

Alexander-Norm und Thurston-Norm

Daniel Valenzuela

Geboren am 21.07.1992 in München

10. Juli 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuerin: Prof. Dr. Ursula Hamenstädt

MATHEMATISCHES INSTITUT

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Vorbereitungen der benötigten Theorien	5
2.1	Über noethersche Moduln und Gruppenringe	5
2.2	Poincaré und Lefschetz Dualität — eine differentialtopologische Betrachtung	8
2.3	Konstruktionen	10
2.4	Normen und Halbnormen auf \mathbb{Z} -Moduln und ihre Fortsetzungen	13
3	Die Alexander-Invarianten	15
3.1	Topologische Definitionen	15
3.2	Algebraische Definitionen	15
3.3	Rationale Alexander-Invarianten	15
3.4	Eigenschaften der Alexander-Polynome	15
4	Die Thurston-Norm	16
4.1	Eigenschaften der Thurston-Norm	16
4.2	$\ \cdot\ _T$ -minimierende Flächen	16
5	Beweis des Theorems	16
6	Folgerungen, Bemerkungen und Beispiele	17
6.1	Zu der Thurston-Norm bei Überlagerungen mit unendlich großer Bettizahl	17
6.2	Faserungen	19
6.3	Knoten und Verschlingungen	21

1 Einführung

Die Theorie der Knoten beschäftigt sich mit Äquivalenzklassen von Knoten und dem Finden von Invarianten solcher Äquivalenzklassen. Als häufig betrachtete Invariante hat sich die Homöomorphieklasse der kompakten 3-Mannigfaltigkeit ergeben, die man das Knotenkomplement nennt. Dieses entsteht durch Entnehmen einer offenen Tubenumgebung des eingebetteten Knotens $S^1 \hookrightarrow S^3$. Häufig stellen sich Knoteninvarianten lediglich als Invarianten der Knotenkomplemente heraus. Um die Qualität und Feinheit dieser Invarianten zu beurteilen, ist es zunächst wichtig die des Knotenkomplements zu beurteilen. Dies ist natürlich eine relevante Frage, schließlich beschäftigten sich Topologen den Großteil des 20. Jahrhunderts damit Knotenkomplemente zu studieren. 1989 zeigen Gordon und Luecke [9], dass Knoten sogar durch ihr Knotenkomplement in ihrer Klasse bestimmt sind, es sich bei dem Knotenkomplement also um eine vollständige Knoteninvariante handelt. Manche Invarianten entstanden also aus rein homologischen Eigenschaften von 3-Mannigfaltigkeiten, andere wiederum entstanden speziell für 3-Mannigfaltigkeiten, die einen Torus als Rand haben. Um letztere soll es auch in dieser Arbeit gehen.

Alexander definiert 1928 eine topologische Invariante des Knotenkomplements [1], die einem Knotenkomplement eine Klasse von Laurentpolynomen mit eindeutigem Grad zuordnet. 1934 stellt Seifert in seiner Arbeit „Geschlecht von Knoten“ [17] mit dem Geschlecht eine Invariante vor, die die minimale Komplexität einer orientierten eingebetteten Fläche berechnet die den Knoten aufspannt (nach der Klassifikation von Flächen wird diese in Abhängigkeit des Geschlechts gemessen) und eine Konstruktion für die Existenz solcher Flächen. Dieses Knotengeschlecht liefert die Möglichkeit jeden Knoten von dem Unknoten zu unterscheiden. Natürlich liefert die sogenannte Seifert-Konstruktion eine Fläche mit Geschlecht, jedoch ist es ein deutlich komplizierteres Anliegen, wenn man zeigen möchte, dass eine gefundene Fläche in ihrer Komplexität nicht unterboten werden kann. Entsprechend günstig erweist sich Seifert's Resultat, dass der Grad des Alexander Polynoms eines Knoten eine untere Schranke für sein Geschlecht definiert.

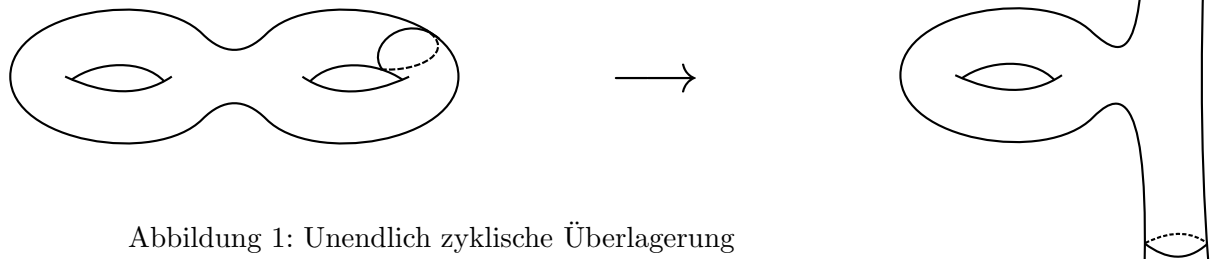


Abbildung 1: Unendlich zyklische Überlagerung

Der wesentliche Gegenstand dieser Arbeit ist die Verallgemeinerung dieser auf Knotenkomplementen definierten Invarianten zu Invarianten auf kompakten orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand, der maximal aus Tori besteht. Für diese Invarianten stellt McMullen [14] fest, dass sich auch die oben erwähnte Abschätzung aus der Knotentheorie verallgemeinern lässt. Diese Arbeit beschäftigt sich mit genau diesem Resultat, welches dieser Arbeit als Haupttheorem 1.1 zugrunde liegt.

Es stellt sich heraus, dass alle betrachteten Invarianten eine enge Beziehung zu unendlich zyklischen Überlagerungen haben. Diese können etwa durch Aufschneiden an einer 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit gewonnen werden, siehe zum Beispiel Abbildung 1. Diese Abbildung ist für die Intuition erheblich — man könnte dem Leser fast raten, vor und nach jedem Kapitel die Abbildung 1 zu betrachten und immer wieder neu zu reflektieren.

Die ersten Kapitel beschäftigen sich mit der Definition, Konstruktion und der algebraischen Natur der Alexander-Norm und Thurston-Norm. Während die Alexander-Norm den Grad des Alexander Polynoms einer Seifert-Fläche (aufgefasst als Lefschetz duale Homologieklass eines Erzeugers der ersten Kohomologie eines Knotenkomplementes) verallgemeinert auf eingebetteten orientierten Flächen auswertet, so soll die Thurston-Norm die minimale Komplexität einer eingebetteten orientierten Fläche bestimmen. Diese beiden Invarianten werden per Poincaré und Lefschetz Dualität als Halbnormen auf $H^1(M) \cong H_2(M, \partial M)$ betrachtet.

Anschließend widmet sich dem Beweis des Haupttheorems ein eigenes Kapitel. Der Beweis ist an die Beweisführung aus [14] angelehnt und beinhaltet eine Reihe Modifikationen und Ergänzungen.

Abschließend beschäftigt sich das letzte Kapitel mit der genaueren Betrachtung des Beweises, beinhaltet aber auch Anwendungen und konkrete Beispiele.

Bei der Alexander-Norm eines Homomorphismus in $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ handelt es sich um den Grad des zugehörigen Alexander Polynoms und die Thurston-Norm weist einem solchen Homomorphismus die minimale Komplexität einer Poincaré-Lefschetz dualen eingebetteten Fläche zu. Ohne die genauere Definition hier zu nennen (siehe hierzu Kapitel ??), soll nun das Theorem vorgestellt werden, dessen Beweis in dieser Arbeit behandelt wird.

Theorem 1.1 (McMullen). *Sei M eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 3. Falls der Rand dieser Mannigfaltigkeit nicht leer ist, so soll er aus einer Kollektion von Tori bestehen. Dann gilt folgende Abschätzung für die Alexander-Norm und die Thurston-Norm $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_T : H^1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ der 3-Mannigfaltigkeit:*

$$\|\phi\|_A \leq \begin{cases} \|\phi\|_T + 1 + b_3(M) & , \text{ falls } b_1(M) \leq 1 \text{ und } \phi : \pi_1(M) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \\ \|\phi\|_T & \end{cases}$$

Entsteht ϕ als Rückziehung einer Faserung $M \rightarrow S^1$, so gilt Gleichheit.

2 Vorbereitungen der benötigten Theorien

2.1 Über noethersche Moduln und Gruppenringe

Im Folgenden sei R stets ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$.

Sei M ein R -Modul. Dann ist M noethersch, falls jeder Untermodul endlich erzeugt ist, insbesondere M selbst. Ein Ring ist noethersch wenn er es als Modul über sich selbst ist.

Lemma 2.1. *Ein Epimorphismus von einem noetherschen R -Modul M in einen weiteren R -Modul L impliziert, dass L noethersch ist.*

Beweis. Jeder Untermodul aus L besitzt ein endliches Erzeugendensystem als Bild endlich vieler Erzeuger des zurückgezogenen Untermoduls. \square

Lemma 2.2. *Für eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$. Dann ist M noethersch genau dann wenn L und N noethersch sind.*

Beweis. Sei M noethersch, so ist es mit Lemma 2.1 auch N . L ist isomorph zum Untermodul $\ker(M \rightarrow N)$. Umgekehrt erhalten wir für jeden Untermodul M' eine kurze exakte Sequenz von Untermoduln mit den entsprechenden Einschränkungen $0 \rightarrow L' \rightarrow M' \rightarrow N' \rightarrow 0$ wobei L' und N' als R -Untermoduln endlich erzeugt, somit auch M' . \square

Sei im Folgenden M noethersch. Dies ist zum Beispiel bei folgender Situation gegeben:

Corollar 2.3. *Sei R noethersch und M endlich erzeugter R -Modul. Dann ist M noethersch.*

Beweis. Mit Lemma 2.2 ist die direkte Summe R^n noethersch und mit Lemma 2.1 ist es M . \square

Lemma 2.4. *M ist über R endlich präsentiert.*

Beweis. M ist als größter Untermodul endlich erzeugt über R also existiert folgende exakte Sequenz:

$$R^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

da R^n aber noethersch ist und Kerne von Homomorphismen Untermoduln sind, kann die Sequenz auf der linken Seite folgendermaßen ergänzt werden:

$$R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

\square

Für eine solche freie Auflösung von M , die also für noethersche Moduln immer existiert, sind alle Relationen durch $\ker(R^n \rightarrow M)$ gegeben. Deswegen nennt man eine darstellende Matrix zur Abbildung f aus $R^m \xrightarrow{f} R^n \twoheadrightarrow M$ auch Präsentationsmatrix. Verschiedene Präsentationsmatrizen unterscheiden sich nur durch die folgenden Operationen, siehe etwa [13, Theorem 6.1]: •Vertauschen von Zeilen oder Spalten •Hinzufügen von Einheitsblöcken (direkte Summe mit der Identität) •Hinzufügen von Nullspalten

•Addieren eines Vielfachen einer Spalte oder Zeile auf eine jeweils andere. Zusammen mit grundlegenden Eigenschaften der Determinante liefert das die Wohldefiniertheit der folgenden Definition:

Definition 2.1. Es sei $R^m \rightarrow R^n \twoheadrightarrow M$ eine endliche Präsentation des R -Moduls M mit einer Präsentationsmatrix $X \in R^{n \times m}$. Definiere das i -te Elementarideal $E_i(M) \subset R$, als das von den Determinanten der $(n-i) \times (n-i)$ -Minoren von X erzeugte Ideal.

Da sich jede Determinante als Linearkombination von den Determinanten der Minoren schreiben lässt, liefert das eine Inklusionsbeziehung der Elementarideale. Für $n-i \leq 0$ und $n-i > \min(m, n)$ definiert man die Elementarideale gemäß der folgenden aufsteigenden Kette (da ohne Einschränkung $m > n$):

$$0 = E_{-1}(A) \subset E_0(A) \subset \cdots \subset E_n(A) = R$$

Beispiel 1. Ist R ein Hauptidealring, so sind die Elementarideale durch den Elementarteilersatz vollständig charakterisiert.

Bemerkung 2.1.1. Das letzte Beispiel verwendet die Ergiebigkeit der Theorie der endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen. Die Elementarideale definieren nach den obigen Überlegungen Invarianten für endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen. Dies ist durch eine Art Nachahmung der ersten Schritte des Elementarteilersatzes motiviert, die nur die endliche Präsentation der Moduln verwendet.

Nun ist es später häufig nötig, Berechnungen über dem Gruppenring durchzuführen. Dafür wollen wir uns nun der Definition des Gruppenrings zuwenden und einige — für Berechnungen essenzielle — grundlegenden Eigenschaften des ganzzahligen Gruppenrings über einer frei abelschen Gruppe feststellen.

Definition 2.2 (Gruppenring). Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Dann ist der *Gruppenring* definiert als die Menge aller endlichen formalen Summen:

$$R[G] = \sum_{g \in G} a_g g, a_g \in \mathbb{Z}, g \in G$$

die durch komponentenweise Addition eine abelsche Gruppe wird und durch die Gruppenverknüpfung und die multiplikative Struktur von R ein Ring mit Eins wird. Die Elemente $g \in G \subset R[G]$ werden als die Gruppenelemente in dem Gruppenring bezeichnet.

Wir werden uns ausschließlich mit ganzzahligen oder rationalen Gruppenringen befassen, also mit $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$.

Bemerkung 2.1.2. Sei also M ein R -Modul mit einer Gruppenwirkung von G . Dann lässt sich M als $R[G]$ -Modul auffassen. Insbesondere werden wir also abelsche Gruppen und \mathbb{Q} -Vektorräume über dem ganzzahligen bzw. rationalen Gruppenring betrachten.

Bemerkung 2.1.3. Da der Gruppenring die multiplikative Struktur von der Gruppenverknüpfung erbt, ist $\mathbb{Z}[G]$ im Allgemeinen nicht unbedingt kommutativ. Mit diesem Problem, das durch nicht-abelsche Gruppen G entsteht, werden wir uns später beschäftigen müssen.

Beispiel 2. Falls G eine unendlich zyklische Gruppe mit Erzeuger t ist, lässt sich der Gruppenring über F als $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, also als Ring der formalen Laurentpolynome in der Variablen t auffassen.

Tatsächlich gilt dies sogar etwas allgemeiner. Dies wollen wir zeigen um Eigenschaften für den ganzzahligen Gruppenring zu entwickeln, die wir aus dem multivariablen Laurenttring ableiten. Für diesen gilt nämlich:

Proposition 2.5. *Der Laurenttring $\mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ ist noethersch.*

Beweis. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist der Polynomring über \mathbb{Z} in endlich vielen Variablen noethersch. Ebenso ist die Lokalisierung eines noetherschen Ringes noethersch, da jedes Ideal in der Lokalisierung Bild eines endlich erzeugten Ideals ist. \square

Da der Laurenttring mit \mathbb{Z} -Koeffizienten kein Hauptidealring ist, ist die vorhergehende Proposition so bedeutend. Die folgende Proposition wird zeigen, dass $\mathbb{Z}[F]$ für einen freien \mathbb{Z} -Modul F auch kein Hauptidealring ist, wir also bemüht sind um eine möglichst vollständige Liste guter Eigenschaften von $\mathbb{Z}[F]$ die wir nutzen können.

Proposition 2.6. *Sei F eine freie abelsche Gruppe, also $F \cong \mathbb{Z}^b$. Dann existiert ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{Z}[F]$ und $\mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_b^{\pm 1}]$. Insbesondere ist $\mathbb{Z}[F]$ faktoriell und noethersch.*

Beweis. Unter Ausnutzung der universellen Eigenschaft des Polynomrings und der Lokalisierung definiert man folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] &\rightarrow \mathbb{Z}[F] \\ X_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

Wenn f_i eine Basis von F darstellt, so erhält man offensichtlich einen Isomorphismus. \square

Um die Situation für spätere Berechnungen angenehmer zu gestalten und überhaupt erst die Definition der Alexander Invarianten zu berechtigen, überzeugt man sich zunächst davon, dass der Alexander Modul tatsächlich endlich erzeugt über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[F]$ ist.

Proposition 2.7. *$A_\phi(M)$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[F]$ -Modul.*

Bemerkung 2.1.4. Eine algebraische Variante des Beweises befindet sich im nachfolgenden Kapitel ??.

Beweis. Da M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit ist, existiert eine endliche CW Struktur, vergleiche [16]. Da es für CW Komplexe gleichbedeutend ist die zelluläre Homologie zu berechnen, reicht es den zellulären Kettenkomplex einer endlichen CW Struktur zu betrachten. Da in diesem alle Kettengruppen frei und endlich erzeugt von den Zellen der CW Struktur sind, folgt dass in dem Kettenkomplex der Überlagerung (mit der vererbten CW-Struktur) alle Kettengruppen als $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln endlich erzeugt sind, denn die Decktransformationen F assoziieren die Erzeuger der Kettengruppen als \mathbb{Z} -Moduln der

Überlagerung, die das gleiche Bild unter der Überlagerungsabbildung haben. Das bedeutet, für jeden freien \mathbb{Z} -Summanden der Kettengruppen der Mannigfaltigkeit erhält man einen freien $\mathbb{Z}[F]$ -Summanden der Kettengruppen der Überlagerung. Wenn jetzt nachgewiesen werden kann, dass das Bilden der Homologie verträglich ist mit dem Bilden der Homologie als Gruppenring Moduln, so wären alle Homologiegruppen der Überlagerung als Quotienten von $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln endlich erzeugt. Aber da die Wirkung von F auf der Homologie durch Diffeomorphismen induziert wird, so ist die Verträglichkeit durch die elementare Tatsache gegeben, dass Abbildungen von Räumen Kettenkomplexabbildungen induzieren, also Verträglichkeit mit den Randoperatoren gegeben ist. \square

2.2 Poincaré und Lefschetz Dualität — eine differentialtopologische Betrachtung

Die Definition der Thurston-Norm in Kapitel [1.refthurston](#) wird uns eine Invariante auf $H^1(M; \mathbb{Z})$ einer glatten Mannigfaltigkeit M^m liefern, die durch Poincaré bzw. Lefschetz Dualität aus einer Invarianten auf $H_{m-1}(M, \partial M; \mathbb{Z})$ hervorgeht. Und tatsächlich werden die folgenden Seiten teilweise in ein wildes Hin- und Herspringen zwischen Homologie und Kohomologie ausarten. Aus diesem Grund sollen hier noch einmal wichtige Grundlagen und Berechnungsmöglichkeiten, die später verwendet werden, erklärt werden.

Zunächst widmen wir uns einigen Konventionen und Identifikationen.

Bemerkung 2.2.1 (Homomorphismen der Abelianisierung). Es werden stillschweigend natürliche Identifikationen $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(M); \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(M); \mathbb{Z})$ verwendet. Die erste natürliche Identifikation liefert das universelle Koeffiziententheorem. Auch wenn die erhaltende Sequenz im Allgemeinen nicht natürlich zerfällt, so ist dies im Fall der ersten Kohomologie offensichtlich. Die zweite folgt, da ein Homomorphismus $\phi : H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ gleichbedeutend mit einem Homomorphismus $\hat{\phi} : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist. Dies sieht man wie folgt ein: das Hurewicz Theorem besagt, dass die natürliche Abbildung $\pi_1(M) \rightarrow H_1(M)$, die durch Auffassen von Schleifen als singuläre 1-Zykel entsteht, die Abelianisierungsabbildung ist. Diese besitzt die universelle Eigenschaft der Quotientenabbildung zu dem Normalteiler $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$. Da \mathbb{Z} abelsch ist, folgt $[\pi_1(M), \pi_1(M)] \subset \ker \hat{\phi}$. Also faktorisiert $\hat{\phi}$ über eine eindeutige Abbildung $H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$. Mit anderen Worten: Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & \nearrow \phi & \\ H_1(M) & & \end{array}$$

Dies liefert die eins-zu-eins Beziehung, da ϕ nach dem Diagramm offensichtlich ein eindeutiges Element in $\text{Hom}(\pi_1(M); \mathbb{Z})$ definiert.

Konvention. In dieser Arbeit bezeichne der Kern einer Klasse $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ durchweg den Kern der mit ϕ identifizierten Abbildung auf der Fundamentalgruppe.

Bemerkung 2.2.2 (Weitere Identifikationen). Sei N eine glatte orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit CW-Struktur). Bekanntlicherweise gilt:

$$H_{n-1}(N, \partial N; \mathbb{Z}) \cong H^1(N; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(N), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(N), \mathbb{Z}) \cong [N, S^1]$$

wobei der

1. -te Isomorphismus bei $\partial N = \emptyset$ nach Poincaré und sonst Lefschetz Dualität,
2. -te Isomorphismus gilt, da das universelle Koeffiziententheorem eine exakte Sequenz liefert in der diese beiden Terme auftauchen und weiter nur $\text{Ext}(H_0(N), \mathbb{Z}) = 0$,
3. -te Isomorphismus gilt, da nach Hurewicz die Abbildung $\pi_1(N) \rightarrow H_1(N)$ die Abelianisierung ist (siehe Bemerkung 2.2.1),
4. -te Isomorphismus gilt, indem man zeigt, dass jede Abbildung auf dem 1-Skelett $X^1 \subset N \rightarrow S^1$ auf N fortgesetzt werden kann. Da das 1-Skelett die Fundamentalgruppe (oder Homologie) erzeugt, also die Inklusion eine surjektive Abbildung $i_* : \pi_1(X^1) \twoheadrightarrow \pi_1(N)$ induziert, lässt sich auf diese Weise jeder Homomorphismus $\pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$ auf den Erzeugern aus dem 1-Skelett (genauer möchte man, dass diese Abbildung auf einem maximalen Baum konstant ist) definieren und fortsetzen.

Bemerkung 2.2.3 (Untermannigfaltigkeiten als Homologieklassen). Es sei S^s eine s -dimensionale orientierte kompakte Mannigfaltigkeit. Die Orientierung liefert eine eindeutige Fundamentalklasse $[S] \in H_s(S)$ falls S geschlossen ist und sonst $[S, \partial S] \in H_s(S, \partial S)$. Es sei $h : (S^s, \partial S) \hookrightarrow (N^n, \partial N)$ eine Einbettung. Dann definiert diese Einbettung eine Homologieklass in $H_s(N, \partial N)$ als das Bild der eindeutigen Fundamentalklasse von S unter der induzierten Abbildung $H_s(h)$. Für eine orientierbare kompakte Untermannigfaltigkeit $(S, \partial S) \subset (N, \partial N)$ liefert die Inklusion eine Einbettung und für eine gewählte Orientierung erhält man also eine Homologieklass $[S]$ oder $[S, \partial S]$ in $H_s(N, \partial N)$.

Theorem 2.8. *Sei $f : N^n \rightarrow K^m$ eine stetige Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten. Dann lässt sich f beliebig nah durch glatte Abbildungen approximieren (wie die Güte der Approximation genau gemessen wird ist hier von keiner Bedeutung), welche homotop zu f sind.*

Theorem 2.9 (Sard und Satz vom regulären Wert). *Sei $f : N^n \rightarrow K^m$ eine glatte Abbildung. Dann liegen die regulären Werte von f dicht in K . Das Urbild eines regulären Wertes ist eine abgeschlossene glatte orientierte eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeit in K der Kodimension m . Ein regulärer Wert ist ein Punkt aus K , bei dessen Urbild f an jedem Punkt einen Epimorphismus auf den Tangentialräumen definiert.*

Theorem 2.10 (Thom). *Sei $f : N \rightarrow S^1$ eine glatte Abbildung. Jedes Urbild eines regulären Wertes definiert nach obigem Theorem und der Bemerkung 2.2.3 ein Element in $H_{n-1}(N, \partial N; \mathbb{Z})$. Diese ist Poincaré beziehungsweise Lefschetz dual zu $[f] \in H^1(N; \mathbb{Z})$.*

Alle diese Aussagen sind bekannte elementare Aussagen der Differentialtopologie und können etwa in [12] oder mit elementaren Methoden in [11] (bis auf 2.10) nachgelesen werden.

Das Zusammentragen aller Ergebnisse bedeutet also: Jeder Homomorphismus $\phi \in H^1(N; \mathbb{Z})$ definiert ein eindeutiges Element in $[N, S^1]$, und umgekehrt liefert jede Abbildung $N \rightarrow S^1$ einen induzierten Homomorphismus der Homologiegruppen. Die Differentialtopologie liefert nun die restlichen Schritte. Jede Homotopieklasse aus $[N, S^1]$ enthält einen glatten Repräsentanten. Für diesen existiert ein regulärer Wert in S^1 . Jedes Urbild eines solchen regulären Wertes ist dann eine 1-kodimensionale orientierte Mannigfaltigkeit (mit Rand, wenn überhaupt, im Rand von N eigentlich eingebettet), welche als Homologieklasse dual zu ϕ ist.

2.3 Konstruktionen

Als explizite Anwendung des letzten Kapitels leiten wir in diesem Kapitel Konstruktionen her, die gewisse Informationen von 1-kodimensionalen Mannigfaltigkeiten beinhalten.

Lemma 2.11. *Wenn M eine glatte orientierte n -Mannigfaltigkeit ist und $N \subset M$ eine glatte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, dann korrespondieren die Orientierungen von N bijektiv mit den Orientierungen von dem Normalenbündel $\nu(N; M)$ in M .*

Beweis. Das Tangentialbündel von N kann als Untervektorraumbündel von TM aufgefasst werden; es ist unabhängig von der Einbettung. Falls N nicht orientierbar ist, so ist es auch $\nu(N; M)$ nicht und umgekehrt. Sei also N orientierbar, dann gilt für alle $x \in N$, dass die Faser $TN_x \oplus \nu(N; M)_x = TM_x$ die Orientierung von M trägt, also m_1, \dots, m_n eine repräsentierende Basis der eindeutigen Orientierung ist. Also liefert die Lineare Algebra aus einer Orientierung von N , definiert durch die Basis des Tangentialraumes n_1, \dots, n_k eine eindeutige Orientierung von $\nu(N; M)_x$, repräsentiert durch die Basis ν_1, \dots, ν_{n-k} , sodass die folgenden Orientierungen übereinstimmen: $[m_1, \dots, m_n] = [n_1, \dots, n_k, \nu_1, \dots, \nu_{n-k}]$ \square

Definition 2.3. Eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 $N \subset M$ heißt zweiseitig, falls eine glatte Einbettung $N \times (-\epsilon, \epsilon) \hookrightarrow M$ existiert, die auf $N \times \{0\}$ mit der Inklusion von N übereinstimmt. Eine solche Einbettung heißt auch zweiseitiger Kragen.

Bemerkung 2.3.1. Offensichtlich ist die Zweiseitigkeit einer 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit gleichbedeutend mit einer Orientierung, da $N \times (-\epsilon, \epsilon)$ diffeomorph zu $\nu(N; M)$ ist. Falls wir im Folgenden von einer orientierten 1-kodimensionalen Mannigfaltigkeit N in einer orientierten Mannigfaltigkeit M reden, so soll mit ihrem zweiseitigen Kragen stets ein solcher gemeint sein, unter dessen Urbild jeder Repräsentant $\nu \in [\nu]$ einer Faser im Normalenbündel, der mit der Orientierung von N in dieser Faser die Orientierung von M ergibt, in $N \times (0, \epsilon)$ liegt.

Da wir im Folgenden nur 3-Mannigfaltigkeiten betrachten, so gestatten wir jetzt schon die Bequemlichkeit uns darauf zu reduzieren. Die 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeiten sind also diffeomorph zu Flächen.

Zu einer gegebenen Homologieklassse $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ finden wir nach Kapitel 2.2, sowohl den eindeutigen Homomorphismus $\phi : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ als auch die glatte Abbildung $f : M \rightarrow S^1$ mit $\pi_1(f) = \phi$. Außerdem finden wir mit Kapitel 2.2 eine zu $\hat{\phi}$ duale orientierte Untermannigfaltigkeit S als Urbild von f . Mit den folgenden Konstruktionen soll bewiesen werden, dass jede duale orientierte eingebettete Fläche $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ als Urbild eines regulären Wertes darstellbar ist. Weiter wollen wir häufig die zu $(\ker)\phi$ gehörige Überlagerung betrachten. Wir werden ein Verfahren entwickeln, in welchem wir durch Aufschneiden und Verkleben an S diese Überlagerung erhalten. Genauer wollen wir zeigen: Sowohl durch Aufschneiden an S als auch durch Zurückziehen der universellen Überlagerung von S^1 entlang f erhalten wir die Überlagerung zu dem Normalteiler der Fundamentalgruppe $\ker \phi$.

Konstruktion 1 (Aufschneiden an einer Fläche). Aus der Überlagerungstheorie ist bekannt, dass zu jeder normalen Untergruppe der Fundamentalgruppe eines hinreichend gut zusammenhängendem Hausdorffraum (insbesondere Mannigfaltigkeiten), auch eine normale Überlagerung existiert, die bis auf Überlagerungsisomorphie eindeutig ist, siehe [10, Chapter 1.3]. Nun definiert aber ein Element $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ nach obigen Überlegungen den Normalteiler $\ker \phi \subset \pi_1(M)$. In diesem Sinne nennen wir die Überlagerung zu ϕ fortan M_ϕ . Für spätere Zwecke, wollen wir die dualen Homologieklassen von ϕ mit $b_1(\ker \phi) = b_1(M_\phi)$ vergleichen. Da jede duale Homologieklassse nach Kapitel 2.2 eine Untermannigfaltigkeit als Repräsentanten besitzt, sei also $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ eine eingebettete orientierte Fläche dual zu ϕ . Da diese Kodimension 1 und eine Orientierung hat, ist sie nach Bemerkung 2.3.1 auch zweiseitig. Fixiere also einen zweiseitigen Kragen $h : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^1$. Das bedeutet, dass die 3-Mannigfaltigkeit an S „aufgeschnitten“ werden kann (siehe etwa [2, Kapitel 4.2]), wobei das Aufschneiden bedeutet, das Komplement der Fläche zu betrachten (das Resultat ist offensichtlich eine Mannigfaltigkeit, jedoch können Eigenschaften wie Kompaktheit oder Randbedingungen entfallen). Will man nun die durch Aufschneiden gewonnene Kopien $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, $M_i \cong M - S$ wieder verkleben, erweist sich die Zweiseitigkeit der Fläche als günstig sogar notwendig (sonst würde nur *eine* Kopie von S als Rand entstehen). Der fixierte zweiseitige Kragen liefert nämlich durch $h(S, (-\epsilon, 0))$ und $h(S, (0, \epsilon))$ offene Mengen M_i^- und M_i^+ in den M_i . Durch den strukturerhaltenden Diffeomorphismus h auf sein Bild, können nun M_i und M_{i+1} jeweils entlang M_i^+ und M_{i+1}^- verklebt werden — genauer: h liefert eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung

$$\cdots \sqcup M_{i-1} \sqcup (S \times (-\epsilon, \epsilon)) \sqcup M_i \sqcup (S \times (-\epsilon, \epsilon)) \sqcup M_{i+1} \sqcup \cdots ,$$

sodass der Quotient eine unendlich zyklische Überlagerung mit der offensichtlichen Projektion bildet. Da entlang offener Mengen verklebt wird, also durch die „Überlappungen“, ist es möglich den gewonnenen Quotienten mit einer differenzierbaren Struktur zu versehen, so dass die Inklusionen der M_i glatte Einbettungen und somit Untermannigfaltigkeiten sind.

¹Diese Zweiseitigkeit sei natürlich stets mit der Kompatibilität mit der induzierten Orientierung des Normalenbündels gewählt. Dies wurde auch in Bemerkung 2.3.1 verlangt und bedeutet auch Kompatibilität mit der Orientierung.

Als weiteren Vorteil dieser expliziten Konstruktion, sieht man explizit die Decktransformationsgruppe. Erzeugt von t ist sie über $t \mapsto 1$ zu \mathbb{Z} isomorph. Unter diesem Isomorphismus entspricht $n \in \mathbb{Z}$ einer Translation aller M_i um n . Es bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Überlagerung auch *die* zu $[S]$ gehörige Überlagerung ist, die in dem obigen Sinne dem dualen ϕ entspricht (da S immer noch die gewählte Orientierung bzw. den gewählten zweiseitigen Kragen trägt). Dies sieht man zum Beispiel ein, indem man sich unter dem Isomorphismus $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$ einen glatten Repräsentanten des Bildes von ϕ aussucht. Natürlich existiert so einer nach den Bemerkungen in 2.2 immer, jedoch soll dieser für den gewünschten Nachweis explizit S als orientiertes Urbild eines regulären Wertes ergeben. Dafür konstruiert man sich aus dem fixierten zweiseitigen Kragen eine Abbildung $f : M \rightarrow S^1$, die $S \times 0$ auf $p \in S^1$ abbildet, $M - S \times (-\epsilon, \epsilon)$ konstant auf den antipodalen Punkt von p abbildet und auf $S \times (-\epsilon, \epsilon)$ gemäß der Projektion auf den zweiten Faktor fortgesetzt wird. Bezüglich dieser glatt konstruierten Abbildung f ist der Wert p regulär und $f^{-1}p = S$ mit der richtigen Orientierung ausgestattet. Durch paralleles Aufschneiden von M an S , und S^1 an p (analog wie oben nur 2 Dimensionen tiefer) erhält man folgendes kommutatives Diagramm von Überlagerungen:

$$\begin{array}{ccc} M_\phi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

Dieses Diagramm ist aber nun ein Pullback Diagramm von glatten Faserbündeln. Also ist die Diffeomorphieklasse von M_ϕ eindeutig.

Wir können festhalten:

Corollar 2.12. *Die unendlich zyklische Überlagerung, die durch Aufschneiden und Verkleben an einer zu ϕ dualen Fläche entsteht, entspricht der normalen Untergruppe $\ker \phi$.*

Corollar 2.13. *Jede zu ϕ duale Fläche kann als orientiertes Urbild eines regulären Wertes einer glatten Abbildung $M \rightarrow S^1$ dargestellt werden, mit $H_1(M \rightarrow S^1) = \phi$.*

Mit einer zu ϕ dualen Fläche ist eine eigentlich eingebettete orientierte 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeit gemeint.

Konstruktion 2 (Graph einer orientierten 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit). Sei S ein beliebiger zu $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ eigentlich eingebetteter, orientierter Repräsentant. Wir haben gesehen, dass mit obiger Konstruktion eine Abbildung $f : M \rightarrow S^1$ entsteht mit $f^{-1}p = S$. Diese Abbildung soll in dieser Konstruktion über einen Graphen faktorisiert werden.

Bezeichne $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n$ und $M - S = M_1 \sqcup \dots \sqcup M_m$ die Zusammenhangskomponenten von S bzw. $M - S$. Betrachte nun den gerichteten Graphen G , dessen Knoten bijektiv den Komponenten M_i entsprechen und dessen Kanten aus den Komponenten S_i mit ihrer Orientierung hervorgehen, also ein Graph mit m Knoten und n Kanten, wobei eine Kante von einem Knoten zu einem anderen verläuft, wenn ihre assoziierten

Komponenten M_i, M_j durch das entsprechende Flächenstück von S getrennt werden, sodass die Komponenten das zweiseitige Flächenstück an der negativen beziehungsweise positiven Seite berühren, je nachdem ob die Kante vom assoziierten Knoten aus oder eingeht.

Mit genau diesen zweiseitigen Umgebungen der Flächenkomponenten ist es möglich, ähnlich wie oben eine Abbildung $M \rightarrow G$ zu definieren, welche die Assoziierungen respektiert. Dafür betrachte man den zweiseitigen Kragen auf den Komponenten von S :

$$\sqcup(S_i \times (-\epsilon, \epsilon)) \xrightarrow{=} S \times (-\epsilon, \epsilon) \hookrightarrow M$$

Dann existiert analog zur obigen Konstruktion die Quotientenabbildung $q : M \rightarrow G$ auf den Graph, durch Kollabieren der $M_i \cap (M - S \times (-\epsilon, \epsilon))$ auf ihre Knoten und Projektion von $(-\epsilon, \epsilon)$ auf das Innere der Kanten des Graphen. Man betrachte außerdem $G \rightarrow S^1$ die Abbildung die jede Kante entsprechend ihrer Richtung, also orientierungserhaltend einmal um die Sphäre $S^1 = I/\partial I$ abbildet, sodass die Knoten nach $[\partial I]$ abgebildet werden. Außerdem seien die Mittelpunkte der Kanten das Urbild von dem antipodalen Punkt von $[I/\partial I]$ der genau $p \in S^1$ heißt. Bezüglich der Komposition der beiden Abbildungen $M \rightarrow S^1$, ist nun ϕ das Bild des Erzeugers von $H^1(S^1)$ unter der Rückziehung auf der Kohomologie, da $M \rightarrow S^1$ eine zu S duale Kohomologieklass definiert (da $S = (M \rightarrow S^1)^{-1}p$). Sei f nach wie vor die Abbildung aus der letzten Konstruktion. Wir erhalten:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ M & \xrightarrow{\quad} G & \xrightarrow{\quad} S^1 \end{array} \quad (1)$$

Da M zusammenhängend ist, ist es auch G .

Im Folgenden wollen wir häufig den Spezialfall betrachten, dass $\phi : H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ surjektiv ist.

Definition 2.4. Ein solches $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ heißt primitiv.

2.4 Normen und Halbnormen auf \mathbb{Z} -Moduln und ihre Fortsetzungen

Ziel der folgenden Kapitel wird es sein, einer Diffeomorphieklasse von Mannigfaltigkeiten eine Halbnorm und somit eine Invariante zuzuordnen. Genauer gesagt werden es sogar mehrere Halbnormen sein. Die Halbnormen werden wir zunächst auf der ersten Kohomologie $H^1(M; \mathbb{Z})$ definieren.

Definition 2.5. Eine ganzzahlige Halbnorm ist eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ die Skalarmultiplikativität und Subadditivität erfüllt. Also für alle $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $v, w \in \mathbb{Z}^n$ soll $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ und die Dreiecksungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ gelten.

Es folgt natürlich aus der Skalarmultiplikativität, dass die 0 trivial von der Halbnorm ausgewertet wird, da $\|0\| = 0\|0\|$. Gilt auch die Umkehrung, also $\|v\| = 0, v \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow v = 0$, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine ganzzahlige Norm. Analog seien rationale (Halb-)Normen und reelle (Halb-)Normen definiert.

Lemma 2.14. *Eine ganzzahlige Halbnorm lässt sich auf eine rationale Halbnorm fortsetzen. Eine ganzzahlige oder rationale Halbnorm lässt sich auf eine reelle Halbnorm fortsetzen. Das gleiche gilt für Normen.*

Beweis. Will man $\|\cdot\| : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ rational fortsetzen so bemerkt man, dass die Einbettung $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$ die Norm bereits durch die geforderte Skalarmultiplikativität fortgesetzt wird. Sobald man einen Wert für einen Punkt auf einem 1-dimensionalen Unterraum hat, so hat man ihn bereits für den ganzen Unterraum. Jede Gerade durch den Ursprung in \mathbb{Q}^n schneidet einen und somit unendlich viele Gitterpunkte: Für jedes $q \in \mathbb{Q}^n$ ist bereits $aq \in \mathbb{Z}^n$ für ein großes $a \in \mathbb{Z}$. Diese lineare Fortsetzung ist offensichtlich eine Halbnorm sogar eine Norm, falls $\|\cdot\|$ es auf \mathbb{Z}^n war.

Sei nun $\|\cdot\| : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ eine Halbnorm. Dann ist diese insbesondere eine konvexe Funktion, also auf jedem Kompaktum Lipschitz-stetig und somit auf jedem Kompaktum $K \cap \mathbb{Q}^n$, $K \subset \mathbb{R}^n$ in eindeutiger Weise stetig auf K fortsetzbar — es folgt die Existenz einer reellen Fortsetzung. \square

Bemerkung 2.4.1 (Duale Vektorraumhalbnorm). Eine (Halb-)Norm auf einem Vektorraum, liefert stets eine (Halb-)Norm auf seinem Dualraum. Diese ist für einen Vektorraum $(V, |\cdot|)$ auf dem Dualraum $(V^*, \|\cdot\|)$ definiert durch:

$$\|\alpha\| = \sup_{\{v \in V, |v|=1\}} |\alpha v|$$

Entsprechend lässt sich eine Halbnorm auf $H^1(M; \mathbb{R})$ auf $H_1(M; \mathbb{R})$ durch den natürlichen Isomorphismus auf den Bidualraum definieren. Weiter lässt sich eine solche Halbnorm der ersten Kohomologie bei kompakten orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mittels der Dualitätssätze auf $H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ übertragen, die wiederum durch Vektorraumdualität eine Halbnorm für $H^2(M, \partial M; \mathbb{R})$ liefert.

3 Die Alexander-Invarianten

3.1 Topologische Definitionen

hi

3.2 Algebraische Definitionen

3.3 Rationale Alexander-Invarianten

3.4 Eigenschaften der Alexander-Polynome

4 Die Thurston-Norm

4.1 Eigenschaften der Thurston-Norm

4.2 $\|\cdot\|_T$ -minimierende Flächen

5 Beweis des Theorems

6 Folgerungen, Bemerkungen und Beispiele

Nun haben die letzten Seiten viele Ergebnisse gebracht, die in diesem Kapitel reflektiert werden sollen. Dies führt etwa zu weiterführenden Überlegungen zum Beweis des Theorems, als auch abschließend zu etwas leichterem Kost wie Berechnungen im Falle einiger Beispiele.

6.1 Zu der Thurston-Norm bei Überlagerungen mit unendlich großer Bettizahl

Wie oben bereits vorgeschlagen, kann man nun die Frage stellen, welche Anforderungen man an eine Thurston-minimierende Fläche stellen darf falls $b_1(\ker \phi) = \infty$ — also inwieweit lässt sich Lemma ?? verallgemeinern? Intuitiv würde man einer unendlich zyklischen Überlagerung schnell die Fähigkeit absprechen, endlich erzeugte Homologiegruppen (über \mathbb{Z}) zu haben, sind diese Voraussetzungen vielleicht zu restriktiv? Die gute Nachricht ist, dass obiger Beweis nahezu problemlos übertragen werden kann, wenn man nur die endliche Erzeugbarkeit von $\ker \phi$ als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Modul fordert. Ob oder wann dies sinnvoll ist, soll nun diskutiert werden, anhand von Überlegungen zu nicht endlich erzeugtem $\ker \phi$.

Die folgende Proposition kann als Verallgemeinerung der Formel $b_1(\ker \phi) = \text{Grad } \Delta_\phi$ aus Corollar ?? gesehen werden:

Proposition 6.1. *Falls $H_1(M_\phi)$ endlich erzeugt über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ ist (dies ist nach Proposition 2.7 für jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit wahr), nicht aber als abelsche Gruppe, so verschwindet das Alexander Polynom und die Alexander Norm.*

Beweis. Die einzige Möglichkeit, dass $H_1(M_\phi; \mathbb{Z})$ über $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ im Gegensatz zu \mathbb{Z} endlich erzeugt ist, besteht darin, dass die Familie $\{t_*^k x, k \in \mathbb{Z}\}$ in $H_1(M_\phi)$ linear unabhängig über \mathbb{Z} ist, wobei t ein Erzeuger der Decktransformationen ist. Also ist $(x) \subset H_1(M_\phi)$ ein freier Anteil des $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Moduls. Ohne Einschränkung sieht eine Präsentation von $H_1(M_\phi)$ über dem Gruppenring über \mathbb{Z} folgendermaßen aus:

$$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow H_1(M_\phi) \longrightarrow 0$$

Somit berechnet sich das Elementarideal zu $E_0(M_\phi) = (\det 0 \det X) = (0)$. □

Man sieht also, dass der Fall $b_1(\ker \phi) = \infty$ ein eher triviales Beispiel zur Verifizierung der Abschätzung aus Theorem 1.1 darstellt, also scheinbar uninteressant ist. Jedoch erschwert das die Situation zur Berechnung der Thurston-Norm, da die untere Schranke entfällt. Mit der folgenden Proposition soll eine möglichst hohe untere Schranke für das Geschlecht einer Thurston-minimalen zusammenhängenden Fläche für allgemeine $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ angegeben werden:

Proposition 6.2. *Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit wie oben und $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ primitiv. Dann ist $H_1(M_\phi)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul, wobei t ein Erzeuger der*

Decktransformationen ist. Nun existiert eine eingebettete orientierbare Fläche $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$, die Folgendes erfüllt:

- $[S] = \phi$
- $\chi_-(S) = \|\phi\|_T$
- S ist zusammenhängend
- Zerlege $H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$ als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Modul nach dem Klassifikationssatz von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen in einen freien und Torsionsanteil. Dann ist dies auch eine direkte Summe von \mathbb{Q} -Vektorräumen. Dann soll:

$$b_1(S) \geq \text{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q})) + \dim(H_1(M_\phi; \mathbb{Q})/\mathcal{F}) = \text{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(\mathcal{F}) + \dim \mathcal{T}$$

Beweis. Man wähle unter den eingebetteten Flächen, welche die ersten beiden Eigenschaften erfüllen, also die Thurston-Norm minimieren, eine Fläche aus, deren Anzahl an Zusammenhangskomponenten möglichst gering ist. Mit der gleichen Konstruktion des Graphen wie im Beweis des Lemmas ?? argumentiert man, dass S zusammenhängend ist.

Da $\mathcal{F} \subset H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ als Modul über dem Ring der rationalen Laurentpolynome endlich erzeugt ist, erzeugt ein kompakter Teilraum der Überlagerung \mathcal{F} als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Modul. Mit diesem Argument folgt wie im Beweis des Lemmas ??, dass $b_1(S) \geq \text{Rang}(\mathcal{F})$.

Da $\mathcal{T} \subset H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ nun endlich erzeugt als Vektorraum ist, folgt mit dem Kompaktheitsargument, dass auch hier S diesen Vektorraum erzeugt, also $b_1(S) \geq \dim \mathcal{T}$.

\mathcal{F} und \mathcal{T} sind invariant bezüglich der Decktransformationen, als direkte Summanden über dem rationalen Gruppenring der Decktransformationen. Das erlaubt uns Repräsentanten $f_1, \dots, f_{\text{Rang}(\mathcal{F})}, t_1, \dots, t_{\dim \mathcal{T}}$ zu wählen, die Basis eines $\text{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(\mathcal{F}) + \dim \mathcal{T}$ -dimensionalen \mathbb{Q} -Vektorraums sind und die f_i erzeugen \mathcal{F} als Gruppenringmodul. Offensichtlich ist dieser Raum *nicht* t_* -invariant, genauer: dieser Vektorraum ist eine direkte Summe aus einem maximalen t_* -invarianten und einem nicht- t_* -invarianten Raum. Allerdings folgt nun aus den obigen Überlegungen, dass die f_i so gewählt werden können, dass die Inklusion $S \hookrightarrow M_\phi$ auf der ersten Homologie mit \mathbb{Q} -Koeffizienten, eine lineare Abbildung induziert, deren Bild $\langle f_1, \dots, f_{\text{Rang}(\mathcal{F})}, t_1, \dots, t_{\dim \mathcal{T}} \rangle$ enthält. \square

Bemerkung 6.1.1. Leider erkennt man, dass Lemma ?? nicht direktes Corollar dieser Proposition ist, da im letzten Beweis $b_2(S) = b_3(M)$ nicht gezeigt werden kann. Ist $b_2(S) = 0$ (da S zusammenhängend, ist $b_2 \in \{0, 1\}$), so folgt $\partial S \neq \emptyset$ und somit $\partial M \neq \emptyset$, also Gleichheit $b_2(S) = b_3(M)$. Ist allerdings $b_1(S) = 1$, also S eine geschlossene Fläche, so folgt *nicht* zwangsweise, dass M geschlossen ist:

Beispiel 3. Man betrachte etwa den 3-dimensionalen Torus $M = T = S^1 \times S^1 \times S^1$ mit $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^3 \cong \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}) \cong H^1(M; \mathbb{Z})$ nach dem universellen Koeffiziententheorem und der Produktverträglichkeit der Fundamentalgruppe, sowie Hurewicz. Nun betrachte man eine Fläche die dual zu einem der kanonischen Erzeuger der Fundamentalgruppe ist, am einfachsten wäre zum Beispiel $S = * \times S^1 \times S^1$ mit der zugehörigen

durch „Aufschneiden und Verkleben“ (vergleiche Konstruktion 1, Kapitel 2.3) gewonnenen Überlagerung $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$ die homologisch endlich erzeugt ist. Sicher ist es möglich einen glatt eingebetteten 2-Volltorus $U \cong S^1 \times D$ aus dem Komplement von der betrachteten Fläche S in M zu finden. Betrachtet man nun die Mannigfaltigkeit $N = M - \mathring{U}$, so erhält man eine glatte orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand $(N, \partial N) = (M - \mathring{U}, \partial U)$, die auch sonst alle Voraussetzungen der vorhergehenden Proposition erfüllt. Da U zu S durchschnittsleer gewählt wurde, ist $[S]$ sicherlich eine nicht-triviale Homologieklassse in $H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$. Nun ist die durch Aufschneiden und Verkleben an S gewonnene Überlagerung über dem Gruppenring endlich erzeugt, aber $b_2(S) = 1 \neq 0 = b_3(N)$. Man vergleiche auch hier wieder das Geschehen mit Abbildung 1, die eine unendlich zyklische Überlagerung zeigt, deren erste Bettizahl unendlich ist. Das liegt auch hier daran, dass die 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeit, an derer aufgeschnitten wird, einen erzeugenden freien Teil der Homologie mit 0 als Kohomologieklassse auswertet.

6.2 Faserungen

In diesem Abschnitt, wollen wir uns mit Faserungen über dem Kreis beschäftigen.

Beispiel 4. Sei M eine Faserbündel $M \rightarrow S^1$ über dem Kreis. Da die Entnahme eines Punktes aus dem Kreis S^1 einen zusammenziehbaren Raum, also ein Produkt mit der Faser liefert, entsteht eine solche Faserung also immer folgendermaßen: Es gibt einen Diffeomorphismus einer zusammenhängenden Fläche $\varphi : S \times 0 \rightarrow S \times 1$, so dass M dem Quotienten $S \times I / \phi$ entspricht. Der Kontext ist also folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & I/\partial I = S^1 \\ \downarrow & \nearrow p_2 & \\ S \times I / \varphi & & \end{array}$$

In diesem Fall definiert die Homotopieklasse der Faserung $M \rightarrow S^1$ eine eindeutige Kohomologieklassse $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$. Die Überlagerung M_ϕ kann wieder entweder als Rückziehung von $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ oder durch Aufschneiden an S gewonnen werden — in beiden Fällen ist leicht ersichtlich, dass $M_\phi \cong S \times \mathbb{R}$ ist (für das Aufschneiden an S , benötigt man das $[S] = \phi$, dies gilt aber da jedes Urbild von einem Punkt unter f diffeomorph zur Fläche ist, insbesondere die der regulären Werte, die nach Sard existieren — faktisch ist natürlich jeder Wert von f regulär, dies folgt zum Beispiel aus der Beschreibung von f durch p_2). Also hat M_ϕ den Homotopietyp der Fläche, dementsprechend berechnen sich die Homotopieinvarianten von M_ϕ . Insbesondere ergibt sich $b_1(\ker \phi) = b_1(M_\phi) = b_1(S)$, wodurch sich mit Lemma ?? ergibt (da $b_0(S) = 1$), dass die duale Fläche mit Gleichheit der ersten Bettizahlen gewählt werden kann. Da dies die einzige Ungleichung ist, die in dem Theorem verwendet wird, folgt also schon Gleichheit der Normen $\|\phi\|_A = \|\phi\|_T$, falls $b_1(M) > 1$ und $\|\phi\|_A = \|\phi\|_T + 1 + b_3(M)$ sonst.

Falls M nun zusätzlich noch ein Knotenkomplement eines Knotens K ist, gilt $\ker \phi = [\pi_1(M), \pi_1(M)]$. Also folgt aus diesen Überlegungen, dass die Kommutatoruntergruppe

einer Knotengruppe isomorph zu der Fundamentalgruppe einer Seifertfläche des Knotengeschlechts ist, vergleiche zum Beispiel [2, Theorem 4.6].

Es stellt sich die Frage, inwieweit eine Faserung eindeutig ist. Beispielsweise ist im Falle eines Vektorbündels über einem zusammenhängendem Raum, die Dimension eindeutig. Falls aber $b_1(M) > 1$ ist und $\phi, \psi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ Repräsentanten in $[M, S^1]$ haben, die Faserungen sind, folgt dann etwa: $\|\phi\|_T = \|\psi\|_T$? Existieren Diffeomorphismen zwischen Abbildungstori zu Flächen verschiedenen Geschlechts? Tatsächlich sind die Faserungen nicht eindeutig siehe Beispiel 6.

Nun verstehen wir also die Thurston-Norm einer solchen Klasse und somit in diesem Beispiel auch die Alexander-Norm. Möchte man dennoch das Alexander Polynom $\Delta_f = \Delta_\phi$ einer Faserung f berechnen (falls $b_1(M) = 1$ ist $\Delta_f = \Delta_M$), genügt es nach Lemma ??, die lineare Abbildung von Vektorräumen $t_* \in \text{Aut}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q}))$ zu berechnen. Aber da der Erzeuger t der Decktransformationen folgendem kommutativen Diagramm genügen muss:

$$\begin{array}{ccccc}
 & S & \xrightarrow{\cong} & S & \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 M_\phi & \xrightarrow{\cong} & S \times \mathbb{R} & \xrightarrow[\cong]{\hat{t}} & S \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} M_\phi \\
 & \searrow & \searrow & \swarrow & \swarrow \\
 & & S \times I / \varphi & & \\
 & & \downarrow \cong & & \\
 & & M & &
 \end{array}$$

und andererseits t_* von einem Lift der zur Faserung dualen Schleife induziert wird, muss in jedem Fall gelten: $t_* = \hat{t}_* = \varphi$ unter gegebenen Identifikationen mit S in obigem Diagramm. Also berechnet sich das Alexander Polynom Δ_f zu dem charakteristischen Polynom der Abbildung $\varphi_* : H_1(S; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S; \mathbb{Q})$, wobei dieses mit Proposition ?? einen Erzeuger des entsprechend zurückgezogenen Ideals unter der Lokalisierung $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ liefert — das ganzzahlige Alexander Polynom.

Dies liefert die Möglichkeit in diesem Beispiel für Faserungen mit Geschlecht mit $b_1(M) = 1$ das Theorem zu verifizieren ohne es zu nutzen, indem man berechnet:

$$\|\phi\|_A = \text{Grad}(\Delta_\phi) = \text{Grad}(\Delta_f) = \text{Grad} \det(\varphi_* - tI) = g(S) = \chi_-(S) + 2 = \|\phi\|_T + 2$$

Im Falle der trivialen Bündel $D^2 \times S^1$ oder $S^2 \times S^1$ stimmt die zyklische Überlagerung mit der universellen überein und man erhält jeweils $\Delta_\phi = 1$ für ϕ einen Erzeuger der ersten Homologie. Da die Erzeuger für $H_2(D^2 \times S^1, \partial) \cong \mathbb{Z}$ und $H_2(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ sich mit Poincaré Dualität als $[D^2, \partial D^2]$ beziehungsweise $[S^2]$ herausstellen, verschwindet auch die Thurston-Norm. In diesem Fall gilt also keine Gleichheit in Theorem 1.1.

Beispiel 5. Handelt es sich bei M um eine Faserung $M \rightarrow S^1$ mit $b_1(M) = 1$ oder ist $b_1(M) > 1$ und jede Kohomologiekategorie ist repräsentiert durch eine Faserung, so berechnet ist die Thurston-Norm nach Theorem 1.1 bereits vollständig durch die Fundamentalgruppe determiniert, siehe Kapitel ??.

Beispiel 6. Eine wichtige Anwendung der Thurston-Norm und dieser Abschätzung besteht in den sogenannten *fibred faces*, die im Folgenden als gefaserte Seiten bezeichnet werden. Bisher wurden bereits Kohomologieklassen $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ betrachtet, mit einer korrespondierenden Abbildung $M \rightarrow S^1$, die eine Faserung darstellt. Bei solchen herrscht nach dem letzten Beispiel Gleichheit im Theorem 1.1. Diese Klassen werden auch als *gefasert* bezeichnet. Tatsächlich stellt Thurston in [19] fest, dass die Thurston-Norm einem Informationen über diese Eigenschaft liefert. Wie in Bemerkung ?? gezeigt, lässt sich die Thurston-Norm durch Erweiterung der Skalare (Tensorieren mit \mathbb{R}) fortsetzen. Thurston hat in [19] außerdem gezeigt, dass der Einheitsball dieser Norm auf $H^1(M; \mathbb{R})/V$ (wobei V ein maximaler degenerierter Unterraum ist) ein beschränktes konvexes Polytop ist, also die konvexe Hülle einer endlichen Anzahl an Elementen. Eine berandende Seite dieses Polytops nennt man gefaserte Seite, falls alle Elemente $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ die auf einem vom Ursprung ausgehendem Strahl liegen, der das Innere der Seite trifft, gefasert sind. Mit anderen Worten ist eine Seite genau dann gefasert, wenn jedes $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ gefasert ist, das in einem Kegel mit dem Inneren der Seite als Grundfläche und dem Ursprung als Spitze liegt. Natürlich ist das Polytop symmetrisch ($\|\phi\|_T = \|\phi\|_T$) und die gefaserten Seiten treten auch in Paaren auf — eine Faserung $M \rightarrow S^1$ liefert mit einer orientierungsumkehrenden Reflektion τ das Inverse $M \rightarrow S^1 \xrightarrow{\tau} S^1$. Man sagt, gefaserte Klassen ϕ, ψ liegen in *wirklich verschiedenen* gefaserten Kegeln, falls diese bis auf Symmetrie verschieden sind.

6.3 Knoten und Verschlingungen

Bemerkung 6.3.1. Zwei Normen abzuschätzen ist gleichbedeutend dazu, eine Inklusionsbeziehung ihrer Einheitsbälle festzustellen.

Beispiel 7 (Verschlingungen). Thurston liefert in [19] einige Beispiele in Form von Verschlingungskomplementen, als er seine Ergebnisse über die Existenz der Thurston-Norm und ihren Einheitsball veröffentlicht. Eine Verschlingung bezeichnet eine gemeinsame disjunkte Einbettung von mehreren Knoten, also eine glatte Einbettung $L : \sqcup_{i=1}^m S^1 \rightarrow S^3$. Als M_L bezeichnen wir wieder die kompakte 3-Mannigfaltigkeit, die aus Entfernen einer offenen Tubenumgebung hervorgeht. Wählt man auf $\sqcup S^1$ eine Standardorientierung, erhält man wie im Fall eines Knotenkomplements, kanonische Erzeuger von $H^1(M_L)$: Die Orientierung einer Komponente liefert (nach festgelegter Konvention) einen homologisch eindeutigen orientierten Meridian, das ist eine Schleife die in $M_L \xrightarrow{\cong} M - \text{Im}(L)$ homotop zu einer Einbettung einer Einheitssphäre einer Faser unter einer Tubenabbildung ist (es lässt sich in einem trivialen Bündel leicht von einer Einheitssphäre sprechen). Diese liefern kanonische Erzeuger der ersten Homologie $H_1(M_L) \cong \mathbb{Z}^m$, die kanonische Basis des Dualraums $l_1, \dots, l_m \in H^1(M_L) \cong H_1(M_L)$ geht also natürlich aus den Komponenten der Verschlingung L_1, \dots, L_m hervor. Außerdem liefert dies eine kanonische Identifikation mit dem Laurenttring $\mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[l_1^{\pm 1}, \dots, l_m^{\pm 1}]$ (analog wie im Knotenfall). Um also beispielsweise den Einheitsball der Thurston-Norm zu beschreiben, lassen sich ebenfalls die Koordinaten $l_i = l_i \otimes 1 \in H^1(M) \otimes \mathbb{R} = H^1(M; \mathbb{R})$ verwenden. Falls die Komponenten wirklich verschlungen sind, also keine Komponente eine Scheibe in M_L berandet und

paarweise keine Komponenten als Rand eines Kreisrings hervorgehen, so folgt dass die Thurston-Norm eine Norm auf $H^1(M_L)$ definiert. Dies ergibt sich daraus, dass sich die Eulercharakteristik einer Fläche mit n Randkomponenten als $2 - 2g - n$ berechnet — durch Hinzufügen von n verschiedenen 2-Zellen erhält man eine geschlossene Fläche mit Eulercharakteristik $2 - 2g$. Nun wollen wir einige Einheitskugeln von Verschlingungen berechnen.

Knoten

Im Fall, dass der Link nur aus einer Komponente besteht — es sich also um einen Knoten handelt — ist $H^1(M; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Sei ϕ ein Erzeuger der ganzzahligen Kohomologie, dann ist ϕ dual zu der Seifertfläche und jede duale Fläche die Lemma ?? erfüllt ist eine Seifertfläche. Somit ist (solange nicht vom Unknoten geredet wird) wie oben erwähnt $\|\phi\|_T = 2g(L) + 1$. Also ist die abgeschlossene Einheitskugel der Thurston-Norm gegeben durch:

$$H^1(M; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \\ \left[-\frac{1}{2g(L) + 1} \phi, \frac{1}{2g(L) + 1} \phi \right] = \overline{B}_{\|\cdot\|_T} = \left[-\frac{1}{2g(L) + 1}, \frac{1}{2g(L) + 1} \right]$$

wobei dann entsprechend für die duale Thurston-Norm $\|\cdot\|_T^* : H_1(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (mit Ausnutzung der Symmetrie) folgt:

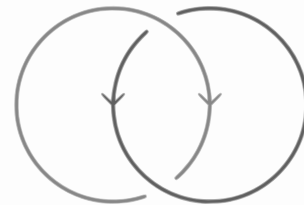
$$\overline{B}_{\|\cdot\|_T^*} = \left\{ \alpha \in H_1(M; \mathbb{R}), \frac{1}{2g(L) + 1} \phi(\alpha) \leq 1 \right\} = [-(2g(L) + 1)\hat{\alpha}, (2g(L) + 1)\hat{\alpha}]$$

Hier wird unter dem natürlichen Isomorphismus eines Vektorraums in seinen Bidualraum $H_1((M; \mathbb{R}) \cong H_1(M; \mathbb{R})^{**} \cong \text{Hom}(H^1(M; \mathbb{R}), \mathbb{R})$ die duale Thurston-Norm über der ersten Homologie aufgefasst und $\hat{\alpha}$ als Erzeuger der ganzzahligen Homologie, genauer gesagt, der Homologieklass — nach obiger Konvention — *des Meridians* (also gilt $\phi(\hat{\alpha}) = 1$).

Bemerkung 6.3.2. Da dies keine Arbeit über die Eulercharakteristik einer Fläche ist, möge der Leser in den folgenden Beispielen zur Berechnung der Eulercharakteristik dualer Flächen seine bevorzugte Formel verwenden, so dass die expliziten Rechnungen übersprungen werden können.

Hopf Verschlingung

Das trivialste nicht-triviale Beispiel einer Verschlingung mit mehreren Komponenten ist der Hopf Link. Er besteht aus zwei ineinander verschlungenen Unknoten, L_1, L_2 . Betrachtet man nun zwei Scheiben und verklebt diese mit zwei umgekehrt verdrehten Bändern, so erhält man die Hopf Verschlingung als Rand. Äquivalent möge man sich



einen Kreisring $S^1 \times I$ nehmen, der zweifach verdreht ist und beobachtet, dass dieser eine Seifertfläche S darstellt. Das Geschlecht dieser Seifertfläche ist 0, da es sich um eine Sphäre handelt, aus der zwei offene Scheiben entnommen wurde und somit $\chi_-(S) = 0$. Mit anderen Worten ist die obige Bedingung, dass die Thurston-Norm eine Norm ist, nicht erfüllt. Entsprechend existieren Elemente in $H^1(M_L; \mathbb{R})$ die sich zu 0 auswerten und durch die Linearität der Thurston-Norm entsteht ein degenerierter Untervektorraum (man überprüft leicht, dass die Fortsetzung nach \mathbb{R} auch verschwindet). Mit der Subadditivität verschwindet die Thurston-Norm auf dem Vektorraum $H^1(M; \mathbb{R})$, also ist die Einheitskugel nicht kompakt, sondern der gesamte Raum. Geht man jedoch zur dualen Norm über, erhält man wieder ein kompaktes Polytop mit ganzzahligen Eckpunkten:

$$\overline{B}_{\|\cdot\|_T^*} = \{\alpha \in H_1(M; \mathbb{R}) \mid \sup_{\{\phi \in H^1(M; \mathbb{R})\}} \phi(\alpha) \leq 1\} = 0$$

Die folgenden Beispiele sind aus Thurston's Arbeit [19] entnommen. Die Berechnungen von Thurston bedienen sich lauter Argumente warum keine repräsentierende Fläche existieren kann, die eine geringere Komplexität als die bisher gefundenen hat. Wir werden natürlich unsere Anstrengungen belohnen und Theorem 1.1 nutzen, um die Thurston-Norm-minimierende Flächen bequemer festzustellen.

Whitehead Verschlingung

Die Whitehead Verschlingung ist ein Link der aus zwei Komponenten L_1, L_2 besteht. Offensichtlich berandet jede Komponente L_i in M_{L_i} eine Scheibe, die sich in M_L auf eine Kreisscheibe mit zwei entnommenen offenen Scheiben einschränkt (an den Stellen, an denen die offene Tubenumgebung des anderen Knotens die Scheibe durchdringt). Bei diesen Repräsentanten für l_1 beziehungsweise l_2 berechnet sich die Eulercharakteristik zu -1 , also gilt $\|\pm l_i\|_T \leq 1$, offensichtlich gilt aber Gleichheit und in diesem Fall die Thurston-Norm eine tatsächliche Norm. Genauso offensichtlich gilt $\|l_1 + l_2\|_T > 0$: die Verschlingungszahl des Whitehead Links ist offensichtlich 0 (dies sieht man indem man eine Projektion betrachtet in dem die eine Komponente der Unknoten ist), jedoch haben die Randkomponenten jeder Einbettung eines Kreisring $S^1 \times I \hookrightarrow S^3$ Verschlingungszahl $\neq 0$ oder sind trivial (durch einen Äquator zu trennen). Also folgt, dass diese Fläche Geschlecht ≥ 1 hat und somit $2 \leq \|l_1 + l_2\|_T \leq \|l_1\|_T + \|l_2\|_T = 2$ für eine Seifertfläche. Mit Theorem 1.1 ließe sich diese untere Abschätzung auch mit $\Delta_L = (L_1 - 1)(L_2 - 1) = L_1 L_2 - L_1 - L_2 + 1$ berechnen, da $\|l_1 + l_2\|_T \geq \|l_1 + l_2\|_A \geq (l_1 + l_2)(L_1 + L_2 - 0) = 2$. Diese ist Seifert-Fläche ergibt sich sogar durch die Seifert-Konstruktion. Folglich:

$$\begin{aligned} \|l_1 + l_2\|_T &= \|-(l_1 + l_2)\|_T \stackrel{*}{=} \|-l_1 + l_2\|_T = \|l_1 - l_2\|_T \\ &= 2 \end{aligned}$$

wobei die ausgezeichnete Gleichung gilt, da $\|-l_1 + -l_2\|_T \notin \{0, 1\}$ aus obigen Gründen.
Behauptung: Die Thurston-Norm Einheitskugel und ihr Duales sind die Folgenden:

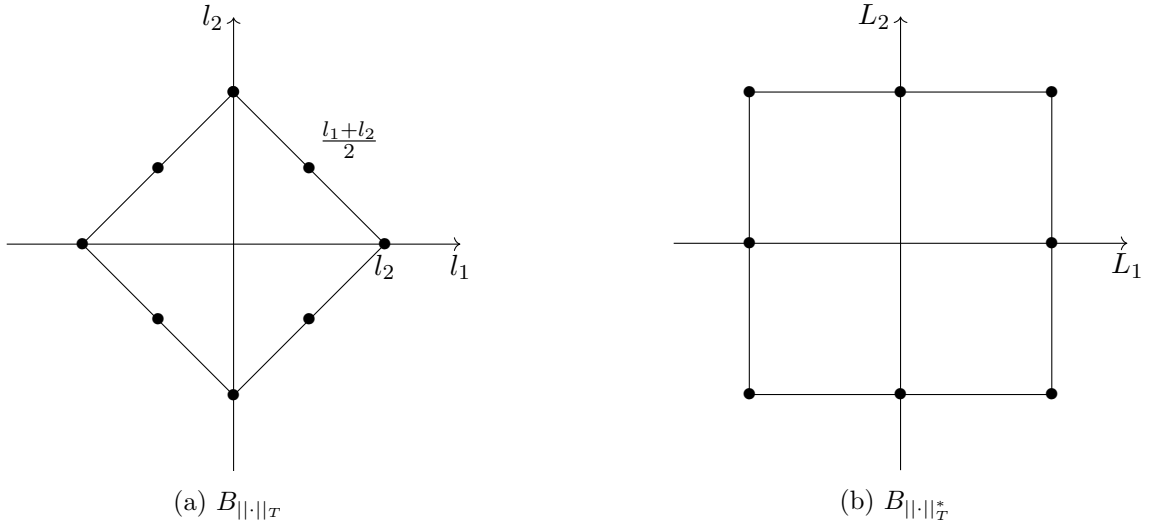


Abbildung 3: Einheitskugeln der Whitehead Verschlingung in $H^1(M; \mathbb{R})$ und $H_1(M; \mathbb{R})$

Die 8 berechneten Punkte liegen auf dem Rand von $B_{||·||_T}$ (die Norm ist stetig), einer konvexen Teilmenge. Es ist eine leichte Übung, dass jede konvexe Teilmenge zweier nächster Punkte in Abbildung 3a im Rand dieser konvexen Teilmenge enthalten sein muss. Aufgrund der Monotonie folgt die Behauptung für die Einheitskugel. Für die duale Norm, berechnet man entweder 8 verschiedene Randpunkte, oder beobachtet für jedes $\alpha \in H_1(M; \mathbb{R})$ auf welchen Elementen (eine Gerade) $\phi \in H^1(M_L; \mathbb{R})$ das Supremum $\phi\alpha$ angenommen wird und sieht direkt das Ergebnis.

Borromäische Ringe

Seien $L = L_1 + L_2 + L_3$ die Borromäischen Ringe. Offensichtlich hat jede duale Fläche zu l_i , die Komponente L_i als Rand, (sonst wäre der Meridian aufgrund eines Schnittzahlenarguments im Kern von l_i). Folglich hat also jede Fläche dual zu l_i mindestens 3 Randkomponenten. Da eine Sphäre mit 3 entnommenen offenen Scheiben (also eine abgeschlossene Scheibe mit 2 Durchlöcherungen), wobei die eine Randkomponente aufgespannt wird von der entnommenen Komponente $\nu(L_i)$, bereits dual zu l_i ist gilt wieder $||\pm l_i||_T = 1$ für jedes i . Ähnlich wie beim letzten Beispiel der Whitehead Verschlingungen, möchten wir nun — in Dimension 3 — die berandenden Seiten der Einheitskugel durch Berechnung einiger Punkte feststellen und sie dadurch bestimmen. Es berechnet sich $\Delta_L = L_1 L_2 L_3 - \sum L_i L_j + \sum L_i - 1$ und somit folgt leicht die Alexander-Norm einer beliebigen Kohomologiekategorie, insbesondere:

$$3 = ||\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3||_A \leq ||\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3||_T \leq ||l_1||_T + ||l_2||_T + ||l_3||_T = 3$$

Wegen $||\pm l_i||_T = 1$ und $||\frac{1}{3}(\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3)||_T = 1$ folgt dass die Randseiten der Einheitskugel, die Standard-2-Simplices sind, die von den Einheitsvektoren aufgespannt werden. Somit berechnet sich $B_{||·||_T}$ zu einem Oktahedron, siehe Abbildung 4a. Mit

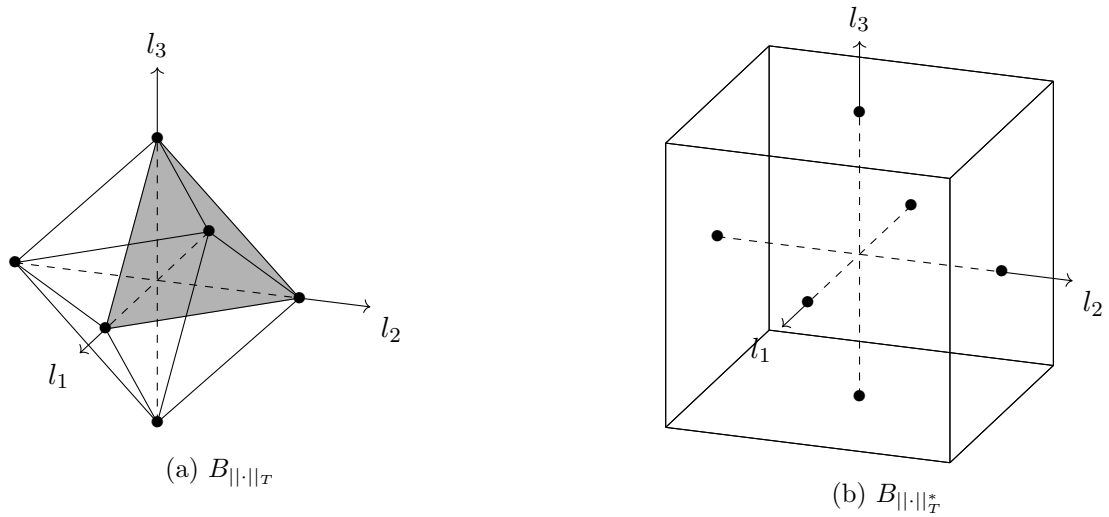


Abbildung 4: Die Einheitskugeln der Borromäischen Ringe

derselben Überlegung wie im vorhergehenden Beispiel, erkennt man strahlenweise die Form von $B_{||\cdot||_T^*}$ als Würfel.

Literatur

- [1] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2):275–306, 1928.
- [2] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. *Knots*, volume 5 of *De Gruyter studies in mathematics*. Walter de Gruyter, Berlin and New York, 2nd rev. and extended edition, 2003.
- [3] Stefan Friedl. Reidemeister torsion, the thurston norm and harvey’s invariants. *Pacific Journal of Mathematics*, 230(2):271–296, 2007.
- [4] Stefan Friedl and Taehee Kim. The thurston norm, fibered manifolds and twisted alexander polynomials. *Topology*, 45(6):929–953, 2006.
- [5] Stefan Friedl and Taehee Kim. Twisted alexander norms give lower bounds on the thurston norm. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(9):4597–4618, 2008.
- [6] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. Twisted alexander polynomials and symplectic structures. *American Journal of Mathematics*, 130(2):455–484, 2008.
- [7] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. Twisted alexander polynomials detect fibered 3-manifolds. *arXiv preprint arXiv:0805.1234*, 2008.
- [8] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. A survey of twisted alexander polynomials. In *The Mathematics of Knots*, pages 45–94. Springer, 2011.
- [9] C. McA. Gordon and J. Luecke. Knots are determined by their complements. *Journal of the American Mathematical Society*, 2(2):371–415, 1989.
- [10] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge and New York, 2002.
- [11] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York [u.a.], corr. 4. print edition, 1991.
- [12] Matthias Kreck. *Differential algebraic topology: From stratifolds to exotic spheres*, volume v. 110 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, Providence and R.I, 2010.
- [13] Lickorish, W. B. Raymond. *An introduction to knot theory*, volume 175 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York, 1997.
- [14] McMullen, C. The Alexander polynomial of a 3-manifold and the Thurston norm on cohomology. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 35(2):153–171, 2002.
- [15] J. Milnor. Infinite cyclic coverings. *Collected Papers*, 2:71–89, 2009.

- [16] Edwin E. Moise. Affine structures in 3-manifolds: V. the triangulation theorem and hauptvermutung. *Annals of Mathematics*, 56(1):96–114, 1952.
- [17] H. Seifert. *Über das Geschlecht von Knoten*. Springer, Berlin, 1934.
- [18] Y. Shinohara and D. W. Sumners. Homology invariants of cyclic coverings with application to links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 163:101–121, 1972.
- [19] William P. Thurston. *A norm for the homology of 3-manifolds*, volume 339 of *American Mathematical Society: Memoirs*. American Mathematical Society, Providence, 1986.
- [20] Lorenzo Traldi. The determinantal ideals of link modules. i. *Pacific J. Math.*, pages 215–222, 1982.
- [21] Friedhelm Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *The Annals of Mathematics*, 87(1):56, 1968.
- [22] George William Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York and Berlin, corrected 3rd print edition, 1995.