Carlos Alberto Cardona

WITTGENSTEIN: MATEMÁTICAS Y REPRESENTACIÓN

La ciencia es una segunda creación realizada por el discurso, la pintura es una segunda creación realizada por la fantasía.

LEONARDO DA VINCI

Un fantasma recorre a Occidente, se trata del fantasma de la visión. Conocer es, para Occidente, una forma particular de ver. Diríamos mejor: una forma íntima de ver. Todos compartimos sin dificultad la metáfora y por eso nos resistimos a ponerla en entredicho. Leonardo da Vinci, por ejemplo, en su *Tratado de la pintura*, resume esa perspectiva en los siguientes términos: conocer implica la posibilidad de realizar una pintura –fiel o no– del mundo. El joven Wittgenstein también se acercó a una teoría pictórica del lenguaje; en el *Tractatus logico-philosophicus* el lector debe familiarizarse con expresiones de la forma: "Nosotros nos hacemos figuras de los hechos", "los elementos de la figura están en la figura en lugar de los objetos" (Wittgenstein, 1985: 2.1, 2.131). El hecho de que la pintura se encargue de ofrecer imitaciones de la naturaleza llevó a Leonardo a sostener que ésta debía ser considerada como una ciencia; aquella disciplina vista hasta entonces como una actividad secundaria, propia de artesanos sin más aspiraciones en el mundo, debía pasar, a juicio de Leonardo, a ocupar el lugar de la ciencia más completa, pues en ella se hacía más claro el firme propósito de la imitación. El argumento resumido de Leonardo es el siguiente: toda ciencia pretende realizar una imitación fiel del mundo, ninguna actividad aventaja a la pintura en dicha tarea, por lo tanto, la pintura es la ciencia por excelencia. Emprendemos nuestra actividad cognoscitiva con el ánimo de obtener copias –más o menos fieles– de la realidad; se trata, entonces, de una actividad que persigue el firme propósito de la imitación.

Podemos sostener, a manera de ejemplo, que hay una clara intención de imitación en las siguientes ecuaciones encontradas en el libro sobre la hidrodinámica de Lamb:

> Si las fuerzas exteriores $P'_{\gamma\gamma'}$ P'_{xy} reciben múltiplos de e^{ckx+at} donde k y a son prescritas, las ecuaciones estudiadas con anterioridad se traducen en
>
> $$\frac{P'_{yy}}{g^{\rho n}} = \frac{\left(\alpha^2 + 2vk^2\alpha + \sigma^2\right)A - i\left(\sigma^2 + 2vkmaC\right)}{g^k\left(A - iC\right)}$$
>
> $$\frac{P'_{xy}}{g^{\rho n}} = \frac{\alpha}{g^k}\,\frac{2ivk^2A + \left(\alpha + 2vk^2\right)C}{\left(A - iC\right)}$$

De ello es fácil concluir, dice el autor con tono optimista, que un viento con velocidad inferior a 800m/h dejará la superficie sin arrugas. Cuando el viento alcanza los 1.600m/h, la superficie se cubre de corrugaciones diminutas debido a ondas capilares que desaparecen en cuanto cesa la causa perturbadora. A los 3.000m/h aparecen las olas.

También hay una firme intención de imitación, motivada por la escena de las ondas en el agua, en las siguientes líneas:

> *Hay aguas que los vientos opuestos cambian en risas*
> *Y que los cielos iluminan. Después,*
> *El hielo, con su signo, detiene las olas que bailan*
> *Y esa errante hermosura deja una blanca*

Gloria íntegra, un acumulado esplendor;
Un espacio, una lúcida paz, bajo la noche[1].

Las ecuaciones reproducen la escena a su manera, las mágicas palabras también lo hacen a su estilo. En el segundo caso volvemos a sentir que la naturaleza se acerca y se une a nosotros.

Retomemos el hilo de la argumentación. Es legítimo esperar, en consecuencia, una mayor fidelidad de la copia. Ahora bien, la imitación es fiel si nos valemos de instrumentos que deformen lo menos posible la realidad. Dado el lugar privilegiado que ha desempeñado la visión en nuestras tareas cotidianas, es fácil advertir que la pintura aventaja con creces a otras disciplinas en el ámbito de la imitación. Advierte Leonardo:

> Si tú menospreciaras la pintura, sola imitadora de todas las obras visibles de la naturaleza, de cierto que despreciarías una sutil invención que, con filosofía y sutil especulación, considera las cualidades todas de las formas: mares, parajes, plantas, animales, árboles y flores que de sombra y luz se ciñen. Ésta es, sin duda, ciencia y legítima hija de la naturaleza, que la parió, o, por decirlo en buena ley, su nieta, pues todas las cosas visibles han sido paridas por la naturaleza y de ellas nació la pintura. Conque habremos de llamarla cabalmente nieta de la naturaleza y tenerla entre la divina parentela. [Da Vinci, 1980: 42].

La poesía y el discurso escrito intentan, también, figurar, pero no logran la efectividad de la pintura. La pintura es poesía que se ve, dice Leonardo, en tanto que la poesía es pintura que se oye. La efectividad de la pintura es tal que puede llegar a provocar confusión entre la figura y lo figurado:

---

[1] Este paralelo ha sido tomado de Eddington, 1945.

> Vi yo en cierta ocasión una pintura que, por obra de su semejanza con el amo, engañaba al perro, y éste le hacía grandísimas fiestas. De igual manera he visto a perros que ladraban y pretendían morder a perros pintados, y a una mona hacer infinitas tonterías frente a otra mona pintada. [Da Vinci, 1980: 50].

Las reflexiones de Leonardo son importantes pues sintetizan, a su manera, las aspiraciones de la ciencia occidental. Todo lo que puede existir se manifiesta, en Leonardo, como reproducible. Así, conocer no es sólo hacer una simple copia; es, también, objetivar lo captado por el espíritu. Este punto es importante pues la obra pictórica en sí y por sí no nos dice nada, no difiere en nada de la impresión sensorial que puede causar un paisaje. La obra nos estimula cuando es decodificada, cuando una relación proyectiva es capaz de intuir y de reconocer el espíritu y la intención del autor. ¿Qué posibilita la decodificación de parte y parte?, ¿cómo es posible que podamos ser engañados por una superficie y creamos ver en ella profundidad?: tales preguntas llevan a Leonardo a exigir una aclaración de la visión, pues sólo así es posible poner al desnudo la relación proyectiva que hace posible la figuración del mundo.

Por esta razón, la disciplina que convoca en primera instancia el interés de Leonardo es la perspectiva. La perspectiva se ocupa de las técnicas mediante las cuales podemos ser engañados a través de la representación pictórica. De igual modo, la ciencia, que en general pretende una copia fiel del mundo, debe ser auxiliada por una teoría amplia de las técnicas a través de las cuales podemos ser engañados por una representación pictórica. En este caso, la disciplina en cuestión se denomina *epistemología*. La perspectiva aclara la visión, mientras que la epistemología pretende hacer lo mismo con el conocimiento.

La perspectiva debe aclarar, entre otras cosas, los límites de la actividad pictórica. Debe advertir, desde el interior, aquello que no se puede figurar. Sin preocuparnos por la fidelidad o no de los acontecimientos históricos, podríamos interpretar de la siguiente manera los sucesos relacionados con la pintura de *La última cena*: Leonardo incumplió en repetidas ocasiones con la culminación de la obra. Algunos aducen la pereza de Leonardo; otros, el trabajo desordenado del maestro. Es cierto que Leonardo dejó casi todas sus obras inconclusas; también es cierto que abandonaba con facilidad una actividad para dedicarse por entero a otra: pasaba sin problemas de los dibujos de anatomía a los proyectos bélicos. Pero el caso de *La última cena* merece quizá una atención especial. Leonardo estaba sumergido en la actividad de recorrer y permanecer días enteros en las cárceles cercanas, buscando el modelo ideal para Judas. Las anécdotas permiten establecer que Leonardo dejó incompleto el rostro de Jesús. ¿Qué motivos pudo tener, si es que los tuvo, para no terminar el rostro de Jesús? Lomazzo, un pintor que quedó ciego, cuenta en uno de sus tratados de pintura lo que en su juventud oyó de boca de quienes habían conocido a Leonardo:

> Pero este "asombroso pintor" infundió tal belleza a Santiago el Mayor y a su hermano, en el cuadro de la cena, que, al tener después que representar a Cristo, no pudo ya elevarlo al grado de belleza sublime que era de desear. Después de mucho pensarlo, le fue a pedir consejo a su amigo Bernardo Zenale, quien le respondió de esta guisa:
>
> "¡Ay! Leonardo, es de tal monta el error que has cometido, que sólo Dios lo puede remediar: pues ni tú, ni mortal ninguno, tiene facultades para revestir un personaje de mayor belleza, y aspecto más divino, cual tú hiciste para las cabezas de Santiago el Mayor y su hermano. Deja, pues, al Cristo imperfecto, ya que nunca lograrás que, junto a estos dos apóstoles, aparezca como Cristo". [Citado por Berence, 1971].

Leonardo no se resignó a la idea de dejar el Cristo imperfecto; descubrió que aquello que quería pintar era irrepresentable: la infinita bondad, la infinita belleza. Por eso abandonó la tarea propuesta. Parafraseando el más conocido de los aforismos del joven Wittgenstein, es plausible sostener que lo que llevó a Leonardo a abandonar el rostro de Cristo fuese una afirmación del siguiente talante: lo que no se puede pintar, mejor es callarlo.

La analogía entre conocimiento y visión es de vieja data, mientras que la exigencia de una visión doble es de reciente aparición. Descartes es el responsable de introducir en Occidente la figura del doble escenario. La mente contempla el mundo, pero no lo hace en forma inmediata, lo hace mediada por la representación. Con el ánimo de desvanecer el escepticismo, Descartes terminó aportando un argumento muy poderoso a su favor: al abrir los ojos no contemplamos directamente al mundo, vemos su representación en el escenario mental. Si continuamos con la idea de apoyar el hilo argumentativo sobre la pintura, podemos explorar esa referencia a la doble visión en uno de los cuadros más impactantes del pintor belga René Magritte: se trata del titulado *La condición humana I* (1933, ver la ilustración 1.1). Magritte explicaba el cuadro del siguiente modo:

> Frente a una ventana, vista desde el interior de una habitación, coloqué una pintura que representaba exactamente la parte del paisaje que quedaba oculta por la propia pintura. En consecuencia, el árbol representado impide la visualización del árbol situado detrás suyo, fuera de la habitación. Por así decir, el árbol existe de dos formas simultáneas en la mente del espectador: dentro del cuarto, en la pintura, y fuera del cuarto, en el paisaje real. Y esto se asemeja a la manera en que vemos el mundo: lo consideramos exterior a nosotros, pese a que no es sino una representación mental de nuestras experiencias internas. [Citado por Hofstadter, 1989].

Vemos un árbol e imaginamos que se trata de la sombra o la proyección de un árbol diferente que debe encontrarse allende nuestras fronteras. Si bien contemplamos una escena, o un cuadro, que transcurre en nuestro escenario mental, hemos aprendido a contemplarlo en correspondencia con un acontecimiento externo. El marco de la ventana ilustra los límites de nuestro campo visual, el marco del cuadro figurado fija nuestra atención en un contorno especial del campo visual, el estudio del pintor representa obviamente nuestra cabeza, el lugar donde se encuentra el lienzo resulta irrelevante siempre que esté en el interior del cuarto. La mitología de la visión doble se cifra en lo siguiente: la experiencia sensible se reduce a aportar representaciones pictóricas de una realidad que se sabe diferente. Contemplamos una mancha coloreada en nuestro campo visual y creemos ver, gracias a ello, un árbol en el exterior.

El comentario de Magritte nos sirve de excusa para proponer una clasificación de los sistemas filosóficos. De un lado se encuentran aquellos que sufren por la exigencia de una visión doble; de otro lado, aquellos que no se atormentan ante la aparente falta de fundamento. En el primer grupo se hallan, por un lado, todos aquellos filósofos que creen haber identificado su tarea en el siguiente problema: aportar los fundamentos del conocimiento en general, develar la perspectiva propia del conocimiento; y, por otro lado, los filósofos que creen impracticable la tarea de fundamentar todo posible conocimiento pero reconocen implícitamente la legalidad del problema planteado. En este caso, es posible, entonces, sostener que la representación no puede guardar correspondencia alguna con la realidad, o que si lo hace no podríamos de ninguna manera conocer cómo es eso posible; o bien, sostener que la realidad es de hecho ajena a la representación, o que se funden en un solo abrazo realidad y representación pero un acto del sujeto que conoce hace posible la distinción en cuestión. Ellos hacen de la epistemología una reflexión central. Toman en forma incuestionable la afirmación: conocer es representar. La palabra "representar" proviene del término latín *repraesentare*, que consta de dos partes distinguibles: *re*, nuevo, y *praesentare*, que a su vez se descompone en dos partes: *pra*, delante, y *esse*, estar. De tal manera que la expresión *praesentare* –estar delante– bien se puede transcribir como "la acción de poner una cosa al frente de un observador". Por tanto, "representar" traduce perfectamente lo siguiente: colocar de nuevo algo al frente. Sólo en ese sentido es factible hablar de una representación como imagen de una cosa. El término guarda, entonces, una estrecha correspondencia con el mito del doble escenario. La ciencia opera con representaciones, lo cual significa que la ciencia dispone de mecanismos que hacen posible una segunda contemplación.

Descartes consiguió que se arraigara la distinción mencionada cuando introdujo la figura de la mente como el fantasma que dirige una máquina inerte a la que se encuentra incuestionablemente ligado: no puedo sentir los dolores de mi amigo, tampoco experimento dolor de piedra cuando contemplo que un guijarro golpea con fuerza la montaña. La fuerza de la imagen de la visión doble se percibe, entre otras múltiples manifestaciones, en los hermosos grabados que acompañan su *Dióptrica* (ver la ilustración 1.2): un objeto –extenso– proyecta mecánicamente en el fondo de un ojo físico una copia suya, la cual es sometida, a su vez, a la inspección escrupulosa de un segundo observador que se encuentra plácidamente acomodado, controlando las fibras que mantienen tensionada la glándula pineal.

En el segundo grupo de filósofos encontramos a aquellos que se conforman con una visión inmediata. Aquellos que han aprendido a contemplar la vida con naturalidad, que reconocen que la vida no oculta ningún problema sublime y que basta disponerse a contemplar de cerca para desvanecer así cualquier tipo de perplejidad filosófica. Tales filósofos conciben su actividad a la manera de una terapia que permite arrancar de raíz aquellas angustias que se generan cuando vemos agotarse las posibilidades de hallar una solución sensata a aquellos que hemos creído problemas fundamentales. En ese sentido, tal como lo sugería Wittgenstein, la filosofía debe encargarse de mostrarle a la mosca la salida de la botella atrapamoscas (Wittgenstein, 1988: § 309). En la perspectiva del presente talante filosófico no hace falta formular el recurso de una segunda visión para explicar la primera; la primera lo satisface por completo.

Llegamos así al punto central del presente artículo. Las preguntas más importantes se pueden plantear en los siguientes términos: ¿de qué son representaciones las expresiones matemáticas?, ¿es posible formular una teoría general de los fundamentos de la matemática? Si adoptamos la primera perspectiva filosófica terminaremos abordando preguntas de la forma: ¿qué realidad hace posible la verdad de la proposición: "hay infinitos reales entre 0 y 1"? y ¿cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori*? Si adoptamos la segunda postura filosófica es posible terminar en una especie de serenidad de espíritu, pues las preguntas se disuelven no porque encuentren la solución esperada, sino porque, en virtud de la terapia, es factible contemplar la falta de sentido de las mismas. La vida retorna a su calma cuando se descubre que aquello que la había extraviado carece de sentido.

Si conocer es una forma íntima de contemplar una pintura –representación– y asumimos, entonces, que una expresión matemática –que tiene la forma de una expresión descriptiva– es una pintura, es legítimo que nos preguntemos por la realidad que sirve de modelo para el caso. Sin embargo, la pregunta, como veremos a continuación, nos sumerge en un mar de confusiones. El problema de la realidad de los objetos matemáticos está íntimamente ligado con el tipo de actividad propia del matemático, así que detengámonos, por ahora, en tratar de determinar en qué consiste tal actividad. El matemático *construye* en oposición a *descubre*. El término "descubrir" implica, de alguna forma, llegar a un objeto que nos había estado esperando mientras avanzábamos en la búsqueda. Por esa razón es factible describir el objeto previo al acto de descubrimiento del mismo. Notamos, por ejemplo, una anomalía en la trayectoria de Urano y, con el ánimo de salvar la ley de la gravitación universal de Newton, guardamos la esperanza en la presencia de otro planeta que sea el responsable de las anomalías observadas. Podemos, inclusive, determinar la posición que debería ocupar, la masa y hasta especular un poco sobre las dimensiones. El acto de contemplar el planeta mencionado por medio de un telescopio es, en estricto sentido, un descubrimiento. Efectivamente podemos sostener la existencia independiente del planeta con respecto al método de búsqueda. Cuando no habíamos contemplado el planeta y, sin embargo, describíamos sus características, podría decirse que estábamos enunciando una *conjetura*. El hecho de observar el planeta puede concebirse como una validación de la conjetura. Ahora bien, ¿hasta qué punto es factible, conservando la analogía, hablar de una conjetura en matemáticas? ¿De ser así, cómo se entiende una verificación de la conjetura?

Los científicos naturales ven con admiración el campo de las matemáticas y se valen de ellas como modelo de exactitud y de generalización. Ven también en las matemáticas el modelo de disciplina que disuelve y liquida la discusión. Ellos ven en forma desdeñosa la diversidad de criterios que anida en el interior de sus disciplinas y contemplan con envidia la unidad que se da dentro de las matemáticas. Esa admiración conduce a la creencia según la cual el hombre de ciencia toma de la naturaleza los datos y toma del entendimiento la estructura que le permite organizarlos. Desde la otra esquina de la confrontación es posible dar pie a otra aberración similar. Los matemáticos ven con admiración el campo de las ciencias naturales y se valen de ellas para constituir un modelo errado de realidad. El físico admira la manera como el matemático se desentiende del contenido y se concentra exclusivamente en la forma; él ve en las matemáticas la posibilidad de eludir la contingencia de su propio saber y aspira, aun cuando sea lejana la concreción de tal ideal, a edificar en forma acabada una físicamatemática. El matemático insiste en que su investigación no se reduce a la contemplación de formas muertas y admira la manera como el físico describe las propiedades de los objetos tangibles por los que se interesa. Motivado por ese complejo, el matemático hace lo posible por constituir una *realidad* que se corresponda con las formas que contempla. El matemático intenta, en consecuencia, fisicalizar su disciplina. Orientados por esa molestia, los filósofos de las matemáticas han propuesto las más variadas ontologías. Estas ontologías van desde una realidad independiente habitada por formas puras y cuya existencia es anterior al acto mismo de contemplación –platonismo–, a una realidad en la que a una expresión matemática debe corresponder un hecho físico observable –empirismo a la manera de J. S. Mill–, pasando por la formulación de una realidad de índole mental. En este último caso la inmutabilidad de los objetos matemáticos proviene de la perspectiva privilegiada de un observador que contempla en forma exclusiva el ámbito de lo mental. Los matemáticos no quieren reducir su campo de estudio a las formas, quieren imaginarse como efectivos contempladores de una realidad que es independiente de su investigación, quieren sentirse también descubridores. Cuando se reducen a las formas puras les invade un cierto complejo de inferioridad con respecto a la física y realizan los esfuerzos más descomunales para aportar a las formas una realidad que, en principio, creen conocer de primera mano. El matemático Charles Hermite veía así el problema:

> Creo que los números y las funciones del Análisis no son un producto arbitrario de nuestro espíritu; pienso que existen fuera de nosotros, con el mismo carácter necesario que las cosas de la realidad objetiva, y nosotros los encontramos, los descubrimos y los estudiamos, *igual que los físicos, los químicos y los zoólogos*[2].

La cita anterior le sirve de refuerzo también a Gödel en su famosa conferencia Gibs para defender una analogía más estrecha entre la física y las matemáticas (Gödel, 1994: 169). La confusión

---

[2] Citado en Borbaki, 1976. Las cursivas son mías.

tiene varios orígenes. Uno de ellos se relaciona con el hecho de suponer que toda expresión lingüística con la forma gramatical de una descripción es, en efecto, una descripción. El hecho de no reconocer específicamente el papel peculiar de las reglas gramaticales provoca, por ejemplo, el siguiente tipo de confusiones: creer que los teoremas de existencia son análogos a las expresiones que sugieren la existencia de objetos físicos. Así por ejemplo, se piensa que el número de Euler (e=2,718281828...) es un descubrimiento y no una construcción. O se cree también que, al ser infinito el número de primos, en consecuencia hay varios de ellos que, por no haber sido escritos por nadie, están a la espera de que alguna persona los tenga en cuenta, los señale, los descubra. Como se asume una falsa analogía entre descubrimiento físico y teorema de existencia, nos sorprenden expresiones como: "existe un número infinito de números reales entre 0 y 1". No podemos resistir la tentación de preguntar: ¿cómo es eso posible?, ¿cómo se acomodan en un espacio tan pequeño?

El asombro subsiste mientras no distingamos entre imposibilidad física e imposibilidad lógica, o mientras pensemos que a una imposibilidad lógica debe corresponder una imposibilidad física. La expresión: "tres personas no pueden sentarse una al lado de otra en un banco de una yarda de longitud" ilustra una imposibilidad física, en tanto que la expresión: "3 x 18 pulgadas no caben en 3 pies"[3] ilustra una imposibilidad lógica. Aunque poseen una forma gramatical similar, no desempeñan el mismo papel en nuestros juegos de lenguaje (Wittgenstein, 1989: 88).

Si la expresión "hay un número infinito de números reales entre 0 y 1" no ilustra un descubrimiento, ¿qué muestra entonces? No se trata de una descripción, es la formulación de un algoritmo de construcción. Tomemos, por ejemplo, la prueba de Cantor. Imagi-

---

[3] Un pie son doce pulgadas.

nemos que es posible hacer un listado de todos los números reales, en su expresión decimal, entre 0 y 1:

θ(1)	0,167348965...
θ(2)	0,657462086...
θ(3)	0,993518658...
θ(4)	0,008648862...
θ(5)	0,647359421...
θ(6)	0,112976093...
...	0,...

Supongamos ahora que tales números se pueden numerar tal como ilustra el esquema *θ(x)*. Ahora podemos preguntar si la lista contiene todos los números reales comprendidos entre 0 y 1. Esto equivale a preguntar si los números reales comprendidos entre 0 y 1 son numerables o no. Si logro construir un número que no esté en la lista es claro que ella resultará incompleta. Escribamos el número decimal que contiene todos los elementos de la diagonal y que aparecen en negritas en la siguiente ilustración:

θ(1)	0,**1**67348965...
θ(2)	0,6**5**7462086...
θ(3)	0,99**3**518658...
θ(4)	0,008**6**48862...
θ(5)	0,6473**5**9421...
θ(6)	0,11297**6**093...
...	0,...

Este número es: 0,153656... Restemos 1 a cada dígito y escribamos el nuevo número: r = 0,042545...

Es claro que r ≠ θ(1), r ≠ θ(2), r ≠ θ(3), r ≠ θ(4), r ≠ θ(5), r ≠ θ(6), ... r ≠ θ(n), ya que el primer dígito de r no es el mismo que el primer dígito de θ(1), el segundo dígito de r no es el mismo que el segundo dígito de $\theta(2)$, etc. Por lo tanto, r no está en la lista que se presuponía completa. La lista resulta, en consecuencia, incompleta. En ese sentido resulta que la expresión "hay un número infinito de números reales entre 0 y 1" resume el algoritmo de construcción que se ha ilustrado. Tal algoritmo nos enseña a construir un nuevo número que no se encuentra presente en toda lista que pretende numerar en forma completa los reales entre 0 y 1. En este caso la palabra "infinito" no confiere sentido al cálculo, sino que lo adquiere de él.

El procedimiento diagonal de Cantor se puede ilustrar con el siguiente ejemplo[4]:

De Morgan
A**b**el
Bo**o**le
Bro**u**wer
Sier**p**inski
Weier**s**trass.

Supongamos que la anterior es una lista completa de matemáticos famosos. Si se arma un nuevo nombre con las letras en negritas que se encuentran sobre la diagonal, se obtiene: *Dboups*. Si tomamos ahora cada letra y escribimos aquella que la antecede en el alfabeto corriente, se puede escribir: *Cantor*. Así hemos logrado construir un nuevo nombre. Nos sorprende que coincida con el apellido de un matemático famoso; la lista, por lo tanto, es incompleta. Esta coincidencia, sin embargo, es accidental, porque no es ése el procedimiento que usamos para bautizar nuevos matemáticos. En el caso de la demostración de Cantor se exhibe efectivamente una regla de construcción.

---

[4] Este hermoso ejemplo ha sido tomado de Hofstadter, 1989: 451.

Otro origen de la confusión se halla en la tendencia a concebir prueba y experiencia como dos métodos de verificación que, aunque diferentes entre sí, serían comparables. Esto es, cuando creemos que la experiencia verifica un enunciado físico de igual modo que la prueba verifica un enunciado matemático. La observación telescópica saca a la luz un planeta que, de alguna manera, ya conocíamos. En forma similar se cree que la demostración del teorema de Pitágoras saca a la luz una relación que ya existía y que ya conocían, por lo menos, los egipcios, cuando usaban la escuadra del constructor: 3-4-5.

La diferencia entre un descubrimiento y una construcción radica en que, para el descubrimiento, lo que está oculto debe poder describirse por completo, antes de haber sido encontrado, como si ya lo hubiese sido. Puede darse, no obstante lo anterior, el caso de un descubrimiento accidental (el de los rayos X, por ejemplo): descubrir algo cuya descripción no se tenía y cuya presencia no se esperaba. En ese caso no podría hablarse de un descubrimiento legítimo; sería simplemente un encuentro casual que podría ajustarse a nuestras expectativas de tal manera que a la postre pudiésemos contemplarlo como un descubrimiento, mucho después de haber sido realizado. En ese caso diríamos: "Esto es lo que debíamos haber esperado; y si no lo esperábamos era por el estado limitado de nuestros conocimientos". No cabe duda de que los antiguos contemplaron varias veces el cometa Halley; no por eso fueron ellos quienes lo descubrieron: lo descubrieron aquellos que aprendieron a esperarlo cada 75 años. Ahora bien, ¿podrá darse en matemáticas ese caso de conocer la descripción completa de un objeto antes de darse su descubrimiento efectivo? La respuesta afirmativa invalida a las matemáticas ya que si pudiéramos describir el objeto con todos sus detalles, entonces ya lo tendríamos (lo que no ocurre en la física) y, en consecuencia, la búsqueda matemática carecería así de sentido. Wittgenstein sostiene que la descripción del objeto implica tener ya el objeto en las manos, pues:

> En las matemáticas, la descripción y el objeto son equivalentes. "El quinto número de la serie numérica tiene estas propiedades" y "5 tiene estas propiedades" dicen lo mismo. Las propiedades de una casa no se siguen de su posición en una hilera de casas. Por el contrario, las propiedades de un número son propiedades de su posición. Puede decirse que las propiedades de un número particular no pueden ser previstas. Se las ve hasta que se llega allí. [Wittgenstein, 1992: III, VII, 39].

He aquí algo que no se puede hacer en matemáticas: probar una existencia de tal manera que luego se esté convencido de ella independientemente de la prueba de existencia. En matemáticas, una prueba de existencia define lo que se llama existencia. Parafraseando la vieja máxima de la filosofía podríamos decir que en las matemáticas la esencia implica la existencia, pero no a la manera de una realidad ajena a las matemáticas mismas. Esto ocurre porque el matemático constituye la esencia en el proceso, y este proceso y su resultado son al mismo tiempo existencia y prueba de existencia. En matemáticas sucede que el método de cálculo y el resultado son una y la misma cosa. Gran parte de la confusión se ha originado porque se ha creído posible concebir una expresión verbal que aclare la operación de cálculo. Cuando en realidad es la operación de cálculo la que esclarece el significado de la expresión verbal: "La expresión verbal", dice Wittgenstein, "sólo arroja una luz mate y general sobre la operación de cálculo: la operación de cálculo, sin embargo, una luz resplandeciente sobre la expresión verbal" (Wittgenstein, 1987: II, 7).

El hecho de describir en forma completa un objeto previamente a la búsqueda del mismo es lo que da sentido a la expresión "descubrimiento". En el caso de las matemáticas hay movimiento, pero no hay realidad ajena a él. Esto es lo que hace que se agote la comparación entre una exploración matemática y una expedición científica. Wittgenstein lo concluye así:

Qué extraño sería que una expedición no supiera si tiene una meta, una ruta de alguna especie. No lo podemos imaginar, no tiene sentido. Pero es precisamente esto lo que ocurre en las matemáticas...

¿Podría decirse que los problemas de la aritmética o de la geometría parecen ser siempre –o se conciben siempre falsamente así– como si se refirieran a objetos en el espacio, mientras que es el espacio mismo a lo que ellos se refieren?

Llamo espacio a aquello de lo que uno puede tener una *certeza* mientras está buscando. [Wittgenstein, 1992: II, V, 22].

Esto recuerda el bello pasaje de *Alicia en el país de las maravillas* en el que Alicia, extraviada, pregunta al gato de Cheshire:

–¿Me podrías indicar, por favor, hacia dónde tengo que ir desde aquí?

–Eso depende de adónde quieras llegar –contestó el gato.

–A mí no me importa demasiado adónde... –empezó a explicar Alicia.

–En ese caso, da igual hacia dónde vayas –la interrumpió el gato.

–...siempre que llegue a alguna parte –terminó Alicia a modo de explicación.

–¡Oh! Siempre llegarás a alguna parte –dijo el gato–, si caminas lo bastante. [Carroll, 1987: 108].

La situación paradójica compromete también las investigaciones filosóficas. Así lo explica Wittgenstein en un pasaje que sorprende por la similitud con las recomendaciones del gato de Cheshire:

Aquí podría yo hacer una observación general concerniente a la naturaleza de los problemas filosóficos. La falta de claridad en filosofía es una tortura. Se la siente como algo vergonzoso. Se siente: uno no conoce su camino cuando *debería* conocerlo. Y sin embargo *no es* así. Podemos perfectamente vivir sin estas distinciones, aunque no sepamos por dónde vamos. [Wittgenstein, 1994: III, 33].

Pasemos ahora del problema de la realidad al problema de los fundamentos del conocimiento matemático. Un claro representante de la primera postura filosófica, aquella que se obsesiona con la imagen de la doble visión, es Frege, quien siguiendo a Descartes creyó que la filosofía debía asumir con seriedad su papel de *mosca cocchiera*[5], aportando, por todos los medios a su alcance, una teoría acabada de los fundamentos de la matemática.

El tratamiento que da Wittgenstein al problema no tiene antecedentes en las diferentes escenas de la farsa filosófica: la indagación por los fundamentos tiene un límite y allí se enseñorean nuestras *formas de vida* que andan con absoluta libertad sobre la arena, sin necesidad de estar ancladas en tierra firme: "En el fundamento de la creencia bien fundamentada se encuentra la creencia sin fundamentos" (Wittgenstein, 1991: § 253). El origen de esa novedosa postura tiene que ver con su actitud ante la filosofía y con el criterio metodológico con el que abordó, incluso desde el *Tractatus logico–philosophicus*, las perplejidades de la filosofía; a saber, la convicción de que la delimitación exigida por la filosofía sólo puede ser interna. En el caso del *Tractatus*, lo movía la convicción de asumir una crítica del lenguaje –sugerida inicialmente por Mauthner– pero que –a diferencia de la de éste– no terminase en un escepticismo que invalidara el saber de la física a la manera de Hertz[6]. En ese orden de ideas, el objetivo era establecer una omnicomprensiva "crítica del

[5] Expresión italiana que alude a la mosca que se posa en la cabeza del caballo y piensa que es ella quien tira del carro.

[6] En Janik y Toulmin, 1987, se encuentra una reseña muy interesante sobre la influencia de Mauthner y Hertz en la obra del filósofo austríaco.

lenguaje" que explicase "desde dentro" la naturaleza y los límites del lenguaje en general, de la misma manera como Hertz había podido transformar la crítica de la mecánica dándole un lugar filosóficamente seguro mediante la consideración de su estructura matemática.

Después de 1930 Wittgenstein renunció al carácter sublime que le había dado a la sintaxis lógica pero, aún así, insistía en la necesidad de una crítica del lenguaje que delimitara desde el interior. En este caso las fronteras las marcaban nuestras formas de vida y no la sintaxis de nuestras formas de expresión. La exigencia de delimitar desde el interior nos impide ubicarnos fuera de nuestras formas de vida para que, contemplando desde un espacio presuntamente neutral, impongamos de una vez para siempre la estructura de nuestras estrategias de representación. Así que nada hay anterior, ni lógica ni ontológicamente, a nuestras formas de vida. Ése es uno de los puntos centrales de la novedad wittgensteiniana y, con palabras de Magdalena Holguín, se puede resumir así: "La novedad consiste, precisamente, en impedir la separación de actividades y conceptos en dos ámbitos mutuamente excluyentes" (Holguín, 1991: 85).

Descartes pretendía encontrar en el límite de la fundamentación a la proposición "Yo soy", de suerte que a partir de ella se pudieran extraer, a modo de perlas que se van desprendiendo de un collar, una a una las proposiciones que tenemos por verdaderas. Kant pensaba que allí en el límite se hallaban las rígidas estructuras de la razón que, instauradas *a priori*, constituían de hecho la experiencia misma. Frege y Russell tenían la esperanza de hallar en el fondo, y de manera inamovible, las formas lógicas; de ahí su obsesión por distinguir con claridad la forma lógica de la forma gramatical. Wittgenstein, al contrario, creía que:

> La fundamentación, la justificación de la evidencia tiene un límite, pero el límite no está en que ciertas proposiciones nos parezcan verdaderas de forma inmediata, como si fuera una es-

> pecie de *ver* por nuestra parte; por el contrario, es nuestra actuación la que yace en el fondo del juego del lenguaje. [Wittgenstein, 1991: § 204].

Por eso no es posible delimitar desde fuera, pues, en ese caso, deberíamos poder contemplar desde dos perspectivas diferentes: movernos sobre la lancha con un pie en el bote y otro sobre la isla. Por fuera de nuestras formas de vida simplemente, como dice Wittgenstein, nos falta el aire para respirar. Mientras nos desenvolvemos en nuestros juegos de lenguaje cotidianos todo marcha bien; de lo contrario, simplemente no jugaríamos así.

No aprendemos primero a fundamentar para después actuar. De hecho, primero actuamos y después sólo a unos cuantos se les ocurre que nuestra actuación haya de exigir un fundamento. Es el filósofo quien interrumpe el sosegado trasegar de nuestra vida. Frege, valga de ejemplo, asustado frente al hecho de que en el caso de las matemáticas no era suficiente un convencimiento puramente moral, apoyado por muchas aplicaciones convincentes, veía absolutamente natural que: "Después de que uno se haya convencido de la inconmovilidad de una roca ante la inutilidad de los esfuerzos para moverla, se puede preguntar qué es lo que la sostiene con tanta firmeza" (Frege, 1972: § 2). He ahí la obsesión de un filósofo que, no conforme con la inconmovilidad exhibida en nuestros juegos de lenguaje y formas de vida, exige para ello un fundamento. Es cierto que a nuestros juegos de lenguaje los acompaña la inconmovilidad de nuestras formas de vida; sin embargo, también es cierto que nuestras formas de vida no son inconmovibles de la manera como lo espera el filósofo. En otras palabras, ellas no están impregnadas de la necesidad que el filósofo cree encontrar en las proposiciones fundamentales. Este doble juego de necesidad y arbitrariedad constituye uno de los rasgos de la filosofía de Wittgenstein más difíciles de conciliar para un filósofo clásico. El llamado de Wittgenstein a desatender la exigencia de un fundamento sublime para las matemáticas corre paralelo a la perplejidad mostrada por Levin en *Ana Karenina*: "Cuando Levin pensaba qué era y para qué vivía, no encontraba contestación y se desesperaba; pero cuando dejaba de preguntárselo le parecía que lo sabía, porque vivía y obraba de un modo definido y firme..." (Tolstoi, 1987: 1090).

Referencias

Berence, F. 1971. *Leonardo da Vinci*. Barcelona: Grijalbo.

Bourbaki, N. 1976. *Elementos de historia de las matemáticas*. Segunda edición. Traducción del francés por Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial.

Carroll, L. 1987. *Alicia en el país de las maravillas*. Traducción del inglés por Jaime de Ojeda. Madrid: Alianza Editorial.

Da Vinci, L. 1980. *Tratado de la pintura*. Traducción del italiano por Ángel González García. Madrid: Editora Nacional.

Descartes, R. 1981. *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Traducción del francés por Guillermo Quintas Alonso. Madrid: Ediciones Alfaguara.

Eddington, A. 1945. *La naturaleza del mundo físico*. Traducción del inglés por Carlos María Reyles. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Frege, G. 1972. *Los fundamentos de la aritmética*. Barcelona: Editorial Laia.

Gödel, K. 1994. *Ensayos inéditos*. Recopilado y traducido del inglés por Francisco Rodríguez Consuegra. Barcelona: Mondadori.

Hofstadter, D. 1989. *Gödel, Escher, Bach*. Tercera edición. Traducción del inglés por Mario Usabiaga y Alejandro López. Barcelona: Tusquets Editores.

Holguín, M. 1991. "Wittgenstein y el escepticismo". Inédito.

Janik, A., y Toulmin, S. 1987. *La Viena de Wittgenstein*. Traducción del inglés por Ignacio Gómez Liaño. Madrid: Taurus.

Tolstoi, L. 1987. *Ana Karenina*. Traducción del ruso por Irene y Laura Andresco. Madrid: Aguilar.

Wittgenstein, L. 1985. *Tractatus logico-philosophicus*. Traducción del alemán por Enrique Tierno Galván. Madrid: Alianza Universidad.

———. 1987. *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Traducción del inglés por Isidoro Reguera. Madrid: Alianza Editorial.

———. 1988. *Investigaciones filosóficas*. Traducción del alemán por Alfonso García y Ulises Moulines. Barcelona: Crítica.

———. 1989. *Cuadernos azul y marrón*. Traducción del inglés por Francisco Gracia Guillén. Madrid: Editorial Tecnos.

———. 1991. *Sobre la certeza*. Traducción del alemán por Josep Lluis Prades y Vicent Raga. Barcelona: Gedisa.

———. 1992. *Gramática filosófica*. Traducción del alemán por Luis Felipe Segura. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

———. 1994. *Observaciones sobre los colores*. Traducción del alemán por Alejandro Tomasini Bassols. Barcelona: Paidós.