# El análisis en la filosofía sintética de las matemáticas de Fernando Zalamea

**Carlos Alberto Cardona**[1]

> El físico sencillamente no puede dejar al filósofo la contemplación crítica de los fundamentos teóricos; pues él es quien mejor sabe y siente dónde le aprieta el zapato.
>
> Albert Einstein 1954, p. 290

> Todo intento lógico que pretendiera dominar a priori el desarrollo de las matemáticas desconocería así la naturaleza esencial de la verdad matemática, puesto que esta está ligada a la actividad creadora del espíritu y participa de su carácter temporal.
>
> Albert Lautman 1937, p. 267

Fernando Zalamea, en calidad de matemático profesional, se ha tomado en serio la tarea de arrebatarle al filósofo la contemplación crítica de la práctica matemática; él reconoce con seguridad dónde aprieta el zapato. Ahora bien, cuando se siente una molestia profunda con el calzado, conviene dejar abierta la posibilidad de prescindir de él. El calzado nos aísla de las rugosidades naturales del piso firme. Oí, de Fernando Zalamea, la anécdota según la cual, Grothendieck acostumbraba dictar descalzo sus conferencias. Quizá, quería mostrarle al auditorio que, de vez en cuando, conviene liberarse de las ataduras teóricas que nos esclavizan. Siempre refresca el reencontrarse con el terreno áspero. La filosofía se parece a una vestidura idealizada que consigue ocultar la belleza profunda que yace en las irregularidades.

Fernando Zalamea lidera un prometedor programa de investigación que busca ofrecer un enfoque sintético de la filosofía de las matemáticas contemporáneas. La expresión *filosofía sintética* es, de suyo, retadora. Se trata de una respuesta enérgica a una tradición que ha hecho eco de la expresión, en apariencia antagónica, *filosofía analítica*. Zalamea se queja, no sin razón, de que son muchos los filósofos que se dicen analíticos que ignoran los desarrollos más sofisticados de la matemática contemporánea.[2] Estos filósofos, a su juicio, se han

---

1 Profesor titular, Escuela de Ciencias Humanas, Universidad del Rosario.

2 El autor distingue entre matemática clásica –entre mediados del siglo XVII y mediados del XIX–; matemática moderna –entre mediados del siglo XIX y mediados del XX– y matemática contemporánea

estancado en la fascinación que les produjo el debate por los fundamentos de comienzos del siglo XX y en el apego a una especie de lógica cristalina. No es mi interés discutir si se trata de una descripción justa o no. De hecho, no faltan ejemplos que le dan fuerza a la queja de Zalamea. Lo que quiero examinar es si, de suyo, el concepto de una filosofía sintética debería oponerse al de una filosofía analítica de las matemáticas; con independencia de que los filósofos que se dicen analíticos hayan hecho mal la tarea.

El programa de Zalamea pretende emular, para el caso de la matemática contemporánea, lo que hizo Albert Lautman a propósito de la matemática moderna. El filósofo francés, apoyado en reservas similares a las de Zalamea a propósito de la tradición analítica, se esforzó por sacar a la luz una estructura dialéctica en la creatividad matemática. El enfoque dialéctico supone hacer visibles ciertos tránsitos entre unidades opuestas. Este ejercicio enriquece nuestra aprehensión de la práctica matemática si estamos dispuestos a admitir, y recorrer con aprecio, ciertas oscilaciones pendulares entre extremos que parecen antagónicos e irreconciliables. Fernando Zalamea muestra cómo la práctica matemática, en su creatividad más honda, se enriquece del vaivén que va de lo uno a lo múltiple, de lo continuo a lo discreto, de lo negativo a lo positivo, de lo local a lo global, de la razón al co-razón. En ese vaivén, la obstrucción es, paradójicamente, el motor.

A mi juicio, hay que agregar la pareja análisis/síntesis para tener un espectro más amplio de los tránsitos que hacen posible la creatividad matemática. Rudolf Carnap, en la mitad de una de las obras icónicas de la tradición analítica, me refiero a la *Construcción lógica del mundo*, aclaró que su filosofía era una síntesis presentada en el ropaje lingüístico [*sprachliche Gewand*] del análisis [Carnap 1928/2003, p. 121]. Cuando leí la obra motivado por un enfoque analítico, ocurrió que, al llegar a este pasaje, advertí que no estaba en la pista correcta; así que tuve que empezar de nuevo la tarea. La segunda lectura me abrió un nuevo y más rico horizonte. Ahora bien, me propongo sugerir que el trabajo filosófico de Fernando Zalamea puede leerse, con provecho, como un ejercicio de análisis en el ropaje lingüístico de la síntesis.

La historia de las matemáticas nos acerca a una tensión permanente entre enfoques analíticos y enfoques sintéticos en la creatividad matemática. No existe un claro consenso en la manera de entender los dos términos. El panorama nos ofrece, más bien, una compleja diversidad hermenéutica. En ese orden de ideas, acogeré una acepción del término *análisis* que me permite defender el punto que he señalado. Existe un pasaje, ya clásico, en la obra de Pappus en el que se presenta el análisis como el método que nos invita a reconocer lo problemático –el teorema que se quiere demostrar, por ejemplo– como si fuera dado o verdadero, para explorar después lo que de tal supuesto se deriva. Se espera que la exploración conduzca a un punto de resolución en el que nos detenemos frente a

–desde mediados del siglo XX hasta la fecha– [Zalamea 2012, p. 27]. Los rasgos que distinguen la matemática moderna de la elemental se presentan en [Zalamea 2012, p. 30] y los que agrega la matemática contemporánea se describen en [Zalamea 2012, pp. 41-42].

algo ya conocido –un axioma o un teorema previo– [Heath 1956, vol. 1, p. 138]. Desde este punto, iniciamos el regreso, siempre que sea posible, que nos lleva de nuevo al teorema que queríamos demostrar. Este segundo camino se conoce como una síntesis.

Jaakko Hintikka, al examinar cuidadosamente la línea de Pappus en la que propone explorar lo que se deriva al tomar como verdadero lo problemático, sugiere que la traducción adecuada para el vocablo griego ἀκολούθων es "concomitantes" en lugar de la traducción ortodoxa que acoge "consecuencias" [Hintikka 1974, p. 14]. Así las cosas, quien practica el análisis no tiene que limitarse a explorar las consecuencias lógicas que se derivan de lo que se toma como verdadero, sino, en un sentido más amplio y rico, debe explorar todo aquello que acompaña o va al lado de –es concomitante con– lo que se asume como dado. Hintikka sintetiza su peculiar estudio del método analítico en el siguiente esquema:

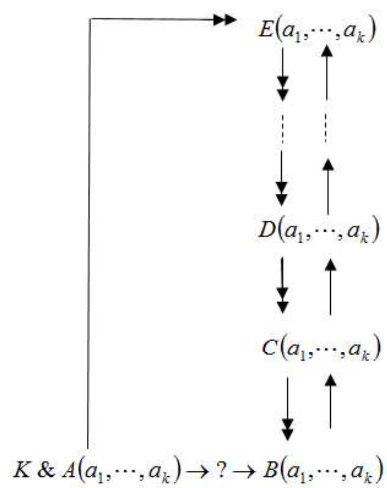


Figura 1. Esquema del análisis, [Hintikka 1974, p. 36]

$K \,\&\, A(a_1,\cdots,a_k)$ representa un cuerpo de conocimiento previo $K$ y una configuración inicial $A$ que contiene los elementos $(a_1,\cdots,a_k)$. Se pregunta si es posible obtener la configuración $B$ con los mismos elementos presentes en $A$. El análisis presupone dar por sentado $B(a_1,\cdots,a_k)$ y explorar los concomitantes $C(a_1,\cdots,a_k)$, $D(a_1,\cdots,a_k)$ hasta llegar a la resolución $E(a_1,\cdots,a_k)$, a la que habríamos podido llegar directamente desde $K \,\&\, A(a_1,\cdots,a_k)$. En este punto, examinamos si el camino es reversible para proceder a la síntesis. Así entonces, podemos ofrecer una prueba que avanza desde $K \,\&\, A(a_1,\cdots,a_k)$ hasta $B(a_1,\cdots,a_k)$. Las flechas simples señalan la dirección del análisis; las dobles, la de la síntesis.

Uno de los matemáticos contemporáneos estudiados por el profesor Zalamea, Stephen Simpson, hace eco del proceso inverso encarnado en el análisis. En sus investigaciones, da por sentado un cuerpo de matemáticas ordinarias –no conjuntistas– y se pregunta por los axiomas de existencia que debe incluir una matemática conjuntista para probar los teoremas de la matemática ordinaria [Simpson 1991, p. 2]. Simpson, acogiendo una recomendación de Friedman, llamó a su programa *Matemáticas en reversa* [Simpson 1991, p. 34].

El éxito de la peculiar pareja análisis-síntesis en el campo de la geometría llevó a varios pensadores a ofrecer diversas paráfrasis del método. Ellos tenían la intención de aplicar tales paráfrasis en sus campos de investigación, usualmente muy alejados de la geometría. A manera de ejemplo, Newton propuso en su *Óptica* emular el método de los matemáticos: admitir los experimentos como si fueran dados, para sacar después conclusiones generales por inducción –o evaluar los concomitantes por inducción– hasta alcanzar las causas [Newton 1730/1977, p. 349]. Kant, así mismo, se valió de la distinción para mostrar que mientras las matemáticas proceden sintéticamente, pues construyen conceptos producidos originariamente, la filosofía sólo puede avanzar analíticamente, por descomposición a partir de lo dado [Kant 1787/1993, B 758].

Quiero mostrar, a continuación, que el ejercicio llevado a cabo por Fernando Zalamea se puede presentar como una paráfrasis del método análisis/síntesis recogido en el diagrama de Hintikka. Mostraré, además, que el ejercicio de explorar los concomitantes de una configuración que se tiene como dada, puede asimilarse a la aplicación de la máxima pragmáticista de Peirce.

Si acogemos la recomendación de Kant, la filosofía de las matemáticas no constituye los conceptos, mucho menos los objetos, de los que se ocupa el matemático; debe limitarse a descomponer analíticamente dichos conceptos.[3] A diferencia de Kant, que asume que los conceptos matemáticos se construyen a partir de una intuición de objetos matemáticos puros, Peirce sostiene que los objetos matemáticos no nos son dados *a priori*, sino que se construyen con la marcha del proceso de investigación. La investigación matemática permite la emergencia de los conceptos, y éstos, a su vez, perfilan el horizonte de la investigación. Ahora bien, ¿qué funge como lo dado para el filósofo de las matemáticas? Una buena respuesta, que acoge sin reservas Fernando Zalamea, la ofrece Lautman en el epígrafe que hemos citado, a saber, la actividad creadora del espíritu matemático. Dicha respuesta concilia el espíritu analítico de la filosofía esperado por Kant y la reserva de Peirce con respecto a la naturaleza *a priori* del objeto matemático. La respuesta es, también, el punto de ruptura de Zalamea con algunos filósofos que se dicen analíticos. Por estar atentos a una forma lógica cristalina e idealizada, le han dado la espalda a la creatividad matemática contemporánea. En un pasaje crítico con el horizonte del Círculo de Viena, anota Lautman: «Queriendo suprimir los lazos entre el pensamiento y lo real, negando en cierto modo para la ciencia el valor de una experiencia espiritual,

[3] Kant prefiere usar la expresión “exposición” [Exposition] en lugar de “definición” [Definition] [Kant 1787/1993, B 757 ].

nos arriesgamos a no tener más que una sombra de ciencia» [Lautman, 1935, p. 81].[4] Una filosofía de las matemáticas que se construya de espaldas al ejercicio creativo de los matemáticos del momento, amenaza con ofrecer simplemente una sombra de ciencia. En oposición, el ejercicio analítico de Zalamea empieza en el taller del matemático profesional. Él toca las puertas de Grothendieck, Langlands, Lawvere, Shelah, Atiyah, Simpson, Gromov, entre otros. Se acerca a ellos para examinar sus patrones de creatividad matemática. Pero no lo hace a la manera de un antropólogo que quiere tan sólo llevar un registro de campo. Lo hace para detectar la honda estructura de la creatividad.

El ejercicio analítico demanda que acojamos, como si fuera dada, la práctica creativa del matemático contemporáneo en su propio taller. Esa intromisión debe llevarnos a explorar todos los posibles concomitantes. Tal exploración no es una búsqueda en el vacío. La resolución del análisis no puede llevarnos a un cuerpo de conocimiento aceptado. En la filosofía de las matemáticas no hay axiomas. En la resolución tendrían que advertirse los tránsitos dialécticos mencionados al comienzo. En ese ejercicio pendular, unas veces, el objeto matemático, considerado como unidad, se despliega en sus múltiples aplicaciones o enfoques. Otras veces, una unidad sintética previa, a la manera de Galois, determina el perfil de los objetos. En otros momentos, emulando el trabajo de Riemann, la geografía local orienta el camino hacia las perspectivas integradoras y se enriquece dejando abierta la posibilidad de que sean los mapas globales los que fijen el paisaje de lo local. En fin, una rapsodia de tránsitos y obstrucciones entre opuestos.

El principio metodológico que rige la exploración de Zalamea es la máxima pragmaticista de Peirce. Cito, a continuación, uno de los pasajes que exhibe con más claridad la mencionada máxima. Agregaré entre paréntesis cuadrados una modificación deliberada que deja ver la presencia de la pareja análisis y síntesis. El pasaje reza así: «Consideremos qué efectos, que concebiblemente pudieran tener un aspecto práctico [que son concomitantes con el objeto que nos ocupa y que asumimos como dado], concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, la concepción de dichos efectos [la síntesis de dichos concomitantes] es nuestra concepción integral del objeto» [Peirce 1878, p. 132]. En las palabras de Zalamea: «La máxima pragmaticista de Peirce puede verse como una forma sofisticada de tejido entre análisis/diferenciación y síntesis/integración» [Zalamea 2012, p. 120].

Zalamea asiste al taller creativo del matemático, rastrea entre todos sus objetos –escritos, conferencias, teoremas, confesiones, participación en la vida política y cultural–, los despliega en una hoja, a la manera del Atlas Mnemosyne de Aby Warburg [Warburg1924-30/2010]; finalmente, teje conexiones que sacan a la luz los tránsitos mencionados y los invariantes estructurales. La búsqueda está orientada por un método que invita a distinguir entre, primero, los movimientos

4 «Una de las deficiencias básicas de la filosofía de las matemáticas ha consistido en no acoplar sus instrumentos filosóficos de observación con los ambientes observados, y en intentar pintar paisajes estandarizados del todo» [Zalamea 2012, p. 46].

de ascenso *eidal* –descripción, a la manera de Husserl, de las estructuras ideales encarnadas en la práctica matemática–; segundo, descenso *quidditat* —aplicación de las construcciones matemáticas al mundo físico–; tercero, reconocimiento *archeal* –búsqueda de los invariantes en el tránsito–.[5] Los concomitantes no se reducen a vecindades estrictamente matemáticas. Además del horizonte de aplicaciones físicas, Zalamea explora conexiones culturales –pintura, poesía, escultura, cine– que permiten anclar la creación matemática a diferentes espíritus de la época.

El ejercicio filosófico de Zalamea encarna también la triada de Peirce. La práctica del matemático en su taller se puede concebir como «Primeridad», aquello dado sin sus múltiples relaciones. Los concomitantes con la práctica que permiten divisar la dialéctica entre opuestos, se asimila a la «Secundidad», aquello que emerge gracias a las relaciones entre lo dado y sus concomitantes. La tarea de desentrañar los invariantes en dichos tránsitos se sintetiza como «Terceridad», el despliegue de la Secundidad para una conciencia interpretativa –la síntesis–.[6]

Cuando Lautman se pregunta por la prioridad de la Dialéctica con respecto a las Matemáticas, descarta que se trate de una anterioridad temporal y también niega que se trate de una prioridad en el orden del conocimiento, pues, como sugiere el autor: «el método de la filosofía matemática es analítico y regresivo; se remonta de la aprehensión global de una teoría matemática a las relaciones dialécticas que esa teoría encarna, y no tendría sentido el determinar un *a priori* cuyo conocimiento previo fuera necesario para comprender las matemáticas» [Lautman 1938, p. 340]. Zalamea deja ver que comparte tal aproximación en pasajes como los siguientes: «Una combinación pendular de lo analítico y lo sintético, lo diferencial y lo integral, lo ideal y lo real, parece ser el camino epistemológico a seguir […] Si cada perspectiva epistemológica genera un *corte* interpretativo, un peculiar *ambiente de proyectividad*, una modulación diferencial del conocimiento, entonces el próximo paso consiste en articular las proyectividades coherentes, balancear las polaridades y pegar las modulaciones, *así como postula la máxima pragmaticista de Peirce*» [Zalamea 2012, pp. 298, 299]. Las palabras del profesor Zalamea son la mejor defensa para la tesis que he querido plantear. Así como Simpson, después de admitir la matemática ordinaria como dada, pregunta por los axiomas de existencia que se demandan, Zalamea lleva a cabo una filosofía en reversa: admite la práctica del matemático contemporáneo y pregunta por la forma como se expresan los tránsitos creativos. Su programa de investigación, acogiendo el título que Lautman ha dado al suyo, debería llamarse *Filosofía dialéctica de las matemáticas contemporáneas*. O, si preferimos el título que ha dado Simpson a su programa, podría llamarse *Filosofía en reversa para las matemáticas contemporáneas*.

---

5 Véase [Zalamea 2102, p. 174, p. 206, p. 241]. El despliegue triple es el desarrollo de una idea sugerida en [Lautman 1939, pp. 382-383].

6 A propósito de dichas categorías, puede seguirse [Peirce 1903].

# BIBLIOGRAFÍA

## (1) Publicaciones del profesor Fernando Zalamea

[Zalamea 2012] Fernando Zalamea, *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics,* London/New York: Urbanomic/Sequence. Versión en español: *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas,* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2009.

## (3) Otras referencias

[Carnap 1928/2003] Rudolf Carnap, *The logical Structure of the World*, Chicago: Open Court.

[Einstein 1954] Albert Einstein, *Ideas and Opinions,* New York: Crown Publishers.

[Heath 1956] Thomas Heath, *Euclid, The Thirteen Books of the Elements,* New York: Dover Publications.

[Hintikka 1974] Jaakko Hintikka y Unto Remes, *The method of Analysis,* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

[Kant 1787/1993] Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft,* Hamburg: Felix Meiner Verlag.

[Lautman 1935] Albert Lautman, “Matemáticas y realidad”, en Albert Lautman, *Ensayos sobre la dialéctica estructura y unidad de las matemáticas modernas* (ed. F. Zalamea), Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2011, pp. 77-81.

[Lautman 1937] Albert Lautman, *Ensayo sobre las nociones de estructura y de existencia en matemáticas*, en: Albert Lautman, *Ensayos sobre la dialéctica estructura y unidad de las matemáticas modernas* (ed. F. Zalamea), Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2011, pp. 131-276.

[Lautman 1938] Albert Lautman, “Nuevas investigaciones sobre la estructura dialéctica de las matemáticas”, en: Albert Lautman, *Ensayos sobre la dialéctica estructura y unidad de las matemáticas modernas* (ed. F. Zalamea), Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2011, pp. 331-360.

[Lautman 1939] Albert Lautman, “El pensamiento matemático”*,* en: Albert Lautman, *Ensayos sobre la dialéctica estructura y unidad de las matemáticas modernas* (ed. F. Zalamea), Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2011, pp. 375-383.

[Newton 1730/1977] Isaac Newton, *Óptica,* Madrid: Alfaguara.

[Peirce 1878] Charles Sanders Peirce, “How to make Our Ideas Clear”, en Ch. S. Peirce, *The Essential Peirce* (ed. N. Houser y Ch. Kloesel), Bloomington: Indiana University Press, Vol. 1, pp. 124-141, 1992.

[Peirce 1903] Charles Sanders Peirce, “The Categories Defended”, en Ch. S. Peirce, *The Essential Peirce* (ed. N. Houser y Ch. Kloesel), Bloomington: Indiana University Press, Vol. 2, pp. 160-178, 1998.

[Simpson 1991] Stephen Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic,* New York: Springer-Verlag.

[Warburg 1924-30/2010] Aby Warburg, *Atlas Mnemosyne* (ed. M. Warnke), Madrid: Akal.