

Alexander Norm and Thurston Norm

Daniel Valenzuela

Geboren am 21.07.1992 in München

30. Juni 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuerin: Prof. Dr. Ursula Hamenstädt

MATHEMATISCHES INSTITUT

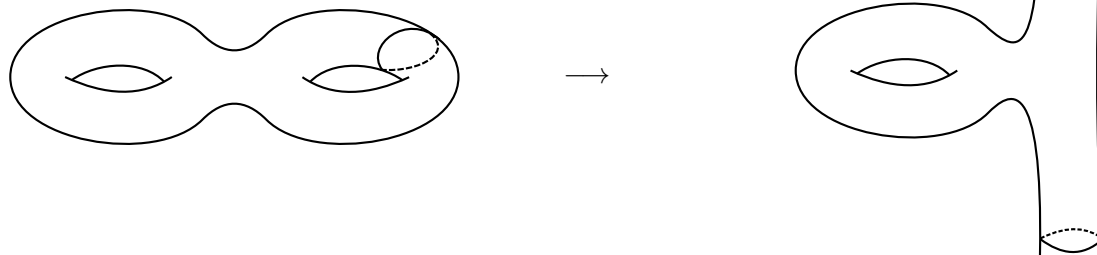
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Grundlegendes	3
2.1	Die betrachteten Räume	3
2.2	Alexander Invarianten	3
2.3	Thurston Invariante	5
3	Vorbereitungen	9
3.1	Über endlich erzeugte Moduln eines noetherschen Rings	9
3.2	Poincaré und Lefschetz Dualität	10
4	Algebraische Alexander Invarianten	12
5	Beweis des Theorems	17
6	Folgerungen, Bemerkungen und Beispiele	24
7	Persönliche Notizen während der Erstellung	32

1 Einführung

Der wesentliche Gegenstand dieser Arbeit, ist die Veröffentlichung "The Alexander Polynomial of a 3-manifold and the Thurston norm on cohomology" von McMullen [2]. In dem Fall, dass eine gegebene kompakte 3-Mannigfaltigkeit homöomorph zu einem Knotenkomplement ist — genauer gesagt, zu einer Sphäre aus der eine offene Tubenumgebung eines eingebetteten Knotens entfernt wird — ist der Rang der Fundamentalgruppe 1, also $b_1(M) = 1$. Das genauere Studium der Fundamentalgruppe erweist sich als schwierig, deswegen geht man zu der Abelianisierung der Kommutatoruntergruppe über. Diese ist nach Hurewicz isomorph zu der ersten Homologiegruppe der zyklischen Überlagerung. Da aber auch diese Gruppe im Allgemeinen nicht endlich erzeugt oder endlich präsentiert ist, betrachtet man die induzierte Wirkung der Decktransformationen auf der Homologie, weiter betrachtet man sogar die Wirkung des Gruppenrings $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, wobei t Erzeuger der Deckgruppe ist, die aus der abelschen Gruppe einen $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul macht — den Alexander Modul. Der Alexander Modul zeichnet sich durch weniger Erzeuger und Relationen aus und bietet eine fruchtbare Grundlage für algebraische Invarianten, inspiriert durch die Knotentheorie. Genau diese Inspiration liegt dem Paper von McMullen zu Grunde. Er verallgemeinert darin eine Abschätzung zweier Invarianten (auf Knotenkomplementen) aus der Knotentheorie, auf allgemeinere Klassen von 3-Mannigfaltigkeiten.



Bei der Alexander-Norm eines Homomorphismus in $\text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ handelt es sich um den Grad des zugehörigen Alexander Polynoms und die Thurston-Norm weist einem solchen Homomorphismus die minimale Komplexität einer Poincaré-Lefschetz dualen eingebetteten Fläche zu. Ohne die genauere Definition hier zu nennen, soll nun das Theorem vorgestellt werden, dessen Beweis in dieser Arbeit behandelt wird.

Theorem 1.1 (McMullen). *Sei M eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 3. Falls der Rand dieser Mannigfaltigkeit nicht leer ist, so soll er aus einer Kollektion von Tori bestehen. Dann gilt folgende Abschätzung für die Alexander-Norm und die Thurston-Norm $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_T : H^1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ der 3-Mannigfaltigkeit:*

$$\|\phi\|_A \leq \begin{cases} \|\phi\|_T + 1 + b_3(M) & , \text{ falls } b_1(M) \leq 1 \text{ und } \phi : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z} \\ \|\phi\|_T & \end{cases}$$

Ist ϕ von einer Faserung $M \rightarrow S^1$ induziert, so gilt Gleichheit.

4 Algebraische Alexander Invarianten

Tatsächlich könnte man diese Bachelorarbeit fast ausschließlich algebraisch verstehen — wenigstens den Teil über die Alexanderinvarianten. Natürlich ist dieser Arbeit aus dem Bereich der Topologie, ein Geschmack oder die Illusion gegeben, man arbeite nur mit direkten Eigenschaften der Räume. Bei der Thurstonnorm ist dies tatsächlich gegeben, durch die Definition einer Funktion auf einem Vektorraum mittels geometrischer Eigenschaften der Mannigfaltigkeit. Jedoch handelt es sich bei den Alexanderinvarianten, insbesondere dem Alexander Polynom, lediglich um Invarianten einer abelschen Gruppe. Durch Anwendung auf die Fundamentalgruppe, erhält man also Invarianten von Räumen. Natürlich verliert das Alexander Polynom von 3-Mannigfaltigkeiten durch diese „Faktorisierung“ nicht allzu viel an Reiz, da die Fundamentalgruppe eine recht starke Invariante von 3-Mannigfaltigkeiten ist, siehe z.B. Ergebnisse von **6.warum Fundamentalgruppe stark ist**. Im Folgenden sollen nun kurz die Alexander Invarianten verallgemeinert von Gruppen definiert werden und ein paar Zusammenhänge zu dem obigen Fall.

Dieser Abschnitt ist ein typisches Beispiel, für Aussagen die tautologisch erscheinen und gefährlich verschwimmen. Ich bitte dies zu entschuldigen und versuche sowohl Verwirrung als auch Redundanz minimal zu halten.

Zunächst ist es nötig den Gruppenring $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}G$ für allgemeinere endlich erzeugte Gruppen zu definieren. Dadurch entsteht die Problematik, dass der entstehende Gruppenring nicht mehr kommutativ ist, man also zwischen Links- und Rechtsmoduln über dem Gruppenring unterscheiden muss. Im Folgenden soll es sich implizit immer um Linksmoduln handeln.

Definition 4.1. Gruppenring

Es lässt sich der Alexander Modul definieren als (entspricht strikt genommen nicht der obigen Definition, hier enthält er einen freien Summand(wrong!) mehr, also betrachte E_1).

Definition 4.2 (Alexander Modul, algebraisch). Für eine endlich erzeugte Gruppe G und einen Homomorphismus $\phi \in \text{Hom}(G, F) \cong \text{Hom}(H_1(G), F) \cong \text{Hom}(ab(G), F)$, wobei F eine freie abelsche Gruppe ist und $ab(G)$ die natürliche Quotientenabbildung in den maximalen freien abelschen Quotienten von G . Dann ist der Alexander Modul definiert als

$$A_\phi(G) = m(G)$$

Dies macht alles interessanter denn es bedeutet dass für eine gegebene Fundamentalgruppe die Alexander Invarianten schon berechenbar sind (also eigentlich Invarianten der Fundamentalgruppe sind), jedoch lassen sich diese auch über Eigenschaften und Berechnungen von 3-Mft berechnen und so ohne Berechnung der Fundamentalgruppe möglich sind.

Herleitung der algebraischen Idee: nun stellt sich die Frage, ob die Alexander Invarianten durch die Struktur der Mannigfaltigkeit bestimmt sind, oder schon aus der Fundamentalgruppe berechenbar. Sei dazu G die Fundamentalgruppe von M und $F =$

$ab(G)$ der maximale freie abelsche Quotient, dessen Rang durch $b_1(G)$ eindeutig bestimmt ist. Sei außerdem $\alpha : G \rightarrow F$ die Quotientenabbildung. Dann erhält man einen Gruppenisomorphismus $p'_* : H_1(\hat{M}) \rightarrow \ker \alpha / [\ker \alpha, \ker \alpha]$ der durch die Projektion der Überlagerung zu α induziert wird. Ziel wäre es zu zeigen, dass diese Abbildung auch einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}[F]$ Moduln liefert. Daraus würden natürlich gleiche Präsentationen folgen, die zu gleichen Elementaridealen führen und so fort. Hierfür benötigt man jedoch überhaupt eine $\mathbb{Z}[F]$ -Modul Struktur auf dem Quotienten G'/G'' für $G' = \ker \alpha$, $G'' = [G', G']$. Diese soll zunächst definiert werden:

Die Abbildung $G \rightarrow G/[G, G] \rightarrow F$ ist kanonisch. Also seien $g_1, \dots, g_n, n = b_1(G)$ Elemente die auf eine Basis von F abgebildet werden. Diese definieren dann innere Automorphismen von G'/G'' durch

$$\hat{t}_i(x) = \bar{g}_i \bar{x} \bar{g}_i^{-1} = \overline{g_i x g_i^{-1}}$$

Diese sind unabhängig der gewählten g_i .

Bemerkung. Das ist eine Form der expliziten Konstruktion des Falles, wenn man von einer induzierten Operation einer zerfallenden kurzen exakten Sequenz redet:

$$0 \rightarrow G'/G'' \rightarrow G/G'' \rightarrow G/G' \rightarrow 0$$

Da $F = G/G'$ frei abelsch ist, zerfällt diese Sequenz und man erhält eine Abbildung $F \rightarrow \text{Aut}(G'/G'')$ genauer gesagt, eine Gruppenwirkung auf G'/G'' durch Konjugation unter der Identifikation $G'/G'' \hookrightarrow G/G''$ mit zurückgezogenen Elementen aus F . Dies ist wohldefiniert da das Bild von G'/G'' einem Kern entspricht, also Normalteiler ist. Offensichtlich stimmt diese Operation mit der obigen überein.

Mit $\alpha(g_i) = t_i$ als ein Element der Basis von F , ist die Gruppenwirkung von F auf $H_1(\hat{M})$, die durch die Decktransformationen induzierte $t_i \gamma = t_{i*} \gamma$, $t_i \in F \cong D(M)$, $\gamma \in H_1(\hat{M})$. Also ist nur zu zeigen, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H_1(\hat{M}) & \xrightarrow{p'_*} & G'/G'' \\ t_i \downarrow & & \downarrow \hat{t}_i \\ H_1(\hat{M}) & \xrightarrow{p'_*} & G'/G'' \end{array}$$

und somit die Operationen verträglich sind. Davon überzeugt man sich, indem man die Wirkung von t_i näher betrachtet: nach Hurewicz lässt sich ein Zykel aus $H^1(\hat{M})$ als Schleife darstellen. Die Decktransformation t_i schiebt diese Schleife nun auf eine Schleife, die homolog ist zu der Kompositionskonjugation mit einer zu einem Weg gelifteten Schleife $\tau_i, [\tau_i] \in \pi_1(M)$, welche die Decktransformation t_i erzeugt.

Also lassen sich alle Definitionen der Alexander Invarianten analog zu Abschnitt 2, auf endlich erzeugten Gruppen definieren, wobei der Alexander Modul G'/G'' als Gruppenring-Modul über $G/G' = F$ aufgefasst wird. Fast! Die Definition der Elementarideale setzt noch voraus, dass dieser Modul endlich erzeugt ist.

Es stellt sich sogar heraus, dass in den meisten Fällen auch die Thurston Norm, aus der Fundamentalgruppe berechnet werden kann, indem man getwistete Alexander Polynome verwendet, die mit ähnlichen Methoden wie oben, allein aus der Fundamentalgruppe gewonnen werden können. Sie beinhalten meist noch mehr Daten als das gewöhnliche Alexander Polynom. Außerdem lässt sich mit dem Grad dieser Polynome, die Abschätzung aus Theorem ref verallgemeinern.

Um ohne topologische Methoden einzusehen, dass der Alexander Modul endlich erzeugt ist, ist es nötig den Gruppenring und noethersche Moduln genauer zu betrachten.

Lemma 4.1. *Sei $\phi : G \rightarrow F$ eine Abbildung von Gruppen. Bezeichne $\hat{\phi} : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[F]$ die Fortsetzung auf die Gruppenringe. Dann gilt:*

$$\ker \hat{\phi} = m(\ker \phi)$$

wobei für eine Untergruppe (Normalteiler?) $H \subset G$ das Augmentationsideal $m(H) = \langle (h - 1), h \in H \rangle$.

Beweis. Um einen lästigen expliziten Beweis zu vermeiden, lässt sich einfach zeigen, dass für ein kommutativer Ring mit R mit $1 \neq 0$ einen exakten Funktor $R[\cdot]$ liefert. Dann folgt nämlich aus:

$$0 \rightarrow \ker \phi \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 0$$

die Einbettung von $\mathbb{Z}[\ker \phi]$ durch

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[\ker \phi] \rightarrow \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[F] \rightarrow 0$$

□

Beispiel 1. Falls $G = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$, dann ist der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$, der Ring der Laurentpolynome in einer Variablen $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$. Dann ist $m(G) \subset \mathbb{Z}[G]$ ein freier $\mathbb{Z}[G]$ Modul mit einelementiger Basis $(t - 1)$. Allgemeiner ist für die freie Gruppe $F(S), |S| < \infty$, das Augmentationsideal $m(F(S)) \subset \mathbb{Z}[F(S)]$ ein freier $\mathbb{Z}[F(S)]$ Modul mit $|S|$ -elementiger Basis $\{(s - 1), s \in S\}$.

Lemma 4.2 (Augmentationsideale). *Seien $H \subset G$ endlich erzeugte Gruppen mit Augmentationsidealen $m_H \subset \mathbb{Z}[H]$ und $m(H) \subset m(G) = m_G \subset \mathbb{Z}[G]$. Dann gilt:*

- dies
- das

Der obige Isomorphismus liefert also, dass der Alexander Modul endlich erzeugt ist, genau dann wenn $m(G)/m(\ker \phi)m(G)$ als $\mathbb{Z}[F]$ Modul endlich erzeugt ist. Die $\mathbb{Z}[F]$ Modul Struktur, ist gesichert durch obiges Lemma, das $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[G]/m(\ker \phi)$ liefert und der zu betrachtende Modul also ein Quotient von dem $\mathbb{Z}[F]$ Modul (hier sogar beidseitiges Ideal, also insbesondere endlich erzeugt, da $\mathbb{Z}[F]$ noethersch) $m(G)/m(\ker \phi) \subset \mathbb{Z}[F]$ ist. Mit den Betrachtungen über Quotienten von noetherschen Modul zu Beginn der Arbeit, stellt sich die Fragestellung als trivial heraus (man sollte natürlich den Isomorphiesatz kennen, dass $(G/N)/(H/N) \cong G/H$ für Normalteiler). Es ergibt sich also folgendes Lemma:

Lemma 4.3. *Der Alexander Modul einer endlich erzeugten Gruppe ist endlich erzeugt.*

Diese Maschinerie sollte nun genügen um die endliche Erzeugbarkeit der algebraischen Variante des Alexander Moduls zu zeigen. Dies und bisherige Resultate sollen in folgender Proposition festgehalten werden:

Proposition 4.4. *Es sei G eine endlich erzeugte Gruppe, $F \cong \mathbb{Z}^b$ eine freie abelsche Gruppe mit $b \leq b_1(G)$ und $\phi : G \rightarrow F$ ein Epimorphismus. Außerdem bezeichne wie oben $G' = \ker \phi$ und $G'' = [G', G']$ die Kommutatoruntergruppe. Die folgende zerfallende Sequenz liefert eine Gruppenwirkung von F auf G' :*

$$0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 0$$

Weiter liefert diese Sequenz eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$ Moduln

$$0 \rightarrow m(\ker \phi)/m(\ker \phi)m(G) \rightarrow m(G)/m(\ker \phi)m(G) \rightarrow m(F) \rightarrow 0$$

und einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}[F]$ Moduln $G'/G'' \cong m(\ker \phi)/m(\ker \phi)m(G)$. Insbesondere ist der Alexander Modul endlich erzeugt.

Beweis. Man betrachte folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & m(\ker \phi) & \longrightarrow & m(G) & \longrightarrow & m(F) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & m(\ker \phi) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[F] \longrightarrow 0 \end{array} \quad (3)$$

Die zweite Reihe ist exakt, die folgt aus der exakten Funktorialität von $\mathbb{Z}[\]$ und die Exaktheit nach Anwendung des Schlangenlemmas auf folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Reihen hervor geht:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & m(\ker \phi) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[F] \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Sei $m = m(\ker \phi) \subset \mathbb{Z}[\ker \phi]$ (man kann leicht zeigen $\mathbb{Z}[G] \cdot m = m(\ker \phi) \subset \mathbb{Z}[G]$). Da $m \cdot m(G) \subset m \cdot \mathbb{Z}[G] = m(\ker \phi)$, faktorisieren die injektiven Abbildungen aus Diagramm 3. Die erste Zeile nimmt dann die gewünschte Form aus der Proposition an, außerdem lassen sich die Strukturen als $\mathbb{Z}[F]$ -Modul Strukturen auffassen.

Es ist also noch der Isomorphismus zu zeigen. Dieser lässt sich einfach angeben:

$$\begin{aligned} G'/G'' &\rightarrow m(G')/m(G')m(G) \\ [g'] &\mapsto [(g' - 1)] \\ [g'] &\leftarrow [(g' - 1)g] \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind wohldefiniert und einander invers, da $[(g' - 1)g] = [(g' - 1)g - (g' - 1)(g - 1)] = [(g' - 1)]$. \square

Diese Proposition liefert einen Zusammenhang der obigen algebraischen Definition des Alexander Moduls, mit der algebraischen Definition von Milnor. In [2] sagt er, diese sei als Gruppenring-Modul isomorph zu $H_1(\hat{M}, \hat{p}; \mathbb{Z})$, wobei dies die freie abelsche universelle Überlagerung relativ der diskreten Menge aller Urbilder von einem Basispunkt $p \in M$. Die lange exakte Homologie Sequenz des Paares (\hat{M}, \hat{p}) liefert also einen $\bigoplus_{f \in F - \{0\}} \mathbb{Z}$ Summanden, algebraisch lässt sich dies auch einsehen:

Proposition 4.5. *Der Modul $m(F) \subset \mathbb{Z}[F]$ ist frei über \mathbb{Z} mit Basis $\langle (f - 1), f \in F \rangle$. Also splittet die exakte Sequenz und es gilt als abelsche Gruppen:*

$$m(G)/m(G)m(\ker \phi) \cong m(\ker \phi)/m(\ker \phi)m(G) \oplus m(F) \cong m(\ker \phi)/m(\ker \phi)m(G) \oplus \bigoplus_{f \in F - \{0\}} \mathbb{Z}$$

Für eine Basis f_i von F ist $\langle (f_i - 1) \rangle$ ein $\mathbb{Z}[F]$ Erzeugendensystem von $m(F)$.

Also handelt es sich bei der 3-Mannigfaltigkeit um eine Faserung, so folgt aus dem Theorem, dass man rein algebraisch aus der Fundamentalgruppe G , eine Halbnorm auf $\text{Hom}(G, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ definieren kann, die mit der Thurston-Norm auf $H^1(M; \mathbb{R})$ übereinstimmt.

5 Beweis des Theorems

Bevor die Wahl einer dualen Fläche spezifiziert wird, sodass die zu zeigende Abschätzung daraus folgen wird, widmet sich der folgende Teil der zu betrachtenden Überlagerung bezüglich einer Homologiekategorie. Will man mit einer Überlagerung Berechnungen anstellen, so sollte man sie möglichst gut kennen. Deswegen folgt nun eine explizite Konstruktion, die sich im späteren Beweis als hilfreich herausstellen wird.

Bemerkung (Aufschneiden an einer Fläche). Aus der Überlagerungstheorie ist bekannt, dass zu jeder normalen Untergruppe der Fundamentalgruppe eines einigermaßen gut zusammenhängendem Hausdorffraum (insbesondere Mannigfaltigkeiten), auch eine normale Überlagerung existiert, die bis auf Überlagerungsisomorphie eindeutig ist. Nun definiert aber ein primitives Element $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ per Definition einen Homomorphismus auf der ersten Homologiegruppe, aber durch die universelle Eigenschaft der Abelianisierungsabbildung zusammen mit Hurewicz bedeutet das, dass eine eindeutige Abbildung $\hat{\phi}$ existiert, die über ϕ faktorisiert, mit anderen Worten das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & \nearrow & \\ H_1(M) & & \end{array}$$

Dieses ϕ liefert also die eindeutige normale Untergruppe $[\pi_1(M), \pi_1(M)] \subset \ker \hat{\phi} \subset \pi_1(M)$, welche wiederum eine Überlagerung definiert, die fortan M_ϕ genannt wird. Da die Thurston Norm eigentlich eine Halbnorm auf der zweiten Homologie einer 3-Mannigfaltigkeit definiert und über Poincaré bzw. Lefschetz Dualität nach $H_1(M)$ übertragen wird, stellt sich die Frage nach einer Abhängigkeit der Überlagerung von einer dualen Fläche. Sei also $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ eine eingebettete orientierte Fläche. Da diese Kodimension 1 hat, ist sie auch zweiseitig, hat also eine Umgebung U , sodass ein Homöomorphismus $S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow U$ existiert dessen Einschränkung auf $S \times \{0\}$ die Inklusion ist. Das bedeutet, dass die 3-Mannigfaltigkeit an S „aufgeschnitten“ werden kann (siehe etwa [1]), wobei das Aufschneiden bedeutet, das Komplement der Fläche zu betrachten (das Resultat ist offensichtlich eine Mannigfaltigkeit, jedoch können Eigenschaften wie Kompaktheit oder Randbedingungen entfallen). Will man nun durch Aufschneiden gewonnene Kopien $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}, M_i \cong M - S$ wieder verkleben, erweist sich die Zweiseitigkeit der Fläche als günstig. Eine zuvor fixierte zweiseitige Abbildung $h : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ liefert nämlich durch $h(S, (-\epsilon, 0))$ und $h(S, (0, \epsilon))$ offene Mengen M_i^- und M_i^+ in den M_i . Durch den strukturerhaltenden Diffeomorphismus h , können nun M_i und M_{i+1} jeweils entlang M_i^+ und M_{i+1}^- verklebt werden — genauer: h liefert eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung

$$\cdots \sqcup M_{i-1} \sqcup (S \times (-\epsilon, \epsilon)) \sqcup M_i \sqcup (S \times (-\epsilon, \epsilon)) \sqcup M_{i+1} \sqcup \cdots ,$$

sodass der Quotient eine unendlich zyklische Überlagerung mit der offensichtlichen Projektion bildet. Ein weiterer Vorteil dieser expliziten Konstruktion ist es, die Decktranspositionsgruppe zu sehen. Sie ist durch einen Erzeuger t über $t \mapsto 1$ zu \mathbb{Z} isomorph

und unter diesem Isomorphismus entspricht $n \in \mathbb{Z}$ einer Translation aller M_i um n . Es bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Überlagerung auch *die* zu S gehörige Überlagerung ist, die in dem obigen Sinne dem dualen ϕ entspricht. Dies sieht man ein, indem man sich (mithilfe der Zweiseitigkeit) unter dem Isomorphismus $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$ einen glatten Repräsentanten des Bildes von ϕ aussucht (**7.ein solcher existiert immer**). **8.eventuelle Umstrukturierung: Konstruktionen, zuerst der Graph (und somit als Korollar, dass jede duale orientierte (somit zweiseitige) Fläche als Urbild dargestellt werden kann), dann die zyklische Überlagerung.** Bekanntlicherweise finden wir eine solche Abbildung f und ein $p \in S^1$, sodass $f^{-1}(p)$ genau die orientierte Fläche ist. Durch paralleles Aufschneiden von M an S und S^1 and p erhält man folgendes kommutatives Diagramm von Überlagerungen:

$$\begin{array}{ccc} M_\phi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

Andererseits ist dies auch ein Pullback Diagramm, da aber der Pullback einer Überlagerung bezüglich $[f]$ bis auf Homöomorphie eindeutig ist, folgt dass die unendlich zyklische Überlagerung durch Aufschneiden und Verkleben zu $\ker(f_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(S^1)) = \ker \phi$ ist.

Bemerkung (Fläche als Urbild eines regulären Wertes). Sei S ein beliebiger zu $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ eingebetteter, orientierbarer Repräsentant. Dann existiert eine Abbildung $M \rightarrow S^1$, die einen Erzeuger auf ϕ zurückzieht, und ein regulärer Wert $p \in S^1$, so dass $S = f^{-1}(p)$.

Nun wollen wir uns eine besondere Art von Flächen anschauen, nämlich die Repräsentanten der zu ϕ dualen Klasse, bei denen χ_- minimal ist. Das immer ein Repräsentat existiert, der gewissen Eigenschaften genügt, sichert der folgende Satz:

Lemma 5.1. *Sei $\phi \in \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ ein primitives Element dessen Kern endlichen Rang hat. Dann existiert eine zusammenhängende Thurstonnorm-minimierende Fläche $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ mit $\phi \mapsto [S]$ unter Poincaré Dualität und $b_2(S) = b_3(M)$, so dass folgende Abschätzung erfüllt ist:*

$$b_1(S) \leq b_1(\ker(\phi))$$

Beweis. Wähle unter allen Thurstonnorm-minimierenden Flächen eine orientierte Fläche S mit einer geringsten Anzahl an Zusammenhangskomponenten.

Behauptung: Diese Fläche ist zusammenhängend

Bezeichne $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n$ und $M - S = M_1 \sqcup \dots \sqcup M_m$ die Zusammenhangskomponenten von S bzw. $M - S$. Betrachte nun den gerichteten Graphen G dessen Knoten bijektiv den Komponenten M_i entsprechen und dessen Kanten aus den Komponenten S_i mit ihrer Orientierung hervorgehen, also ein Graph mit m Knoten und n Kanten, wobei eine Kante von einem Knoten zu einem anderen verläuft, wenn ihre assoziierten Komponenten M_i, M_j durch das entsprechende Flächenstück von S getrennt werden, wobei die Komponenten das Flächenstück in der negativen beziehungsweise positiven Umgebung

berühren je nachdem ob die Kante vom assoziierten Knoten aus oder eingeht. Mit genau diesen zweiseitigen Umgebungen der Flächenkomponenten ist es möglich sich eine Abbildung $M \rightarrow G$ zu definieren, welche die Assoziationen respektiert. Sei außerdem $G \rightarrow S^1$ die Abbildung die jede Kante entsprechend ihrer Richtung einmal um die Sphäre abbildet und die Knoten auf einen ausgezeichneten Punkt. Bezüglich der Komposition der beiden Abbildungen $M \rightarrow S^1$, ist nun ϕ das Bild des Erzeugers von $H^1(S^1)$ unter der Rückziehung auf der Kohomologie, da $M \rightarrow S^1$ eine zu S duale Kohomologieklassse definiert. Genauer gesagt, kann die Abbildung offensichtlich so gewählt werden, dass das Urbild eines Punktes (verschieden dem ausgezeichneten) einer zu S homologen Fläche ist, also $M \rightarrow S^1$ unter der bekannten Bijektion $H^1(M, \mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$ genau ϕ entspricht. Unter diesen Identifikationen, ist klar, dass G homöomorph zu einem Kreis ist. Dafür betrachte man folgendes Diagramm von Pullbacks von Überlagerungen:

$$\begin{array}{ccccc} M_\phi & \longrightarrow & G_\phi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & G & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

Es folgt unmittelbar, dass diese Überlagerungen zyklisch sind, also unendlich zyklische Decktransmutationsgruppen haben. Jedes Element in $\pi_1(G_\phi)$ ist homotop zu einem Lift einer Schleife aus $\pi_1(G)$ (G erbt den Zusammenhang von M , deswegen die Vernachlässigung des Basispunktes). Unter Annahme einer Kompatibilitätsvoraussetzung dieser Überlagerungen durch Pullbacks mit den Überlagerungen durch Aufschneiden an dualen Flächen (deswegen die suggerierende Schreibweise M_ϕ), entsteht G_ϕ durch „Aufschneiden an den Knoten“, also liftet jede Schleife aus G trivial. Folglich ist G_ϕ einfach zusammenhängend, überlagert G also universell. Somit ist $\pi_1(G) = \mathbb{Z}$. Also ist G vom Homototyp ein Kreis. Da G aber auch die Kompaktheit von M erbt, ist nur noch die Existenz von Knoten ohne ein- oder ausgehende Kanten auszuschließen. Diese ist aber durch die Minimalitätseigenschaft im Bezug auf die Komponenten der gewählten Fläche ausgeschlossen, da solche Kanten einer nullhomologen Kette entsprechen. Dies sieht man wie folgt ein: Sei M_i ein Knoten der nur eingehende oder nur ausgehende Kanten besitzt, etwa $S_i, i \in I$. Dann ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit $(M_i, \sqcup_{i \in I} S_i)$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand (man betrachte sonst die umgekehrte Orientierung auf den S_i) **9.was wenn M_i Tori als Rand hat.** Die Klasse $[\hat{S} = \sqcup S]$ ist das Bild der Fundamentalklassen unter der von der Inklusion $H_2(i : \hat{S} \hookrightarrow M)$ induzierten Abbildung. Doch $i : \hat{S} \hookrightarrow M = \hat{S} \xrightarrow{j} M_i \cup \hat{S} \xrightarrow{\gamma} M$ faktorisiert und mit Funktorialität faktorisiert auch $H_2(i) = H_2(k)H_2(j)$ aber $H_2(j) = 0$. Hier wurde benutzt, dass der Rand einer Mannigfaltigkeit nullhomolog (als Klasse mit Kodimension 1, die Inklusion auf anderen Homologiegruppen ist keineswegs trivial) ist, andere Möglichkeit wäre stratifolds

$$(M_i \cup \sqcup_{i \in I} S_i, \pm \sqcup_{i \in I} S_i) \implies [\sqcup_{i \in I} S_i] = 0$$

dies würde eine Fläche mit $|I|$ weniger Komponenten liefern:

$$[S] = [\sqcup_{i \notin I} S_i \sqcup \sqcup_{i \in I} S_i] = [\sqcup_{i \notin I} S_i] \sqcup [\sqcup_{i \in I} S_i] = [\sqcup_{i \notin I} S_i]$$

Betrachtet man nun die induzierte Abbildung auf der Homologie $(G \rightarrow S^1)_*$, so ist diese ein Isomorphismus, da ϕ primitiv ist. Also besitzt G nur eine Kante und die Fläche S ist zusammenhängend.

Die nächste Gleichheit, dass der Rang auf den Top-Homologien von S und M übereinstimmen, hängt von der Existenz eines Randes ab. Da $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ folgt aus $\partial S \neq \emptyset$ direkt $b_2(S) = b_3(M) = 0$. Falls S aber leeren Rand hat, gilt $b_2(S) = 1$ und es muss $b_3(M) = 1$ gezeigt werden. Äquivalent dazu wird die Existenz eines Randes von M widerlegt:

Nach Annahme existieren nur Tori als Randkomponenten. Sei $T \subset \partial M$ eine solche Randkomponente. Da S keinen Rand hat, also T nicht berührt, enthält die unendlich zyklische Überlagerung M_ϕ auch unendlich zyklisch viele Kopien von T als Randkomponenten. Unter Verwendung der obigen Konstruktion 5, liftet T in jedes M_i . Im Folgenden soll die Notation \hat{M}_i für die (wieder) kompakte (Unter-)Mannigfaltigkeit verwendet werden, die durch die Einschränkung auf den Quotienten von $(S \times (-\epsilon, 0]) \sqcup M_i \sqcup (S \times [0, \epsilon))$ **10.komische Richtung ggf. oben ändern** entsteht. Zusammen mit der langen exakten Sequenz für eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit $(N, \partial N)$

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(N; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_2(N, \partial N; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_1(\partial N; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_1(N; \mathbb{Q}) \\ & & \uparrow & & & & \\ & & H^1(N; \mathbb{Q}) & & & & \end{array}$$

und der daraus folgenden Abschätzung

$$b_1(\partial N) = \dim(\text{Im } \delta) + \dim(\text{Im } i_*) \leq 2b_1(N)$$

erhält man für jede kompakte zusammenhängende Untermannigfaltigkeit der Form

$$\bigcup_{i \in I} \hat{M}_i \subset M_\phi$$

die Abschätzung:

$$b_1\left(\bigcup_{i \in I} \hat{M}_i\right) \geq \frac{1}{2}b_1\left(\partial \bigcup_{i \in I} \hat{M}_i\right) \geq \frac{1}{2}b_1(\sqcup_{i \in I} T) = |I|$$

Nun folgt aber aus der Mayer Vietoris Sequenz (für entsprechende offene Umgebungen) die exakte Sequenz:

$$\cdots \rightarrow H_1(S \sqcup S; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1\left(\bigcup_{i \in I} \hat{M}_i; \mathbb{Q}\right) \oplus H_1\left(M_\phi - \bigcup_{i \in I} \hat{M}_i; \mathbb{Q}\right) \rightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

und somit

$$b_1(M_\phi) = b_1\left(\bigcup_{i \in I} \hat{M}_i\right) + b_1\left(M_\phi - \bigcup_{i \in I} \hat{M}_i\right) - b_1(S \sqcup S) \geq |I| - 2b_1(S)$$

Da aber $b_1(M_\phi)$ nach Voraussetzung endlich ist und $|I|$ beliebig groß werden kann, folgt also dass der Rand von M_ϕ keine Tori enthält und somit leer ist.

Um nun noch die Abschätzung $b_1(M) \leq b_1(S)$ zu zeigen, wird erneut die Konstruktion der Überlagerung durch Aufschneiden und Verkleben zur Hilfe genommen. Da $\ker \phi \otimes \mathbb{Q} \cong H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ nach Voraussetzung ein endlich erzeugter \mathbb{Q} -Vektorraum ist, wird $H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ von einem kompakten Teilraum, etwa der Untermannigfaltigkeit $\hat{M}_1 \cup \dots \cup \hat{M}_k \hookrightarrow M_\phi$ und somit auch $\hat{M}_{k+1} \cup \dots \cup \hat{M}_{2k} \hookrightarrow M_\phi$, erzeugt (die Inklusionen erzeugen Epimorphismen auf der ersten Homologie). Mit diesem Wissen liefert die folgende exakte Sequenz die gesuchte Abschätzung:

$$\dots \rightarrow H_1(S; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1\left(\bigcup_{i \leq 0} \hat{M}_i; \mathbb{Q}\right) \oplus H_1\left(\bigcup_{i > 0} \hat{M}_i; \mathbb{Q}\right) \twoheadrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$$

□

Da die erste Kohomologie der Überlagerung natürlich bessere Chancen hat, als Modul über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ endlich erzeugt zu sein, stellt sich die Frage, ob, wie und warum es sinnvoll oder möglich wäre das eben bewiesene für diesen Fall zu verallgemeinern. Dies wird später mit Hilfe der weiteren Lemmas in diskutiert. Nun vergleicht das vorangegangene Lemma also die Thurston Norm einer Kohomologieklassse mit dem Rang ihres Kerns. Wie letzterer mit der Alexander Norm in Verbindung steht, stellt folgendes Lemma (vgl. Assertion 4) fest:

Lemma 5.2. *Es sei wieder $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ eine primitive Klasse und $\ker \phi \otimes \mathbb{Q}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum. Weiter sei t ein Erzeuger der Decktransformationsgruppe von M_ϕ , sodass wie in 2.2 $H^1(M_\phi)$ als Gruppenring Modul aufgefasst werden kann, wobei der Gruppenring kanonisch mit $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ identifiziert wird. Dann ist das Elementarideal $E_0(H^1(M_\phi)) \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ bezüglich einer $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Präsentation ein Hauptideal. Insbesondere erzeugt für $b_1(M) = 1$ das Alexander Polynom den Alexander Modul.*

In dem Beweis wollen wir nutzen, dass $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ ein Hauptidealring ist. Deswegen folgendes Hilfsmittel:

Lemma 5.3. *$\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ ist ein Hauptidealring.*

Natürlich könnte man \mathbb{Q} durch jeden beliebigen Körper \mathbb{K} ersetzen.

Beweis. Da \mathbb{Q} ein Körper ist, ist $\mathbb{Q}[t]$ ein Hauptidealring. Es existiert eine kanonische Lokalisierungsabbildung:

$$\alpha : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$$

Die Ideale in der Lokalisierung sind Bilder der Ideale aus dem ursprünglichen Ring, wegen der Erhaltung durch $I = \alpha_*(\alpha^*(I))$, wobei α_*, α^* die **11.induzierten Abbildung auf der Menge der Ideale sind**. Also ist das Ideal $I \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ das Bild eines Hauptideals. Da aber jedes Element in $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ durch Multiplizieren mit der Einheit t im Erzeugnis eines Polynoms liegt, wird ein Erzeuger aus dem Hauptideal $\alpha^*(I)$ auf einen Haupterzeuger in I abgebildet. □

Beweis. Da $H_1(M_\phi, \mathbb{Q})$ ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, werden durch den Erzeuger t des Quotienten $\pi_1(M)/\ker(\phi) \cong \mathbb{Z}$ der Decktransformationen Relationen auf den Basiselementen x_1, \dots, x_n eingeführt:

$$\begin{aligned} t_*x_1 &= \sum a_i^1 x_i \\ &\vdots \\ t_*x_n &= \sum a_i^n x_i \end{aligned}$$

Diese Gleichungen definieren genau die Matrix des Automorphismus von Vektorräumen $t_* \in \text{Aut}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q}))$, die also als Spalten die a^i hat. Durch subtrahieren der obigen Gleichungen, erhält man eine formale Matrix der Form $A - tI$. Diese Matrix ist aber gleichzeitig die Präsentationsmatrix der freien Auflösung:

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ e_r \mapsto \sum a_i^r x_i - t x_r \end{array}$$

Entsprechend ist die Determinante dieser Matrix das Elementarideal bezüglich $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$, $E_0(M_\phi) = \det(A - tI) = \chi(A) \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. \square

Dieses Ergebnis liefert nun einen Zusammenhang zwischen den Thurston Norm-minimierenden Flächen, deren erste Bettizahl nach Lemma 5.1 immer mit oberer Schranke $b_1(\ker \phi)$ gewählt werden kann, und der Alexander Norm:

Corollary. *Sei $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ eine primitive Klasse. Dann gilt:*

$$\dim(\ker \phi \otimes \mathbb{Q}) = \text{Grad}(\Delta_\phi)$$

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma gilt $\dim \Delta_\phi = n + 1$ und somit eigentlich schon sowieso schon alles \square

Als nächsten Schritt auf dem Weg zum Beweis des Theorems, wird im Folgenden eine Aussage über die Wahl einer Thurston-minimierenden Fläche gezeigt. Solch eine Fläche kann so gewählt werden, dass sie einer Abschätzung genügt, welche genau die Herkunft der Abschätzung in dem Theorem ist. Mit anderen Worten, existiert eine Wahl einer Fläche, die das folgende Lemma sogar mit Gleichheit erfüllt, gilt die Gleichheit bereits im Bezug auf die Alexander Norm.

Da wir uns schon um die endliche Erzeugbarkeit der Homologiegruppen von der Überlagerung bzgl. dem Gruppenring bemüht haben, soll dies nochmal verwendet werden. Da die Homologie nicht endlich erzeugt über den ganzen Zahlen sein muss.

Nur hier wird $b_1 = 1$ verwendet

Für den nächsten Beweis ist es nützlich von Homologie mit getwisteten Koeffizienten zu sprechen: Sei $G = \pi_1(M)$, dann wird $\mathbb{Z}[ab(G)]$ wird durch Multiplikation mit Elementen aus G zu einem $\mathbb{Z}[G]$ -Linksmodul. Ebenso wird die zelluläre Kettengruppe $C_i(\hat{M})$ der universellen Überlagerung \hat{M} , mit den induzierten Automorphismen der Decktransformationsgruppe (identifiziert mit G) zu einem $\mathbb{Z}[G]$ -Rechtsmodul, wobei es hier natürlich

wichtig ist, dass die zelluläre Struktur auf \hat{M} von M vererbt ist, also die Zellen genau den Zusammenhangskomponenten der Urbilder von Zellen in M entsprechen — nur so erhält man eine freie Basis aus den Zellen von M . Somit erhält man zu einem gegebenen zellulären Kettenkomplex $C_3(\hat{M}, \hat{p}) \rightarrow C_2(\hat{M}, \hat{p}) \rightarrow C_1(\hat{M}, \hat{p}) \rightarrow C_0(\hat{M}, \hat{p})$, wobei $\hat{p} = \pi^{-1}(p)$ das Urbild einer Nullzelle $p \in M$ ist, der universellen Überlagerung den tensorierten Kettenkomplex

$$\begin{aligned} C_3(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] &\rightarrow C_2(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \rightarrow C_1(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \\ &\rightarrow C_0(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Man beachte hierbei, dass es sich nun um \mathbb{Z} -Moduln handelt, da der zugrundeliegende Gruppenring nicht kommutativ sein muss. Aber aus offensichtlichen Gründen, handelt es sich um einen Kettenkomplex von $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Moduln. Bezeichnet man den Kettenkomplex (4) mit $C_\bullet(M; \mathbb{Z}[ab(G)])$, so können wir nun definieren:

Definition 5.1. Definiere die Homologie mit getwisteten Koeffizienten von M als

$$H_i(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)]) = H_i(C_\bullet(M; \mathbb{Z}[ab(G)]))$$

Man sieht leicht ein, dass dies wohldefiniert ist und nicht von der Zellzerlegung von M abhängt. Weiter ergibt sich, dass $H_1(M_{ab(G)}, p_{ab(G)}) \cong H_1(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)])$ natürlich isomorph sind. Der Beweis ergibt sich direkt aus dem Resultat aus der Überlagerungstheorie, dass die universelle Überlagerung buchstäblich universell überlagert, also insbesondere $M_{ab(G)}$ **12.cite Hatcher Kapitel 1.3**

Für die Abschätzung der beiden Halbnormen, ist es essenziell, dass das Alexander Ideal eine nicht allzu komplizierte Gestalt annehmen kann. McMullen zeigt [2] sogar, dass seine Definition des Alexander Ideals ein Produkt maximal dreier Faktoren ist, von denen eines immer der größte Teiler — das Alexander Polynom — ist.

Theorem 5.4. *Sei G die Fundamentalgruppe einer 3-Mannigfaltigkeit M , die den Voraussetzungen des Haupttheorems genügt und $\phi : G \rightarrow H_1(G)/T \cong ab(G) \cong \mathbb{Z}^{b_1(G)}$ die Quotientenabbildung auf den maximalen frei abelschen Quotienten. Dann gilt:*

$$E_1(m(G)/m(\ker \phi)m(G)) = \left\{ m(ab(G))^{1+b_3(M)} \cdot (\Delta) \right\}$$

Beweis. Nach obiger Bemerkung, zielt der Beweis darauf ab eine Präsentation der getwisteten Homologie $H_1(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)]) \cong I_m(G)$ zu finden. Dies soll explizit konstruiert werden, durch Betrachtung einer konkreten CW-Struktur und zellulärer Homologie. Glatte 3-Mannigfaltigkeiten sind stets triangulierbar, entweder überzeugt man sich durch die grundsätzliche Triangulierbarkeit von 3-Mannigfaltigkeiten nach dem Satz von Moise oder man glaubt an die Triangulierbarkeit von glatten Mannigfaltigkeiten, die etwa nach dem Satz von Whitehead folgt oder durch die Einbettbarkeit jeder Mannigfaltigkeit in den \mathbb{R}^N , die von Whitney gezeigt wurde. Jedenfalls sei τ eine Triangulierung von M . Um eine explizite und vor allem möglichst simple CW-Struktur zu erhalten, wählt man sich nun zwei möglichst „große“ Bäume B, B' in den Strukturen von M , dessen Kontraktion den Homotopietyp von M nicht ändert. Und zwar sei B ein maximaler Baum

im Graph des 1-Skeletts von τ , also ein zusammenhängender, kreisloser Graph. Für B' betrachtet man folgende Konstruktion eines Graphen G : man nehme die Baryzentren aller 3-Simplices als Knotenmenge und die kanten verbinden diese Knoten gemäß der Orientierung der 2-Simplices von τ . Offensichtlich gilt für jeden Baum in G , dass die zugehörige Vereinigung von 3-Simplices die aus seinen Knoten hervorgeht ein topologischer Ball ist. Sei also B' ein maximaler Baum in G . Das bedeutet insbesondere, dass G/B' homöomorph zu einem Bouquet von Kreisen ist, denn G ist zusammenhängend, da M zusammenhängend ist. Da Homologie eine Homotopieinvariante ist, betrachte man den zellulären Kettenkomplex der aus dem CW-Komplex M/B hervor geht, indem man durch die Konstruktion von B' eine einzige 3-Zelle erhält, die aus Entnahme der Kanten aus B' entsteht. Die Projektion $X \rightarrow X/A$ ist stets eine Homotopieäquivalenz, falls $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung und A zusammenziehbar ist siehe Whitehead Kap 1 Corollar 5.13 und (M, B) ist als CW-Paar eine Kofaserung. Aus dieser Struktur geht folgender zellulärer Kettenkomplex von $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Moduln $C_i = C_i^{zell}(\widehat{M/B}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)]$ hervor:

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \longrightarrow C_0$$

Sei M nun zunächst geschlossen. Dann folgt mit Eulercharakteristik und Poincaré Dualität (und Homotopieinvarianz beziehungsweise Wohldefiniertheit der genutzten Invarianten):

$$\begin{aligned} 0 &= b_0(M) - b_3(M) + b_2(M) - b_1(M) = \chi(M) \\ &= \#\{\text{Differenz der Zellen in gerader und ungerader Dimension}\} \end{aligned}$$

also folgt dass obige CW-Struktur jeweils n Zellen in Dimension 1 und 2 hat. Betrachtet man nun die relative Homologie zu der ausgezeichneten 0-Zelle, folgt direkt für den Alexander-Modul $A_M(G) = H_1(M, *; \mathbb{Z}[ab(G)]) = C_1/\text{Im}(\partial_2)$. Man beachte, dass die Moduln in dem betrachteten Kettenkomplex frei sind, denn:

$$\begin{aligned} C_i &= C_i^{zell}(\widehat{M/B}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[G]^n \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[ab(G)]^n \\ C_i^{zell}(\widehat{M/B}) &= \bigoplus_{g \in G} C_i^{zell}(M/B) = \mathbb{Z}[G]^n \end{aligned}$$

Also erhält man eine Präsentation von diesem Modul durch:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \twoheadrightarrow C_1/\text{Im}(\partial_2) = A_M(G)$$

∂_2 lässt sich für gewählte Basen von C_1 und C_2 als Matrix darstellen, also berechnet man $I_M(G) = E_1(A_M(G)) = \langle \partial_2^{ij} \rangle$, wobei ∂_2^{ij} die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}[ab(G)]$ ist, die durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte von ∂_2 entsteht. \square

ToDo

	P.
1. Hier rein über Glattheit \mathbb{R} -simpliciale approx wie in lee paul neuwirth	3
2. ref(später)	3
3. regwert	6
4. kein Weg aus dem Durchschnitt ist rel Endpunkt homotop zu einem Rand . . .	7
5. Krec	11
6. warum Fundamentalgruppe stark ist	12
7. ein solcher existiert immer	18
8. eventuelle Umstrukturierung: Konstruktionen, zuerst der Graph (und somit als Korollar, dass jede duale orientierte (somit zweiseitige) Fläche als Urbild dar- gestellt werden kann), dann die zyklische Überlagerung	18
9. was wenn M_i Tori als Rand hat	19
10. komische Richtung ggf. oben ändern	20
11. induzierten Abbildung auf der Menge der Ideale sind	21
12. cite Hatcher Kapitel 1.3	23
13. Konvention (zur Verallgemeinerung des Grades) ist $\ \phi\ _A = 0$ wenn $\Delta_\phi = 0$. . .	24
14. f mittig	26
15. Erwähnen, dass $\ker(\phi)$ immer den Kern als Abbildung auf der FG bedeutet .	26
16. gilt das für Betti $_1$?	27
17. Orientierbarkeit und	27
18. siehe Kommentar Thurston, dass keine Komponente Scheibe beranden oder Kreisring beranden soll	28

Literatur

- [1] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. *Knots*, volume 5. Walter de gruyter, 2003.
- [2] Curtis T McMullen. The alexander polynomial of a 3-manifold and the thurston norm on cohomology. In *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 35, pages 153–171. Elsevier, 2002.
- [3] William P. Thurston. *A norm for the homology of 3-manifolds*, volume 339 of *American Mathematical Society: Memoirs*. American Mathematical Society, Providence, 1986.