

# 100 囚犯问题实验报告

## 一、问题描述

在监狱中有 100 名编号为 1 至 100 的囚犯，房间中有 100 个盒子，每个盒子中随机放置一张囚犯编号的纸条。每名囚犯可以打开最多 50 个盒子寻找自己的编号，不能修改盒子内容也不能与其他囚犯交流。

**释放条件：**若所有囚犯都能在指定次数内找到自己的编号，则全体获释；若有一人失败，则全员失败。

## 二、策略设计

### 1. 策略一：随机策略

- 每位囚犯随机选择  $K$ （默认 50）个盒子打开。
- 若在这  $K$  个盒子中找到了自己的编号，则成功；否则失败。
- 缺点：失败概率极高，全体成功概率极低。

### 2. 策略二：循环策略（Loop Strategy）

- 每位囚犯从与自己编号相同的盒子开始。
- 查看盒中编号后跳转至该编号对应的盒子，重复最多  $K$  次。
- 理论成功率在  $K = N/2$  时约为 31%。
- 数学基础：该策略成功的条件是盒子排列中没有长度超过  $K$  的循环。

## 三、程序实现

核心功能包括：交互选择模拟模式，单次模拟绘制成功/失败对比图，或者多次模拟绘制成功率折线图

核心函数包括：

### 1. generate\_boxes(N)

**功能：**模拟盒子中纸条的排列，生成一个  $0 \sim N-1$  的随机排列，代表每个盒子中的囚犯编号。

**参数：**N: 囚犯数（等于盒子数）

**返回：**NumPy 随机排列数组，长度为 N

## **2. simulate\_random\_strategy(N, K)**

**功能：**实现**随机策略**，每个囚犯随机打开 K 个盒子，若在其中找到自己的编号则成功，否则失败。

**参数：**N: 囚犯数量；K: 每个囚犯最多可尝试的盒子数量

**返回：**若所有囚犯都成功返回 True，否则返回 False

## **3. simulate\_loop\_strategy(N, K)**

**功能：**实现**循环策略**，囚犯从编号对应的盒子出发，按纸条上的编号跳转，最多跳 K 次寻找自己。

**参数：**N: 囚犯数量；K: 每个囚犯最多可跳转次数

**返回：**所有囚犯都在 K 次跳转内成功则返回 True，否则返回 False

## **4. run\_simulation(strategy\_func, N, K, T)**

**功能：**对某一策略进行 T 次模拟，统计策略成功的轮数和每次实验的结果。

**参数：**strategy\_func: 使用的策略函数；N: 囚犯数；K: 尝试次数；T: 模拟轮数

**返回：**成功率（0~1 之间小数）；每轮结果布尔列表（True 为全体成功）

## **5. repeat\_simulations(strategy\_func, N, K, T, repeat)**

**功能：**对指定策略进行多轮（repeat 次）完整模拟，每轮包含 T 次实验，打印各轮成功率和平均成功率。

**参数：**strategy\_func: 策略函数；N, K, T: 模拟设置参数；repeat: 重复次数

**返回：**每轮成功率组成的列表

四、实验设置

参数	数值
N（囚犯数）	100
K（尝试次数）	50
T（模拟轮次）	10000
repeat（重复模拟次数）	10

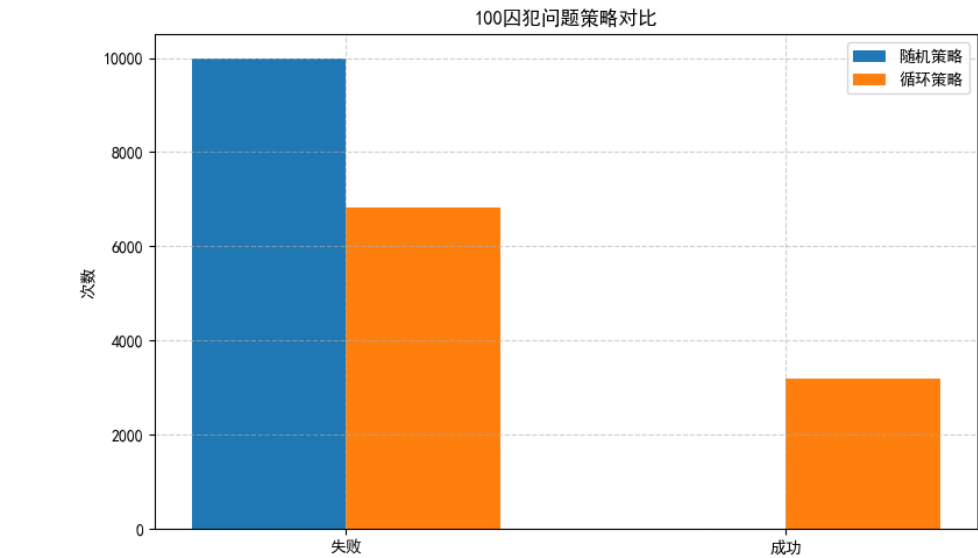
五、实验结果

1. 单轮模拟结果对比（T=10000）

策略类型	成功率（单轮）
随机策略	0.0000
循环策略	0.3016

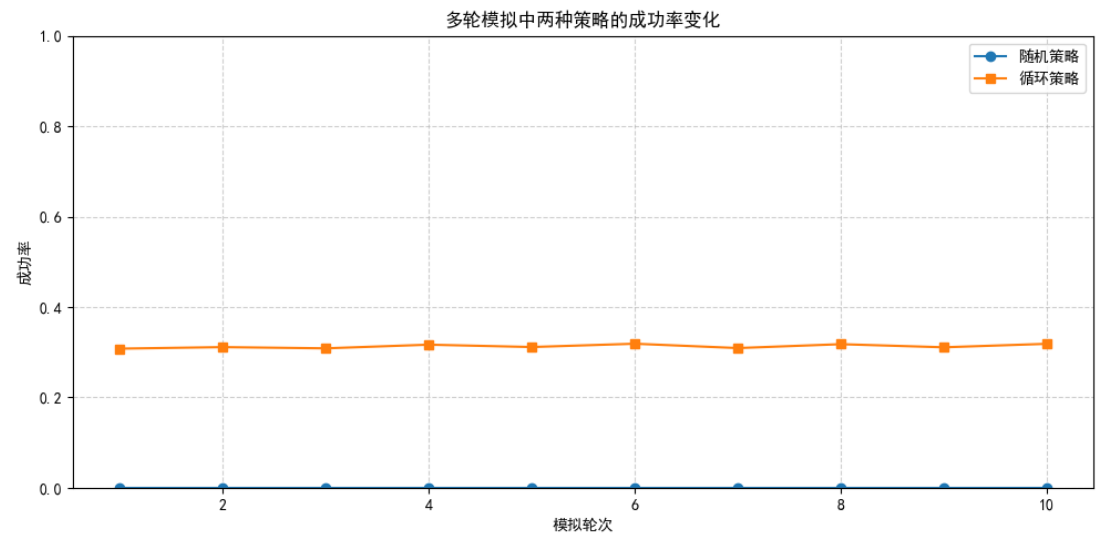
```
请选择模拟模式：
1 - 单次模拟，绘制成功/失败对比图
2 - 多次模拟，绘制成功率折线图
请输入选项（1 或 2）：1
开始单次模拟...
Simulating simulate_random_strategy: 100%|██████████| 10000/10000 [00:00<00:00, 40661.39it/s]
Simulating simulate_loop_strategy: 100%|██████████| 10000/10000 [00:01<00:00, 7697.98it/s]

随机策略成功率：0.0000
循环策略成功率：0.3016
```



2. 多轮模拟成功率变化 (repeat = 10)

策略	各轮成功率 (%)	平均成功率
随机策略	0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0	0.0000
循环策略	0.3140, 0.3077, 0.3144, 0.3056, 0.3188, 0.3092, 0.3087, 0.3153, 0.3089, 0.3120	0.3115



七、理论分析

1、随机策略

单个囚犯成功的概率为： $\frac{50}{100}$

假设独立进行，所有 100 位囚犯同时成功的概率为： $\left(\frac{50}{100}\right)^{100} \approx 7.89 \times 10^{-31}$

接近于 0，实际中几乎不可能成功。

2、循环策略

循环策略成功的前提是盒子编号排列中最长循环长度不超过尝试次数  $K=50$ 。排列组合理论指出，随机排列中最大循环长度超过  $N/2$  的概率约为：

$$1 - \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{k}$$

因此，循环策略的成功概率可以近似为： $1 - \ln(2) \approx 0.3068$

## 八、结论

- 循环策略显著优于随机策略，且在大量模拟中结果稳定；
- 实验验证了理论计算，证明了最优策略是基于排列结构的循环探索；
- 随机策略由于独立选择盒子，不具备全局结构信息，无法突破概率极限。