

# Alexander Norm and Thurston Norm

Daniel Valenzuela

Geboren am 21.07.1992 in München

6. Juli 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuerin: Prof. Dr. Ursula Hamenstädt

MATHEMATISCHES INSTITUT

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlegendes</b>	<b>5</b>
2.1	Die betrachteten Räume . . . . .	5
2.2	Alexander Invarianten . . . . .	5
2.3	Thurston Invariante . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Vorbereitungen</b>	<b>13</b>
3.1	Über endlich erzeugte Moduln eines noetherschen Rings . . . . .	13
3.2	Poincaré und Lefschetz Dualität . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Algebraische Alexander Invarianten</b>	<b>17</b>
4.1	Herleitung der algebraischen Idee . . . . .	17
4.2	Eine äquivalente Definition von McMullen? . . . . .	20
4.3	Rationale Alexander Invarianten . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Beweis des Theorems</b>	<b>24</b>
5.1	Konstruktionen . . . . .	24
5.2	$   \cdot   _T$ -minimierende Flächen . . . . .	26
5.3	Darstellungen des Alexander Ideals . . . . .	29
5.4	Kombinieren der Ergebnisse . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Folgerungen, Bemerkungen und Beispiele</b>	<b>38</b>
6.1	Zu der Thurston-Norm bei Überlagerungen mit unendlich großer Bettizahl	38
6.2	Faserungen . . . . .	40
6.3	Knoten und Verschlingungen . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Persönliche Notizen während der Erstellung</b>	<b>47</b>



# 1 Einführung

Die Theorie der Knoten beschäftigt sich mit Äquivalenzklassen von Knoten und dem Finden von Invarianten solcher Äquivalenzklassen. Als häufig betrachtete Invariante hat sich die Homöomorphieklasse der kompakten 3-Mannigfaltigkeit ergeben, die man das Knotenkomplement nennt. Dieses entsteht durch Entnehmen einer offenen Tubenumgebung des eingebetteten Knotens  $S^1 \hookrightarrow S^3$ . Häufig stellen sich Knoteninvarianten lediglich als Invarianten der Knotenkomplemente heraus. Um die Qualität und Feinheit dieser Invarianten zu beurteilen, ist es zunächst wichtig die des Knotenkomplements zu beurteilen. Dies ist natürlich eine relevante Frage, schließlich beschäftigten sich Topologen den Großteil des 20. Jahrhunderts damit Knotenkomplemente zu studieren. 1989 zeigen Gordon und Luecke [9], dass Knoten sogar durch ihr Knotenkomplement in ihrer Klasse bestimmt sind, es sich bei dem Knotenkomplement also um eine vollständige Knoteninvariante handelt. Manche Invarianten entstanden also aus rein intrinsischen Eigenschaften von 3-Mannigfaltigkeiten, andere wiederum entstanden speziell für 3-Mannigfaltigkeiten, die einen Torus als Rand haben. Um letztere soll es auch in dieser Arbeit gehen.

Alexander definiert eine topologische Invariante des Knotenkomplements [1] (1928), die einem Knotenkomplement eine Klasse von Laurentpolynomen mit eindeutigem Grad zuordnet. 1934 stellt Seifert in seiner Arbeit „Geschlecht von Knoten“ [17] mit dem Geschlecht eine Invariante vor, die die minimale Komplexität einer orientierten eingebetteten Fläche berechnet die den Knoten aufspannt (nach der Klassifikation von Flächen, wird diese in Abhängigkeit des Geschlechts gemessen) und eine Konstruktion für die Existenz solcher Flächen. Dieses Knotengeschlecht, liefert die Möglichkeit, jeden Knoten von dem Unknoten zu unterscheiden. Natürlich liefert die sogenannte Seifert-Konstruktion eine Fläche mit Geschlecht, jedoch ist es ein deutlich komplizierteres Anliegen, wenn man zeigen möchte, dass eine gefundene Fläche in ihrer Komplexität nicht unterboten werden kann. Entsprechend günstig erweist sich Seifert's Resultat, dass der Grad des Alexander Polynoms eines Knoten eine untere Schranke für sein Geschlecht definiert.

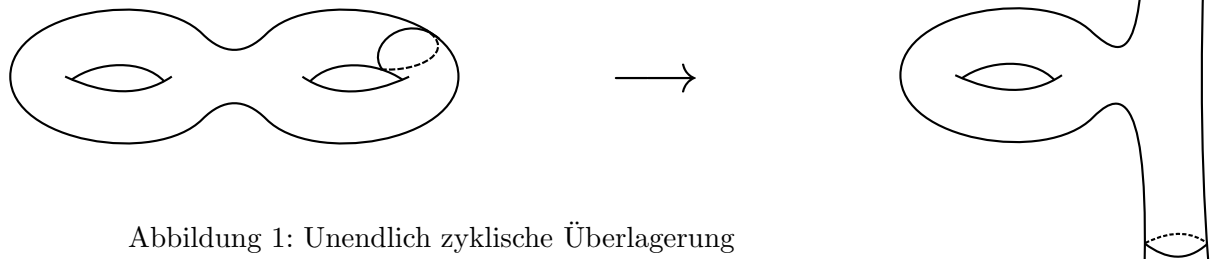


Abbildung 1: Unendlich zyklische Überlagerung

Der wesentliche Gegenstand dieser Arbeit ist die Verallgemeinerung dieser auf Knotenkomplementen definierten Invarianten, zu Invarianten auf kompakten orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand, der maximal aus Tori besteht. Für diese Invarianten stellt McMullen [14] fest, dass sich auch die oben erwähnte Abschätzung aus der Knotentheorie verallgemeinern lässt. Diese Arbeit wird sich mit genau diesem Resultat beschäftigen, welches dieser Arbeit als Haupttheorem(McMullen) 1.1 zugrunde liegt.

Es stellt sich heraus, dass alle betrachteten Invarianten, eine enge Beziehung zu unendlich zyklischen Überlagerungen haben. Diese können etwa durch Aufschneiden an einer 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit gewonnen werden, siehe zum Beispiel Abbildung 1. Diese Abbildung ist für die Intuition erheblich — man könnte dem Leser fast raten, vor und nach jedem Kapitel die Abbildung 1 zu betrachten und die neuen Erkenntnisse darin widerspiegeln zu lassen.

Die ersten Kapitel beschäftigen sich mit der Definition, Konstruktion und algebraischen Hintergründen der Alexander-Norm und Thurston-Norm. Während die Alexander-Norm den Grad des Alexander Polynoms einer Seifert-Fläche (aufgefasst als Lefschetz duale Homologieklass eines Erzeugers der ersten Kohomologie eines Knotenkomplementes), verallgemeinert auf eingebetteten orientierten Flächen auswertet, so soll die Thurston-Norm wieder die minimale Komplexität einer eingebetteten orientierten Fläche bestimmen. Diese beiden Invarianten werden per Poincaré und Lefschetz Dualität als Halbnormen auf  $H^1(M) \cong H_2(M, \partial M)$  betrachtet.

Anschließend wird sich dem Beweis des Haupttheorems ein eigenes Kapitel widmen. Der Beweis ist an die Beweisführung aus [14] angelehnt und beinhaltet eine Reihe Modifikationen und Ergänzungen.

Abschließend wird das letzte Kapitel sich mit der genaueren Betrachtung des Beweises beschäftigen, aber auch Anwendungen und konkrete Beispiele beinhalten.

Bei der Alexander-Norm eines Homomorphismus in  $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$  handelt es sich um den Grad des zugehörigen Alexander Polynoms und die Thurston-Norm weist einem solchen Homomorphismus die minimale Komplexität einer Poincaré-Lefschetz dualen eingebetteten Fläche zu. Ohne die genauere Definition hier zu nennen, soll nun das Theorem vorgestellt werden, dessen Beweis in dieser Arbeit behandelt wird.

**Theorem 1.1** (McMullen). *Sei  $M$  eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 3. Falls der Rand dieser Mannigfaltigkeit nicht leer ist, so soll er aus einer Kollektion von Tori bestehen. Dann gilt folgende Abschätzung für die Alexander-Norm und die Thurston-Norm  $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_T : H^1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  der 3-Mannigfaltigkeit:*

$$\|\phi\|_A \leq \begin{cases} \|\phi\|_T + 1 + b_3(M) & , \text{ falls } b_1(M) \leq 1 \text{ und } \phi : \pi_1(M) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \\ \|\phi\|_T & \end{cases}$$

*Entsteht  $\phi$  als Rückziehung einer Faserung  $M \rightarrow S^1$ , so gilt Gleichheit.*

## 2 Grundlegendes

Dieses Kapitel soll nun die betrachteten Invarianten motivieren und sie definieren. Zuvor noch eine Beschränkung der Räume die in dieser Arbeit behandelt werden:

### 2.1 Die betrachteten Räume

*Im Folgenden sei  $M$  stets eine kompakte, orientierbare, zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Falls diese einen Rand hat, sei er diffeomorph zu einer disjunkten Vereinigung von Tori.*

Um die Hilfsmittel zu erweitern oder Extremfälle auszuschließen, arbeitet man häufig in der Kategorie der stückweise linearen (PL, *piecewise linear*) oder der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Sieht man sich beispielsweise Knoten an, also Einbettungen  $S^1 \hookrightarrow S^3$ , so stellt man fest, dass diese besonders ausgeartet aussehen können, allerdings nicht, falls es sich bei der Einbettung um eine PL oder eine differenzierbare Einbettung handelt. Ähnlich kann man in diesen Kategorien raumfüllende Kurven vermeiden. Allerdings stellte sich im Studium der 3-Mannigfaltigkeiten heraus, dass die Situation sich erheblich von der in höheren Dimensionen unterscheidet, beispielsweise ist nicht jede Gruppe als Fundamentalgruppe einer 3-Mannigfaltigkeit realisierbar, eine Einschränkung liefert etwa Theorem 5.9. Außerdem lässt sich die Tatsache ergiebig nutzen, dass in Dimension 3 keine Unterscheidung der topologischen, der PL und der differenzierbaren Kategorie nötig ist: nach Moise's Theorem [16], besitzt jede 3-Mannigfaltigkeit sowohl eine eindeutige PL, als auch eine eindeutige differenzierbare Struktur. Das bedeutet, um Aussagen für 3-Mannigfaltigkeiten zu zeigen, kann man sich (fast) beliebig in diesen Kategorien hin- und herbewegen um das Resultat am Ende für alle zu erhalten. Um diese beiden Beispiele hervorzuheben, lässt sich bemerken, dass 4-Mannigfaltigkeiten überabzählbar viele unterschiedliche differenzierbare Strukturen besitzen und auch jede Gruppe realisierbar als Fundamentalgruppe einer 4-Mannigfaltigkeit ist.

Diese Arbeit wird sich jedoch konsistent in der  $C^\infty$ -Kategorie bewegen. Der vorherige Abschnitt dient also lediglich der Betonung, dass dies keine Einschränkung bedeutet.

### 2.2 Alexander Invarianten

In der Knotentheorie gilt als Grundlage der Motivation für die Alexander Invarianten — wie für so viele Knoteninvarianten — die Fundamentalgruppe: Allgemein ist es schwierig zu entscheiden, ob zwei endlich erzeugte abelsche Gruppen mit gegebenen Präsentationen isomorph sind. Die Abelianisierung einer Knotengruppe berechnet sich mit Alexanderdualität zu  $\mathbb{Z}$ , also geht man zur Unterscheidung von Fundamentalgruppen zu der Kommutatoruntergruppe über. Die Überlagerungstheorie liefert eine geeignete Überlagerung des Knotenkomplements, dessen Fundamentalgruppe die Kommutatoruntergruppe ist. Nach Hurewicz versteht man mit der Homologie dieser Überlagerung auch die Abelianisierung der Kommutatorgruppe. Da aber auch diese Gruppe im Allgemeinen nicht endlich erzeugt oder endlich präsentiert ist, betrachtet man die induzierte Wirkung der Decktransformationen auf der Homologie. Genauer betrachtet man sogar die Wirkung

des Gruppenrings  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ , wobei  $t$  Erzeuger der Deckgruppe ist, die aus der abelschen Gruppe einen  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul macht — den Alexander Modul. Durch Vergrößerung des Grundrings über der Homologie als  $\mathbb{Z}$ -Modul, zeichnet sich der Alexander Modul meist durch weniger Erzeuger und Relationen aus und bietet eine fruchtbare Grundlage für algebraische Invarianten. Genau diese Inspiration liegt auch der Verallgemeinerung der Alexander Invarianten zugrunde.

Auch hier ist der Clou der folgenden Methoden, die Struktur einer Überlagerung — genauer gesagt ihre Decktransformationen — auszunutzen, indem man den Gruppenring betrachtet. Der Gruppenring  $R[G]$  ist algebraischer Herkunft und kann für allgemeine kommutative Ringe  $R$  und Gruppen und Monoide  $G$  definiert werden, jedoch sind die betrachteten Invarianten über dem ganzzahligen Gruppenring mit  $R = \mathbb{Z}$  definiert, so soll uns dies zunächst genügen.

**Definition 2.1** (Gruppenring). Sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe. Dann ist der *Gruppenring* definiert als die Menge aller endlichen formalen Summen:

$$\mathbb{Z}[G] = \sum_{g \in G} a_g g, a_i \in \mathbb{Z}, g \in F$$

die durch komponentweise Addition eine abelsche Gruppe wird und durch die Gruppenverknüpfung und die multiplikative Struktur von  $\mathbb{Z}$  ein Ring mit 1 wird. Die Elemente  $g \in G \subset \mathbb{Z}[G]$  werden als die Gruppenelemente in dem Gruppenring bezeichnet.

*Bemerkung 2.2.1.* Da der Gruppenring die multiplikative Struktur von der Gruppenverknüpfung erbt, ist  $\mathbb{Z}[G]$  im Allgemeinen nicht unbedingt kommutativ. Dieses Problem, das durch nicht-abelsche Gruppen  $G$  entsteht, legen wir zunächst beiseite und betrachten nur den Fall, dass  $G$  frei abelsch ist und der Gruppenring die Kommutativität erbt. Der allgemeine Fall wird in Kapitel 4 weiter behandelt, um die folgenden Konstruktionen für Gruppen zu definieren die nicht aus 3-Mannigfaltigkeiten hervor gehen.

**Beispiel 1.** Falls also  $F$  nun eine unendlich zyklische Gruppe mit Erzeuger  $t$  ist, lässt sich der Gruppenring über  $F$  als  $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ , also als Ring der formalen Laurentpolynome in der Variablen  $t$  auffassen.

Sei  $M$  eine 3-Mannigfaltigkeit mit den obigen Beschränkungen und  $\phi : G = \pi_1(M) \rightarrow F$  ein Homomorphismus in eine freie abelsche Gruppe  $F$ . Aus der Überlagerungstheorie ist bekannt, dass nun eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $\hat{M}_\phi$  existiert, die  $M$  überlagert und auf Level der Fundamentalgruppen  $\ker \phi \cong \pi_1(\hat{M}_\phi) \xrightarrow{p_*} \pi_1(M)$  einbettet, vergleiche [10, Kapitel 1.3]. Diese ist bis auf Diffeomorphie eindeutig. Die Decktransformationsgruppe ist dann isomorph zum Quotienten  $\pi_1(M)/p_*\pi_1(\hat{M}_\phi) \cong F$ . Dieser Quotient  $F$  operiert dann auf  $\hat{M}_\phi$  durch Diffeomorphismen, induziert also auch eine Operation auf  $\pi_1(\hat{M}_\phi)$  und auf  $H_1(\hat{M}_\phi)$ . Da  $\mathbb{Z}$  auf jeder abelschen Gruppe wirkt, ist folgende Definition gerechtfertigt:

**Definition 2.2** (Alexander Modul). Der Alexander Modul einer Abbildung in einen freien  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\phi : \pi_1(M) \rightarrow F$  ist definiert als

$$A_\phi(M) = H_1(\hat{M}_\phi)$$



aufgefasst als  $\mathbb{Z}[F]$ -Modul, durch die induzierte Wirkung der Decktransformationen.

Es wird sich bei weiterer Inspektion herausstellen, dass der Alexander Modul von  $\phi$  im Fall einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit immer endlich präsentiert ist. Die Definitionen werden diesen Fakt implizit voraussetzen.

Da es sich bei dem Gruppenring nicht um einen Hauptidealring handelt, ist es im Allgemeinen nicht möglich eine Zerlegung des Alexander Moduls in zyklische direkte Summanden zu finden. Als algebraische Invariante, wird dem Modul stattdessen hier ein Reihe von Idealen in dem Gruppenring zugewiesen — die Elementarideale. Betrachte dafür die endliche Präsentation des Alexander Moduls:

$$\mathbb{Z}[F]^k \xrightarrow{X} \mathbb{Z}[F]^n \xrightarrow{\alpha} A_\phi(M) \longrightarrow 0$$

wobei  $X$  eine darstellende Matrix bezüglich der kanonischen Basen  $e_1, \dots, e_k$  und  $e'_1, \dots, e'_n$  ist. Mit grundlegender Linearer Algebra zeigt man, dass die Präsentationsmatrix bis auf Vertauschen von Zeilen oder Spalten, Hinzufügen von Einheitsblöcken oder Nullspalten und Addieren eines Vielfachen einer Spalte oder Zeile auf eine jeweils andere eindeutig ist. Nun unterscheiden sich verschiedene Präsentationsmatrizen nur durch solche Operationen, siehe etwa [13, Theorem 6.1]. Das liefert die nächste Definition:

**Definition 2.3.** Definiere das  $i$ -te Elementarideal  $E_i(A_\phi(M)) \subset \mathbb{Z}[F]$  von  $M$  bezüglich  $\phi$ , als das von den  $(n-i) \times (n-i)$ -Minoren erzeugte Ideal. Allgemeiner definiert man für einen endlich präsentierten  $R$ -Modul  $A$ , das Elementarideal  $E_i(A)$  als das Erzeugnis von den Determinanten der  $(n-i) \times (n-i)$ -Minoren einer Präsentationsmatrix mit  $n$  Erzeugern. Der Ring sei kommutativ mit Eins.

Da sich jede Determinante als Linearkombination von den Determinanten der Minoren schreiben lässt, liefert das eine aufsteigende Kette (die Gleichheitszeichen werte man als Definition):

$$0 = E_{-1}(A) \subset E_0(A) \subset \dots \subset E_n(A) = R$$

**Beispiel 2.** Ist  $R$  ein Hauptidealring, so sind die Elementarideale durch den Elementarteilersatz vollständig charakterisiert.

Nun ist  $E_i(A_\phi(M))$  nicht zwangsweise ein Hauptideal, also betrachtet man Alexander Polynome:

**Definition 2.4.** (Alexander Polynom) Definiere das Alexander Polynom  $\Delta_\phi$  als einen größten gemeinsamen Teiler von  $E_0(A_\phi(M))$ . Allgemeiner sei  $\Delta_\phi^i$  ein größter gemeinsamer Teiler von  $E_i(A_\phi(M))$ .

*Bemerkung 2.2.2.*  $\mathbb{Z}[F]$  ist ein faktorieller Ring, das rechtfertigt die Definition insoweit, dass das kleinste Hauptideal das  $E_i(A_\phi(M))$  enthält eindeutig ist und man von *dem* Alexander Polynom sprechen kann. Denn verschiedene Erzeuger desselben Hauptideals sind assoziiert, also unterscheiden sich um eine Einheit. In dem Gruppenring sind die Einheiten genau die Gruppenelemente. Das Alexander Polynom ist also bis auf Multiplikation mit einem Gruppenelement aus dem Gruppenring eindeutig.

**Definition 2.5.** Sei  $G = \pi_1(M)$  und  $\phi : G \rightarrow F$  die kanonische Abbildung auf den maximalen freien abelschen Quotienten der durch  $ab(G) = F \cong H_1(G)/T \cong \mathbb{Z}^{b_1(G)}$  charakterisiert ist. Dann definieren wir mithilfe den obigen Invarianten:

- den Alexander-Modul von  $M$ :  $A(M) = A_\phi(M)$
- das Alexander-Ideal von  $M$ :  $I(M) = I_\phi(M)$
- das Alexander-Polynom von  $M$ :  $\Delta(M) = \Delta_\phi(M)$

*Bemerkung 2.2.3* (Homomorphismen der Abelianisierung). Diese Arbeit besteht zu einem großen Teil aus Rechnungen mit Elementen aus  $H^1(M; \mathbb{Z})$ , insbesondere sollen obige Invarianten auf solche Elemente angewendet werden dürfen. Deswegen soll diese Bemerkung eine Voraussetzung für alle folgenden Betrachtungen klarstellen:

Es werden stillschweigend natürliche Identifikationen  $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(M); \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(M); \mathbb{Z})$  verwendet. Die erste natürliche Identifikation liefert das universelle Koeffiziententheorem, auch wenn die erhaltende Sequenz im Allgemeinen nicht natürlich zerfällt, so ist dies im Fall der ersten Kohomologie offensichtlich. Die zweite folgt, da ein Homomorphismus  $\phi : H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ , gleichbedeutend mit einem Homomorphismus  $\hat{\phi} : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  ist. Dies sieht man wie folgt ein: das Hurewicz Theorem besagt, dass die natürliche Abbildung  $\pi_1(M) \rightarrow H_1(M)$  die durch Auffassen von Schleifen als singuläre 1-Ketten entsteht, die Abelianisierungsabbildung ist. Diese besitzt die universelle Eigenschaft (der Quotientenabbildung), dass wegen  $[\pi_1(M), \pi_1(M)] \subset \ker \hat{\phi}$  ( $\mathbb{Z}$  ist kommutativ)  $\hat{\phi}$  über eine eindeutige Abbildung  $H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  faktorisiert, mit anderen Worten das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & \nearrow \phi & \\ H_1(M) & & \end{array}$$

Dies liefert die eins-zu-eins Beziehung der Homomorphismen nach  $\mathbb{Z}$ , da  $\phi$  nach dem Diagramm offensichtlich ein (eindeutiges) Element in  $\text{Hom}(\pi_1(M); \mathbb{Z})$  definiert.

**Konvention.** In dieser Arbeit bezeichne der Kern einer Klasse  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  durchweg den Kern der mit  $\phi$  identifizierten Abbildung auf der Fundamentalgruppe.

Bleibt nur noch die Alexander-Norm zu definieren, die eine Halbnorm auf der ersten Kohomologie der 3-Mannigfaltigkeit definiert.

**Definition 2.6** (Alexander-Norm). Sei  $\Delta \in \mathbb{Z}[F]$  das Alexander Polynom von  $M$ . So ist  $\Delta$  von der Form:

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_k f_k \quad a_k \neq 0, f_i = f_j \Rightarrow i = j$$

Sei nun  $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ , dann definieren wir die Alexander Norm von  $\phi$  als

$$\|\phi\|_A = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \Delta = 0 \\ \sup \phi(f_i - f_j) & \end{cases}$$

Wobei das Supremum über die Gruppenelemente  $f_i$  genommen wird, die in  $\Delta$  auftauchen.

### 2.3 Thurston Invariante

Ziel ist es nun eine weitere Halbnorm auf der ersten Kohomologie einer kompakten orientierbaren 3-Mannigfaltigkeit zu definieren. Poincaré-Lefschetz Dualität liefert für kompakte orientierbare Mannigfaltigkeiten einen Isomorphismus  $H^1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ , wobei  $H_2(M, \partial M; \mathbb{Z}) = H_2(M; \mathbb{Z})$  falls  $\partial M = \emptyset$ . Verschiedene zu  $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$  duale Homologieklassen werden später noch explizit beschrieben werden. Tatsächlich wird es sogar ein bedeutendes Zwischenresultat sein, dass eine solche Homologieklassse immer durch eine Fläche mit Eigenschaften gewählt werden kann, die bestimmten Abschätzungen genügen. Auf der anderen Seite werden uns nur Flächen interessieren die auch eine gewisse Minimalitätseigenschaft erfüllen und zwar bezüglich der folgenden Thurston-Norm:

**Definition 2.7** (Thurston-Norm). Definiere die Thurston Norm für  $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$  als

$$\|\phi\|_T = \{\min \chi_-(S) \mid S \text{ ist orientierte eingebettete Fläche dual zu } \phi\},$$

wobei  $\chi_-(S) = \sum \max(-\chi(S_i), 0)$  und über  $S = \sqcup S_i$  die Zusammenhangskomponenten von  $S$  summiert wird.

Dass die Menge auf der das Minimum gesucht wird nicht leer ist, sichert unter anderem ein differentialtopologisches Resultat, dass in Kapitel 3.2 bemerkt wird.

Als Abschluss dieses einführenden Kapitels, soll noch folgendes essenzielles Lemma gezeigt werde:

**Lemma 2.1.** *Die Alexander Norm und die Thurston Norm definieren Halbnormen auf der ersten Kohomologie einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit.*

*Beweis.* Bei der Alexander Norm ist nichts zu zeigen, die Halbnormeigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Definition.

Im Falle der Thurston Norm, ist das Lemma Gegenstand der ersten zwei Kapitel aus [19], dessen Beweis mit leichten Anpassungen im Folgenden kurz skizziert werden soll. Es muss die Skalarmultiplikativität und die Subadditivität gezeigt werden also:

$$\|\lambda\phi\|_T = \lambda\|\phi\|_T, \quad \lambda \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$\|\phi + \psi\|_T \leq \|\phi\|_T + \|\psi\|_T, \quad \phi, \psi \in H^1(M) \quad (2)$$

Da die Thurston Norm aus den Eigenschaften der dualen Flächen hervorgeht, ist es nötig sich Gedanken zu den dualen Homologieklassen zu machen. Dann ist es für (1) offensichtlich hinreichend, falls für repräsentierende, orientierte, eingebettete Flächen,

etwa  $S, T$  mit  $[S], [T] \in H_2(M, \partial M)$  und  $[S] = \lambda[T]$ , das Vielfache  $S$  bereits disjunkte Vereinigung von  $\lambda$  zusammenhängenden Komponenten  $S_i$  ist, mit  $[S_i] = [T]$ .

In diesem Abschnitt soll nun für die verwendeten Methoden kurz vorgegriffen werden. Für  $[S] = \phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  existiert eine glatte Abbildung  $f : M \rightarrow S^1$  die  $\phi$  repräsentiert, die ohne Einschränkung einen regulären Wert  $s \in S^1$  habe, dessen Urbild  $S$  ist (siehe Kapitel 3.2 und Konstruktion 1 bzw. Corollar 5.2). Sei auch  $g : M \rightarrow S^1$  glatt mit dem regulären Wert  $t$ , sodass  $g^{-1}(t) = T$ . Betrachtet man die Überlagerung  $p : S^1 \xrightarrow{z^\lambda} S^1$ , liefert wegen  $\text{Im } \pi_1(f) \subset \lambda\mathbb{Z}$ , die Überlagerungstheorie einen eindeutigen Lift  $\hat{f}$ :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\hat{f}} & S^1 \\ g \downarrow & \searrow f & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{p} & S^1 \end{array}$$

Das Quadrat kommutiert bis auf Homotopie, also  $p\hat{f} \simeq pg$ , denn beide Abbildungen identifizieren sich unter der Bijektion  $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$  (siehe Kapitel 3.2) mit  $\lambda\phi$ , also impliziert die Existenz dieser Bijektion, dass  $[p\hat{f}] = [pg]$ . Somit folgt auch (mit Kapitel 3.2), dass Urbilder regulärer Werte aus  $S^1$  unter  $\hat{f}$  homolog zu solchen aus  $g$  sind. Da  $p^{-1}(s) = \{s_1, \dots, s_n\}$  sicher reguläre Werte von  $\hat{f}$  sind (folgt zum Beispiel aus der Kettenregel für Differentiale), sind die Urbilder  $S_1, \dots, S_n$  disjunkte, eingebettete, orientierte Flächen mit  $[S_i] = [T]$ . Da  $S$  auch minimal (bezüglich der Thurston-Norm) gewählt werden kann, folgt also  $\|[S]\|_T \geq \lambda \|\frac{1}{\lambda}[S]\|_T = \lambda\|T\|_T$ . Nun lassen sich aber aus einer minimierenden Fläche für  $T$  (sei  $T$  ohne Einschränkung selbst so gewählt), mithilfe der zweiseitigen glatten Einbettung  $T \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  (auch hierfür sei zu Kapitel 3.2 verwiesen),  $\lambda$  disjunkt eingebettete Kopien von  $T$  gewinnen, die selbstverständlich auch  $[S]$  repräsentieren, also  $\|\lambda\phi\|_T = \lambda\|\phi\|_T$ .

Um nun die Subbadditivität (2) zu zeigen, ist es nötig sich die Geometrie der  $\|\cdot\|_T$ -minimierenden Flächen  $S, T$  mit  $[S] = \phi, [T] = \psi$  genauer zu betrachten. Die Differentialtopologie liefert mit dem Transversalitätstheorem (vergleiche Kapitel 3.2) diffeotopie Approximationen von  $T$ , die transversal zu  $S$  sind, deswegen seien also ohne Einschränkung  $S \pitchfork T$  transversal. Außerdem folgt durch die Transversalität, dass  $S \cap T$  eine glatte, kompakte 1-Mannigfaltigkeit ist (man sagt: „Der Pullback bleibt in Kategorie“). Die Klassifikation von kompakten 1-Mannigfaltigkeiten liefert, dass dieser Durchschnitt eine disjunkte Vereinigung von Kreisen und abgeschlossenen Intervallen ist. Des Weiteren existiere ohne Einschränkung der Allgemeinheit keine Kreiskomponente des Schnittes  $S \cap T$  die eine Scheibe berandet, die in  $S$  oder  $T$  enthalten ist. Diese Annahme kann man wie folgt einsehen:

Angenomme es existiert so ein Nullbordismus  $D \subset S$  einer solchen Komponente  $\partial D \subset S \cap T$ . Weiter sei dieser auf dem Inneren disjunkt von  $T$ , da ein nichttrivialer Schnitt mit  $T$  einen weiteren Kreis aus  $S \cap T$  liefert, der den Nullbordismus einschränkt, sodass er weniger Komponenten im Schnitt mit  $T$  berührt hat als der ursprüngliche (man bemerke das Transversalität genutzt wurde). So fahre man endlich oft fort, bis der Durchschnitt trivial ist beziehungsweise die berandende Scheibe,  $T$  nur im Rand berührt. Nun lässt sich eine hinreichend kleine offene Tubenumgebung von  $\partial D$  aus  $T$  entfernen.

Diese kann wie folgt gewählt werden: sei  $\nu(S) \rightarrow M$  eine Tubenumgebung von  $S$  die sich aufgrund der Zweiseitigkeit wie folgt wählen lässt:  $\alpha : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ , sodass  $\text{Im } \alpha|_{S \times (-\frac{1}{2}\epsilon, \frac{1}{2}\epsilon)} \cap T$  eine Tubenumgebung von  $S \cap T \subset T$  ist. Dann lässt sich diese Tubenumgebung bei  $\partial D$  aus  $T$  entfernen und mittels der Zweiseitigkeit um  $D$ , findet man zwei Kopien  $D_{\frac{\epsilon}{2}}, D_{-\frac{\epsilon}{2}}$ , sowie Anklebevorschriften, mit denen diese Scheiben an die beiden durch Ausschneiden entstandenen Kreis-

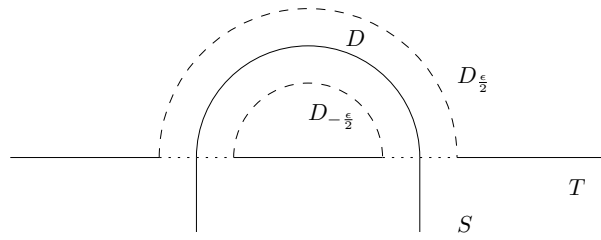


Abbildung 2: Ausschneiden einer Umgebung von  $S \cap T$  und Ankleben zweier Scheiben, sodass die Homologieklassse erhalten bleibt

Randkomponenten kleben kann, vergleiche Abbildung 2. Als Resultat ergeben sich Flächen  $S, T'$ , deren Durchschnitt um eine Komponente reduziert wurde und offensichtlich  $[T] = [T']$  gilt. **1.kein Weg aus dem Durchschnitt ist rel Endpunkt homotop zu einem Rand**

Von nun an seien  $S$  und  $T$  transversale Flächen, deren Durchschnitt den obigen Anforderungen genügt. Ziel ist es nun, den Zykel, der die Vereinigung repräsentiert, als eingebettete Fläche zu repräsentieren. Beachtet man die Orientierungen, so kann man an jeder Komponente des Durchschnitts die Vereinigung aufschneiden (die lokal aussieht wie die Gerade an der sich zwei orientierte Ebenen im  $\mathbb{R}^3$  schneiden), und entlang der Orientierungen in nur einer Möglichkeit wieder verkleben, so dass man eine Mannigfaltigkeit erhält (dies funktioniert offensichtlich an den Durchschnittskomponenten mit Rand, aber auch den geschlossenen Komponenten, da die Orientierungen auf  $S$  und  $T$  global gewählt sind). Natürlich können mit entsprechenden Umgebungen, alle diese Klebe- und Schneideprozesse glatt durchgeführt werden. Nun erhält man eine glatte, orientierte Fläche  $U$ , die (nach gegebenenfalls leichter Modifikation) auch eigentlich eingebettet ist. Nun muss dieses Ergebnis und die Auswirkungen der Konstruktionen auf die Flächen diskutiert werden. Die „uneinschränkenden“ Konstruktionen zu Beginn, können natürlich die Euler Charakteristik verändern, jedoch resultieren daraus weiterhin Thurston-Norm minimierende Flächen<sup>1</sup>. Zwei *solche* Flächen gegeben, erbt die letztere Konstruktion, die aus  $S \cup T$  eine homologe Fläche  $U$  macht, die Summe der Eulercharakteristika:

$$\chi(U) = \chi(S) + \chi(T) \implies \chi_-(U) = \chi_-(S) + \chi_-(T)$$

wobei die Implikation gilt, da bei der Konstruktion von  $U$  keine Komponenten mit positiver Eulercharakteristik entstehen, unter den an  $S$  und  $T$  gestellten Annahmen. Dies liefert nun die Subbadditivität der Thurston-Norm auf den Homologieklassen.  $\square$

Häufig stellt man Annahmen an die 3-Mannigfaltigkeit, die es verbieten, dass Homologieklassen von Sphären oder Tori repräsentiert werden können. In dem Fall würde dann

<sup>1</sup>Dies geschieht zum Beispiel durch die Entstehung von Sphären. Wichtig ist nur dass solche Komponenten nicht beim Verkleben der beiden Flächen entstehen. Genau deswegen wurde diese Annahme getroffen.

sogar  $\|\phi\|_T = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$  gelten. Dies alles motiviert natürlich, diese Norm zu einer Vektorraumnorm auf  $H^1(M; \mathbb{Q})$  oder  $H^1(M; \mathbb{R})$  fortzusetzen.

*Bemerkung 2.3.1* (Fortsetzung von  $\|\cdot\|_T$ ). Will man  $\|\cdot\|_T : H^1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  fortsetzen, so hilft die in Lemma 2.1 gezeigte Skalarmultiplikativität. Da  $H^1(M; \mathbb{Z})$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul frei mit Rang  $n$  ist, liefert die Einbettung  $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$  zusammen mit der Linearität der Thurston-Norm eine lineare Fortsetzung auf den Strahlen (1-dimensionale Untervektorräume), die von Gitterpunkten erzeugt werden. Da aber für jedes  $q \in \mathbb{Q}^n$ , bereits  $aq \in \mathbb{Z}^n$  gilt (für großes  $a \in \mathbb{Z}$ ), liefert dies bereits eine Fortsetzung auf  $H^1(M; \mathbb{Q})$ . Nun ist aber diese Fortsetzung mit Lemma 2.1 eine Halbnorm, insbesondere eine konvexe Funktion, also auf jedem Kompaktum Lipschitz-stetig und somit auf jedem Kompaktum  $K \cap \mathbb{Q}^n$ ,  $K \subset \mathbb{R}^n$  in eindeutiger Weise stetig auf  $K$  fortsetzbar — es folgt die Existenz von  $\|\cdot\|_T : H^1(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Nun stehen die Definitionen der Invarianten bereit, die auf den folgenden Seiten untersucht werden sollen.

### 3 Vorbereitungen

Wie sich im ersten Beweis herausstellen wird, ist der Gruppenring  $\mathbb{Z}[F]$  für eine abelsche freie Gruppe  $F$  noethersch. Da allerdings als Grundring der Ring der ganzen Zahlen dient, existieren Ideale die keine Hauptideale sind. Die Theorie der endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen ist sehr ergiebig — der Elementarteilersatz erlaubt die Zerlegung eines solchen Moduln in zyklische Moduln. Um Invarianten auf endlich erzeugten Moduln über noetherschen Ringen zu erhalten, lassen sich verschiedene Schritte im Beweis des Elementarteilersatzes bis zu einem bestimmten Grad nachahmen. Mit dieser Hintergrundgedanken ergeben sich die oben definierten Elementarideale.

Dieses Kapitel soll im ersten Teil grundlegende Eigenschaften noetherscher Moduln herausstellen und dann im zweiten Teil auf differentialtopologische Ergebnisse hinweisen. Diese Resultate werden den Großteil der Hilfsmittel für die Arbeit vorbereiten, sollen aber noch mit Kapitel 4 durch etwas tiefergehende Algebra ergänzt und vervollständigt werden.

#### 3.1 Über endlich erzeugte Moduln eines noetherschen Rings

Um die Situation für spätere Berechnungen angenehmer zu gestalten und überhaupt erst die Definition der Alexander Invarianten zu berechtigen, überzeugt man sich zunächst dass der Alexander Modul tatsächlich endlich erzeugt über dem Gruppenring  $\mathbb{Z}[F]$  ist.

**Proposition 3.1.**  $A_\phi(M)$  ist ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}[F]$ -Modul.

*Bemerkung 3.1.1.* Eine algebraische Variante des Beweises befindet sich im nachfolgenden Kapitel 4.

*Beweis.* Da  $M$  eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit ist, existiert eine endliche CW Struktur, vergleiche [16]. Da es für CW Komplexe gleichbedeutend ist die zelluläre Homologie zu berechnen, reicht es den zellulären Kettenkomplex einer endlichen CW Struktur zu betrachten. Da in diesem alle Kettengruppen frei und endlich erzeugt von den Zellen der CW Struktur sind, folgt dass in dem Kettenkomplex der Überlagerung (mit der vererbten CW-Struktur) alle Kettengruppen als  $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln endlich erzeugt sind, denn die Decktransformationen  $F$  assoziieren die Erzeuger der Kettengruppen als  $\mathbb{Z}$ -Moduln der Überlagerung, die das gleiche Bild unter der Überlagerungsabbildung haben. Das bedeutet für jeden freien  $\mathbb{Z}$ -Summand der Kettengruppen der Mannigfaltigkeit erhält man einen freien  $\mathbb{Z}[F]$ -Summand der Kettengruppen der Überlagerung. Wenn jetzt nachgewiesen werden kann, dass das Bilden der Homologie verträglich ist mit dem Bilden der Homologie als Gruppenring Moduln, so wären alle Homologiegruppen der Überlagerung als Quotienten von  $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln endlich erzeugt. Aber da die Wirkung von  $F$  auf der Homologie durch Diffeomorphismen induziert wird, so ist die Verträglichkeit durch die elementare Tatsache gegeben, dass Abbildungen von Räumen Kettenkomplexabbildungen induzieren, also Verträglichkeit mit den Randoperatoren gegeben ist.  $\square$

Für Berechnungen ist folgende bereits verwendete Proposition nützlich:

**Proposition 3.2.** *Für eine endlich erzeugte frei abelsche Gruppe  $F$ , ist der ganzzahlige Gruppenring  $\mathbb{Z}[F]$  noethersch.*

*Beweis.* Da  $F \cong \mathbb{Z}^n$ , seien  $f_1, \dots, f_n$  Erzeuger von  $F$ .

Nach dem Hilbertschen Basissatz ist der Polynomring über  $\mathbb{Z}$  in endlich vielen Variablen noethersch. Ebenso ist die Lokalisierung eines noetherschen Ringes noethersch, da jedes Ideal in der Lokalisierung Bild eines endlich erzeugten Ideals ist. Also genügt es eine Surjektion von einem solchen in den Gruppenring zu finden, denn ein surjektiver Ringhomomorphismus, ordnet jedem Ideal im überlagerten Ring, ein endlich erzeugtes Ideal im ursprünglichen Ring zu und somit auch ein endliches Erzeugendensystem. Aber ein solcher Epimorphismus von einem — nach den obigen Überlegungen — noetherschen Ring ist gegeben durch Ausnutzen der universellen Eigenschaft des Polynomrings und der Lokalisierung:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] &\rightarrow \mathbb{Z}[F] \\ X_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

□

*Bemerkung 3.1.2.* Offensichtlich ist die angegebene Abbildung von dem Ring der multi-variablen Laurentpolynome nach  $\mathbb{Z}[F]$  injektiv und somit ein Isomorphismus. Es wird im Folgenden weitestgehend auf eine Identifikation unter diesem Isomorphismus verzichtet, da eine solche von der Wahl einer Basis abhängt. Jedoch wird sich herausstellen, dass im Falle eines Verschlingungskomplements mit  $\lambda$  Komponenten eine kanonische Basis für  $F \cong \mathbb{Z}^\lambda$  existiert, wo sich diese Identifikation als nützlich herausstellen wird, siehe Kapitel 6.3.

Sei im Folgenden nun  $M$  ein noetherscher  $R$ -Modul. Dies ist zum Beispiel gegeben, wenn  $R$  ein noetherscher Ring ist und  $M$  endlich erzeugter  $R$ -Modul.

**Lemma 3.3.**  *$M$  ist über  $R$  endlich präsentiert. Insbesondere sind Elementarideale noetherscher Moduln definiert.*

*Beweis.*  $M$  ist endlich erzeugt über  $R$  also existiert folgende exakte Sequenz:

$$R^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

da  $R^n$  aber noethersch ist und Kerne von Homomorphismen Untermoduln sind, kann die Sequenz auf der linken Seite folgendermaßen ergänzt werden:

$$R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$$

□



## 3.2 Poincaré und Lefschetz Dualität

Bei Betrachtung der Definition der Thurston-Norm auf  $H^1(M)$  fällt auf dass diese nur Eigenschaften der dualen Homologieklassen nutzt (genaugenommen definiert Thurston in [19] diese Halbnorm auch als stetige Abbildung auf  $H_2(M)$  beziehungsweise  $H_2(M, \partial M)$ , die via Dualität auf die Kohomologie übertragen wird). Und tatsächlich werden die folgenden Seiten teilweise in ein wildes Hin- und Herspringen zwischen Homologie und Kohomologie ausarten. Aus diesem Grund sollen hier noch einmal wichtige Grundlagen und Berechnungsmöglichkeiten, die später verwendet werden, erklärt werden.

*Bemerkung 3.2.1* (Duale 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeiten). Sei  $N$  eine glatte orientierte  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit CW-Struktur). Bekanntlicherweise gilt:

$$H_{n-1}(N, \partial N; \mathbb{Z}) \cong H^1(N; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(N), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(N), \mathbb{Z}) \cong [N, S^1]$$

wobei der

1. -te Isomorphismus bei  $\partial N = \emptyset$  Poincaré und sonst Lefschetz Dualität ist,
2. -te Isomorphismus gilt, da das universelle Koeffiziententheorem eine exakte Sequenz liefert in dem diese beiden Terme auftauchen und weiter nur  $\text{Ext}(H_0(N), \mathbb{Z}) = 0$ ,
3. -te Isomorphismus gilt, da nach Hurewicz die Abbildung  $\pi_1(N) \rightarrow H_1(N)$  die Abelianisierung ist (siehe Bemerkung 2.2.3),
4. -te Isomorphismus gilt, indem man zeigt, dass jede Abbildung auf dem 1-Skelett  $X^1 \subset N \rightarrow S^1$  auf  $N$  fortgesetzt werden kann. Da das 1-Skelett die Fundamentalgruppe (oder Homologie) erzeugt, also die Inklusion eine surjektive Abbildung  $i_* : \pi_1(X^1) \rightarrow \pi_1(N)$  induziert, lässt sich auf diese Weise jeder Homomorphismus  $\pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$  auf den Erzeugern aus dem 1-Skelett (genauer möchte man, dass diese Abbildung auf einem maximalen Baum konstant ist) definieren und fortsetzen.

Also liefert jeder Homomorphismus  $\phi \in H^1(N; \mathbb{Z})$  eine Homotopieklasse von Abbildungen in  $[N, S^1]$  und umgekehrt liefert jede Abbildung  $N \rightarrow S^1$  einen induzierten Homomorphismus der Homologiegruppen. Die Differentialtopologie liefert nun, dass für jede Homotopieklasse aus  $[N, S^1]$  ein glatter Repräsentant existiert und die Existenz eines regulären Wertes in  $S^1$ . Jedes Urbild eines solchen regulären Wertes ist dann eine 1-kodimensionale orientierte Mannigfaltigkeit (mit Rand wenn überhaupt im Rand von  $N$  eigentlich eingebettet), welche als Homologieklassen dual zu  $\phi$  ist. Genauer gilt sogar Folgendes:

**Theorem 3.4.** *Sei  $f : N^n \rightarrow K^m$  eine stetige Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten. Dann lässt sich  $f$  beliebig nah durch glatte Abbildungen approximieren (wie die Güte der Approximation genau gemessen wird ist hier von keiner Bedeutung) welche homotop zu  $f$  sind.*

**Theorem 3.5** (Sard und Satz vom regulären Wert). *Sei  $f : N^n \rightarrow K^m$  eine glatte Abbildung. Dann liegen die regulären Werte von  $f$  dicht in  $K$ . Das Urbild eines regulären Wertes ist eine abgeschlossene glatte orientierte eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeit in  $K$  der Kodimension  $m$ . Ein regulärer Wert ist ein Punkt aus  $K$ , bei dessen Urbild  $f$  an jedem Punkt einen Epimorphismus auf den Tangentialräumen definiert.*

**Theorem 3.6** (Thom). *Sei  $f : N \rightarrow S^1$  eine glatte Abbildung. Jedes Urbild eines regulären Wertes definiert nach obigem Satz ein Element in  $H_{n-1}(N, \partial N; \mathbb{Z})$  als Bild der Fundamentalklasse der Untermannigfaltigkeit unter der Inklusion. Diese ist Poincaré beziehungsweise Lefschetz dual zu  $[f] \in H^1(N; \mathbb{Z})$ .*

Alle diese Aussagen sind bekannte elementare Aussagen der Differentialtopologie und können etwa in [12] oder mit elementaren Methoden in [11] (bis auf 3.6) nachgelesen werden.

Dies liefert Möglichkeiten etwa zu zeigen, dass eine eingebettete Fläche in einer 3-Mannigfaltigkeit dual zu einer Abbildung Kohomologieklass ist. Ist beispielsweise eine zweiseitige Fläche gegeben, so lässt der zweiseitige Kragen eine offensichtliche Möglichkeit einer Quotientenabbildung nach  $S^1$  zu, die eine Darstellung der Fläche als Urbild eines regulären Wertes zulässt. Mehr dazu später in Kapitel 5.1.

## 4 Algebraische Alexander Invarianten

Tatsächlich könnte man diese Bachelorarbeit fast ausschließlich algebraisch verstehen — wenigstens den Teil über die Alexander-Invarianten. Natürlich ist dieser Arbeit aus dem Bereich der Topologie, der Geschmack oder die Illusion gegeben, man arbeite mit direkten Eigenschaften der Räume. Bei der Thurston-Norm ist dies sicherlich noch eher gegeben, durch die Definition einer Funktion auf einem Vektorraum mittels geometrischer Eigenschaften der Mannigfaltigkeit. Jedoch handelt es sich bei den Alexander-Invarianten, insbesondere dem Alexander Polynom, lediglich um Invarianten einer endlich erzeugten Gruppe. Durch Anwendung dieser Invarianten auf die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes, erhält man also Invarianten von Räumen. Natürlich verliert das Alexander Polynom von 3-Mannigfaltigkeiten durch diese „Faktorisierung“ nicht allzu viel an Reiz, da die Fundamentalgruppe eine recht starke Invariante von 3-Mannigfaltigkeiten darstellt, beispielsweise liefert sie durch einfache Anwendung von Hurewicz und Dualitätssätzen (Poincaré/Lefschetz, universelles Koeffiziententheorem) alle Homologiegruppen der 3-Mannigfaltigkeit und eine Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten, die sogenannten ‘Haken-Mannigfaltigkeiten’ sind durch ihre Fundamentalgruppe klassifiziert, der Beweis dazu stammt von Waldhausen [21]. Im Folgenden sollen nun die Alexander Invarianten von endlich erzeugten Gruppen definiert werden und Zusammenhänge verschiedener Definitionen erkannt werden.

Natürlich bergen algebraische Invarianten mit solchen Eigenschaften immer mehrere Vorzüge. Zum einen werden topologische Probleme in algebraische übersetzt, die dann mit algebraischen Methoden untersucht werden können. Scheint andererseits ein algebraisches Problem nur schwer lösbar, so ergibt sich die Möglichkeit einen topologischen Kontext zu finden, in dem sich die algebraische Ursprungssituation als Invariante ergibt, dessen Ergebnisse und Berechnungen sich aber vielleicht mit topologischen Eigenschaften des Raumes leichter handhaben lassen, siehe etwa Beispiel 4.

Es soll zunächst eine analoge Definition zu den bekannten Alexander Invarianten aus Kapitel 2 gegeben werden. Anschließend wollen wir eine weitere Definition betrachten, die beispielsweise McMullen in [14] nutzt und ein Zusammenhang hergestellt werden — warum diese Definitionen streng genommen nicht äquivalent sind und warum das kein Problem darstellt.

### 4.1 Herleitung der algebraischen Idee

Nun müssen wir uns mit der Problematik beschäftigen die eingangs bei der Definition des Gruppenrings erwähnt wurde, nämlich dass der entstehende Gruppenring von nicht-abelschen Gruppen nicht mehr kommutativ ist, man also beispielsweise zwischen Links- und Rechtsmoduln über dem Gruppenring unterscheiden muss.

Sei  $G$  die Fundamentalgruppe von  $M$  und  $F$  eine freie abelsche Gruppe zusammen mit einem Epimorphismus  $\alpha : G \rightarrow F$ . Also faktorisiert  $\alpha$  durch die maximale freie abelsche Quotientenabbildung  $G \rightarrow G/[G, G] \rightarrow ab(G) \cong \mathbb{Z}^{b_1(G)}$  die als Komposition kanonischer Abbildungen kanonisch ist. Folglich ist der Rang von  $F$  durch  $b_1(G)$  nach oben beschränkt. Dann erhält man einen Gruppenisomorphismus  $p'_* : H_1(\hat{M}) \rightarrow$

$\ker \alpha / [\ker \alpha, \ker \alpha]$  der durch die Überlagerungsprojektion  $\hat{M} = M_\alpha \rightarrow M$  zu  $\alpha$  induziert wird. Ziel wäre es zu zeigen, dass diese Abbildung auch einen Isomorphismus von  $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln liefert. Daraus würden natürlich gleiche Präsentationen folgen, die zu gleichen Elementaridealen führen und so fort. Hierfür benötigt man jedoch überhaupt eine  $\mathbb{Z}[F]$ -Modul Struktur auf dem Quotienten  $G'/G''$  für  $G' = \ker \alpha, G'' = [G', G']$ . Diese soll zunächst definiert werden:

Es seien  $g_1, \dots, g_m, m \leq b_1(G)$  Elemente die auf eine Basis von  $F$  abgebildet werden. Diese definieren dann Automorphismen von  $G'/G''$  durch

$$\hat{t}_i(x) = [g_i][x][g_i^{-1}] = [g_i x g_i^{-1}]$$

Man prüft leicht, dass diese unabhängig der gewählten  $g_i$  sind. Es sei für den Beweis bemerkt, dass die Kommutatoruntergruppe  $G'' \subset G'$  eine charakteristische Untergruppe ist.

*Bemerkung 4.1.1.* Das ist eine Form der expliziten Konstruktion des Falles, wenn man von einer induzierten Operation einer zerfallenden kurzen exakten Sequenz redet:

$$0 \rightarrow G'/G'' \rightarrow G/G'' \rightarrow G/G' \rightarrow 0$$

Da  $F = G/G'$  frei abelsch ist, zerfällt diese Sequenz und man erhält eine Abbildung  $F \rightarrow \text{Aut}(G'/G'')$  genauer gesagt, eine Gruppenwirkung auf  $G'/G''$  durch Konjugation unter der Einbettung  $G'/G'' \hookrightarrow G/G''$  mit zurückgezogenen Elementen aus  $F$ . Dies ist wohldefiniert da das Bild von  $G'/G''$  einem Kern entspricht, also Normalteiler ist. Offensichtlich stimmt diese Operation mit der obigen überein.

Mit  $\alpha(g_i) = t_i$  als ein Element der Basis von  $F$ , ist die Gruppenwirkung von  $F$  auf  $H_1(\hat{M})$ , die durch die Decktransformationen  $F$  induzierte  $t_i \gamma = t_{i*} \gamma, t_i \in F, \gamma \in H_1(\hat{M})$ . Also ist nur zu zeigen, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H_1(\hat{M}) & \xrightarrow{p'_*} & G'/G'' \\ t_i \downarrow & & \downarrow \hat{t}_i \\ H_1(\hat{M}) & \xrightarrow{p'_*} & G'/G'' \end{array}$$

und somit die Operationen verträglich sind. Davon überzeugt man sich, indem man die Wirkung von  $t_i$  näher betrachtet: nach Hurewicz lässt sich ein Zykel aus  $H^1(\hat{M})$  als Schleife darstellen. Die Decktransformation  $t_i$  bildet diese Schleife nun auf eine Schleife ab, die homolog ist zu der Konjugation mit einer zu einem Weg gelifteten Schleife  $\tau_i, [\tau_i] \in \pi_1(M, p)$ , welche die Decktransformation  $t_i$  erzeugt. Aber wegen  $\alpha([\tau_i]) = t_i$  ist  $\hat{t}_i$  auch nur Konjugation mit  $\tau_i$ .

Also lassen sich alle Definitionen der Alexander Invarianten analog zu Kapitel 2, auf endlich erzeugten Gruppen definieren, wobei der Alexander Modul  $G'/G''$  als Modul über  $\mathbb{Z}[G/G'] = \mathbb{Z}F$  aufgefasst wird. Fast! Die Definition der Elementarideale setzt noch voraus, dass dieser Modul endlich erzeugt ist. Wir hatten bisher nur gesehen, dass dies für Fundamentalgruppen von 3-Mannigfaltigkeiten stimmt, indem wir eine endliche CW-Struktur ausgenutzt haben. Dies wird am Ende des Kapitels festgestellt.

*Bemerkung 4.1.2.* Es stellt sich sogar heraus, dass in den vielen Fällen auch die Thurston Norm, aus der Fundamentalgruppe berechnet werden kann, indem man getwistete Alexander Polynome verwendet — die mit ähnlichen Methoden wie oben, allein aus der Fundamentalgruppe gewonnen werden können. Sie beinhalten meist noch mehr Daten als das gewöhnliche Alexander Polynom und es lässt sich mit dem induzierten Norm dieser Polynome, die Abschätzung aus Theorem 1.1 verallgemeinern. Diese Resultate wurden in mehreren Arbeiten von Friedl unter verschiedenen Zusammenarbeiten entwickelt, etwa in [3–8]. Weiter nützen die getwisteten Alexander Polynome um bis zu einem gewissen Grade eine Umkehrung der Gleichheit aus Theorem 1.1 bei Faserungen zu ermöglichen, siehe [4, 7].

Um ohne topologische Methoden einzusehen, dass der Alexander Modul endlich erzeugt ist, ist es nötig den allgemeinen Gruppenring und noethersche Moduln genauer zu betrachten. Wir werden uns im Folgenden etwas mehr Mühe geben als eigentlich nötig wäre, um einen Zusammenhang mit dem nächsten Kapitel herzustellen, in welchem andere Definitionen der Alexander Invarianten verwendet werden.

**Definition 4.1** (Augmentationsideal). Sei  $H$  ein Normalteiler in  $G$ . Dann ist das Augmentationsideal:

$$m_G(H) = \langle (h - 1), h \in H \rangle$$

Falls  $G = H$  so definiere:  $m(G) = m_G(G)$ .

*Bemerkung 4.1.3.* Das Augmentationsideal erhält seinen Namen, da es aus dem Kern der Augmentationsabbildung, die jedes Gruppenelement auf die Eins abbildet, entsteht:

$$m_G(G) = \ker(\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z})$$

**Lemma 4.1.** Sei  $\phi : G \rightarrow F$  ein Homomorphismus mit Fortsetzung  $\hat{\phi} : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[F]$ . Dann gilt:

$$\ker(\hat{\phi}) = m_G(\ker \phi) = m(\ker \phi)\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[G]m(\ker \phi)$$

Der Beweis ist einfach, obgleich man elementweise oder mit funktoriellen Methoden argumentiert und wird deswegen übersprungen. Die Beidseitigkeit des Ideal folgt aus der Eigenschaft, dass  $\ker \hat{\phi}$  Normalteiler ist, und so zeigt man auch, dass die Definition 4.1 des Augmentationsideals, ein beidseitiges Ideal liefert.

**Beispiel 3.** Falls  $G = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$ , dann ist der Gruppenring  $\mathbb{Z}[G]$ , der Ring der Laurentpolynome in einer Variablen  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ . Dann ist  $m(G) \subset \mathbb{Z}[G]$  ein freier  $\mathbb{Z}[G]$  Modul mit einelementiger Basis  $(t - 1)$ . Allgemeiner ist offensichtlich für die freie Gruppe  $F(S)$ ,  $|S| < \infty$ , das Augmentationsideal  $m(F(S)) \subset \mathbb{Z}[F(S)]$  ein freier  $\mathbb{Z}[F(S)]$  Modul mit  $|S|$ -elementiger Basis  $\{(s - 1), s \in S\}$ .

**Beispiel 4.** Wir werden später auf das Augmentationsideal  $m(F)$  für  $F \cong \mathbb{Z}^n$  treffen. In Anlehnung an das vorherige Beispiel und der Betonung auf die in der Einleitung erwähnte Übersetzung algebraischer Probleme in topologische, gilt sogar weiter:  $m(F)$  ist ein freier  $\mathbb{Z}[F]$ -Modul genau dann wenn  $n = 1$ . Denn wenn  $m(F)$  frei ist, so liefert dies eine freie

Auflösung von  $\mathbb{Z}$  (über die Augmentationsabbildung als  $\mathbb{Z}[F]$ -Modul aufgefasst) über  $\mathbb{Z}[F]$  der Länge 1. Also  $H^2(F) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}[F]}^2(\mathbb{Z}[F], \mathbb{Z}) = 0$ . Aber die Gruppenkohomologie berechnet sich topologisch als

$$H^2(F) = H^2(K(F, 1)) = H^2(T^n) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}$$

## 4.2 Eine äquivalente Definition von McMullen?

In der Arbeit von McMullen [14] verwendet er unterschiedliche Definitionen der Alexander Invarianten. Tatsächlich stellen sich diese auch bei Berechnungen als günstig heraus, da relative Homologie betrachtet wird. Ist es jedoch möglich Berechnungen für die obigen Definitionen der Alexander Invarianten zu ersetzen? Mit anderen Worten, inwieweit sind die Definitionen äquivalent? Die Frage soll nun geklärt werden, dafür zunächst die Definitionen:

**Definition 4.2.** Sei  $\phi : G \rightarrow F$  die kanonische Abbildung auf den maximalen frei abelschen Quotienten für eine endlich erzeugte Gruppe  $G$ . Dann ist der Alexander Modul von  $G$  nach McMullen's Definition der  $\mathbb{Z}[F]$ -Modul:

$$A_M(G) = m(G)/m(G)m(\ker \phi)$$

mit dem Alexander Ideal

$$I_M(G) = E_1(A_M(G)) \subset \mathbb{Z}[F]$$

und dem Alexander Polynom, so dass  $(\Delta_M) \supset I_M(G)$  das kleinste Hauptideal ist.

Falls  $G = \pi_1(M, p)$  kann man den isomorphen  $\mathbb{Z}[F]$ -Modul mit der per Decktransformationen  $(M_\phi, \pi^{-1}p) \rightarrow (M_\phi, \pi^{-1}p)$  induzierten  $F$ -Wirkung als Definition verwenden

$$A_M(G) = H_1(M_\phi, \pi^{-1}p; \mathbb{Z})$$

wobei  $M_\phi \xrightarrow{\pi} M$  die universelle abelsche Überlagerung ist.

Die Kennzeichnung mit der Definitionen mit  $M$ , deutet die Definition nach McMullen an, nicht etwa die Mannigfaltigkeit. Dies wird später ohne Zweideutigkeiten verwendet. Lemma 4.1 liefert  $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[G]/m(\ker \phi)$ , also ist die algebraische Definition von McMullen als Quotient ein  $\mathbb{Z}F$ -Modul (genauer verwendet man hier den Isomorphiesatz  $(G/N)/(H/N) \cong G/H$ ), insbesondere noethersch.

Die bisherige Maschinerie sollte nun genügen um die endliche Erzeugbarkeit der algebraischen Variante des Alexander Moduls zu zeigen. Dies und bisherige Resultate sollen in folgender Proposition festgehalten werden:

**Proposition 4.2.** *Es sei  $G$  eine endlich erzeugte Gruppe,  $F \cong \mathbb{Z}^b$  eine freie abelsche Gruppe mit  $b \leq b_1(G)$  und  $\phi : G \rightarrow F$  ein Epimorphismus. Außerdem bezeichne wie oben  $G' = \ker \phi$  und  $G'' = [G', G']$  die Kommutatoruntergruppe. Die folgende zerfallende Sequenz liefert eine Gruppenwirkung von  $F$  auf  $G'$ :*

$$0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 0$$

Weiter liefert diese Sequenz eine exakte Sequenz von  $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln

$$0 \rightarrow m(\ker \phi)/m(\ker \phi)m(G) \rightarrow m(G)/m(\ker \phi)m(G) \rightarrow m(F) \rightarrow 0 \quad (3)$$

und einen Isomorphismus von  $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln  $G'/G'' \cong m(\ker \phi)/m(\ker \phi)m(G)$ .

Insbesondere ist der Alexander Modul endlich erzeugt.

*Bemerkung 4.2.1.* Für abelsche Gruppen ist  $m(F)$  frei und die Sequenz zerfällt immer. Für  $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln zerfällt sie genau dann wenn  $F \cong \mathbb{Z}$  siehe Beispiel 4.

*Beweis.* Man betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & m_G(\ker \phi) & \longrightarrow & m(G) & \longrightarrow & m(F) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & m_G(\ker \phi) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[F] \longrightarrow 0 \end{array} \quad (4)$$

Die zweite Reihe ist exakt, nach Lemma 4.1 und die Exaktheit der ersten Reihe geht nach Anwendung des Schlangenlemmas auf folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Reihen, deren Spalten die Augmentationsabbildungen sind, hervor:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & m_G(\ker \phi) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[F] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Da  $m(\ker \phi) \cdot m(G) \subset m \cdot \mathbb{Z}[G] = m_G(\ker \phi)$  nach Lemma 4.1, faktorisieren die injektiven Abbildungen aus Diagramm 4. Die erste Zeile nimmt dann die gewünschte Form der exakten Sequenz (3) aus der Proposition an. Dies ergibt eine exakte Sequenz von  $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln.

Es ist also noch der behauptete Isomorphismus zu zeigen. Dieser lässt sich einfach angeben:

$$\begin{aligned} G'/G'' &\rightarrow m(G')/m(G')m(G) \\ [g'] &\mapsto [(g' - 1)] \\ [g'] &\leftarrow [(g' - 1)g] \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind wohldefiniert und einander invers, da  $[(g' - 1)g] = [(g' - 1)g - (g' - 1)(g - 1)] = [(g' - 1)]$ .  $\square$

**Corollar 4.3.** *Jeder Alexander Modul einer endlich erzeugten Gruppe ist endlich erzeugt.*  $\square$

Da die Gruppenwirkung von  $F$  auf der Homologie der Überlagerung durch Abbildungen von Räumen induziert wird, liefert die lange exakte Sequenz des Paares  $(M_\phi, \pi^{-1}p)$  eine exakte Sequenz von  $\mathbb{Z}[F]$  Moduln. Da die von der Inklusion induzierte Abbildung  $\mathbb{Z}[F] \cong H_0(\pi^{-1}p) \rightarrow H_0(M_\phi) \cong \mathbb{Z}$  Auswertung der Koeffizienten entspricht, liefert die

lange exakte Homologiesequenz des Paares die folgende kurze exakte Sequenz von  $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln:

$$0 \rightarrow H_1(M_\phi) \rightarrow H_1(M_\phi, \pi^{-1}p) \rightarrow m(F) \rightarrow 0$$

Diese stimmt also genau mit der Sequenz (3), dem allgemeineren algebraischen Resultat aus Proposition 4.2 überein.

Welche Folgerungen ziehen wir aus diesen Ergebnissen? Nun ja, zunächst unterscheiden sich die gegebenen Definitionen von McMullen mit denen aus Kapitel 2, sowohl die Alexander Moduln als auch die Alexander Ideale. Eine völlige Äquivalenz ergibt sich also nicht, aber die oben gesicherte Beziehung in der exakten Sequenz liefert zusammen mit dem folgenden Lemma die Gleichheit der kleinsten Hauptideale und somit der Alexander Polynome und der Alexander Norm. Dies legitimiert die Verwendung der unterschiedlichen Definitionen im kommenden Beweis des Theorems 1.1 als Mittel zum Zweck.

**Lemma 4.4.** *Für eine kurze exakte Sequenz von  $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow m(F) \rightarrow 0$$

*wobei  $F \cong \mathbb{Z}^n$ , stimmen  $\Delta_i(A) = \Delta_{i+1}(B)$  überein.*

Siehe zum Beispiel die Arbeit von Traldi [20].

### 4.3 Rationale Alexander Invarianten

Wie man oben den ganzzahligen Gruppenring erhalten hat, so erhält man auch den rationalen Gruppenring  $\mathbb{Q}[G] = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ . Da sowohl die Theorie der Vektorräume, also  $\mathbb{Q}$ -Moduln, als auch die Theorie der Moduln über Hauptidealringen — etwa  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$  (vgl. Lemma 5.6) — sehr überschaubar ist, bietet es sich an auch rationale Alexander Invarianten zu definieren. Allerdings betrachtet diese Arbeit ganzzahlige Alexander Invarianten, also ist die Nützlichkeit der rationalen Alexander Invarianten in diesem Kontext fraglich, es sei denn solche Berechnungen würden zur Bestimmung der ganzzahligen Alexander Invarianten führen. Deswegen dient dieser Abschnitt lediglich dem Hinweis, dass das rationale Alexander Polynom dieselben Informationen wie das ganzzahlige Alexander Polynom enthält, die Berechnung also unabhängig von einer  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  oder einer  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$  Präsentation ist.

Bekannterweise nennt man ein Polynom primitiv, falls keine nicht Einheit des zugrunde liegenden Ringes alle Koeffizienten teilt.

**Lemma 4.5.** *Seien  $f, g \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  zwei Laurentpolynome und  $f$  primitiv. Dann ist die Teilbarkeit von  $g$  durch  $f$  gleichbedeutend in den Ringen  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  und  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ .*

*Beweis.* Falls  $f|g$  in  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  gilt, so trivialerweise in  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ . Sei umgekehrt  $g = pf$  mit  $p \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ . Dann ist für ein  $q \in \mathbb{Q}$  das Polynom  $\tilde{p} \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  primitiv mit  $q\tilde{p} = p$ . Aber das Produkt zweier primitiver Polynome  $\tilde{p}f = g/q$  ist primitiv, also  $q \in \mathbb{Z}$ .  $\square$



*Bemerkung 4.3.1.* Hat man eine Präsentationsmatrix  $(x_{ij})_{ij}$  eines  $\mathbb{Z}[F]$ -Moduls gegeben. So liefert die Rechtsexaktheit des Tensorierens eine Präsentationsmatrix des tensorierten  $\mathbb{Q}[F]$ -Moduls durch  $(x_{ij} \otimes 1)_{ij}$ .

Unter Ausnutzung von Lemma 4.5, wird in [18, Lemma 2.2] die folgende Proposition mit elementaren Mitteln gezeigt, deswegen sei der einfache Beweis hier übersprungen:

**Proposition 4.6.** *Seien jeweils  $A, A \otimes \mathbb{Q}$  endlich erzeugte  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}], \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Moduln. Dann existiert ein eindeutiges  $q \in Q$ , sodass für  $q\Delta^i(A) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  primitiv ist und für  $\Delta_{\mathbb{Q}}^i(A \otimes \mathbb{Q}) \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$  gilt:*

$$\Delta_{\mathbb{Q}}^i(A) = q\Delta^i(A)$$

## 5 Beweis des Theorems

Der Beweis des Theorems und somit der Aufbau dieses Kapitels lässt sich in wenigen Worten grob skizzieren. Zu Beginn werden Konstruktionen entwickelt, die es erlauben konkret mit dualen Flächen zu arbeiten. Anschließend werden zuerst Thurston- dann Alexander-Norm einer Kohomologieklassse  $\phi$  mit der ersten Bettischen Zahl ihres Kerns in  $\pi_1(G)$  verglichen. Die Transitivität dieser Abschätzung liefert dann das Theorem.

### 5.1 Konstruktionen

Bevor die Wahl einer dualen Fläche spezifiziert wird, widmet sich der folgende Teil der zu betrachtenden Überlagerung bezüglich einer Homologieklassse. Will man mit einer Überlagerung Berechnungen anstellen, so sollte man sie möglichst gut kennen. Deswegen folgt nun eine explizite Konstruktion, die sich im späteren Beweis als hilfreich herausstellen wird.

**Konstruktion 1** (Aufschneiden an einer Fläche). Aus der Überlagerungstheorie ist bekannt, dass zu jeder normalen Untergruppe der Fundamentalgruppe eines hinreichend gut zusammenhängendem Hausdorffraum (insbesondere Mannigfaltigkeiten), auch eine normale Überlagerung existiert, die bis auf Überlagerungsisomorphie eindeutig ist, siehe [10, Chapter 1.3]. Nun definiert aber ein Element  $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$  einen Homomorphismus auf der ersten Homologiegruppe und somit nach den Feststellungen aus Bemerkung 2.2.3 auch einen Homomorphismus  $\phi = \hat{\phi} \in \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ .

Dieses  $\phi$  liefert also die normale Untergruppe  $[\pi_1(M), \pi_1(M)] \subset \ker \phi \subset \pi_1(M)$ , welche wiederum eine Überlagerung definiert, die fortan  $M_\phi$  genannt wird. Zur Berechnung der Thurston-Norm und ihrem angekündigten Vergleich mit  $b_1(\ker \phi) = b_1(M_\phi)$  stellt sich die Frage nach einer Abhängigkeit der Überlagerung  $M_\phi$  von einer dualen Fläche. Sei also  $(S, \partial S) \subset (M\partial M)$  eine eingebettete orientierte Fläche. Da diese Kodimension 1 und eine Orientierung hat, ist sie auch zweiseitig, besitzt also eine Umgebung  $U \subset M$ , sodass ein Diffeomorphismus  $S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$  existiert dessen Einschränkung auf  $S \times \{0\}$  die Inklusion ist. Das bedeutet, dass die 3-Mannigfaltigkeit an  $S$  „aufgeschnitten“ werden kann (siehe etwa [2, Kapitel 4.2]), wobei das Aufschneiden bedeutet, das Komplement der Fläche zu betrachten (das Resultat ist offensichtlich eine Mannigfaltigkeit, jedoch können Eigenschaften wie Kompaktheit oder Randbedingungen entfallen). Will man nun die durch Aufschneiden gewonnene Kopien  $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}, M_i \cong M - S$  wieder verkleben, erweist sich die Zweiseitigkeit der Fläche als günstig sogar notwendig (sonst würde nur *eine* Kopie von  $S$  als Rand entstehen). Eine zuvor fixierte zweiseitige glatte Einbettung  $h : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  liefert nämlich durch  $h(S, (-\epsilon, 0))$  und  $h(S, (0, \epsilon))$  offene Mengen  $M_i^-$  und  $M_i^+$  in den  $M_i$ . Durch den strukturerhaltenden Diffeomorphismus  $h$  auf sein Bild, können nun  $M_i$  und  $M_{i+1}$  jeweils entlang  $M_i^+$  und  $M_{i+1}^-$  verklebt werden — genauer:  $h$  liefert eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung

$$\cdots \sqcup M_{i-1} \sqcup (S \times (-\epsilon, \epsilon)) \sqcup M_i \sqcup (S \times (-\epsilon, \epsilon)) \sqcup M_{i+1} \sqcup \cdots ,$$

sodass der Quotient eine unendlich zyklische Überlagerung mit der offensichtlichen Projektion bildet. Da entlang offenen Mengen verklebt wird, also durch die „Überlappungen“,

ist es möglich den gewonnenen Quotienten mit einer differenzierbaren Struktur zu versehen, so dass die Inklusionen der  $M_i$  glatte Einbettungen, durch die Offenheit also Untermannigfaltigkeiten sind.

Ein weiterer Vorteil dieser expliziten Konstruktion ist es, die Decktransformationsgruppe zu sehen. Sie ist durch einen Erzeuger  $t$  über  $t \mapsto 1$  zu  $\mathbb{Z}$  isomorph und unter diesem Isomorphismus entspricht  $n \in \mathbb{Z}$  einer Translation aller  $M_i$  um  $n$ . Es bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Überlagerung auch *die* zu  $S$  gehörige Überlagerung ist, die in dem obigen Sinne dem dualen  $\phi$  entspricht. Dies sieht man zum Beispiel ein, indem man sich unter dem Isomorphismus  $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$  einen glatten Repräsentanten des Bildes von  $\phi$  aussucht. Natürlich existiert so einer nach den Bemerkungen in 3.2 immer, jedoch soll dieser für den gewünschten Nachweis explizit  $S$  als Urbild eines regulären Wertes ergeben. Dafür wähle man einen zweiseitigen Kragen  $S \times (-\epsilon, \epsilon) \subset M$  und definiere eine Abbildung  $f : M \rightarrow S^1$ , die  $S \times 0$  auf  $p \in S^1$  abbildet,  $M - S \times (-\epsilon, \epsilon)$  konstant auf den antipodalen Punkt von  $p$  abbildet und auf  $S^1 \times (-\epsilon, \epsilon)$  gemäß der Projektion auf den zweiten Faktor fortgesetzt wird. Bezüglich dieser glatt konstruierten Abbildung  $f$  ist der Wert  $p$  regulär und  $f^{-1}p = S$  mit der richtigen Orientierung, falls die Zweiseitigkeit entsprechend dem obigen Kommentar gewählt wurde. Durch paralleles Aufschneiden von  $M$  an  $S$  und  $S^1$  and  $p$  (analog wie oben nur 2 Dimensionen tiefer) erhält man folgendes kommutatives Diagramm von Überlagerungen:

$$\begin{array}{ccc} M_\phi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

Dieses Diagramm ist aber nun ein Pullback Diagramm von glatten Faserbündeln. Also ist die Diffeomorphieklasse von  $M_\phi$  eindeutig.

Wir können festhalten:

**Corollar 5.1.** *Die unendlich zyklische Überlagerung die durch Aufschneiden und Verkleben an einer zu  $\phi$  dualen Fläche entsteht entspricht der normalen Untergruppe  $\ker \phi$  ist.*

**Corollar 5.2.** *Jede zu  $\phi$  duale Fläche kann als Urbild eines regulären Wertes einer glatten Abbildung  $M \rightarrow S^1$  dargestellt werden, mit  $H_1(M \rightarrow S^1) = \phi$*

**Konstruktion 2** (Graph einer orientierten 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit). Sei  $S$  ein beliebiger zu  $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$  eigentlich eingebetteter, orientierter Repräsentant. Wir haben gesehen, dass mit obiger Konstruktion eine Abbildung  $f : M \rightarrow S^1$  entsteht mit  $f^{-1}p = S$ . Diese Abbildung soll in dieser Konstruktion faktorisiert werden über einen Graphen. Bezeichne  $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n$  und  $M - S = M_1 \sqcup \dots \sqcup M_m$  die Zusammenhangskomponenten von  $S$  bzw.  $M - S$ . Betrachte nun den gerichteten Graphen  $G$  dessen Knoten bijektiv den Komponenten  $M_i$  entsprechen und dessen Kanten aus den Komponenten  $S_i$  mit ihrer Orientierung hervorgehen, also ein Graph mit  $m$  Knoten und  $n$  Kanten, wobei eine Kante von einem Knoten zu einem anderen verläuft, wenn ihre

assozierten Komponenten  $M_i, M_j$  durch das entsprechende Flächenstück von  $S$  getrennt werden, sodass die Komponenten das zweiseitige Flächenstück an der negativen beziehungsweise positiven Seite berühren je nachdem ob die Kante vom assoziierten Knoten aus oder eingeht.

Mit genau diesen zweiseitigen Umgebungen der Flächenkomponenten ist es möglich sich ähnlich wie oben eine Abbildung  $M \rightarrow G$  zu definieren, welche die Assoziationen respektiert. Dafür betrachte man die glatte Einbettung (welche die Zweiseitigkeit der Komponenten respektiert):

$$\sqcup(S_i \times (-\epsilon, \epsilon)) \xrightarrow{=} S \times (-\epsilon, \epsilon) \hookrightarrow M$$

Dann existiert analog zur obigen Konstruktion die Quotientenabbildung  $q : M \rightarrow G$  auf den Graph, durch Kollabieren der  $M_i \cap (M - S \times (-\epsilon, \epsilon))$  auf ihre Knoten und Projektion von  $(-\epsilon, \epsilon)$  auf das Innere der Kanten des Graphen. Betrachtet man außerdem  $G \rightarrow S^1$  die Abbildung die jede Kante entsprechend ihrer Richtung einmal um die Sphäre  $S^1 = I/\partial I$  abbildet und die Knoten auf den antipodalen Punkt des ausgezeichneten Punktes  $p \in S^1 = [\partial I]$ . Bezüglich der Komposition der beiden Abbildungen  $M \rightarrow S^1$ , ist nun  $\phi$  das Bild des Erzeugers von  $H^1(S^1)$  unter der Rückziehung auf der Kohomologie, da  $M \rightarrow S^1$  eine zu  $S$  duale Kohomologieklass definiert (da  $S = (M \rightarrow S^1)^{-1}p$  ist). Sei  $f$  nach wie vor die Abbildung aus der letzten Konstruktion so erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ M & \xrightarrow{\quad} & G \longrightarrow S^1 \end{array} \quad (5)$$

Da  $M$  zusammenhängend ist, ist es auch  $G$ .

Im Folgenden wollen wir häufig den Spezialfall betrachten, dass  $\phi : H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  surjektiv ist.

**Definition 5.1.** Ein solches  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  heißt primitiv.

## 5.2 $\|\cdot\|_T$ -minimierende Flächen

Nun wollen wir uns eine besondere Art von Flächen anschauen, nämlich die Repräsentanten der zu  $\phi$  dualen Klasse, bei denen  $\chi_-$  minimal ist. Dass immer ein Repräsentat existiert, der gewissen Eigenschaften genügt, sichert der folgende Satz:

**Lemma 5.3.** Sei  $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$  ein primitives Element mit  $b_1(\ker \phi) < \infty$ . Dann existiert eine zusammenhängende Thurstonnorm-minimierende Fläche  $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$  mit  $\phi \mapsto [S]$  unter Poincaré Dualität und  $b_2(S) = b_3(M)$ , so dass folgende Abschätzung erfüllt ist:

$$b_1(S) \leq b_1(\ker(\phi))$$

*Beweis.* Wähle unter allen Thurston-Norm-minimierenden Flächen eine orientierte Fläche  $S$  mit einer geringsten Anzahl an Zusammenhangskomponenten.

*Behauptung: Diese Fläche ist zusammenhängend.* Man betrachte den aus  $S$  entstehenden Graphen nach Konstruktion 2. Wir werden zeigen, dass unter der Minimalitätsanforderung von  $S$  unter diesen Identifikationen klar ist, dass  $G$  ein topologischer Kreis ist und  $G \rightarrow S^1$  die Identität. Das impliziert die Behauptung.

Dafür betrachte man folgendes Diagramm von Pullbacks von Überlagerungen:

$$\begin{array}{ccccc} M_\phi & \longrightarrow & G_\phi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & G & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

Man erhält unendlich zyklische Überlagerungen, also unendlich zyklische Decktransformationsgruppen. Jedes Element in  $\pi_1(G_\phi)$  ist homotop zu einem Lift einer Schleife aus  $\pi_1(G)$  (Vernachlässigung des Basispunktes ist in dieser Situation keine Einschränkung). Unter der oben gezeigten Kompatibilitätsvoraussetzung dieser Überlagerungen durch Pullbacks, mit den Überlagerungen durch Aufschneiden an dualen Flächen (deswegen die suggestive Schreibweise  $M_\phi$ ), entsteht  $G_\phi$  durch „Aufschneiden an den Knoten“, also liftet jede Schleife aus  $G$  trivial. Folglich ist  $G_\phi$  einfach zusammenhängend, überlagert  $G$  also universell. Somit ist  $\pi_1(G) = \mathbb{Z}$ . Also ist  $G$  als Graph vom Homototyp ein Kreis. Da  $G$  aber auch die Kompaktheit von  $M$  erbt, ist nur noch die Existenz von Knoten ohne ein- oder ausgehende Kanten auszuschließen, um zu zeigen dass  $G$  ein topologischer Kreis ist. Diese ist aber durch die Minimalitätseigenschaft im Bezug auf die Komponenten der gewählten Fläche ausgeschlossen, da solche Kanten einer nullhomologen Kette entsprechen. Dies sieht man, falls  $M$  geschlossen ist wie folgt ein: Sei  $M_i$  ein Knoten der nur eingehende oder nur ausgehende Kanten besitzt, etwa  $S_i, i \in I$ . Dann ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $(M_i, \sqcup_{i \in I} S_i)$  eine Mannigfaltigkeit mit Rand (je nach Geschmack betrachte man sonst die umgekehrte Orientierung auf den  $S_i$  oder das Komplement von  $M_i$ ). Die Homologieklassse von  $\hat{S} = \sqcup_{i \in I} S_i$  ist das Bild der Fundamentalklassen unter der von der Inklusion  $H_2(i : \hat{S} \hookrightarrow M)$  induzierten Abbildung. Doch  $\hat{S} \xrightarrow{i} M = \hat{S} \xrightarrow{j} M_i \cup \hat{S} \xrightarrow{k} M$  faktorisiert und mit Funktorialität faktorisiert auch  $H_2(i) = H_2(k)H_2(j)$  aber  $H_2(j) = 0$ . Hier wurde benutzt, dass der Rand einer Mannigfaltigkeit als Klasse mit Kodimension 1 nullhomolog ist (aus der langen exakten Sequenz für das Paar folgt, dass die Inklusion von Rändern auf der Homologie der Kodimension 1 eine triviale Abbildung induziert, da der Randoperator einen Isomorphismus induziert). Falls  $M$  jedoch nicht geschlossen ist, so folgt mit einem einfachen Schnitzzahlenargument, dass jede Homologieklassse als transversale Schleife ausgewertet auf  $[\hat{S}]$  (als duale Kohomologieklassse), die Summe der transversalen Schnitte mit Vorzeichen ergibt, also  $\hat{S}$  dual zu dem trivialen Homomorphismus  $\pi_1(M) \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$  ist, also selbst nullhomolog. Folglich würde dies eine Fläche mit  $|I|$  weniger Komponenten und somit einen Widerspruch liefern:

$$[S] = [\sqcup_{i \notin I} S_i] \sqcup [\sqcup_{i \in I} S_i] = [\sqcup_{i \notin I} S_i] + [\sqcup_{i \in I} S_i] = [\sqcup_{i \notin I} S_i]$$

Betrachtet man nun, wissend dass  $G$  ein topologischer Kreis ist, die induzierte Abbildung auf der Homologie  $(G \rightarrow S^1)_*$ , so ist diese ein Isomorphismus, da  $\phi$  primitiv ist. Also

besitzt  $G$  nur eine Kante und die Fläche  $S$  ist zusammenhängend.

Die nächste Gleichheit — *die Übereinstimmung des Ranges auf den Top-Homologien von  $S$  und  $M$*  — hängt von der Existenz eines Randes ab. Da  $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$  folgt aus  $\partial S \neq \emptyset$  direkt  $b_2(S) = b_3(M) = 0$ . Falls  $S$  aber leeren Rand hat, gilt  $b_2(S) = 1$  und es muss  $b_3(M) = 1$  gezeigt werden. Dazu wird die Existenz eines Randes von  $M$  widerlegt:

Nach Annahme existieren nur Tori als Randkomponenten. Sei  $T \subset \partial M$  eine solche Randkomponente. Da  $S$  keinen Rand hat, also  $T$  nicht berührt, enthält die durch Aufschneiden an  $S$  erhaltene unendlich zyklische Überlagerung  $M_\phi$  auch unendlich zyklisch viele Kopien von  $T$  als Randkomponenten. Genauer: unter Verwendung dieser Aufschneide-Konstruktion 1, liftet  $T$  in jedes  $M_i \cong M - S \supset T$ , auf der sich die Projektion zu einem Diffeomorphismus einschränkt. Im Folgenden soll die Notation  $\overline{M}_i$  für die (wieder) kompakte (Unter-)Mannigfaltigkeit von  $M_\phi$  verwendet werden, die den Fundamentalbereich darstellt, der  $M_i$  enthält. Zusammen mit der langen exakten Sequenz für eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit  $(N, \partial N)$

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(N; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_2(N, \partial N; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\delta} & H_1(\partial N; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(N; \mathbb{Q}) \\ & & & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & & \text{Lefschetz Dualität: } \cong & & \cong & \\ & & & & H^1(N; \mathbb{Q}) & & \end{array}$$

und der daraus folgenden Abschätzung

$$b_1(\partial N) = \dim(\text{Im } \delta) + \dim(\text{Im } i_*) \leq 2b_1(N)$$

erhält man für jede kompakte zusammenhängende (man bemerke die implizite Anforderung an  $I \subset \mathbb{Z}$ ) Untermannigfaltigkeit der Form

$$\bigcup_{i \in I} \overline{M}_i \subset M_\phi$$

die Abschätzung:

$$b_1\left(\bigcup_{i \in I} \overline{M}_i\right) \geq \frac{1}{2}b_1\left(\partial \bigcup_{i \in I} \overline{M}_i\right) \geq \frac{1}{2}b_1(\sqcup_{i \in I} T) = |I|$$

Nun folgt aber aus der Mayer Vietoris Sequenz (für entsprechende offene Umgebungen<sup>2</sup>) die exakte Sequenz:

$$\cdots \rightarrow H_1(S \sqcup S; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1\left(\bigcup_{i \in I} \overline{M}_i; \mathbb{Q}\right) \oplus H_1\left(M_\phi - \bigcup_{i \in I} \overline{M}_i; \mathbb{Q}\right) \rightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

und somit

$$b_1(M_\phi) = b_1\left(\bigcup_{i \in I} \overline{M}_i\right) + b_1\left(M_\phi - \bigcup_{i \in I} \overline{M}_i\right) - b_1(S \sqcup S) \geq |I| - 2b_1(S)$$

---

<sup>2</sup>Stichworte hier: das allgemeine Theorem über Tubenumgebungen, Umgebungsdeformationsretrakt

Da aber  $b_1(M_\phi)$  nach Voraussetzung endlich ist und  $|I|$  beliebig groß, folgt also dass der Rand von  $M_\phi$  keine Tori enthält und somit leer ist.

Um nun noch *die Abschätzung*  $b_1(M_\phi) \leq b_1(S)$  zu zeigen, wird erneut die Konstruktion der Überlagerung durch Aufschneiden und Verkleben zur Hilfe genommen. Da  $\ker \phi \otimes \mathbb{Q} \cong H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$  nach Voraussetzung ein endlich erzeugter  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum ist, wird  $H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$  von einem kompakten Teilraum, etwa der Untermannigfaltigkeit  $\overline{M}_1 \cup \dots \cup \overline{M}_k \hookrightarrow M_\phi$  und somit auch  $t^k(\overline{M}_1 \cup \dots \cup \overline{M}_k) = \overline{M}_{k+1} \cup \dots \cup \overline{M}_{2k} \hookrightarrow M_\phi$ , erzeugt (heißt: die Inklusionen erzeugen Epimorphismen auf der ersten Homologie). Mit diesem Wissen liefert die folgende exakte Sequenz (induziert nach Mayer-Vietoris) die gesuchte Abschätzung:

$$\dots \rightarrow H_1(S; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1\left(\bigcup_{i \leq k} \overline{M}_i; \mathbb{Q}\right) \oplus H_1\left(\bigcup_{i > k} \overline{M}_i; \mathbb{Q}\right) \twoheadrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$$

□

*Bemerkung 5.2.1.* Da die erste Homologie der Überlagerung natürlich bessere Chancen hat, als Modul, durch Vergrößerung des Grundrings, über dem Gruppenring  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  endlich erzeugt zu sein, stellt sich die Frage, ob, wie und warum es sinnvoll oder möglich wäre das eben bewiesene für diesen Fall zu verallgemeinern. Dies wird später mit Hilfe der weiteren Lemmas in Kapitel 6.1 diskutiert.

*Bemerkung 5.2.2.* Tatsächlich liefert dieses Lemma sogar *die* Abschätzung des Theorems 1.1 wie wir nachher sehen werden. Gilt hier also Gleichheit, so folgt auch die Gleichheit in dem Theorem. Diese Bemerkung bietet also dem Leser die Möglichkeit noch einmal kurz inne zu halten und sich die Natur der Abschätzung anhand der vorhergehenden Seiten zu verdeutlichen.

### 5.3 Darstellungen des Alexander Ideals

Nun vergleicht das vorangegangene Kapitel also die Thurston Norm einer Kohomologiekategorie mit dem Rang ihres Kerns. Wie letzterer mit der Alexander Norm in Verbindung steht, stellt folgendes Lemma (vgl. [15, Assertion 4]) für  $b_1(M) = 1$  fest:

**Lemma 5.4.** *Es sei wieder  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  eine primitive Klasse und  $\ker \phi \otimes \mathbb{Q}$  ein endlich dimensionaler Vektorraum. Weiter sei  $t$  ein Erzeuger der Decktransmutationsgruppe von  $M_\phi$ , sodass analog zu der  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul Struktur auf dem  $\mathbb{Z}$ -Modul  $H_1(M_\phi; \mathbb{Z})$  der  $\mathbb{Q}$ -Modul  $H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$  als Modul über dem rationalen Gruppenring  $\mathbb{Q}[\langle t \rangle]$  aufgefasst werden kann, wobei der Gruppenring kanonisch mit  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$  identifiziert wird. Dann ist das Elementarideal  $E_0(H_1(M_\phi)) \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$  bezüglich einer  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Präsentation ein Hauptideal das von dem charakteristischen Polynom des induzierten Automorphismus  $t_*$  erzeugt wird.*

**Corollar 5.5.** *Insbesondere erzeugt für  $b_1(M) = 1$  das Alexander Ideal ein Hauptideal.*

□

Um zunächst die Aussage klarzustellen, sei darauf hingewiesen, dass nach dem universellen Koeffiziententheorem für Homologie gilt, dass  $H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \cong H_1(M_\phi; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$  und weiter folgt das entsprechende Corollar für das Alexander Polynom durch Proposition 4.6. In dem Beweis wollen wir nutzen, dass  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$  ein Hauptidealring ist. Deswegen folgendes Hilfsmittel:

**Lemma 5.6.**  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$  ist ein Hauptidealring.

Natürlich könnte man  $\mathbb{Q}$  für dieses Lemma durch jeden beliebigen Körper  $\mathbb{K}$  ersetzen. Allerdings entfällt durch Tensorieren mit einem endlichen Körper nicht jegliche Torsion, entsprechend birgt das mögliche Probleme bei Anwendung des universellen Koeffiziententheorems, da der Tor Anteil nicht zwangsweise verschwindet und somit hält Proposition 4.6 nicht mehr.

*Beweis.* Da  $\mathbb{Q}$  ein Körper ist, ist  $\mathbb{Q}[t]$  ein Hauptidealring. Nun ist allgemeiner die Eigenschaft für einen Ring ein Hauptidealring zu sein abgeschlossen unter Lokalisierung. Der Beweis läuft durch Betrachtung der kanonische Lokalisierungsabbildung:

$$\alpha : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$$

Die Ideale in der Lokalisierung sind genau die erweiterten Ideale aus dem ursprünglichen Ring, wegen der Erhaltung durch  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \supset I = \alpha_*(\alpha^*(I))$ , wobei  $\alpha^* = \alpha^{-1}$  die Kontraktion eines Ideals bezeichnet und  $\alpha_*(I) = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \cdot \alpha(I)$  die Erweiterung eines Ideals. Da aber jedes Element in  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$  durch Multiplizieren mit der Einheit  $t^N$  im Erzeugnis eines Polynoms liegt, wird ein Erzeuger aus dem Hauptideal  $\alpha^*(I)$  auf einen Hauptidealgeber in  $I$  abgebildet.  $\square$

In der Tat ist dieser Beweis in dem Fall des Laurenttrings doch mehr als einleuchtend, allerdings merkt man sich so auch gut den Beweis für allgemeine Lokalisierungen, indem man bemerkt, dass sich das Multiplizieren mit der Einheit  $t^N$  einfach erreichen lässt durch Multiplikation mit Elementen aus der multiplikativen Menge an der lokalisiert wurde — den neuen Einheiten aus dem lokalisierten Ring.

**Corollar 5.7.** Die ganzzahligen Alexander Polynome  $\Delta_\phi^i$  sind durch  $A_\phi(G) \otimes \mathbb{Q}$  vollständig charakterisiert.

*Beweis.* Der Beweis folgt aus Zusammentragen der Ergebnisse aus Beispiel 2, Proposition 4.6 und Lemma 5.6.  $\square$

Nach dem Einschub algebraischer Natur, nun der Beweis des Lemmas 5.4:

*Beweis von Lemma 5.4.* Da  $H_1(M_\phi, \mathbb{Q})$  ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, werden durch den Erzeuger  $t$  des Quotienten  $\pi_1(M)/\ker(\phi) \cong \mathbb{Z}$  der Decktransformationen Relationen auf den Basiselementen  $x_1, \dots, x_n$  eingeführt:

$$\begin{aligned} t_* x_1 &= \sum a_i^1 x_i \\ &\vdots \\ t_* x_n &= \sum a_i^n x_i \end{aligned}$$



Diese Gleichungen definieren genau die quadratische Matrix  $A$  des Automorphismus von Vektorräumen  $t_* \in \text{Aut}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q}))$  bezüglich der Basis  $(x_i)_i$ , die also als Spalten die  $a^i$  hat. Durch subtrahieren der obigen Gleichungen, erhält man eine formale Matrix der Form  $A - tI$ . Diese Matrix ist aber gleichzeitig die Präsentationsmatrix der freien Auflösung:

$$\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0$$

$$e_r \mapsto \sum a_i^r x_i - t x_r$$

Entsprechend ist die Determinante dieser Matrix das Elementarideal bezüglich  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ ,  $E_0(M_\phi) = \det(A - tI) = \chi(A) \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ .  $\square$

Diese Überlegungen liefern nun einen Zusammenhang zwischen den Thurston-Norm-minimierenden Flächen, deren erste Bettizahl nach Lemma 5.3 immer mit oberer Schranke  $b_1(\ker \phi)$  gewählt werden kann, und dem Grad des Alexander Polynoms von  $\phi$ . Weiter, falls also  $b_1(M) = 1$ , so folgt bereits der Zusammenhang mit der Alexander-Norm von  $M$ . Dies wollen wir in folgendem Corollar festhalten.

**Corollar 5.8.** *Sei  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  eine primitive Klasse. Dann gilt:*

$$\dim(\ker \phi \otimes \mathbb{Q}) = \text{Grad}(\Delta_\phi)$$

*Beweis.* Nach dem vorhergehenden Corollar gilt  $\dim \Delta_\phi = n + 1 = \text{Grad}(\chi(t_*)) = \text{Grad}(\Delta_\phi)$ , wobei  $t$  Erzeuger der unendlich zyklischen Decktransformationsgruppe ist.  $\square$

Für den nächsten Beweis ist es nützlich von Homologie mit getwisteten Koeffizienten zu sprechen: Sei  $G = \pi_1(M)$ , dann wird  $\mathbb{Z}[ab(G)]$  durch Linksmultiplikation mit Elementen aus  $G$  zu einem  $\mathbb{Z}[G]$ -Linksmodul. Ebenso wird die zelluläre Kettengruppe  $C_i(\hat{M})$  der universellen Überlagerung  $\hat{M}$ , mit den induzierten Automorphismen der Decktransformationsgruppe kanonisch identifiziert mit  $G$  zu einem  $\mathbb{Z}[G]$ -Rechtsmodul, wobei es hier natürlich wichtig ist, dass die zelluläre Struktur auf  $\hat{M}$  von  $M$  vererbt ist, also die Zellen genau den Zusammenhangskomponenten der Urbilder von Zellen in  $M$  entsprechen — nur so erhält man eine freie Basis aus den Zellen von  $M$ . Somit erhält man zu einem gegebenen zellulären Kettenkomplex  $C_3(\hat{M}, \hat{p}) \rightarrow C_2(\hat{M}, \hat{p}) \rightarrow C_1(\hat{M}, \hat{p}) \rightarrow C_0(\hat{M}, \hat{p})$ , wobei  $\hat{p} = \pi^{-1}(p)$  das Urbild einer Nullzelle  $p \in M$  ist, der universellen Überlagerung den tensorierten Kettenkomplex

$$C_3(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \rightarrow C_2(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \rightarrow C_1(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \rightarrow C_0(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \quad (6)$$

Man beachte hierbei, dass es sich nun um  $\mathbb{Z}$ -Moduln handelt, da der zugrundeliegende Gruppenring nicht kommutativ sein muss. Aber aus offensichtlichen Gründen, handelt es sich um einen Kettenkomplex von  $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Moduln. Bezeichnet man den Kettenkomplex (6) mit  $C_\bullet(M; \mathbb{Z}[ab(G)])$ , so können wir nun definieren:

**Definition 5.2.** Definiere die Homologie mit getwisteten Koeffizienten von  $M$  als

$$H_i(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)]) = H_i(C_\bullet(M; \mathbb{Z}[ab(G)]))$$

Man sieht leicht ein, dass dies wohldefiniert ist und nicht von der Zellzerlegung von  $M$  abhängt. Weiter ergibt sich, dass  $H_1(M_{ab(G)}, p_{ab(G)}) \cong H_1(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)])$  natürlich isomorph sind. Der Beweis ergibt sich direkt aus dem Resultat aus der Überlagerungstheorie, dass die universelle Überlagerung buchstäblich universell überlagert, also insbesondere  $M_{ab(G)}$ , siehe etwa [10, Kapitel 1.3].

Für die Abschätzung der beiden Halbnormen, ist es hier zielführend, dass das Alexander Ideal einer 3-Mannigfaltigkeit eine nicht allzu komplizierte Gestalt annehmen kann. Folgendes Theorem (aus McMullen [14]) sogar, dass  $I_M(G)$  Definition, siehe Kapitel des Alexander Ideals ein Produkt maximal dreier Faktoren ist, von denen eines immer der größte Teiler — das Alexander Polynom — ist.

**Theorem 5.9.** *Sei  $G$  die Fundamentalgruppe einer 3-Mannigfaltigkeit  $M$ , die den Voraussetzungen des Haupttheorems genügt und  $\phi : G \rightarrow H_1(G)/T \cong ab(G) \cong \mathbb{Z}^{b_1(G)}$  die Quotientenabbildung auf den maximalen frei abelschen Quotienten. Dann gilt:*

$$I_M(G) = E_1(m(G)/m(\ker \phi)m(G)) = m(ab(G))^{1+b_3(M)} \cdot (\Delta)$$

*Beweis.* Wie obige Bemerkung gestattet, zielt der Beweis darauf ab eine Präsentation der getwisteten Homologie  $H_1(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)]) \cong I_m(G)$  zu finden. Dies soll explizit konstruiert werden, durch Betrachtung einer konkreten CW-Struktur und zellulärer Homologie. Glatte 3-Mannigfaltigkeiten sind stets triangulierbar, entweder überzeugt man sich durch die grundsätzliche Triangulierbarkeit von 3-Mannigfaltigkeiten nach dem Satz von Moise oder man glaubt an die Triangulierbarkeit von glatten Mannigfaltigkeiten, die etwa nach dem Satz von Whitehead folgt oder durch die Einbettbarkeit jeder Mannigfaltigkeit in den  $\mathbb{R}^N$ , die von Whitney gezeigt wurde. Jedenfalls sei  $\tau$  eine Triangulierung von  $M$ . Um eine explizite und vor allem möglichst simple CW-Struktur zu erhalten, wählt man sich nun zwei möglichst „große“ Bäume  $B, B'$  in den Strukturen von  $M$ , die der Vereinfachung der CW-Struktur dienen sollen und den Homotopietyp von  $M$  nicht ändern. Und zwar sei  $B$  ein maximaler Baum im Graph des 1-Skeletts von  $\tau$ , also ein zusammenhängender, kreisloser Graph. Für  $B'$  betrachtet man folgende Konstruktion eines Graphen  $G$ : man nehme die Baryzentren aller 3-Simplices als Knotenmenge und die Kanten verbinden diese Knoten gemäß der trennenden 2-Simplices von  $\tau$ . Offensichtlich gilt für jeden Baum in  $G$ , dass die zugehörige Vereinigung von 3-Simplices die aus seinen Knoten hervorgeht ein topologischer Ball ist und der Randoperator auf der Summe der zugehörigen 3-Simplices im Kettenkomplex nur 2-Simplices des Randes ergibt (die inneren 2-Simplices treten jeweils als Differenz auf). Sei also  $B'$  ein maximaler Baum in  $G$ . Das bedeutet insbesondere, dass  $G/B'$  diffeomorph zu einem Bouquet von Kreisen ist, denn  $G$  ist zusammenhängend, da  $M$  zusammenhängend ist. Da Homologie eine Homotopieinvariante ist, betrachte man den zellulären Kettenkomplex der aus dem CW-Komplex  $M/B$  hervor geht, mit gewählter Struktur, dass man durch die Konstruktion von  $B'$  eine einzige 3-Zelle erhält, die aus Entnahme aller 2-Simplices entsteht die zu den Kanten aus  $B'$

gehören. Die Projektion  $X \rightarrow X/A$  ist stets eine Homotopieäquivalenz, falls  $A \hookrightarrow X$  eine Kofaserung und  $A$  zusammenziehbar ist siehe Whitehead Kap 1 Corollar 5.13 und  $(M, B)$  ist als CW-Paar eine Kofaserung. Aus dieser Struktur geht folgender zellulärer Kettenkomplex von  $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Moduln  $C_i = C_i^{zell}(\widehat{M/B}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)]$  hervor:

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

Sei  $M$  nun zunächst geschlossen. Dann folgt mit Eulercharakteristik und Poincaré Dualität (und Homotopieinvarianz beziehungsweise Wohldefiniertheit der genutzten Invarianten):

$$\begin{aligned} 0 &= b_0(M) - b_1(M) + b_2(M) - b_3(M) = \chi(M) \\ &= \#\{\text{Differenz der Zellen in gerader und ungerader Dimension}\} \end{aligned}$$

also folgt dass die gewählte CW-Struktur jeweils  $n$  Zellen in Dimension 1 und 2 hat. Betrachtet man nun die relative Homologie zu der ausgezeichneten 0-Zelle  $p$ , folgt direkt für den Alexander-Modul  $A_M(G) = H_1(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)]) = C_1 / \text{Im}(\partial_2)$ ? Man beachte, dass die Moduln in dem betrachteten Kettenkomplex frei sind, denn:

$$\begin{aligned} C_i &= C_i^{zell}(\widehat{M/B}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[G]^n \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[ab(G)]^n \\ C_i^{zell}(\widehat{M/B}) &= \bigoplus_{g \in G} C_i^{zell}(M/B) = \mathbb{Z}[G]^n \end{aligned}$$

Also erhält man eine Präsentation von diesem Modul durch:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \rightarrow C_1 / \text{Im}(\partial_2) = A_M(G)$$

$\partial_2$  lässt sich für gewählte  $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Basen von  $C_1$  und  $C_2$  als Matrix darstellen, dessen  $(n-1) \times (n-1)$  Minoren die Erzeuger von  $I_M(G)$  liefern. Für die Berechnung dieser Matrix, berechnen wir zuerst  $\partial_1$  und  $\partial_3$ .

Man fixiere für eine Basis einen Fundamentalbereich genauer einen Basispunkt  $\hat{e}_0 \in \hat{p} = \pi^{-1}(p)$  aus dem Urbild der 0-Zelle, an diesem kann eine  $\mathbb{Z}[G]$  Basis der  $C_i^{zell}(\widehat{M/B})$  gewählt werden. Die Vereinigung dieser gewählten Zellen liegt dann dicht in dem Fundamentalbereich. Ist also eine beliebige Zelle  $e \in C_i^{zell}(\widehat{M/B})$  gegeben, so entsteht diese aus einem Element der fixierten Basis aus dem fixierten Fundamentalbereich durch Multiplikation mit einem  $g \in G$  (genauer bedeutet dies eine Anwendung der Decktransformation, die Zellen auf Zellen abbildet),  $g\hat{e} = e$ . Um also einzusehen, wie sich eine Basis für die freien  $\mathbb{Z}[ab(G)]$  Moduln unter den obigen Isomorphismen verhält, stellt man fest, dass für ein beliebiges  $e \in C_i^{zell}(\widehat{M/B})$  gilt:  $e \otimes 1 \mapsto g\hat{e} \otimes 1 = \hat{e} \otimes [g] \mapsto [g]\hat{e}$ , wobei also die fixierten Zellen die kanonischen Koordinaten von  $\mathbb{Z}[G]$  und  $\mathbb{Z}[ab(G)]^n$  darstellen. Dies lässt nun zu, dass man die komplizierte Situation fast vergessen könnte, indem man die kanonischen Koordinaten verwendet.

Was geschieht nun durch Anwendung von  $\partial_1$ ? Sei  $e$  eine generische 1-Zelle in  $C_1^{zell}(\widehat{M/B})$ , dann ist  $e = g\hat{e}$ , wobei  $\hat{e}$  aus der fixierten Basis stammt, und  $\pi(\hat{e})$  stellt per Definition das Bild einer (nicht notwendigerweise glatten, es sind auch keine differenzierbaren Eigenschaften von  $M/B$  gefordert!) Abbildung  $S^1 \rightarrow M/B$  dar, also ein

Element  $\hat{g} \in \pi_1(M/B, p) = G$ . Also berechnet sich das Bild von  $\hat{e}$  unter der Randabbildung durch den (natürlich nicht geschlossenen) Lift dieses Elementes, nämlich  $\partial(e \otimes 1) = \partial(g\hat{e} \otimes 1) = \partial(\hat{e} \otimes [g]) = (\hat{e}_0 - \hat{g}\hat{e}_0) \otimes [g] = (1 - \hat{g})g\hat{e}_0$ . Die zu Beginn recht kompliziert wirkende Situation, wurde in den letzten Abschnitten und durch allerlei Verträglichkeiten deutlich gelockert und ermöglicht es nun ohne viel Verwechslungsgefahr zwischen verschiedenen Identifikationen zu wechseln. Sei also  $\hat{e}_1^1, \dots, \hat{e}_1^n$  die fixierten 1-Zellen in der Überlagerung, also eine Basis des  $\mathbb{Z}[F]^n$  dann erhalten wir die Matrixdarstellung des Homomorphismus  $\mathbb{Z}[F]^n \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[F] = \langle \hat{e}_0 \rangle$

$$\partial_1 = (1 - \hat{g}_1, \dots, 1 - \hat{g}_n)$$

wobei  $\hat{g}_i \in \pi_1(M/B, e_0) = G$  die Klasse von  $\hat{e}_1^i$  unter der Projektion in  $M/B$  ist.

Ähnlich fährt man nun mit der Berechnung von  $\partial_3$  fort. Sei  $\hat{e}$  eine der fixierten 2-Zellen aus  $C_2^{zell}(\widehat{M/B})$ , also ein Element der  $\mathbb{Z}[G]$ -Basis von  $C_2^{zell}(\widehat{M/B})$  oder anders: ein Element der  $\mathbb{Z}[F]$ -Basis von  $C_2$ . erinnert man sich an die Wahl von  $\tau$ , so ist  $\hat{e}$  in  $M$  Seite von zwei 3-Simplices. In  $B'$  existiert nun ein eindeutiger (Geodätische in Bäumen sind eindeutig) Pfad, der die Baryzentren dieser zwei 3-Simplices verbindet. Schließt man diesen Pfad nun zu einer Schleife, durch die (nach obiger Konstruktion von  $G \supset B'$ ) zu  $\hat{e}$  gehörige Kante, so liefert diese Schleife wieder ein Element  $\hat{h} \in \pi_1(M/B) = G$ . Um nun das Bild von der fixierten 3-Zelle  $\hat{e}_3$  unter  $\partial_3$  festzustellen, fasse man  $\tau/B$  als CW-Struktur auf und erwäge man folgendes Diagramm bezüglich der fixierten 2-Simplex Basis  $\hat{e}_2^i$  und dazugehörigen  $\hat{h}_i \in G$ :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \Sigma \hat{\sigma}_3 & & \Sigma \hat{\sigma}_3 & \\
 & \swarrow & & \nwarrow & \\
 & C_3^{\tau, zell}(\widehat{M/B}) & & & \\
 & \swarrow \Sigma & & \searrow \partial & \\
 \hat{e}_3 & & C_3^{zell}(\widehat{M/B}) & \xrightarrow{\quad} & C_2^{zell}(\widehat{M/B}) & \xrightarrow{\quad} & \Sigma(1 - \hat{h})\hat{e}_2^i
 \end{array}$$

Also stellt sich heraus, dass für die fixierten Zellen  $\hat{e}_2^1, \dots, \hat{e}_2^n$  als Identifikation einer Basis von  $\mathbb{Z}[ab(G)]$ , sich die Abbildung  $\partial_3$  als Matrix auffassen lässt:

$$\partial_3 = (1 - \hat{h}_1, \dots, 1 - \hat{h}_n)^T \in \mathbb{Z}[ab(G)]^n$$

wobei die  $\hat{h}_i \in G$  eindeutig aus den  $\hat{e}_2^i$  mit der obigen Konstruktion hervorgehen und als Restklassen in  $F$  betrachtet werden. Offensichtlich gilt jeweils:  $\langle \hat{g}_i \rangle = \langle \hat{h}_i \rangle = ab(G)$ . Die Arbeit ist nun getan, von hier an möchten wir die Topologie vergessen und behandeln unseren Kettenkomplex mit algebraischen Methoden:

Durch eventuellen Basiswechsel für die Moduln  $C_1$  und  $C_2$  können wir annehmen, dass bei den Matrixdarstellungen von  $\partial_1$  und  $\partial_3$  die  $g_i = h_i$  übereinstimmen. Da  $F = ab(G) = \mathbb{Z}^{b_1(M)}$ , können wir für diese Basen weiter annehmen, dass  $\langle g_1, \dots, g_{b_1(M)} \rangle = F$

und für alle anderen  $g_i$  bei denen  $i > b_1(M)$ , die Matrixeinträge verschwinden also  $g_i = 1$ . Bezeichne zu dieser Wahl von Basen  $M = (m_1, \dots, m_n)$  die darstellende Matrix von  $\partial_2$  mit Spalten  $m_i \in \mathbb{Z}[F]^n$ . In den folgenden Matrixberechnungen wird folgende Notation verwendet:  $M_{ij}$  bezeichnet die Determinante der  $(n-1) \times (n-1)$  Minore die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entsteht,  $\underline{m}_j$  betont das Weglassen dieser Spalte und  $\underline{m}_j^i \in \mathbb{Z}[F]^{n-1}$  bezeichnet die Spalte die durch Kürzen um den  $i$ -ten Eintrag entsteht. Also ist nach dieser Schreibweise  $M_{ij} = \det(m_1^i, \dots, \underline{m}_j^i, \dots, m_n^i)$ . Das Alexander Ideal  $I_M(G)$  berechnet sich dann aus  $\langle M_{ij} \rangle$ .

Zunächst soll ein Zusammenhang zwischen  $M_{ij}$  und  $M_{ik}$  hergestellt werden unter Ausnutzung der Beziehung:  $m_k(1 - g_k) + \sum_{l \neq k} m_l(1 - g_l) = \sum m_l(1 - g_l) = \partial_3 \circ \partial_2 = 0$ :

$$\begin{aligned} M_{ij}(1 - g_k) &= \\ &= (1 - g_k) \det(m_1^i, \dots, \underline{m}_j^i, \dots, m_n^i) = \det(m_1^i, \dots, (1 - g_k)m_k^i, \dots, \underline{m}_j^i, \dots) \\ &= \det(m_1^i, \dots, \sum_{l \neq k} m_l^i(1 - g_l), \dots, \underline{m}_j^i, \dots) = \det((m_1^i, \dots, -(1 - g_j)m_j^i, \dots, \underline{m}_j^i, \dots)) \\ &= -(1 - g_j) \det((m_1^i, \dots, m_j^i, \dots, \underline{m}_j^i, \dots)) = \pm M_{ik}(1 - g_j) \end{aligned}$$

Man beachte, dass in der letzten Zeile das  $m_j^i$  immer noch an der  $k$ -ten Stelle steht, also die letzte Gleichheit durch paarweises Vertauschen mit dieser Spalte entsteht. Mit den gleichen Umformungen für Zeilen erhält man ebenso  $M_{ij}(1 - g_l) = \pm M_{lj}(1 - g_i)$ . Zusammen ergibt das die Beziehung (7) die im Folgenden ausgiebig betrachtet wird.

$$M_{ij}(1 - g_k)(1 - g_l) = M_{ik}(1 - g_j)(1 - g_l) = M_{lk}(1 - g_j)(1 - g_i) \quad (7)$$

Da  $b_1(M) \neq 0$  folgt, dass  $(1 - g_1) \neq 0$ . Somit folgt mit (7), dass die Determinanten der Minoren verschwinden, wenn sie die erste  $b_1(M) \times b_1(M)$  Hauptminore enthalten, aus der maximal eine Zeile *oder* eine Spalte entnommen wurde. Mit anderen Worten, da  $\mathbb{Z}[F]$  nullteilerfrei ist folgt mit (7):

$$M_{ij}(1 - g_1)^2 = M_{11} * 0 = 0 \implies I_M(G) = \langle M_{ij} | i, j \leq b_1(M) \rangle$$

Seien im Folgenden also stets  $i, j \leq b_1(M)$ .

Für die Elemente  $M_{ii}$  die aus symmetrischer Kürzung entstehen, liefert (7) die Gleichheit  $M_{ii}(1 - g_j)^2 = \pm M_{jj}(1 - g_i)^2$ , die nach Annahme an  $b_1(M) \geq 2$  nicht-trivial ist. Da aber  $\mathbb{Z}[F]$  ein faktorieller Ring ist, also die Faktorisierung in Primelemente eindeutig ist und  $g_i, g_j$  so gewählt wurden, dass  $1 - g_i$  und  $1 - g_j$  koprim sind, ist folgende Wahl gerechtfertigt<sup>3</sup>:

$$\Delta = \frac{M_{11}}{(1 - g_1)^2} = \pm \frac{M_{22}}{(1 - g_2)^2} = \dots = \pm \frac{M_{b_1(M)}}{(1 - g_{b_1(M)})^2}$$

---

<sup>3</sup>Genaugenommen gilt das in jedem kommutativen Ring mit Eins, da per Definition

$$M_{11} = M_{11}((1 - g_i)^2 x + (1 - g_1)^2 y) = M_{ii}(1 - g_1)^2 x + M_{11}(1 - g_1)^2 y = (1 - g_1)^2 (M_{ii}x + M_{11}y)$$

Man erhält:

$$M_{ii} = \pm \Delta(1 - g_i)^2 \quad (8)$$

Allgemein führt man mit (7) jede Determinante auf (8) folgendermaßen zurück:

$$M_{ij} = \frac{M_{ij}(1 - g_1)^2}{(1 - g_1)^2} = \pm \frac{M_{11}(1 - g_i)(1 - g_j)}{(1 - g_1)^2} = \pm \Delta(1 - g_i)(1 - g_j) \quad (9)$$

$$\implies I_M(G) = (\Delta) \cdot m(F)^2 \quad (10)$$

wobei das Theorem also für geschlossenes  $M$  folgt, da offensichtlich  $(\Delta)$  das kleinste Hauptideal ist, das  $I_M(G)$  enthält.

Falls  $M$  nun Rand hat, liefert der gleiche Beweis mit etwas Vernunft das gleiche Ergebnis.  $\square$

Für den Fall, dass  $b_1(M) = 1$ , so wissen wir bereits einfach, dass  $I(M)$  unabhängig der beiden angegebenen Definitionen ein Hauptideal ist. Weiter haben wir in diesem Fall bereits gesehen, wie die Alexander-Norm einer Kohomologieklassse  $\phi$  in Zusammenhang mit  $b_1(\ker \phi)$  steht (falls  $b_1(M) = 1$  so stimmt die Alexander-Norm mit dem Grad des Alexander Polynoms überein). Letzteres, also einen Beziehung von  $b_1(\ker \phi)$  und  $\|\phi\|_A$  soll nun im Fall für  $b_1(M) \geq 1$  hergeleitet werden.

**Lemma 5.10.** *Falls  $\Delta_G \neq 0$  mit  $G = \pi_1(M)$ , so gilt für primitive  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  die in einem offenen Kegel durch eine offene berandende Seite des Polytops der Alexander-Einheitskugel liegen:*

$$b_1(\ker \phi) = \|\phi\|_A + 1 + b_3(M)$$

*Beweis.* Zur Berechnung des Alexander Polynoms einer Gruppe verwendet man häufig eine Abbildung auf den maximalen frei abelschen Quotienten, die man auf den ganzzahligen Gruppenringen fortsetzt. Dies ermöglicht einem zwischen verschiedenen Ebenen hin und herzuspringen. Ähnlich soll nun hier  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(G, \mathbb{Z})$  fortgesetzt werden:  $\hat{\phi} : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ .

Wendet man diesen fortgesetzten Homomorphismus auf  $\Delta_G \in \mathbb{Z}G$  an erhält man:

$$\hat{\phi}\Delta_G = \hat{\phi}\left(\sum \lambda_i g_i\right) = \sum \lambda_i \phi(g_i) = \sum \lambda_i t^{\phi(g_i)} = \sum \hat{\lambda}_{\phi(g_i)} t^{\phi(g_i)}$$

Die  $\hat{\lambda}_{\phi(g_i)}$  fassen alle Koeffizienten zum gleichen Monom zusammen, sodass in der Summe kein Gruppenelement mehrfach auftritt. Per Definition gilt also:

$$\text{Grad } \phi(\Delta_G) = \sup_{\hat{\lambda}_{\phi(g_i/j)} \neq 0} (\phi(g_i) - \phi(g_j))$$

Da nun aber  $\phi$  aus einem Kegel durch eine offene Seite des Alexander Polytops gewählt wurde, verschwinden unter  $\hat{\phi}$  keine Koeffizienten die den Grad maximieren, also:

$$\sup_{\hat{\lambda}_{\phi(g_i/j)} \neq 0} (\phi(g_i) - \phi(g_j)) = \sup_{\lambda_i} (\phi(g_i) - \phi(g_j))$$

nun folgt das Lemma mit  $(\Delta_\phi) = \phi(I(G)) = \langle (t - 1)^{1+b_1(M)} \hat{\phi}\Delta_G \rangle$ .  $\square$

## 5.4 Kombinieren der Ergebnisse

Mit folgendem Beweis endet schließlich dieses Kapitel und somit der Beweis des Hauptsatzes.

*Beweis von Theorem 1.1(McMullen).* Sei wieder  $G = \pi_1(M)$  und ohne Einschränkung  $\Delta_G \neq 0$ . Definiere weiter

$$P = \begin{cases} b_3(M) + 1 & , \text{ falls } b_1(M) \geq 2 \\ 0 & \end{cases}$$

Nach Corollar 5.8 zusammen mit Theorem 5.9 folgt, dass für alle primitiven  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  die in einem offenen Kegel zu einer Seite der Alexander Einheitskugel liegen, die folgende Gleichung:

$$b_1(\ker \phi) = \|\phi\|_A + P \quad (11)$$

Doch nach Lemma 2.1 definieren sowohl Thurston- auch als Alexander-Norm jeweils Halbnormen, folglich ist es keine Einschränkung die Aussage für diese  $\phi$  zu zeigen. Man fixiere also dieses gewählte  $\phi$  und wähle gemäß Lemma 5.3 eine zu  $\phi$  duale eingebettete orientierte Fläche  $S$ , mit den geforderten Minimalitätseigenschaften. Aus dem Lemma folgt dann, dass wir eine obere Schranke erhalten:

$$b_1(\ker \phi) \leq b_1(S) \quad (12)$$

Ohne Einschränkung habe  $S$  nicht-positive Eulercharakteristik, da sonst wegen  $b_1(S) = b_0(S) + b_2(S) - \chi(S) \leq 1$ , die obere Schranke für  $b_1(\ker \phi) \leq 1$  mit (11) impliziert, dass die Alexander-Norm verschwindet (man beachte hierbei und im Folgenden die Fälle  $b_2(S) = b_3(M) \in \{0, 1\}$ ). Das Theorem folgt nun aus Zusammensetzung der erarbeiteten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_T = -\chi(S) &= b_1(S) - b_0(S) - b_1(S) \\ &\geq b_1(\ker \phi) - 1 - b_3(M) = \|\phi\|_A + P - b_3(M) - 1 \\ &= \begin{cases} \|\phi\|_T & , \text{ falls } b_1(M) \geq 2 \\ \|\phi\|_T - b_3(M) - 1 & \end{cases} \end{aligned}$$

□

Die einzige Abschätzung entsteht aus der Wahl der Fläche bei Lemma 5.3 durch  $b_1(\ker \phi) \leq b_1(S)$ . Dass diese bei einer Faserung verschwindet, wird im nächsten Kapitel diskutiert. Ebenso wird man im nächsten Kapitel einsehen, dass die Abschätzung aus dem Lemma echt ist, also gleichbedeutend, es existieren durchaus Kohomologieklassen mit  $\|\phi\|_T > \|\phi\|_A$ .

## 6 Folgerungen, Bemerkungen und Beispiele

Einleitung KApitel

### 6.1 Zu der Thurston-Norm bei Überlagerungen mit unendlich großer Bettizahl

Wie oben bereits vorgeschlagen, kann man nun fragen, welche Anforderungen man an eine Thurston-minimierenden Fläche stellen darf falls  $b_1(\ker \phi) = \infty$ , also inwieweit lässt sich Lemma 5.3 verallgemeinern? Intuitiv würde man einer unendlich zyklischen Überlagerung schnell die Fähigkeit absprechen, endlich erzeugte Homologiegruppen (über  $\mathbb{Z}$ ) zu haben, sind diese Voraussetzungen vielleicht zu restriktiv? Die gute Nachricht ist, dass obiger Beweis nahezu problemlos übertragen werden kann, wenn man nur die endliche Erzeugbarkeit von  $\ker \phi$  als  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Modul fordert. Ob oder wann dies sinnvoll ist soll kurz diskutiert werden, anhand Überlegungen zu nicht endlich erzeugten  $\ker \phi$ .

Die folgende Proposition kann als Verallgemeinerung der Formel  $b_1(\ker \phi) = \text{Grad } \Delta \phi$  aus Corollar 5.8 gesehen werden:

**Proposition 6.1.** *Falls  $H_1(M_\phi)$  endlich erzeugt über dem Gruppenring  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  ist (dies ist nach Proposition 3.1 für jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit wahr), nicht aber als abelsche Gruppe, so verschwindet die Alexander Norm. Ist umgekehrt  $\Delta_{\pi_1(M)} = 0$ , so folgt dass  $b_1(\ker \phi) = \infty$  ist, für alle  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$*

*Beweis.* Die einzige Möglichkeit, dass  $H_1(M_\phi; \mathbb{Z})$  über  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  im Unterschied zu  $\mathbb{Z}$  endlich erzeugt ist, besteht darin, dass die Familie  $\{t_*^k x, k \in \mathbb{Z}\}$  in  $H_1(M_\phi)$  linear unabhängig über  $\mathbb{Z}$  ist, wobei  $t$  ein Erzeuger der Decktransformationen ist. Also ist  $(x) \subset H_1(M_\phi)$  ein freier Anteil des  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Moduls. Ohne Einschränkung sieht eine Präsentation von  $H_1(M_\phi)$  über dem Gruppenring über  $\mathbb{Z}$  folgendermaßen aus:

$$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow H_1(M_\phi) \longrightarrow 0$$

Somit berechnet sich das Elementarideal zu  $E_0(M_\phi) = (\det 0 \det X) = (0)$ .

**2.Konvention (zur Verallgemeinerung des Grades)** ist  $\|\phi\|_A = 0$  wenn  $\Delta_\phi = 0$ . Andererseits bedeutet gegebenes verschwindendes Alexander Polynom  $\Delta_{\pi_1(M)} = 0$ , dass das Alexander Ideal trivial ist. Das Alexander Ideal aber  $\square$

Man sieht also, dass der Fall  $b_1(\ker \phi) = \infty$  ein eher triviales Beispiel zur Verifizierung der Abschätzung aus Theorem 1.1, also scheinbar uninteressant. Jedoch erschwert das die Situation zur Berechnung Thurston-Norm, da die untere Schranke entfällt. Nun genug Motivation — mit der folgenden Proposition soll eine möglichst hohe untere Schranke für das Geschlecht einer Thurston-minimalen zusammenhängenden Fläche angegeben werden:



**Proposition 6.2.** *Sei  $M$  eine 3-Mannigfaltigkeit wie oben und  $\phi : \pi_1 \rightarrow \mathbb{Z} \in H^1(M; \mathbb{Z})$  surjektiv. Weiter sei  $H_1(M_\phi)$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul, wobei  $t$  ein Erzeuger der Decktransformationen ist. Nun existiert eine eingebettete orientierbare Fläche  $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ , die Folgendes erfüllt:*

- $[S] = \phi$
- $\chi_-(S) = \|\phi\|_T$
- $S$  ist zusammenhängend
- Zerlege  $H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$  als  $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$  nach der Klassifikation von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen in freien und torsions Anteil. Dann ist dies auch eine direkte Summe von  $\mathbb{Q}$ -Vektorräumen. Dann soll:

$$b_1(S) \geq \text{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q})) + \dim(H_1(M_\phi; \mathbb{Q})/\mathcal{F}) = \text{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(\mathcal{F}) + \dim \mathcal{T}$$

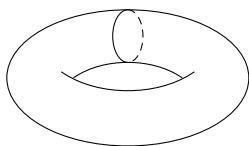
*Bemerkung 6.1.1.* Die Aussage ist analog zu Lemma 5.3, wobei die Aussagen

*Beweis.* Man wähle unter den eingebetteten Fläche welche die ersten beiden Eigenschaften erfüllen, also Thurston-Norm-minimierend sind, eine Fläche aus deren Anzahl an Zusammenhangskomponenten möglichst gering ist. Mit der gleichen Konstruktion des Graphen wie im Beweis des Lemmas 5.3 argumentiert man, dass  $S$  zusammenhängend ist.

Da  $\mathcal{F} \subset H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$  als Moduln über dem Ring der rationalen Laurentpolynome endlich erzeugt sind, erzeugt ein kompakter Teilraum der Überlagerung  $\mathcal{F}$  als Gruppenring Modul. Mit diesem Argument folgt wie im Beweis des Lemmas, dass  $b_1(S) \geq \text{Rang}(\mathcal{F})$ . Da  $\mathcal{T} \subset H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$  nun endlich erzeugt als Vektorraum ist, folgt mit dem Kompaktheitsargument, dass auch hier  $S$  diesen Vektorraum erzeugt, also  $b_1(S) \geq \dim \mathcal{T}$ .  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{T}$  sind invariant bezüglich der Decktransformationen (sie sind direkte Summanden über dem Gruppenring). Das erlaubt uns Repräsentanten  $f_1, \dots, f_{\text{Rang}(\mathcal{F})}, t_1, \dots, t_{\dim \mathcal{T}}$  zu wählen, die Basis eines  $\text{Rang}(\mathcal{F}) + \dim \mathcal{T}$ -dimensionalen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraums sind und die  $f_i$  erzeugen  $\mathcal{F}$  als Gruppenringmodul. Offensichtlich ist dieser Raum *nicht*  $t_*$ -invariant, genauer: dieser Vektorraum ist eine direkte Summe aus einem  $t_*$ -invarianten und einem nicht- $t_*$ -invarianten Raum. Allerdings folgt nun aus den obigen Überlegungen, dass die  $f_i$  so gewählt werden können, dass die Inklusion  $S \hookrightarrow M_\phi$  auf der ersten Homologie mit  $\mathbb{Q}$ -Koeffizienten, eine lineare Abbildung induziert dessen Bild  $\langle f_1, \dots, f_{\text{Rang}(\mathcal{F})}, t_1, \dots, t_{\dim \mathcal{T}} \rangle$  enthält.  $\square$

Leider sieht man, dass Lemma 5.3 nicht direktes Corollar dieser Proposition ist, da im letzten Beweis  $b_2(S) = b_3(M)$  nicht gezeigt werden kann. Ist  $b_2(S) = 0$  (da  $S$  zusammenhängend ist  $b_2 \in \{0, 1\}$ ), so folgt  $\partial S \neq \emptyset$  und somit  $\partial M \neq \emptyset$ , also Gleichheit  $b_2(S) = b_3(M)$ . Ist allerdings  $b_1(S) = 1$ , also  $S$  eine geschlossene Fläche, so folgt *nicht* zwangsweise, dass  $M$  geschlossen ist:

**Beispiel 5.** Man betrachte etwa den 3-dimensionalen Torus  $M = T = S^1 \times S^1 \times S^1$  mit  $H_1(M) = \mathbb{Z}^3 \cong \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}) \cong H^1(M; \mathbb{Z})$  nach dem universellen Koeffiziententheorem und der Produktverträglichkeit der Fundamentalgruppe, so wie Hurewicz. Nun betrachte man eine Fläche die dual zu einem der kanonischen Erzeuger der Fundamentalgruppe ist, am einfachsten wäre zum Beispiel  $S = * \times S^1 \times S^1$  mit der zugehörigen durch Aufschneiden und Verkleben -gewonnenen Überlagerung  $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$  die homologisch endlich erzeugt ist. Sicher ist es möglich einen glatt eingebetteten 2-Volltorus  $U \cong S^1 \times D$  aus dem Komplement von der betrachteten Fläche  $S$  zu finden. Betrachtet man nun die Mannigfaltigkeit  $N = M - \overset{\circ}{U}$ , so erhält man eine glatte orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand  $(N, \partial N) = (M - \overset{\circ}{U}, \partial U)$ , die auch sonst alle Voraussetzungen der vorhergehenden Proposition erfüllt. Da  $U$  zu  $S$  durchschnittsleer gewählt wurde, ist  $[S]$  sicherlich eine nicht-triviale Homologieklass in  $H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$ . Nun ist die durch Aufschneiden und Verkleben an  $S$  - gewonnene Überlagerung über dem Gruppenring endlich erzeugt, aber  $b_2(S) = 1 \neq 0 = b_3(N)$ .



## 6.2 Faserungen

In diesem Abschnitt, wollen wir uns mit Faserungen über dem Kreis beschäftigen.

**Beispiel 6.** Sei  $M$  eine Faserung  $M \rightarrow S^1$  über dem Kreis ist, also es gibt einen Diffeomorphismus einer zusammenhängenden Fläche  $\varphi : S \times 0 \rightarrow S \times 1$ , so dass folgendes Diagramm kommutiert: **3.f mittig**

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & I/\partial I = S^1 \\ \downarrow & \nearrow p_2 & \\ S \times I/\varphi & & \end{array}$$

In diesem Fall definiert die Homotopieklasse der Faserung  $M \rightarrow S^1$  eine eindeutige Kohomologieklass  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ . Die Überlagerung  $M_\phi$  kann wieder entweder als Rückziehung von  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  oder durch Aufschneiden an  $S$  gewonnen werden — in beiden Fällen ist leicht ersichtlich, dass  $M_\phi \cong S \times \mathbb{R}$  ist (für das Aufschneiden an  $S$ , benötigt man das  $[S] = \phi$ , dies gilt aber da jedes Urbild von einem Punkt unter  $f$  diffeomorph zur Fläche ist, insbesondere die der regulären Werte, die nach Sard existieren). Also hat  $M_\phi$  den Homotopietyp der Fläche, dementsprechend berechnen sich die Homotopieinvarianten von  $M_\phi$ . **4.Erwähnen, dass  $\ker(\phi)$  immer den Kern als Abbildung auf der FG bedeutet** Insbesondere ergibt sich  $b_1(\ker \phi) = b_1(M_\phi) = b_1(S)$ , wodurch sich mit Lemma 5.3 ergibt (da  $b_0(S) = 1$ ), dass die duale Fläche mit Gleichheit der ersten Bettizahlen gewählt werden kann. Da dies die einzige Ungleichung ist, die in dem Theorem verwendet wird, folgt also schon Gleichheit der Normen  $\|\phi\|_A = \|\phi\|_T$ , falls  $b_1(M) > 1$  und

$\|\phi\|_A = \|\phi\|_T + 1 + b_3(M)$  sonst. Aufgrund der exakten Sequenz:

$$0 \rightarrow \ker \phi \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

folgt auch dass die Fundamentalgruppe von  $M$  im Falle einer Faserung endlich erzeugt ist. Falls  $M$  nun zusätzlich noch ein Knotenkomplement eines Knotens  $K$  ist, gilt  $\ker \phi = [\pi_1(M), \pi_1(M)]$ . Also beweisen diese Überlegungen, dass die Kommutatoruntergruppe einer Knotengruppe isomorph zu der Fundamentalgruppe einer Seifertfläche des Knotengeschlechts ist, siehe zum Beispiel Theorem 4.6 in [2].

Es stellt sich die Frage, in wie weit eine Faserung eindeutig ist. Beispielsweise ist im Falle eines Vektorbündels über einem zusammenhängendem Raum, die Dimension eindeutig. Falls aber  $b_1(M) > 1$  ist und  $\phi, \psi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  Repräsentanten in  $[M, S^1]$  haben die Faserungen sind, folgt dann etwa:  $\|\phi\|_T = \|\psi\|_T$ ? Existieren Diffeomorphismen zwischen Abbildungstori zu Flächen verschiedenen Geschlechts? Tatsächlich sind die Faserungen nicht eindeutig siehe Beispiel 8.

Möchte man dennoch das Alexander Polynom  $\Delta_f = \Delta_\phi$  einer Faserung  $f$  berechnen **5.gilt das für Betti<sub>1</sub>?**(falls  $b_1(M) = 1$  ist  $\Delta_f = \Delta_M$ ), schließlich benutzt diese Invariante ja noch Informationen über die Deckgruppe, genügt es nach Lemma 5.4, die lineare Form von Vektorräumen  $t_* \in \text{Aut}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q}))$  zu berechnen. Aber da der Erzeuger  $t$  der Decktransformationen folgendem kommutativen Diagramm genügen muss:

$$\begin{array}{ccccc}
 & S & \xrightarrow{\quad \cong \quad} & S & \\
 & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & \\
 M_\phi & \xrightarrow{\cong} & S \times \mathbb{R} & \xrightarrow[\cong]{\hat{t}} & S \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} M_\phi \\
 & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\
 & & S \times I/\varphi & & \\
 & \searrow & \downarrow \cong & \swarrow & \\
 & & M & & 
 \end{array}$$

und andererseits  $t_*$  von einem Lift der zur Faserung dualen Schleife induziert wird, muss in jedem Fall gelten:  $t_* = \hat{t}_* = \varphi$  unter gegebenen Identifikationen mit  $S$ . Also berechnet sich das Alexander Polynom  $\Delta_f$  zu dem charakteristischen Polynom der Abbildung  $\varphi_* : H_1(S; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S; \mathbb{Q})$ , wobei die Koeffizienten entsprechend in  $\mathbb{Z}$  gewählt werden, so dass es größter gemeinsamer Teiler des entsprechend zurückgezogenen Ideals unter der Lokalisierung  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$  ist. Alternativ lässt sich das Alexander Polynom einer Faserung  $[f]$  auch berechnen, indem man die Aufschneide und Verklebe Konstruktion für unendlich zyklische Überlagerungen verwendet. Dort stellt man fest, dass jede aufgeschnittene Kopie den Homotopietyp der Fläche hat und dass bei Verkleben je zweier Kopien, die Relationen von  $\varphi_*$ . Dies liefert eine Präsentation als Gruppenring Modul, wobei man feststellt, dass alle diese Relationen äquivalent sind, da die Decktransformationen die Einheiten des Gruppenrings sind. Man beachte, dass dies ein Spezialfall der „Aufschneiden und Verkleben“-Konstruktion ist, da  $M$  selber durch Verkleben entsteht

aus  $S \times I$ . So erhält man also eine  $n$ -blättrige Überlagerung von  $M$ , indem man  $n$  Kopien von  $S \times I$  anhand  $\phi$  aneinander klebt.

Dies liefert die Möglichkeit in diesem Beispiel für  $b_1(M) = 1$  das Theorem zu verifizieren (nicht wie oben zu nutzen), indem man berechnet: **6.Orientierbarkeit und**

$$\|\phi\|_A = \text{Grad}(\Delta_\phi) = \text{Grad}(\Delta_f) = \text{Grad} \det(\varphi_* - tI) = g(S) = \chi_-(S) + 2 = \|\phi\|_T + 2$$

Im Falle der trivialen Bündel  $D^2 \times S^1$  oder  $S^2 \times S^1$  stimmt die zyklische Überlagerung mit der universellen überein und man erhält jeweils  $\Delta_\phi = 1$  für  $\phi$  einen Erzeuger der ersten Homologie. Da die Erzeuger für  $H_2(D^2 \times S^1, \partial) \cong \mathbb{Z}$  und  $H_2(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$  sich mit Poincaré Dualität als  $[D^2, \partial D^2]$  beziehungsweise  $[S^2]$  herausstellen, verschwindet auch die Thurston-Norm. In diesem Fall gilt also keine Gleichheit in Theorem ref.

**Beispiel 7.** Handelt es sich bei  $M$  um eine Faserung  $M \rightarrow S^1$  mit  $b_1(M) = 1$  oder ist  $b_1(M) > 1$  und jede Kohomologieklass repräsentiert durch eine Faserung, so berechnet sich die Thurston-Norm nach Theorem 1.1 bereits vollständig durch die Fundamentalgruppe, siehe Kapitel 4.

**Beispiel 8.** Eine wichtige Anwendung der Thurston Norm und dieser Abschätzung besteht in den sogenannten *fibred faces*, die im Folgenden als gefaserte Seiten bezeichnet werden. Bisher wurden bereits Kohomologieklassen  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  betrachtet, mit einer korrespondenten Abbildung  $M \rightarrow S^1$  die eine Faserung darstellt. Bei solchen herrscht Gleichheit im Theorem (siehe ref). Diese Klassen werden auch als *gefasert* bezeichnet. Tatsächlich stellt Thurston in [19] fest, dass Informationen über diese Eigenschaft durch die Thurston-Norm festgestellt werden. Wie in Bemerkung 2.3.1 gezeigt, lässt sich die Thurston-Norm durch Erweiterung der Skalare (tensorieren mit  $\mathbb{R}$ ), fortsetzen. Thurston hat in [19] außerdem gezeigt, dass der Einheitsball dieser Norm auf  $H^1(M; \mathbb{R})$  ein beschränktes konvexes Polytop ist, also die konvexe Hülle einer endlichen Anzahl an Elementen. Eine berandende Seite dieses Polytops, nennt man gefaserte Seite, falls alle Elemente  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$  die auf einem vom Ursprung ausgehendem Strahl liegen der das Innere der Seite trifft, gefasert sind. Anders gesagt ist eine Seite gefasert, genau dann wenn jedes  $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ , das in einem Kegel mit dem Inneren der Seite als Grundfläche und dem Ursprung als Spitze, gefasert ist. Natürlich ist das Polytop symmetrisch ( $\|\phi\|_T = \|\phi\|_T$ ) und die gefaserten Seiten treten auch in Paaren auf (eine Faserung  $M \rightarrow S^1$  liefert mit einer orientierungsumkehrenden Reflektion  $\tau$  das Inverse  $M \rightarrow S^1 \xrightarrow{\tau} S^1$ ). Man sagt, gefaserte Klassen  $\phi, \psi$  liegen in *wirklich verschiedenen* gefaserten Kegeln, falls diese bis auf Symmetrie verschieden sind.

*Bemerkung 6.2.1.* Zwei Normen zu abzuschätzen ist gleichbedeutend eine Inklusionsbeziehung ihrer Einheitsbälle festzustellen.

### 6.3 Knoten und Verschlingungen

**Beispiel 9** (Verschlingungen). Thurston liefert einige Beispiele in Form von Verschlingungskomplementen, als er sein Ergebnis über die Existenz „seiner“ Norm und ihren Einheitsball veröffentlicht [19]. Eine Verschlingung bezeichnet eine gemeinsame disjunkte

Einbettung von mehreren Knoten, also eine glatte Einbettung  $L : \sqcup_{i=1}^m S^1 \rightarrow S^3$ . Als  $M_L$  bezeichnen wir wieder die kompakte 3-Mannigfaltigkeit, die aus Entfernen einer offenen Tubenumgebung hervorgeht. Wählt man auf  $\sqcup S^1$  die Standardorientierung, erhält man wie im Fall eines Knotenkomplements, kanonische Erzeuger von  $H^1(M_L)$ , nämlich durch folgende Überlegungen: eine Orientierung einer Komponente liefert (nach festgelegter Konvention) einen orientierten Meridian, das ist eine Schleife die in  $M_L \xrightarrow{\sim} M - \text{Im}(L)$  homotop zu einer Einbettung einer Einheitssphäre einer Faser unter einer Tubenabbildung ist (es lässt sich in einem trivialen Bündel leicht von einer Einheitssphäre sprechen). Diese liefern kanonische Erzeuger der ersten Homologie  $H_1(M_L) \cong \mathbb{Z}^m$  die kanonische Basis des Dualraums  $l_1, \dots, l_m \in H^1(M_L) \cong H_1(M_L)$  geht also kanonisch aus den Komponenten der Verschlingung  $L_1, \dots, L_m$  hervor. Außerdem liefert dies eine kanonische Identifikation mit dem Laurenttring  $\mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[l_1^{\pm 1}, \dots, l_m^{\pm 1}]$  (analog wie im Knotenfall). Um also beispielsweise den Einheitsball der Thurston-Norm zu beschreiben, lassen sich ebenfalls (per Konvention) die Koordinaten  $l_i = l_i \otimes 1 \in H^1(M) \otimes \mathbb{R} = H^1(M; \mathbb{R})$  verwenden (diese Konvention nutzt natürlich, dass die eben beschriebene Konstruktion kanonisch ist).

**7.siehe Kommentar Thurston, dass keine Komponente Scheibe beranden oder Kreisring beranden soll** Berechnung der Einheitsbälle einiger Verschlingungen Knoten Im Fall, dass der Link nur aus einer Komponente besteht — es sich also um einen Knoten handelt — ist  $H^1(M; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ . Sei  $\phi$  ein Erzeuger der ganzzahligen Kohomologie, dann ist  $\phi$  dual zu der Seifertfläche und jede duale Fläche ist eine Seifertfläche. Somit ist (solange nicht vom Unknoten geredet wird) wie oben erwähnt  $\|\phi\|_T = 2g(L) + 1$ . Also in der ist die abgeschlossene Einheitskugel der Thurston-Norm gegeben durch:

$$\begin{aligned} H^1(M; \mathbb{R}) &\cong \mathbb{R} \\ \left[ -\frac{1}{2g(L) + 1} \phi, \frac{1}{2g(L) + 1} \phi \right] &= \bar{B}_{\|\cdot\|_T} = \left[ -\frac{1}{2g(L) + 1}, \frac{1}{2g(L) + 1} \right] \end{aligned}$$

wobei dann entsprechend für die duale Thurston-Norm  $\|\cdot\|_T^* : H_1(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  (mit Ausnutzung der Symmetrie) folgt:

$$\bar{B}_{\|\cdot\|_T^*} = \left\{ \alpha \in H_1(M; \mathbb{R}), \frac{1}{2g(L) + 1} \phi(\alpha) \leq 1 \right\} = [-(2g(L) + 1)\hat{\alpha}, (2g(L) + 1)\hat{\alpha}]$$

Hier wird unter dem natürlichen Isomorphismus  $H_1((M; \mathbb{R}) \cong H_1(M; \mathbb{R})^{**} \cong \text{Hom}(H^1(M; \mathbb{R}), \mathbb{R})$  die duale Thurston-Norm über der ersten Homologie aufgefasst und  $\hat{\alpha}$  als Erzeuger der ganzzahligen Homologie, genauer gesagt, der Homologieklass — nach obiger Konvention — des Meridians (also gilt  $\phi(\hat{\alpha}) = 1$ ).

*Bemerkung 6.3.1.* Da dies keine Arbeit über die Eulercharakteristik einer Fläche ist, möge der Leser in den folgenden Beispielen zur Berechnung der Eulercharakteristik dualer Flächen (hier: Seifertflächen) seine liebste Formel verwenden.

#### Hopf Verschlingung

Das trivialste nicht-triviale Beispiel einer Verschlingung mit mehreren Komponenten ist der Hopf Link. Er besteht aus zwei ineinander verschlungenen Unknoten,  $L_1, L_2$ . Betrachtet man nun zwei Scheiben und verklebt diese mit zwei umgekehrt verdrehten Bändern, so erhält man die Hopf Verschlingung als Rand. Äquivalent möge man sich einen Kreisring  $S^1 \times I$  nehmen, der zweifach verdreht ist und beobachtet, dass dieser eine Seifertfläche  $S$  darstellt. Das Geschlecht dieser Seifertfläche ist 0, da es sich um eine Sphäre handelt, aus der zwei offene Scheiben entnommen wurde. Andersherum erhält man durch Ankleben zweier Scheiben die Eulercharakteristik  $\chi_-(S) = 0$ . Da zu gegebener Orientierung  $[S] = \epsilon_1[l_1] + \epsilon_2[l_2]$  ( $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ ) verschwindet mit der Subadditivität die Thurston-Norm auf dem Vektorraum  $H^1(M; \mathbb{R})$ , also ist die Einheitskugel nicht kompakt, sondern der gesamte Raum. Geht man jedoch zur dualen Norm über, erhält man wieder ein kompaktes Polytop mit ganzzahligen Eckpunkten:

$$\bar{B}_{\|\cdot\|_T^*} = \{\alpha \in H_1(M; \mathbb{R}) \mid \sup_{\{\phi \in H^1(M; \mathbb{R})\}} \phi(\alpha) \leq 1\} = 0$$

**Whitehead Verschlingung** Die Whitehead Verschlingung ist ein Link der aus zwei Komponenten  $L_1, L_2$  besteht. Offensichtlich berandet jede Komponente  $L_i$  in  $M_{L_i}$  eine Scheibe, die sich in  $M_L$  auf eine Kreisscheibe mit zwei entnommenen offenen Scheiben einschränkt (an den Stellen, an dem die offene Tubenumgebung des anderen Knotens die Scheibe durchdringt). Bei diesen Repräsentanten für  $l_1$  beziehungsweise  $l_2$  berechnet sich die Eulercharakteristik zu  $-1$ , also gilt  $\|\pm l_i\|_T \leq 1$ , offensichtlich gilt aber Gleichheit. (Nun ist aber in diesem Fall die Thurston-Norm eine tatsächliche Norm, ) Genauso offensichtlich gilt  $\|l_1 + l_2\|_T > 0$ : die Verschlingungszahl des Whitehead Links ist offensichtlich 0 (dies sieht man indem man eine Projektion betrachtet in dem die eine Komponente der Unknoten ist), jedoch haben die Randkomponenten jeder Einbettung eines Kreisring  $S^1 \times I \hookrightarrow S^3$  Verschlingungszahl  $\neq 0$  oder sind trivial (durch einen Äquator zu trennen). Also folgt  $2 \leq \|l_1 + l_2\|_T \leq \|l_1\|_T + \|l_2\|_T = 2$  für eine Seifertfläche. Diese ist sogar einfach durch die Seifert-Konstruktion zu erhalten. Folglich:

$$\begin{aligned} \|l_1 + l_2\|_T &= \|-(l_1 + l_2)\|_T \stackrel{*}{=} \|-l_1 + l_2\|_T = \|l_1 - l_2\|_T \\ &= 2 \end{aligned}$$

wobei die ausgezeichnete Gleichung gilt, da  $\|-l_1 + -l_2\|_T \notin \{0, 1\}$  aus obigen Gründen.  
*Behauptung:* Die Thurston-Norm Einheitskugel und ihr Duales sind die Folgenden:

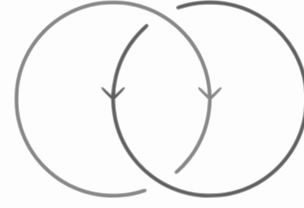


Abbildung 3: Die Hopf Verschlingung

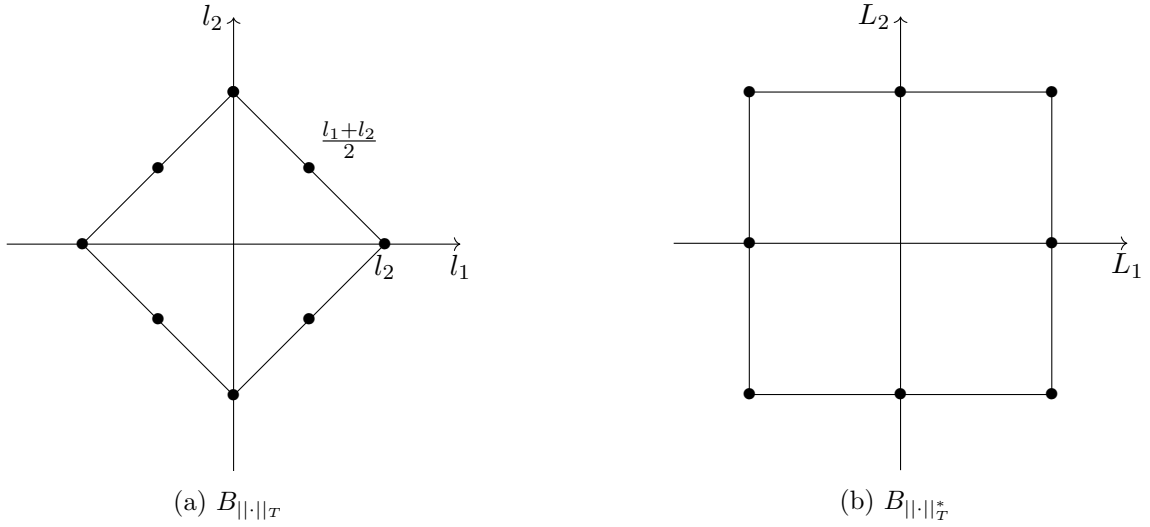


Abbildung 4: Einheitskugeln der Whitehead Verschlingung in  $H^1(M; \mathbb{R})$  und  $H_1(M; \mathbb{R})$

Die 8 berechneten Punkte liegen auf dem Rand von  $B_{||·||_T}$  (die Norm ist stetig), einer konvexen Teilmenge. Es ist eine leichte Übung, dass jede konvexe Teilmenge zweier nächster Punkte im Rand dieser konvexen Teilmenge enthalten sein muss. Aufgrund der Monotonie folgt die Behauptung für die Einheitskugel. Für die duale Norm, berechnet man entweder 8 verschiedene Randpunkte, oder beobachtet für jedes  $\alpha \in H_1(M; \mathbb{R})$  auf welchem Elementen (eine Gerade)  $\phi \in H^1(M_L; \mathbb{R})$  das Supremum  $\phi\alpha$  angenommen wird und sieht direkt das Ergebnis. **Borromäische Ringe** Seien  $L = L_1 + L_2 + L_3$  die Borromäischen Ringe. Offensichtlich hat jede duale Fläche zu  $l_i$ , die Komponente  $L_i$  als Rand, (sonst wäre der Meridian aufgrund eines Schnitzzahlen Argumentes im Kern von  $l_i$ ). Folglich hat also jede Fläche dual zu  $l_i$  mindestens 3 Randkomponenten. Da eine Sphäre mit 3 (also eine abgeschlossene Scheibe mit 2 Durchlöcherungen) entnommenen offenen Scheiben, wobei die eine Randkomponente aufgespannt wird von der entnommenen Komponente  $\nu(L_i)$ , bereits dual zu  $l_i$  ist gilt wieder  $||\pm l_i||_T = 1$  für jedes  $i$ . Ähnlich wie beim letzten Beispiel der Whitehead Verschlingungen, möchten wir nun — in Dimension 3 — die berandenden Seiten der Einheitskugel durch Berechnung einiger Punkte feststellen und sie dadurch feststellen. Als nächstes betrachte man  $l = l_1 + l_2 + l_3$ , also ist eine Geschlecht-minimale Seifertfläche gesucht. Allerdings lässt sich die Thurston-Norm von  $l$  auch mit geschickter Argumentation begründen. Zunächst gilt für die Halbnorm  $||l||_T \leq ||l_1||_T + ||l_2||_T + ||l_3||_T = 3 \implies ||l||_T \in \{1, 3\}$ . Außerdem gilt für alle  $\phi, \psi \in \{\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3\} : ||\phi||_T = ||\psi||_T$ , da duale Flächen unter Veränderung der Orientierung einzelner Komponenten in 1 – 1 Beziehung stehen, also ist das Geschlecht  $g(L)$  der Borromäischen Ringe unabhängig von der Orientierung. Durch Bestimmung der Werte an  $\pm l_i$  folgt schon, dass jede konvexe Menge die konvexe Hülle der Einheitspunkte  $\pm l_i$  enthalten muss — den Einheits-Oктаeder. Also ist  $||l||_T \neq 1$ , sonst würden zwei benachbarte der obigen Randpunkte

**Beispiel 10.** Eine (Halb-)Norm auf einem Vektorraum, liefert stets eine (Halb-)Norm

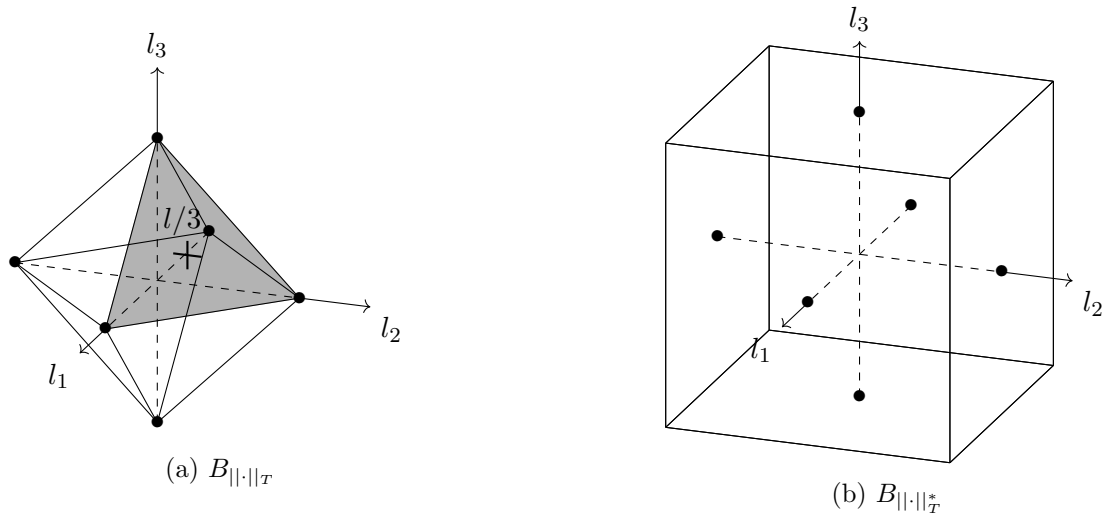


Abbildung 5: Die Einheitskugeln der Borromäischen Ringe

auf seinem Dualraum. Diese ist für einen Vektorraum  $(V, |\cdot|)$  auf dem Dualraum  $(V^*, ||\cdot||)$  definiert durch:

$$||\alpha|| = \sup_{\{v \in V, |v|=1\}} |\alpha v|$$

Entsprechend übertragen sich die Alexander und Thurston Norm auf die erste (relative) Homologie und die zweite (relative) Kohomologie der 3-Mannigfaltigkeit.



## 7 Persönliche Notizen während der Erstellung

Sei  $m(G)/m(\ker \phi)m(G)$  die algebraische Beschreibung des Alexander Moduls als  $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[G]/m(\ker \phi)$ -Modul. Dann dieser Quotient endl erz denn

Alex und Thurston Norm sind wirklich Normen

Warum nimmt McMullen die Homologie relativ allen Lifts vom Basispunkt? !!

Einschränkung: Mannigfaltigkeit glatt?

Im Beweis wo  $b_1(G) = 1$  gezeigt wird, ist es nicht auch möglich, die Argumentation über die Fundamentalgruppe wegzulassen und stattdessen zu zeigen:

- $G$  ist zsh
- $\delta_+(M_i) = \delta_-(M_i) = 1 \implies G$  ist Mannigfaltigkeit
- $G$  ist kompakt

$\implies$  mit Klassifikation von 1-Mft ist  $G$  ein Kreis.

Andersrum: wenn  $G$  vom Homotopietyp ein Kreis ist (also zsh und  $\pi_1 = \mathbb{Z}$ ), dann kann nur noch  $\delta_{\pm}(M_i) = 0$  passieren

Eigenschaften der  $Tnorm : kerx$  ist ein linearer Unterraum. und  $x$  ist auf den Nebenklassen von  $kerx$  konstant! und 1-ball

zweiseitiger KRagen

noch uct erwähnen

obda fibration indivisible (flp.pdf)

vielleicht noch Knoten: duale Fläche als Urbild ist Seifertfläche bis jetzt nur: Seifertfläche = dual

FRAGEN???

- $\phi$  Faserung, benötigt man für die Gleichheit der Normen das Faser nicht positive Euler Char. haben?
- 

Strukturelles

- Algebra evtl nach vorne damit man es benutzen kann
- Examples komplett umstrukturieren mit Unterkapiteln
- evtl noch Klärung Gruppenelement in Gruppenring
- Theorem 5.9 bekannt für links und knoten
- FEHLER: in proofs 1. lemma minS relative 2-Homologie!!
- Thom Klasser zum Beweis reg wert urbild dual

## ToDo

	<b>P.</b>
1. kein Weg aus dem Durchschnitt ist rel Endpunkt homotop zu einem Rand . . .	11
2. Konvention (zur Verallgemeinerung des Grades) ist $\ \phi\ _A = 0$ wenn $\Delta_\phi = 0$ . . .	38
3. f mittig . . . . .	40
4. Erwähnen, dass $\ker(\phi)$ immer den Kern als Abbildung auf der FG bedeutet .	40
5. gilt das für Betti <sub>1</sub> ? . . . . .	41
6. Orientierbarkeit und . . . . .	42
7. siehe Kommentar Thurston, dass keine Komponente Scheibe beranden oder Kreising beranden soll . . . . .	43

## Literatur

- [1] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2):275–306, 1928.
- [2] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. *Knots*, volume 5 of *De Gruyter studies in mathematics*. Walter de Gruyter, Berlin and New York, 2nd rev. and extended ed edition, 2003.
- [3] Stefan Friedl. Reidemeister torsion, the thurston norm and harvey’s invariants. *Pacific Journal of Mathematics*, 230(2):271–296, 2007.
- [4] Stefan Friedl and Taehee Kim. The thurston norm, fibered manifolds and twisted alexander polynomials. *Topology*, 45(6):929–953, 2006.
- [5] Stefan Friedl and Taehee Kim. Twisted alexander norms give lower bounds on the thurston norm. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(9):4597–4618, 2008.
- [6] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. Twisted alexander polynomials and symplectic structures. *American Journal of Mathematics*, 130(2):455–484, 2008.
- [7] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. Twisted alexander polynomials detect fibered 3-manifolds. *arXiv preprint arXiv:0805.1234*, 2008.
- [8] Stefan Friedl and Stefano Vidussi. A survey of twisted alexander polynomials. In *The Mathematics of Knots*, pages 45–94. Springer, 2011.
- [9] C. McA. Gordon and J. Luecke. Knots are determined by their complements. *Journal of the American Mathematical Society*, 2(2):371–415, 1989.
- [10] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge and New York, 2002.
- [11] Morris W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York [u.a.], corr. 4. print edition, 1991.

- [12] Matthias Kreck. *Differential algebraic topology: From stratifolds to exotic spheres*, volume v. 110 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, Providence and R.I, 2010.
- [13] Lickorish, W. B. Raymond. *An introduction to knot theory*, volume 175 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York, 1997.
- [14] McMullen, C. The Alexander polynomial of a 3-manifold and the Thurston norm on cohomology. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 35(2):153–171, 2002.
- [15] J. Milnor. Infinite cyclic coverings. *Collected Papers*, 2:71–89, 2009.
- [16] Edwin E. Moise. Affine structures in 3-manifolds: V. the triangulation theorem and hauptvermutung. *Annals of Mathematics*, 56(1):96–114, 1952.
- [17] H. Seifert. *Über das Geschlecht von Knoten*. Springer, Berlin, 1934.
- [18] Y. Shinohara and D. W. Sumners. Homology invariants of cyclic coverings with application to links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 163:101–121, 1972.
- [19] William P. Thurston. *A norm for the homology of 3-manifolds*, volume 339 of *American Mathematical Society: Memoirs*. American Mathematical Society, Providence, 1986.
- [20] Lorenzo Traldi. The determinantal ideals of link modules. i. *Pacific J. Math.*, pages 215–222, 1982.
- [21] Friedhelm Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *The Annals of Mathematics*, 87(1):56, 1968.