

О дискретных кривизнах деревьев

Сойер Джек Робертсон

Абстрактный

Существует несколько переплетающихся понятий дискретной кривизны на графах. Многие подходы используют оптимальную транспортную метрику на ее вероятностном симплексе или матрицу расстояний графа. Поскольку каждый из этих ингредиентов хорошо понятен, когда базовый граф является деревом, в этой заметке мы рассматриваем существующие и получаем новые формулы для трех различных типов кривизны на графах. Попутно мы получаем: результат сравнения для рассматриваемых кривизн, теорему о степени-диаметре для деревьев и комбинаторное тождество для определенных сумм расстояний на деревьях.

Ключевые слова: кривизна на графах, древовидные графы, оптимальная транспортировка, матрица расстояний графа

MSC2020: 05C05, 05C12, 05C21, 05C10

1 Введение

Дискретные понятия кривизны на графах были предметом активных исследований в течение многих лет. Априори существуют глубокие вопросы, которые предполагают, что такую концепцию было бы сложно построить в общем случае; например, является ли кривизна свойством каждого узла в графе, каждого ребра или и того, и другого; или насколько далеко от заданного узла или ребра следует изучать структуру окружающего графа, чтобы получить подходящую локальную формулировку кривизны в каждом конкретном месте. Несмотря на эти проблемы, существует много таких формулировок, которые удовлетворяют мощным свойствам (например, оценки собственных значений, теоремы типа Бонне-Майерса). В этой статье мы сосредоточимся на двух семействах дискретной кривизны, которые основаны, соответственно, на оптимальной транспортной метрике и матрицах расстояний графа.

В первом случае мы рассматриваем кривизну Риччи Оливье, изначально определенную для цепей Маркова на метрических пространствах [11] (обозначается k_{ij} , или Π_{ij} (см. Определение 2.1), и последующую модификацию Линя,

Лу и Яу в [9] (обозначается k , см. Определение 2.2). Оба эти подхода к кривизне на графах используют оптимальную транспортную метрику между вероятностными мерами, связанными с простым случайным блужданием на графе, и, что примечательно, определены на каждом ребре в данном графе.

Между тем, за последние три года появилось несколько новых подходов к дискретной кривизне на графах, которые используют метрику кратчайшего пути (и другие метрики, см. [5, 6]), определенную на узлах, включая метрику Штейнбергерера в [15] (обозначенную k , см. Определение 2.3). Для сравнения, эта формулировка определяет кривизну как свойство каждого узла в данном графе.

Каждое из этих понятий кривизны проиллюстрировано на фиксированном графике с десятью узлами на рис. 2. Цель этой заметки — пролить свет на довольно простую и, по-видимому, недооцененную грань, которая есть у всех этих понятий: когда базовый граф — дерево, оптимальная транспортная метрика и некоторые линейные системы уравнений, включающие матрицу расстояний графа, имеют замкнутые и относительно дружелюбные решения. Здесь дерево — это конечный, простой граф, который связан и ациклический.

Это наблюдение может быть использовано для получения явных формул для кривизны ребер и узлов в древовидном графе, что и является основным вкладом этой статьи. Мы суммируем каждую из формул на рис. 1. Основываясь на этих результатах, мы можем предоставить сравнения этих понятий как семейства, как объяснено в теореме 1.1. Мы говорим, что граф $T = (V, E)$ является комбинаторным деревом, если он является деревом и имеет веса ребер, равные единице, и мы говорим, что узел $i \in V$ является листом (соответственно, листовым ребром), если он имеет ровно один соседний узел (соответственно, инцидентен листу).

Кривизна	Формула	Формула (невзвешенная)	Расположение
или, α $\frac{1}{2}$ к i, j к i, j с k, j	$\frac{1}{d(i, j)} \sum_{x \in V} \frac{w_{ix}^2}{d(i, x)} + \frac{w_{jy}^2}{d(j, y)}$ $\frac{1}{d(i, j)} \sum_{x \in V} \frac{w_{ix}^2}{d(i, x)} + \frac{w_{jy}^2}{d(j, y)}$ $\frac{n/2 - d(i, j)}{e}$	$\frac{2(1-\alpha)}{d(i, j)} (1/d(i, j) + 1/d(j, j) - 1)$ $\frac{2}{d(i, j)} (1/d(i, j) + 1/d(j, j) - 1)$ $\frac{n}{n-1} (2 - d(i, j))$	Следствия 3.3–3.4 Следствия 3.5 - 3.6 Следствие 4.2

Рисунок 1. Эта таблица содержит формулы для трех различных понятий дискретных кривизн, предполагая, что базовый граф является деревом $T = (V, E, w)$. Здесь мы берем $i, j \in V$ в качестве любых узлов, которые не обязательно являются смежными. Член σ_{ix} равен 1, если ребро $\{i, x\}$ находится на кратчайшем пути между i, j , и равен 1 в противном случае. Мы используем d_i для обозначения взвешенной степени i и $|d|$ для обозначения комбинаторной степени i , и мы обозначаем через d_{ij} расстояние по кратчайшему пути между $i, j \in V$. Мы опускаем формулу для кривизны Оливье-Риччи, когда параметр α лежит в $[0, 1/2]$ из-за его длины при наборе, см. уравнение (6).

Теорема 1.1. Пусть $T = (V, E)$ — комбинаторное дерево, и предположим, что $|V| \geq 3$. Пусть $\{i, j\} \in E$ — фиксированное ребро.

(i) Если $\{i, j\}$ не является листовым ребром и $\alpha \in [0, 1)$, то

$$0 \leq \kappa_{ij}^{\text{или}, \alpha} \leq \max_{x \in \{i, j\}} \frac{4}{d_x} \leq \frac{1}{2}.$$

1 (ii) Если i — листовый узел, а $\alpha \in [0, 1)$ таково, что $1 + d_j$ — целое число (например, если $\alpha = 1/2$), то

$$0 \leq \kappa_{ij}^{\text{или}, \alpha} \leq \frac{8}{d_j + 1}.$$

Примечательно, что каждое из этих понятий кривизны неположительно на нелистовых и нелистовых ребрах; или, α и, за возможным исключением κ в зависимости от выбора α , неотрицательно на листовых ij и их инцидентных ребрах. Доказательство этого результата является прямым следствием формул, которые мы получаем и выделяем в последующих разделах. Мы включаем доказательство в раздел 5.

Второе интересное применение наших формул для дискретной кривизны на деревьях принимает форму следующей теоремы о степени-диаметре. Мы определяем диаметр дерева как максимальное расстояние кратчайшего пути между любой парой узлов.

Теорема 1.2. Пусть $T = (V, E)$ — комбинаторное дерево с диаметром D . Тогда

$$D \leq \frac{n-1}{\min_{i \in V} d_i}.$$

Эта граница точна с точностью до постоянных множителей в обоих экстремальных случаях графов путей. (где это читается как $n-1$) и звездные графы (с одним центральным узлом и $n-1$ ребрами ко всем окружающим узлам, и в этом случае это читается как 2). Теорема 1.2 немедленно следует из следствия 4.2 и следующей обратной теоремы типа Бонне-Майерса, которую мы сформулируем ниже.

Теорема 1.3 (обратная теорема Бонне-Майерса). Пусть $G = (V, E, w)$ — граф с диаметром D . Предположим, что матрица расстояний кратчайшего пути D графа G допускает решение $\kappa \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Тогда справедливо $\kappa \in \mathbb{R}^{n \times n}$ к уравнению $D\kappa =$

$$\kappa \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \frac{n}{D}.$$

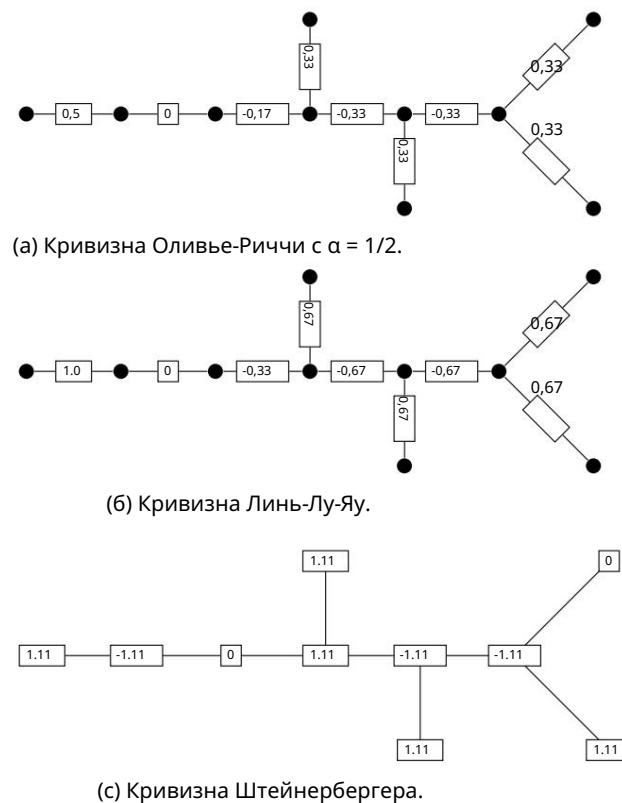


Рисунок 2. Иллюстрация трех различных рассматриваемых понятий кривизны. Базовый граф представляет собой невзвешенное дерево на десяти узлах.

Мы предлагаем доказательство этого результата в разделе 5. Отметим, что эта теорема похожа на обратную теорему Бонне-Майерса в [15, теорема 2] с двумя отличиями: во-первых, она сильнее в плане смягчения требования, чтобы кривизна к с графика была неотрицательной, но слабее в плане того, что мы предполагаем существование решения линейной системы $D_k = p1$, свойство, которое всегда выполняется для деревьев, но не обязательно должно иметь место в общем случае (это явление является предметом продолжающихся исследований сообщества, см., например, [3, 4]).

По пути получения вышеупомянутых результатов мы доказываем, казалось бы, интересное комбинаторное тождество, включающее суммы расстояний на графах (см. Лемму 4.1).

1.1 Сопутствующие работы и резюме вкладов

Деревья регулярно появлялись в работах, посвященных кривизне на графах. Некоторые примеры результатов, касающихся кривизн Оливье-Риччи и Лин-Лу-Яу на деревьях, включают работу Йоста и Лю в [8], а также, например, Рублевой [14]. В этой статье мы выбираем подход с учетом весов (α) для ленивой случайной меры блуждания m

и, таким образом, по нашему лучшему впечатлению, формулы в следствии 3.3 и следствии 3.5 не появлялись в этих точных формах. Более того, наша формула для расстояния 1-Вассерштейна между этими мерами в теореме 3.2 более обтекаемая и прямая, чем аргументы, использованные в более ранних работах. Что касается кривизны Штейнербергера, случай деревьев рассматривался неявно в [3] и напрямую в [4]. В некотором смысле эти результаты естественным образом следуют из исторических результатов, которые восходят к Грэму и Ловасцу [7]. Мы расширяем формулы для кривизны на деревьях на взвешенный случай. Мы также включаем для заинтересованного читателя репозиторий GitHub, содержащий скрипт для вычисления этих понятий кривизны на деревьях.¹

¹ <https://github.com/sawyer-jack-1/curvature-on-trees>

1.2 План данной статьи

В разделе 2 мы рассмотрим некоторые обозначения и математические основы. В разделе 3 мы разрабатываем формулы для транспортных понятий кривизны на деревьях. В разделе 4 мы разрабатываем формулы для кривизны Штейнбергер на деревьях. Наконец, в разделе 5 мы включаем доказательство теоремы 1.1.

2. Обозначения и математическая основа

2.1 Справочная информация о графах и матрицах

Рассмотрим граф $G = (V, E, w)$, где $V = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество из n узлов, E — множество из $\frac{B}{2}$ это неориентированных ребер (без петель или кратных ребер), а $w = (w_e)_{e \in E}$ — совокупность строго положительных весов ребер. Мы пишем $w_{ij} = w_{ji} = w_e$ взаимозаменяемо для обозначения веса ребра $e = \{i, j\} \in E$. Мы пишем $i \sim j$, если $\{i, j\} \in E$.

Обозначим через A матрицу смежности графа G , элементы которой задаются формулой

$$A_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & \text{если } i \sim j \\ 0 & \text{противном случае} \end{cases}.$$

Обозначим через $|d_i|$ число ребер, инцидентных i , а через d_i — взвешенную степень узла $i \in V$:

$$d_i = \sum_{j: j \sim i} w_{ij}.$$

Матрица D будет относиться к диагональной матрице с элементами D_{ii} , равными степени каждого узла d_i , $1 \leq i \leq n$. Определим объем графика по формуле

$$\text{объем}(G) = \sum_{i \in V} d_i.$$

Обратите внимание, что $\text{vol}(G) = 2 \sum_{e \in E} w_e$. Матрица Лапласа, обозначаемая L , задается как $L = D - A$. Мы определяем индексно-ориентированные ребра E' с помощью набора:

$$E' = \{(i, j) : i, j \in V, i \sim j, i < j\},$$

и ориентированная на узел-ребро матрица инцидентности $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ по входу по значениям

$$B_{ej} = \begin{cases} 1 & \text{если } ej = (i, \cdot) \\ -1 & \text{если } ej = (\cdot, i) \\ 0 & \text{противном случае} \end{cases}, \quad i \in V, ej \in E. \quad (1)$$

где $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ — это любое перечисление ребер. Обратите внимание, что независимо от выбора ориентации на ребрах (т. е. выбора E'), $L = B \text{diag}(w_{e_1}, w_{e_2}, \dots, w_{e_m}) B^T$. Мы выбираем ориентацию ребер относительно индексации на узлах только для конкретности. Стоит отметить, что B действует на функции $J : E' \rightarrow \mathbb{R}$ посредством умножения матриц следующим образом:

$$(BJ)_e = \sum_{e=(j, \cdot)} D_{jj} J_{ej} - \sum_{e=(\cdot, i)} D_{ii} J_{ei}.$$

Путь P — это упорядоченный список узлов $P = (P_1, \dots, P_k)$ такой, что $P_\ell \sim P_{\ell+1}$ для всех ℓ и $P_\ell \neq P_{\ell+1}$ для $1 \leq \ell < k$. Мы говорим, что P имеет длину k . Мы говорим, что P является простым, если ни одно ребро не встречается в P более одного раза. G является связным, если он содержит путь между каждой парой узлов $i, j \in V$.

Для $i, j \in V$ мы обозначаем через d_{ij} сумму весов ребер вдоль пути в G , который начинается в i и заканчивается в j и имеет минимальный такой вес. То есть,

$$d_{ij} = \min_{P: i \rightarrow j} \sum_{\ell=1}^k w_{P_\ell P_{\ell+1}} : P = (i = i_1, i_2, \dots, i_k = j) \text{ — простой путь в } G.$$

Обозначим через D матрицу $n \times n$ с элементами, заданными $D_{ij} = d_{ij}$. Если G — дерево и $i, j \in V$, то путь между i, j наименьшей длины является единственным и простым. Назовем этот путь геодезической от i до j и обозначим его P_{ij} . Для матрицы $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

мы обозначаем через B^+ $\mathbb{R}^{n \times n}$ ее псевдообратная матрица Мура-Пенроуза [2], которая является уникальной матрицей, удовлетворяющей следующим четырем свойствам:

(i) $BB^+B = B$, (ii) $B + BB^+ = B^+ + B$, (iii) BB^+ симметричен и (iv) B^+B симметричен.

Обозначим через $P(V)$ симплекс вероятностных мер на V , то есть,

$$P(V) = \{ \mu \in \mathbb{R}^V : \mu_i \geq 0 \text{ для каждого } i \in V, \sum_{i \in V} \mu_i = 1 \}.$$

где $1 \in \mathbb{R}^V$ — вектор всех единиц. Для $\mu, \nu \in P(V)$ мы определяем их оптимальное транспортное расстояние, или 1-расстояние Вассерштейна, с помощью следующей линейной программы:

$$W_1(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{i, j \in V} \pi_{ij} d_{ij} : \pi \in \mathbb{R}^{V \times V}, \pi_{ij} \geq 0 \text{ для каждого } i, j \in V, \sum_{j \in V} \pi_{ij} = \mu_i, \sum_{i \in V} \pi_{ij} = \nu_j. \quad (2)$$

На графах $W_1(\mu, \nu)$ допускает формулировку как задача потока минимальной стоимости, а именно

$$W_1(\mu, \nu) = \inf_{\{e \in E : J_e \in \mathbb{R}, B_e J_e = \mu - \nu\}} \sum_{e \in E} |J_e| w_e. \quad (3)$$

Эквивалентность уравнений (2) и (3) нетривиальна, но может быть показана с некоторой осторожностью, см., например, [12, Глава 6] для вывода.

2.2 Транспортные кривизны

Первые два понятия кривизны, которые мы рассматриваем, используют оптимальную транспортную метрику W_1 .

Прежде чем продолжить, введем немного обозначений. Для $i \in V$ и $\alpha \in [0, 1]$ определим меру α -ленивого случайного блуждания, обозначаемую $m_i^{(\alpha)}$ $P(V)$ поэлементно по формуле

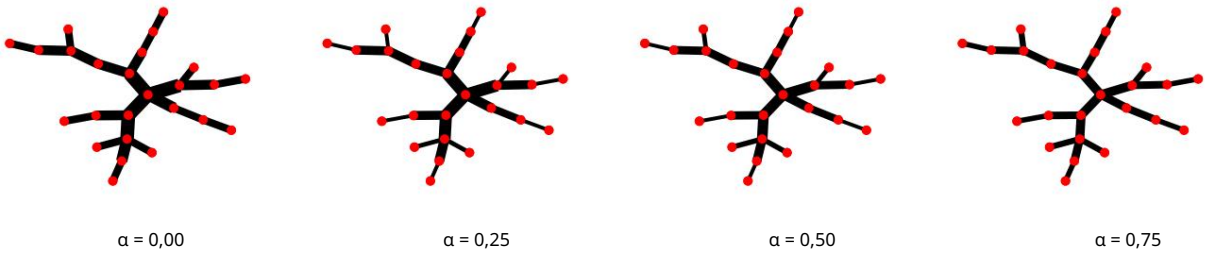
$$m_i^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} \alpha & \text{если } x = i, \\ \frac{(1-\alpha)w_{ix}}{d_i} & \text{если } x \neq i \text{ и } x \in V. \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

Вероятностная мера m на G при α — это одношаговая мера перехода α -ленивого простого случайного блуждания условия начала в узле i . Теперь мы можем определить кривизну Оливье-Риччи и Линь-Лу-Яу на графах следующим образом.

Определение 2.1 (Кривизна Оливье-Риччи [11]). Пусть $G = (V, E, w)$ — любой связный граф и $i, j \in V$. Определим кривизну Оливье-Риччи графа G между i, j по формуле

$$K_{ij} = \frac{W_1(m_i^{(\alpha)}, m_j^{(\alpha)})}{d_{ij}}.$$

Рисунок 3. Визуализация кривизны Оливье-Риччи к ij 25 узлов с различным выбором α на каждом ребре древовидного графа на ij . Ширина края пропорциональна $1 - k_{ij}$.



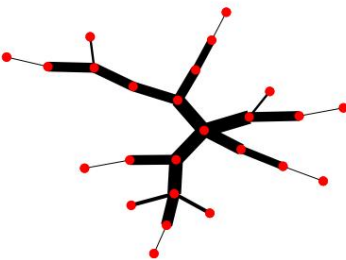
Важно отметить, что существует приличная степень вариабельности от статьи к статье (α) определяется.² Когда речь идет о выбирают подход в стиле теплового ядра; авторы [8] принимают $\alpha = 0$, в авторе [9], который α авторы, например, [16] предпочитает опустить зависимость от весов в определении (α) и включить их исключительно в результирующие транспортные расходы. В этой статье мы принимаем (α) подход, включающий веса, что означает, что мы используем веса как в мерах m , так и в M базовой метрике d_{ij} , которая вносит вклад в транспортные расходы. Мы иллюстрируем пример кривизны Оливье-Риччи на рис. 3.

В [9] авторы Лин, Лу и Яу предложили подход, позволяющий устранить зависимость $/(1 - \alpha)$ возрастает и ограничена на $[0, 1)$ и, на α и доказал, что функция α к ij таким образом, допускает предел слева при $\alpha = 1$. На основе их подхода мы имеем следующее определение, которое наглядно представлено на рис. 4.

Определение 2.2 (кривизна Лин-Лу-Яу [9]). Пусть $G = (V, E, w)$ — любой связный граф и $i, j \in V$. Определим кривизну Лин-Лу-Яу графа G между i, j по формуле

$$lly_{ij} = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} k_{ij}(\alpha) = 1 + \frac{k_{ij}(\alpha) - 1}{\alpha}.$$

Рисунок 4. Визуализация кривизны Лин-Лу-Яу к ij 25 узлов. Ширина ребра пропорциональна $1 - k_{ij}$ на каждом ребре древовидного графа на 25.



2.3 Кривизна, основанная на расстоянии

В этом подразделе мы введем формулировку кривизны Штейнербергера, определенную следующим образом.

² В некотором смысле причина этого в том, что в [10] Оливье указывает, что до тех пор, пока m «измеримо» зависит от i , его можно использовать для построения подходящего понятия кривизны для цепи Маркова на метрическом пространстве.

Определение 2.3 (кривизна Штейнербергера [15]). Пусть $G = (V, E, w)$ — любой граф и $i \in V$. Пусть κ^c определяется уравнением R

$$\kappa^c = D^+(i).$$

Для $i \in V$, мы определяем кривизну Штейнербергера G в точке i , обозначаемую κ^c , быть предоставленным i -м запись κ^c .

Обычно нужно проявлять некоторую осторожность при определении κ^c как решение уравнения $\kappa^c = D^+(i)$, поскольку $D\kappa^c$ это может вообще не допускать никакого решения, а когда это так, то решение будет вообще неединственным. Поэтому в этой статье мы принимаем использование D^+ для конкретности.

Однако для деревьев матрица расстояний D невырождена [7] и, таким образом, на самом деле $D^+ = D^{-1}$ не, так что это представляет никаких трудностей.

Замечание 2.4. На этом стыке мы отмечаем, что два других варианта кривизны на графах, а именно вариант Девриндта и Ламбиотта [5], а также вариант Девриндта, Оттолини и Штейнербергера [6], тесно связаны с кривизной Штейнербергера, которая становится предметом рассмотрения в этой статье. Эти понятия, с точностью до масштабного коэффициента, строятся таким же образом, как κ^c за исключением использования эффективной матрицы сопротивления R вместо матрицы расстояний D . Как это и происходит, когда базовый граф является деревом, все три эти формулировки идентичны с точностью до различных (положительных) масштабных коэффициентов, которые, возможно, зависят от графа и его весов. Поэтому формулы и сравнительные результаты, полученные для κ^c , могут быть легко распространены и на эти случаи.

3 Формулы для расчета кривизны, обусловленной транспортировкой

В этом разделе мы получим формулы для кривизны Оливье-Риччи и Лин-Лу-Яу для взвешенных деревьев. Основной рабочей лошадкой, которая значительно упрощает нашу обработку, является следующая лемма, которая хорошо известна (см., например, [1, 13] для дополнительной информации). Мы набросаем ее доказательство.

Предложение 3.1. Пусть $T = (V, E, w)$ — взвешенное дерево, $\mu, \nu \in P(V)$. Для ориентированного ребра $e = (i, j) \in E'$ определим κ_μ^c R

$$\kappa_\mu^c(e = (i, j)) = \mu(k), k \in V \setminus (i; e)$$

ребра $e = (i; e) \in V$ — множество узлов, принадлежащих поддереву с корнем i , полученному из T путем удаления из V (и аналогично для κ_ν^c). Тогда $J = \kappa_\mu^c - \kappa_\nu^c$ — единственное решение линейной системы $B_J = \alpha - \beta$, и отсюда следует, что

$$W_1(\mu, \nu) = \sum_{e \in E'} \mu | \kappa_\mu^c(e) - \kappa_\nu^c(e) |. \quad (4)$$

Доказательство. Это следует из небольшого количества линейной алгебры. Ядро B_T — это в точности постоянные векторы (поскольку, в частности, T связно), и поэтому область значений B — это в точности множество векторов с нулевым средним. По теореме о ранге-нуле B имеет тривиальное ядро, и, таким образом, уравнение $B_J = \mu - \nu$ имеет в точности одно решение относительно переменной J . Достаточно проверить, что $\kappa_\mu^c - \kappa_\nu^c$ образует такое решение, что несложно. \square

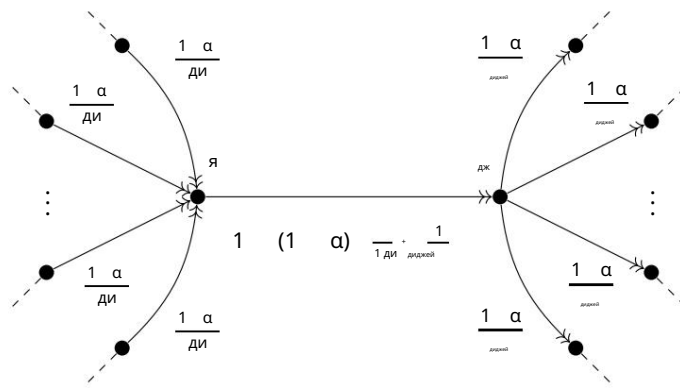
Этот факт подводит нас к сути вопроса, которая изложена в следующей теореме.

Теорема 3.2. Пусть $T = (V, E, w)$ — взвешенное дерево и пусть $i, j \in V$ — фиксированные. Имеем, что (a)

$W_1(\mu^{\alpha}, \mu^{\alpha}_{dj})$ можно выразить следующими формулами. Во-первых, если $\{i, j\} \in E$, то имеем

$$W_1(\mu^{\alpha}, \mu^{\alpha}_{dj}) = \sum_{x=j}^x \mu^{\alpha}_{dx} \left(\frac{w_{ix}(1-\alpha)}{d_i} + y_j \right) + \sum_{x=j}^x \mu^{\alpha}_{dx} \left(\frac{w_{jy}(1-\alpha)}{d_j} + x_i \right) + \sum_{x=j}^x \mu^{\alpha}_{dx} \left(\frac{w_{ij}}{d_i + d_j} \right) \quad \text{если } \alpha \in [0, 1/2)$$

$$W_1(\mu^{\alpha}, \mu^{\alpha}_{dj}) = \sum_{x=j}^x \mu^{\alpha}_{dx} \left(\frac{w_{ix}(1-\alpha)}{d_i} + y_j \right) + \sum_{x=j}^x \mu^{\alpha}_{dx} \left(\frac{w_{jy}(1-\alpha)}{d_j} + x_i \right) + \sum_{x=j}^x \mu^{\alpha}_{dx} \left(\frac{w_{ij}}{d_i + d_j} \right) \quad \text{если } \alpha = 1/2$$



(a) (a)

Рисунок 5. Иллюстрация возможного потока между i и j в случае, когда i, j являются смежными. Для простоты мы принимаем дерево невзвешенным. Узлы i, j отображаются слева и справа от центра соответственно, а все остальные метки указывают значения потока на ребрах. Ориентации указываются локально стрелками, а все остальные ориентации на ребрах несущественны.

Если $i = j$, то имеем,

$$\text{Ш1}(m_{я}^{(\alpha)}, j, (m_{я}^{(\alpha)})) = d_{ij} + (1 - \alpha) \left(\frac{\sum_{x \in N(i)} \frac{1}{d_{ix}} \sigma_{ix}}{d_i} + \frac{\sum_{y \in N(j)} \frac{1}{d_{jy}} \sigma_{jy}}{d_j} \right),$$

где для краткости в обоих случаях мы пишем $\sigma_{ix} = 1$, если $\{i, x\}$ находится на геодезической P_{ij} , в противном случае. И $\sigma = 1$

Доказательство. Используя предложение 3.1, достаточно вычислить различные $K_m(\alpha)$ и $K_m(\alpha)$ на каждом ребре, а затем оценить его взвешенную 1-норму. Пусть уникальный простой путь от i до j задан упорядоченным списком ребер

$$P_{ij} = (i = i_1, i_2, \dots, i_k = j), \quad (5)$$

для $N(i)$. Без $\ell = 1$ $w_{i\ell} \ell + 1$. Пусть $N(i)$ E' обозначает подмножество ребер, инцидентных i , которые не e , где $d_{ij} =$ и аналогично $e \in N(i)$ потери общности, возьмем ориентацию E' на ребрах, лежащих на P_{ij} , чтобы она имела следующий вид. Для каждого $e \in N(i)$ мы берем e , записанное $e = (i, \cdot)$; для каждого $e \in N(j)$ мы берем e , записанное $e = (\cdot, j)$, и для каждого $e \in P_{ij}$ мы позволим e быть ориентированным в соответствии с появлением индекса в уравнении (5). Все остальные ребра могут иметь произвольную ориентацию, и любой такой выбор не повлияет на последующие вычисления. Установив все таким образом, мы можем разделить вычисления на два случая — случай смежности и иной случай.

(Случай $i = j$) Предполагая, что $\{i, j\} = E$, мы имеем, что при проверке $K_m(\alpha)$ удовлетворяет условию

$$K_m(\alpha)(e) = K_m(\alpha)(e) = \begin{cases} \frac{m(1 - \alpha)}{d_i} & \text{если } e \in N(i) \\ \frac{1 - (1 - \alpha)w_{ij}(1/d_i + 1/d_j)}{d_j} & \text{если } e = (i, j) \\ \frac{1 - (1 - \alpha)w_{ij}(1/d_i + 1/d_j)}{d_j} & \text{если } e \in N(j) \end{cases}$$

Для иллюстрации см. рис. 5. Поэтому мы имеем

$$\text{Ш1}(m_{я}^{(\alpha)}, j, (m_{я}^{(\alpha)})) = m_{ij} + \frac{\sum_{x \in N(i)} \frac{1}{d_{ix}} (1 - \alpha)}{d_i} + \frac{\sum_{y \in N(j)} \frac{1}{d_{jy}} (1 - \alpha)}{d_j} + w_{ij} |1 - (1 - \alpha)w_{ij}(1/d_i + 1/d_j)|.$$

Самый правый член будет в общем случае чувствителен к взаимодействию между весами на ребрах вблизи i, j и выбором α , но, отметив сначала, что $1 - (1 - \alpha)w_{ij}(1/d_i + 1/d_j) \geq 0$ при условии, что

$$w_{ij}(1/d_i + 1/d_j) \leq 1 - \alpha,$$

мы имеем, что поскольку $w_{ij}(1/d_i + 1/d_j) \leq 2$ всегда, $\alpha \leq 1/2$ является достаточным условием для $1 - (1 - \alpha)w_{ij}(1/d_i + 1/d_j) \geq 0$. Всякий раз, когда это так, следует, что

$$\begin{aligned} \text{Ш1}(\mathbf{M}_{\mathbf{y}}, \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(\alpha)}) &= m_j \frac{\sum_{i \in N(i)}^2 \text{нед}_{ix}(1 - \alpha) + d_i}{d_i} + \frac{\sum_{j \in N(j)}^2 \text{нед}_{jy}(1 - \alpha) d_j}{d_j} \\ &+ w_{ij}(1 - (1 - \alpha)w_{ij}(1/d_i + 1/d_j)) \\ &= w_{ij} + (1 - \alpha) \left(\frac{\sum_{i \in N(i)}^2 w_{ix} \sigma_{ix}}{d_i} + \frac{\sum_{j \in N(j)}^2 \text{нед}_{jy} \sigma_{jy}}{d_j} \right) \end{aligned}$$

где для краткости мы пишем $\sigma_{ix} = 1$, если $\{i, x\}$ находится на геодезической P_{ij} и $\sigma = 1$ в противном случае.

(Случай $i = j$) Как и прежде, но теперь предполагая $\{i, j\} \in E$, запишите геодезическую P_{ij} в следующей перечисленной форме

$$P_{ij} = (i = i_1, i_2, \dots, i_k = j).$$

Тогда при проверке имеем, что $K_m(\alpha)$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} K_m(\alpha)(e) - K_m(\alpha)(e) &= \frac{m_y(1 - \alpha)}{d_i} \text{ если } e = N(i) \\ &= (1 - \alpha)w_{ij}/d_i, \text{ если } e = (i = i_1, i_2), \text{ если } e = \\ &= 1 \text{ (и } i_2, i_{\ell+1}) \\ &= \frac{1 - (1 - \alpha)w_{ij}/d_j, \text{ если } e = (i_k = 1, i_k = j), \text{ we}(1 - \alpha),}{\text{если } e} N(j) d_j \end{aligned}$$

См. иллюстрацию на рис. 6. Поэтому мы имеем, что

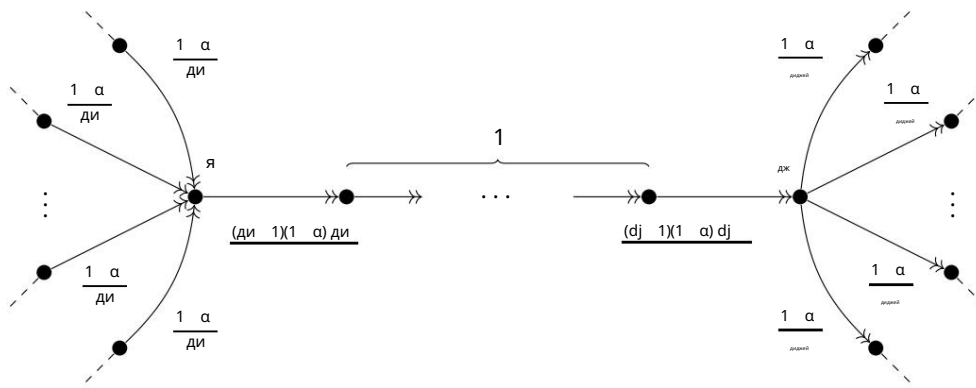
$$\begin{aligned} \text{Ш1}(\mathbf{M}_{\mathbf{y}}, \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(\alpha)}) &= \frac{\sum_{i \in N(i)}^2 \text{нед}_{ix}(1 - \alpha) d_i}{d_i} + \frac{\sum_{j \in N(j)}^2 \text{нед}_{jy}(1 - \alpha) d_j}{d_j} \\ &+ w_{i,i_2} |1 - (1 - \alpha)w_{i,i_2}/d_i| + w_{i_k-1,j} |1 - (1 - \alpha)w_{i_k-1,j}/d_j| + (d_{ij} - w_{i,i_2} \\ &- w_{i_k-1,j}) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что поскольку $w_{i,i_2}/d_i \leq 1$ и $w_{i_k-1,j}/d_j \leq 1$ всегда, то мы имеем, что $1 - (1 - \alpha)w_{i,i_2}/d_i \geq 0$ и $1 - (1 - \alpha)w_{i_k-1,j}/d_j \geq 0$. Поэтому мы можем упростить предыдущее и получить

$$\text{Ш1}(\mathbf{M}_{\mathbf{y}}, \mathbf{M}_{\mathbf{x}}^{(\alpha)}) = d_{ij} + (1 - \alpha) \left(\frac{\sum_{i \in N(i)}^2 \text{нед}_{ix} \sigma_{ix}}{d_i} + \frac{\sum_{j \in N(j)}^2 \text{нед}_{jy} \sigma_{jy}}{d_j} \right)$$

где для краткости мы пишем $\sigma_{ix} = 1$, если $\{i, x\}$ находится на геодезической P_{ij} и $\sigma = 1$ в противном случае. \square

Теперь у нас есть два следующих непосредственных следствия, которые дают формулы для кривизны, основанной на транспортировке.



(а) (а)

Рисунок 6. Иллюстрация возможного потока между i и j в случае, когда i, j являются смежными. Для простоты мы принимаем дерево невзвешенным. Узлы i, j отображаются слева и справа от центра соответственно, а все остальные метки указывают значения потока на ребрах. Пунктирная линия в центре обозначает геодезическую между i, j , вдоль которой (кроме двух конечных ребер) поток равен единице. Ориентации локально указаны стрелками, а все остальные ориентации на ребрах несущественны.

Следствие 3.3. Пусть $T = (V, E, w)$ — взвешенное дерево, и пусть $i, j \in V$ — фиксированные. Имеем, что $k_{ij}^{\text{или}, \alpha}$ можно выразить следующими формулами. Во-первых, если $\{i, j\} \in E$, имеем

$$k_{ij}^{\text{или}, \alpha} = \frac{1}{\text{видж}} \sum_{x=i}^x \frac{w_{ix}(1-\alpha)}{d_i} \frac{1}{\text{видж}} \sum_{y=j}^y \frac{w_{jy}(1-\alpha)}{d_j} \quad \text{если } \alpha \in [0, 1/2), \quad (6)$$

$$\frac{1-\alpha}{\text{видж}} \sum_{x=i}^x \frac{w_{ix}\sigma_{ix} + d_i}{d_i} \sum_{y=j}^y \frac{w_{jy}\sigma_{jy}}{d_j} \quad \text{если } \alpha = 1/2$$

Если $i \neq j$, то имеем,

$$k_{ij}^{\text{или}, \alpha} = \frac{1-\alpha}{\text{диджей}} \sum_{x=i}^x \frac{w_{ix}\sigma_{ix} + d_i}{d_i} \sum_{y=j}^y \frac{w_{jy}\sigma_{jy}}{d_j} \quad \text{диджей}$$

где для краткости в обоих случаях мы пишем $\sigma_{ix} = 1$, если $\{i, x\}$ находится на геодезической P_{ij} и $\sigma = 1$ в противном случае.

В качестве следствия приведем версию предыдущего для случая, когда дерево T невзвешено.

Следствие 3.4. Пусть $T = (V, E)$ — комбинаторное дерево, и пусть $i, j \in V$ — фиксированные. Имеем, что $k_{ij}^{\text{или}, \alpha}$ можно выразить следующими формулами. Во-первых, если $\{i, j\} \in E$, имеем

$$k_{ij}^{\text{или}, \alpha} = \frac{2\alpha}{2(1-\alpha)} \frac{1}{d_{дж}} \quad \text{если } (1/d_i + 1/d_j) > \frac{1}{1-\alpha} \quad (7)$$

$$\frac{1}{2(1-\alpha)} \quad \text{если } (1/d_i + 1/d_j) \leq \frac{1}{1-\alpha}$$

В частности, если $\alpha = 1/2$, то применим последний случай. Если $i \neq j$, то имеем,

$$k_{ij}^{\text{или}, \alpha} = \frac{2(1-\alpha)}{\text{диджей}} \frac{1}{d_i} \frac{1}{d_j} \quad \text{диджей}$$

Взяв предел $k_{ij}^{\text{или}, \alpha} / (1-\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 1$, условие $\alpha = 1/2$ можно ослабить, и мы также получим простую характеристику кривизны Лин-Лу-Яу.

Следствие 3.5. Пусть $T = (V, E, w)$ — взвешенное дерево и пусть $i, j \in V$ — фиксированные. Мы имеем, что k_{ij} можно выразить следующей формулой:

$$k_{ij}^{ly} = \frac{1}{\text{диджей}} \sum_{x \in P_{ij}} \frac{2w_{ix} \sigma_{ix}}{y_j} + \frac{\text{нед.}^2}{\text{диджей}} \frac{y_j \sigma_{ij}}{y_j} \quad (8)$$

где для краткости мы пишем $\sigma_{ix} = 1$, если $\{i, x\}$ находится на геодезической P_{ij} и $\sigma = 1$ в противном случае.

Как и прежде, это допускает комбинаторную версию, которую мы изложим ниже.

Следствие 3.6. Пусть $T = (V, E, w)$ — комбинаторное дерево и пусть $i, j \in V$ — фиксированные. Имеем l_{ij} , что k_{ij} можно выразить следующей формулой:

$$k_{ij}^{ly} = \frac{2}{\text{диджей}} \frac{1}{|d|_i} + \frac{1}{|d|_j} - 1 \quad (9)$$

где для краткости мы пишем $\sigma_{ix} = 1$, если $\{i, x\}$ находится на геодезической P_{ij} и $\sigma = 1$ в противном случае.

4 Суммы расстояний на деревьях и кривизна Штейнербергера

В этом разделе мы докажем следующее тождество для кратчайших расстояний пути на деревьях. Обратите внимание, что это также может быть получено из формулы для обратной матрицы расстояний дерева [7], но мы предлагаем прямое комбинаторное доказательство для полноты.

Лемма 4.1. Пусть $T = (V, E, w)$ — дерево и пусть $i \in V$ — фиксировано. Тогда имеем следующее тождество:

$$\sum_{j \in V} \sum_{k \in V} \text{дидж} = \frac{1}{2} \text{объем}(G) + \sum_{j \in V} \text{дидж} |d|_{дж}.$$

Для обоснования этой леммы мы используем аргумент подсчета путей, который требует некоторой настройки и обсуждения, прежде чем мы напишем основное доказательство. Зафиксировав $i \in V$, мы начинаем с укоренения графа T в узле i и организации его узлов и ребер относительно корня. В частности, для $j, k \in V$ пишем $j \prec i k$, если j появляется в P_{ik} определяем только P как «петлю» (i, i) . Обратите внимание, (V, \prec_i) — частично упорядоченное множество с максимальным элементом i . отождествляем каждое ребро $\{j, k\} \in E(T)$ с упорядоченным кортежем (j, k) , где $j \prec i k$, и пишем E_i для обозначения множества всех таких кортежей. Если мы думаем, что T вложен в плоскость с корнем, расположенным наверху, и остальными узлами и ребрами, расположенными в нисходящем порядке от корня, то отношение $j \prec i k$ выполняется, если j появляется на ветви, соединяющей i с k . Иллюстрацию см. на рис. 7.

Если $P = \{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — любой набор путей конечной длины на ребрах графа G , и $e \in E(G)$, мы пишем

$$Ne(P) = \sum_{\alpha \in A} \# \{(\ell, \ell+1) : e = (P_\alpha(\ell), P_\alpha(\ell+1))\}$$

где $\#\{\cdot\}$ указывает мощность множества, а $e = (P_\ell, P_{\ell+1})$ считается выполненным, если $e = \{P_\ell, P_{\ell+1}\}$. Мы можем думать о $Ne(P)$ как о числе раз, которое ребро проходит в семействе путей P . В этой статье мы всегда будем иметь, что $\#P < \infty$, поэтому $Ne(P) < \infty$. Определим взвешенное количество шагов P выражением

$$W(P) = w Ne(P) \cdot e \in E(G)$$

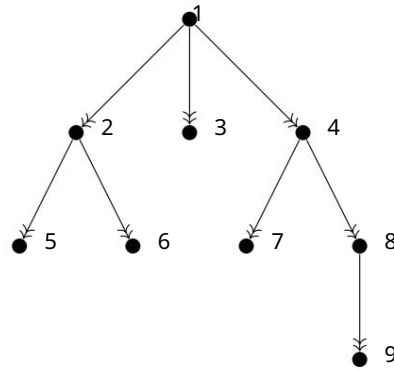


Рисунок 7. Иллюстрация частично упорядоченного множества (V, \rightarrow) для дерева с 9 узлами и корнем 1. Направление ребра указывает ориентацию в E_1 . Например, $1 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 1, 9$, но $2 \rightarrow 1, 8$.

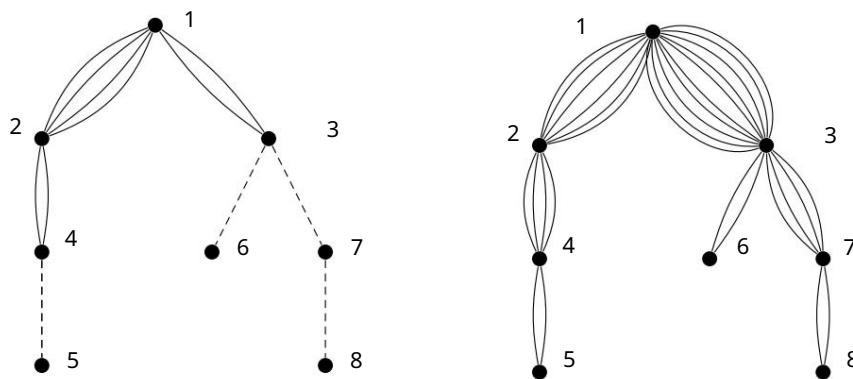


Рисунок 8. (слева) Иллюстрация набора P из доказательства леммы 4.1 на дереве с показанным P_4 . узлов и корень 1. Только пути P раз, когда 2 , P_3 , Повторяющиеся линии указывают на число восемь определенное ребро появляется в наборе P , т. е. $Ne(P)$. Пунктирные линии указывают на неиспользованные ребра, которые считаются находящимися в окружающем дереве. (справа) Показаны все пути P_j $j = 1$.

Доказательство леммы 4.1. Предположим без потери общности, что $i = 1$, и пусть \rightarrow обозначает отношение 1. Для каждого $j \in V$ $s \geq 1$ построим путь P_j , записав P_j , где $+$ обозначает $\Pi_{ji} + \Pi_{ij}$ конкатенация. То есть путь пересекает геодезическую от i до j , а затем снова в обратном направлении. Запишите $P = \{P_j\}_{j=1}$. Обратите внимание на непосредственную идентичность при проверке

$$B(\Pi) = \sum_{j=1} 2d_{ij}, \quad (10)$$

поскольку каждая геодезическая покрывается ровно дважды и, таким образом, вносит свой вес как таковой в сумму $W(P)$. Обратите также внимание на немного менее очевидное рекурсивное тождество для $(j, k) \in E_1$:

$$N(j, k)(P) = 2 + \sum_{\substack{\ell \in k \\ k \in \ell}} N(k, \ell)(P), \quad (11)$$

Это следует из наблюдения, что (j, k) может встречаться как шаг на пути P P в одном из два способа: либо P заканчивается в k перед разворотом (то есть $P = P$ и K), или P продолжается дальше k заканчивается в некоторой точке $\ell \in k$ перед разворотом. Если блуждание продолжается через k , то оно должно пройти через некоторое ребро (k, ℓ) для $\ell \in k$, причем $(k, \ell) \in (j, k)$ также перед разворотом. Мы проиллюстрируем совокупность P и ее количество ребер Ne на рис. 8.

Теперь мы строим отдельный набор путей Q следующим образом. Для $j \in V$ $s \geq 1$, и пусть $Q_{j,s}$ будет d_{ij} , идентичной копией геодезической P_{j1} . Запишем $Q = \{Q_{j,s}\}_{j,s}$. Заметим, что $s = 1, 2, \dots, |$

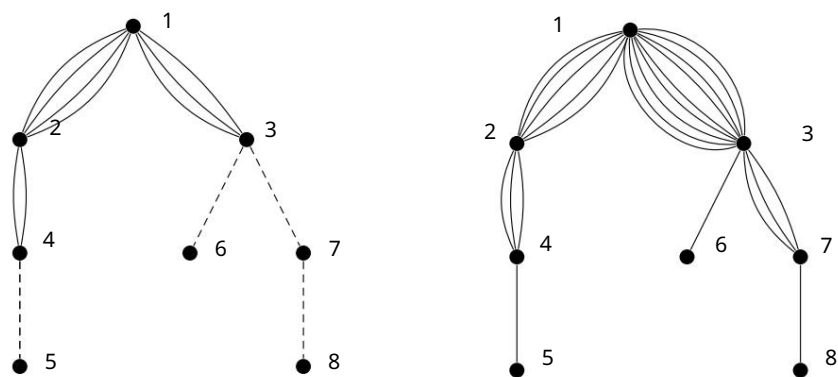


Рисунок 9. (слева) Иллюстрация набора Q из доказательства леммы 4.1 на дереве с восемью узлами и корнем 1. Показаны только пути $\{Q_{2,s}\}_{s=1,2}$, $\{Q_{4,s}\}_{s=1,2}$, $\{Q_{3,s}\}_{s=1,2,3}$. Повторяющиеся линии указывают количество раз, которое ребро пересекается показанными путями, т. е. с повторениями, равными $Ne(Q)$. Пунктирные линии указывают неиспользованные ребра, которые считаются находящимися в окружающем дереве. (справа) Показаны все пути в $Q = \{Q_{j,s}\}_{j,s}$.

при осмотре немедленной идентификации

$$W(Q) = \sum_{j=1}^{d(k,j)} |d|_{d,j} \quad (12)$$

поскольку каждая геодезическая p_{j1} покрывается ровно $|d|_{d,j}$ раз и, таким образом, вносит свой вес как таковой в сумму $W(Q)$. Обратите также внимание на немного менее очевидное рекурсивное тождество для $(j, k) \in E_1$:

$$N(j, k)(Q) = |d|_{d,j} + \sum_{\substack{\ell \in k \\ k \in \ell}} N(k, \ell)(Q), \quad (13)$$

Это уравнение справедливо по следующей причине. Ребро (j, k) пересекается либо одним из путей d_k , инстанцированных в k , проходящих через j , либо пешеходом, инстанцированных в некотором $\ell \in k$, проходящим через (j, k) . Если ℓ таково, что $(k, \ell) \in E_1$, то число особей, проходящих через (k, ℓ) , а затем (j, k) , равно $N(k, \ell)(Q)$. Мы иллюстрируем коллекцию Q и ее количество ребер Ne на рис. 9. оно выполняется

Теперь мы утверждаем, что для каждого $e \in E_1$,

$$Ne(Q) = Ne(P) - 1. \quad (14)$$

Если e — листовое ребро, $Ne(P) = 2$ и $Ne(Q) = 1$ по построению. Предположим, что $e = (j, k) \in E_1$ не является листовым ребром и что уравнение (14) выполняется для каждого $f \in E_1$ такого, что $e \neq f$. Тогда по индукции и уравнению (13) имеем

$$\begin{aligned} N(j, k)(Q) &= d_{k,j} + \sum_{\substack{\ell \in k \\ k \in \ell}} N(k, \ell)(Q) \\ &= d_{k,j} + \sum_{\substack{\ell \in k \\ k \in \ell}} (N(j, k)(P) - 1) \\ &= 1 + \sum_{\substack{\ell \in k \\ k \in \ell}} N(j, k)(P) \\ &= N(j, k)(P) - 1 \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из уравнения (11). Поэтому по определению имеем уравнение (10), и

Уравнение (12), что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n 2d_{ij} &= W(P) \\ &= \sum_{e \in E_i} \deg(e) \\ &= \sum_{e \in E_i} (\deg(e) + 1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \deg(j) + \sum_{j=1}^n 1 \end{aligned}$$

Далее следует утверждение. □

Следующий результат относительно κ^c может быть получено как довольно прямое следствие Леммы 4.1.

Следствие 4.2. Пусть $T = (V, E, w)$ — взвешенное дерево и $i \in V$. Тогда κ^c дается

$$\kappa^c_{i,j} = \frac{2n(2 - d_{ij})}{\text{об}(G)} = \frac{n(2 - d_{ij})}{\sum_{e \in E} w_e}.$$

Доказательство. Пусть $i \in V$ фиксировано. Заметим по лемме 4.1, что

$$\sum_{j \in V} d_{ij} (2 - d_{ij}) = \frac{1}{2} \text{том}(G).$$

Следовательно, $\kappa^c_{i,j}$ удовлетворяет $\text{vol}(G)$

$$D\kappa = n1 \tag{15}$$

как и требовалось. На деревьях матрица расстояний D невырождена, поэтому решение к уравнения (15) определяется однозначно, и утверждение следует. □

5 доказательств из введения

Доказательство теоремы 1.1. Для (i), поскольку $\{i, j\}$ не является листовым ребром, $d_i, d_j \geq 2$ и, таким образом, в частности, $1/d_i + 1/d_j \geq 1$, так что последний случай уравнения (7) имеет место. Таким образом, поскольку $1 - \alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \kappa^{\text{или}, \alpha}_{i,j} &= 2(1/d_i + 1/d_j - 1) \\ 2(1 - \alpha)(1/d_i + 1/d_j - 1) &= \kappa^c_{i,j} \end{aligned}$$

Далее мы имеем, что для $x = i, j$ справедливо

$$\begin{aligned} 2(1/d_i + 1/d_j - 1) &> 2(1/d_x - 1) \\ &= \frac{1}{d_x} (2 - 2d_x) \\ &= \frac{2}{d_x} (2 - d_x - 1) \\ &= \frac{4}{d_x} \kappa^c_x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Для (ii) мы сначала отметим, что по предположению,

$$\begin{aligned} \kappa_{ij}^{\text{или}, \alpha} &= 2(1 - \alpha) (1/d_i + 1/d_j - 1) 2(1 \\ &= \frac{\alpha}{d_j} \\ \frac{2}{d_j} &= \kappa_{ij}^{\text{или}} \end{aligned}$$

Тогда мы имеем, что поскольку $d_j \geq 2$, то справедливо

$$\kappa_{ij}^{\text{или}} = \frac{2}{d_j} \leq \frac{8}{3} \kappa_j^{\text{с}}.$$

□

Доказательство теоремы 1.3. Имеем, что

$$\|n\|_1 = D \kappa^{\text{с}} \leq D \|1\|_1 \leq \kappa^{\text{с}} \cdot 1. \quad (16)$$

Здесь $\|1\|_1$ обозначает норму матрицы D как оператора из нормированного пространства $(\mathbb{R}^{n \times 1})$ в нормированное пространство $(\mathbb{R}^{n \times 1})$. Напомним известный факт, что эта норма задается максимальным по элементам абсолютным значением матрицы, которое в данном случае равно D . Таким образом, уравнение (16) принимает вид

$$\|n\|_1 \leq D \kappa^{\text{с}} \cdot 1$$

из чего следует утверждение. □

Ссылки

- [1] Р. Б. Бапат. Обратная матрица Мура-Пенроуза для матрицы инцидентности дерева. Линейная и полилинейная алгебра, 42(2):159–167, 1997.
- [2] Ади Бен-Израэль и Авраам Чарнес. Вклад в теорию обобщенных обратных величин. Журнал Общества промышленной и прикладной математики, 11(3):667–699, 1963.
- [3] Вэй-Чиа Чен и Мао-Пэй Цуй. О кривизне Штейнербергера и матрицах расстояний графа. Препринт arXiv arXiv:2309.16156, 2023.
- [4] Дэвид Кушинг, Супанат Камту, Эрин Лоу, Шипинг Лю, Флорентин Мюнх и Нор-берт Пейеримхофф. Заметка о кривизне Штейнербергера для графов. Препринт arXiv arXiv:2404.17860, 2024.
- [5] Карел Девриндт и Рено Ламбиотт. Дискретная кривизна на графиках из эффективного сопротивления. Журнал физики: Сложность, 3(2):025008, 2022.
- [6] Карел Девриндт, Андреа Оттолини и Стефан Штайнербергер. Кривизна графика через расстояние сопротивления. Дискретная прикладная математика, 348:68–78, 2024.
- [7] Рон Л. Грэм и Ласло Ловас. Матричные полиномы расстояний деревьев. Достижения в Математика, 29(1):60–88, 1978.
- [8] Юрген Йост и Шипинг Лю. Кривизна Риччи Оливье, локальная кластеризация и неравенства размерности кривизны на графах. Дискретная и вычислительная геометрия, 51(2):300–322, 2014.

- [9] Юн Линь, Линьюань Лу и Шин-Дун Яу. Кривизна графов Риччи. Тохoku Мате-математический журнал, вторая серия, 63(4):605–627, 2011.
- [10] Ян Оливье. Кривизна Риччи метрических пространств. *Comptes Rendus Mathematique*, 345(11): 643–646, 2007.
- [11] Ян Оливье. Кривизна Риччи цепей Маркова на метрических пространствах. *Журнал функционального Анализа*, 256(3):810–864, 2009.
- [12] Габриэль Пейре, Марко Кутури и др. Вычислительный оптимальный транспорт: с приложениями к науке о данных. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 11(5-6):355–607, 2019.
- [13] Сойер Робертсон, Чжэнчао Ван и Александр Клонингер. Все, что вам нужно, это сопротивление: Об эквивалентности эффективного сопротивления и некоторых оптимальных транспортных задачах на графах. Препринт arXiv arXiv:2404.15261, 2024.
- [14] Ольга Владимировна Рублева. Кривизна Риччи взвешенного дерева. *Математические заметки*, 100:597–606, 2016.
- [15] Стефан Штайнербергер. Кривизна на графах через меры равновесия. *Журнал графов Теория*, 103(3):415–436, 2023.
- [16] Юй Тянь, Закари Люббертс и Мелани Вебер. Кластеризация на основе кривизны на графах. Препринт arXiv arXiv:2307.10155, 2023.

Заявления и декларации

Благодарности

Автор хотел бы выразить признательность Стефану Штайнербергеру за полезные беседы.

Раскрытие финансовой информации

Автор хотел бы выразить признательность за финансовую поддержку от Halı sı oğlu Data Science Institute через их Graduate Prize Fellowship. Нет никаких других соответствующих финансовых или нефинансовых конкурирующих интересов, которые необходимо раскрыть.

Заявление о доступности данных

Автор заявляет, что данные, подтверждающие выводы этого исследования, доступны в статье или в общедоступном репозитории <https://github.com/sawyer-jack-1/curvature-on-trees>.