P20

扰动理论

对速度和密度做同样的处理

- 密度场：\(\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}_1(\vec{r}, t)\)
- 压力场：\(p(\vec{r}, t) = p_0 + \tilde{p}_1(\vec{r}, t)\)
- 速度场：\(\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}}_1(\vec{r}, t) = \vec

将这些表达式代入以下方程

- \[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \tilde{\rho}_1) + \nabla \cdot ((\rho_0
- \[\frac{\partial}{\partial t} ((\rho_0 + \tilde{\rho}_1)\tilde{\vec{v}}_1) + \t

简化这些方程，使用以下规则

- 假设一阶场的乘积为零。
- 一阶场是时谐的，满足 \(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}_1(\vec{r}, t) = -i

P21

连续性方程

原方程

- \[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \tilde{\rho}_1) + \nabla \cdot ((\rho_0

代入 $\vec{v}_0 = 0$，并且 ρ_0 是常数：

- \[\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \tilde{\vec

使用时谐假设：

```
- \[-i\omega \rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \tilde{\vec{v}}_1)\]
- \[-i\omega \rho_1 = -\rho_0 \nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1\]
```

在这里，连续性方程可以这样化简的原因是基于以下几点：

1. **小扰动假设**：假设扰动较小，忽略一阶以上的项，这样使得方程线性化。
2. **时谐场**：假设扰动是时谐的，即具有特定的频率 ω，使得时间导数可以转换为乘以 $-i\omega$。
3. **初始场的特性**：假设背景场（例如密度 ρ_0 和速度 $\vec{v}_0$）是常数或零，从而简化了方程。

纳维-斯托克斯方程

1. 原方程：
   - $$\frac{\partial}{\partial t}((\rho_0 + \tilde{\rho}_1)\tilde{\vec{v}}_1) + \tilde{\vec{v}}_1 \cdot \nabla((\rho_0 + \tilde{\rho}_1)\tilde{\vec{v}}_1) = -\nabla(p_0 + \tilde{p}_1) + \nabla \cdot (\eta \nabla \tilde{\vec{v}}_1)$$
2. 代入简化后：
   - $$-i\omega\rho_0\tilde{\vec{v}}_1 = -c_0^2\nabla\rho_1 + \eta_0\nabla^2\tilde{\vec{v}}_1 + \beta\eta_0\nabla(\nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1)$$

为了详细解释纳维-斯托克斯方程（NSE）的化简步骤，我们需要逐步代入扰动理论假设，并进行必要的数学操作。下面是详细的化简步骤：

原始的纳维-斯托克斯方程

原始的纳维-斯托克斯方程是：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\eta\nabla\vec{v})$$

在扰动理论中，我们假设密度、压力和速度场都有小扰动：

- 密度场：$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}_1(\vec{r}, t)$
- 压力场：$p(\vec{r}, t) = p_0 + \tilde{p}_1(\vec{r}, t)$
- 速度场：$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0 + \tilde{\vec{v}}_1(\vec{r}, t) = \vec{0} + \tilde{\vec{v}}_1(\vec{r}, t)$

将这些表达式代入原始的纳维-斯托克斯方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}((\rho_0 + \tilde{\rho}_1)\tilde{\vec{v}}_1) + \nabla \cdot ((\rho_0 + \tilde{\rho}_1)\tilde{\vec{v}}_1\tilde{\vec{v}}_1) = -\nabla(p_0 + \tilde{p}_1) + \nabla \cdot (\eta\nabla\tilde{\vec{v}}_1)$$

化简步骤

1. **忽略高阶小项：**
   根据扰动理论的假设，忽略一阶以上的扰动项，因此：

   $$\nabla \cdot ((\rho_0 + \tilde{\rho}_1)\tilde{\vec{v}}_1\tilde{\vec{v}}_1) \approx \rho_0 \nabla \cdot (\tilde{\vec{v}}_1\tilde{\vec{v}}_1)$$

2. **时谐场假设：**
   设一阶场是时谐的，即：

   $$\frac{\partial \tilde{\vec{v}}_1}{\partial t} = -i\omega \tilde{\vec{v}}_1$$

   因此：

   $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 \tilde{\vec{v}}_1) = -i\omega \rho_0 \tilde{\vec{v}}_1$$

3. **简化压力项和粘性项：**
   假设初始压力 p_0 是常数，其梯度为零，只剩下扰动项的梯度：

   $$\nabla p = \nabla(p_0 + \tilde{p}_1) = \nabla \tilde{p}_1$$

   对于粘性项，由于初始速度场 $\vec{v}_0 = 0$：

   $$\nabla \cdot (\eta \nabla \vec{v}) = \nabla \cdot (\eta \nabla \tilde{\vec{v}}_1)$$

代入简化后的表达式

代入这些简化后的表达式，得到：

$$-i\omega \rho_0 \tilde{\vec{v}}_1 + \rho_0 \tilde{\vec{v}}_1 \cdot \nabla \tilde{\vec{v}}_1 = -\nabla \tilde{\rho}_1 - \nabla \tilde{p}_1 + \nabla \cdot (\eta \nabla \tilde{\vec{v}}_1)$$

应用连续性方程

从简化后的连续性方程中：

$$-i\omega \tilde{\rho}_1 = -\rho_0 \nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1$$

所以：

$$\tilde{\rho}_1 = \frac{\rho_0}{\omega} \nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1$$

用声速关系代替压力项

假设扰动压力与扰动密度之间的关系为：

$$\tilde{p}_1 = c_0^2 \tilde{\rho}_1$$

其中 c_0 为声速。代入上式：

$$\tilde{p}_1 = c_0^2 \frac{\rho_0}{\omega} \nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1$$

最终化简

将所有这些代入简化的纳维-斯托克斯方程，得到：

$$-i\omega\rho_0\tilde{\vec{v}}_1 = -c_0^2 \nabla \left(\frac{\rho_0}{\omega} \nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1 \right) + \eta_0 \nabla^2 \tilde{\vec{v}}_1 + \beta\eta_0 \nabla(\nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1)$$

这一步中，使用了声速关系和粘性项的简化。最终结果是：

$$-i\omega\rho_0\tilde{\vec{v}}_1 = -c_0^2 \nabla \tilde{\rho}_1 + \eta_0 \nabla^2 \tilde{\vec{v}}_1 + \beta\eta_0 \nabla(\nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1)$$

其中 $\tilde{\rho}_1 = \frac{\rho_0}{\omega} \nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1$。

这就是纳维-斯托克斯方程在扰动理论下的详细化简过程。通过这些步骤，可以得到适用于小扰动和线性分析的简化方程。

在流体力学中，β 通常用来表示流体的体积粘性系数或二阶粘性系数。具体来说，它与动量扩散有关，用来描述流体在体积变化（膨胀或压缩）过程中对粘性力的响应。

在一些流体力学模型中，动量扩散（粘性效应）不仅与剪切应变相关，还与体积应变（体积变化率）相关。为了描述这些效应，可以引入体积粘性系数 β。它表示的是流体在体积变化时的粘性阻力。

纳维-斯托克斯方程中的 β

在纳维-斯托克斯方程的扰动理论化简过程中，粘性项可以写成：

$$\eta_0 \nabla^2 \tilde{\vec{v}}_1 + \beta\eta_0 \nabla(\nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1)$$

其中：

- η_0 是剪切粘性系数（或第一粘性系数），它与流体的剪切应变速率相关。
- $\beta\eta_0$ 是体积粘性系数乘以 η_0，它与流体的体积变化率（膨胀或压缩）相关。

因此，β 在这种情况下，是一个无量纲系数，用来调整体积粘性相对于剪切粘性的比例。

体积粘性系数的作用

当流体发生体积变化（例如通过压缩波或膨胀波）时，体积粘性系数会影响流体的阻力。如果 β 较大，流体对体积变化的阻力也较大，表现为更显著的粘性效应。

具体化简

在我们的纳维-斯托克斯方程化简过程中，如果考虑到体积粘性系数，那么完整的粘性项会包含：

$$\eta_0 \nabla^2 \tilde{\vec{v}}_1 + \beta \eta_0 \nabla (\nabla \cdot \tilde{\vec{v}}_1)$$

这个项中的 β 乘以 η_0 就是体积粘性系数。这个项描述的是流体在体积变化过程中由于粘性产生的额外应力。

总结

β 是一个无量纲系数，用来表示体积粘性相对于剪切粘性的比例。在纳维-斯托克斯方程的扰动理论化简中，它影响的是与流体体积变化相关的粘性力。