - 1]}$$

]; L
```

Out[1379]=

$$\left\{ -\frac{2}{7}, -\frac{21}{82}, -\frac{82}{195}, -\frac{390}{2453}, 0 \right\}$$

In[1380]:=

```
For[i = 2, i ≤ 5, i++,
  |цикл для
  
$$M[i] = \frac{d[i] - a[i] \times M[i - 1]}{b[i] + a[i] \times L[i - 1]}$$

]; M
```

Out[1380]=

$$\left\{ -2, \frac{63}{82}, \frac{503}{195}, -\frac{2063}{2453}, 1 \right\}$$

In[1381]:=

```
X = {0, 0, 0, 0, 0}; X[5] = M[5];
```

In[1382]:=

```
For[i = 4, i ≥ 1, i--,
  |цикл для
  X[i] = L[i] * X[i + 1] + M[i]
]; X
```

Out[1382]=

$$\{-2, 0, 3, -1, 1\}$$

Ответ *зäцзүzhzİøzä*

Задание 3

Решить систему n-го порядка $AX = B$ методом Якоби и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ при $n=10$ и $n=20$. Сравнить число итераций, необходимых для достижения точности ε этими методами.

```
ClearAll;
|очистить всё
```

In[1542]:=

```
n = 10;
k = 8;
```

In[1544]:=

```
A = Table[If[i == j, 2 * n, 1], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
      |таб... |условный оператор
B = Table[(2 * n - 1) * i + (n * (n + 1)) / 2 + (3 * n - 1) * (k - 1), {i, 1, n}];
      |таблица значений
```

■ Метод Якоби

In[1546]:=

```
jacobi[X0_, maxIterations_, tolerance_] := Module[
      |программный модуль
  {X = X0, Xprev, iterations = 0, error = tolerance + 1, n = Length[X0]},
      |длина
  While[iterations < maxIterations && error > tolerance,
      |цикл-пока
    Xprev = X;
    X = Table[(B[[i]] - Sum[A[[i, j]] * Xprev[[j]], {j, 1, n}] + A[[i, i]] * Xprev[[i]]) /
      |таблица значе... |сумма
      A[[i, i]], {i, 1, n}];
    error = Max[Abs[X - Xprev]];
      |м... |абсолютное значение
    iterations++;
  ];
  {X, iterations}
];
{Xjacobi, iterationsJacobi} = jacobi[X0, maxIterations, tolerance];
```

■ Начальное приближение

In[1548]:=

```
X0 = ConstantArray[0, n];
      |постоянный массив
```

■ Параметры

In[1549]:=

```
maxIterations = 1000;
tolerance = 10^(-3);
```

■ Вывод Якоби

In[1551]:=

```
Print["Метод Якоби"];
      |печатать
Print["Решение:", N[Xjacobi, 9]];
      |печатать |численное приближение
Print["Число итераций:", iterationsJacobi];
      |печатать
```

Метод Якоби

Решение: {7.99982546, 8.99982546, 9.99982546, 10.9998255,
11.9998255, 12.9998255, 13.9998255, 14.9998255, 15.9998255, 16.9998255}

Число итераций:14

■ Метод Зейделя

```
In[1554]:=
gaussSeidel[X0_, maxIterations_, tolerance_] :=
Module[{X = X0, Xprev, iterations = 0, error = tolerance + 1, n = Length[X0]},
  |программный модуль |длина
  While[iterations < maxIterations && error > tolerance, Xprev = X;
    |цикл-пока
    Do[X[[i]] = (B[[i]] - Sum[A[[i, j]] * X[[j]], {j, 1, i - 1}) -
      |оператор цикла |сумма
      Sum[A[[i, j]] * Xprev[[j]], {j, i + 1, n}]) / A[[i, i]], {i, 1, n}];
    |сумма
    error = Max[Abs[X - Xprev]];
    |м... |абсолютное значение
    iterations++;];
  {X, iterations}];
{Xzeidel, iterationsZeidel} = gaussSeidel[X0, maxIterations, tolerance];
```

■ Вывод Зейделя

```
In[1556]:=
Print["Метод Зейделя"];
|печатать
Print["Решение:", N[Xzeidel, 9]];
|печатать |численное приближение
Print["Число итераций:", iterationsZeidel];
|печатать
```

Метод Зейделя

Решение: {7.99995611, 8.99995270, 9.99996015, 10.9999730,
11.9999866, 12.9999979, 14.0000053, 15.0000088, 16.0000092, 17.0000075}

Число итераций:6

```
In[1559]:=
ClearAll;
|очистить всё
```

```
In[1560]:=
```

```
n = 20;
k = 8;
```

In[1562]:=

```

A = Table[If[i == j, 2 * n, 1], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
      |таб... |условный оператор
B = Table[(2 * n - 1) * i + (n * (n + 1)) / 2 + (3 * n - 1) * (k - 1), {i, 1, n}];
      |таблица значений

```

■ Метод Якоби

In[1564]:=

```

jacobi[X0_, maxIterations_, tolerance_] := Module[
      |программный модуль
  {X = X0, Xprev, iterations = 0, error = tolerance + 1, n = Length[X0]},
      |длина
  While[iterations < maxIterations && error > tolerance,
      |цикл-пока
    Xprev = X;
    X = Table[(B[[i]] - Sum[A[[i, j]] * Xprev[[j]], {j, 1, n}] + A[[i, i]] * Xprev[[i]]) /
      |таблица значе... |сумма
      A[[i, i]], {i, 1, n}];
    error = Max[Abs[X - Xprev]];
      |м... |абсолютное значение
    iterations++;
  ];
  {X, iterations}
];
{Xjacobi, iterationsJacobi} = jacobi[X0, maxIterations, tolerance];

```

■ Начальное приближение

In[1566]:=

```

X0 = ConstantArray[0, n];
      |постоянный массив

```

■ Параметры

In[1567]:=

```

maxIterations = 1000;
tolerance = 10^(-3);

```

■ Вывод Якоби

In[1569]:=

```

Print["Метод Якоби"];
      |печатать
Print["Решение:", N[Xjacobi, 9]];
      |печатать |численное приближение
Print["Число итераций:", iterationsJacobi];
      |печатать

```

Метод Якоби

Решение: {12.5917245, 13.5917245, 14.5917245, 15.5917245,
16.5917245, 17.5917245, 18.5917245, 19.5917245, 20.5917245, 21.5917245}

Число итераций:8

■ Метод Зейделя

```
In[1572]:=
gaussSeidel[X0_, maxIterations_, tolerance_] :=
Module[{X = X0, Xprev, iterations = 0, error = tolerance + 1, n = Length[X0]},
  |программный модуль |длина
  While[iterations < maxIterations && error > tolerance, Xprev = X;
    |цикл-пока
    Do[X[[i]] = (B[[i]] - Sum[A[[i, j]] * X[[j]], {j, 1, i - 1}) -
      |оператор цикла |сумма
      Sum[A[[i, j]] * Xprev[[j]], {j, i + 1, n}]) / A[[i, i]], {i, 1, n}];
    |сумма
    error = Max[Abs[X - Xprev]];
    |м... |абсолютное значение
    iterations++;];
  {X, iterations}];
{Xzeidel, iterationsZeidel} = gaussSeidel[X0, maxIterations, tolerance];
```

■ Вывод Зейделя

```
In[1574]:=
Print["Метод Зейделя"];
|печатать
Print["Решение:", N[Xzeidel, 9]];
|печатать |численное приближение
Print["Число итераций:", iterationsZeidel];
|печатать
```

Метод Зейделя

Решение: {8.00001401, 9.00001295, 10.0000114, 11.0000095, 12.0000075, 13.0000055,
14.0000036, 15.0000019, 16.0000004, 16.9999992, 17.9999983, 18.9999977, 19.9999973,
20.9999972, 21.9999972, 22.9999974, 23.9999977, 24.9999981, 25.9999985, 26.9999989}

Число итераций:7

Вывод 3У метода Зейделя меньше итераций в обоих случаях