

Die Alexander-Norm und die Thurston-Norm

Daniel Valenzuela

Geboren am 21.07.1992 in München

14. Juli 2014

Bachelorarbeit Mathematik

Betreuerin: Prof. Dr. Ursula Hamenstädt

MATHEMATISCHES INSTITUT

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Vorbereitungen der benötigten Theorien	6
2.1	Über noethersche Moduln und Gruppenringe	6
2.2	Poincaré und Lefschetz Dualität — eine differentialtopologische Betrachtung	9
2.3	Konstruktionen	11
2.4	Normen und Halbnormen auf freien \mathbb{Z} -Moduln und ihre Fortsetzungen . .	15
2.5	Die betrachteten Räume	16
3	Die Thurston-Norm	18
3.1	Eigenschaften der Thurston-Norm	18
3.2	$\ \cdot\ _T$ -minimierende Flächen	21
4	Die Alexander-Invarianten	25
4.1	Topologische Definitionen	25
4.2	Algebraische Definitionen	28
4.3	Rationale Alexander-Invarianten	34
4.4	Eigenschaften der Alexander-Polynome von Kohomologieklassen	34
4.5	Darstellungen des Alexander-Ideals	36
5	Folgerungen, Bemerkungen und Beispiele	42
5.1	Beweis des Theorems	42
5.2	Überlagerungen mit unendlich großer Bettizahl	43
5.3	Faserungen	46
5.4	Knoten und Verschlingungen	48

1 Einführung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Verallgemeinerung von Knoten- und Verschlingungsinvarianten. Das Ziel ist die Ausarbeitung des Beweises von McMullens Ungleichung (2002), welche die bekannte Abschätzung $\text{Grad } \Delta_K \leq g(K)$ aus der Knotentheorie für kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeiten deren Rand höchstens aus Tori besteht, verallgemeinert.

Die Theorie der Knoten beschäftigt sich mit Äquivalenzklassen von Knoten und dem Finden von Invarianten solcher Äquivalenzklassen. In der differenzierbaren Kategorie bezeichnet man mit einem Knoten eine glatte orientierte Einbettung $S^1 \hookrightarrow S^3$ und man definiert zwei Knoten als äquivalent, wenn ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus $S^3 \rightarrow S^3$ existiert, der beide Knoten ineinander überführt. Insbesondere entstehen in der differenzierbaren Kategorie keine exotischen Exemplare eines Knotens, die man als „wild“ bezeichnet. Als häufig betrachtete Invariante hat sich die orientierte Diffeomorphieklasse der kompakten 3-Mannigfaltigkeit ergeben, die man das Knotenkomplement nennt. Dieses entsteht durch Entnehmen einer offenen Tubenumgebung des eingebetteten Knotens $S^1 \hookrightarrow S^3$ und ist eine naheliegende Knoteninvariante. Letzteres bedeutet: Äquivalente Knoten haben diffeomorphe Knotenkomplemente durch einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus. Häufig stellen sich Knoteninvarianten lediglich als Invarianten der Knotenkomplemente heraus; etwa bezeichnet man mit der Gruppe eines Knotens die Fundamentalgruppe des Komplements. Um die Qualität und Feinheit dieser aus dem Komplement entstehenden Invarianten zu beurteilen, ist es zunächst wichtig jene des Knotenkomplements zu beurteilen. Es gibt unzählige Ergebnisse, die aus Berechnungen auf dem Knotenkomplement entstehen, woraus sich die Relevanz dieser Frage ableitet. Tatsächlich zeigen Gordon und Luecke in [9, 1989] die Umkehrung, dass orientiert diffeomorphe 3-Mannigfaltigkeiten die aus Knotenkomplementen entstehen, aus äquivalenten Knoten entstehen. Es handelt sich bei dem Knotenkomplement also um eine vollständige Knoteninvariante. Für Verschlingungen, also eine disjunkte orientierte Einbettung $\sqcup S^1 \hookrightarrow S^3$, gilt dies nicht.

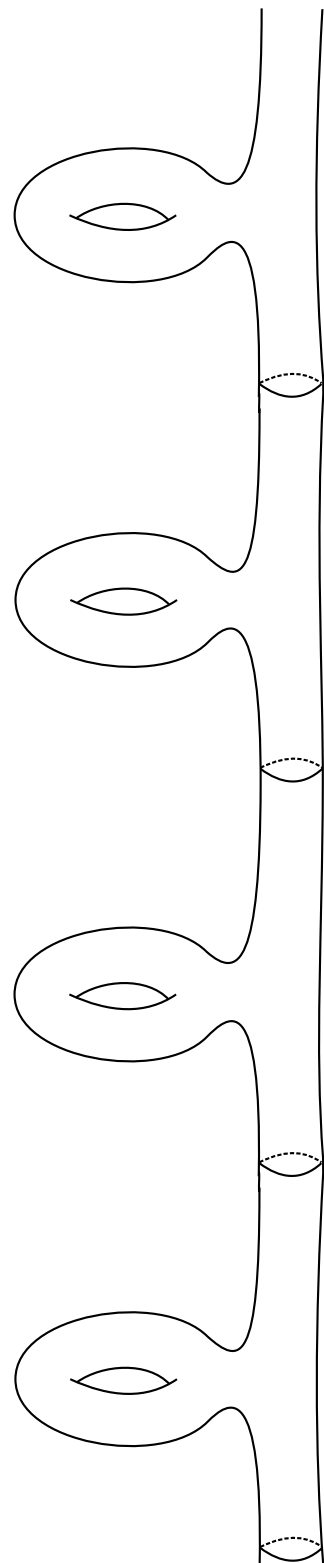
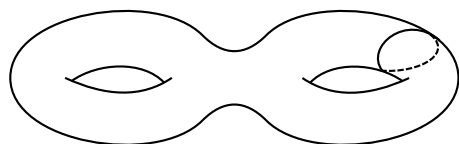


Abbildung 1: Unendlich zyklische Überlagerung

Mit diesen Überlegungen bettet sich die Theorie der Knoten und Verschlinungen gewissermaßen in den Kontext der kompakten, orientierten 3-Mannigfaltigkeiten ein. Diese Arbeit nimmt solche Invarianten, die aus Knoten- und Verschlingungskomplementen hervorgehen, als Ausgangspunkt.

Alexander definiert 1928 eine topologische Invariante des Knotenkomplements (vgl. [1]), die einem Knotenkomplement eine Klasse von Laurentpolynomen mit eindeutigem Grad zuordnet — es entstehen die sogenannten Alexander-Polynome. Im Jahr 1934 stellt Seifert in seiner Arbeit „Über das Geschlecht von Knoten“ [19] mit dem Knotengeschlecht eine Invariante vor, welche die minimale Komplexität einer orientierten eingebetteten Fläche berechnet, die den Knoten aufspannt (nach der Klassifikation von orientierten Flächen wird diese Komplexität in Termen des Geschlechts gemessen). Weiter gibt er darin eine explizite Konstruktion für die Existenz solcher Flächen an, die sogenannte Seifert-Konstruktion. Dieses Knotengeschlecht liefert die Möglichkeit jeden Knoten von dem Unknoten zu unterscheiden. Das bedeutet, dass nur der Unknoten aus dem Rand einer eingebetteten Scheibe hervorgeht.

Natürlich liefert die Seifert-Konstruktion eine Fläche mit einem gewissen Geschlecht. Es ist jedoch ein deutlich komplizierteres Unterfangen, wenn man zeigen möchte, dass eine gefundene Fläche in ihrer Komplexität nicht unterboten werden kann. Entsprechend günstig erweist sich Seiferts Resultat, dass der Grad des Alexander-Polynoms eines Knotens eine untere Schranke für sein Geschlecht definiert. Hat man also eine eingebettete orientierte Seifert-Fläche eines Knotens gefunden, von der man vermutet, dass diese minimales Geschlecht hat, so kann man den Grad des Alexander-Polynoms zu dem Knoten berechnen und verifiziert in manchen Fällen die Vermutung.

Der wesentliche Gegenstand dieser Arbeit ist die Verallgemeinerung dieser beiden auf Knotenkomplementen definierten Invarianten, zu Invarianten auf kompakten, orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mit Rand, der maximal aus Tori besteht. Bei den Invarianten handelt es sich genauer um Halbnormen auf der ersten Kohomologie der Mannigfaltigkeit. Für diese Invarianten stellt McMullen in [14] fest, dass sich auch die oben erwähnte Abschätzung aus der Knotentheorie verallgemeinern lässt. Diese Arbeit beschäftigt sich mit diesem Resultat, welches ihr als Haupttheorem 1.1 zugrunde liegt.

Skizze der Verallgemeinerungen

Im Falle eines Knotens berechnet sich die erste Kohomologie des Komplementes zu einer freien abelschen Gruppe von Rang 1. Die orientierte Seifert-Fläche (welche den Knoten aufspannt) lässt sich als Homologieklassse auffassen, vgl. Bemerkung 2.2.3. Als solche ist sie Lefschetz dual zu einem ϕ der ersten Kohomologie. Nun stellt man fest, dass die beiden betrachteten Knoteninvarianten, sich als Invarianten der Kohomologie auffassen lassen. So verallgemeinert die Alexander-Norm auf der ersten Kohomologie den Grad des Alexander-Polynoms von ϕ , vgl. Kapitel 5.4 und die Thurston-Norm einer Kohomologieklassse berechnet die minimale Komplexität aller zu ϕ dualen, orientierten, eingebetteten Flächen. Sie verallgemeinert also das Knotengeschlecht, da sie sich im Falle eines Knotens aus einer geschlechtsminimierende Seifert-Fläche berechnet.

Es stellt sich heraus, dass alle betrachteten Invarianten eine enge Beziehung zu un-

endlich zyklischen Überlagerungen haben. Diese können etwa durch Aufschneiden und Verkleben an einer zusammenhängenden 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit gewonnen werden, siehe zum Beispiel Abbildung 1. Diese Abbildung ist für die Intuition und das Verständnis erheblich — man könnte dem Leser fast raten, vor und nach jedem Kapitel die Abbildung 1 zu betrachten und immer wieder neu zu reflektieren. Man beachte die Kompaktheit der abgebildeten Mannigfaltigkeit, wohingegen die Überlagerung unendlich erzeugte Homologie hat.

Skizze der Arbeit

Der Aufbau der Arbeit lässt sich wie folgt beschreiben: Das erste Kapitel bereitet das nötige algebraische und topologische Werkzeug für die Definitionen und Berechnungen der verallgemeinerten Invarianten vor. Weiter beschreibt es Konstruktionen, die in späteren Beweisen zielführend sein werden. Das nächste Kapitel definiert die Thurston-Norm eines Elementes $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ und beweist eine Abschätzung gegen $b_1(\ker \phi)$. Anschließend präsentiert das Kapitel 4.1 die Alexander-Norm und widmet dieser eine ausführliche algebraische Betrachtung. Weiter stellt es einen Zusammenhang der Alexander-Norm mit $b_1(\ker \phi)$ her. Diese Ergebnisse liefern den Beweis des Theorems, der mit einer Reihe von Modifikationen und Ergänzungen an die Beweisführung aus [14] angelehnt ist. Das letzte Kapitel schließt den Beweis des Haupttheorems ab, stellt weiterführende Fragen und gibt einige Anwendungen und Beispiele für Berechnungen an.

Bevor nun das Haupttheorem der Arbeit angegeben wird, möchte ich mich ausdrücklich bei meiner Betreuerin Prof. Ursula Hamenstädt bedanken. Nicht nur für die Wahl des interessanten Themas, sondern vor allem auch für die qualitative Betreuung und den hohen Zeit- und Geduldaufwand, den sie dafür eingebracht hat. Die gemeinsamen Diskussionen hatten eine extrem hohe Lerndichte für mich und das Wissen, dass ich im Rahmen der Bachelorarbeit gewonnen habe, geht weit über das Niedergeschriebene hinaus. Weiter möchte ich Prof. Matthias Kreck danken, dessen exzellente Vorlesung über die Differentialtopologie meine Intuition und Geschicklichkeit in differentialtopologischen Betrachtungen geprägt hat und mir einen guten Einstieg in diese Bachelorarbeit ermöglicht hat.

Theorem 1.1 (McMullen). *Sei M eine kompakte, zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension 3. Falls der Rand dieser Mannigfaltigkeit nicht leer ist, so soll er aus einer Kollektion von Tori bestehen. Dann gilt folgende Abschätzung für die Alexander-Norm und die Thurston-Norm $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_T : H^1(M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ der 3-Mannigfaltigkeit:*

$$\|\phi\|_A \leq \begin{cases} \|\phi\|_T + 1 + b_3(M) & , \text{ falls } b_1(M) \leq 1 \text{ und } \phi : \pi_1(M) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \\ \|\phi\|_T & \end{cases}$$

Entsteht ϕ als Rückziehung eines Faserbündels $M \rightarrow S^1$, so gilt Gleichheit.

2 Vorbereitungen der benötigten Theorien

2.1 Über noethersche Moduln und Gruppenringe

Im Folgenden sei R stets ein kommutativer Ring mit $1 \neq 0$.

Sei M ein R -Modul. Dann ist M noethersch, falls jeder Untermodul endlich erzeugt ist, insbesondere M selbst. Ein Ring ist noethersch wenn er es als Modul über sich selbst ist.

Da für jeden R -Modulhomomorphismus $M \rightarrow N$ das Bild der Erzeuger von M das Bild des Homomorphismus erzeugt, gilt folgende Proposition:

Proposition 2.1. *Sei $M \twoheadrightarrow N$ ein R -Modulepimorphismus. Dann impliziert die endliche Erzeugbarkeit von M die von N .* \square

Corollar 2.2. *Quotienten von endlich erzeugten Moduln sind endlich erzeugt.* \square

Corollar 2.3. *Sei C_\bullet ein Kettenkomplex von noetherschen R -Moduln. Dann ist die Homologie endlich erzeugt über R .* \square

Lemma 2.4. *Ein Epimorphismus von einem noetherschen R -Modul M in einen weiteren R -Modul L impliziert, dass L noethersch ist.*

Beweis. Jeder Untermodul aus L besitzt ein endliches Erzeugendensystem als Bild endlich vieler Erzeuger des zurückgezogenen Untermoduls. \square

Lemma 2.5. *Sei $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von R -Moduln. Dann ist M noethersch genau dann wenn L und N noethersch sind.*

Beweis. Sei M noethersch, so ist es mit Lemma 2.4 auch N . Weiter ist L isomorph zum noetherschen Untermodul $\ker(M \rightarrow N)$. Umgekehrt erhalten wir für jeden Untermodul $M' \subset M$ eine kurze exakte Sequenz von Untermoduln mit den entsprechenden Einschränkungen $0 \rightarrow L' \rightarrow M' \rightarrow N' \rightarrow 0$ wobei L' und N' als R -Untermoduln endlich erzeugt, somit auch M' . \square

Sei im Folgenden M noethersch. Dies ist zum Beispiel bei folgender Situation gegeben:

Corollar 2.6. *Sei R noethersch und M ein endlich erzeugter R -Modul. Dann ist M noethersch.*

Beweis. Mit Lemma 2.5 ist die direkte Summe R^n noethersch und mit Lemma 2.4 ist es M . \square

Lemma 2.7. *M ist über R endlich präsentiert.*

Beweis. M ist als größter Untermodul endlich erzeugt über R also existiert folgende exakte Sequenz:

$$R^n \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Da R^n aber noethersch ist und Kerne von Homomorphismen Untermoduln sind, kann die Sequenz auf der linken Seite folgendermaßen ergänzt werden:

$$R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0.$$

□

Für eine solche freie Auflösung von M , die also für noethersche Moduln immer existiert, sind alle Relationen durch $\ker(R^n \rightarrow M)$ gegeben. Deswegen nennt man eine darstellende Matrix zur Abbildung f aus $R^m \xrightarrow{f} R^n \rightarrow M$ auch Präsentationsmatrix. Verschiedene Präsentationsmatrizen unterscheiden sich nur durch die folgenden Operationen, siehe etwa [13, Theorem 6.1]: (1) Vertauschen von Zeilen oder Spalten (2) Hinzufügen von Einheitsblöcken (als Blockmatrix oder direkter Summe mit der Identität) (3) Hinzufügen von Nullspalten und (4) Addieren eines Vielfachen einer Spalte oder Zeile auf eine jeweils andere. Zusammen mit grundlegenden Eigenschaften der Determinante liefert das die Wohldefiniertheit der folgenden Definition:

Definition 2.1. Es sei $R^m \rightarrow R^n \rightarrow M$ eine endliche Präsentation des R -Moduls M mit einer Präsentationsmatrix $X \in R^{n \times m}$. Definiere das i -te Elementarideal $E_i(M) \subset R$, als das von den Determinanten der $(n - i) \times (n - i)$ -Minoren von X erzeugte Ideal.

Da sich jede Determinante als Linearkombination von den Determinanten der Minoren schreiben lässt, ergibt sich eine Inklusionsbeziehung der Elementarideale. Für $n - i \leq 0$ und $n - i > \min(m, n)$ definiert man die Elementarideale gemäß der folgenden aufsteigenden Kette (da ohne Einschränkung $m > n$):

$$0 = E_{-1}(A) \subset E_0(A) \subset \cdots \subset E_n(A) = R$$

Beispiel 1. Ist R ein Hauptidealring, so sind die Elementarideale durch den Elementarteilersatz vollständig charakterisiert.

Bemerkung 2.1.1. Das letzte Beispiel verwendet die Ergiebigkeit der Theorie der endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen. Die Elementarideale definieren nach den obigen Überlegungen Invarianten für endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen. Dies ist durch eine Art Nachahmung der ersten Schritte des Elementarteilersatzes motiviert, die nur die endliche Präsentation der Moduln verwendet.

Nun wird es später häufig nötig, Berechnungen über dem Gruppenring durchzuführen. Dafür wollen wir uns nun der Definition des Gruppenrings zuwenden und einige — für Berechnungen essenzielle — grundlegenden Eigenschaften des ganzzahligen Gruppenrings über einer frei abelschen Gruppe feststellen.

Definition 2.2 (Gruppenring). Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Dann ist der *Gruppenring* definiert als die Menge aller endlichen formalen Summen:

$$R[G] = \sum_{g \in G} a_g g, a_g \in \mathbb{Z}, g \in G$$

die durch komponentenweise Addition eine abelsche Gruppe wird und durch die Gruppenverknüpfung und die multiplikative Struktur von R ein Ring mit Eins wird. Die Elemente $g \in G \subset R[G]$ werden als die Gruppenelemente in dem Gruppenring bezeichnet.

Wir werden uns ausschließlich mit ganzzahligen oder rationalen Gruppenringen befassen, also mit $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$.

Bemerkung 2.1.2. Sei also M ein R -Modul mit einer Gruppenwirkung von G . Dann lässt sich M als $R[G]$ -Modul auffassen. Insbesondere werden wir also abelsche Gruppen und \mathbb{Q} -Vektorräume über dem ganzzahligen bzw. rationalen Gruppenring betrachten.

Bemerkung 2.1.3. Da der Gruppenring die multiplikative Struktur von der Gruppenverknüpfung erbt, ist $\mathbb{Z}[G]$ im Allgemeinen nicht unbedingt kommutativ. Mit diesem Problem, das durch nicht-abelsche Gruppen G entsteht, werden wir uns später beschäftigen müssen.

Beispiel 2. Falls G eine unendlich zyklische Gruppe mit Erzeuger t ist, lässt sich der Gruppenring über F als $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, also als Ring der formalen Laurentpolynome in der Variablen t auffassen.

Tatsächlich gilt dies sogar etwas allgemeiner. Dies wollen wir zeigen um Eigenschaften für den ganzzahligen Gruppenring zu entwickeln, die wir aus dem multivariablen Laurenttring ableiten. Für diesen gilt nämlich:

Proposition 2.8. *Der Laurenttring $\mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ ist noethersch.*

Beweis. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist der Polynomring über \mathbb{Z} in endlich vielen Variablen noethersch. Ebenso ist die Lokalisierung eines noetherschen Ringes noethersch, da jedes Ideal in der Lokalisierung Bild eines endlich erzeugten Ideals ist. \square

Da der Laurenttring mit \mathbb{Z} -Koeffizienten kein Hauptidealring ist, ist die vorhergehende Proposition so bedeutend. Die folgende Proposition wird zeigen, dass $\mathbb{Z}[F]$ für einen freien \mathbb{Z} -Modul F auch kein Hauptidealring ist. Man sollte sich also um eine möglichst vollständige Liste guter Eigenschaften von $\mathbb{Z}[F]$ bemühen.

Proposition 2.9. *Sei F eine freie abelsche Gruppe, also $F \cong \mathbb{Z}^b$. Dann existiert ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{Z}[F]$ und $\mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_b^{\pm 1}]$. Insbesondere ist $\mathbb{Z}[F]$ faktoriell und noethersch.*

Beweis. Unter Ausnutzung der universellen Eigenschaft des Polynomrings und der Lokalisierung definiert man folgende Abbildung:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}] &\rightarrow \mathbb{Z}[F] \\ X_i &\mapsto f_i \end{aligned}$$

Wenn f_i eine Basis von F darstellt, so erhält man offensichtlich einen Isomorphismus. \square

Bemerkung 2.1.4. Unter dieser Identifikation ergibt sich, dass die Einheiten $\mathbb{Z}[F]^\times$ genau die Produkte der Gruppenelemente mit den Einheiten von \mathbb{Z} sind also $\pm F \subset \mathbb{Z}[F]$.

Der Quotientenkörper von \mathbb{Z} besitzt natürlich mehr Einheiten, deswegen ergibt sich für den Laurenttring über \mathbb{Q} die Eigenschaft eines Hauptidealrings.

Lemma 2.10. $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ ist ein Hauptidealring.

Natürlich könnte man \mathbb{Q} für dieses Lemma durch jeden beliebigen Körper \mathbb{K} ersetzen.

Beweis. Da \mathbb{Q} ein Körper ist, ist $\mathbb{Q}[t]$ ein Hauptidealring. Der Beweis läuft durch Betrachtung der kanonischen Lokalisierungsabbildung:

$$\alpha : \mathbb{Q}[t] \rightarrow \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$$

Die Ideale in der Lokalisierung sind genau die erweiterten Ideale aus dem ursprünglichen Ring, wegen der Erhaltung durch $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \supset I = \alpha_*(\alpha^*(I))$, wobei $\alpha^* = \alpha^{-1}$ die Kontraktion eines Ideals bezeichnet und $\alpha_*(I) = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \cdot \alpha(I)$ die Erweiterung eines Ideals. Da aber jedes Element in $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ durch Multiplizieren mit der Einheit t^N im Erzeugnis eines Polynoms liegt, wird ein Erzeuger aus dem Hauptideal $\alpha^*(I)$ auf einen Hauptidealgeber in I abgebildet. \square

Nun ist allgemeiner die Eigenschaft für einen Ring ein Hauptidealring zu sein, abgeschlossen unter Lokalisierungen. Der Beweis geht analog: Das Multiplizieren mit der Einheit t^N führt einfach zu Multiplikation mit Elementen aus der multiplikativen Menge an der lokalisiert wurde — den neuen Einheiten aus dem lokalisierten Ring.

2.2 Poincaré und Lefschetz Dualität — eine differentialtopologische Betrachtung

Die Definition der Thurston-Norm in Kapitel 3.1 wird uns eine Invariante auf $H^1(M; \mathbb{Z})$ einer glatten Mannigfaltigkeit M^m liefern, die durch Poincaré bzw. Lefschetz Dualität aus einer Invarianten auf $H_{m-1}(M, \partial M; \mathbb{Z})$ hervorgeht. Und tatsächlich werden die folgenden Seiten teilweise in ein wildes Hin- und Herspringen zwischen Homologie und Kohomologie ausarten. Aus diesem Grund sollen hier noch einmal wichtige Grundlagen und Berechnungsmöglichkeiten, die später verwendet werden, erklärt werden.

Zunächst widmen wir uns einigen Konventionen und Identifikationen.

Bemerkung 2.2.1 (Homomorphismen der Abelianisierung). Es werden stillschweigend natürliche Identifikationen $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(M); \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(M); \mathbb{Z})$ verwendet. Die erste natürliche Identifikation liefert das universelle Koeffiziententheorem. Auch wenn die erhaltende Sequenz im Allgemeinen nicht natürlich zerfällt, so ist dies im Fall der ersten Kohomologie offensichtlich. Die zweite folgt, da ein Homomorphismus $\phi : H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ gleichbedeutend mit einem Homomorphismus $\hat{\phi} : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist. Dies sieht man wie folgt ein: das Hurewicz Theorem besagt, dass die natürliche Abbildung $\pi_1(M) \rightarrow H_1(M)$, die durch Auffassen von Schleifen als singuläre 1-Zykel entsteht, die Abelianisierungsabbildung ist. Diese besitzt die universelle Eigenschaft

der Quotientenabbildung zu dem Normalteiler $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$. Da \mathbb{Z} abelsch ist, folgt $[\pi_1(M), \pi_1(M)] \subset \ker \hat{\phi}$. Also faktorisiert $\hat{\phi}$ über eine eindeutige Abbildung $H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$. Mit anderen Worten: Das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \xrightarrow{\hat{\phi}} & \mathbb{Z} \\ \downarrow & \nearrow \phi & \\ H_1(M) & & \end{array}$$

Dies liefert die eins-zu-eins Beziehung, da ϕ nach dem Diagramm offensichtlich ein eindeutiges Element in $\text{Hom}(\pi_1(M); \mathbb{Z})$ definiert.

Konvention. In dieser Arbeit bezeichne der Kern einer Klasse $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ durchweg den Kern der mit ϕ identifizierten Abbildung auf der Fundamentalgruppe.

Bemerkung 2.2.2 (Weitere Identifikationen). Sei N eine glatte orientierte n -dimensionale Mannigfaltigkeit (mit CW-Struktur). Bekanntlicherweise gilt:

$$H_{n-1}(N, \partial N; \mathbb{Z}) \cong H^1(N; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(N), \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(N), \mathbb{Z}) \cong [N, S^1]$$

wobei der

1. -te Isomorphismus bei $\partial N = \emptyset$ nach Poincaré und sonst Lefschetz Dualität,
2. -te Isomorphismus gilt, da das universelle Koeffiziententheorem eine exakte Sequenz liefert in der diese beiden Terme auftauchen und weiter nur $\text{Ext}(H_0(N), \mathbb{Z}) = 0$,
3. -te Isomorphismus gilt, da nach Hurewicz die Abbildung $\pi_1(N) \rightarrow H_1(N)$ die Abelianisierung ist (siehe Bemerkung 2.2.1),
4. -te Isomorphismus gilt, indem man zeigt, dass jede Abbildung auf dem 1-Skelett $X^1 \subset N \rightarrow S^1$ auf N fortgesetzt werden kann. Da das 1-Skelett die Fundamentalgruppe (oder Homologie) erzeugt, also die Inklusion eine surjektive Abbildung $i_* : \pi_1(X^1) \twoheadrightarrow \pi_1(N)$ induziert, lässt sich auf diese Weise jeder Homomorphismus $\pi_1(N) \rightarrow \mathbb{Z}$ auf den Erzeugern aus dem 1-Skelett (genauer möchte man, dass diese Abbildung auf einem maximalen Baum konstant ist) definieren und fortsetzen.

Bemerkung 2.2.3 (Untermannigfaltigkeiten als Homologieklassen). Es sei S^s eine s -dimensionale orientierte kompakte Mannigfaltigkeit. Die Orientierung liefert eine eindeutige Fundamentalklasse $[S] \in H_s(S)$ falls S geschlossen ist und sonst $[S, \partial S] \in H_s(S, \partial S)$. Es sei $h : (S^s, \partial S) \hookrightarrow (N^n, \partial N)$ eine Einbettung. Dann definiert diese Einbettung eine Homologieklass in $H_s(N, \partial N)$ als das Bild der eindeutigen Fundamentalklasse von S unter der induzierten Abbildung $H_s(h)$. Für eine orientierbare kompakte Untermannigfaltigkeit $(S, \partial S) \subset (N, \partial N)$ liefert die Inklusion eine Einbettung und für eine gewählte Orientierung erhält man also eine Homologieklass $[S]$ oder $[S, \partial S]$ in $H_s(N, \partial N)$.

Theorem 2.11. *Sei $f : N^n \rightarrow K^m$ eine stetige Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten. Dann lässt sich f beliebig nah durch glatte Abbildungen approximieren (wie die Güte der Approximation genau gemessen wird ist hier von keiner Bedeutung), welche homotop zu f sind.*

Theorem 2.12 (Sard und Satz vom regulären Wert). *Sei $f : N^n \rightarrow K^m$ eine glatte Abbildung. Dann liegen die regulären Werte von f dicht in K . Das Urbild eines regulären Wertes ist eine abgeschlossene glatte orientierte eigentlich eingebettete Untermannigfaltigkeit in K der Kodimension m . Ein regulärer Wert ist ein Punkt aus K , bei dessen Urbild f an jedem Punkt einen Epimorphismus auf den Tangentialräumen definiert.*

Theorem 2.13 (Thom). *Sei $f : N \rightarrow S^1$ eine glatte Abbildung. Jedes Urbild eines regulären Wertes definiert nach obigem Theorem und der Bemerkung 2.2.3 ein Element in $H_{n-1}(N, \partial N; \mathbb{Z})$. Diese ist Poincaré beziehungsweise Lefschetz dual zu $[f] \in H^1(N; \mathbb{Z})$.*

Alle diese Aussagen sind bekannte elementare Aussagen der Differentialtopologie und können etwa in [12] oder mit elementaren Methoden in [11] (bis auf 2.13) nachgelesen werden.

Das Zusammentragen aller Ergebnisse bedeutet also: Jeder Homomorphismus $\phi \in H^1(N; \mathbb{Z})$ definiert ein eindeutiges Element in $[N, S^1]$. Umgekehrt liefert jede Abbildung $N \rightarrow S^1$ einen induzierten Homomorphismus der Homologiegruppen. Die Differentialtopologie liefert nun die restlichen Schritte. Jede Homotopieklasse aus $[N, S^1]$ enthält einen glatten Repräsentanten. Für diesen existiert ein regulärer Wert in S^1 . Jedes Urbild eines solchen regulären Wertes ist dann eine 1-kodimensionale orientierte Mannigfaltigkeit (mit Rand, wenn überhaupt, im Rand von N eigentlich eingebettet), welche als Homologieklasse dual zu ϕ ist.

2.3 Konstruktionen

Als explizite Anwendung des letzten Kapitels leiten wir in diesem Kapitel Konstruktionen her, die gewisse Informationen von 1-kodimensionalen Mannigfaltigkeiten beinhalten.

Lemma 2.14. *Wenn M eine glatte orientierte n -Mannigfaltigkeit ist und $N \subset M$ eine glatte k -dimensionale Untermannigfaltigkeit, dann korrespondieren die Orientierungen von N bijektiv mit den Orientierungen von dem Normalenbündel $\nu(N; M)$ in M .*

Beweis. Das Tangentialbündel von N kann als Untervektorraumbündel von TM aufgefasst werden; es ist unabhängig von der Einbettung. Falls N nicht orientierbar ist, so ist es auch $\nu(N; M)$ nicht und umgekehrt. Sei also N orientierbar, dann gilt für alle $x \in N$, dass die Faser $TN_x \oplus \nu(N; M)_x = TM_x$ die Orientierung von M trägt, also m_1, \dots, m_n eine repräsentierende Basis der eindeutigen Orientierung ist. Also liefert die Lineare Algebra aus einer Orientierung von N , definiert durch die Basis des Tangentialraumes n_1, \dots, n_k eine eindeutige Orientierung von $\nu(N; M)_x$, repräsentiert durch die Basis ν_1, \dots, ν_{n-k} , sodass die folgenden Orientierungen übereinstimmen: $[m_1, \dots, m_n] = [n_1, \dots, n_k, \nu_1, \dots, \nu_{n-k}]$ \square

Definition 2.3. Eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ der Kodimension 1 heißt zweiseitig, falls eine glatte Einbettung $N \times (-\epsilon, \epsilon) \hookrightarrow M$ existiert, die auf $N \times \{0\}$ mit der Inklusion von N übereinstimmt. Eine solche Einbettung heißt auch zweiseitiger Kragen.

Bemerkung 2.3.1. Offensichtlich ist die Zweiseitigkeit einer 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit gleichbedeutend mit einer Orientierung, da $N \times (-\epsilon, \epsilon)$ diffeomorph zu $\nu(N; M)$ ist. Falls wir im Folgenden von einer orientierten 1-kodimensionalen Mannigfaltigkeit N in einer orientierten Mannigfaltigkeit M reden, so soll ihr zweiseitiger Kragen stets kompatibel gewählt sein. Das bedeutet, dass Urbilder von Repräsentanten der induzierten Orientierung des Normalenbündels, in $N \times (0, \epsilon)$ liegen.

Da wir im Folgenden nur 3-Mannigfaltigkeiten betrachten, so gestatten wir jetzt schon die Bequemlichkeit uns auf solche zu reduzieren. Die 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeiten sind also diffeomorph zu Flächen.

Zu einer gegebenen Homologieklassse $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ finden wir nach Kapitel 2.2, sowohl den eindeutigen Homomorphismus $\phi : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ als auch eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow S^1$ die ϕ induziert. Außerdem finden wir mit Kapitel 2.2 eine zu ϕ duale orientierte Untermannigfaltigkeit S als Urbild eines Punktes unter f . Mit den folgenden Konstruktionen soll bewiesen werden, dass jede duale orientierte eingebettete Fläche $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ als Urbild eines regulären Wertes darstellbar ist. Weiter wollen wir häufig die zu $\ker \phi$ gehörige Überlagerung betrachten. Wir werden ein Verfahren entwickeln, in welchem wir durch Aufschneiden und Verkleben an S diese Überlagerung erhalten. Genauer wollen wir zeigen: Sowohl durch Aufschneiden an S als auch durch Zurückziehen der universellen Überlagerung von S^1 entlang f erhalten wir die Überlagerung zu dem Normalteiler $\ker \phi$ der Fundamentalgruppe.

Konstruktion 1 (Aufschneiden an einer Fläche). Aus der Überlagerungstheorie ist bekannt, dass zu jeder normalen Untergruppe der Fundamentalgruppe eines hinreichend gut zusammenhängendem Hausdorffraumes (insbesondere Mannigfaltigkeiten), auch eine normale zusammenhängende Überlagerung existiert, die bis auf Überlagerungsisomorphie eindeutig ist, siehe [10, Chapter 1.3]. Nun definiert aber ein Element $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ nach obigen Überlegungen den Normalteiler $\ker \phi \subset \pi_1(M)$. In diesem Sinne nennen wir die Überlagerung zu ϕ fortan M_ϕ . Da jede duale Homologieklassse nach Kapitel 2.2 eine Untermannigfaltigkeit als Repräsentanten besitzt, sei also $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ eine eingebettete orientierte Fläche, deren Fundamentalklasse dual zu ϕ ist. Da diese Kodimension 1 und eine Orientierung hat, ist sie nach Bemerkung 2.3.1 auch zweiseitig. Fixiere also einen zweiseitigen Kragen¹ $h : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$. Das bedeutet, dass die 3-Mannigfaltigkeit an S „aufgeschnitten“ werden kann (siehe etwa [2, Kapitel 4.2]), wobei das Aufschneiden bedeutet, das Komplement der Fläche zu betrachten (das Resultat ist offensichtlich eine Mannigfaltigkeit, jedoch können Eigenschaften wie Kompaktheit oder Randbedingungen entfallen). Will man nun die durch Aufschneiden gewonnene Kopien $(M_i)_{i \in \mathbb{Z}}, M_i \cong M - S$ wieder verkleben, erweist sich die Zweiseitigkeit der Fläche als

¹Diese Zweiseitigkeit sei natürlich stets mit der Kompatibilität mit der induzierten Orientierung des Normalenbündels gewählt. Dies wurde auch in Bemerkung 2.3.1 verlangt und bedeutet auch Kompatibilität mit der Orientierung.

günstig, sogar notwendig (sonst würde nur *eine* Kopie von S als Rand entstehen). Der fixierte zweiseitige Kragen liefert nämlich durch $h(S, (-\epsilon, 0))$ und $h(S, (0, \epsilon))$ offene Mengen M_i^- und M_i^+ in den M_i . Durch die Diffeomorphismen $h_+ : S \times (0, \epsilon) \rightarrow M_i^+$ und $h_- : S \times (-\epsilon, 0) \rightarrow M_i^-$, können nun M_i und M_{i+1} jeweils entlang M_i^+ und M_{i+1}^- an $S \times (-\epsilon, \epsilon)$ geklebt werden — genauer: h liefert eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung

$$\cdots \sqcup M_{i-1} \sqcup (S \times (-\epsilon, \epsilon)) \sqcup M_i \sqcup (S \times (-\epsilon, \epsilon)) \sqcup M_{i+1} \sqcup \cdots ,$$

sodass der Quotient eine unendlich zyklische Überlagerung mit der offensichtlichen Projektion bildet. Da entlang offener Mengen verklebt wird, also durch die „Überlappungen“, ist es möglich den gewonnenen Quotienten mit einer differenzierbaren Struktur zu versehen, so dass die Inklusionen der M_i glatte Einbettungen und somit Untermannigfaltigkeiten sind.

Nun muss die resultierende Überlagerung keineswegs zusammenhängend sein. Wir werden später sehen, dass es aber hinreichend ist, wenn die Fläche S zusammenhängend ist und nicht nullhomolog. Denn dann ist mit Corollar 2.18 das Komplement $M - S$ zusammenhängend. In den nächsten Betrachtungen sei die entstehende unendlich zyklische Überlagerung zusammenhängend.

Als weiteren Vorteil dieser expliziten Konstruktion, sieht man explizit die Diffeomorphismen der unendlich zyklischen Decktransformationsgruppe mit Erzeuger t . Es entspricht nt einer Translation aller M_i um n . Es bleibt nur noch zu zeigen, dass diese Überlagerung auch *die* zu $[S]$ gehörige Überlagerung ist, die in dem obigen Sinne dem dualen ϕ entspricht (da S immer noch die gewählte Orientierung bzw. den gewählten zweiseitigen Kragen trägt). Dies sieht man zum Beispiel ein, indem man sich unter dem Isomorphismus $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$ einen glatten Repräsentanten aussucht der ϕ induziert. Natürlich existiert so einer nach den Bemerkungen in 2.2 immer, jedoch soll dieser für den gewünschten Nachweis explizit S als orientiertes Urbild eines regulären Wertes ergeben. Dafür konstruiert man sich aus dem fixierten zweiseitigen Kragen eine Abbildung $f : M \rightarrow S^1$, die $S \times 0$ auf $p \in S^1$ abbildet, $M - (S \times (-\epsilon, \epsilon))$ konstant auf den antipodalen Punkt von p abbildet und auf $S \times (-\epsilon, \epsilon)$ gemäß der Projektion auf den zweiten Faktor fortgesetzt wird. Bezüglich dieser glatt konstruierten Abbildung f ist der Wert p regulär und $f^{-1}p = S$ mit der richtigen Orientierung ausgestattet. Durch paralleles Aufschneiden von M an S , und S^1 an p (analog wie oben nur 2 Dimensionen tiefer) erhält man folgendes kommutatives Diagramm von zusammenhängenden Überlagerungen:

$$\begin{array}{ccc} M_\phi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

Dieses Diagramm ist aber nun ein Pullback-Diagramm von glatten Faserbündeln. Also ist die Diffeomorphieklasse von M_ϕ eindeutig.

Wir können festhalten:

Corollar 2.15. *Die unendlich zyklische Überlagerung, die durch Aufschneiden und Verkleben an einer zu ϕ dualen Fläche entsteht, entspricht der normalen Untergruppe $\ker \phi$.*

Corollar 2.16. *Jede zu ϕ duale Fläche kann als orientiertes Urbild eines regulären Wertes einer glatten Abbildung $M \rightarrow S^1$ dargestellt werden, mit $H_1(M \rightarrow S^1) = \phi$.*

Mit einer zu ϕ dualen Fläche ist eine eigentlich eingebettete orientierte 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeit gemeint, deren Einbettung die Fundamentalklasse auf eine zu ϕ duale Homologieklassse abbildet. Corollar 2.16 gilt natürlich mit der obigen expliziten Angabe der glatten Abbildung für allgemeine S , auch solche deren Überlagerung durch Aufschneiden und Verkleben nicht zusammenhängend ist.

Konstruktion 2 (Graph einer orientierten 1-kodimensionalen Untermannigfaltigkeit). Sei S ein beliebiger zu $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$ dualer eigentlich eingebetteter, orientierter Repräsentant. Wir haben gesehen, dass mit obiger Konstruktion eine Abbildung $f : M \rightarrow S^1$ entsteht mit $f^{-1}p = S$. Diese Abbildung soll in dieser Konstruktion über einen Graphen faktorisiert werden.

Bezeichne $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n$ und $M - S = M_1 \sqcup \dots \sqcup M_m$ die Zusammenhangskomponenten von S bzw. $M - S$. Man betrachte nun den gerichteten Graphen G , dessen Knoten bijektiv den Komponenten M_i entsprechen und dessen Kanten aus den Komponenten S_i mit ihrer Orientierung hervorgehen. Also ein Graph mit m Knoten und n Kanten, wobei eine Kante von einem Knoten zu einem anderen verläuft, wenn die korrespondierenden Komponenten M_i, M_j durch das entsprechende Flächenstück von S getrennt werden, sodass die Komponenten das zweiseitige Flächenstück an der negativen beziehungsweise positiven Seite berühren, je nachdem ob die Kante vom assoziierten Knoten aus oder eingeht.

Mit genau diesen zweiseitigen Umgebungen der Flächenkomponenten ist es möglich, ähnlich wie oben eine Abbildung $M \rightarrow G$ zu definieren, welche die Assoziierungen respektiert. Dafür betrachte man den zweiseitigen Kragen auf den Komponenten von S :

$$\sqcup(S_i \times (-\epsilon, \epsilon)) \xrightarrow{=} S \times (-\epsilon, \epsilon) \hookrightarrow M$$

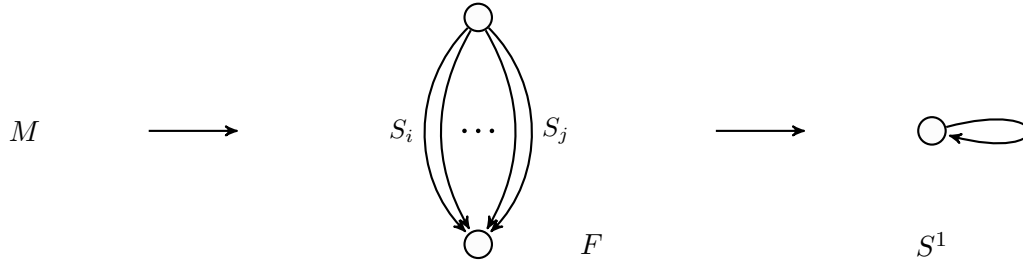
Dann existiert analog zur obigen Konstruktion die Quotientenabbildung $q : M \rightarrow G$ auf den Graph, durch Kollabieren der $M_i \cap (M - S \times (-\epsilon, \epsilon))$ auf ihre Knoten und Projektion von $(-\epsilon, \epsilon)$ auf das Innere der Kanten des Graphen. Man betrachte außerdem $G \rightarrow S^1$ die Abbildung die jede Kante entsprechend ihrer Richtung, also orientierungserhaltend, einmal um die Sphäre $S^1 = I/\partial I$ abbildet, sodass die Knoten nach $[\partial I]$ abgebildet werden. Außerdem seien die Mittelpunkte der Kanten das Urbild von dem antipodalen Punkt von $[I/\partial I]$, etwa $p \in S^1$. Sei f nach wie vor die Abbildung aus der letzten Konstruktion. Wir erhalten:

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ M & \xrightarrow{\quad} G & \xrightarrow{\quad} S^1 \end{array} \quad (1)$$

Da M zusammenhängend ist, ist es auch G .

Corollar 2.17. *Sei S eine orientierte, eigentlich eingebettete Fläche und der dazugehörige Graph G nach Konstruktion 2 habe einen Knoten M_i , mit nur ein- oder ausgehenden Kanten. Dann ist die Vereinigung \hat{S} aller Komponenten von S die M_i berühren nullhomolog.*

Beweis. Im allgemeinen Fall betrachtet man den Graphen F der aus Konstruktion 2 bezüglich \hat{S} entsteht. Das Ergebnis dieser Konstruktion war es, dass die Komposition $M \rightarrow F \rightarrow S^1$ eine zu $[\hat{S}]$ duale Kohomologieklass induziert (unter der Identifikationen aus Bemerkung 2.2.1). Aber F hat folgende Form:



Jede Komposition $S^1 \rightarrow M \rightarrow F \rightarrow S^1$ hat somit Grad 0, aber da Homotopieklassen $[S^1, S^1]$ durch den Grad charakterisiert sind, ist somit $[\hat{S}]$ dual zu dem trivialen Homomorphismus $\pi_1(M) \rightarrow H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$. Es gilt $[\hat{S}] = 0$.

Ein elegantes Argument ergibt sich, wenn M geschlossen ist. Dann faktorisiert die Inklusion der beteiligten Flächenkomponenten über einen orientierten Nullbordismus, nämlich \overline{M}_i oder $M - M_i$. Mit der Funktorialität der Homologie, faktorisiert die Inklusion auf der zweiten Homologie dann über die induzierte Abbildung der Inklusion in den orientierten Nullbordismus, welche die Fundamentalklasse trivial auswertet². \square

Corollar 2.18. *Sei S eine zusammenhängende orientierte, eigentlich eingebettete Fläche, deren Komplement nicht zusammenhängend ist. Dann ist $[S] = 0$.*

Beweis. Mit der Zweiseitigkeit von S folgt, dass der dazugehörige Graph aus Konstruktion 2 aus einer Kante und zwei verschiedenen Knoten besteht. \square

Im Folgenden wollen wir häufig den Spezialfall betrachten, dass $\phi : H_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ surjektiv ist.

Definition 2.4. Ein solches $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ heißt primitiv.

2.4 Normen und Halbnormen auf freien \mathbb{Z} -Moduln und ihre Fortsetzungen

Ziel der folgenden Kapitel wird es sein, einer Diffeomorphieklasse von Mannigfaltigkeiten eine Halbnorm und somit eine Invariante zuzuordnen. Genauer gesagt werden es sogar mehrere Halbnormen sein. Die Halbnormen werden wir zunächst auf der ersten

²Das folgt aus der exakten Sequenz für das Paar $H_n(N^n, \partial N) \rightarrow H_{n-1}(\partial N) \xrightarrow{i} H_{n-1}(N^n)$, da der Randoperator die (relative) Fundamentalklasse auf die Fundamentalklasse des Randes abbildet und diese somit im Kern der Inklusion ist.

Kohomologie $H^1(M; \mathbb{Z})$ definieren. Die erste Kohomologie eines kompakten topologischen Raumes ist stets torsionsfrei, denn es gilt: $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z}); \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z})/T; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n$, wobei T der Torsionsanteil der abelschen Gruppe $H_1(M; \mathbb{Z})$ ist. Es wurde $\text{Hom}(T; \mathbb{Z}) = 0$ und $H_1(M; \mathbb{Z}) \cong H_1(M; \mathbb{Z})/T \oplus T$ verwendet.

Definition 2.5. Eine ganzzahlige Halbnorm ist eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ die Skalarmultiplikativität und Subadditivität erfüllt. Also für alle $\lambda \in \mathbb{Z}$ und $v, w \in \mathbb{Z}^n$ soll $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ und die Dreiecksungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ gelten.

Es folgt natürlich aus der Skalarmultiplikativität, dass die 0 trivial von der Halbnorm ausgewertet wird, da $\|0\| = 0\|0\|$. Gilt auch die Umkehrung, also $\|v\| = 0, v \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow v = 0$, so nennen wir $\|\cdot\|$ eine ganzzahlige Norm. Analog seien rationale (Halb-)Normen und reelle (Halb-)Normen definiert.

Lemma 2.19. Eine ganzzahlige Halbnorm lässt sich auf eine rationale Halbnorm fortsetzen. Eine ganzzahlige oder rationale Halbnorm lässt sich auf eine reelle Halbnorm fortsetzen. Das gleiche gilt für Normen.

Beweis. Möchte man $\|\cdot\| : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ rational fortsetzen, so bemerkt man, dass die Einbettung $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{Q}^n$ die Norm bereits durch die geforderte Skalarmultiplikativität fortgesetzt wird. Sobald man einen Wert für einen Punkt auf einem 1-dimensionalen Unterraum hat, so hat man ihn bereits für den ganzen Unterraum. Jede Gerade durch den Ursprung in \mathbb{Q}^n schneidet einen und somit unendlich viele Gitterpunkte: Für jedes $q \in \mathbb{Q}^n$ ist bereits $aq \in \mathbb{Z}^n$ für ein großes $a \in \mathbb{Z}$. Diese lineare Fortsetzung ist offensichtlich eine Halbnorm, sogar eine Norm, falls $\|\cdot\|$ es auf \mathbb{Z}^n war.

Sei nun $\|\cdot\| : \mathbb{Q}^n \rightarrow \mathbb{Q}$ eine Halbnorm. Dann ist diese insbesondere eine konvexe Funktion, also auf jedem Kompaktum Lipschitz-stetig und somit auf jedem Kompaktum $K \cap \mathbb{Q}^n, K \subset \mathbb{R}^n$ in eindeutiger Weise stetig auf K fortsetzbar — es folgt die Existenz einer reellen Fortsetzung. \square

Bemerkung 2.4.1 (Duale Vektorraumhalbnorm). Eine (Halb-)Norm auf einem Vektorraum, liefert stets eine (Halb-)Norm auf seinem Dualraum. Diese ist für einen Vektorraum $(V, |\cdot|)$ auf dem Dualraum $(V^*, \|\cdot\|)$ definiert durch:

$$\|\alpha\| = \sup_{\{v \in V, |v|=1\}} |\alpha v|$$

Entsprechend lässt sich eine Halbnorm auf $H^1(M; \mathbb{R})$ auf $H_1(M; \mathbb{R})$ durch den natürlichen Isomorphismus auf den Bidualraum definieren. Weiter lässt sich eine solche Halbnorm der ersten Kohomologie bei kompakten orientierbaren 3-Mannigfaltigkeiten mittels der Dualitätssätze auf $H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ übertragen, die wiederum durch Vektorraumdualität eine Halbnorm für $H^2(M, \partial M; \mathbb{R})$ liefert.

2.5 Die betrachteten Räume

Nun noch eine letzte Generalvoraussetzung, die ab sofort verlangt wird:

Im Folgenden sei M stets eine kompakte, orientierbare, zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Falls diese einen Rand hat, sei er diffeomorph zu einer disjunkten Vereinigung von Tori.

Um die Hilfsmittel zu erweitern oder Extremfälle auszuschließen, arbeitet man häufig in der Kategorie der stückweise linearen (PL, *piecewise linear*) oder der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Sieht man sich beispielsweise topologische Knoten an, also stetige Einbettungen $S^1 \hookrightarrow S^3$, so stellt man fest, dass diese besonders ausgearbeitet aussehen können. Dies passiert jedoch nicht, falls es sich bei der Einbettung um eine PL oder eine differenzierbare Einbettung handelt. Ähnlich kann man in diesen Kategorien raumfüllende Kurven vermeiden. Allerdings stellte sich im Studium der 3-Mannigfaltigkeiten heraus, dass die Situation sich erheblich von der in höheren Dimensionen unterscheidet. Beispielsweise ist nicht jede Gruppe als Fundamentalgruppe einer 3-Mannigfaltigkeit realisierbar, eine Einschränkung liefert etwa Theorem 4.14. Außerdem lässt sich die Tatsache ergiebig nutzen, dass in Dimension 3 keine Unterscheidung der topologischen, der PL und der differenzierbaren Kategorie nötig ist: Nach Moises Theorem (vgl. [16]) besitzt jede 3-Mannigfaltigkeit sowohl eine eindeutige PL, als auch eine eindeutige differenzierbare Struktur. Das bedeutet, um Aussagen für 3-Mannigfaltigkeiten zu zeigen, kann man sich (fast) beliebig in diesen Kategorien hin- und herbewegen, um das Resultat am Ende für alle zu erhalten. Um diese beiden Beispiele hervorzuheben, lässt sich bemerken, dass der \mathbb{R}^4 überabzählbar viele unterschiedliche differenzierbare Strukturen besitzt und auch jede Gruppe realisierbar als Fundamentalgruppe einer 4-Mannigfaltigkeit ist.

Diese Arbeit wird sich jedoch konsistent in der C^∞ -Kategorie bewegen. Der vorherige Absatz dient also lediglich der Betonung, dass dies keine Einschränkung bedeutet.

3 Die Thurston-Norm

Nun wollen wir zu der ersten der beteiligten Normen kommen — der Thurston-Norm auf $H^1(M; \mathbb{Z})$. Diese verallgemeinert das Geschlecht eines Knotens, denn in dem Fall eines Knotenkomplements ist $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ und eine Halbnorm besteht aus der Wahl einer ganzen Zahl für einen Erzeuger. Wählt man das Knotengeschlecht als diese ganze Zahl, so erhält man genau $\|\cdot\|_T - 1$, vgl. Kapitel 5.4. Um die Zusammenhänge nicht aus den Augen zu verlieren, sei der Beweis des Theorem 1.1 erneut wie folgt skizziert: Zunächst soll $b_1(\ker \phi) = b_1(M_\phi)$ als untere Schranke für die Auswertung der Thurston-Norm an einem surjektiven $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\pi_1(M); \mathbb{Z})$ herausgestellt werden. Dann wird die Auswertung der Alexander-Norm an einem surjektiven ϕ in Zusammenhang mit $b_1(\ker \phi)$ gesetzt. Die Kombination dieser Ergebnisse wird das Theorem liefern. Dieses Kapitel widmet sich der Definition der Thurston-Norm und der unteren Abschätzung durch $b_1(\ker \phi)$.

3.1 Eigenschaften der Thurston-Norm

Wir haben in Kapitel 2.2 und 2.3 gesehen, wie jede Homologieklass in $H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$ (ggf. $\partial M = \emptyset$) dual zu $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$, durch eine glatte Einbettung einer orientierten Fläche repräsentiert ist. Dies ermöglicht die Definition der Thurston-Norm:

Definition 3.1 (Thurston-Norm). Definiere die Thurston Norm für $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ als

$$\|\phi\|_T = \min\{|\chi_-(S)| \mid (S, \partial S) \subset (M, \partial M) \text{ ist orientierte eingebettete Fläche dual zu } \phi\},$$

wobei $\chi_-(S) = \sum \max(-\chi(S_i), 0)$ und über $S = \sqcup S_i$ die Zusammenhangskomponenten von S summiert wird.

Das folgende Ergebnis ist von Thurston [21].

Lemma 3.1. Die Thurston-Norm definiert eine Halbnorm auf $H^1(M; \mathbb{Z})$ und somit auf $H^1(M; \mathbb{R})$.

Beweis. Die Fortsetzung auf $H^1(M; \mathbb{R})$ wurde in Lemma 2.19 behandelt.

Es muss die Skalarmultiplikativität und die Subadditivität gezeigt werden, also:

$$\|\lambda\phi\|_T = \lambda\|\phi\|_T, \quad \lambda \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$\|\phi + \psi\|_T \leq \|\phi\|_T + \|\psi\|_T, \quad \phi, \psi \in H^1(M) \quad (3)$$

Da die Thurston Norm aus den Eigenschaften der dualen Flächen hervorgeht, ist es nötig sich Gedanken zu den dualen Homologieklassen zu machen. Dann ist es für (2) offensichtlich hinreichend, falls für repräsentierende, orientierte, eigentlich eingebettete Flächen, etwa S, T mit Bildern ihrer Fundamentalklassen $[S], [T] \in H_2(M, \partial M)$ und $[S] = \lambda[T]$, die Fläche S bereits disjunkte Vereinigung von λ Komponenten S_i ist, mit $[S_i] = [T]$.

Für $[S] = \phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ existiert eine glatte Abbildung $f : M \rightarrow S^1$, die ϕ repräsentiert und ohne Einschränkung einen regulären Wert $s \in S^1$ habe, dessen Urbild S

ist (siehe Kapitel 2.2 und Konstruktion 1 bzw. Corollar 2.16). Sei auch $g : M \rightarrow S^1$ glatt mit dem regulären Wert t , sodass $g^{-1}(t) = T$ mit korrekter Orientierung gilt, also $H_1(g)$ dual zu $[T]$ ist. Es gilt $\text{Im } \pi_1(f) \subset \lambda\mathbb{Z}$, da die induzierte Abbildung der Fundamentalgruppen mit der dualen Kohomologieklassse identifiziert werden kann (vgl. Bemerkung 2.2.1), die aber deswegen auch ein λ -Vielfaches ist. Betrachtet man die Überlagerung $p : S^1 \xrightarrow{z^\lambda} S^1$, liefert die Überlagerungstheorie einen Lift \hat{f} :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\hat{f}} & S^1 \\ g \downarrow & \searrow f & \downarrow p \\ S^1 & \xrightarrow{p} & S^1 \end{array}$$

Das Quadrat kommutiert bis auf Homotopie, also $p\hat{f} \simeq pg$, denn beide Abbildungen identifizieren sich unter der Bijektion $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong [M, S^1]$ (siehe Kapitel 2.2) mit dem Dual von $\lambda[T]$ etwa $\lambda\phi$, also impliziert die Existenz dieser Bijektion, dass $[p\hat{f}] = [pg]$. Somit folgt auch (mit Kapitel 2.2), dass Urbilder regulärer Werte aus S^1 unter \hat{f} homolog zu solchen aus g sind. Da $p^{-1}(s) = \{s_1, \dots, s_n\}$ sicherlich reguläre Werte von \hat{f} sind (folgt zum Beispiel aus der Kettenregel für Differentiale), sind die Urbilder S_1, \dots, S_n disjunkte, eingebettete, orientierte Flächen mit $[S_i] = [T]$. Da S auch minimal (bezüglich der Thurston-Norm) gewählt werden kann, folgt also $\|\lambda\phi\|_T \geq \lambda\|\phi\|_T$. Nun lassen sich aber aus einer minimierenden Fläche für $[T]$ (sei T ohne Einschränkung selbst so gewählt), zum Beispiel mithilfe eines zweiseitigen Kragens $T \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, λ disjunkt eingebettete Kopien von T gewinnen, die offensichtlich auch $[S]$ repräsentieren, also $\|\lambda\phi\|_T = \lambda\|\phi\|_T$.

Um nun die Subadditivität (3) zu zeigen, ist es nötig die Geometrie der $\|\cdot\|_T$ -minimierenden orientierten eingebetteten Flächen S, T , mit $[S]$ dual zu ϕ und $[T]$ dual zu ψ , genauer zu betrachten. Die Differentialtopologie liefert mit dem Transversalitätstheorem (vgl. Kapitel 2.2) diffeotope (also insbesondere homologe) Approximationen von T , die transversal zu S sind, deswegen seien also ohne Einschränkung $S \pitchfork T$ transversal. Außerdem folgt durch die Transversalität, dass $S \cap T$ eine glatte, kompakte 1-Mannigfaltigkeit ist — man sagt auch „Der Pullback der Einbettungen bleibt in der Kategorie“. Die Klassifikation von kompakten 1-Mannigfaltigkeiten liefert, dass dieser Durchschnitt eine disjunkte Vereinigung von Kreisen und kompakten Intervallen ist (letztere existieren natürlich nur, wenn S, T und somit M Rand haben). Des Weiteren existiere ohne Einschränkung der Allgemeinheit keine Kreiskomponente des Schnittes $S \cap T$ die eine Scheibe berandet, die in S oder T enthalten ist. Diese Annahme kann man wie folgt rechtfertigen:

Angenommen es existiert ein Nullbordismus $D \subset S$ einer Komponente $\partial D \subset S \cap T$. Weiter sei dieser auf dem Inneren disjunkt von T , da ein nichttrivialer Schnitt mit T einen weiteren Kreis aus $S \cap T$ liefert, der den Nullbordismus einschränkt, sodass er weniger Komponenten im Schnitt mit T berührt als der ursprüngliche (man bemerke das Transversalität genutzt wurde). So fahre man endlich oft fort, bis der Durchschnitt mit T trivial ist, also die berandende Scheibe in S die Fläche T nur im Rand berührt.

Nun lässt sich eine offene Tubenumgebung von $\partial D \subset T$ aus T entfernen. Diese kann wie folgt gewählt werden: Sei $\nu(S) \rightarrow M$ eine Tubenumgebung von S , die sich aufgrund der Zweiseitigkeit wie folgt wählen lässt: $\alpha : S \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, sodass $\text{Im } \alpha|_{S \times (-\frac{1}{2}\epsilon, \frac{1}{2}\epsilon)} \cap T$ eine Tubenumgebung von $S \cap T$ in T ist. Dann lässt sich diese Tubenumgebung an ∂D aus T entfernen und mittels des betrachteten zweiseitigen Kragens von S um D findet man zwei Kopien $D_{\frac{\epsilon}{2}}, D_{-\frac{\epsilon}{2}}$,

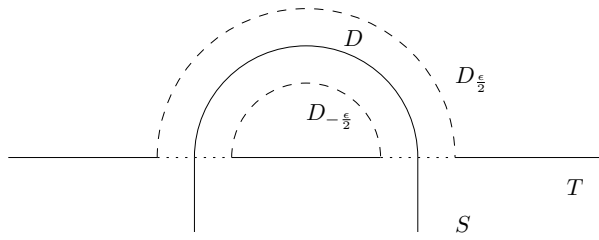


Abbildung 2: Ausschneiden einer Umgebung von $S \cap T$ und Ankleben zweier Scheiben, sodass die Homologieklassse erhalten bleibt

sowie Anklebevorschriften, mit denen man diese Scheiben an die beiden durch Ausschneiden entstandenden Kreis-Randkomponenten von T kleben kann, vergleiche Abbildung 2. Da die Tubenumgebung (die Flächen sind kompakt) so gewählt werden kann, dass für jedes $|\delta| < \epsilon$ die glatte Einbettung $\alpha|_{S \times \{\delta\}}$ transversal zu T ist, liefert die Tubenumgebung Informationen zum Glätten der entstehenden Untermannigfaltigkeit T'^3 . Als Resultat ergeben sich die orientierten, glatten Flächen $S \natural T'$, deren Durchschnitt um eine Komponente reduziert wurde und offensichtlich $[T] = [T']$ gilt. Mit einem ähnlichen Argument schließt man kompakte Intervalle $(I, \partial I) \rightarrow (S \cap T, \partial(S \cap T))$ aus, die relativ Randpunkten homotop zu einer Randkomponente sind.

Von nun an seien S und T transversale Flächen, deren Durchschnitt den obigen Anforderungen genügt. Ziel ist es nun, den Zykel $[S] + [T]$ als eingebettete Fläche zu repräsentieren. Durch S und T ist bereits ein Repräsentant als Immersion der disjunkten Vereinigung gegeben, da die Fundamentalklasse der disjunkten Vereinigung aus den Fundamentalklassen der Komponenten besteht. Beachtet man die Orientierungen, so kann man an jeder Komponente des Durchschnitts $S \cap T$ die Vereinigung $S \cup T$ aufschneiden (die lokal aussieht wie die Gerade, an der sich zwei orientierte Ebenen im \mathbb{R}^3 schneiden), und entlang der Orientierungen in nur einer Möglichkeit wieder verkleben, so dass man eine Mannigfaltigkeit erhält (dies funktioniert offensichtlich an den Durchschnittskomponenten mit Rand, aber auch an den geschlossenen Komponenten, da die Orientierungen auf S und T global gewählt sind). Natürlich können mit entsprechenden Umgebungen, alle diese Klebe- und Schneideprozesse wieder glatt durchgeführt werden. Nun erhält man eine glatte, orientierte Fläche U , die (nach gegebenenfalls leichter Modifikation) auch eigentlich eingebettet ist. Für den Wert von $[U]$ unter der Thurston-Norm, muss dieses Ergebnis und die Auswirkungen der Konstruktionen auf die Flächen diskutiert werden. Die obigen „uneinschränkenden“ Annahmen zu Beginn können natürlich Einfluss auf die Euler Charakteristik χ haben. Jedoch sind die Konstruktionen deswegen vorsichtig gewählt, sodass sich χ_- dabei nicht verändert wird, also resultieren daraus weiterhin

³vgl. [26] oder man verwende glatte Approximation der topologischen Einbettung mit Wahl einer glatten Struktur der topologischen Mannigfaltigkeit T' , vgl. [11, Chapter 5, Lemma 1.5] und dass $DIFF = TOP = PL$ gilt für Mannigfaltigkeiten in Dimensionen ≤ 3 , da dort die Hauptvermutung gilt, vgl. [17, Chapter 35,36].

Thurston-Norm minimierende Flächen⁴. Zwei solche Flächen gegeben, erbt die letztere Konstruktion, die aus $S \cup T$ eine homologe Fläche U macht, die Summe der Eulercharakteristika. Diese Vererbung resultiert zum Beispiel aus der Vererbung der CW-Struktur von U aus gegebenen CW-Strukturen von S und T die jeweils $S \cap T$ in ihrem 1-Skelett enthalten. Eine solche Verfeinerung der CW-Strukturen auf S und T lässt sich offensichtlich aus jeder CW-Struktur leicht erreichen. Die folgende Implikation ist im Allgemeinen *nicht* wahr und gilt hier aufgrund der Annahmen an S und T , da unter diesen Annahmen bei der Konstruktion von U keine Komponenten mit positiver Eulercharakteristik entstehen:

$$\chi(U) = \chi(S) + \chi(T) \implies \chi_-(U) = \chi_-(S) + \chi_-(T)$$

Dies liefert nun die Subbadditivität der Thurston-Norm auf den Homologieklassen. \square

Häufig stellt man Annahmen an die 3-Mannigfaltigkeit, die es verbieten, dass Homologieklassen von Sphären oder Tori repräsentiert werden können. In dem Fall würde dann sogar $\|\phi\|_T = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$ gelten. Dies alles motiviert natürlich, diese Norm zu einer Vektorraumnorm auf $H^1(M; \mathbb{R})$ fortzusetzen und Lemma 2.19 belohnt uns mit einer solchen Fortsetzung.

3.2 $\|\cdot\|_T$ -minimierende Flächen

Nun wollen wir uns eine besondere Art von Flächen betrachten, nämlich die Repräsentanten der zu ϕ dualen Homologieklass, bei denen χ_- minimal ist. Dass immer ein Repräsentat existiert, der gewissen Eigenschaften genügt, sichert das folgende Lemma:

Lemma 3.2. *Sei $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{Z})$ ein surjektiver Homomorphismus und es gelte $b_1(\ker \phi) < \infty$. Dann existiert eine zu ϕ duale zusammenhängende Thurston-Norm-minimierende Fläche $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ mit $b_2(S) = b_3(M)$, so dass folgende Abschätzung erfüllt ist:*

$$b_1(S) \leq b_1(\ker(\phi))$$

Beweis. Wähle unter allen Thurston-Norm-minimierenden Flächen eine orientierte Fläche S mit einer geringsten Anzahl an Zusammenhangskomponenten.

Behauptung: *Diese Fläche ist zusammenhängend.* Man betrachte den aus S entstehenden Graphen nach Konstruktion 2. Wir werden zeigen, dass unter der Minimalitätsanforderung von S unter diesen Identifikationen klar ist, dass G ein topologischer Kreis und $G \rightarrow S^1$ die Identität ist. Das impliziert die Behauptung.

Dafür betrachte man folgendes Diagramm von Pullbacks von Überlagerungen:

$$\begin{array}{ccccc} M_\phi & \xleftarrow{\alpha_\phi} & G_\phi & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M & \xleftarrow{\alpha} & G & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

⁴Diese Differenzen geschehen zum Beispiel durch die Entstehung von Sphären, siehe Abbildung 2. Wichtig ist nur, dass solche Komponenten nicht beim Verkleben der beiden Flächen entstehen. Genau deswegen wurden diese Annahmen getroffen.

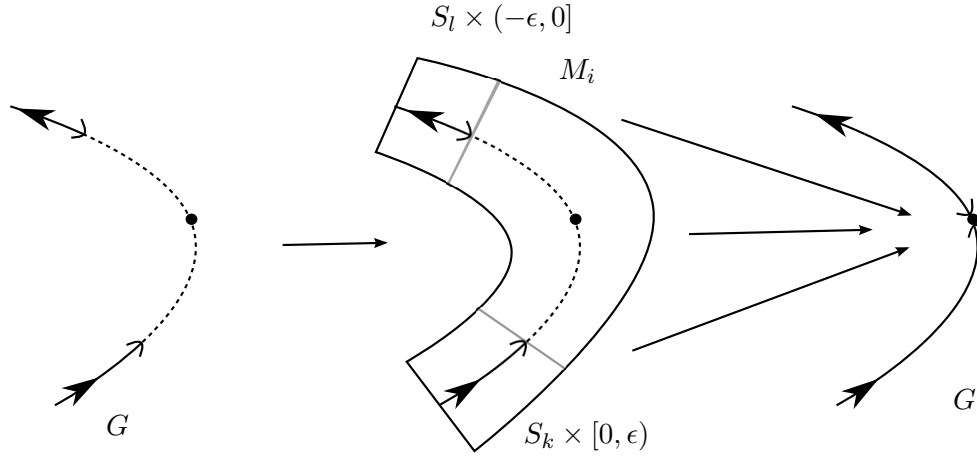


Abbildung 3: Einbettung des Graphen als Homotopieschnitt

Man erhält unendlich zyklische Überlagerungen, also unendlich zyklische Decktransformationsgruppen. Nun existieren offensichtlich Homotopieschnitte α, α_ϕ , also stetige Abbildungen, sodass $G \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow G$ und $G_\phi \xrightarrow{\alpha_\phi} M_\phi \rightarrow G_\phi$ jeweils homotop zur Identität sind, vgl. Abbildung 3. Mit Funktorialität und Homotopieinvarianz des Homologiefunktors, induzieren α, α_ϕ Monomorphismen $H_1(\alpha; \mathbb{Q}), H_1(\alpha_\phi; \mathbb{Q})$, entsprechend sind die ersten Bettizahlen von G und G_ϕ nach oben durch die von M und M_ϕ beschränkt. Folglich muss $b_1(G) = 1$ sein, sonst wäre $b_1(G_\phi) = \infty > b_1(M_\phi)$, da Fundamentalgruppen von Graphen frei sind. Somit ist $\pi_1(G) = \mathbb{Z}$. Also ist G als Graph homotopieäquivalent zu einem Kreis. Da G die Kompaktheit von M erbt, ist nur noch die Existenz von Knoten ohne ein- oder ausgehende Kanten auszuschließen, um zu zeigen dass G ein topologischer Kreis ist. Diese ist aber durch die Minimalitätseigenschaft im Bezug auf die Komponenten der gewählten Fläche ausgeschlossen, da mit Corollar 2.17 solche Kanten eine nullhomologe Fläche bilden. Man könnte diese also entnehmen und eine zu $[S]$ homologe Fläche mit weniger Komponenten erhalten, doch dies widerspricht der Minimalität.

Betrachtet man nun — wissend dass G ein topologischer Kreis ist — die induzierte Abbildung auf der Homologie $(G \rightarrow S^1)_*$, so ist diese ein Isomorphismus, da ϕ ein Epimorphismus ist. Also besitzt G nur eine Kante und die Fläche S ist zusammenhängend.

Die Übereinstimmung des Ranges auf den Top-Homologien von S und M bedeutet die gemeinsame Existenz oder Nicht-Existenz eines Randes von S und M . Da $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$, folgt aus $\partial S \neq \emptyset$ direkt $b_2(S) = b_3(M) = 0$. Falls S aber leeren Rand hat, gilt $b_2(S) = 1$ und es muss $b_3(M) = 1$ gezeigt werden. Dazu wird die Existenz eines Randes von M widerlegt:

Nach Annahme existieren nur Tori als Randkomponenten von M . Sei $T \subset \partial M$ eine solche Randkomponente. Da S keinen Rand hat, also T nicht berührt, erhält man mit der durch Aufschneiden an S entstehenden unendlich zyklischen Überlagerung⁵ M_ϕ auch unendlich zyklisch viele Kopien von T als Randkomponenten. Genauer: Unter Verwen-

⁵Man beachte, dass $\phi \neq 0$ und $b_0(S) = 1$. Corollar 2.18 impliziert, dass die durch Aufschneiden und Verkleben gewonnene Überlagerung der zusammenhängenden Überlagerung M_ϕ entspricht.

derung der Konstruktion 1, liftet T in jede aufgeschnittene Kopie $M_i \cong M - S \supset T$, auf der sich die Projektion zu einem Diffeomorphismus einschränkt. Im Folgenden soll die Notation \overline{M}_i für die (wieder) kompakte (Unter-)Mannigfaltigkeit von M_ϕ verwendet werden, die den Fundamentalbereich darstellt, der M_i enthält. Zusammen mit der langen exakten Sequenz für eine kompakte orientierbare Mannigfaltigkeit $(N, \partial N)$

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(N; \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H_2(N, \partial N; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\delta} & H_1(\partial N; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{i_*} & H_1(N; \mathbb{Q}) \\ & & & \nwarrow & \nearrow & & \\ & & & \text{Lefschetz Dualität: } \cong & H^1(N; \mathbb{Q}) & \cong & \end{array}$$

und der daraus folgenden Abschätzung

$$b_1(\partial N) = \dim(\text{Im } \delta) + \dim(\text{Im } i_*) \leq 2b_1(N),$$

erhält man für jede kompakte zusammenhängende (man bemerke die implizite Anforderung an $I \subset \mathbb{Z}$) Untermannigfaltigkeit der Form

$$\bigcup_{i \in I} \overline{M}_i \subset M_\phi,$$

die Abschätzung:

$$b_1\left(\bigcup_{i \in I} \overline{M}_i\right) \geq \frac{1}{2}b_1(\partial \bigcup_{i \in I} \overline{M}_i) \geq \frac{1}{2}b_1(\sqcup_{i \in I} T) = |I|.$$

Nun folgt aber aus der Mayer Vietoris Sequenz (für entsprechende offene Umgebungen⁶) die exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_1(S \sqcup S; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1\left(\bigcup_{i \in I} \overline{M}_i; \mathbb{Q}\right) \oplus H_1(M_\phi - \bigcup_{i \in I} \overline{M}_i; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

und somit

$$b_1(M_\phi) - 1 = b_1\left(\bigcup_{i \in I} \overline{M}_i\right) + b_1(M_\phi - \bigcup_{i \in I} \overline{M}_i) - b_1(S \sqcup S) \geq |I| - 2b_1(S).$$

Da aber $b_1(M_\phi)$ nach Voraussetzung endlich ist und $|I|$ beliebig groß, folgt also, dass der Rand von M_ϕ keine Tori enthält und somit leer ist.

Um nun noch *die Abschätzung* $b_1(M_\phi) \leq b_1(S)$ zu zeigen, wird erneut die Konstruktion der Überlagerung durch Aufschneiden und Verkleben zur Hilfe genommen. Da $\ker \phi \otimes \mathbb{Q} \cong H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ nach Voraussetzung ein endlich erzeugter \mathbb{Q} -Vektorraum ist, wird $H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ von einem kompakten Teilraum, etwa der Untermannigfaltigkeit $\overline{M}_1 \cup \cdots \cup \overline{M}_k \hookrightarrow M_\phi$ und somit auch $t^k(\overline{M}_1 \cup \cdots \cup \overline{M}_k) = \overline{M}_{k+1} \cup \cdots \cup \overline{M}_{2k} \hookrightarrow M_\phi$,

⁶Für Untermannigfaltigkeiten gilt das allgemeine Theorem über Tubenumgebungen, sie sind also Umgebungsdeformationsretrakte.

erzeugt (heißt: die Inklusionen erzeugen Epimorphismen auf der ersten Homologie). Mit diesem Wissen liefert die folgende exakte Sequenz (induziert nach Mayer-Vietoris) die gesuchte Abschätzung:

$$\cdots \rightarrow H_1(S; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1\left(\bigcup_{i \leq k} \overline{M}_i; \mathbb{Q}\right) \oplus H_1\left(\bigcup_{i > k} \overline{M}_i; \mathbb{Q}\right) \twoheadrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q}).$$

□

Bemerkung 3.2.1. Falls man in der letzten exakten Sequenz nicht über die Dimensionen von Vektorräumen argumentieren möchte, so kann man explizit verwenden, dass der Zykel $\sigma \in H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ im Bild der Inklusionen der kompakten Teilräume ist. Also kann man $\sigma \in H_1(\cup_{i \leq k} \overline{M}_i; \mathbb{Q})$ und $\sigma \in H_1(\cup_{i > k} \overline{M}_i; \mathbb{Q})$ auffassen. Es gilt also wegen $(\sigma, \sigma) \mapsto \sigma - \sigma = 0$ und der Exaktheit der Sequenz, dass (σ, σ) im Bild der Abbildung $x \mapsto (x, x)$ ist, also erzeugt S die rationale Homologie von M_ϕ .

Bemerkung 3.2.2. Da die erste Homologie der Überlagerung natürlich bessere Chancen hat, als Modul, durch Vergrößerung des Grundrings, über dem Gruppenring $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ endlich erzeugt zu sein, stellt sich die Frage, ob, wie und warum es sinnvoll oder möglich wäre das eben bewiesene für diesen Fall zu verallgemeinern. Dies wird später mithilfe der weiteren Lemmas in Kapitel 5.2 diskutiert.

Bemerkung 3.2.3. Tatsächlich liefert das Lemma 3.2 sogar *die* Abschätzung des Theorems 1.1 wie wir nachher sehen werden. Gilt hier also Gleichheit, so folgt auch die Gleichheit in dem Theorem. Diese Bemerkung bietet also dem Leser die Möglichkeit, noch einmal kurz inne zu halten und sich die Natur der Abschätzung anhand der vorhergehenden Seiten zu verdeutlichen.

4 Die Alexander-Invarianten

In der Knotentheorie gilt als Grundlage der Motivation für die Alexander-Invarianten — wie für viele Knoteninvarianten — die Fundamentalgruppe. Allgemein ist es schwierig zu entscheiden, ob zwei endlich erzeugte nicht abelsche Gruppen mit gegebenen Präsentationen isomorph sind. Die Abelianisierung einer Knotengruppe berechnet sich mit Alexanderdualität zu \mathbb{Z} , dadurch liefert die Homologie des Knotenkomplements eine eher nutzlose Invariante in der Knotentheorie. Deswegen geht man zu der Kommutatoruntergruppe über. Die Überlagerungstheorie liefert eine geeignete Überlagerung des Knotenkomplements, dessen Fundamentalgruppe die Kommutatoruntergruppe ist. Nach Hurewicz bedeutet das Studium der Homologie dieser Überlagerung auch das Studium die Abelianisierung der Kommutatoruntergruppe. Da aber auch diese abelsche Gruppe im Allgemeinen nicht endlich erzeugt oder endlich präsentiert ist, betrachtet man die induzierte Wirkung der Decktransformationen auf der Homologie. Genauer betrachtet man sogar die Wirkung des Gruppenrings $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, wobei t Erzeuger der Deckgruppe die isomorph zur Abelianisierung der Fundamentalgruppe, also \mathbb{Z} ist. Diese macht aus der abelschen Gruppe einen $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul — den Alexander-Modul. Durch Vergrößerung des Grundrings, also durch Auffassen der Homologie als $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul anstelle eines \mathbb{Z} -Moduls, zeichnet sich der Alexander-Modul durch meist durch weniger Erzeuger und Relationen aus und bietet eine fruchtbare Grundlage für algebraische Invarianten. Genau diese Inspiration liegt auch der Verallgemeinerung der Alexander-Invarianten zugrunde. Dieses Kapitel führt zunächst die topologische Definition der Alexander-Invarianten ein. Anschließend diskutiert Kapitel 4.2 weitere Definitionen der Alexander-Invarianten mit algebraischem Hintergrund. Diese Ergebnisse ermöglichen im letzten Teil für verschiedene Beweise, zwischen verschiedenen Definitionen zu wechseln. Dort soll eine Beziehung zwischen der Alexander-Norm eines primitiven Elements $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ und $b_1(\ker \phi)$ hergestellt werden.

4.1 Topologische Definitionen

Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit mit den obigen Beschränkungen und $\phi : G = \pi_1(M) \rightarrow F$ ein Epimorphismus in eine freie abelsche Gruppe F . Aus der Überlagerungstheorie ist bekannt, dass nun eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit M_ϕ existiert, die M überlagert und auf Level der Fundamentalgruppen $\ker \phi \cong \pi_1(M_\phi) \xrightarrow{p_*} \pi_1(M)$ einbettet, vgl. [10, Kapitel 1.3]. Diese Überlagerung ist bis auf Diffeomorphie eindeutig. Die Decktransformationsgruppe ist dann isomorph zum Quotienten $\pi_1(M)/p_*\pi_1(M_\phi) \cong F$. Dieser Quotient F operiert somit auf M_ϕ durch Diffeomorphismen (nämlich den Decktransformationen), induziert also auch eine Operation auf $\pi_1(M_\phi)$ und auf $H_1(M_\phi)$. Da \mathbb{Z} auf jeder abelschen Gruppe wirkt, ist folgende Definition gerechtfertigt:

Definition 4.1 (Alexander-Modul). Der Alexander-Modul eines Gruppenepimorphismus in einen freien \mathbb{Z} -Modul $\phi : \pi_1(M) \rightarrow F$ ist definiert als

$$A_\phi(M) = H_1(M_\phi)$$

aufgefasst als $\mathbb{Z}[F]$ -Modul, durch die induzierte Wirkung der Decktransformationen. Mit Bemerkung 2.1.2 lässt sich auch allgemeiner $A_\phi(M; R) = H_1(M_\phi; R)$ als $R[F]$ -Modul definieren.

Um weitere Betrachtungen zu ermöglichen und um der oben hervorgerufenen Erwartungshaltung gerecht zu werden, zeigt die folgende Proposition die endliche Erzeugbarkeit des Alexander-Moduls.

Proposition 4.1. *$A_\phi(M)$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[F]$ -Modul.*

Bemerkung 4.1.1. Eine algebraische Variante des Beweises befindet sich im nachfolgenden Kapitel 4.2.

Beweis. Da M eine 3-Mannigfaltigkeit ist, existiert eine CW Struktur, vgl. [16]. Kompakte Mengen in CW-Komplexen sind in endlich viele Zellen enthalten. Also folgt mit der Kompaktheit von M die Endlichkeit der Anzahl von Zellen in einer CW-Struktur von M . Da es für CW-Komplexe gleichbedeutend ist die zelluläre Homologie zu berechnen, fixiere man eine endliche CW-Struktur von M die eine auf M_ϕ liefert. Die Decktransformationen berücksichtigen die vererbte CW-Struktur der Überlagerung, das bedeutet sie bilden Zellen die das gleiche Bild in M haben aufeinander ab. Da die Decktransformationen einer normalen Überlagerung frei wirken, assoziieren sie also für jede Zelle in M alle ihre Lifts in M_ϕ miteinander⁷. Also sind in dem Kettenkomplex der Überlagerung alle Kettengruppen frei und endlich erzeugt als $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln. Das bedeutet, für jeden freien \mathbb{Z} -Summanden der Kettengruppen der Mannigfaltigkeit erhält man einen freien $\mathbb{Z}[F]$ -Summanden der Kettengruppen der Überlagerung. Mit Corollar 2.3 ist also die Homologie des $\mathbb{Z}[F]$ -Kettenkomplexes endlich erzeugt.

Es bleibt also zu zeigen, dass das Bilden der Homologie als $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln verträglich ist mit dem Bilden der Homologie als abelsche Gruppen. Aber da die Wirkung von F auf der Homologie durch Diffeomorphismen induziert wird, so ist die Verträglichkeit durch die elementare Tatsache gegeben, dass Abbildungen von Räumen auch Kettenkomplexabbildungen induzieren, also Verträglichkeit mit den Randoperatoren gegeben ist. \square

Da der Gruppenring $\mathbb{Z}[F]$ kein Hauptidealring ist, wollen wir die in Kapitel 2.1 motivierten Invarianten von endlich erzeugten Moduln über einem noetherschen Ring betrachten.

Definition 4.2. Definiere das i -te Elementarideal von M bezüglich $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ als $E_i(A_\phi(M))$ und das Alexander-Ideal von M bezüglich ϕ als $I_\phi(M)$.

Nun ist $E_i(A_\phi(M))$ nicht zwangsweise ein Hauptideal. Deswegen betrachtet man Alexander-Polynome:

⁷Assoziieren bedeutet im algebraischen Sinne: Bis auf eine Einheit, also ein Gruppenelement im Gruppenring, verschieden sein. Also meint die Aussage, dass für je zwei Lifts einer Zelle, ein Element $f \in F$ existiert, dass diese aufeinander abbildet.

Definition 4.3. (Alexander-Polynom) Definiere das Alexander-Polynom Δ_ϕ als einen größten gemeinsamen Teiler von $E_0(A_\phi(M))$. Allgemeiner sei das i -te Alexander-Polynom Δ_ϕ^i als ein größter gemeinsamer Teiler von $E_i(A_\phi(M))$ definiert.

Ein größter gemeinsamer Teiler eines Ideals I erzeugt ein minimales Hauptideal das I enthält. Für einen Ring R und ein Ideal $I \subset R$ ist das kleinste Hauptideal welches I enthält im Allgemeinen nicht eindeutig. Allerdings gilt in faktoriellen Ringen diese Eindeutigkeit, aufgrund der Eindeutigkeit der Primzerlegung bis auf Assoziiertheit. Assoziierte Elemente erzeugen natürlich die gleichen Hauptideale. Um die Definition zu rechtfertigen — also um von *dem* Alexander-Polynom sprechen zu können — folgert man zusammen mit Proposition 2.9 und Bemerkung 2.1.4 folgendes Lemma:

Lemma 4.2. *Das Alexander-Polynom ist bis auf Multiplikation mit Elementen $\pm f$ eindeutig, wobei $f \in F$.*

Bemerkung 4.1.2. Falls $F \cong \mathbb{Z}$, also $\mathbb{Z}[F] \cong \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, dann definiert die höchste Distanz der auftauchenden Exponenten den Grad des Polynoms $p \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$. Offensichtlich ist der Grad eines Polynoms invariant bezüglich der Multiplikation mit den Einheiten $\pm t^N$. Also weist das Alexander-Polynom einem surjektiven $\pi_1(M) \rightarrow F$ einen eindeutigen Grad zu.

Die Alexander-Invarianten sind insbesondere für einen surjektiven Homomorphismus als Kohomologieklassse $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\pi_1(M); \mathbb{Z})$ definiert. Solche ϕ werden *primitiv* genannt.

Definition 4.4. Sei $G = \pi_1(M)$ und $\phi : G \rightarrow F$ die kanonische Abbildung auf den maximalen freien abelschen Quotienten, der durch $F = \text{ab}(G) = H_1(G)/T \cong \mathbb{Z}^{b_1(G)}$ charakterisiert ist. Dann definieren wir mithilfe den obigen Invarianten:

- den Alexander-Modul von M : $A(M) = A_\phi(M)$,
- das Alexander-Ideal von M : $I(M) = I_\phi(M)$ und
- das Alexander-Polynom von M : $\Delta(M) = \Delta_\phi(M)$.

Bleibt nur noch die Alexander-Norm zu definieren, die eine Halbnorm auf der ersten Kohomologie der 3-Mannigfaltigkeit definiert.

Definition 4.5 (Alexander-Norm). Sei $\Delta \in \mathbb{Z}[F]$ das Alexander-Polynom von M . Dann ist Δ von der Form:

$$\Delta = \sum_{k=1}^n a_k f_k \quad \text{mit } 0 \neq a_k \in \mathbb{Z}, f_i \in F \text{ und } f_i = f_j \Rightarrow i = j.$$

Sei nun $\phi \in H^1(M, \mathbb{Z})$, dann definieren wir die Alexander-Norm von ϕ als

$$\|\phi\|_A = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \Delta = 0 \\ \sup \phi(f_i - f_j) & \end{cases},$$

wobei das Supremum über die Gruppenelemente f_i genommen wird, die in Δ auftauchen.

Der nichttriviale Teil der folgenden Aussage wurde in Lemma 2.19 gezeigt.

Lemma 4.3. *Die Alexander-Norm definiert eine Halbnorm auf $H^1(M; \mathbb{Z})$ und somit auf $H^1(M; \mathbb{R})$.*

4.2 Algebraische Definitionen

Tatsächlich könnte man diese Bachelorarbeit fast ausschließlich algebraisch verstehen — wenigstens den Teil über die Alexander-Invarianten. Natürlich ist dieser Arbeit aus dem Bereich der Topologie, der Geschmack oder die Illusion gegeben, man arbeite mit direkten Eigenschaften der Räume. Bei der Thurston-Norm ist dies sicherlich noch eher gegeben, durch die Definition einer Funktion auf einem Vektorraum mittels geometrischer Eigenschaften der Mannigfaltigkeit. Jedoch handelt es sich bei den Alexander-Invarianten, insbesondere dem Alexander-Polynom, lediglich um Invarianten einer endlich erzeugten Gruppe. Durch Anwendung dieser Invarianten auf die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes, erhält man also Invarianten von Räumen. Natürlich verliert das Alexander-Polynom von 3-Mannigfaltigkeiten als Komposition von Invarianten nicht allzu viel an Reiz, da die Fundamentalgruppe eine recht starke Invariante von 3-Mannigfaltigkeiten darstellt. Beispielsweise liefert sie durch einfache Anwendung von Hurewicz und Dualitätssätzen⁸ alle Homologiegruppen einer geschlossenen 3-Mannigfaltigkeit. Eine Klasse von 3-Mannigfaltigkeiten, die sogenannten ‘Haken-Mannigfaltigkeiten’ sind durch ihre Fundamentalgruppe klassifiziert, der Beweis dazu stammt von Waldhausen [23].

Natürlich bergen algebraische Invarianten mit solchen Eigenschaften immer mehrere Vorzüge. Zum einen werden topologische Probleme in algebraische übersetzt, die dann mit algebraischen Methoden untersucht werden können. Scheint andererseits ein algebraisches Problem nur schwer lösbar, so ergibt sich die Möglichkeit einen topologischen Kontext zu finden, in dem sich die algebraische Ursprungssituation als Invariante ergibt. So können sich Ergebnisse und Berechnungen mit topologischen Eigenschaften des Raumes unter Umständen leichter handhaben lassen, siehe etwa Beispiel 4.

Es soll zunächst eine analoge Definition zu den bekannten Alexander-Invarianten aus Kapitel 4.1 gegeben werden. Anschließend wollen wir eine weitere Definition betrachten, die beispielsweise McMullen in [14] nutzt und einen Zusammenhang herstellen — warum diese Definitionen streng genommen nicht äquivalent sind und warum das kein Problem darstellt.

Herleitung der algebraischen Idee

Nun müssen wir uns mit der Problematik beschäftigen, die eingangs bei der Definition des Gruppenrings erwähnt wurde; der entstehende Gruppenring von nicht-abelschen Gruppen ist nicht mehr kommutativ. Man also beispielsweise zwischen Links- und Rechtsmoduln über dem Gruppenring unterscheiden muss.

⁸Poincaré/Lefschetz, universelles Koeffiziententheorem

Sei G die Fundamentalgruppe von M und sei F eine freie abelsche Gruppe zusammen mit einem Epimorphismus $\phi : G \rightarrow F$. Also faktorisiert ϕ durch die maximale freie abelsche Quotientenabbildung $G \rightarrow G/[G, G] \rightarrow ab(G) \cong \mathbb{Z}^{b_1(G)}$, die als Komposition kanonischer Abbildungen kanonisch ist. Folglich ist der Rang von F durch $b_1(G)$ nach oben beschränkt. Dann erhält man einen Gruppenisomorphismus $\pi'_* : H_1(M_\phi) \rightarrow \ker \phi / [\ker \phi, \ker \phi]$ der durch die Überlagerungsprojektion der zusammenhängenden $\pi : M_\phi \rightarrow M$ zu ϕ induziert wird. Ziel wäre es zu zeigen, dass diese Abbildung auch einen Isomorphismus von $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln liefert. Daraus würden natürlich gleiche Präsentationen folgen, die zu gleichen Elementaridealen führen und so fort. Hierfür benötigt man jedoch überhaupt eine $\mathbb{Z}[F]$ -Modul Struktur auf dem Quotienten G'/G'' für $G' = \ker \phi, G'' = [G', G']$. Diese soll zunächst definiert werden:

Es seien $g_1, \dots, g_m, m \leq b_1(G)$ Elemente die auf eine Basis von $F \cong \mathbb{Z}^m$ abgebildet werden. Diese definieren dann Automorphismen von G'/G'' durch

$$\hat{t}_i(x) = [g_i][x][g_i^{-1}] = [g_i x g_i^{-1}]$$

Man prüft leicht nach, dass diese unabhängig der gewählten g_i sind. Es sei für den Beweis bemerkt, dass die Kommutatoruntergruppe $G'' \subset G'$ eine charakteristische Untergruppe ist.

Bemerkung 4.2.1. Das ist eine Form der expliziten Konstruktion des Falles, wenn man von einer induzierten Operation einer zerfallenden kurzen exakten Sequenz redet:

$$0 \rightarrow G'/G'' \rightarrow G/G'' \rightarrow G/G' \rightarrow 0$$

Da $F = G/G'$ frei abelsch ist, zerfällt diese Sequenz und man erhält eine Abbildung $F \rightarrow \text{Aut}(G'/G'')$. Genauer gesagt erhält man eine Gruppenwirkung von F auf G'/G'' die durch Konjugation in G/G'' induziert ist, unter der Einbettung $G'/G'' \hookrightarrow G/G''$ mit zurückgezogenen Elementen aus F . Dies ist wohldefiniert, da das Bild von G'/G'' einem Kern entspricht, also Normalteiler ist. Offensichtlich stimmt diese Operation mit der obigen überein.

Seien die g_i wie oben und $\phi(g_i) = t_i$ ein Element der Basis von F . Dann ist ist die Gruppenwirkung von F auf $H_1(M_\phi)$, die durch die Decktransformationen (kanonisch identifiziert mit F) induzierte $H_1(t_i)$. Also ist nur zu zeigen, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H_1(M_\phi) & \xrightarrow{\pi'_*} & G'/G'' \\ H_1(t_i) \downarrow & & \downarrow \hat{t}_i \\ H_1(M_\phi) & \xrightarrow{\pi'_*} & G'/G'' \end{array}$$

und somit die Operationen verträglich sind. Aber das folgt aus der wohlbekannten Operation der Deckgruppe einer normalen Überlagerung auf ihrer Fundamentalgruppe, zusammen mit der Natürlichkeit der Hurewicz-Abbildung h , welche die Kommutativität

des nächsten Diagramms liefert:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M_\phi, p) & \xrightarrow{h} & H_1(M_\phi) \\ \pi_1(t_i) \downarrow & & \downarrow H_1(t_i) \\ \pi_1(M_\phi, p) & \xrightarrow{h} & H_1(M_\phi) \end{array}$$

Die bisherigen Überlegungen haben herausgestellt, dass die Alexander-Invarianten nur von der Fundamentalgruppe abhängen. Aber um die Alexander-Invarianten für allgemeine endlich erzeugte Gruppen zu definieren fehlt die endliche Erzeugbarkeit von G'/G'' über $\mathbb{Z}[F]$. Wir hatten bisher nur gesehen, dass dies für Fundamentalgruppen von 3-Mannigfaltigkeiten stimmt, indem wir eine endliche CW-Struktur ausgenutzt haben. Dies wird am Ende des Kapitels festgestellt. In jedem Fall können wir mithilfe der oben erläuterten Gruppenwirkung definieren:

Definition 4.6. Der Alexander-Modul eines Gruppenepimorphismus $\phi : G \twoheadrightarrow F$ einer endlich erzeugten Gruppe G in eine freie abelsche Gruppe F ist definiert als der $\mathbb{Z}[F]$ -Modul $A_\phi(G) = \ker \phi / [\ker \phi, \ker \phi]$.

Bemerkung 4.2.2. Es stellt sich sogar heraus, dass in den vielen Fällen auch die Thurston Norm, aus der Fundamentalgruppe berechnet werden kann, indem man getwistete Alexander-Polynome verwendet — die mit ähnlichen Methoden wie oben, allein aus der Fundamentalgruppe gewonnen werden können. Sie beinhalten meist noch mehr Daten als das gewöhnliche Alexander-Polynom und es lässt sich mit der induzierten Norm dieser Polynome, die Abschätzung aus Theorem 1.1 verallgemeinern. Diese Resultate wurden in mehreren Arbeiten von Friedl unter verschiedenen Zusammenarbeiten entwickelt, vgl. [3–8]. Weiter sind die getwisteten Alexander-Polynome nützlich um bis zu einem gewissen Grade eine Umkehrung der Implikation zu ermöglichen, dass bei Faserungen in Theorem 1.1 Gleichheit gilt, siehe [4, 7].

Um ohne topologische Methoden einzusehen, dass der Alexander-Modul endlich erzeugt ist, ist es nötig den allgemeinen ganzzahligen Gruppenring und noethersche Moduln genauer zu betrachten. Dies führt auf den Begriff der Augmentationsideale.

Definition 4.7 (Augmentationsideal). Sei H ein Normalteiler in G . Dann ist das Augmentationsideal:

$$m_G(H) = \langle (h - 1) | h \in H \rangle \subset \mathbb{Z}[G].$$

Falls $G = H$ so definiere: $m(G) = m_G(G)$.

Bemerkung 4.2.3. Das Augmentationsideal erhält seinen Namen, da es aus dem Kern der Augmentationsabbildung, die jedes Gruppenelement auf 1 abbildet, entsteht:

$$m_G(G) = \ker(\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z})$$

Lemma 4.4. Sei $\phi : G \rightarrow F$ ein Homomorphismus mit Fortsetzung $\hat{\phi} : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[F]$ und Einbettung $i : \mathbb{Z}[\ker \phi] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$. Dann gilt:

$$\ker(\hat{\phi}) = m_G(\ker \phi) = i(m(\ker \phi))\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[G]i(m(\ker \phi))$$

Insbesondere ist jedes Augmentationsideal $m_G(H)$ ein beidseitiges Ideal.

Der Beweis ist einfach, obgleich man elementweise oder mit funktoriellen Methoden argumentiert und wird deswegen übersprungen. Die Beidseitigkeit des Ideals folgt aus der Eigenschaft, dass $\ker \hat{\phi}$ Normalteiler ist.

Beispiel 3. Falls $G = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$, dann ist der Gruppenring $\mathbb{Z}[G]$, der Ring der Laurentpolynome in einer Variablen $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$. Dann ist $m(G) \subset \mathbb{Z}[G]$ ein freier $\mathbb{Z}[G]$ Modul mit einelementiger Basis $(t - 1)$. Allgemeiner ist offensichtlich für die freie Gruppe $F(S)$, $|S| < \infty$, das Augmentationsideal $m(F(S)) \subset \mathbb{Z}[F(S)]$ ein freier $\mathbb{Z}[F(S)]$ Modul mit $|S|$ -elementiger Basis $\{(s - 1), s \in S\}$.

Beispiel 4. Wir werden später auf das Augmentationsideal $m(F)$ treffen, wobei $F \cong \mathbb{Z}^n$. In Anlehnung an das vorhergehende Beispiel und an die Betonung auf die in der Einleitung erwähnte Übersetzung algebraischer Probleme in topologische, gilt sogar weiter: $m(F)$ ist ein freier $\mathbb{Z}[F]$ -Modul, genau dann wenn $n = 1$. Denn wenn $m(F)$ frei ist, so liefert dies eine freie Auflösung von \mathbb{Z} (über die Augmentationsabbildung als $\mathbb{Z}[F]$ -Modul aufgefasst) über $\mathbb{Z}[F]$ der Länge 1. Also ist $H^2(F) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}[F]}^2(\mathbb{Z}[F], \mathbb{Z}) = 0$. Aber die Gruppenkohomologie berechnet sich topologisch aus dem n -Torus als

$$H^2(F) = H^2(K(F, 1)) = H^2(T^n) = \mathbb{Z}^{\binom{n}{2}}$$

Eine äquivalente Definition von McMullen?

In der Arbeit von McMullen [14] verwendet er eine unterschiedliche Definition der Alexander-Invarianten. Tatsächlich stellen sich diese auch bei Berechnungen als günstig heraus, da relative Homologie betrachtet wird. Inwieweit ist das nützlich zur Berechnung der obigen Alexander-Invarianten — sind die Definitionen äquivalent? Die Frage soll nun geklärt werden.

Definition 4.8. Sei $\phi : G \rightarrow F$ ein Epimorphismus in eine freie abelsche Gruppe F für eine endlich erzeugte Gruppe G . Dann ist der Alexander-Modul von ϕ nach McMullens Definition der $\mathbb{Z}[F]$ -Modul:

$$\mathfrak{A}_\phi(G) = m(G)/m(G)m_G(\ker \phi)$$

mit dem Alexander-Ideal

$$\mathfrak{I}_\phi(G) = E_1(\mathfrak{A}_\phi(G)) \subset \mathbb{Z}[F]$$

und dem Alexander-Polynom \mathfrak{D}_ϕ , so dass $(\mathfrak{D}_\phi) \supset \mathfrak{I}_\phi(G)$ das kleinste Hauptideal ist. Dieses ist eindeutig da $\mathbb{Z}[F]$ ein faktorieller Ring ist.

Bemerkung 4.2.4. Die $\mathbb{Z}[F]$ -Modul Struktur von $\mathfrak{A}_\phi(G)$ ergibt sich aus der folgenden Überlegung: Lemma 4.4 liefert $\mathbb{Z}[F] = \mathbb{Z}[G]/m_G(\ker \phi)$, also ist $\mathfrak{A}_\phi(G)$ als Quotient des endlich erzeugten Ideals $m(G)/m(\ker \phi) \subset \mathbb{Z}[F]$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[F]$ -Modul (genauer verwendet man hier den Isomorphiesatz $m(G)/m((G/N)/(H/N)) \cong G/H$), insbesondere noethersch.

Falls $G = \pi_1(M, p)$, kann man den isomorphen $\mathbb{Z}[F]$ -Modul, mit der durch die basispunkterhaltenden Decktransformationen induzierten F -Wirkung, als Definition verwenden

$$\mathfrak{A}(G) = H_1(M_\phi, \pi^{-1}p; \mathbb{Z}),$$

wobei $M_\phi \xrightarrow{\pi} M$ die universelle abelsche Überlagerung ist. Die Isomorphie dieser Moduln ergibt sich unter anderem aus dem Fünfer-Lemma und den kurzen exakten Sequenzen (4) und der (6). Verwendet man dies als Beweis der Isomorphie, so ergibt sich die Sequenz (6) natürlich nicht mehr als Spezialfall von (4).

Die bisherigen Ausführungen sollten nun genügen um die endliche Erzeugbarkeit der algebraischen Variante des Alexander-Moduls und die Beziehung zwischen den verschiedenen Definitionen des Alexander-Moduls zu zeigen. Dies und bisherige Resultate sollen in folgender Proposition festgehalten werden:

Proposition 4.5. *Es sei G eine endlich erzeugte Gruppe, $F \cong \mathbb{Z}^b$ eine freie abelsche Gruppe mit $b \leq b_1(G)$ und $\phi : G \rightarrow F$ ein Epimorphismus. Außerdem bezeichne wie oben $G' = \ker \phi$ und $G'' = [G', G']$ die Kommutatoruntergruppe. Die folgende exakte Sequenz liefert eine Gruppenwirkung von F auf G'/G'' , vgl. Bemerkung 4.2.1:*

$$0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 0$$

Weiter liefert diese Sequenz eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln

$$0 \rightarrow m_G(\ker \phi)/m_G(\ker \phi)m(G) \rightarrow m(G)/m_G(\ker \phi)m(G) \rightarrow m(F) \rightarrow 0 \quad (4)$$

und es existiert ein Isomorphismus von $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln

$$A_\phi(G) = G'/G'' \cong m_G(\ker \phi)/m_G(\ker \phi)m(G).$$

Insbesondere ist der Alexander-Modul endlich erzeugt.

Bemerkung 4.2.5. Als abelsche Gruppe ist $m(F)$ frei und die Sequenz zerfällt als Sequenz von \mathbb{Z} -Moduln immer. Als $\mathbb{Z}[F]$ -Modul Sequenz zerfällt sie genau dann wenn $F \cong \mathbb{Z}$, siehe Beispiel 4.

Beweis. Man betrachte folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Reihen und Spalten:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & (5) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & m_G(\ker \phi) & \longrightarrow & m(G) & \longrightarrow & m(F) & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & m_G(\ker \phi) & \longrightarrow & \mathbb{Z}[G] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[F] & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

Die zweite Reihe ist exakt nach Lemma 4.4 und die Exaktheit der ersten Reihe geht aus der Anwendung des Schlangenlemmas hervor.

Die gewünschte Form der exakten Sequenz (4) aus der Proposition folgt dann aus der ersten exakten Reihe des Diagramms (5), indem man $m_G(\ker \phi) \cdot m(G)$ herausteilt. Dies ergibt mit Bemerkung 4.2.4 eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln.

Es ist also noch der behauptete Isomorphismus zu zeigen. Dieser lässt sich einfach angeben:

$$\begin{aligned} G'/G'' &\rightarrow m_G(G')/m_G(G') \cdot m(G) \\ [g'] &\mapsto [(g' - 1)] \\ [g'] &\leftarrow [(g' - 1)g] \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind wohldefiniert und einander invers, da $[(g' - 1)g] = [(g' - 1)g - (g' - 1)(g - 1)] = [(g' - 1)]$. \square

Wir erhalten also die Beziehung $0 \rightarrow A_\phi(G) \rightarrow \mathfrak{A}_\phi(G) \rightarrow m(F) \rightarrow 0$. Zusammen mit Bemerkung 4.2.4 und Lemma 2.5 zeigt das

Corollar 4.6. *Jeder Alexander-Modul $A_\phi(G)$ ist endlich erzeugt.* \square

Bemerkung 4.2.6. Der Isomorphismus aus Proposition 4.5 liefert außerdem die Möglichkeit mit der Argumentation aus Bemerkung 4.2.4 die endliche Erzeugbarkeit von $A_\phi(M) \cong m_G(\ker \phi)/m_G(\ker \phi)m(G)$ als noetherschen Quotient zu zeigen.

Da die Gruppenwirkung von F auf der Homologie der Überlagerung durch Abbildungen von Räumen induziert wird, liefert die lange exakte Sequenz des Paares $(M_\phi, \pi^{-1}p)$ eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln. Da die von der Inklusion induzierte Abbildung $\mathbb{Z}[F] \cong H_0(\pi^{-1}p) \rightarrow H_0(M_\phi) \cong \mathbb{Z}$ Auswertung der Koeffizienten entspricht, liefert die lange exakte Homologiesequenz des Paares die folgende kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln:

$$0 \rightarrow H_1(M_\phi) \rightarrow H_1(M_\phi, \pi^{-1}p) \rightarrow m(F) \rightarrow 0 \quad (6)$$

Diese Sequenz ist natürlich ein Spezialfall der allgemeineren Sequenz (4) für den Fall, dass G als Fundamentalgruppe realisierbar ist.

Welche Folgerungen ziehen wir aus diesen Ergebnissen? Nun ja, zunächst unterscheiden sich die gegebenen Definitionen von McMullen qualitativ von denen aus Kapitel 4.1 — sowohl die Alexander-Moduln als auch die Alexander-Ideale sind nie isomorph. Eine Äquivalenz ergibt sich also nicht, aber die oben gesicherte Beziehung in der exakten Sequenz liefert zusammen mit dem folgenden Lemma die Gleichheit der kleinsten Hauptideale und somit Gleichheit der Alexander-Polynome und der Alexander-Norm. Dies legitimiert die Verwendung der unterschiedlichen Definitionen im kommenden Beweis des Theorems 1.1 als Mittel zum Zweck.

Lemma 4.7. *Für eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[F]$ -Moduln*

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow m(F) \rightarrow 0,$$

wobei $F \cong \mathbb{Z}^n$, stimmen $\Delta_i(A) = \Delta_{i+1}(B)$ überein.

Siehe zum Beispiel die Arbeit von Traldi [22].

4.3 Rationale Alexander-Invarianten

Genauso wie man oben den ganzzahligen Gruppenring erhalten hat, so erhält man auch den rationalen Gruppenring $\mathbb{Q}[G] = \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Da sowohl die Theorie der Vektorräume, in unserem Falle \mathbb{Q} -Moduln, als auch die Theorie der Moduln über Hauptidealringen — etwa $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ (vgl. Lemma 2.10) — sehr überschaubar ist, bietet es sich an auch rationale Alexander-Invarianten zu definieren. Allerdings betrachtet diese Arbeit ganzzahlige Alexander-Invarianten, also ist die Nützlichkeit der rationalen Alexander-Invarianten in diesem Kontext fraglich, es sei denn solche Berechnungen würden zur Bestimmung der ganzzahligen Alexander-Invarianten führen. Deswegen dient dieser Abschnitt lediglich dem Hinweis, dass das rationale Alexander-Polynom dieselben Informationen wie das ganzzahlige Alexander-Polynom enthält, die Berechnung also unabhängig von einer $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ - oder einer $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Präsentation ist.

Bemerkung 4.3.1. Hat man eine Präsentationsmatrix $(x_{ij})_{ij}$ eines $\mathbb{Z}[F]$ -Moduls gegeben, so liefert die Rechtsexaktheit des Tensorierens eine Präsentationsmatrix des tensorierten $\mathbb{Q}[F]$ -Moduls durch $(x_{ij} \otimes 1)_{ij}$.

Bekannterweise nennt man ein Polynom primitiv, falls keine Nichteinheit des zugrunde liegenden Ringes alle Koeffizienten teilt.

Lemma 4.8. *Seien $f, g \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ zwei Laurentpolynome und f primitiv. Dann ist die Teilbarkeit von g durch f gleichbedeutend in den Ringen $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ und $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$.*

Beweis. Falls $f|g$ in $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ gilt, so auch trivialerweise in $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. Sei umgekehrt $g = pf$ mit $p \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. Dann ist für ein $q \in \mathbb{Q}$ das Polynom $\tilde{p} \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ primitiv mit $q\tilde{p} = p$. Aber das Produkt zweier primitiver Polynome $\tilde{p}f = g/q$ ist primitiv, also $q \in \mathbb{Z}$. \square

Unter Ausnutzung von Lemma 4.8, wird in [20, Lemma 2.2] die folgende Proposition mit elementaren Mitteln gezeigt. Deswegen sei der einfache Beweis hier übersprungen:.

Proposition 4.9. *Sei A ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul dessen Alexander-Polynom nicht verschwindet. Dann existiert ein eindeutiges $q \in \mathbb{Q}$, sodass für $q\Delta^i(A) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ primitiv ist und für $\Delta_{\mathbb{Q}}^i(A \otimes \mathbb{Q}) \in \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ gilt:*

$$\Delta_{\mathbb{Q}}^i(A) = q\Delta^i(A)$$

Corollar 4.10. *Die ganzzahligen Alexander-Polynome Δ_{ϕ}^i einer Gruppe G sind durch $A_{\phi}(G) \otimes \mathbb{Q}$ vollständig charakterisiert.*

Beweis. Der Beweis folgt direkt durch das Zusammentragen der Ergebnisse aus Beispiel 1, Proposition 4.9 und Lemma 2.10. \square

4.4 Eigenschaften der Alexander-Polynome von Kohomologieklassen

Sei $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ eine primitive Kohomologieklass ist. Für solche ϕ kennen wir schon die Abschätzung der Thurston-Norm aus 3.2. Betrachtet man den Alexander-Modul $A_{\phi}(M)$ so ist dieser ein $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul. Also ist das Alexander-Polynom ein Laurentpolynom mit eindeutigem Grad. Diesen etwas einfacheren Fall wollen wir uns zunächst

anschauen, um einen Zusammenhang mit $b_1(\ker \phi)$ herzustellen. Den liefert folgendes Lemma (vgl. [15, Assertion 4]):

Lemma 4.11. *Es sei $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ eine primitive Klasse und $\ker \phi \otimes \mathbb{Q}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum. Weiter sei t ein Erzeuger der Decktransformationsgruppe von M_ϕ . Betrachte den rationale Alexander-Modul $H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ über dem rationalen Gruppenring $\mathbb{Q}[\langle t \rangle] = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. Dann ist das Elementarideal $E_0(H_1(M_\phi; \mathbb{Q})) \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ ein Hauptideal, das von dem charakteristischen Polynom des induzierten Automorphismus t_* erzeugt wird.*

Da $H_1(M; \mathbb{Z})$ als \mathbb{Z} -Modul eine direkte Summe $H_1(M; \mathbb{Z})/T \oplus T$ mit Torsionsanteil T ist und die direkten Summanden invariant bezüglich jeglichen Automorphismen sind, ergibt sich mit Proposition 4.9:

Corollar 4.12. *Für $b_1(M) = 1$ das Alexander-Ideal ein Hauptideal.* □

Beweis von Lemma 4.11. Da $H_1(M_\phi, \mathbb{Q})$ ein endlich dimensionaler Vektorraum ist, werden durch den Erzeuger t des Quotienten $\pi_1(M)/\ker(\phi) \cong \mathbb{Z}$ der Decktransformationen Relationen auf den Basiselementen x_1, \dots, x_n eingeführt:

$$\begin{aligned} t_* x_1 &= \sum a_i^1 x_i \\ &\vdots \\ t_* x_n &= \sum a_i^n x_i \end{aligned}$$

Diese Gleichungen definieren genau die quadratische Matrix A des Automorphismus von Vektorräumen $t_* \in \text{Aut}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q}))$ bezüglich der Basis $(x_i)_i$, die also als Spalten die a^i hat. Durch Subtrahieren der obigen Gleichungen, erhält man eine formale Matrix der Form $A - tI$. Diese Matrix ist aber gleichzeitig die Präsentationsmatrix der freien Auflösung:

$$\begin{array}{c} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ e_r \mapsto \sum a_i^r x_i - t x_r \end{array}$$

Entsprechend ist die Determinante dieser Matrix das Elementarideal bezüglich $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$, $E_0(M_\phi) = \det(A - tI) = \chi(A) \subset \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$. □

Diese Überlegungen liefern nun einen Zusammenhang zwischen $b_1(\ker \phi)$ und dem Grad des Alexander-Polynoms von ϕ , welcher für $b_1(M) = 1$ mit $\|\phi\|_A$ übereinstimmt. Somit ist das Theorem 1.1 für den Fall $b_1(M) = 1$ durch das folgende Corollar bereits bewiesen.

Corollar 4.13. *Sei $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ eine primitive Klasse. Dann gilt:*

$$b_1(\ker \phi) = \dim(\ker \phi \otimes \mathbb{Q}) = \text{Grad}(\Delta_\phi)$$

Beweis. Nach dem vorhergehenden Corollar gilt $\dim \Delta_\phi = n + 1 = \text{Grad}(\chi(t_*)) = \text{Grad}(\Delta_\phi)$, wobei t Erzeuger der unendlich zyklischen Decktransformationsgruppe ist. □

4.5 Darstellungen des Alexander-Ideals

Für die Abschätzung der beiden betrachteten Halbnormen ist es hier zielführend, dass das Alexander-Ideal einer 3-Mannigfaltigkeit eine nicht allzu komplizierte Gestalt annehmen kann. Das nächste Theorem (vgl. McMullen [14]) sichert sogar, dass $\mathfrak{I}(G)$ ein Produkt maximal dreier Faktoren ist, von denen eines immer der größte Teiler — das Alexander-Polynom — ist.

Theorem 4.14. *Sei G die Fundamentalgruppe einer 3-Mannigfaltigkeit M , die den Voraussetzungen des Haupttheorems genügt und $\phi : G \rightarrow H_1(G)/T \cong ab(G) \cong \mathbb{Z}^{b_1(G)}$ die Quotientenabbildung auf den maximalen frei abelschen Quotienten. Dann gilt:*

$$\mathfrak{I}(G) = m(ab(G))^{1+b_3(M)} \cdot (\Delta)$$

Für den Beweis ist es nützlich von Homologie mit getwisteten Koeffizienten zu sprechen: Sei $G = \pi_1(M)$ und $F = ab(G) = H_1(G)/T$ der maximale freie abelsche Quotient. Dann wird $\mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[F]$ durch Linksmultiplikation mit Elementen aus G zu einem $\mathbb{Z}[G]$ -Linksmodul. Ebenso wird die zelluläre Kettengruppe $C_i^{zell}(\hat{M})$ der universellen Überlagerung \hat{M} , mit den induzierten Automorphismen der Decktransformationsgruppe (kanonisch identifiziert mit G) zu einem $\mathbb{Z}[G]$ -Rechtsmodul. Hier ist verlangt, dass die betrachtete zelluläre Struktur auf \hat{M} von einer auf M vererbt ist, also die Zellen in der Überlagerung genau den Zusammenhangskomponenten der Urbilder von Zellen in M entsprechen — nur so erhält man eine freie $\mathbb{Z}[G]$ -Basis, ähnlich wie in dem Beweis von Proposition 4.1. Somit erhält man zu einem gegebenen zellulären Kettenkomplex $C_3(\hat{M}, \hat{p}) \rightarrow C_2(\hat{M}, \hat{p}) \rightarrow C_1(\hat{M}, \hat{p}) \rightarrow C_0(\hat{M}, \hat{p})$, wobei $\hat{p} = \pi^{-1}(p)$ das Urbild einer Nullzelle $p \in M$ ist, der universellen Überlagerung den tensorierten Kettenkomplex

$$\begin{aligned} C_3(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] &\rightarrow C_2(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \rightarrow C_1(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] \\ &\rightarrow C_0(\hat{M}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Man beachte hierbei, dass es sich nun um \mathbb{Z} -Moduln handelt, da der zugrundeliegende Gruppenring nicht kommutativ sein muss. Aber aus offensichtlichen Gründen, handelt es sich um einen Kettenkomplex von $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Moduln. Bezeichnet man den Kettenkomplex (7) mit $C_\bullet(M; \mathbb{Z}[ab(G)])$, so können wir nun definieren:

Definition 4.9. Definiere die Homologie mit getwisteten Koeffizienten von M als den $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Modul

$$H_i(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)]) = H_i(C_\bullet(M; \mathbb{Z}[ab(G)])).$$

Man sieht leicht ein, dass dies wohldefiniert ist und nicht von der Zellzerlegung von M abhängt. Weiter ergibt sich, dass $\mathfrak{A}(M) \cong H_1(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)])$ natürlich isomorph sind. Der Beweis ergibt sich direkt aus dem Resultat aus der Überlagerungstheorie, dass die universelle Überlagerung buchstäblich universell überlagert, also insbesondere die universelle abelsche Überlagerung, siehe etwa [10, Kapitel 1.3]. Genauso überlagert die universelle abelsche Überlagerung jede normale Überlagerung die abelsche Decktransformationsgruppe hat, wegen der universellen Eigenschaft der Abelianisierung. Nun wollen wir uns dem Beweis des Theorems widmen.

Beweis von Theorem 4.14. Wie die obige Bemerkung gestattet, zielt der Beweis darauf ab eine Präsentation der getwisteten Homologie $H_1(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)]) \cong \mathfrak{A}(G)$ zu finden. Diese soll explizit konstruiert werden, durch Betrachtung einer konkreten CW-Struktur und zellulärer Homologie. Glatte 3-Mannigfaltigkeiten sind stets triangulierbar, entweder überzeugt man sich hiervon durch die grundsätzliche Triangulierbarkeit von 3-Mannigfaltigkeiten nach dem Satz von Moise oder man erinnert sich an die Triangulierbarkeit von glatten Mannigfaltigkeiten, die etwa nach dem Satz von Whitehead (vgl. [25]) folgt oder durch explizite Verfahren von Triangulierungen abgeschlossener glatter Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^N zusammen mit dem Whitney Einbettbarkeitssatz. Jedenfalls sei τ eine Triangulierung von M . Um eine explizite und vor allem möglichst simple CW-Struktur zu erhalten, wählt man sich nun zwei möglichst „große“ Bäume B, B' in den Strukturen von M , die der Vereinfachung der CW-Struktur dienen. Und zwar sei B ein maximaler Baum im Graph des 1-Skeletts von τ , also ein zusammenhängender, kreisloser Graph. Dann hat der Quotient M/B nur eine 0-Zelle p . Für B' betrachtet man folgende Konstruktion eines Graphen G' : Man nehme die Baryzentren aller 3-Simplices als Knotenmenge und die Kanten verbinden diese Knoten gemäß der trennenden 2-Simplices von τ . Offensichtlich gilt für jeden Baum in G' , dass die zugehörige Vereinigung von 3-Simplices die aus seinen Knoten hervorgeht ein topologischer Ball ist und der Randoperator auf der Summe der zugehörigen 3-Simplices im Kettenkomplex nur 2-Simplices des Randes ergibt (die inneren 2-Simplices treten jeweils als Differenz auf). Sei also B' ein maximaler Baum in G' . Das bedeutet insbesondere, dass G'/B' diffeomorph zu einem Bouquet von Kreisen ist, denn G' ist zusammenhängend, da M zusammenhängend ist. Da getwistete Homologie eine Homotopieinvariante ist, betrachte man den zellulären Kettenkomplex der aus dem CW-Komplex M/B hervorgeht, mit der gewählten Struktur, dass man durch die Konstruktion von B' eine einzige 3-Zelle erhält, die aus Entnahme aller 2-Simplices entsteht die zu den Kanten aus B' gehören. Die Projektion $X \rightarrow X/A$ ist stets eine Homotopieäquivalenz, falls $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung und A zusammenziehbar ist, siehe [24, Chapter 1, Corollary 5.13] und (M, B) ist als CW-Paar eine Kofaserung. Aus dieser Struktur geht folgender zellulärer „getwistete“ Kettenkomplex von $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Moduln $C_i = C_i^{zell}(\widehat{M/B}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)]$ hervor:

$$C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

wobei $\pi : \widehat{M/B} \rightarrow M/B$ die universelle Überlagerung ist.

Sei M nun zunächst geschlossen. Dann folgt mit Eulercharakteristik und Poincaré Dualität (und Homotopieinvarianz beziehungsweise Wohldefiniertheit der genutzten Invarianten):

$$0 = b_0(M) - b_3(M) + b_2(M) - b_1(M) = \chi(M)$$

= Differenz der Zellen in gerader und ungerader Dimension,

also folgt, dass die gewählte CW-Struktur jeweils n Zellen in Dimension 1 und 2 hat. Da man nun die relative Homologie zu der ausgezeichneten 0-Zelle p betrachtet, folgt direkt für den Alexander-Modul $\mathfrak{A}(G) = H_1(M, p; \mathbb{Z}[ab(G)]) = C_1 / \text{Im}(\partial_2)$. Man beachte, dass

die $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Moduln in dem betrachteten Kettenkomplex frei sind, denn:

$$\begin{aligned} C_i &= C_i^{zell}(\widehat{M/B}, \hat{p}) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[G]^n \otimes_{\mathbb{Z}[G]} \mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[ab(G)]^n \\ C_i^{zell}(\widehat{M/B}, \hat{p}) &= \bigoplus_{g \in G} C_i^{zell}(\widehat{M/B}, \hat{p}) = \mathbb{Z}[G]^n. \end{aligned}$$

Also erhält man eine Präsentation von diesem Modul durch:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \twoheadrightarrow C_1 / \text{Im}(\partial_2) = \mathfrak{A}(G).$$

∂_2 lässt sich für gewählte $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Basen von C_1 und C_2 als Matrix darstellen, deren $(n-1) \times (n-1)$ Minoren die Erzeuger von $\mathfrak{I}(G)$ liefern. Für die Berechnung dieser Matrix, berechnen wir zuerst ∂_1 und ∂_3 und nutzen dann $\partial_1 \partial_2 = 0$ und $\partial_2 \partial_0 = 0$.

Man fixiere für eine $\mathbb{Z}[G]$ -Basis der $C_i^{zell}(\widehat{M/B})$ einen Fundamentalbereich — genauer einen Basispunkt $\hat{e}_0 \in \hat{p} = \pi^{-1}(p)$ aus dem Urbild der 0-Zelle. An diesem Basispunkt kann eine $\mathbb{Z}[G]$ -Basis der $C_i^{zell}(\widehat{M/B})$ innerhalb des Fundamentalbereichs gewählt werden. Die Vereinigung dieser gewählten Zellen liegt dann dicht in dem Fundamentalbereich. Ist also eine beliebige Zelle $e \in C_i^{zell}(\widehat{M/B})$ gegeben, so entsteht diese aus einem Element \hat{e} der fixierten Basis aus dem fixierten Fundamentalbereich, durch Multiplikation mit einem $g \in G$ (genauer bedeutet dies eine Anwendung der Decktransformation, die Zellen auf Zellen abbildet), also $g\hat{e} = e$. Um einzusehen, wie sich eine Basis für die freien $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Moduln C_i unter den obigen Isomorphismen verhält, stellt man fest, dass für ein beliebiges $e \in C_i^{zell}(\widehat{M/B})$ gilt: $e \otimes 1 \mapsto g\hat{e} \otimes 1 = \hat{e} \otimes [g] \mapsto [g]\hat{e}$, wobei \hat{e} die eindeutige fixierte Zelle ist. Die fixierten Zellen bilden die kanonischen Koordinaten von $C_i^{zell}(\widehat{M/B})$ als freien $\mathbb{Z}[G]$ -Modul und von $C_i \cong \mathbb{Z}[ab(G)]^n$ als $\mathbb{Z}[ab(G)]$ -Modul, wobei beide Moduln jeweils von Rang n wenn $i \in \{1, 2\}$ bzw. 1 sind für $i \in \{0, 3\}$.

Was geschieht nun durch Anwenden von ∂_1 ? Sei e eine generische 1-Zelle in $C_1^{zell}(\widehat{M/B})$, dann ist $e = g\hat{e}$, wobei \hat{e} aus der fixierten Basis stammt. Das abgeschlossene Bild der 1-Zelle $\overline{\pi(\hat{e})}$ stellt per Definition das Bild einer (nicht notwendigerweise glatten, es sind auch keine differenzierbaren Eigenschaften von M/B gefordert) Abbildung $(I, \partial I) \rightarrow (M/B, \hat{e}_0)$ dar, also ein Element $\hat{g} \in \pi_1(M/B, e_0) = G$. Also berechnet sich das Bild von $\hat{e} \otimes 1$ unter der Randabbildung durch den (natürlich nicht geschlossenen) Lift dieses Elementes, nämlich $\partial(e \otimes 1) = \partial(g\hat{e} \otimes 1) = \partial(\hat{e} \otimes [g]) = (\hat{e}_0 - \hat{g}\hat{e}_0) \otimes [g] = (1 - [\hat{g}])(ge_0 \otimes 1)$ oder unter dem Isomorphismus kann man auch $\partial e = \partial(g\hat{e}) = (1 - [\hat{g}])([g]\hat{e}_0)$ schreiben, wobei $\hat{e}_0 = \hat{p}$. Seien also $\hat{e}_1^1, \dots, \hat{e}_1^n$ die fixierten 1-Zellen in der Überlagerung, also eine Basis des $\mathbb{Z}[F]^n$, dann erhalten wir die Matrixdarstellung des Homomorphismus $\mathbb{Z}[F]^n \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[F] = \langle \hat{e}_0 \rangle$

$$\partial_1 = (1 - [\hat{g}_1], \dots, 1 - [\hat{g}_n]),$$

wobei $\hat{g}_i \in \pi_1(M/B, e_0) = G$ die Schleife von \hat{e}_1^i unter der Projektion in M/B ist.

Ähnlich fährt man nun mit der Berechnung von ∂_3 fort. Sei \hat{e} eine der fixierten 2-Zellen aus $C_2^{zell}(\widehat{M/B})$, also ein Element der gewählten $\mathbb{Z}[G]$ -Basis von $C_2^{zell}(\widehat{M/B})$ und somit auch ein Element der $\mathbb{Z}[F]$ -Basis von C_2 . Erinnert man sich an die Wahl von τ ,

so ist \hat{e} in M und M/B Seite von zwei 3-Simplices. In B' existiert nun ein eindeutiger (Geodätische in Bäumen sind eindeutig) Pfad, der die Baryzentren dieser zwei 3-Simplices verbindet. Schließt man diesen Pfad nun zu einer Schleife, durch die zu \hat{e} gehörige Kante (im Sinne der obigen Konstruktion von $G \supset B'$), so erhält man diese Schleife als Bild $(I, \partial I) \rightarrow (M/B, \pi(\hat{e}))$. Diese definiert ein bis auf Konjugation eindeutiges Element in $G = \pi_1(M/B)$ (durch Wechsel des Basispunktes), also ein eindeutiges Element $\hat{h} \in F = ab(G)$. Um nun das Bild von der fixierten 3-Zelle \hat{e}_3 unter ∂_3 festzustellen, fasse man τ/B als CW-Struktur auf und erwäge folgendes Diagramm bezüglich der fixierten Basis \hat{e}_2^i der 2-Simplices und den dazugehörigen eindeutigen $\hat{h}_i \in F$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \Sigma^{\hat{\sigma}_3} & & \Sigma^{\hat{\sigma}_3} & \\
 & \nearrow & C_3^{\tau, \text{zell}}(\widehat{M/B}) & \nwarrow & \\
 \hat{e}_3 & \searrow \Sigma & & \searrow \partial & \Sigma^{\hat{\sigma}_3} \\
 & C_3^{\text{zell}}(\widehat{M/B}) & \xrightarrow{\quad} & C_2^{\text{zell}}(\widehat{M/B}) & \Sigma^{(1-\hat{h})\hat{e}_2^i}
 \end{array}$$

Also stellt sich heraus, dass sich die Abbildung ∂_3 als darstellende Matrix bezüglich der $\mathbb{Z}[F]$ -Basis die aus den fixierten 2-Zellen $\hat{e}_2^1, \dots, \hat{e}_2^n$ hervorgeht, wie folgt auffassen lässt:

$$\partial_3 = (1 - \hat{h}_1, \dots, 1 - \hat{h}_n)^T \in \mathbb{Z}[ab(G)]^n$$

wobei die $\hat{h}_i \in F$ mit der obigen Konstruktion eindeutig aus den \hat{e}_2^i hervorgehen. Offensichtlich gilt jeweils: $\langle [\hat{g}_i] \rangle = \langle \hat{h}_i \rangle = ab(G)$. Die konstruktive Arbeit ist nun getan — von hier an möchten wir für den Rest des Beweises die Topologie vergessen und behandeln unseren Kettenkomplex mit algebraischen Methoden:

Durch eventuellen Basiswechsel für die Moduln C_1 und C_2 können wir annehmen, dass bei den Matrixdarstellungen von ∂_1 und ∂_3 die $g_i := [\hat{g}_i] = \hat{h}_i$ übereinstimmen. Da $F = ab(G) = \mathbb{Z}^{b_1(M)}$, können wir für diese Basen weiter annehmen, dass $\langle g_1, \dots, g_{b_1(M)} \rangle = F$ und für alle anderen g_i mit $i > b_1(M)$, die Matrixeinträge verschwinden, also $g_i = 1$. Bezeichne zu dieser Wahl von Basen $M = (m_1, \dots, m_n)$ die darstellende Matrix von ∂_2 mit Spalten $m_i \in \mathbb{Z}[F]^n$. In den folgenden Matrixberechnungen wird folgende Notation verwendet: M_{ij} bezeichnet die Determinante der $(n-1) \times (n-1)$ Minore, die durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht, der Unterstrich \underline{m}_j betont das Weglassen dieser Spalte und $m_j^i \in \mathbb{Z}[F]^{n-1}$ bezeichnet die Spalte, die durch Kürzen um den i -ten Eintrag entsteht. Also ist nach dieser Schreibweise $M_{ij} = \det(m_1^i, \dots, \underline{m}_j^i, \dots, m_n^i)$. Das Alexander-Ideal $\mathfrak{J}(G)$ berechnet sich dann aus $\langle M_{ij} | i, j \in \{1, \dots, n\} \rangle$.

Zunächst soll ein Zusammenhang zwischen M_{ij} und M_{ik} hergestellt werden unter

Ausnutzen der Beziehung $m_k(1 - g_k) + \sum_{l \neq k} m_l(1 - g_l) = \sum m_l(1 - g_l) \stackrel{(\partial_3 \partial_2 = 0)}{=} 0$:

$$\begin{aligned}
M_{ij}(1 - g_k) &= \\
&= (1 - g_k) \det(m_1^i, \dots, \underline{m_j^i}, \dots, m_n^i) = \det(m_1^i, \dots, (1 - g_k)m_k^i, \dots, \underline{m_j^i}, \dots) \\
&= \det(m_1^i, \dots, -\sum_{l \neq k} m_l^i(1 - g_l), \dots, \underline{m_j^i}, \dots) = \det((m_1^i, \dots, -(1 - g_j)m_j^i, \dots, \underline{m_j^i}, \dots)) \\
&= -(1 - g_j) \det((m_1^i, \dots, m_j^i, \dots, \underline{m_j^i}, \dots)) = \pm M_{ik}(1 - g_j)
\end{aligned}$$

Man beachte, dass in der letzten Zeile das m_j^i immer noch an der k -ten Stelle steht, also die letzte Gleichheit durch paarweises Vertauschen mit dieser Spalte entsteht. Mit den gleichen Umformungen für Zeilen erhält man ebenso $M_{ij}(1 - g_l) = \pm M_{lj}(1 - g_i)$. Zusammen ergibt das die Beziehung (8), aus der alle nötigen Folgerungen gezogen werden können.

$$M_{ij}(1 - g_k)(1 - g_l) = M_{ik}(1 - g_j)(1 - g_l) = M_{lk}(1 - g_j)(1 - g_i) \quad (8)$$

Da $b_1(M) \neq 0$ folgt mit der Wahl der g_i , dass $(1 - g_1) \neq 0$. Somit folgt mit (8), dass die Determinanten der Minoren verschwinden, wenn sie die erste $b_1(M) \times b_1(M)$ Hauptminore enthalten, aus der maximal eine Zeile *oder* eine Spalte entnommen wurde. Mit anderen Worten, da $\mathbb{Z}[F]$ nullteilerfrei ist folgt mit (8):

$$M_{ij}(1 - g_1)^2 = M_{11} \cdot 0 = 0 \implies \mathfrak{J}(G) = \langle M_{ij} | i, j \leq b_1(M) \rangle$$

Seien im Folgenden also stets $i, j \leq b_1(M)$.

Für die Elemente M_{ii} die aus symmetrischer Kürzung entstehen, liefert (8) die Gleichheit $M_{ii}(1 - g_j)^2 = \pm M_{jj}(1 - g_i)^2$, die nach Annahme an $b_1(M) \geq 2$ nicht-trivial ist. Da aber $\mathbb{Z}[F]$ ein faktorieller Ring ist, also die Faktorisierung in Primelemente eindeutig ist und g_i, g_j so gewählt wurden, dass $1 - g_i$ und $1 - g_j$ koprim sind, ist folgende Wahl gerechtfertigt⁹:

$$\Delta = \frac{M_{11}}{(1 - g_1)^2} = \pm \frac{M_{22}}{(1 - g_2)^2} = \dots = \pm \frac{M_{b_1(M)}}{(1 - g_{b_1(M)})^2}$$

Man erhält:

$$M_{ii} = \pm \Delta(1 - g_i)^2 \quad (9)$$

Allgemein führt man mit (8) jede Determinante M_{ij} auf (9) folgendermaßen zurück:

$$\begin{aligned}
M_{ij} &= \frac{M_{ij}(1 - g_1)^2}{(1 - g_1)^2} = \pm \frac{M_{11}(1 - g_i)(1 - g_j)}{(1 - g_1)^2} = \pm \Delta(1 - g_i)(1 - g_j) \\
\implies \mathfrak{J}(G) &= (\Delta) \cdot m(F)^2
\end{aligned}$$

⁹Genaugenommen gilt das in jedem kommutativen Ring mit Eins, da per Definition koprimere Elemente:
 $M_{11} = M_{11}((1 - g_i)^2 x + (1 - g_1)^2 y) = M_{ii}(1 - g_1)^2 x + M_{11}(1 - g_1)^2 y = (1 - g_1)^2 (M_{ii} x + M_{11} y)$.

Also folgt das Theorem für geschlossenes M , da wegen $F \not\cong \mathbb{Z}$ offensichtlich (Δ) das kleinste Hauptideal ist, das $\mathfrak{I}(G)$ enthält.

Falls M nun Rand hat, liefert ein analoger Beweis das Ergebnis. \square

Nun verallgemeinert diese Beschreibung des Alexander-Ideals $\mathfrak{I}(M)$ das entsprechende Resultat aus der Knoten- und Verschlingungstheorie; vgl. [2, Proposition 8.11] und [2, Proposition 9.16]. Für den Fall, dass $b_1(M) = 1$ (also insbesondere für Knotenkomplemente), so wissen wir bereits, dass $I(M)$ beziehungsweise $\mathfrak{I}(M)$, unabhängig der beiden angegebenen Definitionen ein Hauptideal ist. Weiter haben wir in diesem Fall bereits in Corollar 4.13 gesehen, wie die Alexander-Norm einer Kohomologieklassse ϕ in Zusammenhang mit $b_1(\ker \phi)$ steht (falls $b_1(M) = 1$ so stimmt die Alexander-Norm mit dem Grad des Alexander-Polynoms überein). Letzteres, also eine Beziehung von $b_1(\ker \phi)$ und $\|\phi\|_A$, soll nun im Fall für $b_1(M) \geq 1$ hergeleitet werden.

Corollar 4.15. *Falls $\Delta_G \neq 0$ mit $G = \pi_1(M)$, so gilt für primitive $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$, die in einem offenen Kegel durch eine offene berandende Seite des Polytops der Alexander-Einheitskugel liegen:*

$$b_1(\ker \phi) = \|\phi\|_A + 1 + b_3(M)$$

Der Beweis ist in [14, Theorem 4.1] und verwendet Theorem 4.14. Tatsächlich gilt dieses Corollar nicht für allgemeine endlich erzeugte Gruppen, vgl. [14, Seite 159].

5 Folgerungen, Bemerkungen und Beispiele

Dieses Kapitel dient der Reflektion der bisherigen Ergebnisse. Zuerst präsentiert das erste Unterkapitel den Abschluss des Beweises von Theorem 1.1. Dann zeigt 5.2 einige weiterführende Überlegungen zum Beweis des Theorems, anschließend wird in 5.3 der Fall von Faserbündeln über dem Kreis behandelt und abschließend beinhaltet 5.4 Beispiele und Berechnungen im Falle von Knoten und Verschlingungen.

5.1 Beweis des Theorems

Mit dem folgenden Kombinieren der Ergebnisse endet schließlich der Beweis des Haupttheorems.

Beweis von Theorem 1.1 (McMullen). Sei wieder $G = \pi_1(M)$ und ohne Einschränkung $\Delta_G \neq 0$ und $b_1(\ker \phi) < \infty$, vgl. Kapitel 5.2. Definiere weiter

$$P = \begin{cases} b_3(M) + 1 & , \text{ falls } b_1(M) \geq 2 \\ 0 & \end{cases}$$

Nach Corollar 4.13 zusammen mit Corollar 4.15 folgt, dass für alle primitiven $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ die in einem offenen Kegel zu einer Seite der Alexander-Einheitskugel liegen, die folgende Gleichheit gilt:

$$b_1(\ker \phi) = \|\phi\|_A + P. \quad (10)$$

Nach Lemma 3.1 und Lemma 4.3 definieren sowohl Thurston- auch als Alexander-Norm jeweils Halbnormen. Folglich ist es keine Einschränkung die Aussage für diese ϕ zu zeigen. Zu diesem fixierten ϕ wähle man gemäß Lemma 3.2 eine zu ϕ duale eingebettete orientierte Fläche S mit den geforderten Minimalitätseigenschaften. Aus dem Lemma folgt dann, dass wir eine obere Schranke erhalten:

$$b_1(\ker \phi) \leq b_1(S) \quad (11)$$

Ohne Einschränkung habe S nicht-positive Eulercharakteristik, da sonst wegen $b_1(S) = b_0(S) + b_2(S) - \chi(S) \leq 1$, die obere Schranke für $b_1(\ker \phi) \leq 1$ mit (10) impliziert, dass die Alexander-Norm verschwindet (man beachte hierbei und im Folgenden die Fälle $b_2(S) = b_3(M) \in \{0, 1\}$). Das Theorem folgt nun aus Zusammensetzung der erarbeiteten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_T &= -\chi(S) = b_1(S) - b_0(S) - b_1(S) \\ &\geq b_1(\ker \phi) - 1 - b_3(M) = \|\phi\|_A + P - b_3(M) - 1 \\ &= \begin{cases} \|\phi\|_T & , \text{ falls } b_1(M) \geq 2 \\ \|\phi\|_T - b_3(M) - 1 & \end{cases} \end{aligned}$$

□

Die einzige Abschätzung entsteht aus der Wahl der Fläche bei Lemma 3.2 durch $b_1(\ker \phi) \leq b_1(S)$. Dass diese bei einer Faserung zu einer Gleichheit wird, diskutiert das Kapitel 5.3.

5.2 Überlagerungen mit unendlich großer Bettizahl

Wie oben bereits vorgeschlagen, kann man nun die Frage stellen, welche Anforderungen man an eine Thurston-minimierenden Fläche stellen darf, falls $b_1(\ker \phi) = \infty$; also inwieweit lässt sich Lemma 3.2 verallgemeinern? Intuitiv würde man einer unendlich zyklischen Überlagerung schnell die Fähigkeit absprechen, endlich erzeugte Homologiegruppen (über \mathbb{Z}) zu haben — sind diese Voraussetzungen vielleicht zu restriktiv? Die gute Nachricht ist, dass die obige Beweisidee auch Möglichkeiten zur Abschätzung von $\|\phi\|_T$ liefert, wenn man nur die endliche Erzeugbarkeit von $\ker \phi$ als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Modul fordert. Diese endliche Erzeugbarkeit ist nach den Überlegungen in Proposition 4.1 oder Corollar 4.6 stets gegeben. Ob oder wann dies sinnvoll ist, soll nun diskutiert werden.

Die folgende Proposition kann als Verallgemeinerung der Formel $b_1(\ker \phi) = \text{Grad } \Delta_\phi$ aus Corollar 4.13 gesehen werden:

Proposition 5.1. *Falls $H_1(M_\phi)$ endlich erzeugt über dem Gruppenring $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ ist (dies ist nach Proposition 4.1 für jede kompakte 3-Mannigfaltigkeit wahr), nicht aber als abelsche Gruppe, so verschwindet das Alexander-Polynom und die Alexander-Norm. Ist umgekehrt $\Delta_{\pi_1(M)} = 0$, folgt für alle $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$, dass $b_1(\ker \phi) = \infty$.*

Beweis. Die einzige Möglichkeit, dass $H_1(M_\phi; \mathbb{Z})$ über $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ im Gegensatz zu \mathbb{Z} endlich erzeugt ist, besteht darin, dass die Familie $\{t_*^k x, k \in \mathbb{Z}\}$ in $H_1(M_\phi)$ linear unabhängig über \mathbb{Z} ist, wobei t ein Erzeuger der Decktransformationen ist. Also ist $\langle x \rangle \subset H_1(M_\phi)$ ein freier Anteil des $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Moduls. Ohne Einschränkung sieht eine Präsentation von $H_1(M_\phi)$ über dem Gruppenring über \mathbb{Z} folgendermaßen aus:

$$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix}} \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]^n \longrightarrow H_1(M_\phi) \longrightarrow 0$$

Somit berechnet sich das Elementarideal zu $E_0(M_\phi) = (\det 0 \det X) = (0)$.

Andererseits sei nun ein verschwindendes Alexander-Polynom $\Delta_M = 0$ gegeben. Ein Epimorphismus $\phi : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{Z}^k$ faktorisiert immer eindeutig über die Quotientenabbildung auf den maximal freien abelschen Quotienten $ab : \pi_1(M) \rightarrow F$. Also existiert eine eindeutige Abbildung $\hat{\phi} : F \rightarrow \mathbb{Z}^k$. Ist $(x_{ij})_{ij}$ nun eine Präsentationsmatrix für den Alexander-Modul, so erhält man mit $(\hat{\phi}(x_{ij}))_{ij}$ eine Präsentationsmatrix des Alexander-Moduls¹⁰ von ϕ . Also impliziert $\Delta_M = 0$ auch $\Delta_\phi = 0$. Falls aber $\Delta_\phi = 0$ bedeutet das, dass der Rang einer Präsentationsmatrix $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^k]^r \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^k]^n \rightarrow A_\phi(M)$ echt kleiner als n ist und somit der Alexander-Modul $A_\phi(M)$ einen freien $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}^k]$ -Summanden enthält und somit $b_1(\ker \phi) = \infty$. \square

¹⁰Dies kann man zum Beispiel zeigen, indem man die Präsentationen der Alexander-Moduln durch einen Kettenkomplex der jeweiligen Überlagerungen gewinnt und die induzierten Kettenkomplex-Abbildungen der Überlagerungsabbildung $M_{ab} \rightarrow M_\phi$ betrachtet.

Man sieht also, dass der Fall $b_1(\ker \phi) = \infty$ ein eher triviales Beispiel zur Verifizierung der Abschätzung aus Theorem 1.1 darstellt, da die Alexander-Norm überall verschwindet. Jedoch erschwert das die Situation zur Berechnung der Thurston-Norm, da die untere Schranke aus Theorem 1.1 verschwindet. Mit der folgenden Proposition soll eine möglichst hohe untere Schranke für die Komplexität einer Thurston-minimalen Fläche für allgemeine $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ angegeben werden:

Proposition 5.2. *Sei M eine 3-Mannigfaltigkeit wie oben und $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ nicht trivial. Dann ist $H_1(M_\phi)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -Modul, wobei ein t Erzeuger der Decktransformationen ist. Zerlege $H_1(M_\phi; \mathbb{Q}) \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{T}$ als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Modul nach dem Klassifikationssatz von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen in einen freien und Torsionsanteil. Dann ist dies auch eine direkte Summe von \mathbb{Q} -Vektorräumen. Jede $\|\phi\|_T$ -minimierende, eingebettete, orientierte, zusammenhängende¹¹ Fläche $(S, \partial S) \subset (M, \partial M)$ die eine zu ϕ duale Homologieklassse $[S]$ definiert, genügt dann folgender Abschätzung:*

$$b_1(S) \geq \text{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q})) + \dim(H_1(M_\phi; \mathbb{Q})/\mathcal{F}) = \text{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(\mathcal{F}) + \dim \mathcal{T}$$

Da S zusammenhängend und nicht nullhomolog ist, entsteht M_ϕ durch Aufschneiden und Verkleben an S , vgl. Corollar 2.18 und Konstruktion 1. Man fixiere für den Beweis einen Lift der Inklusion $S \hookrightarrow M$ und bezeichne diesen als die Inklusion $S \hookrightarrow M_\phi$.

Beweis. Da $\mathcal{F} \subset H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ als Modul über dem Ring der rationalen Laurentpolynome endlich erzeugt ist, erzeugt ein kompakter Teilraum der Überlagerung \mathcal{F} als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Modul. Es folgt wie im Beweis des Lemmas 3.2, dass $b_1(S) \geq \text{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(\mathcal{F})$.

Da $\mathcal{T} \subset H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ nun endlich erzeugt als Vektorraum ist, folgt mit dem Kompaktheitsargument, dass auch hier $S \hookrightarrow M_\phi$ diesen Vektorraum erzeugt, also $b_1(S) \geq \dim \mathcal{T}$.

\mathcal{F} und \mathcal{T} sind invariant bezüglich der Decktransformationen, als direkte Summanden über dem rationalen Gruppenring der Decktransformationen. Das erlaubt uns linear unabhängige Repräsentanten $f_1, \dots, f_{\text{Rang}(\mathcal{F})}, t_1, \dots, t_{\dim \mathcal{T}} \in H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$ zu wählen, so dass die f_i den Summanden \mathcal{F} als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Modul erzeugen. Diese Elemente bilden eine Basis eines $(\text{Rang}_{\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]}(\mathcal{F}) + \dim \mathcal{T})$ -dimensionalen \mathbb{Q} -Untervektorraumes in $H_1(M_\phi; \mathbb{Q})$. Offensichtlich ist dieser Raum *nicht* t_* -invariant; dieser Vektorraum ist eine direkte Summe aus einem maximalen t_* -invarianten und einem nicht- t_* -invarianten Raum. Nach der obigen Beobachtung erzeugt die Inklusion von S die Homologie als $\mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ -Modul, also können die f_i so gewählt werden, dass die Inklusion $S \hookrightarrow M_\phi$ auf der ersten Homologie mit \mathbb{Q} -Koeffizienten, eine lineare Abbildung induziert, deren Bild die f_i enthält, also insbesondere:

$$\langle f_1, \dots, f_{\text{Rang}(\mathcal{F})}, t_1, \dots, t_{\dim \mathcal{T}} \rangle \subset \text{Im } H_1(S \hookrightarrow M_\phi; \mathbb{Q})$$

□

Bemerkung 5.2.1. Man erkennt, dass Lemma 3.2 nicht direktes Corollar dieser Proposition ist. Es kann im Fall $b_1(\ker \phi) = \infty$ weder im Allgemeinen gezeigt werden, dass

¹¹Die Proposition gilt auch für nicht zusammenhängende Flächen, setzt aber eine detailliertere Betrachtung der Überlagerung M_ϕ voraus.

$b_2(S) = b_3(M)$ noch dass automatisch S zusammenhängend ist. Ist $b_2(S) = 0$, so folgt $\partial S \neq \emptyset$ und somit $\partial M \neq \emptyset$, also Gleichheit $b_2(S) = b_3(M)$. Ist allerdings $b_2(S) \geq 1$, so folgt selbst für zusammenhängende S *nicht* zwangsweise, dass M geschlossen ist, vgl. Beispiel 5. Weiter ist unklar ob S immer zusammenhängend gewählt werden kann. Im Fall von $b_1(\ker \phi) < \infty$ haben wir gesehen, dass für eine b_0 -minimierende Wahl einer $\|\cdot\|_T$ -minimalen Fläche, diese automatisch zusammenhängend ist. Trivialerweise gilt das auch für $b_1(\ker \phi) = \infty$, falls $b_1(M) = 1$. Aber im Allgemeinen können wir das Argument von McMullen aus dem Beweis im Fall $b_1(\ker \phi) < \infty$ nicht mehr verwenden.

Lemma 5.3. *Sei $b_1(M) = 1$ und die Thurston-Norm auf $H^1(M; \mathbb{Z})$ eine Norm. Falls $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ primitiv ist, dann folgt für jede duale eingebettete orientierte Fläche die Thurston-Norm-minimierend ist, dass diese homolog zu einer ihrer Zusammenhangskomponenten ist.*

Beweis. Sei S eine Thurston-Norm-minimierende orientierte eingebettete Fläche deren Fundamentalklasse $[S]$ dual zu ϕ ist. Sei $T \subset S$ eine nicht nullhomologe Zusammenhangskomponente von S . Dann definiert diese eine Homologieklassse $0 \neq [T] \in H_2(M, \partial M; \mathbb{Z})$. Somit ist sie dual zu einem Element $\lambda\phi$, da wie bereits mehrfach gezeigt $H^1(M; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(M; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong H_1(M; \mathbb{Z})/T \cong \mathbb{Z}$ zyklisch mit Erzeuger ϕ ist. Da $[T] \neq 0$ ist auch $\lambda \neq 0$. Weiter gilt: $\chi_-(T) \leq \chi_-(S)$ und $\chi_-(T) \geq \|\lambda\phi\|_T = |\lambda|\chi_-(S)$. Somit ist $|\lambda| = 1$ und $\chi_-(S) = \chi_-(T)$. Da $\|\phi\|_T \neq 0$ folgt direkt, dass $[S] = [T]$ gilt. \square

Bemerkung 5.2.2. Falls $\chi_-(S) = 0$, so kann S aus lauter Komponenten nicht-negativer Eulercharakteristik bestehen, deren Fundamentalklassen dual zu nicht-primitiven Kohomologieklassen sind. Es ist also für die Aussage des Lemmas notwendig, dass die Thurston-Norm eine Norm ist. Allerdings kann auch bei ausgearteter Thurston-Norm eine minimierende Fläche zusammenhängend gewählt werden: Sei S unter den Thurston-Norm minimierenden orientiert eingebetteten Flächen dual zu ϕ , eine solche die auch b_0 minimiert. Unter Verwendung von Konstruktion 2 erhält man einen Graph G und wie in Abbildung 3 angedeutet, einen Homotopieschnitt $G \rightarrow M$. Dieser induziert einen Monomorphismus auf der Homologie und liefert somit eine obere Schranke $b_1(S) \leq b_1(M) = 1$. Da die Existenz von Knoten mit nur ein- oder ausgehenden Kanten nach Corollar 2.17 nullhomologe Komponenten liefert, ist $S^1 \cong G \rightarrow S^1$ eine Abbildung die aufgrund der Primitivität von ϕ Grad 1 hat, also ist S zusammenhängend (es sei auf den Beweis von Lemma 3.2 verwiesen der die Argumente detaillierter ausführt).

Beispiel 5. Man betrachte etwa den 3-dimensionalen Torus $M = T = S^1 \times S^1 \times S^1$ mit $\mathbb{Z}^3 \cong H_1(M) \cong \text{Hom}(H_1(M), \mathbb{Z}) \cong H^1(M; \mathbb{Z})$ nach dem universellen Koeffiziententheorem und der Produktverträglichkeit der Fundamentalgruppe, sowie Hurewicz. Nun betrachte man eine Fläche die dual zu einem der kanonischen Erzeuger der Fundamentalgruppe ist, am einfachsten wäre zum Beispiel $S = * \times S^1 \times S^1$. Die zugehörige durch „Aufschneiden und Verkleben“ gewonnenen Überlagerung (vergleiche Konstruktion 1, Kapitel 2.3) $\mathbb{R} \times S^1 \times S^1$ ist homologisch endlich erzeugt. Sicher ist es möglich einen glatt eingebetteten 2-Volltorus $U \cong S^1 \times D$ aus dem Komplement von der betrachteten Fläche S in M zu finden. Betrachtet man nun die Mannigfaltigkeit $N = M - \mathring{U}$, so

erhält man eine glatte orientierbare Mannigfaltigkeit mit Rand $(N, \partial N) = (M - \overset{\circ}{U}, \partial U)$, die auch sonst alle Voraussetzungen der vorhergehenden Proposition erfüllt. Da U zu S durchschnittsleer gewählt wurde, ist $[S]$ sicherlich eine nicht-triviale Homologieklassse in $H_2(N, \partial N; \mathbb{Z})$. Nun ist die durch Aufschneiden und Verkleben an S gewonnene Überlagerung über dem Gruppenring endlich erzeugt, aber $b_2(S) = 1 \neq 0 = b_3(N)$. Man vergleiche auch hier wieder das Geschehen mit Abbildung 1, die eine unendlich zyklische Überlagerung zeigt, deren erste Bettizahl unendlich ist. Das liegt auch hier daran, dass die 1-kodimensionale Untermannigfaltigkeit, an derer aufgeschnitten wird, einen erzeugenden freien Teil der Homologie mit 0 als Kohomologieklassse auswertet.

5.3 Faserungen

In diesem Abschnitt, wollen wir uns mit Faserungen¹² über dem Kreis beschäftigen.

Beispiel 6. Sei M eine Faserbündel $M \rightarrow S^1$ über dem Kreis. Da die Entnahme eines Punktes aus dem Kreis S^1 einen zusammenziehbaren Raum, also ein Produkt mit der Faser liefert, entsteht eine solche Faserung also immer folgendermaßen: Es gibt einen Diffeomorphismus einer zusammenhängenden Fläche $\varphi : S \times 0 \rightarrow S \times 1$, so dass M dem Quotienten $S \times I / \varphi$ entspricht. Der Kontext ist also folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & I/\partial I = S^1 \\ \downarrow & \nearrow p_2 & \\ S \times I / \varphi & & \end{array}$$

In diesem Fall definiert die Homotopieklasse der Faserung $M \rightarrow S^1$ eine eindeutige Kohomologieklassse $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$. Die Überlagerung M_ϕ kann wieder entweder als Rückziehung von $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ oder durch Aufschneiden an S gewonnen werden — in beiden Fällen ist leicht ersichtlich, dass $M_\phi \cong S \times \mathbb{R}$ ist (für das Aufschneiden an S , benötigt man das $[S] = \phi$, dies gilt aber da jedes Urbild von einem Punkt unter f diffeomorph zur Fläche ist, insbesondere die der regulären Werte, die nach Sard existieren — faktisch ist natürlich jeder Wert von f regulär, dies folgt zum Beispiel aus der Beschreibung von f durch p_2). Also hat M_ϕ den Homotopietyp der Fläche, dementsprechend berechnen sich die Homotopieinvarianten von M_ϕ . Insbesondere ergibt sich $b_1(\ker \phi) = b_1(M_\phi) = b_1(S)$, wodurch sich mit Lemma 3.2 ergibt (da $b_0(S) = 1$), dass die duale Fläche mit Gleichheit der ersten Bettizahlen gewählt werden kann. Da dies die einzige Ungleichung ist, die in dem Theorem verwendet wird, folgt also schon Gleichheit der Normen $\|\phi\|_A = \|\phi\|_T$, falls $b_1(M) > 1$ und $\|\phi\|_A = \|\phi\|_T + 1 + b_3(M)$ sonst.

Falls M nun zusätzlich noch ein Knotenkomplement eines Knotens K ist, gilt $\ker \phi = [\pi_1(M), \pi_1(M)]$. Also folgt aus diesen Überlegungen, dass die Kommutatoruntergruppe einer Knotengruppe isomorph zu der Fundamentalgruppe einer Seifertfläche des Knotengeschlechts ist, vergleiche zum Beispiel [2, Theorem 4.6].

¹²Mit Faserungen seien hier stets Faserbündel gemeint.

Es stellt sich die Frage, inwieweit eine Faserung eindeutig ist. Beispielsweise ist im Falle eines Vektorbündels über einem zusammenhängendem Raum, die Dimension eindeutig. Falls aber $b_1(M) > 1$ ist und $\phi, \psi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ Repräsentanten in $[M, S^1]$ haben, die Faserungen sind, folgt dann etwa: $\|\phi\|_T = \|\psi\|_T$? Existieren Diffeomorphismen zwischen Faserbündeln mit Flächen verschiedenen Geschlechts als Fasern? Tatsächlich sind die Faserungen nicht eindeutig siehe Beispiel 8.

Nun verstehen wir also die Thurston-Norm einer solchen Klasse und somit in diesem Beispiel auch die Alexander-Norm. Möchte man dennoch das Alexander-Polynom $\Delta_f = \Delta_\phi$ einer Faserung f berechnen (falls $b_1(M) = 1$ ist $\Delta_f = \Delta_M$), genügt es nach Lemma 4.11, die lineare Abbildung von Vektorräumen $t_* \in \text{Aut}(H_1(M_\phi; \mathbb{Q}))$ zu berechnen. Aber da der Erzeuger t der Decktransformationen folgendem kommutativen Diagramm genügen muss:

$$\begin{array}{ccccc}
& S & \xrightarrow{\cong} & S & \\
& \swarrow & \downarrow \cong & \searrow \cong & \\
M_\phi & \xrightarrow{\cong} & S \times \mathbb{R} & \xrightarrow[\cong]{\hat{t}} & S \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\cong} & M_\phi \\
& \searrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\
& & S \times I / \varphi & & & & \\
& & \downarrow \cong & & & & \\
& & M & & & &
\end{array}$$

und andererseits t_* von einem Lift der zur Faserung dualen Schleife induziert wird, muss in jedem Fall gelten: $t_* = \hat{t}_* = \varphi$ unter gegebenen Identifikationen mit S in obigem Diagramm. Also berechnet sich das Alexander-Polynom Δ_f zu dem charakteristischen Polynom der Abbildung $\varphi_* : H_1(S; \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S; \mathbb{Q})$, wobei dieses mit Proposition 4.9 einen Erzeuger des entsprechend zurückgezogenen Ideals unter der Lokalisierung $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}^{-1}\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] = \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ liefert — das ganzzahlige Alexander-Polynom.

Dies liefert die Möglichkeit in diesem Beispiel für Faserungen mit Geschlecht mit $b_1(M) = 1$ das Theorem zu verifizieren ohne es zu nutzen, indem man berechnet:

$$\|\phi\|_A = \text{Grad}(\Delta_\phi) = \text{Grad}(\Delta_f) = \text{Grad} \det(\varphi_* - tI) = g(S) = \chi_-(S) + 2 = \|\phi\|_T + 2$$

Im Falle der trivialen Bündel $D^2 \times S^1$ oder $S^2 \times S^1$ stimmt die zyklische Überlagerung mit der universellen überein und man erhält jeweils $\Delta_\phi = 1$ für ϕ einen Erzeuger der ersten Homologie. Da die Erzeuger für $H_2(D^2 \times S^1, \partial) \cong \mathbb{Z}$ und $H_2(S^2 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$ sich mit Poincaré Dualität als $[D^2, \partial D^2]$ beziehungsweise $[S^2]$ herausstellen, verschwindet auch die Thurston-Norm. In diesem Fall gilt also keine Gleichheit in Theorem 1.1.

Beispiel 7. Handelt es sich bei M um eine Faserung $M \rightarrow S^1$ mit $b_1(M) = 1$ oder ist $b_1(M) > 1$ und jede Kohomologiekategorie ist repräsentiert durch eine Faserung, so berechnet ist die Thurston-Norm nach Theorem 1.1 bereits vollständig durch die Fundamentalgruppe determiniert, siehe Kapitel 4.2.

Beispiel 8. Eine wichtige Anwendung der Thurston-Norm und dieser Abschätzung besteht in den sogenannten *fibred faces*, die im Folgenden als gefaserte Seiten bezeichnet werden. Bisher wurden bereits Kohomologieklassen $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ betrachtet, mit einer korrespondierenden Abbildung $M \rightarrow S^1$, die eine Faserung darstellt. Bei solchen herrscht nach dem letzten Beispiel Gleichheit im Theorem 1.1. Diese Klassen werden auch als *gefasert* bezeichnet. Tatsächlich stellt Thurston in [21] fest, dass die Thurston-Norm einem Informationen über diese Eigenschaft liefert. Wie in Bemerkung 2.19 gezeigt, lässt sich die Thurston-Norm auf die reelle Erweiterung der Skalare fortsetzen. Thurston hat in [21] außerdem gezeigt, dass der Einheitsball dieser Norm auf $H^1(M; \mathbb{R})/V$ (wobei V ein maximaler degenerierter Unterraum ist) ein beschränktes konvexes Polytop ist, also die konvexe Hülle einer endlichen Anzahl an Elementen. Eine berandende Seite dieses Polytops nennt man gefaserte Seite, falls alle Elemente $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ die auf einem vom Ursprung ausgehendem Strahl liegen, der das Innere der Seite trifft, gefasert sind. Mit anderen Worten ist eine Seite genau dann gefasert, wenn jedes $\phi \in H^1(M; \mathbb{Z})$ gefasert ist, das in einem Kegel mit dem Inneren der Seite als Grundfläche und dem Ursprung als Spitze liegt. Natürlich ist das Polytop symmetrisch ($\|\phi\|_T = \|\phi\|_T$) und die gefaserten Seiten treten auch in Paaren auf — eine Faserung $M \rightarrow S^1$ liefert mit einer orientierungsumkehrenden Reflektion τ das Inverse $M \rightarrow S^1 \xrightarrow{\tau} S^1$. Man sagt, gefaserte Klassen ϕ, ψ liegen in *wirklich verschiedenen* gefaserten Kegeln, falls diese bis auf Symmetrie verschieden sind. Mit diesen gefaserten Seiten ist es möglich zu zeigen, dass eine 3-Mannigfaltigkeit auf unendlich verschiedene Arten über dem Kreis fasert, mit unbeschränkter Thurston-Norm der Faserungen.

5.4 Knoten und Verschlingungen

In diesem Kapitel sollen Berechnungen mit der Thurston-Norm angestellt werden. Die Alexander-Invarianten von Knoten und Verschlingungen werden als bekannt vorausgesetzt und können etwa in [18] nachgeschlagen werden.

Bemerkung 5.4.1. Zwei Normen abzuschätzen ist gleichbedeutend dazu, eine Inklusionsbeziehung ihrer Einheitsbälle festzustellen.

Beispiel 9 (Verschlingungen). Thurston liefert in [21] einige Beispiele in Form von Verschlingungskomplementen, als er seine Ergebnisse über die Existenz der Thurston-Norm und ihren Einheitsball veröffentlicht. Eine Verschlingung bezeichnet eine gemeinsame disjunkte Einbettung von mehreren Knoten, also eine glatte Einbettung $L : \sqcup_{i=1}^m S^1 \rightarrow S^3$. Als M_L bezeichnen wir wieder die kompakte 3-Mannigfaltigkeit, die aus Entfernen einer offenen Tubenumgebung hervorgeht. Wählt man auf $\sqcup S^1$ eine Standardorientierung, erhält man wie im Fall eines Knotenkomplements, kanonische Erzeuger von $H^1(M_L)$: Die Orientierung einer Komponente liefert (nach festgelegter Konvention) einen homologisch eindeutigen orientierten Meridian, das ist eine Schleife die in $M_L \xrightarrow{\cong} M - \text{Im}(L)$ homotop zu einer Einbettung einer Einheitssphäre einer Faser unter einer Tubenabbildung ist (es lässt sich in einem trivialen Bündel leicht von einer Einheitssphäre sprechen). Diese liefern kanonische Erzeuger der ersten Homologie $H_1(M_L) \cong \mathbb{Z}^m$. Die kanonische Basis des Dualraums $l_1, \dots, l_m \in H^1(M_L) \cong H_1(M_L)$ geht also natürlich aus den Komponenten

der Verschlingung L_1, \dots, L_m hervor. Außerdem liefert dies eine kanonische Identifikation mit dem Laurenttring $\mathbb{Z}[ab(G)] = \mathbb{Z}[l_1^{\pm 1}, \dots, l_m^{\pm 1}]$ (analog wie im Knotenfall). Um also beispielsweise den Einheitsball der Thurston-Norm zu beschreiben, lassen sich ebenfalls die Koordinaten $l_i = l_i \otimes 1 \in H^1(M) \otimes \mathbb{R} = H^1(M; \mathbb{R})$ verwenden. Falls die Komponenten wirklich verschlungen sind, also keine Komponente eine Scheibe in M_L berandet und paarweise keine Komponenten als Rand eines Kreisrings hervorgehen, so folgt dass die Thurston-Norm eine Norm auf $H^1(M_L)$ definiert. Dies ergibt sich daraus, dass sich die Eulercharakteristik einer Fläche mit n Randkomponenten als $2 - 2g - n$ berechnet — durch Hinzufügen von n verschiedenen 2-Zellen erhält man eine geschlossene Fläche mit Eulercharakteristik $2 - 2g$. Nun wollen wir einige Einheitskugeln von Verschlingungen berechnen.

Knoten

Im Fall, dass die Verschlingung nur aus einer Komponente besteht — es sich also um einen Knoten handelt — ist $H^1(M; \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Sei ϕ ein Erzeuger der ganzzahligen Kohomologie, dann ist ϕ dual zu einer geschlechtsminimierenden Seifertfläche und jede duale Fläche die Lemma 3.2 erfüllt ist eine Seifertfläche. Somit ist (solange nicht vom Unknoten geredet wird) wie bereits erwähnt $\|\phi\|_T = 2g(L) + 1$. Also ist die abgeschlossene Einheitskugel der Thurston-Norm gegeben durch:

$$\begin{aligned} H^1(M; \mathbb{R}) &\cong \mathbb{R} \\ \left[-\frac{1}{2g(L) + 1} \phi, \frac{1}{2g(L) + 1} \phi \right] &= \overline{B}_{\|\cdot\|_T} = \left[-\frac{1}{2g(L) + 1}, \frac{1}{2g(L) + 1} \right] \end{aligned}$$

wobei dann entsprechend für die duale Thurston-Norm $\|\cdot\|_T^* : H_1(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (mit Ausnutzung der Symmetrie) folgt:

$$\overline{B}_{\|\cdot\|_T^*} = \left\{ \alpha \in H_1(M; \mathbb{R}), \frac{1}{2g(L) + 1} \phi(\alpha) \leq 1 \right\} = [-(2g(L) + 1)\hat{\alpha}, (2g(L) + 1)\hat{\alpha}]$$

Hier wird unter dem natürlichen Isomorphismus eines Vektorraums in seinen Bidualraum $H_1((M; \mathbb{R}) \cong H_1(M; \mathbb{R})^{**} \cong \text{Hom}(H^1(M; \mathbb{R}), \mathbb{R})$ die duale Thurston-Norm über der ersten Homologie aufgefasst und $\hat{\alpha}$ als Erzeuger der ganzzahligen Homologie, genauer gesagt, der Homologieklassse — nach obiger Konvention — *des Meridians* (also gilt $\phi(\hat{\alpha}) = 1$).

Bemerkung 5.4.2. Da dies keine Arbeit über die Eulercharakteristik einer Fläche ist, möge der Leser in den folgenden Beispielen zur Berechnung der Eulercharakteristik dualer Flächen seine bevorzugte Formel verwenden, so dass die expliziten Rechnungen übersprungen werden können.

Hopf Verschlingung

Das leichteste nicht-triviale Beispiel einer Verschlingung mit mehreren Komponenten ist der Hopf Link. Er besteht aus zwei ineinander verschlungenen Unknoten, L_1, L_2 . Betrachtet man nun zwei Scheiben und verklebt diese mit zwei umgekehrt verdrehten Bändern, so

erhält man die Hopf Verschlingung als Rand. Äquivalent möge man sich einen Kreisring $S^1 \times I$ nehmen, der zweifach verdreht ist und beobachtet, dass dieser eine Seifertfläche S darstellt.

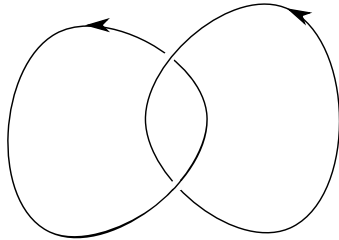


Abbildung 4: Der Hopf Link

Das Geschlecht dieser Seifertfläche ist 0, da es sich um eine Sphäre handelt, aus der zwei offene Scheiben entnommen wurde und somit $\chi_-(S) = 0$. Mit anderen Worten ist die obige Bedingung, dass die Thurston-Norm eine Norm ist, nicht erfüllt. Entsprechend existieren Elemente in $H^1(M_L; \mathbb{R})$ die sich zu 0 auswerten und durch die Linearität der Thurston-Norm entsteht ein degenerierter Untervektorraum (man überprüft leicht, dass die Fortsetzung nach \mathbb{R} auch verschwindet). Mit der Subadditivität verschwindet die Thurston-Norm auf dem Vektorraum $H^1(M; \mathbb{R})$, also ist die Einheitskugel nicht kompakt, sondern der gesamte Raum. Geht man jedoch zur dualen Norm über, erhält man

wieder ein kompaktes Polytop mit ganzzahligen Eckpunkten:

$$\overline{B}_{\|\cdot\|_T^*} = \{\alpha \in H_1(M; \mathbb{R}) \mid \sup_{\{\phi \in H^1(M; \mathbb{R})\}} \phi(\alpha) \leq 1\} = 0$$

Die folgenden zwei Beispiele sind aus Thurston's Arbeit [21] entnommen. Die Berechnungen von Thurston bedienen sich lauter Argumente, warum keine repräsentierende Fläche existieren kann, die eine geringere Komplexität als die bisher gefundenen hat. Wir werden natürlich unsere Anstrengungen belohnen und Theorem 1.1 nutzen, um die Thurston-Norm-minimierende Flächen bequemer festzustellen.

Whitehead Verschlingung

Die Whitehead Verschlingung ist ein Link der aus zwei Komponenten L_1, L_2 besteht. Offensichtlich berandet jede Komponente L_i in M_{L_i} eine Scheibe, die sich in M_L auf eine Kreisscheibe mit zwei entnommenen offenen Scheiben einschränkt (an den Stellen, an denen die offene Tubenumgebung des anderen Knotens die Scheibe durchdringt). Bei diesen Repräsentanten für l_1 beziehungsweise l_2 berechnet sich die Eulercharakteristik zu -1 , also gilt $\|\pm l_i\|_T \leq 1$. Offensichtlich gilt aber aufgrund der Nichttrivialität Gleichheit und in diesem Fall ist die Thurston-Norm eine tatsächliche Norm. Deswegen gilt $\|l_1 + l_2\|_T > 0$. Die Verschlingungszahl des Whitehead Links ist offensichtlich 0 (dies sieht man indem man eine Projektion betrachtet in dem die eine Komponente der Unknoten ist), jedoch haben die Randkomponenten jeder Einbettung eines Kreisring $S^1 \times I \hookrightarrow S^3$ Verschlingungszahl $\neq 0$ oder

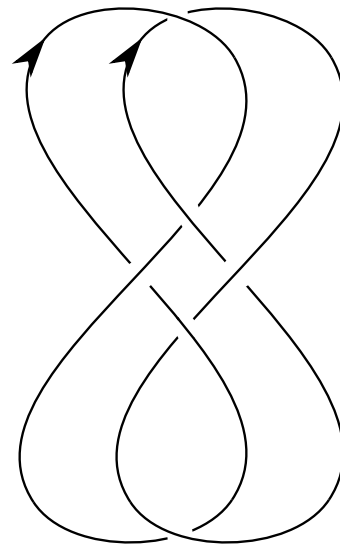


Abbildung 5: Die Whitehead Verschlingung

sind trivial (durch einen Äquator zu trennen). Also folgt, dass jede duale Fläche Geschlecht ≥ 1 hat und somit $2 \leq \|l_1 + l_2\|_T \leq \|l_1\|_T + \|l_2\|_T = 2$ für eine duale Fläche. Mit Theorem 1.1 ließe sich diese untere Abschätzung auch mit $\Delta_L = (L_1 - 1)(L_2 - 1) = L_1 L_2 - L_1 - L_2 + 1$ berechnen, da $\|l_1 + l_2\|_T \geq \|l_1 + l_2\|_A \geq (l_1 + l_2)(L_1 + L_2 - 0) = 2$. Folglich:

$$\begin{aligned} \|l_1 + l_2\|_T &= \|-(l_1 + l_2)\|_T \stackrel{*}{=} \|-l_1 + l_2\|_T = \|l_1 - l_2\|_T \\ &= 2 \end{aligned}$$

wobei die ausgezeichnete Gleichung gilt, da $\|-l_1 + l_2\|_T \notin \{0, 1\}$ aus obigen Gründen.
Behauptung: Die Thurston-Norm Einheitskugel und ihr Duales sind die folgenden:

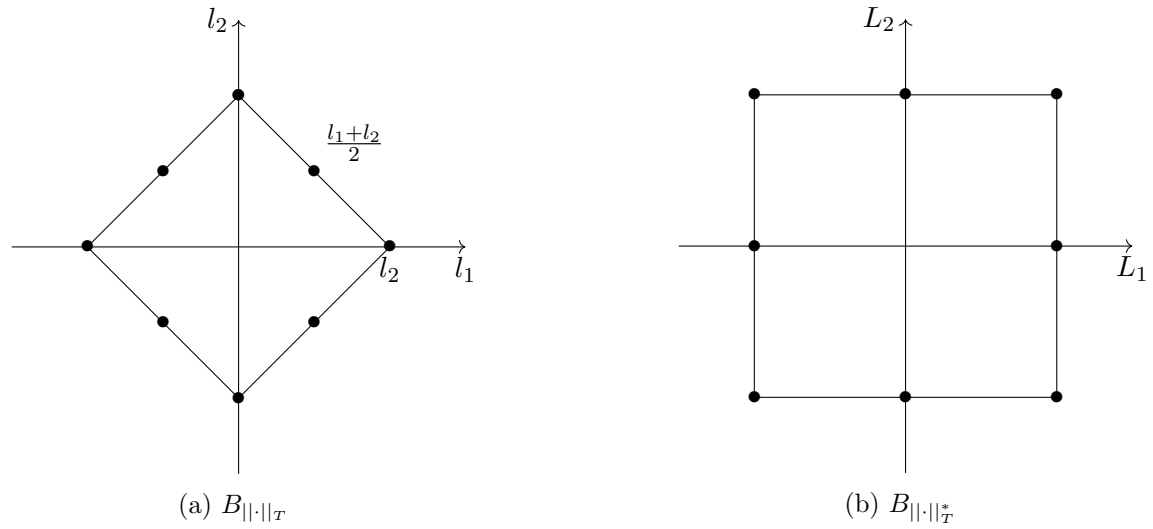


Abbildung 6: Einheitskugeln der Whitehead Verschlingung in $H^1(M; \mathbb{R})$ und $H_1(M; \mathbb{R})$

Die 8 berechneten Punkte liegen auf dem Rand von $B_{||\cdot||_T}$ (die Norm ist stetig), einer konvexen Teilmenge. Es ist eine leichte Übung, dass jede konvexe Teilmenge zweier nächster Punkte in Abbildung 6a im Rand dieser konvexen Teilmenge enthalten sein muss. Aufgrund der Monotonie folgt die Behauptung für die Einheitskugel. Für die duale Norm, berechnet man entweder 8 verschiedene Randpunkte, oder beobachtet für jedes $\alpha \in H_1(M; \mathbb{R})$ auf welchen Elementen (eine Gerade) $\phi \in H^1(M_L; \mathbb{R})$ das Supremum $\phi\alpha$ angenommen wird und sieht direkt das Ergebnis.

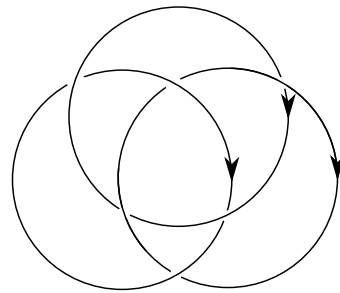


Abbildung 7: Die Borromäischen Ringe

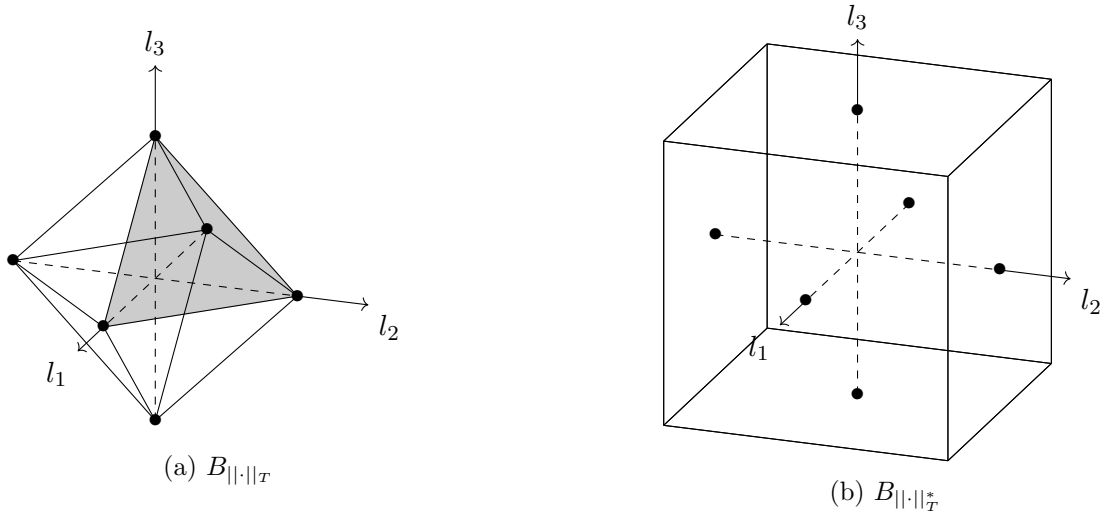


Abbildung 8: Die Einheitskugeln der Borromäischen Ringe

Borromäische Ringe

Seien $L = L_1 + L_2 + L_3$ die Borromäischen Ringe. Offensichtlich hat jede duale Fläche zu l_i , die Komponente L_i als Rand (sonst würde der Meridian im Kern von l_i liegen). Folglich hat also jede Fläche dual zu l_i mindestens 3 Randkomponenten. Da eine Sphäre mit 3 entnommenen offenen Scheiben¹³ (also eine abgeschlossene Scheibe mit 2 Durchlöcherungen) bereits dual zu l_i ist, gilt wieder $||\pm l_i||_T = 1$ für jedes i . Ähnlich wie beim letzten Beispiel der Whitehead Verschlingungen, möchten wir nun — in Dimension 3 — die berandenden Seiten der Einheitskugel durch Berechnung einiger Punkte feststellen und sie dadurch bestimmen. Es berechnet sich $\Delta_L = L_1 L_2 L_3 - \sum L_i L_j + \sum L_i - 1$ und somit berechnet sich die Alexander-Norm einer Kohomologiekategorie:

$$3 = ||\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3||_A \leq ||\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3||_T \leq ||l_1||_T + ||l_2||_T + ||l_3||_T = 3$$

Wegen $||\pm l_i||_T = 1$ und $||\frac{1}{3}(\pm l_1 \pm l_2 \pm l_3)||_T = 1$ folgt dass die Randseiten der Einheitskugel, die Standard-2-Simplices sind, die von den Einheitsvektoren aufgespannt werden. Somit berechnet sich $B_{||\cdot||_T}$ zu einem Oktahedron, siehe Abbildung 8a. Mit derselben Überlegung wie im vorhergehenden Beispiel, erkennt man strahlenweise die Form von $B_{||\cdot||_T^*}$ als Würfel.

¹³Wobei die eine Randkomponente von der entnommenen Komponente $\nu(L_i)$ aufgespannt wird.

Literatur

- [1] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 30(2):275–306, 1928.
- [2] G. Burde and H. Zieschang. *Knots*, volume 5 of *De Gruyter studies in mathematics*. Walter de Gruyter, Berlin and New York, 2nd rev. and extended ed edition, 2003.
- [3] S. Friedl. Reidemeister torsion, the thurston norm and harvey’s invariants. *Pacific Journal of Mathematics*, 230(2):271–296, 2007.
- [4] S. Friedl and T. Kim. The thurston norm, fibered manifolds and twisted alexander polynomials. *Topology*, 45(6):929–953, 2006.
- [5] S. Friedl and T. Kim. Twisted alexander norms give lower bounds on the thurston norm. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(9):4597–4618, 2008.
- [6] S. Friedl and S. Vidussi. Twisted alexander polynomials and symplectic structures. *American Journal of Mathematics*, 130(2):455–484, 2008.
- [7] S. Friedl and S. Vidussi. Twisted alexander polynomials detect fibered 3-manifolds. *arXiv preprint arXiv:0805.1234*, 2008.
- [8] S. Friedl and S. Vidussi. A survey of twisted alexander polynomials. In *The Mathematics of Knots*, pages 45–94. Springer, 2011.
- [9] C. Gordon and J. Luecke. Knots are determined by their complements. *Journal of the American Mathematical Society*, 2(2):371–415, 1989.
- [10] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge and New York, 2002.
- [11] M. W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York [u.a.], corr. 4. print edition, 1991.
- [12] M. Kreck. *Differential algebraic topology: From stratifolds to exotic spheres*, volume v. 110 of *Graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, Providence and R.I, 2010.
- [13] W. B. R. Lickorish. *An introduction to knot theory*, volume 175 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York, 1997.
- [14] C. McMullen. The alexander polynomial of a 3-manifold and the thurston norm on cohomology. *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 35(2):153–171, 2002.
- [15] J. Milnor. Infinite cyclic coverings. *Collected Papers*, 2:71–89, 2009.
- [16] E. E. Moise. Affine structures in 3-manifolds: V. the triangulation theorem and hauptvermutung. *Annals of Mathematics*, 56(1):96–114, 1952.

- [17] E. E. Moise. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, volume 47 of *Graduate texts in mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [18] D. Rolfsen. *Knots and links*, volume 7 of *Mathematics lecture series*. Publish or Perish, Berkeley and CA, 1976.
- [19] H. Seifert. *Über das Geschlecht von Knoten*. Springer, Berlin, 1934.
- [20] Y. Shinohara and D. W. Sumners. Homology invariants of cyclic coverings with application to links. *Transactions of the American Mathematical Society*, 163:101–121, 1972.
- [21] W. P. Thurston. *A norm for the homology of 3-manifolds*, volume 339 of *American Mathematical Society: Memoirs*. American Mathematical Society, Providence, 1986.
- [22] L. Traldi. The determinantal ideals of link modules. i. *Pacific J. Math.*, pages 215–222, 1982.
- [23] F. Waldhausen. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *The Annals of Mathematics*, 87(1):56, 1968.
- [24] G. W. Whitehead. *Elements of homotopy theory*, volume 61 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York and Berlin, corrected 3rd print edition, 1995.
- [25] J. H. C. Whitehead. On c^1 -complexes. *The Annals of Mathematics*, 41(4):809, 1940.
- [26] J. H. C. Whitehead. Manifolds with transverse fields in euclidean space. *Annals of Mathematics*, 73(1):154–212, 1961.