Alexander-Norm und Thurston-Norm

Daniel Valenzuela

Geboren am 21.07.1992 in München

11. Juli 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuerin: Prof. Dr. Ursula Hamenstädt

Mathematisches Institut

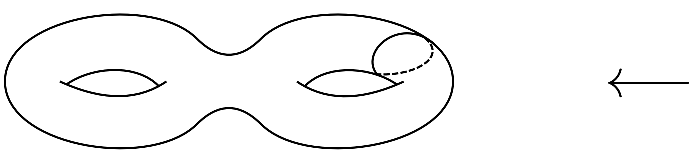
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die Theorie der Knoten beschäftigt sich mit Äquivalenzklassen von Knoten und dem Finden von Invarianten solcher Äquivalenzklassen. Als häufig betrachtete Invariante hat sich die Homöomorphieklasse der kompakten 3-Mannigfaltigkeit ergeben, die man das Knotenkomplement nennt. Dieses entsteht durch Entnehmen einer offenen Tubenumgebung des eingebetteten Knotens $S^1 \hookrightarrow S^3$. Häufig stellen sich Knoteninvarianten lediglich als Invarianten der Knotenkomplemente heraus. Um die Qualität und Feinheit dieser Invarianten zu beurteilen, ist es zunächst wichtig die des Knotenkomplements zu beurteilen. Dies ist natürlich eine relevante Frage, schließlich beschäftigten sich Topologen den Großteil des 20. Jahrhunderts damit Knotenkomplemente zu studieren. 1989 zeigen Gordon und Luecke [9], dass Knoten sogar durch ihr Knotenkomplement in ihrer Klasse bestimmt sind, es sich bei dem Knotenkomplement also um eine vollständige Knoteninvariante handelt. Manche Invarianten enstanden also aus rein homologischen Eigenschaften von 3-Mannigfaltigkeiten, andere wiederum entstanden speziell für 3-Mannigfaltigkeiten, die einen Torus als Rand haben. Um letztere soll es auch in dieser Arbeit gehen.
Alexander definiert 1928 eine topologische Invariante des Knotenkomplements [1], die einem Knotenkomplement eine Klasse von Laurentpolynomen mit eindeutigem Grad zuordnet. 1934 stellt Seifert in seiner Arbeit „Geschlecht von Knoten" [17] mit dem Geschlecht eine Invariante vor, die die minimale Komplexität einer orientierten eingebetteten Fläche berechnet die den Knoten aufspannt (nach der Klassifikation von Flächen wird diese in Abhängigkeit des Geschlechts gemessen) und eine Konstruktion für die Existenz solcher Flächen. Dieses Knotengeschlecht liefert die Möglichkeit jeden Knoten von dem Unknoten zu unterscheiden. Natürlich liefert die sogenannte Seifert-Konstruktion eine Fläche mit Geschlecht, jedoch ist es ein deutlich komplizierteres Anliegen, wenn man zeigen möchte, dass eine gefundene Fläche in ihrer Komplexität nicht unterboten werden kann. Entsprechend günstig erweist sich Seifert's Resultat, dass der Grad des Alexander Polynoms eines Knoten eine untere Schranke für sein Geschlecht definiert.



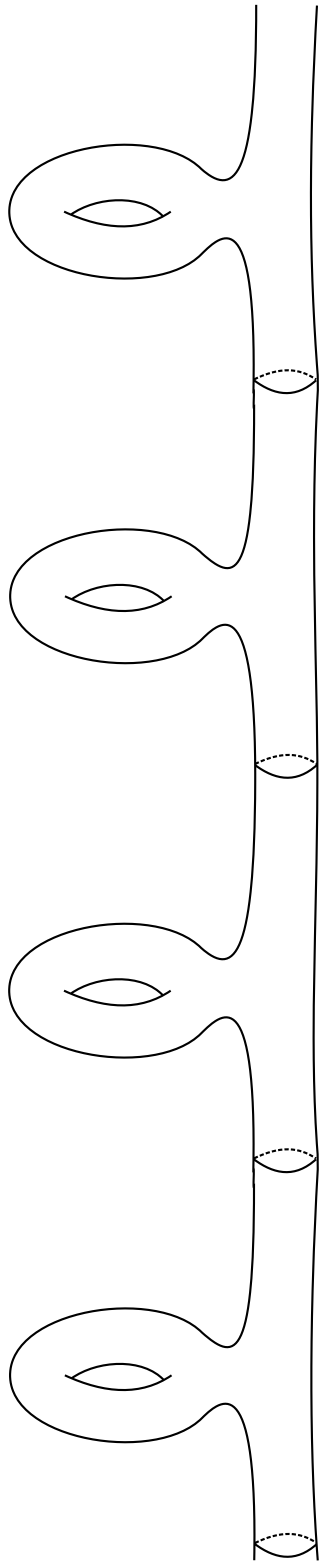


Abbildung 1: Unendlich zyklische Überlagerung

Der wesentliche Gegenstand dieser Arbeit ist die Verallgemeinerung dieser auf Knotenkomplementen definierten Invarianten zu Invarianten auf kompakten orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand, der maximal aus Tori besteht. Für diese Invarianten stellt McMullen [14] fest, dass sich auch die oben erwähnte Abschätzung aus der Knotentheorie verallgemeinern lässt. Diese Arbeit beschäftigt sich mit genau diesem Resultat, welches dieser Arbeit als Haupttheorem 1.1 zugrunde liegt.

Es stellt sich heraus, dass alle betrachteten Invarianten eine enge Beziehung zu unendlich zyklischen Überlagerungen haben. Diese können etwa durch Aufschneiden an einer 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit gewonnen werden, siehe zum Beipsiel Abbildung 1. Diese Abbildung ist für die Intuition erheblich — man könnte dem Leser fast raten, vor und nach jedem Kapitel die Abbildung 1 zu betrachten und immer wieder neu zu reflektieren.

Die ersten Kapitel beschäftigen sich mit der Definition, Konstruktion und der algebraischen Natur der Alexander-Norm und Thurston-Norm. Während die Alexander-Norm den Grad des Alexander Polynoms einer Seifert-Fläche (aufgefasst als Lefschetz duale Homologieklasse eines Erzeugers der ersten Kohomologie eines Knotenkomplementes) verallgemeinert auf eingebetteten orientierten Flächen auswertet, so soll die Thurston-Norm die minimale Komplexität einer eingebetteten orientierten Fläche bestimmen. Diese beiden Invarianten werden per Poincaré und Lefschetz Dualität als Halbnormen auf $H^1(M) \cong H_2(M, \partial M)$ betrachtet.

Anschließend widmet sich dem Beweis des Haupttheorems ein eigenes Kapitel. Der Beweis ist an die Beweisführung aus [14] angelehnt und beinhaltet eine Reihe Modifikationen und Ergänzungen.

Abschließend beschäftigt sich das letzte Kapitel mit der genaueren Betrachtung des Beweises, beinhaltet aber auch Anwendungen und konkrete Beispiele.

Bei der Alexander-Norm eines Homomorphismus in $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ handelt es sich um den Grad des zugehörigen Alexander Polynoms und die Thurston-Norm weist einem solchen Homomorphismus die minimale Komplexität einer Poincaré-Lefschetz dualen eingebetteten Fläche zu. Ohne die genauere Definition hier zu nennen (siehe hierzu Kapitel **??**), soll nun das Theorem vorgestellt werden, dessen Beweis in dieser Arbeit behandelt wird.

Theorem 1.1 (McMullen). *Sei M eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 3. Falls der Rand dieser Mannigfaltigkeit nicht leer ist, so soll er aus einer Kollektion von Tori bestehen. Dann gilt folgende Abschätzung für die Alexander-Norm und die Thurston-Norm $||\cdot||_A, ||\cdot||_T : H^1(M; \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ der 3-Mannigfaltigkeit:*

$$||\phi||_A \leq \begin{cases} ||\phi||_T + 1 + b_3(M) & \text{, falls } b_1(M) \leq 1 \text{ und } \phi : \pi_1(M) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \\ ||\phi||_T \end{cases}$$

Entsteht ϕ als Rückziehung einer Faserung $M \to S^1$, so gilt Gleichheit.

2 Vorbereitungen der benötigten Theorien

2.1 Über noethersche Moduln und Gruppenringe

Im Folgenden sei R stets ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$.

Sei M ein R-Modul. Dann ist M noethersch, falls jeder Untermodul endlich erzeugt ist, insbesondere M selbst. Ein Ring ist noethersch wenn er es als Modul über sich selbst ist.

Da für jeden R-Modulhomomorphismus $M \to N$, das Bild der Erzeuger von M das Bild des Homomorphismus erzeugt, gilt folgende Proposition:

Proposition 2.1. *Sei $M \twoheadrightarrow N$ ein R-Modulepimorphismus. Dann impliziert die endliche Erzeugbarkeit von M die von N.* □

Corollar 2.2. *Quotienten von endlich erzeugten Moduln sind endlich erzeugt.* □

Corollar 2.3. *Sei $C_\bullet$ ein Kettenkomplex von noetherschen R-Moduln. Dann ist die Homologie endlich erzeugt über R.* □

Lemma 2.4. *Ein Epimorphismus von einem noetherschen R-Modul M in einen weiteren R-Modul L impliziert, das L noethersch ist.*

Beweis. Jeder Untermodul aus L besitzt ein endliches Erzeugendensystem als Bild endlich vieler Erzeuger des zurückgezogenen Untermoduls. □

Lemma 2.5. *Für eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln $0 \to L \to M \to N \to 0$. Dann ist M noethersch genau dann wenn L und N noethersch sind.*

Beweis. Sei M noethersch, so ist es mit Lemma 2.4 auch N. L ist isomorph zum Untermodul $\ker(M \to N)$. Umgekehrt erhalten wir für jeden Untermodul M' eine kurze exakte Sequenz von Untermoduln mit den entsprechenden Einschränkungen $0 \to L' \to M' \to N' \to 0$ wobei L' und N' als R-Untermoduln endlich erzeugt, somit auch M'. □

Sei im Folgenden M noethersch. Dies ist zum Beispiel bei folgender Situation gegeben:

Corollar 2.6. *Sei R noethersch und M endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M noethersch.*

Beweis. Mit Lemma 2.5 ist die direkte Summe R^n noethersch und mit Lemma 2.4 ist es M. □

Lemma 2.7. *M ist über R endlich präsentiert.*

Beweis. M ist als größter Untermodul endlich erzeugt über R also existiert folgende exakte Sequenz:

$$R^n \to M \to 0$$

da R^n aber noethersch ist und Kerne von Homomorphismen Untermoduln sind, kann die Sequenz auf der linken Seite folgendermaßen ergänzt werden:

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

□

Für eine solche freie Auflösung von M, die also für noethersche Moduln immer existiert, sind alle Relationen durch $\ker(R^n \to M)$ gegeben. Deswegen nennt man eine darstellende Matrix zur Abbildung f aus $R^m \xrightarrow{f} R^n \twoheadrightarrow M$ auch Präsentationsmatrix. Verschiedene Präsentationsmatrizen unterscheiden sich nur durch die folgenden Operationen, siehe etwa [13, Theorem 6.1]: •Vertauschen von Zeilen oder Spalten •Hinzufügen von Einheitsblöcken (direkte Summe mit der Identität) •Hinzufügen von Nullspalten •Addieren eines Vielfachen einer Spalte oder Zeile auf eine jeweils andere. Zusammen mit grundlegenden Eigenschaften der Determinante liefert das die Wohldefiniertheit der folgenden Definition:

Definition 2.1. Es sei $R^m \to R^n \twoheadrightarrow M$ eine endliche Präsentation des R-Moduls M mit einer Präsentationsmatrix $X \in R^{n\times m}$. Definiere das i-te Elementarideal $E_i(M) \subset R$, als das von den Determinanten der $(n-i) \times (n-i)$-Minoren von X erzeugte Ideal.

Da sich jede Determinante als Linearkombination von den Determinanten der Minoren schreiben lässt, liefert das eine Inklusionsbeziehung der Elementarideale. Für $n - i \leq 0$ und $n - i > \min(m, n)$ definiert man die Elementarideale gemäß der folgenden aufsteigenden Kette (da ohne Einschränkung $m > n$):

$$0 = E_{-1}(A) \subset E_0(A) \subset \cdots \subset E_n(A) = R$$

Beispiel 1. Ist R ein Hauptidealring, so sind die Elementarideale durch den Elementarteilersatz vollständig charakterisiert.

Bemerkung 2.1.1. Das letzte Beispiel verwendet die Ergiebigkeit der Theorie der endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen. Die Elementarideale definieren nach den obigen Überlegungen Invarianten für endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen. Dies ist durch eine Art Nachahmung der ersten Schritte des Elementarteilersatzes motiviert, die nur die endliche Präsentation der Moduln verwendet.

Nun ist es später häufig nötig, Berechnungen über dem Gruppenring durchzuführen. Dafür wollen wir uns nun der Definition des Gruppenrings zuwenden und einige — für Berechnungen essenzielle – grundlegenden Eigenschaften des ganzzahligen Gruppenrings über einer frei abelschen Gruppe feststellen.

Definition 2.2 (Gruppenring)**.** Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Dann ist der *Gruppenring* definiert als die Menge aller endlichen formalen Summen:

$$R[G] = \sum_{g\in G} a_g g, a_g \in \mathbb{Z}, g \in G$$

die durch komponentenweise Addition eine abelsche Gruppe wird und durch die Gruppenverknüpfung und die multiplikative Struktur von R ein Ring mit Eins wird. Die Elemente $g \in G \subset R[G]$ werden als die Gruppenelemente in dem Gruppenring bezeichnet.

Wir werden uns ausschließlich mit ganzzahligen oder rationalen Gruppenringen befassen, also mit $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$.

Bemerkung 2.1.2. Sei also M ein R-Modul mit einer Gruppenwirkung von G. Dann lässt sich M als $R[G]$-Modul auffassen. Insbesondere werden wir also abelsche Gruppen und $\mathbb{Q}$-Vektorräume über dem ganzzahligen bzw. rationalen Gruppenring betrachten.

Bemerkung 2.1.3. Da der Gruppenring die multiplikative Struktur von der Gruppenverknüpfung erbt, ist $\mathbb{Z}[G]$ im Allgemeinen nicht unbedingt kommutativ. Mit diesem Problem, das durch nicht-abelsche Gruppen G entsteht, werden wir uns später beschäftigen müssen.

Beispiel 2. Falls G eine unendlich zyklische Gruppe mit Erzeuger t ist, lässt sich der Gruppenring über F als $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, also als Ring der formalen Laurentpolynome in der Variablen t auffassen.

Tatsächlich gilt dies sogar etwas allgemeiner. Dies wollen wir zeigen um Eigenschaften für den ganzzahligen Gruppenring zu entwickeln, die wir aus dem multivariablen Laurentring ableiten. Für diesen gilt nämlich:

Proposition 2.8. *Der Laurentring* $\mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}]$ *ist noethersch.*

Beweis. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist der Polynomring über $\mathbb{Z}$ in endlich vielen Variablen noethersch. Ebenso ist die Lokalisierung eines noetherschen Ringes noethersch, da jedes Ideal in der Lokalisierung Bild eines endlich erzeugten Ideals ist. □

Da der Laurentring mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten kein Hauptidealring ist, ist die vorhergehende Proposition so bedeutend. Die folgende Proposition wird zeigen, dass $\mathbb{Z}[F]$ für einen freien $\mathbb{Z}$-Modul F auch kein Hauptidealring ist, wir also bemüht sind um eine möglichst vollständige Liste guter Eigenschaften von $\mathbb{Z}[F]$ die wir nutzen können.

Proposition 2.9. *Sei F eine freie abelsche Gruppe, also $F \cong \mathbb{Z}^b$. Dann existiert ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{Z}[F]$ und $\mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_b^{\pm 1}]$. Insbesondere ist $\mathbb{Z}[F]$ faktoriell und noethersch.*

Beweis. Unter Ausnutzung der universellen Eigenschaft des Polynomrings und der Lokalisierung definiert man folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_n^{\pm 1}] &\to \mathbb{Z}[F] \\ X_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

Wenn f_i eine Basis von F darstellt, so erhält man offensichtlich einen Isomorphismus. □

Bemerkung 2.1.4. Unter dieser Identifikation ergibt sich, dass die Einheiten $\mathbb{Z}[F]^\times$ genau die Produkte der Gruppenelemente mit den Einheiten von $\mathbb{Z}$ sind also $\pm F \subset \mathbb{Z}[F]$.

Der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$ besitzt natürlich mehr Einheiten, deswegen ergibt sich für den Laurentring über $\mathbb{Q}$ die Eigenschaft eines Hauptidealrings.

Lemma 2.10. $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ *ist ein Hauptidealring.*

Natürlich könnte man $\mathbb{Q}$ für dieses Lemma durch jeden beliebigen Körper $\mathbb{K}$ ersetzen.

Beweis. Da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, ist $\mathbb{Q}[t]$ ein Hauptidealring. Nun ist allgemeiner die Eigenschaft für einen Ring ein Hauptidealring zu sein abgeschlossen unter Lokalisierung. Der Beweis läuft durch Betrachtung der kanonische Lokalisierungsabbildung:

$$\alpha : \mathbb{Q}[t] \to \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$$

Die Ideale in der Lokalisierung sind genau die erweiterten Ideale aus dem ursprünglichen Ring, wegen der Erhaltung durch $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \supset I = \alpha_*(\alpha^*(I))$, wobei $\alpha^* = \alpha^{-1}$ die Kontraktion eines Ideals bezeichnet und $\alpha_*(I) = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \cdot \alpha(I)$ die Erweiterung eines Ideals. Da aber jedes Element in $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ durch Multiplizieren mit der Einheit t^N im Erzeugnis eines Polynoms liegt, wird ein Erzeuger aus dem Hauptideal $\alpha^*(I)$ auf einen Haupterzeuger in I abgebildet. □

In der Tat ist dieser Beweis in dem Fall des Laurentrings doch mehr als einleuchtend, allerdings merkt man sich so auch gut den Beweis für allgemeine Lokalisierungen, indem man bemerkt, dass sich das Multiplizieren mit der Einheit t^N einfach erreichen lässt durch Multiplikation mit Elementen aus der multiplikativen Menge an der lokalisiert wurde — den neuen Einheiten aus dem lokalisierten Ring.

2.2 Poincaré und Lefschetz Dualität — eine differentialtopologische Betrachtung

Die Definition der Thurston-Norm in Kapitel **1.refthurston** wird uns eine Invariante auf $H^1(M;\mathbb{Z})$ einer glatten Mannigfaltigkeit M^m liefern, die durch Poincaré bzw. Lefschetz Dualität aus einer Invarianten auf $H_{m-1}(M, \partial M; \mathbb{Z})$ hervorgeht. Und tatsächlich werden die folgenden Seiten teilweise in ein wildes Hin- und Herspringen zwischen Homologie und Kohomologie ausarten. Aus diesem Grund sollen hier noch einmal wichtige Grundlagen und Berechnungsmöglichkeiten, die später verwendet werden, erklärt werden.

Zunächst widmen wir uns einigen Konventionen und Identifikationen.

Bemerkung 2.2.1 (Homomorphismen der Abelianisierung). Es werden stillschweigend natürliche Identifikationen $H^1(M;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_1(M);\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(M);\mathbb{Z})$ verwendet. Die erste natürliche Identifikation liefert das universelle Koeffiziententheorem. Auch wenn die erhaltende Sequenz im Allgemeinen nicht natürlich zerfällt, so ist dies im Fall der ersten Kohomologie offensichtlich. Die zweite folgt, da ein Homomorphismus $\phi : H_1(M) \to \mathbb{Z}$ gleichbedeutend mit einem Homomorphismus $\hat{\phi} : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}$ ist. Dies sieht man wie folgt ein: das Hurewicz Theorem besagt, dass die natürliche Abbildung $\pi_1(M) \to H_1(M)$, die durch Auffassen von Schleifen als singuläre 1-Zykel entsteht, die Abelianisierungsabbildung ist. Diese besitzt die universelle Eigenschaft der Quotientenabbildung zu dem Normalteiler $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$. Da $\mathbb{Z}$ abelsch ist, folgt $[\pi_1(M), \pi_1(M)] \subset \ker \hat{\phi}$. Also faktorisiert $\hat{\phi}$ über eine eindeutige Abbildung $H_1(M) \to \mathbb{Z}$.

Mit anderen Worten: Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(M) \arrow[r, "\hat{\phi}"] \arrow[d] & \mathbb{Z} \\ H_1(M) \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Dies liefert die eins-zu-eins Beziehung, da ϕ nach dem Diagramm offensichtlich ein eindeutiges Element in $\mathrm{Hom}(\pi_1(M);\mathbb{Z})$ definiert.

Konvention. *In dieser Arbeit bezeichne der Kern einer Klasse $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$ durchweg den Kern der mit ϕ identifizierten Abbildung auf der Fundamentalgruppe.*

Bemerkung 2.2.2 (Weitere Identifikationen)*.* Sei N eine glatte orientierte n-dimensionale Mannigfaltigkeit (mit CW-Struktur). Bekanntlicherweise gilt:

$$H_{n-1}(N,\partial N;\mathbb{Z}) \cong H^1(N;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(H_1(N),\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(N),\mathbb{Z}) \cong [N,S^1]$$

wobei der

1. -te Isomorphismus bei $\partial N = \emptyset$ nach Poincaré und sonst Lefschetz Dualität,
2. -te Isomorphismus gilt, da das universelle Koeffiziententheorem eine exakte Sequenz liefert in der diese beiden Terme auftauchen und weiter nur $\mathrm{Ext}(H_0(N),\mathbb{Z}) = 0$,
3. -te Isomorphismus gilt, da nach Hurewicz die Abbildung $\pi_1(N) \to H_1(N)$ die Abelianisierung ist (siehe Bemerkung 2.2.1),
4. -te Isomorphismus gilt, indem man zeigt, dass jede Abbildung auf dem 1-Skelett $X^1 \subset N \to S^1$ auf N fortgesetzt werden kann. Da das 1-Skelett die Fundamentalgruppe (oder Homologie) erzeugt, also die Inklusion eine surjektive Abbildung $i_* : \pi_1(X^1) \twoheadrightarrow \pi_1(N)$ induziert, lässt sich auf diese Weise jeder Homomorphismus $\pi_1(N) \to \mathbb{Z}$ auf den Erzeugern aus dem 1-Skelett (genauer möchte man, dass diese Abbildung auf einem maximalen Baum konstant ist) definieren und fortsetzen.

Bemerkung 2.2.3 (Untermannigfaltigkeiten als Homologieklassen)*.* Es sei S^s eine s-dimensionale orientierte kompakte Mannigfaltigkeit. Die Orientierung liefert eine eindeutige Fundamentalklasse $[S] \in H_s(S)$ falls S geschlossen ist und sonst $[S,\partial S] \in H_s(S,\partial S)$. Es sei $h : (S^s,\partial S) \hookrightarrow (N^n,\partial N)$ eine Einbettung. Dann definiert diese Einbettung eine Homologieklasse in $H_s(N,\partial N)$ als das Bild der eindeutigen Fundamentalklasse von S unter der induzierten Abbildung $H_s(h)$. Für eine orientierbare kompakte Untermannigfaltigkeit $(S,\partial S) \subset (N,\partial N)$ liefert die Inklusion eine Einbettung und für eine gewählte Orientierung erhält man also eine Homologieklasse $[S]$ oder $[S,\partial S]$ in $H_s(N,\partial N)$.

Theorem 2.11. *Sei $f : N^n \to K^m$ eine stetige Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten. Dann lässt sich f beliebig nah durch glatte Abbildungen approximieren (wie die Güte der Approximation genau gemessen wird ist hier von keiner Bedeutung), welche homotop zu f sind.*

Theorem 2.12 (Sard und Satz vom regulären Wert)**.** *Sei $f : N^n \to K^m$ eine glatte Abbildung. Dann liegen die regulären Werte von f dicht in K. Das Urbild eines regulären Wertes ist eine abgeschlossene glatte orientierte eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeit in K der Kodimension m. Ein regulärer Wert ist ein Punkt aus K, bei dessen Urbild f an jedem Punkt einen Epimorphismus auf den Tangentialräumen definiert.*

Theorem 2.13 (Thom)**.** *Sei $f : N \to S^1$ eine glatte Abbildung. Jedes Urbild eines regulären Wertes definiert nach obigem Theorem und der Bemerkung 2.2.3 ein Element in $H_{n-1}(N, \partial N; \mathbb{Z})$. Diese ist Poincaré beziehungsweise Lefschetz dual zu $[f] \in H^1(N; \mathbb{Z})$.*

Alle diese Aussagen sind bekannte elementare Aussagen der Differentialtopologie und können etwa in [12] oder mit elementaren Methoden in [11] (bis auf 2.13) nachgelesen werden.

Das Zusammentragen aller Ergebnisse bedeutet also: Jeder Homomorphismus $\phi \in H^1(N; \mathbb{Z})$ definiert ein eindeutiges Element in $[N, S^1]$. und umgekehrt liefert jede Abbildung $N \to S^1$ einen induzierten Homomorphismus der Homologiegruppen. Die Differentialtopologie liefert nun die restlichen Schritte. Jede Homotopieklasse aus $[N, S^1]$ enthält einen glatten Repräsentanten. Für diesen existiert ein regulärer Wert in S^1. Jedes Urbild eines solchen regulären Wertes ist dann eine 1-kodimensionale orientierte Mannigfaltigkeit (mit Rand, wenn überhaupt, im Rand von N eigentlich eingebettet), welche als Homologieklasse dual zu ϕ ist.

2.3 Konstruktionen

Als explizite Anwendung des letzten Kapitels leiten wir in diesem Kapitel Konstruktionen her, die gewisse Informationen von 1-kodimensionalen Mannigfaltigkeiten beinhalten.

Lemma 2.14. *Wenn M eine glatte orientierte n-Mannigfaltigkeit ist und $N \subset M$ eine glatte k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, dann korrespondieren die Orientierungen von N bijektiv mit den Orientierungen von dem Normalenbündel $\nu(N; M)$ in M.*

Beweis. Das Tangentialbündel von N kann als Untervektorraumbündel von TM aufgefasst werden; es ist unabhängig von der Einbettung. Falls N nicht orientierbar ist, so ist es auch $\nu(N; M)$ nicht und umgekehrt. Sei also N orientierbar, dann gilt für alle $x \in N$, dass die Faser $TN_x \oplus \nu(N; M)_x = TM_x$ die Orientierung von M trägt, also $m_1, \cdots, m_n$ eine repräsentierende Basis der eindeutigen Orientierung ist. Also liefert die Lineare Algebra aus einer Orientierung von N, definiert durch die Basis des Tangentialraumes $n_1, \cdots, n_k$ eine eindeutige Orientierung von $\nu(N; M)_x$, repräsentiert durch die Basis $\nu_1, \cdots, \nu_{n-k}$, sodass die folgenden Orientierungen übereinstimmen: $[m_1, \cdots, m_n] = [n_1, \cdots, n_k, \nu_1, \cdots, \nu_{n-k}]$ $\square$

Definition 2.3. Eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 $N \subset M$ heißt zweiseitig, falls eine glatte Einbettung $N \times (-\epsilon, \epsilon) \hookrightarrow M$ existiert, die auf $N \times \{0\}$ mit der Inklusion von N übereinstimmt. Eine solche Einbettung heißt auch zweiseitiger Kragen.

Bemerkung 2.3.1. Offensichtlich ist die Zweiseitigkeit einer 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit gleichbedeutend mit einer Orientierung, da $N \times (-\epsilon, \epsilon)$ diffeomorph zu $\nu(N; M)$ ist. Falls wir im Folgenden von einer orientierten 1-kodimensionale Mannigfaltigkeit N in einer orientierten Mannigfaltigkeit M reden, so soll mit ihrem zweiseitigen Kragen stets ein solcher gemeint sein, unter dessen Urbild jeder Repräsentant $\nu \in [\nu]$ einer Faser im Normalenbündel, der mit der Orientierung von N in dieser Faser die Orientierung von M ergibt, in $N \times (0, \epsilon)$ liegt.

Da wir im Folgenden nur 3-Mannigfaltigkeiten betrachten, so gestatten wir jetzt schon die Bequemlichkeit uns darauf zu reduzieren. Die 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeiten sind also diffeomorph zu Flächen.

Zu einer gegebenen Homologieklasse $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ finden wir nach Kapitel 2.2, sowohl den eindeutigen Homomorphismus $\phi : \pi_1(M) \to \mathbb{Z}$ als auch die glatte Abbildung $f : M \to S^1$ mit $\pi_1(f) = \phi$. Außerdem finden wir mit Kapitel 2.2 eine zu $\hat{\phi}$ duale orientierte Untermannigfaltigkeit S als Urbild von f. Mit den folgenden Konstruktionen soll bewiesen werden, dass jede duale orientierte eingebettete Fläche $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ als Urbild eines regulären Wertes darstellbar ist. Weiter wollen wir häufig die zu (ker)ϕ gehörige Überlagerung betrachten. Wir werden ein Verfahren entwickeln, in welchem wir durch Aufschneiden und Verkleben an S diese Überlagerung erhalten. Genauer wollen wir zeigen: Sowohl durch Aufschneiden an S als auch durch Zurückziehen der universellen Überlagerung von S^1 entlang f erhalten wir die Überlagerung zu dem Normalteiler der Fundamentalgruppe $\ker \phi$.

Konstruktion 1 (Aufschneiden an einer Fläche)**.** Aus der Überlagerungstheorie ist bekannt, dass zu jeder normalen Untergruppe der Fundamentalgruppe eines hinreichend gut zusammenhängendem Hausdorffraum (insbesondere Mannigfaltigkeiten), auch eine normale Überlagerung existiert, die bis auf Überlagerungsisomorphie eindeutig ist, siehe [10, Chapter 1.3]. Nun definiert aber ein Element $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ nach obigen Überlegungen den Normalteiler $\ker \phi \subset \pi_1(M)$. In diesem Sinne nennen wir die Überlagerung zu ϕ fortan M_ϕ. Für spätere Zwecke, wollen wir die dualen Homologieklassen von ϕ mit $b_1(\ker \phi) = b_1(M_\phi)$ vergleichen. Da jede duale Homologieklasse nach Kapitel 2.2 eine Untermanigfaltigkeit als Repräsentanten besitzt, sei also $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ eine eingebettete orientierte Fläche dual zu ϕ. Da diese Kodimension 1 und eine Orientierung hat, ist sie nach Bemerkung 2.3.1 auch zweiseitig. Fixiere also einen zweiseitigen Kragen $h : S \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$[1]. Das bedeutet, dass die 3-Mannigfaltigkeit an S „aufgeschnitten" werden kann (siehe etwa [2, Kapitel 4.2]), wobei das Aufschneiden bedeutet, das Komplement der Fläche zu betrachten (das Resultat ist offensichtlich eine Mannigfaltigkeit, jedoch können Eigenschaften wie Kompaktheit oder Randbedingungen entfallen). Will

[1]Diese Zweiseitigkeit sei natürlich stets mit der Kompatibilität mit der induzierten Orientierung des Normalenbündels gewählt. Dies wurde auch in Bemerkung 2.3.1 verlangt und bedeutet auch Kompatibilität mit der Orientierung.

man nun die durch Aufschneiden gewonnene Kopien $(M_i)_{i\in\mathbb{Z}}, M_i \cong M - S$ wieder verkleben, erweist sich die Zweiseitigkeit der Fläche als günstig sogar notwendig (sonst würde nur *eine* Kopie von S als Rand entstehen). Der fixierte zweiseitige Kragen liefert nämlich durch $h(S,(-\epsilon,0))$ und $h(S,(0,\epsilon))$ offene Mengen M_i^- und M_i^+ in den M_i. Durch den strukturerhaltenden Diffeomorphismus h auf sein Bild, können nun M_i und M_{i+1} jeweils entlang M_i^+ und M_{i+1}^- verklebt werden — genauer: h liefert eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung

$$\cdots \sqcup M_{i-1} \sqcup (S \times (-\epsilon,\epsilon)) \sqcup M_i \sqcup (S \times (-\epsilon,\epsilon)) \sqcup M_{i+1} \sqcup \cdots ,$$

sodass der Quotient eine unendlich zyklische Überlagerung mit der offensichtlichen Projektion bildet. Da entlang offener Mengen verklebt wird, also durch die „Überlappungen", ist es möglich den gewonnenen Quotienten mit einer differenzierbaren Struktur zu versehen, so dass die Inklusionen der M_i glatte Einbettungen und somit Untermannigfaltigkeiten sind.

Als weiteren Vorteil dieser expliziten Konstruktion, sieht man explizit die Decktransformationsgruppe. Erzeugt von t ist sie über $t \mapsto 1$ zu $\mathbb{Z}$ isomorph. Unter diesem Isomorphismus entspricht $n \in \mathbb{Z}$ einer Translation aller M_i um n. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Überlagerung auch *die* zu $[S]$ gehörige Überlagerung ist, die in dem obigen Sinne dem dualen ϕ entspricht (da S immer noch die gewählte Orientierung bzw. den gewählten zweiseitigen Kragen trägt). Dies sieht man zum Beispiel ein, indem man sich unter dem Isomorphismus $H^1(M;\mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$ einen glatten Repräsentanten des Bildes von ϕ aussucht. Natürlich existiert so einer nach den Bemerkungen in 2.2 immer, jedoch soll dieser für den gewünschten Nachweis explizit S als orientiertes Urbild eines regulären Wertes ergeben. Dafür konstruiert man sich aus dem fixierten zweiseitigen Kragen eine Abbildung $f : M \to S^1$, die $S \times 0$ auf $p \in S^1$ abbildet, $M - S \times (-\epsilon,\epsilon)$ konstant auf den antipodalen Punkt von p abbildet und auf $S \times (-\epsilon,\epsilon)$ gemäß der Projektion auf den zweiten Faktor fortgesetzt wird. Bezüglich dieser glatt konstruierten Abbildung f ist der Wert p regulär und $f^{-1}p = S$ mit der richtigen Orientierung ausgestattet. Durch paralleles Aufschneiden von M an S, und S^1 an p (analog wie oben nur 2 Dimensionen tiefer) erhält man folgendes kommutatives Diagramm von Überlagerungen:

$$\begin{tikzcd} M_\phi \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d] \\ M \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm ist ist aber nun ein Pullback Diagramm von glatten Faserbündeln. Also ist die Diffeomorphieklasse von M_ϕ eindeutig.

Wir können festhalten:

Corollar 2.15. *Die unendlich zyklische Überlagerung, die durch Aufschneiden und Verkleben an einer zu ϕ dualen Fläche entsteht, entspricht der normalen Untergruppe* $\ker\phi$.

Corollar 2.16. *Jede zu ϕ duale Fläche kann als orientiertes Urbild eines regulären Wertes einer glatten Abbildung $M \to S^1$ dargestellt werden, mit $H_1(M \to S^1) = \phi$.*

Mit einer zu ϕ dualen Fläche ist eine eigentlich eingebettete orientierte 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeit gemeint.

Konstruktion 2 (Graph einer orientierten 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit)**.** Sei S ein beliebiger zu $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ eigentlich eingebetteter, orientierter Repräsentant. Wir haben gesehen, dass mit obiger Konstruktion eine Abbildung $f : M \to S^1$ entsteht mit $f^{-1}p = S$. Diese Abbildung soll in dieser Konstruktion über einen Graphen faktorisiert werden.

Bezeichne $S = S_1 \sqcup \cdots \sqcup S_n$ und $M - S = M_1 \sqcup \cdots \sqcup M_m$ die Zusammenhangskomponenten von S bzw. $M - S$. Betrachte nun den gerichteten Graphen G, dessen Knoten bijektiv den Komponenten M_i entsprechen und dessen Kanten aus den Komponenten S_i mit ihrer Orientierung hervorgehen, also ein Graph mit m Knoten und n Kanten, wobei eine Kante von einem Knoten zu einem anderen verläuft, wenn ihre assoziierten Komponenten M_i, M_j durch das entsprechende Flächenstück von S getrennt werden, sodass die Komponenten das zweiseitige Flächenstück an der negativen beziehungsweise positiven Seite berühren, je nachdem ob die Kante vom assoziierten Knoten aus oder eingeht.

Mit genau diesen zweiseitigen Umgebungen der Flächenkomponenten ist es möglich, ähnlich wie oben eine Abbildung $M \to G$ zu definieren, welche die Assoziierungen respektiert. Dafür betrachte man den zweiseitigen Kragen auf den Komponenten von S:

$$\sqcup(S_i \times (-\epsilon, \epsilon)) \xrightarrow{=} S \times (-\epsilon, \epsilon) \hookrightarrow M$$

Dann existiert analog zur obigen Konstruktion die Quotientenabbildung $q : M \to G$ auf den Graph, durch Kollabieren der $M_i \cap (M - S \times (-\epsilon, \epsilon))$ auf ihre Knoten und Projektion von $(-\epsilon, \epsilon)$ auf das Innere der Kanten des Graphen. Man betrachte außerdem $G \to S^1$ die Abbildung die jede Kante entsprechend ihrer Richtung, also orientierungserhaltend einmal um die Sphäre $S^1 = I/\partial I$ abbildet, sodass die Knoten nach $[\partial I]$ abgebildet werden. Außerdem seien die Mittelpunkte der Kanten das Urbild von dem antipodalen Punkt von $[I/\partial I]$ der genau $p \in S^1$ heißt. Bezüglich der Komposition der beiden Abbildungen $M \to S^1$, ist nun ϕ das Bild des Erzeugers von $H^1(S^1)$ unter der Rückziehung auf der Kohomologie, da $M \to S^1$ eine zu S duale Kohomologieklasse definiert (da $S = (M \to S^1)^{-1}p$). Sei f nach wie vor die Abbildung aus der letzten Konstruktion. Wir erhalten:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "f"] & G \arrow[r] & S^1 \end{tikzcd} \tag{1}$$

Da M zusammenhängend ist, ist es auch G.

Im Folgenden wollen wir häufig den Spezialfall betrachten, dass $\phi : H_1(M) \to \mathbb{Z}$ surjektiv ist.

Definition 2.4. Ein solches $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ heißt primitiv.

2.4 Normen und Halbnormen auf freien $\mathbb{Z}$-Moduln und ihre Fortsetzungen

Ziel der folgenden Kapitel wird es sein, einer Diffeomorphieklasse von Mannigfaltigkeiten eine Halbnorm und somit eine Invariante zuzuordnen. Genauer gesagt werden es sogar mehrere Halbnormen sein. Die Halbnormen werden wir zunächst auf der ersten Kohomologie $H^1(M;\mathbb{Z})$ definieren. Die erste Kohomologie eines kompakten topologischen Raumes ist stets torsionsfrei, denn es gilt: $H^1(M;\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(M;\mathbb{Z});\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(M;\mathbb{Z})/T;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$, wobei T der Torsionsanteil der abelschen Gruppe $H_1(M;\mathbb{Z})$ ist. Es wurde $\mathrm{Hom}(T;\mathbb{Z}) = 0$ und $H_1(M;\mathbb{Z}) \cong H_1(M;\mathbb{Z})/T \oplus T$ verwendet.

Definition 2.5. Eine ganzzahlige Halbnorm ist eine Abbildung $||\cdot|| : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ die Skalarmultiplikativität und Subadditivität erfüllt. Also für alle $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $v, w \in \mathbb{Z}^n$ soll $||\lambda v|| = |\lambda|\ ||v||$ und die Dreiecksungleichung $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ gelten.

Es folgt natürlich aus der Skalarmultiplikativität, dass die 0 trivial von der Halbnorm ausgewertet wird, da $||0|| = 0||0||$. Gilt auch die Umkehrung, also $||v|| = 0, v \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow v = 0$, so nennen wir $||\cdot||$ eine ganzzahlige Norm. Analog seien rationale (Halb-)Normen und reelle (Halb-)Normen definiert.

Lemma 2.17. *Eine ganzzahlige Halbnorm lässt sich auf eine rationale Halbnorm fortsetzen. Eine ganzzahlige oder rationale Halbnorm lässt sich auf eine reelle Halbnorm fortsetzen. Das gleiche gilt für Normen.*

Beweis. Will man $||\cdot|| : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ rational fortsetzen so bemerkt man, dass die Einbettung $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$ die Norm bereits durch die geforderte Skalarmultiplikativität fortgesetzt wird. Sobald man einen Wert für einen Punkt auf einem 1-dimensionalen Unterraum hat, so hat man ihn bereits für den ganzen Unterraum. Jede Gerade durch den Ursprung in $\mathbb{Q}^n$ schneidet einen und somit unendlich viele Gitterpunkte: Für jedes $q \in \mathbb{Q}^n$ ist bereits $aq \in \mathbb{Z}^n$ für ein großes $a \in \mathbb{Z}$. Diese lineare Fortsetzung ist offensichtlich eine Halbnorm sogar eine Norm, falls $||\cdot||$ es auf $\mathbb{Z}^n$ war.

Sei nun $||\cdot|| : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$ eine Halbnorm. Dann ist diese insbesondere eine konvexe Funktion, also auf jedem Kompaktum Lipschitz-stetig und somit auf jedem Kompaktum $K \cap \mathbb{Q}^n, K \subset \mathbb{R}^n$ in eindeutiger Weise stetig auf K fortsetzbar — es folgt die Existenz einer rellen Fortsetzung. ☐

Bemerkung 2.4.1 (Duale Vektorraumhalbnorm). Eine (Halb-)Norm auf einem Vektorraum, liefert stets eine (Halb-)Norm auf seinem Dualraum. Diese ist für einen Vektorraum $(V, |\cdot|)$ auf dem Dualraum $(V^*, ||\cdot||)$ definiert durch:

$$||\alpha|| = \sup_{\{v \in V, |v|=1\}} |\alpha v|$$

Entsprechend lässt sich eine Halbnorm auf $H^1(M;\mathbb{R})$ auf $H_1(M;\mathbb{R})$ durch den natürlichen Isomorphismus auf den Bidualraum definieren. Weiter lässt sich eine solche Halbnorm der ersten Kohomologie bei kompakten orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mittels der Dualitätssätze auf $H_2(M, \partial M;\mathbb{R})$ übertragen, die wiederum durch Vektorraumdualität eine Halbnorm für $H^2(M, \partial M;\mathbb{R})$ liefert.

2.5 Die betrachteten Räume

Nun noch eine letzte Generalvoraussetzung, die ab sofort verlangt wird:

Im Folgenden sei M stets eine kompakte, orientierbare, zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Falls diese einen Rand hat, sei er diffeomorph zu einer disjunkten Vereinigung von Tori.

Um die Hilfsmittel zu erweitern oder Extremfälle auszuschließen, arbeitet man häufig in der Kategorie der stückweise linearen (PL, *piecewise linear*) oder der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Sieht man sich beispielsweise Knoten an, also Einbettungen $S^1 \hookrightarrow S^3$, so stellt man fest, dass diese besonders ausgeartet aussehen können, allerdings nicht, falls es sich bei der Einbettung um eine PL oder eine differenzierbare Einbettung handelt. Ähnlich kann man in diesen Kategorien raumfüllende Kurven vermeiden. Allerdings stellte sich im Studium der 3-Mannigfaltigkeiten heraus, dass die Situation sich erheblich von der in höheren Dimensionen unterscheidet. Beispielsweise ist nicht jede Gruppe als Fundamentalgruppe einer 3-Mannigfaltigkeit realisierbar, eine Einschränkung liefert etwa Theorem 4.14. Außerdem lässt sich die Tatsache ergiebig nutzen, dass in Dimension 3 keine Unterscheidung der topologischen, der PL und der differenzierbaren Kategorie nötig ist: nach Moise's Theorem [16], besitzt jede 3-Mannigfaltigkeit sowohl eine eindeutige PL als auch eine eindeutige differenzierbare Struktur. Das bedeutet, um Aussagen für 3-Mannigfaltigkeiten zu zeigen, kann man sich (fast) beliebig in diesen Kategorien hin- und herbewegen um das Resultat am Ende für alle zu erhalten. Um diese beiden Beispiele hervorzuheben, lässt sich bemerken, dass der $\mathbb{R}^4$ überabzählbar viele unterschiedliche differenzierbare Strukturen besitzt und auch jede Gruppe realisierbar als Fundamentalgruppe einer 4-Mannigfaltigkeit ist.

Diese Arbeit wird sich jedoch konsistent in der C^∞-Kategorie bewegen. Der vorherige Absatz dient also lediglich der Betonung, dass dies keine Einschränkung bedeutet.

3 Die Thurston-Norm

Nun wollen wir zu der ersten der beteiligten Normen kommen — der Thurston-Norm. Um den roten Faden und die Motivation zu bewahren sei der Beweis von Theorem 1.1 wiefolgt skizziert: Zunächst soll $b_1(\ker\phi) = b_1(M_\phi)$ als untere Schranke für die Auswertung der Thurston-Norm an dem surjektiven $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M);\mathbb{Z})$ herausgestellt werden. Dann wird die Auswertung der Alexander-Norm an einem surjektiven ϕ in Zusammenhang mit $b_1(\ker\phi)$ gesetzt. Die Kombination dieser Ergebnisse wird das Theorem liefern. Dieses Kapitel widmet sich der Definition der Thurston-Norm und der unteren Abschätzung durch $b_1(\ker\phi)$.

3.1 Eigenschaften der Thurston-Norm

Wir haben in Kapitel 2.2 und 2.3 gesehen, wie jede Homologieklasse in $H_2(M,\partial M;\mathbb{Z})$ (ggf. $\partial M = \emptyset$) dual zu $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$, durch eine glatte Einbettung einer orientierten Fläche repräsentiert ist. Dies ermöglicht die Definition der Thurston-Norm:

Definition 3.1 (Thurston-Norm)**.** Definiere die Thurston Norm für $\phi \in H^1(M,\mathbb{Z})$ als

$$||\phi||_T = \min\{\chi_-(S) |\ (S,\partial S) \subset (M,\partial M) \text{ ist orientierte eingebettete Fläche dual zu } \phi\},$$

wobei $\chi_-(S) = \sum \max(-\chi(S_i),0)$ und über $S = \sqcup S_i$ die Zusammenhangskomponenten von S summiert wird.

Das folgende Ergebnis ist von Thurston [19].

Lemma 3.1. *Die Thurston Norm definiert eine Halbnorm auf $H^1(M;\mathbb{Z})$ und somit auf $H^1(M;\mathbb{R})$.*

Beweis. Die Fortsetzung auf $H^1(M;\mathbb{R})$ wurde in Lemma 2.17 behandelt.

Es muss die Skalarmultiplikativität und die Subadditivität gezeigt werden, also:

$$||\lambda\phi||_T = \lambda||\phi||_T, \qquad \lambda \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

$$||\phi+\psi||_T \leq ||\phi||_T + ||\psi||_T, \qquad \phi,\psi \in H^1(M) \tag{3}$$

Da die Thurston Norm aus den Eigenschaften der dualen Flächen hervorgeht, ist es nötig sich Gedanken zu den dualen Homologieklassen zu machen. Dann ist es für (2) offensichtlich hinreichend, falls für repräsentierende, orientierte, eigentlich eingebettete Flächen, etwa S, T mit Bildern ihrer Fundamentalklassen $[S], [T] \in H_2(M,\partial M)$ und $[S] = \lambda[T]$, die Fläche S bereits disjunkte Vereinigung von λ Komponenten S_i ist, mit $[S_i] = [T]$.

Für $[S] = \phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$ existiert eine glatte Abbildung $f : M \to S^1$, die ϕ repräsentiert und ohne Einschränkung einen regulären Wert $s \in S^1$ habe, dessen Urbild S ist (siehe Kapitel 2.2 und Konstruktion 1 bzw. Corollar 2.16). Sei auch $g : M \to S^1$ glatt mit dem regulären Wert t, sodass $g^{-1}(t) = T$ mit korrekter Orientierung gilt, also $H_1(g)$ dual zu $[T]$ ist. Es gilt $\mathrm{Im}\,\pi_1(f) \subset \lambda\mathbb{Z}$, da die induzierte Abbildung der Fundamentalgruppen mit der dualen Kohomologieklasse identifiziert werden kann (vgl. Bemerkung 2.2.1), die aber deswegen auch ein λ-Vielfaches ist. Betrachtet man die Überlagerung $p : S^1 \overset{z^\lambda}{\to} S^1$, liefert die Überlagerungstheorie einen Lift $\hat{f}$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & S^1 \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, "p"'] & S^1 \end{tikzcd}$$

Das Quadrat kommutiert bis auf Homotopie, also $p\hat{f} \simeq pg$, denn beide Abbildungen identifizieren sich unter der Bijektion $H^1(M;\mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$ (siehe Kapitel 2.2) mit dem Dual von $\lambda[T]$ etwa $\lambda\phi$, also impliziert die Existenz dieser Bijektion, dass $[p\hat{f}] = [pg]$. Somit folgt auch (mit Kapitel 2.2), dass Urbilder regulärer Werte aus S^1 unter $\hat{f}$ homolog zu solchen aus g sind. Da $p^{-1}(s) = \{s_1, \cdots, s_n\}$ sicherlich reguläre Werte von $\hat{f}$ sind (folgt zum Beispiel aus der Kettenregel für Differentiale), sind die Urbilder $S_1, \cdots, S_n$ disjunkte, eingebettete, orientierte Flächen mit $[S_i] = [T]$. Da S auch minimal (bezüglich der Thurston-Norm) gewählt werden kann, folgt also $||\lambda\phi||_T \geq \lambda||\phi||_T$. Nun lassen sich aber aus einer minimierenden Fläche für $[T]$ (sei T ohne Einschränkung selbst so gewählt), zum Beispiel mithilfe eines zweiseitigen Kragens $T \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$, λ disjunkt eingebettete Kopien von T gewinnen, die offensichtlich auch $[S]$ repräsentieren, also $||\lambda\phi||_T = \lambda||\phi||_T$.

Um nun die Subbadditivität (3) zu zeigen, ist es nötig die Geometrie der $|| \cdot ||_T$-minimierenden orientierten eingebetteten Flächen S, T, mit $[S]$ dual zu ϕ und $[T]$ dual zu ψ, genauer zu betrachten. Die Differentialtopologie liefert mit dem Transversalitätstheorem (vergleich Kapitel 2.2) diffeotope (also insbesondere homologe) Approximationen von T, die transversal zu S sind, deswegen seien also ohne Einschränkung $S \pitchfork T$ transversal. Außerdem folgt durch die Transversalität, dass $S \cap T$ eine glatte, kompakte 1-Mannigfaltigkeit ist, man sagt auch „Der Pullback der Einbettungen bleibt in der Kategorie". Die Klassifikation von kompakten 1-Mannigfaltigkeiten liefert, dass dieser Durschnitt eine disjunkte Vereinigung von Kreisen und kompakten Intervallen ist (letztere existieren natürlich nur, wenn S, T und somit M Rand haben). Des Weiteren existiere ohne Einschränkung der Allgemeinheit keine Kreiskomponente des Schnittes $S \cap T$ die eine Scheibe berandet, die in S oder T enthalten ist. Diese Annahme kann man wie folgt rechtfertigen:

Angenommen es existiert ein Nullbordismus $D \subset S$ einer Komponente $\partial D \subset S \cap T$. Weiter sei dieser auf dem Inneren disjunkt von T, da ein nichttrivialer Schnitt mit T einen weiteren Kreis aus $S \cap T$ liefert, der den Nullbordismus einschränkt, sodass er weniger Komponenten im Schnitt mit T berührt als der ursprüngliche (man bemerke das Transversalität genutzt wurde). So fahre man endlich oft fort,

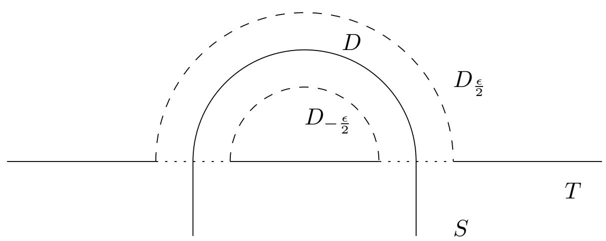


Abbildung 2: Ausschneiden einer Umgebung von $S \cap T$ und Ankleben zweier Scheiben, sodass die Homologieklasse erhalten bleibt

bis der Durchschnitt mit T trivial ist,
also die berandende Scheibe in S die
Fläche T nur im Rand berührt. Nun lässt sich eine offene Tubenumgebung von $\partial D \subset T$ aus T entfernen. Diese kann wie folgt gewählt werden: Sei $\nu(S) \to M$ eine Tubenumgebung von S, die sich aufgrund der Zweiseitigkeit wie folgt wählen lässt: $\alpha : S \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$, sodass $\operatorname{Im} \alpha|_{S\times(-\frac{1}{2}\epsilon,\frac{1}{2}\epsilon)} \cap T$ eine Tubenumgebung von $S \cap T$ in T ist. Dann lässt sich diese Tubenumgebung an ∂D aus T entfernen und mittels des betrachteten zweiseitigen Kragens von S um D findet man zwei Kopien $D_{\frac{\epsilon}{2}}, D_{-\frac{\epsilon}{2}}$, sowie Anklebevorschriften, mit denen diese Scheiben an die beiden durch Ausschneiden entstandenden Kreis-Randkomponenten von T kleben kann, vergleiche Abbildung 2. Da die Tubenumgebung (die Flächen sind kompakt) so gewählt werden kann, dass für jedes $|\delta| < \epsilon$ die glatte Einbettung $\alpha|_{S\times\{\delta\}}$ transversal zu T ist, liefert die Tubenumgebung Informationen zum Glätten der entstehenden Untermannigfaltigkeit T' [2] **2.not sure about this**. Als Resultat ergeben sich die orientierten, glatten Flächen $S \pitchfork T'$, deren Durchschnitt um eine Komponente reduziert wurde und offensichtlich $[T] = [T']$ gilt. Mit einem ähnlichen Argument schließt man kompakte Intervalle $(I, \partial I) \to (S \cap T, \partial(S \cap T))$ aus, die relativ Randpunkten diffeotop zu einer Randkomponente sind.

Von nun an seien S und T transversale Flächen, deren Durchschnitt den obigen Anforderungen genügt. Ziel ist es nun den Zykel $[S] + [T]$, als eingebettete Fläche zu repräsentieren. Durch S und T ist bereits ein Repräsentant als Immersion der disjunkten Vereinigung gegeben, da die Fundamentalklasse der disjunkten Vereinigung aus den Fundamentalklassen der Komponenten besteht. Beachtet man die Orientierungen, so kann man an jeder Komponente des Durchschnitts $S \cap T$ die Vereinigung $S \cup T$ aufschneiden (die lokal aussieht wie die Gerade, an der sich zwei orientierte Ebenen im $\mathbb{R}^3$ schneiden), und entlang der Orientierungen in nur einer Möglichkeit wieder verkleben, so dass man eine Mannigfaltigkeit erhält (dies funktioniert offensichtlich an den Durchschnittkomponenten mit Rand, aber auch an den geschlossenen Komponenten, da die Orientierungen auf S und T global gewählt sind). Natürlich können mit entsprechenden Umgebungen, alle diese Klebe- und Schneideprozesse wieder glatt durchgeführt werden. Nun erhält man eine glatte, orientierte Fläche U, die (nach gegebenfalls leichter Modifikation) auch eigentlich eingebettet ist. Für den Wert von $[U]$ unter der Thurston-Norm, muss dieses Ergebnis und die Auswirkungen der Konstruktionen auf die Flächen diskutiert werden. Die obigen „uneinschränkenden“ Konstruktionen zu Beginn können natürlich die Euler Charakteristik χ verändern, nicht jedoch χ_-, also resultieren daraus weiterhin Thurston-Norm minimierende Flächen[3]. Zwei solche Flächen gegeben, erbt die letztere Konstruktion, die aus $S \cup T$ eine homologe Fläche U macht, die Summe der Eulercharakteristika. Dies Vererbung resultiert zum Beispiel aus der Vererbung der CW-Struktur von U aus

[2] vgl. [**?**] oder man verwende glatte Approximation der topologischen Einbettung mit Wahl einer glatten Struktur der topologischen Mannigfaltigkeit T', vgl. [11, Chapter 5, Lemma 1.5] und dass $DIFF = TOP = PL$ gilt für Mannigfaltigkeiten in Dimensionen ≤ 3, da dort die Hauptvermutung gilt, vgl. [**?**, Chapter 35,36]

[3] Dies geschieht zum Beipsiel durch die Entstehung von Sphären, siehe Abbildung 2. Wichtig ist nur, dass solche Komponenten nicht beim Verkleben der beiden Flächen entstehen. Genau deswegen wurde diese Annahme getroffen.

gegebenen CW-Strukturen von S und T die jeweils $S \cap T$ in ihrem 1-Skelett enthalten. Eine solche Verfeinerung der CW-Strukturen auf S und T lässt sich offensichtlich aus jeder CW-Struktur leicht erreichen. Die folgende Implikation ist im Allgemeinen *nicht* wahr und gilt hier aufgrund der Annahmen an S und T, da unter diesen Annahmen bei der Konstruktion von U keine Komponenten mit positiver Eulercharakteristik entstehen.

$$\chi(U) = \chi(S) + \chi(T) \quad \Longrightarrow \quad \chi_-(U) = \chi_-(S) + \chi_-(T)$$

Dies liefert nun die Subbadditivität der Thurston-Norm auf den Homologieklassen. □

Häufig stellt man Annahmen an die 3-Mannigfaltikeit, die es verbieten, dass Homologieklassen von Sphären oder Tori repräsentiert werden können. In dem Fall würde dann sogar $||\phi||_T = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$ gelten. Dies alles motiviert natürlich, diese Norm zu einer Vektorraumnorm auf $H^1(M; \mathbb{R})$ fortzusetzen und Lemma 2.17 belohnt uns mit einer solchen Fortsetzung.

3.2 $|| \cdot ||_T$-minimierende Flächen

Nun wollen wir uns eine besondere Art von Flächen anschauen, nämlich die Repräsentanten der zu ϕ dualen Klasse, bei denen χ_- minimal ist. Dass immer ein Repräsentat existiert, der gewissen Eigenschaften genügt, sichert der folgende Satz:

Lemma 3.2. *Sei $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ ein primitives Element und es gelte $b_1(\ker \phi) < \infty$. Dann existiert eine zu ϕ duale zusammenhängende Thurston-Norm-minimierende Fläche $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ mit $b_2(S) = b_3(M)$, so dass folgende Abschätzung erfüllt ist:*

$$b_1(S) \leq b_1(\ker(\phi))$$

Beweis. Wähle unter allen Thurston-Norm-minimierenden Flächen eine orientierte Fläche S mit einer geringsten Anzahl an Zusammenhangskomponenten.
Behauptung: Diese Fläche ist zusammenhängend. Man betrachte den aus S entstehenden Graphen nach Konstruktion 2. Wir werden zeigen, dass unter der Minimalitätsanforderung von S unter diesen Identifikationen klar ist, dass G ein topologischer Kreis ist und $G \to S^1$ die Identität. Das impliziert die Behauptung.

Dafür betrachte man folgendes Diagramm von Pullbacks von Überlagerungen:

$$\begin{tikzcd}
M_\phi \arrow[r, shift right] \arrow[d] & G_\phi \arrow[l, dashed, shift right, "\alpha_\phi"'] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \arrow[d] \\
M \arrow[r, shift right] & G \arrow[l, dashed, shift right, "\alpha"'] \arrow[r] & S^1
\end{tikzcd}$$

Man erhält unendlich zyklische Überlagerungen, also unendlich zyklische Decktransformationsgruppen. Unter der oben gezeigten Kompatibilitätsvorraussetzung dieser Überlagerungen durch Pullbacks, mit den Überlagerungen durch Aufschneiden an dualen Flächen (deswegen die suggestive Schreibweise M_ϕ), entsteht G_ϕ durch „Aufschneiden an den Kantenmitten“. Nun existieren offensichtlich Homotopieschnitte α, α_ϕ, also stetige Abbildungen, sodass $G \overset{\alpha}{\to} M \to G$ und $G_\phi \overset{\alpha_\phi}{\to} M_\phi \to G_\phi$ jeweils homotop zur Identität sind **3.vgl abbildung**. Mit Funktorialität und Homotopieinvarianz des Homologiefunktors, induzieren α, α_ϕ Monomorphismen $H_1(\alpha;\mathbb{Q}), H_1(\alpha_\phi;\mathbb{Q})$, entsprechend sind die ersten Bettizahlen von von G und G_ϕ nach oben durch die von M und M_ϕ beschränkt. Folglich muss $b_1(G) = 1$ sein, sonst wäre $b_1(G_\phi) = \infty > b_1(M_\phi)$, da Fundamentalgruppen von Graphen frei sind. Somit ist $\pi_1(G) = \mathbb{Z}$. Also ist G als Graph homotopieäquivalent zu einem Kreis. Da G die Kompaktheit von M erbt, ist nur noch die Existenz von Knoten ohne ein- oder ausgehende Kanten auszuschließen, um zu zeigen das G ein topologischer Kreis ist. Diese ist aber durch die Minimalitätseigenschaft im Bezug auf die Komponenten der gewählten Fläche ausgeschlossen, da solche Kanten einem nullhomologen Zykel entsprechen. Dies sieht man, falls M geschlossen ist, wie folgt ein: Gehöre M_i zu einem ein Knoten der nur eingehende oder nur ausgehende Kanten besitzt, mit den dazugehörigen orientierten Flächen $S_i, i \in I$. Entweder ist dann $(\overline{M_i}, \sqcup_{i\in I} S_i)$ oder $(\overline{M_i}, -\sqcup_{i\in I} S_i)$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand, wobei $-S_i$ die Fläche S_i mit umgekehrter Orientierung bezeichnet, also gilt für das Bild der Fundamentalklasse unter der Inklusion $[-S_i] = -[S_i]$. Ohne Einschränkung gelte der erste Fall. Doch die Inklusion von $\hat{S} = \sqcup_{i\in I} S$ faktorisiert

$$\hat{S} \overset{i}{\hookrightarrow} M = \hat{S} \overset{j}{\hookrightarrow} \overline{M_i} \overset{k}{\hookrightarrow} M,$$

und mit der Funktorialität der Homologie faktorisiert auch $H_2(i) = H_2(k)H_2(j)$, aber die Inklusion des Ranges ist homolog trivial $H_2(j) = 0$. Hier benutzt man, dass der Rand einer orientierten Mannigfaltigkeit als Homologieklasse mit Kodimension 1 nullhomolog ist (aus der langen exakten Sequenz für das (orientierte) Paar folgt, dass die Inklusion von Rändern auf der Homologie der Kodimension 1 eine triviale Abbildung induziert, da der Randoperator einen Isomorphismus induziert, der die relative Fundamentalklasse auf die Fundamentalklasse des Randes abbildet). Falls M jedoch nicht geschlossen ist, so folgt mit einem einfachen Schnittzahlenargument, dass jede Homologieklasse als transversale Schleife ausgewertet auf $[\hat{S}]$ (als duale Kohomologieklasse), die Summe der transversalen Schnitte mit Vorzeichen ergibt, somit $\hat{S}$ dual zu dem trivialen Homomorphismus $\pi_1(M) \overset{0}{\to} \mathbb{Z}$ ist, also selbst nullhomolog. Folglich würde dies eine Fläche mit $|I|$ weniger Komponenten und somit einen Widerspruch liefern:

$$[S] = [\sqcup_{i\notin I} S_i \bigsqcup \sqcup_{i\in I} S_i] = [\sqcup_{i\notin I} S_i] + [\sqcup_{i\in I} S_i] = [\sqcup_{i\notin I} S_i]$$

Betrachtet man nun, wissend dass G ein topologischer Kreis ist, die induzierte Abbildung auf der Homologie $(G \to S^1)_*$, so ist diese ein Isomorphismus, da ϕ primitiv ist. Also besitzt G nur eine Kante und die Fläche S ist zusammenhängend.

Die nächste Gleichheit — *die Übereinstimmung des Ranges auf den Top-Homologien von S und M* — hängt von der Existenz eines Randes ab. Da $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ folgt aus $\partial S \neq \emptyset$ direkt $b_2(S) = b_3(M) = 0$. Falls S aber leeren Rand hat, gilt $b_2(S) = 1$ und es muss $b_3(M) = 1$ gezeigt werden. Dazu wird die Existenz eines Randes von M widerlegt:

Nach Annahme existeren nur Tori als Randkomponenten. Sei $T \subset \partial M$ eine solche Randkomponente. Da S keinen Rand hat, also T nicht berührt, enthält die durch

Aufschneiden an S erhaltene unendlich zyklische Überlagerung M_ϕ auch unendlich zyklisch viele Kopien von T als Randkomponenten. Genauer: Unter Verwendung dieser Aufschneide-Konstruktion 1, liftet T in jedes $M_i \cong M - S \supset T$, auf der sich die Projektion zu einem Diffeomorphismus einschränkt. Im Folgenden soll die Notation $\overline{M}_i$ für die (wieder) kompakte (Unter-)Mannigfaltigkeit von M_ϕ verwendet werden, die den Fundamentalbereich darstellt, der M_i enthält. Zusammen mit der langen exakten Sequenz für eine kompakte orienierbare Mannigfaltigkeit $(N, \partial N)$

$$\begin{tikzcd}
H_2(N;\mathbb{Q}) \arrow[r] & H_2(N,\partial N;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\delta"] & H_1(\partial N;\mathbb{Q}) \arrow[r, "i_*"] & H_1(N;\mathbb{Q}) \\
& & H^1(N;\mathbb{Q}) \arrow[ul, "\text{Lefschetz Dualität: } \cong"] \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

und der daraus folgenden Abschätzung

$$b_1(\partial N) = \dim(\operatorname{Im}\delta) + \dim(\operatorname{Im} i_*) \leq 2b_1(N)$$

erhält man für jede kompakte zusammenhängende (man bemerke die implizite Anforderung an $I \subset \mathbb{Z}$) Untermannigfaltigkeit der Form

$$\bigcup_{i\in I} \overline{M}_i \subset M_\phi$$

die Abschätzung:

$$b_1(\bigcup_{i\in I} \overline{M}_i) \geq \frac{1}{2} b_1(\partial \bigcup_{i\in I} \overline{M}_i) \geq \frac{1}{2} b_1(\sqcup_{i\in I} T) = |I|$$

Nun folgt aber aus der Mayer Vietoris Sequenz (für entsprechende offene Umgebungen[4]) die exakte Sequenz:

$$\cdots \to H_1(S \sqcup S;\mathbb{Q}) \to H_1(\bigcup_{i\in I} \overline{M}_i;\mathbb{Q}) \oplus H_1(M_\phi - \bigcup_{i\in I} \overline{M}_i;\mathbb{Q}) \to H_1(M_\phi;\mathbb{Q}) \to 0$$

und somit

$$b_1(M_\phi) = b_1(\bigcup_{i\in I} \overline{M}_i) + b_1(M_\phi - \bigcup_{i\in I} \overline{M}_i) - b_1(S \sqcup S) \geq |I| - 2b_1(S)$$

Da aber $b_1(M_\phi)$ nach Voraussetzung endlich ist und $|I|$ beliebig groß, folgt also, dass der Rand von M_ϕ keine Tori enthält und somit leer ist.

Um nun noch *die Abschätzung* $b_1(M_\phi) \leq b_1(S)$ zu zeigen, wird erneut die Konstruktion der Überlagerung durch Aufschneiden und Verkleben zur Hilfe genommen. Da $\ker\phi \otimes \mathbb{Q} \cong H_1(M_\phi;\mathbb{Q})$ nach Voraussetzung ein endlich erzeugter $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, wird $H_1(M_\phi;\mathbb{Q})$ von einem kompakten Teilraum, etwa der Untermannigfaltigkeit

[4] Stichworte hier: das allgemeine Theorem über Tubenumgebungen, Umgebungsdeformationsretrakt

$\overline{M}_1 \cup \dots \cup \overline{M}_k \hookrightarrow M_\phi$ und somit auch $t^k(\overline{M}_1 \cup \dots \cup \overline{M}_k) = \overline{M}_{k+1} \cup \dots \cup \overline{M}_{2k} \hookrightarrow M_\phi$, erzeugt (heißt: die Inklusionen erzeugen Epimorphismen auf der ersten Homologie). Mit diesem Wissen liefert die folgende exakte Sequenz (induziert nach Mayer-Vietoris) die gesuchte Abschätzung:

$$\dots \to H_1(S;\mathbb{Q}) \to H_1(\bigcup_{i\leq k} \overline{M}_i;\mathbb{Q}) \oplus H_1(\bigcup_{i>k} \overline{M}_i;\mathbb{Q}) \twoheadrightarrow H_1(M_\phi;\mathbb{Q})$$

$\square$

Bemerkung 3.2.1. Da die erste Homologie der Überlagerung natürlich bessere Chancen hat, als Modul, durch Vergrößerung des Grundrings, über dem Gruppenring $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ endlich erzeugt zu sein, stellt sich die Frage, ob, wie und warum es sinnvoll oder möglich wäre das eben bewiesene für diesen Fall zu verallgemeinern. Dies wird später mit Hilfe der weiteren Lemmas in Kapitel 5.1 diskutiert.

Bemerkung 3.2.2. Tatsächlich liefert dieses Lemma sogar *die* Abschätzung des Theorems 1.1 wie wir nachher sehen werden. Gilt hier also Gleichheit, so folgt auch die Gleichheit in dem Theorem. Diese Bemerkung bietet also dem Leser die Möglichkeit, noch einmal kurz inne zu halten und sich die Natur der Abschätzung anhand der vorhergehenden Seiten zu verdeutlichen.

4 Die Alexander-Invarianten

4.1 Topologische Definitionen

In der Knotentheorie gilt als Grundlage der Motivation für die Alexander Invarianten — wie für so viele Knoteninvarianten — die Fundamentalgruppe: Allgemein ist es schwierig zu entscheiden, ob zwei endlich erzeugte abelsche Gruppen mit gegebenen Präsentationen isomorph sind. Die Abelianisierung einer Knotengruppe berechnet sich mit Alexanderdualität zu $\mathbb{Z}$, also liefert die Homologie des Knotenkomplements eine besonder nutzlose Invariante in der Knotentheorie. Deswegen geht man zu der Kommutatoruntergruppe über. Die Überlagerungstheorie liefert eine geeignete Überlagerung des Knotenkomplements, dessen Fundamentalgruppe die Kommutatoruntergruppe ist. Nach Hurewicz studiert man mit der Homologie dieser Überlagerung also die Abelianisierung der Kommutatorgruppe. Da aber auch diese Gruppe im Allgemeinen nicht endlich erzeugt oder endlich präsentiert ist, betrachtet man die induzierte Wirkung der Decktransformationen auf der Homologie. Genauer betrachtet man sogar die Wirkung des Gruppenrings $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, wobei t Erzeuger der Deckgruppe ist, die aus der abelschen Gruppe einen $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-Modul macht — den Alexander Modul. Durch Vergrößerung des Grundrings, also durch Auffassen der Homologie als $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-Modul anstelle eines $\mathbb{Z}$-Moduls, zeichnet sich der Alexander Modul durch meist durch weniger Erzeuger und Relationen aus und bietet eine fruchtbare Grundlage für algebraische Invarianten. Genau diese Inspiration liegt auch der Verallgemeinerung der Alexander Invarianten zugrunde.

Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit mit den obigen Beschränkungen und $\phi : G = \pi_1(M) \to F$ ein Epimorphismus in eine freie abelsche Gruppe F. Aus der Überlagerungstheorie ist bekannt, dass nun eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\hat{M}_\phi$ existiert, die M überlagert und auf Level der Fundamentalgruppen $\ker \phi \cong \pi_1(\hat{M}_\phi) \overset{p_*}{\hookrightarrow} \pi_1(M)$ einbettet, vergleiche [10, Kapitel 1.3]. Diese ist bis auf Diffeomorphie eindeutig. Die Decktransformationsgruppe ist dann isomorph zum Quotienten $\pi_1(M)/p_*\pi_1(\hat{M}_\phi) \cong F$. Dieser Quotient F operiert dann auf $\hat{M}_\phi$ durch Diffeomorphismen, induziert also auch eine Operation auf $\pi_1(\hat{M}_\phi)$ und auf $H_1(\hat{M}_\phi)$. Da $\mathbb{Z}$ auf jeder abelschen Gruppe wirkt, ist folgende Definition gerechtfertigt:

Definition 4.1 (Alexander Modul)**.** Der Alexander Modul eines Gruppenepimorphismus in einen freien $\mathbb{Z}$-Modul $\phi : \pi_1(M) \twoheadrightarrow F$ ist definiert als

$$A_\phi(M) = H_1(\hat{M}_\phi)$$

aufgefasst als $\mathbb{Z}[F]$-Modul, durch die induzierte Wirkung der Decktransformationen. Mit Bemerkung 2.1.2 lässt sich allgemeiner $A_\phi(M; R) = H_1(\hat{M}_\phi; R)$ als $R[F]$-Modul definieren.

Um die folgenden Betrachtungen zu ermöglichen und um der oben hervorgerufenen Erwartungshaltung gerecht zu werden, zeigt die folgende Proposition die endliche Erzeugbarkeit des Alexander Moduls.

Um die Situation für spätere Berechnungen angenehmer zu gestalten und überhaupt erst die Definition der Alexander Invarianten zu berechtigen, überzeugt man sich zunächst davon, dass der Alexander Modul tatsächlich endlich erzeugt über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[F]$ ist.

Proposition 4.1. *$A_\phi(M)$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[F]$-Modul.*

Bemerkung 4.1.1. Eine algebraische Variante des Beweises befindet sich im nachfolgenden Kapitel 4.

Beweis. Da M eine 3-Mannigfaltigkeit ist, existiert eine CW Struktur, vgl. [16]. Kompakte Mengen in CW-Komplexen enthalten nur endlich viele Zellen. Also folgt mit der Kompaktheit von M die Endlichkeit der Anzahl der Zellen in einer CW-Struktur von M. Da es für CW-Komplexe gleichbedeutend ist die zelluläre Homologie zu berechnen, fixiere man eine endliche CW-Struktur von M die eine auf M_ϕ liefert. Die Decktransformationen berücksichtigen Zellen zu einer vererbten CW-Struktur der Überlagerung, das bedeutet sie bildet Zellen die das gleiche Bild in M haben aufeinander ab. Da die Decktransformationen einer normalen Überlagerung frei sind, assozieren sie also zu jeder Zelle in M alle unendlich zyklisch vielen Zellen in M_ϕ (assozieren bedeutet im algebraischen Sinne: Bis auf eine Einheit, also ein Gruppenelement im Gruppenring, verschieden sein). Also sind in dem Kettenkomplex der Überlagerung alle Kettengruppen frei und endlich erzeugt als $\mathbb{Z}[F]$-Moduln. Das bedeutet, für jeden freien $\mathbb{Z}$-Summanden der Kettengruppen der Mannigfaltigkeit erhält man einen freien $\mathbb{Z}[F]$-Summanden der Kettengruppen der Überlagerung. Mit Corollar 2.3 ist also die Homologie des $\mathbb{Z}[F]$-Kettenkomplexes endlich erzeugt.

Es bleibt also zu zeigen, dass das Bilder der Homologie als $\mathbb{Z}[F]$-Moduln verträglich ist mit dem Bilder der Homologie als abelsche Gruppen. Aber da die Wirkung von F auf der Homologie durch Diffeomorphismen induziert wird, so ist die Verträglichkeit durch die elementare Tatsache gegeben, dass Abbildungen von Räumen auch Kettenkomplexabbildungen induzieren, also Verträglichkeit mit den Randoperatoren gegeben ist. □

Da der Gruppenring $\mathbb{Z}[F]$ kein Hauptidealring ist, wollen wir die in Kapitel 2.1 motivierten Invarianten von endlich erzeugten Moduln über einem noetherschen Ring betrachten.

Definition 4.2. Definiere das i-te Elementarideal von M bezüglich $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$ als $E_i(A_\phi(M))$ und das Alexander Ideal von M bezüglich ϕ als $I_\phi(M)$.

Nun ist $E_i(A_\phi(M))$ nicht zwangsweise ein Hauptideal, also betrachtet man Alexander Polynome:

Definition 4.3. (Alexander Polynom) Definiere das Alexander Polynom Δ_ϕ als einen größten gemeinsamen Teiler von $E_0(A_\phi(M))$. Allgemeiner sei Δ_ϕ^i ein größter gemeinsamer Teiler von $E_i(A_\phi(M))$.

Ein größter gemeinsamer Teiler eines Ideals I erzeugt ein minimales Hauptideal das I enthält. Für einen Ring R und ein Ideal $I \subset R$ ist das kleinste Hauptideal welches I enthält im Allgemeinen nicht eindeutig. Allerdings gilt in faktoriellen Ringen diese

Eindeutigkeit, aufgrund der Eindeutigkeit der Primzerlegung bis auf Assoziertheit. Assozierte Elemente erzeugen natürlich die gleichen Hauptideale. Um die Definition zu rechtfertigen — also um von *dem* Alexander Polynom sprechen zu können — folgert man zusammen mit Proposition 2.9 und Bemerkung 2.1.4 folgendes Lemma:

Lemma 4.2. *Das Alexander Polynom ist bis auf Multiplikation mit Elementen $\pm f$ eindeutig, wobei $f \in F$.*

Bemerkung 4.1.2. Falls also $F \cong \mathbb{Z}$, also $\mathbb{Z}[F] \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, dann definiert die höchste Distanz der auftauchenden Exponenten den Grad des Polynoms $p \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$. Offensichtlich ist der Grad eines Polynoms invariant bezüglich der Multiplikation mit den Einheiten t^N. Also weist das Alexander-Polynom einem surjektiven $\pi_1(M) \to F$ einen eindeutigen Grad zu.

Die Alexander-Invarianten sind insbesondere für einen surjektiven Homomorphismus als Kohomologieklasse $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M);\mathbb{Z})$ definiert. Solche ϕ werden *primitiv* genannt.

Definition 4.4. Sei $G = \pi_1(M)$ und $\phi : G \to F$ die kanonische Abbildung auf den maximalen freien abelschen Quotienten, der durch $F = ab(G) = H_1(G)/T \cong \mathbb{Z}^{b_1(G)}$ charakterisiert ist. Dann definieren wir mithilfe den obigen Invarianten:

- den Alexander-Modul von M: $A(M) = A_\phi(M)$
- das Alexander-Ideal von M: $I(M) = I_\phi(M)$
- das Alexander-Polynom von M: $\Delta(M) = \Delta_\phi(M)$

Bleibt nur noch die Alexander-Norm zu definieren, die eine Halbnorm auf der ersten Kohomologie der 3-Mannigfaltigkeit definiert.

Definition 4.5 (Alexander-Norm)**.** Sei $\Delta \in \mathbb{Z}[F]$ das Alexander Polynom von M. So ist Δ von der Form:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \qquad\qquad a_k \neq 0, f_i = f_j \Rightarrow i = j$$

Sei nun $\phi \in H^1(M,\mathbb{Z})$, dann definieren wir die Alexander Norm von ϕ als

$$||\phi||_A = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \Delta = 0 \\ \sup \phi(f_i - f_j) \end{cases},$$

wobei das Supremum über die Gruppenelemente f_i genommen wird, die in Δ auftauchen.

Der nichttriviale Teil der folgenden Aussage wurde in Lemma 2.17 gezeigt.

Lemma 4.3. *Die Alexander-Norm definiert eine Halbnorm auf $H^1(M;\mathbb{Z})$ und somit auf $H^1(M;\mathbb{R})$.*

4.2 Algebraische Definitionen

4.durchgehen und säubern

Tatsächlich könnte man diese Bachelorarbeit fast ausschließlich algebraisch verstehen — wenigstens den Teil über die Alexander-Invarianten. Natürlich ist dieser Arbeit aus dem Bereich der Topologie, der Geschmack oder die Illusion gegeben, man arbeite mit direkten Eigenschaften der Räume. Bei der Thurston-Norm ist dies sicherlich noch eher gegeben, durch die Definition einer Funktion auf einem Vektorraum mittels geometrischer Eigenschaften der Mannigfaltigkeit. Jedoch handelt es sich bei den Alexander-Invarianten, insbesondere dem Alexander Polynom, lediglich um Invarianten einer endlich erzeugten Gruppe. Durch Anwendung dieser Invarianten auf die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes, erhält man also Invarianten von Räumen. Natürlich verliert das Alexander Polynom von 3-Mannigfaltigkeiten durch diese „Faktorisierung“ nicht allzu viel an Reiz, da die Fundamentalgruppe eine recht starke Invariante von 3-Mannigfaltigkeiten darstellt, beispielsweise liefert sie durch einfache Anwendung von Hurewicz und Dualitätssätzen (Poincaré/Lefschetz, universelles Koeffiziententheorem) alle Homologiegruppen der 3-Mannigfaltigkeit und eine Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten, die sogenannten 'Haken-Mannigfaltigkeiten' sind durch ihre Fundamentalgruppe klassifiziert, der Beweis dazu stammt von Waldhausen [21]. Im Folgenden sollen nun die Alexander Invarianten von endlich erzeugten Gruppen definiert werden und Zusammenhänge verschiedener Definitionen erkannt werden.

Natürlich bergen algebraische Invarianten mit solchen Eigenschaften immer mehrere Vorzüge. Zum einen werden topologische Probleme in algebraische übersetzt, die dann mit algebraischen Methoden untersucht werden können. Scheint andererseits ein algebraisches Problem nur schwer lösbar, so ergibt sich die Möglichkeit einen topologischen Kontext zu finden, in dem sich die algebraische Ursprungssituation als Invariante ergibt, dessen Ergebnisse und Berechnungen sich aber vielleicht mit topologischen Eigenschaften des Raumes leichter handhaben lassen, siehe etwa Beispiel 4.

Es soll zunächst eine analoge Definition zu den bekannten Alexander Invarianten aus Kapitel **??** gegeben werden. Anschließend wollen wir eine weitere Definition betrachten, die beispielsweise McMullen in [14] nutzt und einen Zusammenhang herstellen — warum diese Definitionen streng genommen nicht äquivalent sind und warum das kein Problem darstellt.

4.2.1 Herleitung der algebraischen Idee

Nun müssen wir uns mit der Problematik beschäftigen, die eingangs bei der Definition des Gruppenrings erwähnt wurde, nämlich dass der entstehende Gruppenring von nicht-abelschen Gruppen nicht mehr kommutativ ist, man also beispielsweise zwischen Links- und Rechtsmoduln über dem Gruppenring unterscheiden muss.

Sei G die Fundamentalgruppe von M und F eine freie abelsche Gruppe zusammen mit einem Epimorphismus $\alpha : G \to F$. Also faktorisiert α durch die maximale freie abelsche Quotientenabbildung $G \to G/[G,G] \to ab(G) \cong \mathbb{Z}^{b_1(G)}$, die als Komposition kanonischer Abbildungen kanonisch ist. Folglich ist der Rang von F durch $b_1(G)$

nach oben beschränkt. Dann erhält man einen Gruppenisomorphismus $p'_* : H_1(\hat{M}) \to \ker\alpha/[\ker\alpha, \ker\alpha]$ der durch die Überlagerungsprojektion $\hat{M} = M_\alpha \to M$ zu α induziert wird. Ziel wäre es zu zeigen, dass diese Abbildung auch einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}[F]$-Moduln liefert. Daraus würden natürlich gleiche Präsentationen folgen, die zu gleichen Elementaridealen führen und so fort. Hierfür benötigt man jedoch überhaupt eine $\mathbb{Z}[F]$-Modul Struktur auf dem Quotienten G'/G'' für $G' = \ker\alpha, G'' = [G', G']$. Diese soll zunächst definiert werden:

Es seien $g_1, \cdots, g_m, m \leq b_1(G)$ Elemente die auf eine Basis von F abgebildet werden. Diese definieren dann Automorphismen von G'/G'' durch

$$\hat{t}_i(x) = [g_i][x][g_i^{-1}] = [g_i x g_i^{-1}]$$

Man prüft leicht, dass diese unabhängig der gewählten g_i sind. Es sei für den Beweis bemerkt, dass die Kommutatoruntergruppe $G'' \subset G'$ eine charakteristische Untergruppe ist.

Bemerkung 4.2.1. Das ist eine Form der expliziten Konstruktion des Falles, wenn man von einer induzierten Operation einer zerfallenden kurzen exakten Sequenz redet:

$$0 \to G'/G'' \to G/G'' \to G/G' \to 0$$

Da $F = G/G'$ frei abelsch ist, zerfällt diese Sequenz und man erhält eine Abbildung $F \to \mathrm{Aut}(G'/G'')$ genauer gesagt, eine Gruppenwirkung auf G'/G'' durch Konjugation unter der Einbettung $G'/G'' \hookrightarrow G/G''$ mit zurückgezogenen Elementen aus F. Dies ist wohldefiniert, da das Bild von G'/G'' einem Kern entspricht, also Normalteiler ist. Offensichtlich stimmt diese Operation mit der obigen überein.

Mit $\alpha(g_i) = t_i$ als ein Element der Basis von F, ist die Gruppenwirkung von F auf $H_1(\hat{M})$, die durch die Decktransformationen F induzierte $t_i\gamma = t_{i*}\gamma, t_i \in F, \gamma \in H_1(\hat{M})$. Also ist nur zu zeigen, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} H_1(\hat{M}) \arrow[r, "p'_*"] \arrow[d, "t_i"'] & G'/G'' \arrow[d, "\hat{t}_i"] \\ H_1(\hat{M}) \arrow[r, "p'_*"] & G'/G'' \end{tikzcd}$$

und somit die Operationen verträglich sind. Davon überzeugt man sich, indem man die Wirkung von t_i näher betrachtet: nach Hurewicz lässt sich ein Zykel aus $H_1(\hat{M})$ als Schleife darstellen. Die Decktransformation t_i bildet diese Schleife nun auf eine Schleife ab, die homolog ist zu der Konjugation mit einer zu einem Weg gelifteten Schleife $\tau_i, [\tau_i] \in \pi_1(M, p)$, welche die Decktransformation t_i erzeugt. Aber wegen $\alpha([\tau_i]) = t_i$ ist $\hat{t}_i$ auch nur Konjugation mit τ_i.

Also lassen sich alle Definitionen der Alexander Invarianten analog zu Kapitel **??**, auf endlich erzeugten Gruppen definieren, wobei der Alexander Modul G'/G'' als Modul über $\mathbb{Z}[G/G'] = \mathbb{Z}F$ aufgefasst wird. Fast! Die Definition der Elementarideale setzt noch voraus, dass dieser Modul endlich erzeugt ist. Wir hatten bisher nur gesehen, dass dies für Fundamentalgruppen von 3-Mannigfaltigkeiten stimmt, indem wir eine endliche CW-Struktur ausgenutzt haben. Dies wird am Ende des Kapitels festgestellt.

Bemerkung 4.2.2. Es stellt sich sogar heraus, dass in den vielen Fällen auch die Thurston Norm, aus der Fundamentalgruppe berechnet werden kann, indem man getwistete Alexander Polynome verwendet — die mit ähnlichen Methoden wie oben, allein aus der Fundamentalgruppe gewonnen werden können. Sie beinhalten meist noch mehr Daten als das gewöhnliche Alexander Polynom und es lässt sich mit der induzierten Norm dieser Polynome, die Abschätzung aus Theorem 1.1 verallgemeinern. Diese Resultate wurden in mehreren Arbeiten von Friedl unter verschiedenen Zusammenarbeiten entwickelt, etwa in [3–8]. Weiter nützen die getwisteten Alexander Polynome um bis zu einem gewissen Grade eine Umkehrung der Gleichheit aus Theorem 1.1 bei Faserungen zu ermöglichen, siehe [4, 7].

Um ohne topologische Methoden einzusehen, dass der Alexander Modul endlich erzeugt ist, ist es nötig den allgemeinen Gruppenring und noethersche Moduln genauer zu betrachten. Wir werden uns im Folgenden etwas mehr Mühe geben, als eigentlich nötig wäre, um einen Zusammenhang mit dem nächsten Kapitel herzustellen, in welchem andere Definitionen der Alexander Invarianten verwendet werden.

Definition 4.6 (Augmentationsideal)**.** Sei H ein Normalteiler in G. Dann ist das Augmentationsideal:

$$m_G(H) = \langle (h-1), h \in H \rangle$$

Falls $G = H$ so definiere: $m(G) = m_G(G)$.

Bemerkung 4.2.3. Das Augmentationsideal erhält seinen Namen, da es aus dem Kern der Augmentationsabbildung, die jedes Gruppenelement auf die Eins abbildet, entsteht:

$$m_G(G) = \ker(\mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z})$$

Lemma 4.4. *Sei $\phi : G \to F$ ein Homomorphismus mit Fortsetzung $\hat{\phi} : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[F]$. Dann gilt:*

$$\ker(\hat{\phi}) = m_G(\ker \phi) = m(\ker \phi)\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[G]m(\ker \phi)$$

Der Beweis ist einfach, obgleich man elementweise oder mit funktoriellen Methoden argumentiert und wird deswegen übersprungen. Die Beidseitigkeit des Ideal folgt aus der Eigenschaft, dass $\ker \hat{\phi}$ Normalteiler ist, und so zeigt man auch, dass die Definition 4.6 des Augmentationsideals, ein beidseitiges Ideal liefert.

Beispiel 3. Falls $G = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$, dann ist der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$, der Ring der Laurentpolynome in einer Variablen $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$. Dann ist $m(G) \subset \mathbb{Z}[G]$ ein freier $\mathbb{Z}[G]$ Modul mit einelementiger Basis $(t-1)$. Allgemeiner ist offensichtlich für die freie Gruppe $F(S), |S| < \infty$, das Augmentationsideal $m(F(S)) \subset \mathbb{Z}[F(S)]$ ein freier $\mathbb{Z}[F(S)]$ Modul mit $|S|$-elementiger Basis $\{(s-1), s \in S\}$.

Beispiel 4. Wir werden später auf das Augmentationsideal $m(F)$ für $F \cong \mathbb{Z}^n$ treffen. In Anlehnung an das vorherige Beispiel und der Betonung auf die in der Einleitung erwähnte Übersetzung algebraischer Probleme in topologische, gilt sogar weiter: $m(F)$ ist ein freier $\mathbb{Z}[F]$-Modul genau dann wenn $n = 1$. Denn wenn $m(F)$ frei ist, so liefert dies eine freie

Auflösung von $\mathbb{Z}$ (über die Augmentationsabbildung als $\mathbb{Z}[F]$-Modul aufgefasst) über $\mathbb{Z}[F]$ der Länge 1. Also $H^2(F) = \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Z}[F]}(\mathbb{Z}[F], \mathbb{Z}) = 0$. Aber die Gruppenkohomologie berechnet sich topologisch als

$$H^2(F) = H^2(K(F,1)) = H^2(T^n) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}$$

4.2.2 Eine äquivalente Definition von McMullen?

In der Arbeit von McMullen [14] verwendet er eine unterschiedliche Definition der Alexander Invarianten. Tatsächlich stellen sich diese auch bei Berechnungen als günstig heraus, da relative Homologie betrachtet wird. Inwieweit ist das nützlich zur Berechnung der obigen Alexander-Invarianten — sind die Definitionen äquivalent? Die Frage soll nun geklärt werden, dafür zunächst die Definitionen:

Definition 4.7. Sei $\phi : G \to F$ ein Epimorphismus in eine freie abelsche Gruppe F für eine endlich erzeugte Gruppe G. Dann ist der Alexander Modul von G nach McMullen's Definition der $\mathbb{Z}[F]$-Modul:

$$\mathfrak{A}_\phi(G) = m(G)/m(G)m(\ker\phi)$$

mit dem Alexander Ideal

$$\mathfrak{I}_\phi(G) = E_1(\mathfrak{A}_\phi(G)) \subset \mathbb{Z}[F]$$

und dem Alexander Polynom $\mathfrak{D}_\phi$, so dass $(\mathfrak{D}_\phi) \supset \mathfrak{I}_\phi(G)$ das kleinste Hauptideal ist.

Bemerkung 4.2.4. Die $\mathbb{Z}[F]$-Modul Struktur von $\mathfrak{A}_\phi(G)$ ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Lemma 4.4 liefert $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[G]/m(\ker\phi)$, also ist $\mathfrak{A}_\phi(G)$ als Quotient des endlich erzeugten Ideals $m(G)/m(\ker\phi) \subset \mathbb{Z}F$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}F$-Modul (genauer verwendet man hier den Isomorphiesatz $(G/N)/(H/N) \cong G/H$), insbesondere noethersch.

Falls $G = \pi_1(M, p)$ kann man den isomorphen $\mathbb{Z}[F]$-Modul mit der durch die Decktransformationen $(M_\phi, \pi^{-1}p) \to (M_\phi, \pi^{-1}p)$ induzierten F-Wirkung als Definition verwenden

$$\mathfrak{A}(G) = H_1(M_\phi, \pi^{-1}p; \mathbb{Z}),$$

wobei $M_\phi \xrightarrow{\pi} M$ die universelle abelsche Überlagerung ist. Die Isomorphie dieser Moduln ergibt sich unter anderem aus dem Fünfer-Lemma und den kurzen exakten Sequenzen (4) und der (6).

Die bisherigen Ausführungen sollten nun genügen um die endliche Erzeugbarkeit der algebraischen Variante des Alexander Moduls und die Beziehung zwischen den verschiedenen Definitionen des Alexander Moduls zu zeigen. Dies und bisherige Resultate sollen in folgender Proposition festgehalten werden:

Proposition 4.5. *Es sei G eine endlich erzeugte Gruppe, $F \cong \mathbb{Z}^b$ eine freie abelsche Gruppe mit $b \leq b_1(G)$ und $\phi : G \to F$ ein Epimorphismus. Außerdem bezeichne wie oben*

$G' = \ker\phi$ und $G'' = [G', G']$ die Kommutatoruntergruppe. Die folgende exakte Sequenz liefert eine Gruppenwirkung von F auf G'/G'':

$$0 \to G' \to G \to F \to 0$$

Weiter liefert diese Sequenz eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$-Moduln

$$0 \to m_G(\ker\phi)/m_G(\ker\phi)m(G) \to m(G)/m_G(\ker\phi)m(G) \to m(F) \to 0 \tag{4}$$

und einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}[F]$-Moduln $A_\phi(G) \cong G'/G'' \cong m_G(\ker\phi)/m_G(\ker\phi)m(G)$.

Insbesondere ist der Alexander Modul endlich erzeugt.

Bemerkung 4.2.5. Als abelsche Gruppe ist $m(F)$ frei und die Sequenz zerfällt als Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln immer. Als $\mathbb{Z}[F]$-Modul Sequenz zerfällt sie genau dann wenn $F \cong \mathbb{Z}$ siehe Beispiel 4.

Beweis. Man betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & m_G(\ker\phi) \arrow[r] \arrow[d] & m(G) \arrow[r] \arrow[d] & m(F) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & m_G(\ker\phi) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[G] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[F] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Die zweite Reihe ist exakt nach Lemma 4.4 und die Exaktheit der ersten Reihe geht aus der Anwendung des Schlangenlemmas hervor.

Die gewünschte Form der exakten Sequenz (4) aus der Proposition folgt dann aus der ersten exakten Reihe des Diagramms (5) indem man $m_G(\ker\phi) \cdot m(G)$ herausteilt. Dies ergibt mit Bemerkung 4.2.4 eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$-Moduln.

Es ist also noch der behauptete Isomorphismus zu zeigen. Dieser lässt sich einfach angeben:

$$\begin{aligned} G'/G'' &\to m_G(G')/m_G(G') \cdot m(G) \\ [g'] &\mapsto [(g'-1)] \\ [g'] &\leftarrow\!\shortmid [(g'-1)g] \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind wohldefiniert und einander invers, da $[(g'-1)g] = [(g'-1)g - (g'-1)(g-1)] = [(g'-1)]$. $\square$

Wir erhalten also die Beziehung $0 \to A_\phi(M) \to \mathfrak{A}_\phi(M) \to m(F) \to 0$.

Corollar 4.6. *Jeder Alexander Modul $A_\phi(M)$ einer endlich erzeugten Gruppe ist endlich erzeugt.* □

Da die Gruppenwirkung von F auf der Homologie der Überlagerung durch Abbildungen von Räumen induziert wird, liefert die lange exakte Sequenz des Paares $(M_\phi, \pi^{-1}p)$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$-Moduln. Da die von der Inklusion induzierte Abbildung $\mathbb{Z}[F] \cong H_0(\pi^{-1}p) \to H_0(M_\phi) \cong \mathbb{Z}$ Auswertung der Koeffizienten entspricht, liefert die lange exakte Homologiesequenz des Paares die folgende kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$-Moduln:

$$0 \to H_1(M_\phi) \to H_1(M_\phi, \pi^{-1}p) \to m(F) \to 0 \tag{6}$$

Diese Sequenz ist natürlich ein Spezialfall der allgemeineren Sequenz (4) für den Fall, dass G als Fundamentalgruppe realisierbar ist.

Welche Folgerungen ziehen wir aus diesen Ergebnissen? Nun ja, zunächst unterscheiden sich die gegebenen Definitionen von McMullen qualitativ von denen aus Kapitel **??**, sowohl die Alexander Moduln als auch die Alexander Ideale sind nie isomorph. Eine Äquivalenz ergibt sich also nicht gänzlich, aber die oben gesicherte Beziehung in der exakten Sequenz liefert zusammen mit dem folgenden Lemma die Gleichheit der kleinsten Hauptideale und somit der Alexander Polynome und der Alexander Norm. Dies legitimiert die Verwendung der unterschiedlichen Definitionen im kommenden Beweis des Theorems 1.1 als Mittel zum Zweck.

Lemma 4.7. *Für eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$-Moduln*

$$0 \to A \to B \to m(F) \to 0,$$

wobei $F \cong \mathbb{Z}^n$, stimmen $\Delta_i(A) = \Delta_{i+1}(B)$ überein.

Siehe zum Beispiel die Arbeit von Traldi [20].

4.2.3 Rationale Alexander Invarianten

Genauso wie man oben den ganzzahligen Gruppenring erhalten hat, so erhält man auch den rationalen Gruppenring $\mathbb{Q}[G] = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Da sowohl die Theorie der Vektorräume, in unserem Falle $\mathbb{Q}$-Moduln, als auch die Theorie der Moduln über Hauptidealringen — etwa $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ (vgl. Lemma 2.10) — sehr überschaubar ist, bietet es sich an auch rationale Alexander Invarianten zu definieren. Allerdings betrachtet diese Arbeit ganzzahlige Alexander Invarianten, also ist die Nützlichkeit der rationalen Alexander Invarianten in diesem Kontext fraglich, es sei denn solche Berechnungen würden zur Bestimmung der ganzzahligen Alexander Invarianten führen. Deswegen dient dieser Abschnitt lediglich dem Hinweis, dass das rationale Alexander Polynom dieselben Informationen wie das ganzzahlige Alexander Polynom enthält, die Berechnung also unabhängig von einer $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ oder einer $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ Präsentation ist.

Bekannterweise nennt man ein Polynom primitiv, falls keine Nichteinheit des zugrunde liegenden Ringes alle Koeffizienten teilt.

Lemma 4.8. *Seien $f, g \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ zwei Laurentpolynome und f primitiv. Dann ist die Teilbarkeit von g durch f gleichbedeutend in den Ringen $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ und $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$.*

Beweis. Falls $f|g$ in $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ gilt, so trivialerweise in $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. Sei umgekehrt $g = pf$ mit $p \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. Dann ist für ein $q \in \mathbb{Q}$ das Polynom $\tilde{p} \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ primitiv mit $q\tilde{p} = p$. Aber das Produkt zweier primitiver Polynome $\tilde{p}f = g/q$ ist primitiv, also $q \in \mathbb{Z}$. □

Bemerkung 4.2.6. Hat man eine Präsentationsmatrix $(x_{ij})_{ij}$ eines $\mathbb{Z}[F]$-Moduls gegeben, so liefert die Rechtsexaktheit des Tensorierens eine Präsentationsmatrix des tensorierten $\mathbb{Q}[F]$-Moduls durch $(x_{ij} \otimes 1)_{ij}$.

Unter Ausnutzung von Lemma 4.8, wird in [18, Lemma 2.2] die folgende Proposition mit elementaren Mitteln gezeigt, deswegen sei der einfache Beweis hier übersprungen:

Proposition 4.9. *Sei A ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-Modul dessen Alexander Polynom nicht verschwindet. Dann existiert ein eindeutiges $q \in Q$, sodass für $q\Delta^i(A) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ primitiv ist und für $\Delta^i_{\mathbb{Q}}(A \otimes \mathbb{Q}) \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ gilt:*

$$\Delta^i_{\mathbb{Q}}(A) = q\Delta^i(A)$$

Corollar 4.10. *Die ganzzahligen Alexander Polynome Δ^i_ϕ einer Gruppe G sind durch $A_\phi(G) \otimes \mathbb{Q}$ vollständig charakterisiert.*

Beweis. Der Beweis folgt direkt durch das Zusammentragen der Ergebnisse aus Beispiel 1, Proposition 4.9 und Lemma 2.10. □

4.3 Rationale Alexander-Invarianten

4.4 Eigenschaften der Alexander-Polynome

4.5 Darstellungen des Alexander Ideals

Nun vergleicht das vorangegangene Kapitel also die Thurston Norm einer Kohomologieklasse mit dem Rang ihres Kerns. Wie letzerer mit der Alexander Norm in Verbindung steht, stellt folgendes Lemma (vgl. [15, Assertion 4]) für $b_1(M) = 1$ fest:

Lemma 4.11. *Es sei $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ eine primitive Klasse und $\ker \phi \otimes \mathbb{Q}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum. Weiter sei t ein Erzeuger der Decktransformationsgruppe von M_ϕ. Betrachte den rationale Alexander-Modul $H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ über dem rationalen Gruppenring $\mathbb{Q}[\langle t\rangle] = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. Dann ist das Elementarideal $E_0(H_1(M_\phi; \mathbb{Q})) \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ ein Hauptideal, das von dem charakteristischen Polynom des induzierten Automorphismus t_* erzeugt wird.*

Da $H_1(M; \mathbb{Z})$ als $\mathbb{Z}$-Modul eine direkte Summe $H_1(M; \mathbb{Z})/T \oplus T$ mit Torsionsanteil T ist und die direkten Summanden invariant bezüglich jeglichen Automorphismen sind, ergibt sich:

Corollar 4.12. *Für $b_1(M) = 1$ das Alexander Ideal ein Hauptideal.* □

Beweis von Lemma 4.11. Da $H_1(M_\phi, \mathbb{Q})$ ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, werden durch den Erzeuger t des Quotienten $\pi_1(M)/\ker(\phi) \cong \mathbb{Z}$ der Decktransformationen Relationen auf den Basiselementen $x_1, \cdots, x_n$ eingeführt:

$$t_* x_1 = \sum a_i^1 x_i$$
$$\vdots$$
$$t_* x_n = \sum a_i^n x_i$$

Diese Gleichungen definieren genau die quadratische Matrix A des Automorphismus von Vektorräumen $t_* \in \mathrm{Aut}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q}))$ bezüglich der Basis $(x_i)_i$, die also als Spalten die a^i hat. Durch Subtrahieren der obigen Gleichungen, erhält man eine formale Matrix der Form $A - tI$. Diese Matrix ist aber gleichzeitig die Präsentationsmatrix der freien Auflösung:

$$\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]^n \xrightarrow[e_r \mapsto \sum a_i^r x_i - t x_r]{} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

Entsprechend ist die Determinante dieser Matrix das Elementarideal bezüglich $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$, $E_0(M_\phi) = det(A - tI) = \chi(A) \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. □

Diese Überlegungen liefern nun einen Zusammenhang zwischen $b_1 \ker \phi$ und dem Grad des Alexander Polynoms von ϕ, welcher für $b_1(M) = 1$ mit $||\phi||_A$ übereinstimmt.

Corollar 4.13. *Sei $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ eine primitive Klasse. Dann gilt:*

$$b_1(\ker \phi) = \dim(\ker \phi \otimes \mathbb{Q}) = \mathrm{Grad}(\Delta_\phi)$$

Beweis. Nach dem vorhergehenden Corollar gilt $\dim \Delta_\phi = n + 1 = \mathrm{Grad}(\chi(t_*)) = \mathrm{Grad}(\Delta_\phi)$, wobei t Erzeuger der unendlich zyklischen Decktransformationsgruppe ist. □

Für den nächsten Beweis ist es nützlich von Homologie mit getwisteten Koeffizienten zu sprechen: Sei $G = \pi_1(M)$ und $F = ab(G) = H_1(G)/T$ der maximale freie abelsche Quotient. Dann wird $\mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[F]$ durch Linksmultiplikation mit Elementen aus G zu einem $\mathbb{Z}[G]$-Linksmodul. Ebenso wird die zelluläre Kettengruppe $C_i^{zell}(\hat{M})$ der universellen Überlagerung $\hat{M}$, mit den induzierten Automorphismen der Decktransformationsgruppe (kanonisch identifiziert mit G) zu einem $\mathbb{Z}[G]$-Rechtsmodul. Hier ist verlangt, dass die betrachtete zelluläre Struktur auf $\hat{M}$ von einer auf M vererbt ist, also die Zellen in der Überlagerung genau den Zusammenhangskomponenten der Urbilder von Zellen in M entsprechen — nur so erhält man eine freie $\mathbb{Z}[G]$-Basis, ähnlich wie in dem Beweis von Proposition 4.1. Somit erhält man zu einem gegebenen zellulären Kettenkomplex $C_3(\hat{M}, \hat{p}) \to C_2(\hat{M}, \hat{p}) \to C_1(\hat{M}, \hat{p}) \to C_0(\hat{M}, \hat{p})$, wobei $\hat{p} = \pi^{-1}(p)$ das Urbild einer Nullzelle $p \in M$ ist, der universellen Überlagerung den tensorierten Kettenkomplex

$$\begin{aligned} C_3(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \to C_2(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \to C_1(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \\ \to C_0(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Man beachte hierbei, dass es sich nun um $\mathbb{Z}$-Moduln handelt, da der zugrundeliegende Gruppenring nicht kommutativ sein muss. Aber aus offensichtlichen Gründen, handelt es sich um einen Kettenkomplex von $\mathbb{Z}[ab(G)]$-Moduln. Bezeichnet man den Kettenkomplex (7) mit $C_\bullet(M;\mathbb{Z}[ab(G)])$, so können wir nun definieren:

Definition 4.8. Definiere die Homologie mit getwisteten Koeffizienten von M als den $\mathbb{Z}[ab(G)]$-Modul

$$H_i(M,p;\mathbb{Z}[ab(G)]) = H_i(C_\bullet(M;\mathbb{Z}[ab(G)])).$$

Man sieht leicht ein, dass dies wohldefiniert ist und nicht von der Zellzerlegung von M abhängt. Weiter ergibt sich, dass $\mathfrak{A}(M) \cong H_1(M,p;\mathbb{Z}[ab(G)])$ natürlich isomorph sind. Der Beweis ergibt sich direkt aus dem Resultät aus der Überlagerungstheorie, dass die universelle Überlagerung buchstäblich universell überlagert, also insbesondere die universelle abelsche Überlagerung, siehe etwa [10, Kapitel 1.3]. Genauso überlagert die universelle abelsche Überlagerung jede normale Überlagerung die abelsche Decktransformationsgruppe hat, wegen der universellen Eigenschaft der Abelianisierung.

Für die Abschätzung der beiden betrachteten Halbnormen, ist es hier zielführend, dass das Alexander Ideal einer 3-Mannigfaltigkeit eine nicht allzu komplizierte Gestalt annehmen kann. Das nächste Theorem (vgl. McMullen [14]) sichert sogar, dass $\mathfrak{I}(G)$ ein Produkt maximal dreier Faktoren ist, von denen eines immer der größte Teiler — das Alexander Polynom — ist.

Theorem 4.14. *Sei G die Fundamentalgruppe einer 3-Mannigfaltigkeit M, die den Voraussetzungen des Haupttheorems genügt und $\phi : G \to H_1(G)/T \cong ab(G) \cong \mathbb{Z}^{b_1(G)}$ die Quotientenabbildung auf den maximalen frei abelschen Quotienten. Dann gilt:*

$$\mathfrak{I}(G) = E_1(m(G)/m(\ker\phi)m(G)) = m(ab(G))^{1+b_3(M)} \cdot (\Delta)$$

Beweis. Wie die obige Bemerkung gestattet, zielt der Beweis darauf ab eine Präsentation der getwisteten Homologie $H_1(M,p;\mathbb{Z}[ab(G)] \cong \mathfrak{A}(G)$ zu finden. Diese soll explizit konstruiert werden, durch Betrachtung einer konkreten CW-Struktur und zellulärer Homologie. Glatte 3-Mannigfaltigkeiten sind stets triangulierbar, entweder überzeugt man sich hiervon durch die grundsätzliche Triangulierbarkeit von 3-Mannigfaltigkeiten nach dem Satz von Moise oder man erinnert sich an die Triangulierbarkeit von glatten Mannigfaltigkeiten, die etwa nach dem Satz von Whitehead (vgl. [23]) folgt oder durch explizite Verfahren von Triangulierungen abgeschlossener glatter Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^N$ zusammen mit dem Whitney Einbettbarkeitssatz. Jedenfalls sei τ eine Triangulierung von M. Um eine explizite und vor allem möglichst simple CW-Struktur zu erhalten, wählt man sich nun zwei möglichst „große“ Bäume B, B' in den Strukturen von M, die der Vereinfachung der CW-Struktur dienen. Und zwar sei B ein maximaler Baum im Graph des 1-Skeletts von τ, also ein zusammenhängender, kreisloser Graph. Dann hat der Quotient M/B nur eine 0-Zelle p. Für B' betrachtet man folgende Konstruktion eines Graphen G': Man nehme die Baryzentren aller 3-Simplices als Knotenmenge und die Kanten verbinden diese Knoten gemäß der trennenden 2-Simplices von τ. Offensichtlich gilt für jeden Baum in G', dass die zugehörige Vereinigung von 3-Simplices die aus seinen Knoten hervorgeht ein topologischer Ball ist und der Randoperator auf der Summe der zugehörigen 3-Simplices im Kettenkomplex nur 2-Simplices des Randes ergibt (die inneren 2-Simplices treten jeweils als Differenz auf). Sei also B' ein maximaler Baum in G'. Das bedeutet insbesondere, dass G'/B' diffeomorph zu einem Bouquet von Kreisen ist, denn G' ist zusammenhängend, da M zusammenhängend ist. Da getwistete Homologie eine Homotopieinvariante ist, betrachte man den zellulären Kettenkomplex der aus dem CW-Komplex M/B hervorgeht, mit der gewählten Struktur, dass man durch die Konstruktion von B' eine einzige 3-Zelle erhält, die aus Entnahme aller 2-Simplices entsteht die zu den Kanten aus B' gehören. Die Projektion $X \to X/A$ ist stets eine Homotopieäquivalenz, falls $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung und A zusammenziehbar ist, siehe [22, Chapter 1, Corollary 5.13] und (M, B) ist als CW-Paar eine Kofaserung. Aus dieser Struktur geht folgender zellulärer „getwistete" Kettenkomplex von $\mathbb{Z}[ab(G)]$-Moduln $C_i = C_i^{zell}(\widehat{M/B}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)]$ hervor:**5.ggf Struktur verändern**

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_2} C_0$$

wobei $\pi : \widehat{M/B} \to M/B$ die universelle Überlagerung ist.

Sei M nun zunächst geschlossen. Dann folgt mit Eulercharakteristik und Poincaré Dualität (und Homotopieinvarianz beziehungsweise Wohldefiniertheit der genutzten Invarianten):

$$\begin{aligned} 0 &= b_0(M) - b_3(M) + b_2(M) - b_1(M) = \chi(M) \\ &= \text{Differenz der Zellen in gerader und ungerader Dimension,} \end{aligned}$$

also folgt, dass die gewählte CW-Struktur jeweils n Zellen in Dimension 1 und 2 hat. Da man nun die relative Homologie zu der ausgezeichneten 0-Zelle p betrachtet, folgt direkt für den Alexander-Modul $\mathfrak{A}(G) = H_1(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)]) = C_1/\operatorname{Im}(\partial_2)$. Man beachte, dass die $\mathbb{Z}[ab(G)]$-Moduln in dem betrachteten Kettenkomplex frei sind, denn:

$$C_i = C_i^{zell}(\widehat{M/B}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[G]^n \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[ab(G)]^n$$

$$C_i^{zell}(\widehat{M/B}, \hat{p}) = \bigoplus_{g \in G} C_i^{zell}(\widehat{M/B}, \hat{p}) = \mathbb{Z}[G]^n.$$

Also erhält man eine Präsentation von diesem Modul durch:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \twoheadrightarrow C_1/\operatorname{Im}(\partial_2) = \mathfrak{A}(G).$$

∂_2 lässt sich für gewählte $\mathbb{Z}[ab(G)]$-Basen von C_1 und C_2 als Matrix darstellen, deren $(n-1) \times (n-1)$ Minoren die Erzeuger von $\mathfrak{I}(G)$ liefern. Für die Berechnung dieser Matrix, berechnen wir zuerst ∂_1 und ∂_3 und nutzen dann $\partial_1 \partial_2 = 0$ und $\partial_2 \partial_0 = 0$.

Man fixiere für eine $\mathbb{Z}[G]$-Basis der $C_i^{zell}(\widehat{M/B})$ einen Fundamentalbereich — genauer einen Basispunkt $\hat{e}_0 \in \hat{p} = \pi^{-1}(p)$ aus dem Urbild der 0-Zelle. An diesem Basispunkt kann eine $\mathbb{Z}[G]$-Basis der $C_i^{zell}(\widehat{M/B})$ innerhalb des Fundamentalbereichs gewählt werden. Die Vereinigung dieser gewählten Zellen liegt dann dicht in dem Fundamentalbereich. Ist also eine beliebige Zelle $e \in C_i^{zell}(\widehat{M/B})$ gegeben, so entsteht diese aus einem

Element $\hat{e}$ der fixierten Basis aus dem fixierten Fundamentalbereich, durch Multiplikation mit einem $g \in G$ (genauer bedeutet dies eine Anwendung der Decktransformation, die Zellen auf Zellen abbildet), also $g\hat{e} = e$. Um einzusehen, wie sich eine Basis für die freien $\mathbb{Z}[ab(G)]$-Moduln C_i unter den obigen Isomorphismen verhält, stellt man fest, dass für ein beliebiges $e \in C_i^{zell}(\widehat{M/B})$ gilt: $e \otimes 1 \mapsto g\hat{e} \otimes 1 = \hat{e} \otimes [g] \mapsto [g]\hat{e}$, wobei $\hat{e}$ die eindeutige fixierte Zelle ist. Die fixierten Zellen bilden die kanonischen Koordinaten von $C_i^{zell}(\widehat{M/B})$ als freien $\mathbb{Z}[G]$-Modul und von $C_i \cong \mathbb{Z}[ab(G)]^n$ als $\mathbb{Z}[ab(G)]$-Modul, wobei beide Moduln jeweils von Rang n wenn $i \in \{1, 2\}$ bzw. 1 sind für $i \in \{0, 3\}$.

Was geschieht nun durch Anwenden von ∂_1? Sei e eine generische 1-Zelle in $C_1^{zell}(\widehat{M/B})$, dann ist $e = g\hat{e}$, wobei $\hat{e}$ aus der fixierten Basis stammt. Das abgeschlossene Bild der 1-Zelle $\overline{\pi(\hat{e})}$ stellt per Definition das Bild einer (nicht notwendigerweise glatten, es sind auch keine differenzierbaren Eigenschaften von M/B gefordert) Abbildung $(I, \partial I) \to (M/B, \hat{e}_0)$ dar, also ein Element $\hat{g} \in \pi_1(M/B, e_0) = G$. Also berechnet sich das Bild von $\hat{e} \otimes 1$ unter der Randabbildung durch den (natürlich nicht geschlossenen) Lift dieses Elementes, nämlich $\partial(e \otimes 1) = \partial(g\hat{e} \otimes 1) = \partial(\hat{e} \otimes [g]) = (\hat{e}_0 - \hat{g}\hat{e}_0) \otimes [g] = (1 - [\hat{g}])(ge_0 \otimes 1)$ oder unter dem Isomorphismus kann man auch $\partial e = \partial(g\hat{e}) = (1 - [\hat{g}])([g]\hat{e}_0)$ schreiben, wobei $\hat{e}_0 = \hat{p}$. Seien also $\hat{e}_1^1, \cdots, \hat{e}_1^n$ die fixierten 1-Zellen in der Überlagerung, also eine Basis des $\mathbb{Z}[F]^n$, dann erhalten wir die Matrixdarstellung des Homomorphismus $\mathbb{Z}[F]^n \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[F] = \langle \hat{e}_0 \rangle$

$$\partial_1 = (1 - [\hat{g}_1], \cdots, 1 - [\hat{g}_n]),$$

wobei $\hat{g}_i \in \pi_1(M/B, e_0) = G$ die Schleife von $\hat{e}_1^i$ unter der Projektion in M/B ist.

Ähnlich fährt man nun mit der Berechnung von ∂_3 fort. Sei $\hat{e}$ eine der fixierten 2-Zellen aus $C_2^{zell}(\widehat{M/B})$, also ein Element der gewählten $\mathbb{Z}[G]$-Basis von $C_2^{zell}(\widehat{M/B})$ und somit auch ein Element der $\mathbb{Z}[F]$-Basis von C_2. Erinnert man sich an die Wahl von τ, so ist $\hat{e}$ in M und M/B Seite von zwei 3-Simplices. In B' existiert nun ein eindeutiger (Geodätische in Bäumen sind eindeutig) Pfad, der die Baryzentren dieser zwei 3-Simplices verbindet. Schließt man diesen Pfad nun zu einer Schleife, durch die zu $\hat{e}$ gehörige Kante (im Sinne der obigen Konstruktion von $G \supset B'$), so erhält man diese Schleife als Bild $(I, \partial I) \to (M/B, \pi(\hat{e}))$. Diese definiert ein bis auf Konjugation eindeutiges Element in $G = \pi_1(M/B)$ (durch Wechsel des Basispunktes), also ein eindeutiges Element $\hat{h} \in F = ab(G)$. Um nun das Bild von der fixierten 3-Zelle $\hat{e}_3$ unter ∂_3 festzustellen, fasse man τ/B als CW-Struktur auf und erwäge folgendes Diagramm bezüglich der fixierten Basis $\hat{e}_2^i$ der 2-Simplices und den dazugehörigen eindeutigen $\hat{h}_i \in F$:

$$\begin{tikzcd}
 & \sum\hat{\sigma}_3 \arrow[dl, mapsto] & & C_3^{\tau,zell}(\widehat{M/B}) \arrow[dl, "\Sigma"'] \arrow[dr, "\partial"] & & \sum\hat{\sigma}_3 \arrow[dr, mapsto] & \\
\hat{e}_3 & & C_3^{zell}(\widehat{M/B}) \arrow[rr] & & C_2^{zell}(\widehat{M/B}) & & \sum(1-\hat{h})\hat{e}_2^i
\end{tikzcd}$$

Also stellt sich heraus, dass sich die Abbildung ∂_3 als darstellende Matrix bezüglich der $\mathbb{Z}[F]$-Basis die aus den fixierten 2-Zellen $\hat{e}_2^1, \cdots, \hat{e}_2^n$ hervorgeht, wiefolgt auffassen lässt:

$$\partial_3 = (1 - \hat{h}_1, \cdots, 1 - \hat{h}_n)^T \in \mathbb{Z}[ab(G)]^n$$

wobei die $\hat{h}_i \in F$ mit der obigen Konstruktion eindeutig aus den $\hat{e}_2^i$ hervorgehen. Offensichtlich gilt jeweils: $\langle [\hat{g}_i] \rangle = \langle \hat{h}_i \rangle = ab(G)$. Die konstruktive Arbeit ist nun getan — von hier an möchten wir für den Rest des Beweises die Topologie vergessen und behandeln unseren Kettenkomplex mit algebraischen Methoden:

Durch eventuellen Basiswechsel für die Moduln C_1 und C_2 können wir annehmen, dass bei den Matrixdarstellungen von ∂_1 und ∂_3 die $g_i := [\hat{g}_i] = \hat{h}_i$ übereinstimmen. Da $F = ab(G) = \mathbb{Z}^{b_1(M)}$, können wir für diese Basen weiter annehmen, dass $\langle g_1, \cdots, g_{b_1(M)} \rangle = F$ und für alle anderen g_i mit $i > b_1(M)$, die Matrixeinträge verschwinden, also $g_i = 1$. Bezeichne zu dieser Wahl von Basen $M = (m_1, \ldots, m_n)$ die darstellende Matrix von ∂_2 mit Spalten $m_i \in \mathbb{Z}[F]^n$. In den folgenden Matrixberechnungen wird folgende Notation verwendet: M_{ij} bezeichnet die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ Minore, die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht, der Unterstrich $\underline{m_j}$ betont das Weglassen dieser Spalte und $m_j^i \in \mathbb{Z}[F]^{n-1}$ bezeichnet die Spalte, die durch Kürzen um den i-ten Eintrag entsteht. Also ist nach dieser Schreibweise $M_{ij} = det(m_1^i, \ldots, \underline{m_j^i}, \cdots m_n^i)$. Das Alexander Ideal $\mathfrak{I}(G)$ berechnet sich dann aus $\langle M_{ij} | i, j \in \{1, \cdots, n\} \rangle$.

Zunächst soll ein Zusammenhang zwischen M_{ij} und M_{ik} hergestellt werden unter Ausnutzen der Beziehung $m_k(1 - g_k) + \sum_{l \neq k} m_l(1 - g_l) = \sum m_l(1 - g_l) \underset{(\partial_3\partial_2 = 0)}{=} 0$:

$$\begin{aligned}
&M_{ij}(1 - g_k) = \\
&= (1 - g_k)\det(m_1^i, \cdots, \underline{m_j^i}, \cdots, m_n^i) && = \det(m_1^i, \cdots, (1 - g_k)m_k^i, \ldots, \underline{m_j^i}, \cdots) \\
&= \det(m_1^i, \cdots, -\sum_{l \neq k}^{i} m_l^i(1 - g_l), \ldots, \underline{m_j^i}, \cdots) && = \det((m_1^i, \cdots, -(1 - g_j)m_j^i, \ldots, \underline{m_j^i}, \cdots) \\
&= -(1 - g_j)\det((m_1^i, \cdots, m_j^i, \ldots, \underline{m_j^i}, \cdots) && = \pm\, M_{ik}(1 - g_j)
\end{aligned}$$

Man beachte, dass in der letzten Zeile das m_j^i immer noch an der k-ten Stelle steht, also die letzte Gleichheit durch paarweises Vertauschen mit dieser Spalte entsteht. Mit den gleichen Umformungen für Zeilen erhält man ebenso $M_{ij}(1 - g_l) = \pm M_{lj}(1 - g_i)$. Zusammen ergibt das die Beziehung (8), aus der alle nötigen Folgerungen gezogen werden können.

$$M_{ij}(1 - g_k)(1 - g_l) = M_{ik}(1 - g_j)(1 - g_l) = M_{lk}(1 - g_j)(1 - g_i) \tag{8}$$

Da $b_1(M) \neq 0$ folgt mit der Wahl der g_i, dass $(1 - g_1) \neq 0$. Somit folgt mit (8), dass die Determinanten der Minoren verschwinden, wenn sie die erste $b_1(M) \times b_1(M)$ Hauptminore enthalten, aus der maximal eine Zeile *oder* eine Spalte entnommen wurde. Mit anderen Worten, da $\mathbb{Z}[F]$ nullteilerfrei ist folgt mit (8):

$$M_{ij}(1 - g_1)^2 = M_{11} \cdot 0 = 0 \implies \mathfrak{I}(G) = \langle M_{ij} | i, j \leq b_1(M) \rangle$$

Seien im Folgenden also stets $i, j \leq b_1(M)$.

Für die Elemente M_{ii} die aus symmetrischer Kürzung entstehen, liefert (8) die Gleichheit $M_{ii}(1-g_j)^2 = \pm M_{jj}(1-g_i)^2$, die nach Annahme an $b_1(M) \geq 2$ nicht-trivial ist. Da aber $\mathbb{Z}[F]$ ein faktorieller Ring ist, also die Faktorisierung in Primelemente eindeutig ist und g_i, g_j so gewählt wurden, dass $1-g_i$ und $1-g_j$ koprim sind, ist folgende Wahl gerechtfertigt[5]:

$$\Delta = \frac{M_{11}}{(1-g_1)^2} = \pm\frac{M_{22}}{(1-g_2)^2} = \cdots = \pm\frac{M_{b_1(M)}}{(1-g_{b_1(M)})^2}$$

Man erhält:

$$M_{ii} = \pm\Delta(1-g_i)^2 \tag{9}$$

Allgemein führt man mit (8) jede Determinante M_{ij} auf (9) folgendermaßen zurück:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{M_{ij}(1-g_1)^2}{(1-g_1)^2} = \pm\frac{M_{11}(1-g_i)(1-g_j)}{(1-g_1)^2} = \pm\Delta(1-g_i)(1-g_j) \\ &\Longrightarrow \mathfrak{I}(G) = (\Delta)\cdot m(F)^2 \end{aligned}$$

Also folgt das Theorem für geschlossenes M, da wegen $F \ncong \mathbb{Z}$ offensichtlich (Δ) das kleinste Hauptideal ist, das $\mathfrak{I}(G)$ enthält.

Falls M nun Rand hat, liefert ein analoger Beweis das Ergebnis. $\square$

Nun verallgemeinert diese Beschreibung des Alexander Ideals $\mathfrak{I}(M)$ das entsprechende Resultat aus der Knoten- und Verschlingungstheorie; vgl. [2, Proposition 8.11] und [2, Proposition 9.16]. Für den Fall, dass $b_1(M) = 1$ (also insbesondere für Knotenkomplemente), so wissen wir bereits, dass $I(M)$ unabhängig der beiden angegebenen Definitionen ein Hauptideal ist. Weiter haben wir in diesem Fall bereits gesehen, wie die Alexander-Norm einer Kohomologieklasse ϕ in Zusammenhang mit $b_1(\ker\phi)$ steht (falls $b_1(M) = 1$ so stimmt die Alexander-Norm mit dem Grad des Alexander Polynoms überein). Letzteres, also eine Beziehung von $b_1(\ker\phi)$ und $||\phi||_A$, soll nun im Fall für $b_1(M) \geq 1$ hergeleitet werden.

Lemma 4.15. *Falls $\Delta_G \neq 0$ mit $G = \pi_1(M)$, so gilt für primitive $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$, die in einem offenen Kegel durch eine offene berandende Seite des Polytops der Alexander-Einheitskugel liegen:*

$$b_1(\ker\phi) = ||\phi||_A + 1 + b_3(M)$$

Beweis. Zur Berechnung des Alexander Polynoms einer Gruppe verwendet man häufig eine Abbildung auf den maximalen frei abelschen Quotienten, die man auf den ganzzahligen Gruppenringen fortsetzt. Dies ermöglicht einem zwischen verschiedenen Ebenen hin und herzuspringen. Ähnlich soll nun hier $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z})$ fortgesetzt

[5] Genaugenommen gilt das in jedem kommutativen Ring mit Eins, da per Definition koprimer Elemente: $M_{11} = M_{11}((1-g_i)^2x + (1-g_1)^2y) = M_{ii}(1-g_1)^2x + M_{11}(1-g_1)^2y = (1-g_1)^2(M_{ii}x + M_{11}y)$.

werden: $\hat{\phi} : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$.
Wendet man diesen fortgesetzten Homomorphismus auf $\Delta_G \in \mathbb{Z}G$ an erhält man:

$$\hat{\phi}\Delta_G = \hat{\phi}(\sum \lambda_i g_i) = \sum \lambda_i \phi(g_i) = \sum \lambda_i t^{\phi(g_i)} = \sum \hat{\lambda}_{\phi(g_i)} t^{\phi(g_i)}$$

Die $\hat{\lambda}_{\phi(g_i)}$ fassen alle Koeffizienten zum gleichen Monom zusammen, sodass in der Summe kein Gruppenelement mehrfach auftritt. Per Definition gilt also:

$$\operatorname{Grad} \phi(\Delta_G) = \sup_{\hat{\lambda}_{\phi(g_{i/j})} \neq 0} (\phi(g_i) - \phi(g_j))$$

Da nun aber ϕ aus einem Kegel durch eine offene Seite des Alexander Polytops gewählt wurde, verschwinden unter $\hat{\phi}$ keine Koeffizienten die den Grad maximieren, also:

$$\sup_{\hat{\lambda}_{\phi(g_{i/j})} \neq 0} (\phi(g_i) - \phi(g_j)) = \sup_{\lambda_i} (\phi(g_i) - \phi(g_j))$$

nun folgt das Lemma mit $(\Delta_\phi) = \phi(I(G)) = \langle (t-1)^{1+b_1(M)} \hat{\phi}\Delta_G \rangle$. $\square$

5 Folgerungen, Bemerkungen und Beispiele

Nun haben die letzten Seiten viele Ergebnisse gebracht, die in diesem Kapitel reflektiert werden sollen. Dies führt etwa zu weiterführenden Überlegungen zum Beweis des Theorems, als auch abschließend zu etwas leichterer Kost wie Berechnungen im Falle einiger Beispiele.

5.1 Zu der Thurston-Norm bei Überlagerungen mit unendlich großer Bettizahl

Wie oben bereits vorgeschlagen, kann man nun die Frage stellen, welche Anforderungen man an eine Thurston-minimierenden Fläche stellen darf falls $b_1(\ker\phi) = \infty$ — also inwieweit lässt sich Lemma 3.2 verallgemeinern? Intuitiv würde man einer unendlich zyklischen Überlagerung schnell die Fähigkeit absprechen, endlich erzeugte Homologiegruppen (über $\mathbb{Z}$) zu haben, sind diese Voraussetzungen vielleicht zu restriktiv? Die gute Nachricht ist, dass obiger Beweis nahezu problemlos übertragen werden kann, wenn man nur die endliche Erzeugbarkeit von $\ker\phi$ als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$-Modul fordert. Ob oder wann dies sinnvoll ist, soll nun diskutiert werden, anhand von Überlegungen zu nicht endlich erzeugtem $\ker\phi$.

Die folgende Proposition kann als Verallgemeinerung der Formel $b_1(\ker\phi) = \operatorname{Grad}\Delta_\phi$ aus Corollar 4.13 gesehen werden:

Proposition 5.1. *Falls $H_1(M_\phi)$ endlich erzeugt über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ ist (dies ist nach Proposition 4.1 für jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit wahr), nicht aber als abelsche Gruppe, so verschwindet das Alexander Polynom und die Alexander Norm.*

Beweis. Die einzige Möglichkeit, dass $H_1(M_\phi;\mathbb{Z})$ über $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ im Gegensatz zu $\mathbb{Z}$ endlich erzeugt ist, besteht darin, dass die Familie $\{t_*^k x, k \in \mathbb{Z}\}$ in $H_1(M_\phi)$ linear unabhänig über $\mathbb{Z}$ ist, wobei t ein Erzeuger der Decktransformationen ist. Also ist $(x) \subset H_1(M_\phi)$ ein freier Anteil des $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-Moduls. Ohne Einschränkung sieht eine Präsentation von $H_1(M_\phi)$ über dem Gruppenring über $\mathbb{Z}$ folgendermaßen aus:

$$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{smallmatrix}\right)} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow H_1(M_\phi) \longrightarrow 0$$

Somit berechnet sich das Elementarideal zu $E_0(M_\phi) = (\det 0 \det X) = (0)$. □

Man sieht also, dass der Fall $b_1(\ker\phi) = \infty$ ein eher triviales Beispiel zur Verifizierung der Abschätzung aus Theorem 1.1 darstellt, also scheinbar uninteressant ist. Jedoch erschwert das die Situation zur Berechnung der Thurston-Norm, da die untere Schranke entfällt. Mit der folgenden Proposition soll eine möglichst hohe untere Schranke für das Geschlecht einer Thurston-minimalen zusammenhängenden Fläche für allgemeine $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$ angegeben werden:

Proposition 5.2. *Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit wie oben und $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$ primitiv. Dann ist $H_1(M_\phi)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$-Modul, wobei t ein Erzeuger der*

Decktransformationen ist. Nun existiert eine eingebettete orientierbare Fläche $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$, die Folgendes erfüllt:

- $[S] = \phi$
- $\chi_-(S) = ||\phi||_T$
- *S ist zusammenhängend*
- *Zerlege $H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$ als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$-Modul nach dem Klassifikationssatz von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen in einen freien und Torsionsanteil. Dann ist dies auch eine direkte Summe von $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. Dann soll:*

$$b_1(S) \geq \mathrm{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q})) + \dim(H_1(M_\phi; \mathbb{Q})/\mathcal{F}) = \mathrm{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(\mathcal{F}) + \dim \mathcal{T}$$

Beweis. Man wähle unter den eingebetteten Flächen, welche die ersten beiden Eigenschaften erfüllen, also die Thurston-Norm minimieren, eine Fläche aus, deren Anzahl an Zusammenhangskomponenten möglichst gering ist. Mit der gleichen Konstruktion des Graphen wie im Beweis des Lemmas 3.2 argumentiert man, dass S zusammenhängend ist.

Da $\mathcal{F} \subset H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ als Modul über dem Ring der rationalen Laurentpolynome endlich erzeugt ist, erzeugt ein kompakter Teilraum der Überlagerung $\mathcal{F}$ als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$-Modul. Mit diesem Argument folgt wie im Beweis des Lemmas 3.2, dass $b_1(S) \geq \mathrm{Rang}(\mathcal{F})$.

Da $\mathcal{T} \subset H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ nun endlich erzeugt als Vektorraum ist, folgt mit dem Kompaktheitsargument, dass auch hier S diesen Vektorraum erzeugt, also $b_1(S) \geq \dim \mathcal{T}$.

$\mathcal{F}$ und $\mathcal{T}$ sind invariant bezüglich der Decktransformationen, als direkte Summanden über dem rationalen Gruppenring der Decktransformationen. Das erlaubt uns Repräsentanten $f_1, \cdots, f_{\mathrm{Rang}(\mathcal{F})}, t_1, \cdots, t_{\dim \mathcal{T}}$ zu wählen, die Basis eines $\mathrm{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(\mathcal{F}) + \dim \mathcal{T}$-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraums sind und die f_i erzeugen $\mathcal{F}$ als Gruppenringmodul. Offensichtlich ist dieser Raum *nicht* t_*-invariant, genauer: dieser Vektorraum ist eine direkte Summe aus einem maximalen t_*-invarianten und einem nicht-t_*-invarianten Raum. Allerdings folgt nun aus den obigen Überlegungen, dass die f_i so gewählt werden können, dass die Inklusion $S \hookrightarrow M_\phi$ auf der ersten Homologie mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten, eine lineare Abbildung induziert, deren Bild $\langle f_1, \cdots, f_{\mathrm{Rang}(\mathcal{F})}, t_1, \cdots, t_{\dim \mathcal{T}} \rangle$ enthält. □

Bemerkung 5.1.1. Leider erkennt man, dass Lemma 3.2 nicht direktes Corollar dieser Proposition ist, da im letzten Beweis $b_2(S) = b_3(M)$ nicht gezeigt werden kann. Ist $b_2(S) = 0$ (da S zusammenhängend, ist $b_2 \in \{0, 1\}$), so folgt $\partial S \neq \emptyset$ und somit $\partial M \neq \emptyset$, also Gleichheit $b_2(S) = b_3(M)$. Ist allerdings $b_1(S) = 1$, also S eine geschlossene Fläche, so folgt *nicht* zwangsweise, dass M geschlossen ist:

Beispiel 5. Man betrachte etwa den 3-dimensionalen Torus $M = T = S^1 \times S^1 \times S^1$ mit $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^3 \cong \mathrm{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}) \cong H^1(M; \mathbb{Z})$ nach dem universellen Koeffiziententheorem und der Produktverträglichkeit der Fundamentalgruppe, sowie Hurewicz. Nun betrachte man eine Fläche die dual zu einem der kanonischen Erzeuger der Fundamentalgruppe ist, am einfachsten wäre zum Beispiel $S = * \times S^1 \times S^1$ mit der zugehörigen durch „Aufschneiden und Verkleben“ (vergleiche Konstruktion 1, Kapitel 2.3) gewonnenen Überlagerung $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$ die homologisch endlich erzeugt ist. Sicher ist es möglich einen glatt eingebetteten 2-Volltorus $U \cong S^1 \times D$ aus dem Komplement von der betrachteten Fläche S in M zu finden. Betrachtet man nun die Mannigfaltigkeit $N = M - \mathring{U}$, so erhält man eine glatte orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand $(N, \partial N) = (M - \mathring{U}, \partial U)$, die auch sonst alle Voraussetzungen der vorhergehenden Proposition erfüllt. Da U zu S durchschnittsleer gewählt wurde, ist $[S]$ sicherlich eine nicht-triviale Homologieklasse in $H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$. Nun ist die durch Aufschneiden und Verkleben an S gewonnene Überlagerung über dem Gruppenring endlich erzeugt, aber $b_2(S) = 1 \neq 0 = b_3(N)$. Man vergleiche auch hier wieder das Geschehen mit Abbildung 1, die eine unendlich zyklische Überlagerung zeigt, deren erste Bettizahl unendlich ist. Das liegt auch hier daran, dass die 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeit, an derer aufgeschnitten wird, einen erzeugenden freien Teil der Homologie mit 0 als Kohomologieklasse auswertet.

5.2 Faserungen

In diesem Abschnitt, wollen wir uns mit Faserungen über dem Kreis beschäftigen.

Beispiel 6. Sei M eine Faserbündel $M \to S^1$ über dem Kreis. Da die Entnahme eines Punktes aus dem Kreis S^1 einen zusammenziehbaren Raum, also ein Produkt mit der Faser liefert, entsteht eine solche Faserung also immer folgendermaßen: Es gibt einen Diffeomorphismus einer zusammenhängenden Fläche $\varphi : S \times 0 \to S \times 1$, so dass M dem Quotienten $S \times I/\phi$ entspricht. Der Kontext ist also folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & I/\partial I = S^1 \\
S \times I/\varphi \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

In diesem Fall definiert die Homotopieklasse der Faserung $M \to S^1$ eine eindeutige Kohomologieklasse $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$. Die Überlagerung M_ϕ kann wieder entweder als Rückziehung von $\mathbb{R} \to S^1$ oder durch Aufschneiden an S gewonnen werden — in beiden Fällen ist leicht ersichtlich, dass $M_\phi \cong S \times \mathbb{R}$ ist (für das Aufschneiden an S, benötigt man das $[S] = \phi$, dies gilt aber da jedes Urbild von einem Punkt unter f diffeomorph zur Fläche ist, insbesondere die der regulären Werte, die nach Sard existieren — faktisch ist natürlich jeder Wert von f regulär, dies folgt zum Beispiel aus der Beschreibung von f durch p_2). Also hat M_ϕ den Homotopietyp der Fläche, dementsprechend berechnen sich die Homotopieinvarianten von M_ϕ. Insbesondere ergibt sich $b_1(\ker \phi) = b_1(M_\phi) = b_1(S)$, wodurch sich mit Lemma 3.2 ergibt (da $b_0(S) = 1$), dass die duale Fläche mit Gleichheit der ersten Bettizahlen gewählt werden kann. Da dies die einzige Ungleichung ist, die in dem Theorem verwendet wird, folgt also schon Gleichheit der Normen $||\phi||_A = ||\phi||_T$, falls $b_1(M) > 1$ und $||\phi||_A = ||\phi||_T + 1 + b_3(M)$ sonst.

Falls M nun zusätzlich noch ein Knotenkomplement eines Knotens K ist, gilt $\ker \phi = [\pi_1(M), \pi_1(M)]$. Also folgt aus diesen Überlegungen, dass die Kommutatoruntergruppe einer Knotengruppe isomorph zu der Fundamentalgruppe einer Seifertfläche des Knotengeschlechts ist, vergleiche zum Beispiel [2, Theorem 4.6].

Es stellt sich die Frage, inwieweit eine Faserung eindeutig ist. Beispielsweise ist im Falle eines Vektorbündels über einem zusammenhängendem Raum, die Dimension eindeutig. Falls aber $b_1(M) > 1$ ist und $\phi, \psi \in H^1(M;\mathbb{Z})$ Repräsentanten in $[M, S^1]$ haben, die Faserungen sind, folgt dann etwa: $||\phi||_T = ||\psi||_T$? Existieren Diffeomorphismen zwischen Abbildungstori zu Flächen verschiedenen Geschlechts? Tatsächlich sind die Faserungen nicht eindeutig siehe Beispiel 8.

Nun verstehen wir also die Thurston-Norm einer solchen Klasse und somit in diesem Beispiel auch die Alexander-Norm. Möchte man dennoch das Alexander Polynom $\Delta_f = \Delta_\phi$ einer Faserung f berechnen (falls $b_1(M) = 1$ ist $\Delta_f = \Delta_M$), genügt es nach Lemma 4.11, die lineare Abbildung von Vektorräumen $t_* \in \mathrm{Aut}(H_1(M_\phi;\mathbb{Q}))$ zu berechnen. Aber da der Erzeuger t der Decktransformationen folgendem kommutativen Diagramm genügen muss:

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[rr, "\cong"'] \arrow[dl] \arrow[d, "\simeq"] & & S \arrow[d, "\simeq"] \arrow[dr] & \\
M_\phi \arrow[r, "\cong"] \arrow[drr] & S \times \mathbb{R} \arrow[rr, "\hat{t}", "\cong"'] \arrow[dr] & & S \times \mathbb{R} \arrow[r, "\cong"] \arrow[dl] & M_\phi \arrow[dll] \\
 & & S \times I/\varphi \arrow[d, "\cong"] & & \\
 & & M & &
\end{tikzcd}$$

und andererseits t_* von einem Lift der zur Faserung dualen Schleife induziert wird, muss in jedem Fall gelten: $t_* = \hat{t}_* = \varphi$ unter gegebenen Identifikationen mit S in obigem Diagramm. Also berechnet sich das Alexander Polynom Δ_f zu dem charakteristischen Polynom der Abbildung $\varphi_* : H_1(S;\mathbb{Q}) \to H_1(S;\mathbb{Q})$, wobei dieses mit Proposition 4.9 einen Erzeuger des entsprechend zurückgezogenen Ideals unter der Lokalisierung $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \to \mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ liefert — das ganzzahlige Alexander Polynom.

Dies liefert die Möglichkeit in diesem Beispiel für Faserungen mit Geschlecht mit $b_1(M) = 1$ das Theorem zu verifizieren ohne es zu nutzen, indem man berechnet:

$$||\phi||_A = \mathrm{Grad}(\Delta_\phi) = \mathrm{Grad}(\Delta_f) = \mathrm{Grad}\det(\varphi_* - tI) = g(S) = \chi_-(S) + 2 = ||\phi||_T + 2$$

Im Falle der trivialen Bündel $D^2 \times S^1$ oder $S^2 \times S^1$ stimmt die zyklische Überlagerung mit der universellen überein und man erhält jeweils $\Delta_\phi = 1$ für ϕ einen Erzeuger der ersten Homologie. Da die Erzeuger für $H_2(D^2 \times S^1, \partial) \cong \mathbb{Z}$ und $H_2(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ sich mit Poincaré Dualität als $[D^2, \partial D^2]$ beziehungsweise $[S^2]$ herausstellen, verschwindet auch die Thurston-Norm. In diesem Fall gilt also keine Gleichheit in Theorem 1.1.

Beispiel 7. Handelt es sich bei M um eine Faserung $M \to S^1$ mit $b_1(M) = 1$ oder ist $b_1(M) > 1$ und jede Kohomologieklasse ist repräsentiert durch eine Faserung, so berechnet ist die Thurston-Norm nach Theorem 1.1 bereits vollständig durch die Fundamentalgruppe determiniert, siehe Kapitel 4.

Beispiel 8. Eine wichtige Anwendung der Thurston-Norm und dieser Abschätzung besteht in den sogenannten *fibered faces*, die im Folgenden als gefaserte Seiten bezeichnet werden. Bisher wurden bereits Kohomologieklassen $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$ betrachtet, mit einer korrespondierenden Abbildung $M \to S^1$, die eine Faserung darstellt. Bei solchen herrscht nach dem letzten Beispiel Gleichheit im Theorem 1.1. Diese Klassen werden auch als *gefasert* bezeichnet. Tatsächlich stellt Thurston in [19] fest, dass die Thurston-Norm einem Informationen über diese Eigenschaft liefert. Wie in Bemerkung **??** gezeigt, lässt sich die Thurston-Norm durch Erweiterung der Skalare (Tensorieren mit $\mathbb{R}$) fortsetzen. Thurston hat in [19] außerdem gezeigt, dass der Einheitsball dieser Norm auf $H^1(M;\mathbb{R})/V$ (wobei V ein maximaler degenerierter Unterraum ist) ein beschränktes konvexes Polytop ist, also die konvexe Hülle einer endlichen Anzahl an Elementen. Eine berandende Seite dieses Polytops nennt man gefaserte Seite, falls alle Elemente $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$ die auf einem vom Ursprung ausgehendem Strahl liegen, der das Innere der Seite trifft, gefasert sind. Mit anderen Worten ist eine Seite genau dann gefasert, wenn jedes $\phi \in H^1(M;\mathbb{Z})$ gefasert ist, das in einem Kegel mit dem Inneren der Seite als Grundfläche und dem Ursprung als Spitze liegt. Natürlich ist das Polytop symmetrisch ($||-\phi||_T = ||\phi||_T$) und die gefaserten Seiten treten auch in Paaren auf — eine Faserung $M \to S^1$ liefert mit einer orientierungsumkehrenden Reflektion τ das Inverse $M \to S^1 \xrightarrow{\tau} S^1$. Man sagt, gefaserte Klassen ϕ, ψ liegen in *wirklich verschiedenen* gefaserten Kegeln, falls diese bis auf Symmetrie verschieden sind.

5.3 Knoten und Verschlingungen

Bemerkung 5.3.1. Zwei Normen abzuschätzen ist gleichbedeutend dazu, eine Inklusionsbeziehung ihrer Einheitsbälle festzustellen.

Beispiel 9 (Verschlingungen)**.** Thurston liefert in [19] einige Beispiele in Form von Verschlingungskomplementen, als er seine Ergebnisse über die Existenz der Thurston-Norm und ihren Einheitsball veröffentlicht. Eine Verschlingung bezeichnet eine gemeinsame disjunkte Einbettung von mehreren Knoten, also eine glatte Einbettung $L : \sqcup_{i=1}^m S^1 \to S^3$. Als M_L bezeichnen wir wieder die kompakte 3-Mannigfaltigkeit, die aus Entfernen einer offenen Tubenumgebung hervorgeht. Wählt man auf $\sqcup S^1$ eine Standardorientierung, erhält man wie im Fall eines Knotenkomplements, kanonische Erzeuger von $H^1(M_L)$: Die Orientierung einer Komponente liefert (nach festgelegter Konvention) einen homologisch eindeutigen orientierten Meridian, das ist eine Schleife die in $M_L \overset{\simeq}{\hookrightarrow} M - \mathrm{Im}(L)$ homotop zu einer Einbettung einer Einheitssphäre einer Faser unter einer Tubenabbildung ist (es lässt sich in einem trivialen Bündel leicht von einer Einheitssphäre sprechen). Diese liefern kanonische Erzeuger der ersten Homologie $H_1(M_L) \cong \mathbb{Z}^m$, die kanonische Basis des Dualraums $l_1, \cdots, l_m \in H^1(M_L) \cong H_1(M_L)$ geht also natürlich aus den Komponenten der Verschlingung $L_1, \cdots, L_m$ hervor. Außerdem liefert dies eine kanonische Identifikation mit dem Laurentring $\mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[l_1^{\pm 1}, \cdots, l_m^{\pm 1}]$ (analog wie im Knotenfall). Um also beispielsweise den Einheitsball der Thurston-Norm zu beschreiben, lassen sich ebenfalls die Koordinaten $l_i = l_i \otimes 1 \in H^1(M) \otimes \mathbb{R} = H^1(M;\mathbb{R})$ verwenden. Falls die Komponenten wirklich verschlungen sind, also keine Komponente eine Scheibe in M_L berandet und paarweise keine Komponenten als Rand eines Kreisrings hervorgehen, so folgt dass die Thurston-Norm eine Norm auf $H^1(M_L)$ definiert. Dies ergibt sich daraus, dass sich die Eulercharakteristik einer Fläche mit n Randkomponenten als $2-2g-n$ berechnet — durch Hinzufügen von n verschiedenen 2-Zellen erhält man eine geschlossene Fläche mit Eulercharakteristik $2-2g$. Nun wollen wir einige Einheitskugeln von Verschlingungen berechnen.

Knoten

Im Fall, dass der Link nur aus einer Komponente besteht — es sich also um einen Knoten handelt — ist $H^1(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Sei ϕ ein Erzeuger der ganzzahligen Kohomologie, dann ist ϕ dual zu der Seifertfläche und jede duale Fläche die Lemma 3.2 erfüllt ist eine Seifertfläche. Somit ist (solange nicht vom Unknoten geredet wird) wie oben erwähnt $||\phi||_T = 2g(L)+1$. Also ist die abgeschlossene Einheitskugel der Thurston-Norm gegeben durch:

$$\begin{array}{ccc} H^1(M;\mathbb{R}) & \cong & \mathbb{R} \\ [-\frac{1}{2g(L)+1}\phi, \frac{1}{2g(L)+1}\phi] & = \overline{B}_{||\cdot||_T} = & [-\frac{1}{2g(L)+1}, \frac{1}{2g(L)+1}] \end{array}$$

wobei dann entsprechend für die duale Thurston-Norm $||\cdot||_T^* : H_1(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ (mit Ausnutzung der Symmetrie) folgt:

$$\overline{B}_{||\cdot||_T^*} = \{\alpha \in H_1(M;\mathbb{R}), \frac{1}{2g(L)+1}\phi(\alpha) \leq 1\} = [-(2g(L)+1)\hat{\alpha}, (2g(L)+1)\hat{\alpha}]$$

Hier wird unter dem natürlichen Isomorphismus eines Vektorraums in seinen Bidualraum $H_1((M;\mathbb{R}) \cong H_1(M;\mathbb{R})^{**} \cong \mathrm{Hom}(H^1(M;\mathbb{R}),\mathbb{R})$ die duale Thurston-Norm über der ersten Homologie aufgefasst und $\hat{\alpha}$ als Erzeuger der ganzzahligen Homologie, genauer gesagt, der Homologieklasse — nach obiger Konvention — *des* Meridians (also gilt $\phi(\hat{\alpha}) = 1$).

Bemerkung 5.3.2. Da dies keine Arbeit über die Eulercharakteristik einer Fläche ist, möge der Leser in den folgenden Beispielen zur Berechnung der Eulercharakteristik dualer Flächen seine bevorzugte Formel verwenden, so dass die expliziten Rechnungen übersprungen werden können.

Hopf Verschlingung

Das trivialste nicht-triviale Beispiel einer Verschlingung mit mehreren Komponenten ist der Hopf Link. Er besteht aus zwei ineinander verschlungenen Unknoten, L_1, L_2. Betrachtet man nun zwei Scheiben und verklebt diese mit zwei umgekehrt verdrehten Bändern, so erhält man die Hopf Verschlingung als Rand. Äquivalent möge man sich

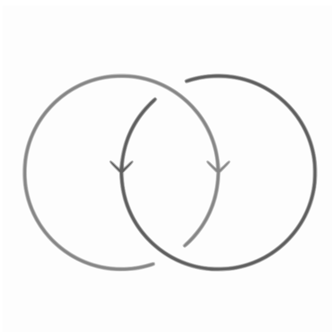


Abbildung 3: Die Hopf Verschlingung

einen Kreisring $S^1 \times I$ nehmen, der zweifach verdreht ist und beobachtet, dass dieser eine Seifertfläche S darstellt. Das Geschlecht dieser Seifertfläche ist 0, da es sich um eine Sphäre handelt, aus der zwei offene Scheiben entnommen wurde und somit $\chi_-(S) = 0$. Mit anderen Worten ist die obige Bedingung, dass die Thurston-Norm eine Norm ist, nicht erfüllt. Entsprechend existieren Elemente in $H^1(M_L;\mathbb{R})$ die sich zu 0 auswerten und durch die Linearität der Thurston-Norm entsteht ein degenerierter Untervektorraum (man überprüft leicht, dass die Fortsetzung nach $\mathbb{R}$ auch verschwindet). Mit der Subadditivität verschwindet die Thurston-Norm auf dem Vektorraum $H^1(M;\mathbb{R})$, also ist die Einheitskugel nicht kompakt, sondern der gesamte Raum. Geht man jedoch zur dualen Norm über, erhält man wieder ein kompaktes Polytop mit ganzzahligen Eckpunkten:

$$\overline{B}_{||\cdot||_T^*} = \{\alpha \in H_1(M;\mathbb{R}) | \sup_{\{\phi \in H^1(M;\mathbb{R})\}} \phi(\alpha) \leq 1\} = 0$$

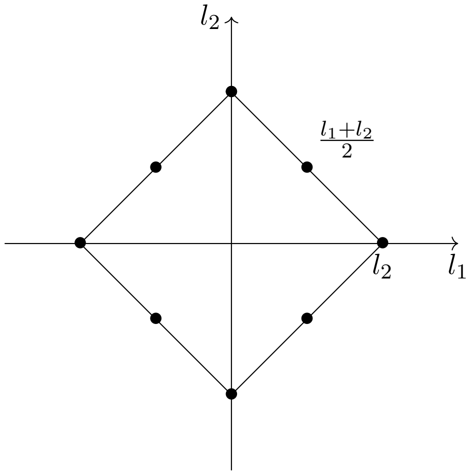
Die folgenden Beispiele sind aus Thurston's Arbeit [19] entnommen. Die Berechnungen von Thurston bedienen sich lauter Argumente warum keine repräsentierende Fläche existieren kann, die eine geringere Komplexität als die bisher gefundenen hat. Wir werden natürlich unsere Anstrengungen belohnen und Theorem 1.1 nutzen, um die Thurston-Norm-minimierende Flächen bequemer festzustellen.

Whitehead Verschlingung

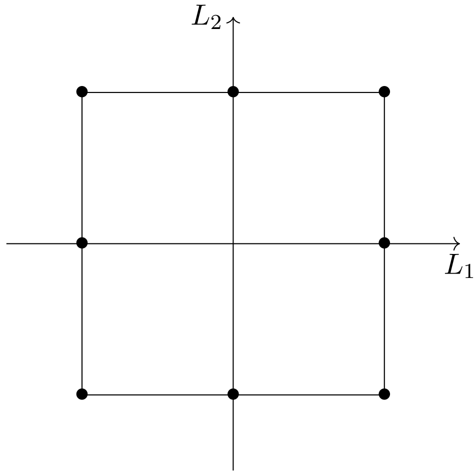
Die Whitehead Verschlingung ist ein Link der aus zwei Komponenten L_1, L_2 besteht. Offensichtlich berandet jede Komponente L_i in M_{L_i} eine Scheibe, die sich in M_L auf eine Kreisscheibe mit zwei entnommenen offenen Scheiben einschränkt (an den Stellen, an denen die offene Tubenumgebung des anderen Knotens die Scheibe durchdringt). Bei diesen Repräsentanten für l_1 beziehungsweise l_2 berechnet sich die Eulercharakteristik zu -1, also gilt $|| \pm l_i||_T \leq 1$, offensichtlich gilt aber Gleichheit undin diesem Fall die Thurston-Norm eine tatsächliche Norm. Genauso offensichtlch gilt $||l_1 + l_2||_T > 0$: die Verschlingungszahl des Whitehead Links ist offensichtlich 0 (dies sieht man indem man eine Projektion betrachtet in dem die eine Komponente der Unknoten ist), jedoch haben die Randkomponenten jeder Einbettung eines Kreisring $S^1 \times I \hookrightarrow S^3$ Verschlingungszahl $\neq 0$ oder sind trivial (durch einen Äquator zu trennen). Also folgt, dass diese Fläche Geschlecht ≥ 1 hat und somit $2 \leq ||l_1 + l_2||_T \leq ||l_1||_T + ||l_2||_T = 2$ für eine Seifertfläche. Mit Theorem 1.1 ließe sich diese untere Abschätzung auch mit $\Delta_L = (L_1 - 1)(L_2 - 1) = L_1L_2 - L_1 - L_2 + 1$ berechnen, da $||l_1 + l_2||_T \geq ||l_1 + l_2||_A \geq (l_1 + l_2)(L_1 + L_2 - 0) = 2$ Diese ist Seifert-Fläche ergibt sich sogar durch die Seifert-Konstruktion. Folglich:

$$\begin{aligned} ||l_1 + l_2||_T = || - (l_1 + l_2)||_T &\overset{*}{=} || - l_1 + l_2||_T = ||l_1 - l_2||_T \\ &= 2 \end{aligned}$$

wobei die ausgezeichnete Gleichung gilt, da $|| - l_1 + -l_2||_T \notin \{0, 1\}$ aus obigen Gründen. *Behauptung:* Die Thurston-Norm Einheitskugel und ihr Duales sind die Folgenden:



(a) $B_{||\cdot||_T}$



(b) $B_{||\cdot||_T^*}$

Abbildung 4: Einheitskugeln der Whitehead Verschlingung in $H^1(M;\mathbb{R})$ und $H_1(M;\mathbb{R})$

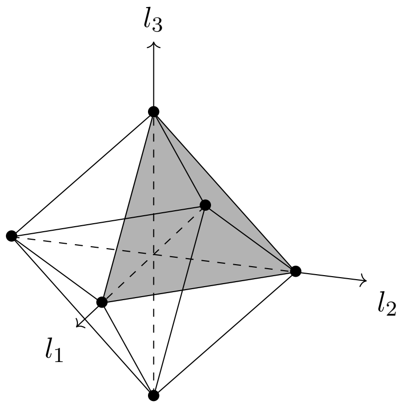
Die 8 berechneten Punkte liegen auf dem Rand von $B_{||\cdot||_T}$ (die Norm ist stetig), einer konvexen Teilmenge. Es ist eine leichte Übung, dass jede konvexe Teilmenge zweier nächster Punkte in Abbildung 4a im Rand dieser konvexen Teilmenge enthalten sein muss. Aufgrund der Monotonie folgt die Behauptung für die Einheitskugel. Für die duale Norm, berechnet man entweder 8 verschiedene Randpunkte, oder beobachtet für jedes $\alpha \in H_1(M;\mathbb{R})$ auf welchen Elementen (eine Gerade) $\phi \in H^1(M_L;\mathbb{R})$ das Supremum $\phi\alpha$ angenommen wird und sieht direkt das Ergebnis.

Borromäische Ringe

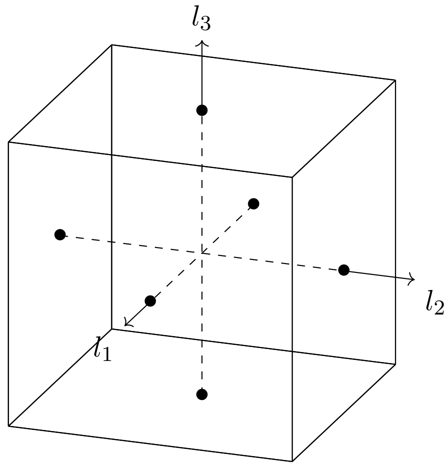
Seien $L = L_1 + L_2 + L_3$ die Borromäischen Ringe. Offensichtlich hat jede duale Fläche zu l_i, die Komponente L_i als Rand, (sonst wäre der Meridian aufgrund eines Schnittzahlenarguments im Kern von l_i). Folglich hat also jede Fläche dual zu l_i mindestens 3 Randkomponenten. Da eine Sphäre mit 3 entnommenen offenen Scheiben (also eine abgeschlossene Scheibe mit 2 Durchlöcherungen), wobei die eine Randkomponente aufgespannt wird von der entnommenen Komponente $\nu(L_i)$, bereits dual zu l_i ist gilt wieder $||\pm l_i||_T = 1$ für jedes i. Ähnlich wie beim letzten Beispiel der Whitehead Verschlingungen, möchten wir nun — in Dimension 3 — die berandenden Seiten der Einheitskugel durch Berechnung einiger Punkte feststellen und sie dadurch bestimmen. Es berechnet sich $\Delta_L = L_1L_2L_3 - \sum L_iL_j + \sum L_i - 1$ und somit folgt leicht die Alexander-Norm einer beliebigen Kohomologieklasse, insbesondere:

$$3 = ||\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3||_A \leq ||\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3||_T \leq ||l_1||_T + ||l_2||_T + ||l_3||_T = 3$$

Wegen $||\pm l_i||_T = 1$ und $||\frac{1}{3}(\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3)||_T = 1$ folgt dass die Randseiten der Einheitskugel, die Standard-2-Simplices sind, die von den Einheitsvektoren aufgespannt werden. Somit berechnet sich $B_{||\cdot||_T}$ zu einem Oktahedron, siehe Abbildung 5a. Mit



(a) $B_{||\cdot||_T}$



(b) $B_{||\cdot||_T^*}$

Abbildung 5: Die Einheitskugeln der Borromäischen Ringe

derselben Überlegung wie im vorhergehenden Beispiel, erkennt man strahlenweise die Form von $B_{||\cdot||_T^*}$ als Würfel.

Literatur

[1] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2):275–306, 1928.

[2] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. *Knots*, volume 5 of *De Gruyter studies in mathematics*. Walter de Gruyter, Berlin and New York, 2nd rev. and extended ed edition, 2003.

[3] Stefan Friedl. Reidemeister torsion, the thurston norm and harvey's invariants. *Pacific Journal of Mathematics*, 230(2):271–296, 2007.

[4] Stefan Friedl and Taehee Kim. The thurston norm, fibered manifolds and twisted alexander polynomials. *Topology*, 45(6):929–953, 2006.

[5] Stefan Friedl and Taehee Kim. Twisted alexander norms give lower bounds on the thurston norm. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(9):4597–4618, 2008.

[6] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. Twisted alexander polynomials and symplectic structures. *American Journal of Mathematics*, 130(2):455–484, 2008.

[7] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. Twisted alexander polynomials detect fibered 3-manifolds. *arXiv preprint arXiv:0805.1234*, 2008.

[8] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. A survey of twisted alexander polynomials. In *The Mathematics of Knots*, pages 45–94. Springer, 2011.

[9] C. McA. Gordon and J. Luecke. Knots are determined by their complements. *Journal of the American Mathematical Society*, 2(2):371–415, 1989.

[10] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge and New York, 2002.

[11] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York [u.a.], corr. 4. print edition, 1991.

[12] Matthias Kreck. *Differential algebraic topology: From stratifolds to exotic spheres*, volume v. 110 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, Providence and R.I, 2010.

[13] Lickorish, W. B. Raymond. *An introduction to knot theory*, volume 175 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York, 1997.

[14] McMullen, C. The Alexander polynomial of a 3-manifold and the Thurston norm on cohomology. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 35(2):153–171, 2002.

[15] J. Milnor. Infinite cyclic coverings. *Collected Papers*, 2:71–89, 2009.

[16] Edwin E. Moise. Affine structures in 3-manifolds: V. the triangulation theorem and hauptvermutung. *Annals of Mathematics*, 56(1):96–114, 1952.

[17] H. Seifert. *Über das Geschlecht von Knoten*. Springer, Berlin, 1934.

[18] Y. Shinohara and D. W. Sumners. Homology invariants of cyclic coverings with application to links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 163:101–121, 1972.

[19] William P. Thurston. *A norm for the homology of 3-manifolds*, volume 339 of *American Mathematical Society: Memoirs*. American Mathematical Society, Providence, 1986.

[20] Lorenzo Traldi. The determinantal ideals of link modules. i. *Pacific J. Math.*, pages 215–222, 1982.

[21] Friedhelm Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *The Annals of Mathematics*, 87(1):56, 1968.

[22] George William Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York and Berlin, corrected 3rd print edition, 1995.

[23] Whitehead, J. H. C. On c^1 -complexes. *The Annals of Mathematics*, 41(4):809, 1940.