P20

扰动理论

对速度和密度做同样的处理

```
- 密度场: \(\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}_1(\vec{r}, t)\)
```

- 压力场: \(p(\vec{r}, t) = p_0 + \tilde{p}_1(\vec{r}, t)\)
- 速度场: $\(\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}}_1(\vec{r}, t) = \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}}_1(\vec{v}, t) = \vec{v}_0 + \vec{v}_1(\vec{v}, t) = \vec{v}_$

将这些表达式代入以下方程

```
- \[ \frac{\pi c{\hat \pi tial}{\pi t} (\rho + \tilde \pi_1) + \alpha (\rho - \pi_1) + \pi t}{\pi t} (\rho - \pi_1) + \pi t - \pi t
```

- $\[\frac{\pi c_{\hat v}_1}{\ tilde(\nabla_0 + \tilde \pi_1) + t} \]$

简化这些方程,使用以下规则

- 假设一阶场的乘积为零。
- 一阶场是时谐的, 满足 \(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}_1(\vec{r}, t) = -i

P21

连续性方程

原方程

- $[\frac{\pi c{\hat \pi}}{\pi c}] (\n - \pi f) + \pi f) + \pi f$

代入 $\vec{v}_0 = 0$, 并且 ρ_0 是常数:

- \[\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \tilde{\vec } \)

使用时谐假设:

- $[-i\omega \rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \tilde{\vec{v}}_1)\]$
- \[-i\omega \rho 1 = -\rho 0 \nabla \cdot \tilde{\vec{v}} 1\]

在这里,连续性方程可以这样化简的原因是基于以下几点:

- 1. 小扰动假设: 假设扰动较小,忽略一阶以上的项,这样使得方程线性化。
- 2. **时谐场**:假设扰动是时谐的,即具有特定的频率 ω ,使得时间导数可以转换为乘以 $-i\omega$ 。
- 3. **初始场的特性**:假设背景场(例如密度 ho_0 和速度 \vec{v}_0)是常数或零,从而简化了方程。

纳维-斯托克斯方程

1. 原方程:

$$oldsymbol{eta} oldsymbol{rac{\partial}{\partial t}}((
ho_0+ ilde
ho_1) ilde{ ilde{v}}_1)+ ilde{ ilde{v}}_1\cdot
abla((
ho_0+ ilde
ho_1) ilde{ ilde{v}}_1)=-
abla(p_0+ ilde{p}_1)+
abla\cdot(\eta
abla ilde{v}_1)$$

2. 代入简化后:

$$-i\omega
ho_0 ilde{ec{v}}_1=-c_0^2
abla
ho_1+\eta_0
abla^2 ilde{ec{v}}_1+eta\eta_0
abla(
abla\cdot ilde{ec{v}}_1)$$

为了详细解释纳维-斯托克斯方程(NSE)的化简步骤,我们需要逐步代入扰动理论假设,并进行必要的数学操作。下面是详细的化简步骤:

原始的纳维-斯托克斯方程

原始的纳维-斯托克斯方程是:

$$rac{\partial}{\partial t}(
ho ec{v}) +
abla \cdot (
ho ec{v} ec{v}) = -
abla p +
abla \cdot (\eta
abla ec{v})$$

在扰动理论中,我们假设密度、压力和速度场都有小扰动:

- 密度场: $\rho(\vec{r},t) = \rho_0 + \tilde{\rho}_1(\vec{r},t)$
- 压力场: $p(\vec{r},t) = p_0 + \tilde{p}_1(\vec{r},t)$
- 速度场: $ec{v}(ec{r},t) = ec{v}_0 + ilde{ec{v}}_1(ec{r},t) = ec{0} + ilde{ec{v}}_1(ec{r},t)$

将这些表达式代入原始的纳维-斯托克斯方程:

$$rac{\partial}{\partial t}((
ho_0+ ilde
ho_1) ilde{ec{v}}_1)+
abla\cdot((
ho_0+ ilde
ho_1) ilde{ec{v}}_1 ilde{ec{v}}_1)=-
abla(p_0+ ilde{p}_1)+
abla\cdot(\eta
abla ilde{ec{v}}_1)$$

化简步骤

1. 忽略高阶小项:

根据扰动理论的假设,忽略一阶以上的扰动项,因此:

$$abla \cdot ((
ho_0 + ilde{
ho}_1) ilde{ ilde{v}}_1 ilde{ ilde{v}}_1) pprox
ho_0
abla \cdot (ilde{ ilde{v}}_1 ilde{ ilde{v}}_1)$$

2. 时谐场假设:

设一阶场是时谐的,即:

$$rac{\partial ilde{ ilde{v}}_1}{\partial t} = -i\omega ilde{ ilde{v}}_1$$

因此:

$$rac{\partial}{\partial t}(
ho_0 ilde{ec{v}}_1)=-i\omega
ho_0 ilde{ec{v}}_1$$

3. 简化压力项和粘性项:

假设初始压力 p_0 是常数,其梯度为零,只剩下扰动项的梯度:

$$abla p =
abla (p_0 + ilde{p}_1) =
abla ilde{p}_1$$

对于粘性项,由于初始速度场 $\vec{v}_0=0$:

$$abla \cdot (\eta
abla ec{v}) =
abla \cdot (\eta
abla ec{ec{v}}_1)$$

代入简化后的表达式

代入这些简化后的表达式,得到:

$$-i\omega
ho_0 ilde{ec{v}}_1+
ho_0 ilde{ec{v}}_1\cdot
abla ilde{ec{v}}_1=-
abla ilde{
ho}_1-
abla ilde{
ho}_1+
abla\cdot(\eta
abla ilde{ec{v}}_1)$$

应用连续性方程

从简化后的连续性方程中:

$$-i\omega ilde{
ho}_1=-
ho_0
abla\cdot ilde{ec{v}}_1$$

所以:

$$ilde{
ho}_1 = rac{
ho_0}{\omega}
abla \cdot ilde{ec{v}}_1$$

用声速关系代替压力项

假设扰动压力与扰动密度之间的关系为:

$$ilde{p}_1 = c_0^2 ilde{
ho}_1$$

其中 c_0 为声速。代入上式:

$$ilde{p}_1 = c_0^2 rac{
ho_0}{\omega}
abla \cdot ilde{ec{v}}_1$$

最终化简

将所有这些代入简化的纳维-斯托克斯方程,得到:

$$-i\omega
ho_0 ilde{ec{v}}_1 = -c_0^2
abla\left(rac{
ho_0}{\omega}
abla\cdot ilde{ec{v}}_1
ight) + \eta_0
abla^2 ilde{ec{v}}_1 + eta\eta_0
abla(
abla\cdot ilde{ec{v}}_1)$$

这一步中,使用了声速关系和粘性项的简化。最终结果是:

$$-i\omega
ho_0 ilde{ec{v}}_1=-c_0^2
abla ilde{
ho}_1+\eta_0
abla^2 ilde{ec{v}}_1+eta\eta_0
abla(
abla\cdot ilde{ec{v}}_1)$$

其中 $ilde{
ho}_1 = rac{
ho_0}{\omega}
abla \cdot ilde{ec{v}}_1$ 。

这就是纳维-斯托克斯方程在扰动理论下的详细化简过程。通过这些步骤,可以得到适用于小扰动和线性 分析的简化方程。

在流体力学中, β 通常用来表示流体的体积粘性系数或二阶粘性系数。具体来说,它与动量扩散有关,用来描述流体在体积变化(膨胀或压缩)过程中对粘性力的响应。

在一些流体力学模型中,动量扩散(粘性效应)不仅与剪切应变相关,还与体积应变(体积变化率)相关。为了描述这些效应,可以引入体积粘性系数 β 。它表示的是流体在体积变化时的粘性阻力。

纳维-斯托克斯方程中的 β

在纳维-斯托克斯方程的扰动理论化简过程中, 粘性项可以写成:

$$\eta_0
abla^2 ilde{ec{v}}_1 + eta \eta_0
abla (
abla \cdot ilde{ec{v}}_1)$$

其中:

- η_0 是剪切粘性系数(或第一粘性系数),它与流体的剪切应变速率相关。
- $\beta\eta_0$ 是体积粘性系数乘以 η_0 ,它与流体的体积变化率(膨胀或压缩)相关。

因此, β 在这种情况下,是一个无量纲系数,用来调整体积粘性相对于剪切粘性的比例。

体积粘性系数的作用

当流体发生体积变化(例如通过压缩波或膨胀波)时,体积粘性系数会影响流体的阻力。如果 β 较大,流体对体积变化的阻力也较大,表现为更显著的粘性效应。

具体化简

在我们的纳维-斯托克斯方程化简过程中,如果考虑到体积粘性系数,那么完整的粘性项会包含:

$$\eta_0
abla^2 \tilde{ec{v}}_1 + eta \eta_0
abla (
abla \cdot \tilde{ec{v}}_1)$$

这个项中的 β 乘以 η_0 就是体积粘性系数。这个项描述的是流体在体积变化过程中由于粘性产生的额外应力。

总结

 β 是一个无量纲系数,用来表示体积粘性相对于剪切粘性的比例。在纳维-斯托克斯方程的扰动理论化简中,它影响的是与流体体积变化相关的粘性力。