

《100 囚犯抽签问题仿真》实验报告

2023141461086 刘禹桥

一、实验背景与问题描述

100 囚犯问题是一个经典的概率问题：每位囚犯必须在只打开 K 个盒子的限制下，找到包含自己编号的纸条，若全部囚犯都成功则整体逃脱，否则失败。本实验对比两种策略在多轮仿真下的总体成功率与行为分布：

1. 策略一（随机策略）：每人随机打开 K 个盒子；
2. 策略二（循环策略）：每人从自己编号对应的盒子开始，跳转至下一个编号继续查找，最多查找 K 次。

二、算法与实现

1. 算法说明

策略一（随机策略）：每位囚犯随机选择 K 个不重复的盒子，若其中有自己的编号即为成功，否则失败；

策略二（循环策略）：利用排列中的“置换循环结构”，每位囚犯按固定跳转路径查找自己的编号，成功当且仅当所有循环长度 $\leq K$ 。

2. 参数定义

N ：囚徒与盒子数量，默认 100；
 K ：每位囚徒最大尝试次数，默认 50；
 T ：仿真实验轮数，推荐 > 10000 。

三、仿真实验与结果分析

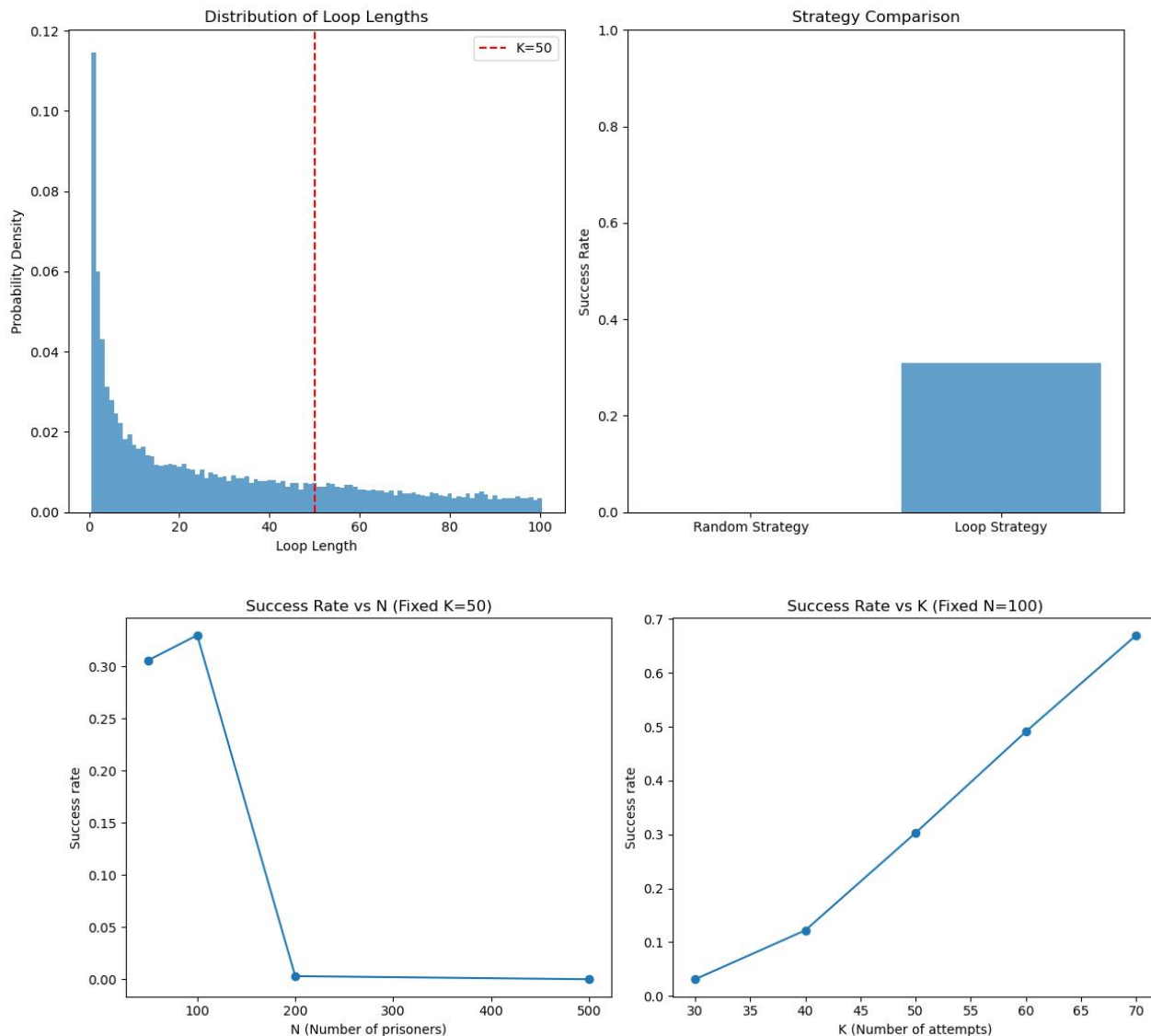
1. 实验设置

使用 Python3.12.3 实现完整仿真，固定 $N=100, K=50, T=10000$ 进行核心实验，记录每一轮是否成功，并计算总体成功率。

2. 实验结果

策略一 成功率极低，接近 0；

策略二 成功率稳定在 ≈ 0.31 左右。



四、理论解释与深入分析

1. 为什么循环策略有效？

在循环策略中，每一次试图找到自己的编号，本质上是沿着排列中的一个置换循环进行搜索。成功的充分必要条件是所有循环长度 $\leq K$ 。

理论上，当 N 很大、 $K=N/2$ 时，总体成功率趋近于 $1 - \ln(2) \approx 0.3068$ ；

随机策略成功率为 $(K/N)^N \approx 7.9e-31$ ，几乎不可能成功。

2. 数学机制简述

一个置换可以唯一地分解为若干个不相交的循环。

若最大循环长度 $\leq K$ ，则所有囚徒必然能在 K 次内找到自己的编号。

五、扩展分析

本实验进一步探索了不同 N 与 K 对成功率的影响：

结论如下：

成功率随 K 增加而显著提升，尤其在 $K > N/2$ 附近；

成功率随 N 增大略有下降，但影响较缓。

六、结论与总结

循环策略显著优于随机策略，其成功率与排列中最大循环长度密切相关；

该实验揭示了排列结构与概率之间的深刻联系，是概率建模与仿真研究的经典案例；

对于理解算法行为与统计模拟具有良好教学与研究意义。