Alexander Norm and Thurston Norm

Daniel Valenzuela

Geboren am 21.07.1992 in München

14. Juni 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuer: Prof. Dr. Ursula Hamenstädt

Mathematisches Institut

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1 Einführung

Der wesentliche Gegenstand dieser Arbeit, ist die Veröffentlichung von McMullen.

In dem Fall, dass eine gegebene kompakte 3-Mannigfaltigkeit homöomorph zu einem Knotenkomplement ist — genauer gesagt, zu einer Sphäre aus der eine offene Tubenumgebung eines eingebetteten Knotens entfernt wird — ist der Rang der Fundamentalgruppe 1, also $b_1(M) = 1$. Das genauere Studium der Fundamentalgruppe erweist sich als schwierig, deswegen geht man zu der Abelianisierung der Kommutatoruntergruppe über. Diese ist nach Hurewicz isomorph zu der ersten Homologiegruppe der zyklischen Überlagerung. Da aber auch diese Gruppe im Allgemeinen nicht endlich erzeugt oder endlich präsentiert ist, betrachtet man die induzierte Wirkung der Decktransformationen auf der Homologie, weiter betrachtet man sogar die Wirkung des Gruppenrings $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, wobei t Erzeuger der Deckgruppe ist, die aus der abelschen Gruppe einen $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-Modul macht — den Alexander Modul. Der Alexander Modul zeichnet sich durch weniger Erzeuger und Relationen aus und bietet eine fruchtbare Grundlage für algebraische Invarianten, inspieriert durch die Knotentheorie. Genau diese Inspiration liegt dem Paper von McMullen zu Grunde. Er verallgemeinert darin eine Abschätzung zweier Invarianten (auf Knotenkomplementen) aus der Knotentheorie, auf allgemeinere Klassen von 3-Mannigfaltigkeiten.

2 Grundlegendes

Zunächst wird ein Überblick über die nötigen Definitionen gegeben. Zuvor noch eine Beschränkung der Räume die in dieser Arbeit behandelt werden:

2.1 Die betrachteten Räume

Im Folgenden sei M eine kompakte, orientierbare, zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Falls diese einen Rand hat, ist er homöomorph zu einer disjunkten Vereinigung von Tori.

2.2 Alexander Invarianten

Ein Clou der folgenden Methoden ist es, die Struktur einer Überlagerung — genauer gesagt ihre Decktransformationen — auszunutzen, indem man den Gruppenring betrachtet. Der Gruppenring $R[G]$ ist algebraischer Herkunft und kann für allgemeine kommutative Ringe R und Gruppen bzw. Monoide G definiert werden, jedoch genügt es für diese Arbeit eine speziellere Definition heranzuziehen, für den Fall das $G = F$ eine endlich erzeugte freie abelsche Gruppe und $R = \mathbb{Z}$ ist.

Definition 2.1 (Gruppenring)**.** Sei F eine freie abelsche Gruppe. Dann ist der *Gruppenring* definiert als:

$$\mathbb{Z}[F] = \sum_{i \in I} a_i f_i, a_i \in \mathbb{Z}, f_i \in F, |I| < \infty$$

Falls also F nun eine unendlich zyklische Gruppe mit Erzeuger t ist, lässt sich der Gruppenring über F als $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, also als Ring der formalen Laurentpolynome in der Variablen t auffassen. Grundlage für die Definitionen der Alexander Invarianten ist die zur Abelianisierung der Fundamentalgruppe gehörende Überlagerung. Allgemeiner sei M eine 3-Mannigfaltigkeit mit den obigen Beschränkungen und $\phi : G = \pi_1(M) \to F$ ein Homomorphismus in eine freie abelsche Gruppe F. Aus der Überlagerungstheorie ist bekannt, dass nun eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\hat{M}_\phi$ existiert, die M überlagert und auf Level der Fundamentalgruppen $ker\phi \cong \pi_1(\hat{M}_\phi) \overset{p_*}{\hookrightarrow} \pi_1(M)$ einbettet. Diese ist bis auf Homöomorphie eindeutig. Die Decktransformationsgruppe ist dann isomorph zum Quotienten $\pi_1(M)/p_*\pi_1(\hat{M}_\phi) \cong F$. Dieser operiert dann auf $\hat{M}_\phi$ durch Homöomorphismen, induziert also auch eine Operation auf $\pi_1(\hat{M}_\phi)$ und auf $H_1(\hat{M}_\phi)$. Da $\mathbb{Z}$ auf jeder abelschen Gruppe wirkt, ist folgende Definition gerechtfertigt:

Definition 2.2 (Alexander Modul)**.** Der Alexander Modul ist definiert als

$$A_\phi(M) = H_1(\hat{M}_\phi)$$

aufgefasst als $\mathbb{Z}[F]$-Modul, mit der induzierten Wirkung der Decktransformationen.

Es wird sich bei weiterer Inspektion herausstellen, dass der Alexander Modul im Fall einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit immer endlich erzeugt ist. Da es sich bei dem Gruppenring nicht um einen Hauptidealring handelt, ist es im Allgemeinen nicht möglich eine Zerlegung des Alexander Moduls in zyklische direkte Summanden zu finden. Als algebraische Invariante, wird dem Modul stattdessen hier ein Reihe von Idealen in dem Gruppenring zugewiesen — die Elementarideale. Da der Alexander Modul endlich erzeugt über dem Gruppenring ist, existiert eine freie Auflösung, aus derer Präsentation für den Modul wir die Elementarideale gewinnen möchten. Betrachte die endliche Präsentation:

$$\mathbb{Z}[F]^k \xrightarrow{X} \mathbb{Z}[F]^n \xrightarrow{\alpha} A_\phi(M) \to 0$$

wobei X eine darstellende Matrix bezüglich der kanonischen Basen $e_1, \cdots, e_k$ und $e'_1, \cdots, e'_n$ ist. Diese Präsentationsmatrix ist bis auf Vertauschen von Zeilen, Hinzufügen von Einheitsblöcken oder Nullspalten und Addieren eines Vielfachen einer Spalte oder Zeile auf eine jeweils andere eindeutig. Das liefert die nächste Definition

Definition 2.3. Definiere das i-te Elementarideal von M bezüglich ϕ $E_i(A_\phi(M)) \subset \mathbb{Z}[F]$ als das von den $(n-i-1)$-Minoren erzeugte Ideal.

Natürlich lassen sich Elementarideale für alle endlich präsentierten Moduln über kommutativen Ringen analog definieren.

Falls ϕ die Abelianisierung ist, definiert diese Invariante des Alexander Moduls natürlich auch eine Invariante der Mannigfaltigkeit. Nun ist $\mathbb{Z}[F]$ kein Hauptidealring, jedoch ist es durchaus interessant als weitere Invariante das kleinste Hauptideal zu betrachten das ein Elementarideal enthält.

Definition 2.4. (Alexander Polynom) Definiere das Alexander Polynom Δ_ϕ als einen größten gemeinsamen Teiler von $E_1(A_\phi(M))$.

Bemerkung. In dem Gruppenring sind die Einheiten genau die Gruppenelemente. (im Allgemeinen nicht ganz). Das Alexander Polynom ist bis auf Multiplikation mit einer Einheit aus dem Gruppenring wohldefiniert.

Bleibt nur noch die Alexander Norm zu definieren, die eine Norm auf der ersten Kohomologie der 3-Mannigfaltigkeit beschreibt.

Definition 2.5. Sei $\Delta \in \mathbb{Z}[F]$ das Alexander Polynom das zu der Abelianisierung der Fundamentalgruppe gehört. So ist Δ von der Form:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \qquad\qquad a_k \neq 0, f_i = f_j \Rightarrow i = j$$

Sei nun $\phi \in \hom(F, \mathbb{Z}) \cong H^1(M, \mathbb{Z})$, dann definieren wir die Alexander Norm von ϕ als

$$||\phi||_A = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \Delta = 0 \\ \sup \phi(f_i - f_j) \end{cases}$$

Wobei das Supremum über die Gruppenelemente f_i genommen wird, die in Δ auftauchen.

2.3 Thurston Invariante

Ziel ist es eine weitere Norm auf der ersten Kohomologie der kompakten 3-Mannigfaltigkeit zu definieren. Poincaré Dualität liefert in diesem Fall einen Isomorphismus $H^1(M;\mathbb{Z}) \to H_2(M;\mathbb{Z})$. Eine zu $\phi \in H^1(M,\mathbb{Z})$ duale Fläche wird später noch explizit beschrieben werden. Tatsächlich ist es sogar ein bedeutendes Zwischenresultat, das eine solche Fläche immer mit Eigenschaften gewählt werden kann die bestimmten Abschätzungen genügen. Auf der anderen Seite sollte so eine gewählte Fläche auch eine Minimalitätseigenschaft erfüllen und zwar bezüglich der folgenden Norm:

Definition 2.6 (Thurston Norm)**.** Definiere die Thurston Norm für $\phi \in H^1(M,\mathbb{Z})$ als

$$||\phi||_T = \{\min \chi_-(S) |\text{ S ist orientierbar eingebettete Fläche dual zu } \phi\},$$

wobei $\chi_-(S) = \sum \max(-\chi(S_i), 0)$ und $S = \sqcup S_i$ die Zusammenhangskomponenten von S sind.

Als Abschluss dieses einführenden Kapitels, soll noch folgendes essentielles Lemma gezeigt werde:

Lemma 2.1. *Die Alexander Norm und die Thurston Norm definieren Halbnormen auf der ersten Kohomologie einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Falls nicht Widerspruch □

3 Vorbereitungen

Wie sich im ersten Beweis herausstellen wird, ist der Gruppenring $\mathbb{Z}[F]$ für eine abelsche freie Gruppe F noethersch, da allerdings als Grundring der Ring der ganzen Zahlen dient, existieren Ideale die keine Hauptideale sind. Die Theorie der endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen ist sehr ergiebig — der Elementarteilersatz erlaubt die Zerlegung eines solchen Moduls in zyklische Moduln. Um Invarianten auf endlich erzeugten Moduln über noetherschen Ringen zu erhalten, lassen sich verschiedene Schritte im Beweis des Elementarteilersatzes bis zu einem bestimmten Grad nachahmen. Mit dieser Hintergrundgedanken ergeben sich die Elementarideale.

3.1 Über endlich erzeugte Moduln eines noetherschen Rings

Um die Situation für spätere Berechnungen angenehmer zu gestalten, überzeugt man sich zunächst, dass der Alexander Modul tatsächlich endlich erzeugt über dem Gruppenring ist. Dieser Satz hätte ebenso gut an das Ende diesen Abschnittes gepasst, als Ergebnis/Nutzen, jedoch soll die Zielsetzung nicht vorenthalten werden:

Proposition 3.1. *$A_\phi(M)$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[F]-Modul$.*

Bemerkung. Eine algebraische Variante des Beweises befindet sich im Appendix.

Beweis. Da M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit ist, existiert eine endliche CW Struktur. Da es für CW Komplexe gleichbedeutend ist die zelluläre Homologie zu berechnen, reicht es den zellulären Kettenkomplex zu einer endlichen CW Struktur betrachten. Da in diesem alle Kettengruppen endlich erzeugt sind, folgt dass in dem Kettenkomplex der Überlagerung alle Kettengruppen als Gruppenring-Moduln endlich erzeugt sind, denn die Decktransformationen identifizieren die Erzeuger der Kettengrupen die das gleiche Bild unter der Überlagerungsabbildung haben. Wenn jetzt nachgewiesen werden kann, dass die Quotientenbildung der Kettengruppen als Übergang zur Homologie verträglich ist mit der Quotientenbildung als Gruppenring Moduln, würde es genügen dass der Ring noethersch ist und der Alexander Modul wäre als Quotient endlich erzeugter Moduln über einem noetherschen Ring endlich erzeugt (siehe Lemma 3.3), genauso wie alle Homologiegruppen dann über dem Gruppenring endlich erzeugt wären.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass es sich bei $\mathbb{Z}[F]$ um einen noetherschen Ring handelt. Da $F \cong \mathbb{Z}^n$, seien $f_1, \cdots, f_n$ Erzeuger von F. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist der Polynomenring über $\mathbb{Z}$ in endlich vielen Variablen noethersch. Ebenso ist die Lokalisierung eines noetherschen Ringes noethersch, da jedes Ideal in der Lokalisierung Bild eines endlich erzeugten Ideals ist. Also genügt es eine Surjektion von einem solchen in den Gruppenring zu finden, denn ein surjektiver Ringhomomorhpismus, ordnet jedem Ideal im überlagerten Ring, ein Ideal im ursprünglichen Ring zu, welches endlich erzeugt ist. Aber ein solcher ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}] &\to \mathbb{Z}[F]\\ X_i &\mapsto f_i\end{aligned}$$

□

Sei im Folgenden nun M ein endlich erzeugter R-Modul wobei R einen noetherschen Ring bezeichnet.

Lemma 3.2. *M ist über R endlich präsentiert. Desweiteren kann die Präsentationsmatrix quadratisch gewählt werden....no*

Beweis. M ist endlich erzeugt über R also existiert folgende exakte Sequenz:

$$R^n \to M \to 0$$

da R^n aber noethersch ist und Kerne von Homomorphismen Untermoduln sind, kann die Sequenz auf der linken Seite folgendermaßen ergänzt werden:

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

□

Lemma 3.3. *Sei $N \subset M$ ein Untermodul von dem R-Modul M. Dann ist der Faktormodul M/N endlich erzeugt über R.*

Beweis. Sei $X \to Y$ ein surjektiver Homomorphismus von Moduln über einem noetherschen Ring. Dann folgt aus noetherschen Eigenschaft von X auch die von Y, da Untermoduln von Y von den Bildern der endlich vielen Erzeuger der zurückgezogenen Untermoduln erzeugt werden.
Zweifaches Anwenden dieses Argumentes liefert unmittelbar die Aussage mit surjektiven Homomorphismen $R^n \to M$ und $M \to M/N$ □

4 Beweis des Theorems

Bevor die Wahl einer dualen Fläche spezifiziert wird, sodass die zu zeigende Abschätzung daraus folgen wird, widmet sich der folgende Teil der zu betrachtenden Überlagerung bezüglich einer Homologieklasse. Will man mit einer Überlagerung Berechnungen anstellen, so sollte man sie möglichst gut kennen. Deswegen folgt nun eine explizite Konstruktion, die sich im späteren Beweis als hilfreich herausstellen wird.

Bemerkung (Aufschneiden an einer Fläche). Aus der Überlagerungstheorie ist bekannt, dass zu jeder normalen Untergruppe der Fundamentalgruppe eines einigermaßen gut zusammenhängendem Hausdorffraum (insbesondere Mannigfaltigkeiten), auch eine normale Überlagerung existiert, die bis auf Überlagerungsisomorphie eindeutig ist. Nun definiert aber ein primitives Element $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ per Definition einen Homomorphismus auf der ersten Homologiegruppe, aber durch die universelle Eigenschaft der Abelianisierungsabbildung zusammen mit Hurewicz bedeutet das, das eine eindeutige Abbildung $\hat{\phi}$ existiert, die über ϕ faktorisiert, mit anderen Worten das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \\
H_1(M) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dieses ϕ liefert also die eindeutige normale Untergruppe $[\pi_1(M), \pi_1(M)] \subset \ker \hat{\phi} \subset \pi_1(M)$, welche wiederrum eine Überlagerung definiert, die fortan M_ϕ genannt wird. Da die Thurston Norm eigentlich eine Halbnorm auf der zweiten Homologie einer 3-Mannigfaltigkeit definiert und über Poincaré bzw. Lefschetz Dualität nach $H_1(M)$ übertragen wird, stellt sich die Frage nach einer Abhängigkeit der Überlagerung von einer dualen Fläche. Sei also $(S, \partial S) \subset (M \partial M)$ eine eingebettete orientierte Fläche. Da diese Kodimension 1 hat, ist sie auch zweiseitig, hat also eine Umgebung U, sodass ein Homöomorphismus $S \times (-\epsilon, \epsilon) \to U$ existiert dessen Einschränkung auf $S \times \{0\}$ die Inklusion ist. Das bedeutet, dass die 3-Mannigfaltigkeit an S äufgeschnitten"werden kann (siehe etwa [1]), wobei das Aufschneiden bedeutet, das Komplement der Fläche zu betrachten (das Resultat ist offensichtlich eine Mannigfaltigkeit, jedoch können Eigenschaften wie Kompaktheit oder Randbedingungen entfallen). Will man nun durch Aufschneiden gewonnene Kopien $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}, M_i \cong M - S$ wieder verkleben, erweist sich die Zweiseitigkeit der Fläche als günstig. Eine zuvor fixierte zweiseitige Abbildung $h : S \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ liefert nämlich durch $h(S, (-\epsilon, 0))$ und $h(S, (0, \epsilon))$ offene Mengen M_i^- und M_i^+ in den M_i. Durch den strukturerhaltenden Diffeomorphismus h, können nun M_i und M_{i+1} jeweils entlang M_i^+ und M_{i+1}^- verklebt werden — genauer: h liefert eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung

$$\cdots \sqcup M_{i-1} \sqcup (S \times (-\epsilon, \epsilon)) \sqcup M_i \sqcup (S \times (-\epsilon, \epsilon)) \sqcup M_{i+1} \sqcup \cdots ,$$

sodass der Quotient eine unendlich zyklische Überlagerung mit der offensichtlichen Projektion bildet. Ein weiterer Vorteil dieser exlpliziten Konstruktion ist es, die Decktransformationsgruppe zu sehen. Sie ist durch einen Erzeuger t über $t \mapsto 1$ zu $\mathbb{Z}$ isomorph und unter diesem Isomorphismus entspricht $n \in \mathbb{Z}$ einer Translation aller M_i um n. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Überlagerung auch *die* zu S gehörige Überlagerung ist, die in dem obigen Sinne dem dualen ϕ entspricht. Dies sieht man ein, indem man sich (mithilfe der Zweiseitigkeit) unter dem Isomorphismus $H^1(M;\mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$ einen glatten Repräsentanten des Bildes von ϕ aussucht (**1.ein solcher existiert immer**). **2.eventuelle Umstrukturierung: Konstruktionen, zuerst der Graph (und somit als Korollar, dass jede duale orientierte (somit zweiseitige) Fläche als Urbild dargestellt werden kann), dann die zyklische Überlagerung**. Bekanntlicherweise finden wir eine solche Abbildung f und ein $p \in S^1$, sodass $f^{-1}(p)$ genau die orientierte Fläche ist. Durch paralleles Aufschneiden von M an S und S^1 and p erhält man folgendes kommutatives Diagramm von Überlagerungen:

$$\begin{tikzcd} M_\phi \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d] \\ M \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd}$$

Andererseits ist dies auch ein Pullback Diagramm, da aber der Pullback einer Überlagerung bezüglich f bis auf Homöomorphie eindeutig ist, folgt dass die unendlich zyklische Überlagerung durch Aufschneiden und Verkleben zu $\ker(f_* : \pi_1(M) \to \pi_1(S^1)) = ker\phi$ ist.

Nun wollen wir uns eine besondere Art von Flächen anschauen, nämlich die Repräsentanten der zu ϕ dualen Klasse, bei denen χ_- minimal ist. Das immer ein Repräsentat existiert, der gewissen Eigenschaften genügt, sichert der folgende Satz:

Lemma 4.1. *Sei $\phi \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ ein primitives Element dessen Kern endlichen Rang hat. Dann existiert eine zusammenhängende Thurstonnorm-minimierende Fläche $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ mit $\phi \mapsto [S]$ unter Poincaré Dualität und $b_2(S) = b_3(M)$, so dass folgende Abschätzung erfüllt ist:*

$$b_1(S) \leq b_1(ker(\phi))$$

Beweis. Wähle unter allen Thurstonnorm-minimierenden Flächen eine orientierte Fläche S mit einer geringsten Anzahl an Zusammenhangskomponenten.
Behauptung: Diese Fläche ist zusammenhängend
Bezeichne $S = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n$ und $M - S = M_1 \sqcup \cdots \sqcup M_m$ die Zusammenhangskomponenten von S bzw. $M - S$. Betrachte nun den gerichteten Graphen G dessen Knoten bijektiv den Komponenten M_i entsprechen und dessen Kanten aus den Komponenten S_i mit ihrer Orientierung hervorgehen, also ein Graph mit m Knoten und n Kanten, wobei eine Kante von einem Knoten zu einem anderen verläuft, wenn ihre assozierten Komponenten M_i, M_j durch das entsprechende Flächenstück von S getrennt werden, wobei die Komponenten das Flächenstück in der negativen beziehungsweise positiven Umgebung berühren je nachdem ob die Kante vom assozierten Knoten aus oder eingeht. Mit genau diesen zweiseitigen Umgebungen der Flächenkomponenten ist es möglich sich eine Abbildung $M \to G$ zu definieren, welche die Assozierungen respektiert. Sei außerdem $G \to S^1$ die Abbildung die jede Kante entsprechend ihrer Richtung einmal um die Sphäre

abbildet und die Knoten auf einen ausgezeichneten Punkt. Bezüglich der Komposition der beiden Abbildungen $M \to S^1$, ist nun ϕ das Bild des Erzeugers von $H^1(S^1)$ unter der Rückziehung auf der Kohomologie, da $M \to S^1$ eine zu S duale Kohomologieklasse definiert. Genauer gesagt, kann die Abbildung offensichtlich so gewählt werden, dass das Urbild eines Punktes (verschieden dem ausgezeichneten) einer zu S homologen Fläche ist, also $M \to S^1$ unter der bekannten Bijektion $H^1(M, \mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$ genau ϕ entspricht. Unter diesen Identifikationen, ist klar, dass G homöomorph zu einem Kreis ist. Dafür betrachte man folgendes Diagramm von Pullbacks von Überlagerungen:

$$\begin{tikzcd}
M_\phi \arrow[r] \arrow[d] & G_\phi \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d] \\
M \arrow[r] & G \arrow[r] & S^1
\end{tikzcd}$$

Es folgt unmittelbar, dass diese Überlagerungen zyklisch sind, also unendlich zyklische Decktransformationsgruppen haben. Jedes Element in $\pi_1(G_\phi)$ ist homotop zu einem Lift einer Schleife aus $\pi_1(G)$ (G erbt den Zusammenhang von M, deswegen die Vernachlässigung des Basispunktes). Unter Annahme einer Kompatibilitätsvorraussetzung dieser Überlagerungen durch Pullbacks mit den Überlagerungen durch Aufschneiden an dualen Flächen (deswegen die suggerierende Schreibweise M_ϕ), entsteht G_ϕ durch Äufschneiden an den Knoten", also liftet jede Schleife aus G trivial. Folglich ist G_ϕ einfach zusammenhängend, überlagert G also universell. Somit ist $\pi_1(G) = \mathbb{Z}$. Also ist G vom Homototyp ein Kreis. Da G aber auch die Kompaktheit von M erbt, ist nur noch die Existenz von Knoten ohne ein- oder ausgehende Kanten auszuschließen. Diese ist aber durch die Minimalitätseigenschaft im Bezug auf die Komponenten der gewählten Fläche ausgeschlossen, da unter den Identifikationen alle Kanten $S_i, i \in I$(nur aus- bzw. eingehend) von einem solchen Knoten M_i, beranden:

$$(M_i \cup \sqcup_{i\in I} S_i, \pm \sqcup_{i\in I} S_i) \implies [\sqcup_{i\in I} S_i] = 0$$

dies würde eine Fläche mit $|I|$ weniger Komponenten liefern:

$$[S] = [\sqcup_{i\notin I} S_i \bigsqcup \sqcup_{i\in I} S_i] = [\sqcup_{i\notin I} S_i] \bigsqcup [\sqcup_{i\in I} S_i] = [\sqcup_{i\notin I} S_i]$$

Betrachtet man nun die induzierte Abbildung auf der Homologie $(G \to S^1)_*$, so ist diese ein Isomorphismus, da ϕ primitiv ist. Also besitzt G nur eine Kante und die Fläche S ist zusammenhängend.

Die nächste Gleichheit, dass der Rang auf den Top-Homologien von S und M übereinstimmen, hängt von der Existenz eines Randes ab. Da $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ folgt aus $\partial S \neq \emptyset$ direkt $b_2(S) = b_3(M) = 0$. Falls S aber leeren Rand hat, gilt $b_2(S) = 1$ und es muss $b_3(M) = 1$ gezeigt werden. Äquivalent dazu wird die Existenz eines Randes von M widerlegt:

Nach Annahme existeren nur Tori als Randkomponenten. Sei $T \subset \partial M$ eine solche Randkomponente. Da S keinen Rand hat, also T nicht berührt, enthält die unendlich zyklische Überlagerung M_ϕ auch unendlich zyklisch viele Kopien von T als Randkomponenten. Unter Verwendung der obigen Konstruktion 4, liftet T in jedes M_i. Im Folgenden soll die Notation $\hat{M}_i$ für die (wieder) kompakte (Unter-)Mannigfaltigkeit verwendet werden, die durch die Einschränkung auf den Quotienten von $(S \times (-\epsilon, 0]) \sqcup M_i \sqcup (S \times [0, \epsilon))$ **3.komische Richtung ggf. oben ändern** entsteht. Zusammen mit der langen exakten Sequenz für eine kompakte orienierbare Mannigfaltigkeit $(N, \partial N)$

$$\begin{tikzcd} H_2(N;\mathbb{Q}) \arrow[r] & H_2(N,\partial N;\mathbb{Q}) \arrow[r] & H_1(\partial N;\mathbb{Q}) \arrow[r] & H_1(N;\mathbb{Q}) \\ & H^1(N;\mathbb{Q}) \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

und der daraus folgenden Abschätzung

$$b_1(\partial N) = dim(im\delta) + dim(imi_*) \leq 2b_1(N)$$

erhält man für jede kompakte zusammenhängende Untermannigfaltigkeit der Form

$$\bigcup_{i \in I} \hat{M}_i \subset M_\phi$$

die Abschätzung:

$$b_1(\bigcup_{i \in I} \hat{M}_i) \geq \frac{1}{2} b_1(\partial \bigcup_{i \in I} \hat{M}_i) \geq \frac{1}{2} b_1(\sqcup_{i \in I} T) = |I|$$

Nun folgt aber aus der Mayer Vietoris Sequenz (für entsprechende offene Umgebungen) die exakte Sequenz:

$$\cdots \to H_1(S \sqcup S;\mathbb{Q}) \to H_1(\bigcup_{i \in I} \hat{M}_i;\mathbb{Q}) \oplus H_1(M_\phi - \bigcup_{i \in I} \hat{M}_i;\mathbb{Q}) \to H_1(M_\phi;\mathbb{Q}) \to 0$$

und somit

$$b_1(M_\phi) = b_1(\bigcup_{i \in I} \hat{M}_i) + b_1(M_\phi - \bigcup_{i \in I} \hat{M}_i) - b_1(S \sqcup S) \geq |I| - 2b_1(S)$$

Da aber $b_1(M_\phi)$ nach Voraussetzung endlich ist und $|I|$ beliebig groß werden kann, folgt also dass der Rand von M_ϕ keine Tori enthält und somit leer ist.
Um nun noch die Abschätzung $b_1(M) \leq b_1(S)$ zu zeigen, wird erneut die Konstruktion der Überlagerung durch Aufschneiden und Verkleben zur Hilfe genommen. Da $\ker \phi \otimes \mathbb{Q} \cong H_1(M_\phi;\mathbb{Q})$ nach Voraussetzung ein endlich erzeugter $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, wird $H_1(M_\phi;\mathbb{Q})$ von einem kompakten Teilraum, etwa der Untermannigfaltigkeit $\hat{M}_1 \cup \cdots \cup \hat{M}_k \hookrightarrow M_\phi$ und somit auch $\hat{M}_{k+1} \cup \cdots \cup \hat{M}_{2k} \hookrightarrow M_\phi$, erzeugt (die Inklusionen erzeugen Epimorphismen auf der ersten Homologie). Mit diesem Wissen liefert die folgende exakte Sequenz die gesuchte Abschätzung:

$$\cdots \to H_1(S;\mathbb{Q}) \to H_1(\bigcup_{i \leq 0} \hat{M}_i;\mathbb{Q}) \oplus H_1(\bigcup_{i > 0} \hat{M}_i;\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H_1(M_\phi;\mathbb{Q})$$

□

Da die erste Kohomologie der Überlagerung natürlich bessere Chancen hat, als Modul über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}$ endlich erzeugt zu sein, stellt sich die Frage, ob, wie und warum es sinnvoll oder möglich wäre das eben bewiesene für diesen Fall zu verallgemeinern. Dies wird später mit Hilfe der weiteren Lemmas in diskutiert. Nun vergleicht das vorangegangene Lemma also die Thurston Norm einer Kohomologieklasse mit dem Rang ihres Kerns. Wie letzerer mit der Alexander Norm in Verbindung steht, stellt folgendes Lemma (vgl. Assertion 4) fest:

Lemma 4.2. *Es sei wieder $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$ eine primitive Klasse und* $\ker \phi \otimes \mathbb{Q}$ *ein endlich dimensionaler Vektorraum. Weiter sei t ein Erzeuger der Decktransformationsgruppe von M_ϕ, sodass wie in 2.2 $H^1(M_\phi)$ als Gruppenring Modul aufgefasst werden kann, wobei der Gruppenring kanonisch mit $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ identifiziert wird. Dann ist das Elementarideal $E_0(H^1(M_\phi)) \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ bezüglich einer $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$-Präsentation ein Hauptideal.*
Insbesondere erzeugt für $b_1(M) = 1$ das Alexander Polynom den Alexander Modul.

In dem Beweis wollen wir nutzen, dass $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ ein Hauptidealring ist. Deswegen folgendes Hilfsmittel:

Lemma 4.3. *$\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ ist ein Hauptidealring.*

Natürlich könnte man $\mathbb{Q}$ durch jeden beliebigen Körper $\mathbb{K}$ ersetzen.

Beweis. Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, ist $\mathbb{Q}[t]$ ein Hauptidealring. Es existiert eine kanonische Lokalisierungsabbildung:

$$\alpha : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$$

Die Ideale in der Lokalisierung sind Bilder der Ideale aus dem ursprünglichen Ring, wegen der Erhaltung durch $I = \alpha_*(\alpha^*(I))$, wobei α_*, α^* die **4.induzierten Abbildung auf der Menge der Ideale sind**. Also ist das Ideal $I \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ das Bild eines Hauptideals. Da aber jedes Element in $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ durch Multiplizieren mit der Einheit t im Erzeugnis eines Polynoms liegt, wird ein Erzeuger aus dem Hauptideal $\alpha^*(I)$ auf einen Haupterzeuger in I abgebildet. □

Beweis. Da $H_1(M_\phi, \mathbb{Q})$ ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, werden durch den Erzeuger t des Quotienten $\pi_1(M)/\ker(\phi) \cong \mathbb{Z}$ der Decktransformationen Relationen auf den Basiselementen $x_1, \cdots, x_n$ eingeführt:

$$\begin{aligned} t_* x_1 &= \sum a_i^1 x_i \\ &\vdots \\ t_* x_n &= \sum a_i^n x_i \end{aligned}$$

Diese Gleichungen definieren genau die Matrix des Automorphismus von Vektorräumen $t_* \in \mathrm{Aut}(H_1(M_\phi;\mathbb{Q})$, die also als Spalten die a^i hat. Durch subtrahieren der obigen

Gleichungen, erhält man eine formale Matrix der Form $A - tI$. Diese Matrix ist aber gleichzeitig die Präsentationsmatrix der freien Auflösung:

$$\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]^n \xrightarrow[e_r \mapsto \sum a_i^r x_i - t x_r]{} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

Entsprechend ist die Determinante dieser Matrix das Elementarideal bezüglich $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$, $E_0(M_\phi) = det(A - tI) = \chi(A) \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. □

Dieses Ergebnis liefert nun einen Zusammenhang zwischen den Thurston Norm-minimierenden Flächen, deren erste Bettizahl nach Lemma 4.1 immer mit oberer Schranke $b_1(\ker \phi)$ gewählt werden kann, und der Alexander Norm:

Corollary. *Sei $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ eine primitive Klasse. Dann gilt:*

$$\dim(\ker \phi) = \mathrm{Grad}(\Delta_\phi)$$

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma gilt $H_1(\ker \phi; \mathbb{Q}) \cong Q[Q^{\pm 1}]t$ **5.es muss zyklisch sein. Kleinsten invarianten Raum finden** □

Als nächsten Schritt auf dem Weg zum Beweis des Theorems, wird im Folgenden eine Aussage über die Wahl einer Thurston-minimierenden Fläche gezeigt. Solch eine Fläche kann so gewählt werden, dass sie einer Abschätzung genügt, welche genau die Herkunft der Abschätzung in dem Theorem ist. Mit anderen Worten, existiert eine Wahl einer Fläche, die das folgende Lemma sogar mit Gleichheit erfüllt, gilt die Gleichheit bereits im Bezug auf die Alexander Norm.

Da wir uns schon um die endliche Erzeugbarkeit der Homologiegruppen von der Überlagerung bzgl. dem Gruppenring bemüht haben, soll dies nochmal verwendet werden. Da die Homologie nicht endlich erzeugt über den ganzen Zahlen sein muss.

Nur hier wird $b_1 = 1$ verwendet

5 Folgerungen, Bemerkungen und Beispiele

Wie bereits erwähnt, kann man in Bezug auf die Wahl einer Thurston-minimierenden Fläche fragen, inwieweit man eine Fläche wie in Lemma 4.1 auf allgemeineren 3-Mannigfaltigkeiten gewinnen kann. Schließlich scheint die Anforderung, dass $b_1(\ker\phi)$ als abelsche Gruppe endlich erzeugt sein soll, zu restriktiv zu sein. Intuitiv würde man einer unendlichen Überlagerung schnell die Fähigkeit absprechen, endlich erzeugte Homologiegruppen (über $\mathbb{Z}$) zu haben. Die gute Nachricht ist, dass obiger Beweis nahezu problemlos verwendet werden kann, wenn man nur die endliche Erzeugbarkeit von $\ker\phi$ als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$-Modul fordert. Ob dies sinnvoll ist soll kurz diskutiert werden, anhand Überlegungen zu nicht endlich erzeugten $\ker\phi$.
Die folgende Proposition kann als Verallgemeinerung der Formel $b_1(\ker\phi) = \operatorname{Grad}\Delta\phi$ gesehen werden:

Proposition 5.1. *Falls $H_1(M_\phi)$ endlich erzeugt über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ ist, nicht aber als abelsche Gruppe, so verschwindet die Alexander Norm. Ist umgekehrt $\Delta_{\pi_1(M)} = 0$, so folgt dass $b_1(\ker\phi) = \infty$ ist, für primitive $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$*

Beweis. Die einzige Möglichkeit, dass $H_1(M_\phi;\mathbb{Z})$ über $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ im Unterschied zu $\mathbb{Z}$ endlich erzeugt ist, besteht darin, dass die Familie $\{t_*^k x, k \in \mathbb{Z}\}$ in $H_1(M_\phi)$ linear unabhängig über $\mathbb{Z}$ ist, wobei t ein Erzeuger der Decktransformationen ist. Also ist $(x) \subset H_1(M_\phi)$ ein freier Anteil des $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-Moduls. Ohne Einschränkung sieht eine Präsentation von $H_1(M_\phi)$ über dem Gruppenring über $\mathbb{Z}$ folgendermaßen aus:

$$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow H_1(M_\phi) \longrightarrow 0$$

Somit berechnet sich das Elementarideal zu $E_0(M_\phi) = (\det 0 \det X) = (0)$.
6.Konvention (zur Verallgemeinerung des Grades) ist $||\phi||_A = 0 wenn \Delta_\phi = 0$. Andererseits bedeutet gegebenes verschwindendes Alexander Polynom $\Delta_{\pi_1(M)} = 0$, dass das Alexander Ideal trivial ist. Das Alexander Ideal aber □

Beispiel 1. Sei M eine Faserung $M \to S^1$ über dem Kreis ist, also es gibt einen Diffeomorphismus einer zusammenhängenden Fläche $\varphi : S \times 0 \to S \times 1$, so dass folgendes Diagramm kommutiert: **7.f mittig**

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & I/\partial I = S^1 \\ S \times I/\varphi \arrow[ur, "p_2"'] & \end{tikzcd}$$

In diesem Fall definiert die Homotopieklasse der Faserung $M \to S^1$ eine eindeutige Kohomologieklasse $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$. Die Überlagerung M_ϕ kann wieder entweder als Rückziehung von $\mathbb{R} \to S^1$ oder durch Aufschneiden an S gewonnen werden — in beiden Fällen ist leicht ersichtlich, dass $M_\phi \cong S \times \mathbb{R}$ ist (für das Aufschneiden an S, benötigt man das $[S] = \phi$, dies gilt aber da jedes Urbild von einem Punkt unter f diffeomorph zur Fläche ist, insbesondere die der regulären Werte, die nach Sard existieren). Also hat M_ϕ den Homotopietyp der Fläche, dementsprechend berechnen sich die Homotopieinvarianten von M_ϕ. **8.Erwähnen, dass ker(phi) immer den Kern als Abbildung auf der FG bedeutet** Insbesondere ergibt sich $b_1(\ker\phi) = b_1(M_\phi) = b_1(S)$, wodurch sich mit Lemma 4.1 ergibt (da $b_0(S) = 1$), dass die duale Fläche mit Gleichheit der ersten Bettizahlen gewählt werden kann. Da dies die einzige Ungleichung ist, die in dem Theorem verwendet wird, folgt also schon Gleichheit der Normen $||\phi||_A = ||\phi||_T$. Aufgrund der exakten Sequenz:

$$0 \to \ker\phi \to \pi_1(M) \to \mathbb{Z} \to 0$$

folgt auch das die Fundamentalgruppe von M im Falle einer Faserung endlich erzeugt ist. Falls M nun zusätzlich noch ein Knotenkomplement eines Knotens K ist, gilt $\ker\phi = [\pi_1(M), \pi_1(M)]$. Also beweisen diese Überlegungen, dass die Kommutatorunteruntergruppe einer Knotengruppe isomorph zu der Fundamentalgruppe einer Seifertfläche des Knotengeschlechts ist, siehe zum Beispiel Theorem 4.6 in [1].
Möchte man dennoch das Alexander Polynom $\Delta_f = \Delta_\phi$ einer Faserung berechnen, schließlich benutzt diese Invariante ja noch Informationen über die Deckgruppe, genügt es nach Lemma 4.2, die lineare Form von Vektorräumen $t_* \in \mathrm{Aut}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q}))$ zu berechnen. Aber da der Erzeuger t der Decktransformationen folgendem kommutativen Diagramm genügen muss:

$$\begin{tikzcd}
M_\phi \arrow[rr, "t"] \arrow[dr] & & M_\phi \arrow[dl] \\
& M &
\end{tikzcd}
\quad \text{gleichbedeutend:} \quad
\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\cong"'] \arrow[d, "\simeq"] & & S \arrow[d, "\simeq"] \\
S \times \mathbb{R} \arrow[rr, "\hat{t}", "\cong"'] \arrow[dr] & & S \times \mathbb{R} \arrow[dl] \\
& S \times I/\varphi &
\end{tikzcd}$$

muss in jedem Fall gelten: $t_* = \hat{t}_* = \varphi$ unter gegebenen Identifikationen mit S. Also berechnet sich das Alexander Polynom Δ_f zu dem charakteristischen Polynom der Abbildung $\varphi_* : H_1(S; \mathbb{Q}) \to H_1(S; \mathbb{Q})$, wobei die Koeffizienten entsprechend in $\mathbb{Z}$ gewählt werden, so dass es größter gemeinsamer Teiler des entsprechend zurückgezogenen Ideals unter der Lokalisierung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ ist.

6 Persönliche Notizen während der Erstellung

Sei $m(G)/m(\ker\phi)m(G)$ die algebraische Beschreibung des Alexander Moduls als $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[G]/m(\ker\phi)$-Modul. Dann dieser Quotient endl erz denn

Alex und Thurston Norm sind wirklich Normen

Warum nimmt Mcmullen die Homologie relativ allen Lifts vom Basispunkt? !!

Einschränkung: Mannigfaltigkeit glatt?

Im Beweis wo $b_1(G) = 1$ gezeigt wird, ist es nicht auch möglich, die Argumentation über die Fundamentalgruppe wegzulassen und stattdessen zu zeigen:

- G ist zsh
- $\delta_+(M_i) = \delta_-(M_i) = 1 \implies G$ ist Mannigfaltigkeit
- G ist kompakt

$\implies$ mit Klassifikation von 1-Mft ist G ein Kreis.

Andersrum: wenn G vom Homotopietyp ein Kreis ist (also zsh und $\pi_1 = \mathbb{Z}$), dann kann nur noch $\delta_\pm(M_i) = 0$ passieren

7 Algebra

Tatsächlich könnte man diese Bachelorarbeit fast ausschließlich algebraisch verstehen — wenigstens den Teil über die Alexanderinvarianten. Natürlich ist dieser Arbeit aus dem Bereich der Topologie, ein Geschmack oder die Illusion gegeben, man arbeite nur mit direkten Eigenschaften der Räume. Bei der Thurstonnorm ist dies tatsächlich gegeben, durch die Deftinition einar Funktion auf einem Vektorraum mittels geometrischer Eigenschaften der Mannigfaltigkeit. Jedoch handelt es sich bei den Alexanderinvarianten, insbesondere dem Alexander Polynom, lediglich um Invarianten einer abelschen Gruppe. Durch Anwendung auf die Fundamentalgruppe, erhält man also Invarianten von Räumen. Natürlich verliert das Alexander Polynom von 3-Mannigfaltigkeiten durch diese Faktorisierungnicht allzu viel an Reiz, da die Fundamentalgruppe eine recht starke Invariante von 3-Mannigfaltigkeiten ist, siehe z.B. Ergebnisse von **9.warum Fundamentalgruppe stark ist** . Im Folgenden sollen nun kurz die Alexander Invarianten verallgemeinert von Gruppen definiert werden und ein paar Zusammenhänge zu dem obigen Fall

Es lässt sich der Alexander Modul definieren als (entspricht strikt genommen nicht der obigen Definition, hier enthält er einen freien Summand mehr, also betrachte E_1).

Definition 7.1 (Alexander Modul, algebraisch)**.** Für eine endlich erzeugte Gruppe G und einen Homomorphismus $\phi \in \mathrm{Hom}(G, F) \cong \mathrm{Hom}(H_1(G), F) \cong \mathrm{Hom}(ab(G), F)$, wobei F eine freie abelsche Gruppe ist und $ab(G)$ die natürliche Quotientenabbildung in den maximalen freien abelschen Quotienten von G. Dann ist der Alexander Modul definiert als

$$A_\phi(G) = m(G)$$

Dies mach alles interesanter denn es bedeutet dass für eine gegebene Fundamentalgruppe die Alexander Invarianten schon berechenbar sind (also eigentlich Invarianten der Fundamentalgruppe sind), jedoch lassen sich diese auch über Eigenschaften und Berechnungen von 3-Mft berechnen und so ohne Berechnung der Fundamentalgruppe möglich sind.

Herleitung der algebraischen Idee: nun stellt sich die Frage, ob die Alexander Invarianten durch die Struktur der Mannigfaltigkeit bestimmt sind, oder schon aus der Fundamentalgruppe berechenbar. Sei dazu G die Fundamentalgruppe von M und $F = ab(G)$ der maximale freie abelsche Quotient, dessen Rang durch $b_1(G)$ eindeutig bestimmt ist. Sei außerdem $\alpha : G \to F$ die Quotientenabbildung. Dann erhält man einen Gruppenisomorphismus $p'_* : H_1(\hat{M}) \to \ker\alpha/[\ker\alpha, \ker\alpha]$ der durch die Projektion der Überlagerung zu α induziert wird. Ziel wäre es zu zeigen, dass diese Abbildung auch einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}[F]$ Moduln liefert. Daraus würden natürlich gleiche Präsentationen folgen, die zu gleichen Elementaridealen führen und so fort. Hierfür benötigt man jedoch überhaupt eine $\mathbb{Z}[F]$-Modul Struktur auf dem Quotienten G'/G'' für $G' = \ker\alpha, G'' = [G', G']$. Diese soll zunächst definiert werden:
Die Abbildung $G \to G/[G, G] \to F$ ist kanonisch. Also seien $g_1, \cdots, g_n, n = b_1(G)$ Elemente die auf eine Basis von F abgebildet werden. Diese definieren dann innere Automorphismen von G'/G'' durch

$$\hat{t}_i(x) = \bar{g}_i\bar{x}\overline{g_i^{-1}} = \overline{g_ixg_i^{-1}}$$

Literatur

[1] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. *Knots*, volume 5. Walter de gruyter, 2003.