GERMÁN GUERRERO PINO
COMPILADOR

Einstein
CIENTÍFICO Y FILÓSOFO

Universidad del Valle

Programa Editorial

Germán Guerrero Pino
Compilador

Einstein: científico y filóso

Carlos A Cardona S
2011
2

Colección Artes y Humanidades

Guerrero Pino, Germán
Einstein : científico y filósofo / Germán Guerrero Pino. -- Cali : Editorial Universidad del Valle, 2010.
411 p. ; 24 cm. -- (Colección Artes y Humanidades)
ISBN 978-958-670-835-7
1. Einstein, Albert, 1879-1955 - Crítica e interpretación 2. Relatividad (Física) 3. Teoría del conocimiento científico 4. Filosofía de la ciencia
I. Tít. II. Serie.
530.01 cd 21 ed.
A1270839

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Universidad del Valle
Programa Editorial

Título: *Einstein: científico y filósofo*
Autores: *Germán Guerrero Pino*

Colección Artes y Humanidades

ISBN: 978-958-670-835-7
Primera edición

Rector de la Universidad del Valle: Iván Enrique Ramos Calderón
Vicerrectora de investigaciones: Carolina Isaza de Lourido
Director del Programa Editorial: Víctor Hugo Dueñas Rivera

Diagramado e Impreso: Unidad de Artes Gráficas de la Facultad de Humanidades

Universidad del Valle
Ciudad Universitaria, Meléndez
A.A. 025360
Cali, Colombia
Teléfonos: 3212227 - Telefax: 339 2470
editorial@univalle.edu.co

Cali, Colombia
Febrero de 2011

CONTENIDO

Prólogo

Inercia con fuentes materiales o la eliminación de los sistemas
sobre lo propuesto por Mach y lo hecho por Einstein
Favio Ernesto Cala Vitery

Teoría especial de la relatividad y conocimiento *a priori*
Carlos Alberto Cardona Suárez

Génesis de la teoría general de la relatividad
Juan Carlos Granada E.

La realidad del espacio físico: entre teoría y experiencia
Germán Guerrero Pino

¿Pueden ser separables las entidades indiscernibles?
Ensayo sobre posibles consecuencias de una posición de Einstein frente a la indiscernibilidad
Décio Krause

Acerca de la masa y su tratamiento dado por Einstein y Garav
Regino Martínez-Chavanz

El experimento de Michelson-Morley y el segundo postulado de Einstein: inextricablemente unidos
Héctor A. Múnera

Einstein y el límite de la velocidad de la luz
Gonzalo Munévar 291

Einstein 1905: inteligibilidad racional y creación científica
Michel Paty 309

El punto físico como límite de la experiencia geométrica en cuatro experimentos de pensamiento
Luis Gerardo Pedraza Saavedra 333

Albert Einstein y la filosofía actual de la ciencia
Andrés Rivadulla 365

La perspectiva relativista del mundo físico en el siglo XVIII. Los aportes de L. Euler
Ángel E. Romero 383

PRÓLOGO

Este libro data de finales de 2005, cuando me encontra
inestimables colegas Michel Paty y Regino Martínez cel
exitoso que había sido el *Simposio internacional "Einstein:*
filósofo y humanista. Centenario de una visión del mundo", qu
del 28 de noviembre al 2 de diciembre de ese año, con el a
Facultad de Ciencias, el Instituto de Educación y Pedagogía,
de Humanidades y el Departamento de Filosofía de la Univ
Valle.

En aquella ocasión, los profesores Paty y Martínez me pro
proyecto de elaborar un libro sobre Einstein a partir de las m
simposio que se habían publicado en cd-rom, pues considera
había un material valioso, de excelente calidad académica. El
alargó en el tiempo porque vimos, en un primer momento, l
de mejorar el material seleccionado de las memorias. Así, p
la conferencia del profesor Paty, que estaba en francés, se
español, y los artículos de los profesores Cala, Granada, Mún
mismo fueron revisados y ampliados significativamente. Por
los profesores Krause, Martínez y Pedraza, que habían partic
simposio, decidieron elaborar nuevos artículos para el libro.
entretanto se concretaban estos artículos, se invitó a colabo
colegas, con quienes no habíamos contado en el simposio, y
los profesores Cardona, Munévar, Rivadulla y Romero se
proyecto.

Sea esta la oportunidad para agradecer a todos ellos por

Mach, E. (1883): *The Science of Mechanics*, La Salle: Illinois, Open Court, 1960.

Newton, I. (1686) *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Trad. de A. Motte (1729), Berkeley, University of California Press, 1960.

Seeliger,H. (1895): "Über das Newton'sche Gravitionsgesetz", *Astronomische Nachrichten 137*, pp. 129-136.

Wheeler, J.A. (1964): "Mach's principle as boundary condition for Einstein's equation", en *Conference Internationale sur les theories relativistes de la gravitation*. París, Gauthier-Villars, pp. 223-232.

TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD Y CONOCIMIENTO A PRIORI

*Carlos Alberto Cardona Suárez**

Resumen

El artículo se propone tres tareas: (i) introducir una
la dificultad que el desarrollo de geometrías no-euc
advenimiento de la Teoría Especial de la Relatividad
programa trascendental kantiano; (ii) presentar un esbo
y las limitaciones del proyecto de Bertrand Russell por
aspectos del programa kantiano apoyándose en la geomet
(iii) ofrecer una propuesta que intenta restituir algunas
Russell incorporando los aspectos advertidos por la Teor
la Relatividad y depurando el programa de los acercamie
con los que se formuló inicialmente.

Nadie pone en duda el éxito pragmático que durante el siglo
el programa mecanicista de Newton. No obstante el éxito
programa le faltaba un fundamento epistemológico y metaf
de los sorprendentes resultados, no eran claros: (i) la naturale
y del tiempo postulados como marcos absolutos para referir
mecánica, (ii) el origen y el estatuto epistemológico de las
Leyes del Movimiento, (iii) el sentido profundo de las

* Profesor de la Escuela de Ciencias Humanas, Universidad del Rosario.

Definiciones (en particular, cantidad de materia, cantidad de movimiento, fuerza ínsita, fuerza impresa), (iv) el verdadero papel de las denominadas *Reglas para filosofar*. Para muchos comentaristas, esta laguna se llenó con los alcances del proyecto trascendental kantiano. La relación Newton-Kant es de doble vía. En la formulación de Michael Friedman:

> De un lado, los *Principia* de Newton representan una realización de los principios trascendentales contenidos en la primera Crítica. Como tal, estos proveen al sistema de Kant con un "ejemplo en concreto" que confiere "sentido y significado" a los conceptos y principios excesivamente abstractos de la filosofía trascendental...
> De otro lado, Kant ve la ciencia newtoniana en necesidad de un análisis crítico o metafísico, un análisis que revele el origen y significado de sus conceptos y principios básicos. Tal ciencia se encuentra inextricablemente enmarañada con problemas metafísicos; ella requiere en consecuencia de los servicios de la filosofía trascendental que hace dichos problemas más explícitos y los ubica en su contexto propio. (Friedman, 1992, p. 136–137)

La arquitectura de la *Crítica de la Razón Pura* supone que es posible contar con tres disciplinas que aportan modelos para el programa trascendental. En primer lugar, la lógica aristotélica, que a juicio de Kant había ya tomado el camino seguro de una ciencia desde su formulación en la obra de Aristóteles (Kant, 1993, B VIII) y no había dado, desde ese entonces, un paso atrás. En segundo lugar, la geometría que sólo se puede construir, a juicio del filósofo, a partir de juicios sintéticos *a priori*. «*Ningún principio de la geometría pura*, sostiene Kant, *es analítico*» (Kant, 1993, B16, 23). En tercer lugar, la mecánica de Newton que contiene algunos juicios sintéticos *a priori* entre sus principios fundamentales, *v. gr.*, el principio de conservación de la cantidad de movimiento, el principio de igualdad de acción y reacción. Las dos últimas ciencias mostraban que en efecto hay juicios sintéticos *a priori* y abonaban, en consecuencia, el camino a la pregunta "¿cómo son ellos posibles?"

La situación para el programa kantiano a finales del siglo XIX y comienzos del siglo XX resultó ser paradójica: le acompañaban, por un lado, el optimismo que se insinuaba en gracia del creciente éxito de un programa ilustrado inspirado en el avance de la ciencia; y, de otro lado, la frustración al notar que el avance traía consigo el abandono de los tres modelos que inspiraron la arquitectónica de la obra de Kant. En primer lugar (sin que el orden sea cronológico), gracias a los aportes de Peirce, Frege y Russell fue posible concebir una lógica completa de relaciones,

mostrando con ello que la lógica de Aristóteles no gozaba de l
que suponía Kant. El hecho de contar con una lógica de re
abierta la posibilidad de una construcción analítica de los
la geometría, así como la posibilidad de deducir todas las
la aritmética a partir del lenguaje y los axiomas de algún ti
lógico (logicismo) sin recurrir a alguna forma de intuición[1]
lugar, se desarrollaron programas alternos de geometrías n
que concluyeron en la demostración de su consistencia int
ninguna de dichas geometrías tenía que acudir a la experienci
sus resultados y con ello sus principios podían reservar para sí
de *a priori*, no era ya obvio que cuando dichos principio
capturar las propiedades del espacio que ha de servir de for
la receptividad kantiana, pudiesen conservar el mismo apelat
lugar, las críticas filosóficas de Mach a las nociones fantas
espacio y tiempo absolutos, las reservas críticas de físicos co
respecto a la obscuridad intrínseca del concepto newtoniano
posibilidad insinuada por Poincaré de reducir los principios
convenciones y los intentos fallidos por conciliar la mecánica
el electromagnetismo resumido en la obra de Maxwell, condu
espalda a la orientación newtoniana y a divisar la posibilidad
rumbo finalmente encontrado por la senda de la Teoría de la

Cuando Kant se ocupa, en primera instancia, de la receptivid
tiene que establecer las condiciones de su posibilidad. Esa
lleva a reconocer que espacio y tiempo son formas puras de la
En ese orden de ideas, el espacio no alude a alguna propiedad
(ni consideradas en sí mismas, ni en sus relaciones mutuas)
bien, a la condición subjetiva de la sensibilidad que hace po
representemos los objetos como exteriores a nosotros mismo
pasó de ser concebido a la manera de un *Sensorium Dei* (New
320) a la manera de un *Sensorium Hominis*. El espacio no es
empírico, tampoco es un concepto discursivo. El espacio hac
se nos den los fenómenos en nuestra receptividad, no es algo
extraer después de ponerle atención a los mismos. «*La*
sostiene Kant, *es una ciencia que establece las propiedades*
sintéticamente y, no obstante, a priori» (Kant, 1993, B40, 1
anotar dos elementos: (i) para Kant *geometría* y *geometrí*
son sinónimos, no cabe la posibilidad de imaginar una geom

[1] Obviamos en la presentación todos los desarrollos ulteriores del programa logici

fuese, al mismo tiempo, euclidiana en su esencia; sólo así se entiende, para ampliar la formulación de Kant, que (ii) las proposiciones de la geometría sean apodícticas, es decir, estén acompañadas de la conciencia de su necesidad.

Antes que Lobachevski y Bolyai hubiesen concebido geometrías con modificaciones al famoso quinto postulado de Euclides, Carl Friedrich Gauss, a comienzos del siglo XIX, ya había concebido su posibilidad lógica. Se abstuvo de publicar sus resultados por temor a la reacción de las huestes kantianas. Después Félix Klein interpretó los términos no-euclidianos valiéndose de términos euclidianos y mostró así que los proyectos no-euclidianos de Bolyai y Lobachevski no encerraban contradicción interna alguna. En ese orden de ideas, si puedo concebir varios sistemas geométricos, todos ellos internamente consistentes aun cuando antagónicos entre ellos, ¿con qué derecho impongo de manera *a priori* uno de ellos para estudiar las propiedades del espacio de la receptividad kantiana, salvo aduciendo una elección arbitraria? Gauss fue el primer postkantiano en sugerir que tal asignación tendría que llevarse a cabo con procedimientos experimentales, es decir, de manera *a posteriori*. En otras palabras, dado que no hay contradicción en la posibilidad de concebir un triangulo cuya suma de ángulos internos difiera de dos rectos, afirmar que dicha suma equivale a dos rectos para los triángulos de los que se ocupa mi facultad receptiva exige, de parte mía, una validación de tipo experimental. En palabras de Gauss:

> Llegué a estar más y más convencido de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser demostrada, al menos ni por, ni para, el intelecto humano. Tal vez en alguna vida futura podamos tener otras ideas acerca de la naturaleza del espacio las cuales en el presente nos resultan inaccesibles. La geometría, en consecuencia, tiene que ser clasificada hasta ese entonces no con la aritmética, la cual es de naturaleza puramente apriorística, sino con la mecánica. (Citado en Jammer, 1982, p. 147).

Gauss no pretendía sugerir que a nuestro espacio de receptividad le viene bien una geometría no-euclidiana; antes al contrario, pretendía mostrar que dicho espacio se ajustaba a los resultados establecidos por Euclides. Sin embargo, quería defender que aquello había de establecerse bajo la tutela de la experiencia. Este estilo de argumentación complicaba, entonces, la pretendida fundamentación kantiana, aun cuando los mismos resultados experimentales no fuesen concluyentes para favorecer ninguna de las dos aproximaciones. O bien (i) Kant está equivocado y debemos (a)

bien sea probar experimentalmente la validez de la geomet
como expresión de las propiedades de nuestro espacio de
fenoménica, o (b) hallar un nuevo sistema de proposiciones ge
sea consistente y refleje las propiedades de tal espacio; o bien
en lo correcto salvo que debemos hacer más fuerte su argum

EL PROYECTO DE BERTRAND RUSSELL

En 1897 Bertrand Russell escribió un soberbio ensayo co
reseñar un siglo de discusiones en torno a la dificultad que e
geometrías no-euclidianas para un programa trascendental a
Kant y pretendía salvar algún elemento de aprioricidad en la d
de las propiedades del espacio. El escrito de Russell, primero
inmensa de publicaciones del autor, apareció bajo el titulo de
the foundations of geometry y en él se transpira, aún, la fue
idealista que recibió de su maestro Bradley. La geometría
idealistas, la gran fortaleza en la lucha contra el empirismo: e
el paradigma de conocimiento posible que se puede obtener c
absoluta en forma independiente de la experiencia; nadie c
validez, así como nadie dudaba de su pretendida referencia o
ello antes del advenimiento de las geometrías no-euclidianas

Russell subraya dos formulaciones diferentes del *dict*
La primera de ellas es la más citada aun cuando resulte
problemática. La primera versión se puede enunciar así: «*Si*
tiene certeza apodíctica, su objeto, a saber el espacio, debe s
como tal debe ser puramente subjetivo» (Russell, 1897, p. 1
2 reza así: «*Si el espacio es puramente subjetivo, la geometr*
certeza apodíctica» (Russell, 1897, p. 1). Además de adver
el uso ambiguo del término *subjetivo*, que puede terminar lle
cabeza a la defensa de alguna forma de psicologismo, Russel
el advenimiento de las geometrías no-euclidianas golpeaba
primera versión, pero no así a la segunda. Efectivamente, c
varios sistemas alternativos, ninguno de ellos lleva consigo
de su necesidad; en consecuencia, no es en los resultados de
en donde se encuentra fundamento alguno para la pretendida
del espacio. Los argumentos que llevan a la versión 1
alguna forma de externalidad es requisito necesario para la
fenoménica, pero no prueban que dicha forma se ajuste ne
a los cánones de la geometría euclidiana. Sin embargo, si n

por bases independientes de la geometría, que el espacio es subjetivo y debe darse *a priori*, hemos de admitir que la geometría posee certeza apodíctica. Esta era la tarea principal que se impuso Russell en el tratado comentado. Para esta tarea quiso apoyarse en la recién fundada geometría proyectiva y dirigió sus esfuerzos a probar que si bien no era posible establecer una deducción trascendental de los resultados de la geometría euclidiana –y en eso Kant estaba equivocado–, sí era posible adelantar una deducción trascendental de los resultados de la geometría proyectiva –y esta modificación haría nuevamente plausible la argumentación kantiana–. En palabras de Russell: «*Esta* [la geometría proyectiva], *yo mantendré, es necesariamente verdadera de cualquier forma de externalidad y es, dado que alguna forma tal es necesaria para la experiencia, completamente a priori*» (Russell, 1897, p. 6). La idea de Russell es sostener que tanto la geometría euclidiana, como las geometrías no-euclidianas, comparten la estructura proyectiva que es la que, por sí, puede defenderse como si ostentase una naturaleza *a priori*.

> A menos que los no-euclidianos puedan probar, lo que ellos hasta el momento han fallado en pretender probar, que nosotros podemos estructurar una intuición de espacios no-euclidianos, la posición de Kant no puede ser derribada sólo por la metageometría, sino que debe también ser atacada, si puede ser exitosamente atacada, desde su lado puramente filosófico. (Russell, 1897, p. 57).

Russell identifica tres periodos en el desarrollo de las reflexiones filosóficas atadas a la evolución de nuevas geometrías en el siglo XIX. Primer período [Lobachevski, Bolyai]: se obtuvieron sistemas geométricos consistentes a pesar de negar el quinto postulado y se conservó el espíritu sintético de Euclides. Segundo período [Riemann, Helmholtz]: el espacio se ve privado de características cualitativas para evitar referencias incómodas a la intuición y se convierte en un caso particular de una concepción más amplia de *variedades*. El concepto central de este periodo fue el de *medida de curvatura* –ideado inicialmente por Gauss, pero aplicado por él simplemente al caso de superficies–[2]. Tercer período [Cayley, Klein]: se introduce un enfoque proyectivo por oposición a un enfoque métrico en el estudio del espacio. El paso del segundo al tercer período simula una oscilación pendular que va desde un extremo que sobrevalora la cantidad, al extremo opuesto en donde la cantidad es perfectamente irrelevante:

[2] Riemann y Helmholtz pretendían mostrar con sus métodos algebráicos, alejados del pretendido fundamento kantiano en la intuición, la naturaleza empírica de los axiomas recibidos

«*Esta* [la geometría proyectiva], *comienza por reducir todas así llamadas métricas –distancia, ángulo, etc.– a formas p obtiene, por esta reducción, una unidad y simplicidad metodo imposible*» (Russell, 1897, p. 28)[3]. En el caso de la defens el segundo periodo, la medida es posible gracias a la supe magnitudes comparadas, y ésta sólo es posible si el mov invariantes las magnitudes. Así las cosas, cuando la geometri independiente de cualquier conexión con el mundo mecán puede aparecer revestida de objetividad alguna. Sigamos la declaración de Helmholtz:

> Los axiomas de la geometría, tomados por sí mismos fuera d con las proposiciones mecánicas no representan relaciones
> Cuando se toman aisladas, si nosotros las observamos c formas de intuiciones trascendentalmente dadas, ellas c forma dentro de la cual cualquiera que sea el contenido em y, en consecuencia, en ninguna forma limitarán o determinar la naturaleza del contenido empírico. Esto, sin embargo, es de los axiomas euclidianos, también lo es de los axiomas esférica y pseudoesférica.
> Tan pronto como ciertos principios de la mecánica son re axiomas de la geometría, obtenemos un sistema de proposic interés real, y dado que puede ser verificado o derrocado po empíricas, así puede ser inferido a partir de la experie sistema fuese a ser tomado como una forma trascendental pensamiento, debe ser asumida una armonía preestablecid realidad. (Helmholtz, 1995, p. 245)

La crítica central de Russell a los proyectos de Riemann se basa en el *dictum* de corte idealista según el cual no ha cuantitativa sin identidad cualitativa. Dado que la cantidad es un comparación de dos objetos cualitativamente semejantes, el c de las propiedades esenciales del espacio no se puede obtener de juicios de cantidad que pretenden negar los aspectos aunque de hecho tienen la obligación de incorporarlos. En e ideas, Russell propone atender previamente las dos siguiente (i) ¿qué axiomas, o propiedades del espacio, se deben pres que sea posible la comparación cuantitativa de las partes [Deducción Trascendental]. (ii) ¿Qué inferencias se pued

[3] La intención de ver en la geometría proyectiva un intento de reducción es altamen

propósito de las medidas de las figuras espaciales en el marco de dicha deducción trascendental? (Russell, 1897, p. 65).

Las críticas de Russell al segundo período lo conducen a abrigar la esperanza de encontrar en la geometría proyectiva un candidato para estructurar *a priori* la forma posible de toda externalidad. A la manera de principios heurísticos, podemos resumir tres ventajas de la geometría proyectiva: (i) la geometría proyectiva es enteramente *a priori* –al menos esto es lo que pretende mostrar Russell–, en tanto que la geometría métrica es en parte empírica (requiere la coordinación con elementos mecánicos); (ii) la geometría proyectiva es independiente de la idea de movimiento presente en la geometría métrica; (iii) la geometría proyectiva es cualitativa, en tanto que la geometría métrica es cuantitativa. Ahora bien, con el ánimo de valerse de los desarrollos técnicos en geometría proyectiva, debidos a Klein y Cayley, Russell sugiere tres axiomas que, a su juicio, le permitirán adelantar una deducción trascendental de los resultados resumidos en dicha geometría. Estos tres problemáticos axiomas aseguran que: (1) todas las partes del espacio son cualitativamente semejantes y si las podemos distinguir ello sólo se debe al hecho de que una reside fuera de la otra. (2) El espacio es continuo e infinitamente divisible. El cero de extensión es el punto. (3) Dos puntos determinan tan sólo una recta (Russell, 1897, p. 132). Los axiomas y las pretensiones del proyecto de Russell fueron después sometidos a una crítica fuerte de parte de Poincaré (Poincaré, 1899) y a una defensa tímida de parte del mismo Russell (Russell, 1899). De cualquier manera, y quizá motivado por la nueva orientación empirista de su pensamiento, Russell no volvió a ocuparse de este proyecto de raigambre kantiana.

El proyecto de Minkowski

En la introducción señalamos que el proyecto de Kant se apoyaba en tres ciencias que le servían de modelo (lógica, geometría y mecánica) y advertimos también que durante el siglo XIX y comienzos del XX, una a una las tres ciencias tuvieron que reconstruir, como el ave Fénix, sus propios fundamentos. En la primera parte exploramos las dificultades que el desarrollo de geometrías no-euclidianas generaba a quienes pretendiesen conservar las tesis más básicas del proyecto kantiano. Nos vamos a ocupar, ahora, de las dificultades que entraña una revisión de la mecánica de Newton.

La exigencia metafísica de un fantasmagórico espacio
propio vale también para el tiempo absoluto), la tácitamen
no del todo condenada posibilidad de existencia de una acció
a distancia, y la no invarianza de las ecuaciones de Max
transformaciones de Galileo provocaron en Einstein una
que ya no era admisible que se siguiera tolerando. Me
mencionar la naturaleza metafísica de la fuerza denunciada
las dificultades experimentales para determinar la velocidad
la luz con respecto al éter en reposo. Einstein sugirió, ento
copernicano en la construcción de la mecánica con el obje
buena parte de las dificultades advertidas. Mientras la mecáni
asume que (i) las medidas que diferentes observadores hacen
y comparaciones temporales han de ser absolutas e indepen
estados de movimiento de los marcos de referencia en donde
tales protocolos y (ii) a consecuencia de lo anterior, las lla
Fundamentales de la Física valen sólo para ciertos marcos
privilegiados (aquellos que reposan o se mueven con veloci
en línea recta en el marco del espacio absoluto), la mecánica
contravía asume que (i) las leyes fundamentales de la física s
es decir, independientes del marco de referencia en el que los
pretenden establecerlas (no hay, entonces, marco de referencia
y (ii) a consecuencia de lo anterior, las medidas que los
llevan a cabo de longitudes y comparación de movimientos ha
relativas, es decir, ajustadas a las condiciones de los marcos
que se pretende comparar.

De otra parte, las transformaciones de Galileo, que son la
que permiten traducir las medidas de longitud y tiempo eva
marco de referencia en términos de las medidas obtenidas e
de referencia cuyo movimiento en relación con el primero es
determinado, por un lado dejan invariantes las caracteri
se obtienen con la aplicación de las leyes de Newton, sie
sistemas se muevan entre sí con movimientos uniformes y e
y, por otro lado, no establecen tope alguno a la velocidad
puede transmitir información. Las ecuaciones de Maxwell
a caracterizar casi en forma completa los denominado
electromagnéticos no se mantienen invariantes bajo la apli
transformaciones de Galileo. En ese orden de ideas, si con
transformaciones de Galileo, conservamos con ellas el cará
de las medidas de longitud e intervalos temporales, pode

para las leyes de Newton el calificativo de *Leyes Fundamentales* (dada su invarianza), no nos cuidaremos de reaccionar frente a la posibilidad de que una información pueda viajar a velocidades escandalosamente altas y hemos de buscar otras leyes para el electromagnetismo que merezcan el calificativo de fundamentales esperando que se mantengan invariantes bajo dichas transformaciones. Así las cosas, si, al contrario, exigimos un tope a la velocidad con que se pueda transferir información, otras deben ser las ecuaciones de transformación que permitan traducir la información que capturan dos observadores diferentes y otras las denominadas leyes de la físicas si exigimos de ellas la invarianza bajo una aplicación de tales transformaciones.

La primera tensión que condujo a lo que he denominado el *giro copernicano* puede sintetizarse en la formulación del primer postulado de la Teoría Especial de la Relatividad (TER), también denominado *Principio de Relatividad*, y reza así: "todos los observadores, independientemente del estado del sistema de referencia donde se encuentren, han de concebir las mismas leyes de la física". La segunda tensión se puede, así mismo, resumir en la aceptación del segundo postulado de la TER que afirma: "existe una velocidad límite que no puede ser superada por ningún objeto material". El hecho de que esta velocidad resulte ser la de la luz en el vacío carece, por lo pronto, de importancia. De hecho Einstein formuló dicho postulado en estos términos: «*la luz se propaga siempre en el vacío con una velocidad c independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor*» (Einstein, 1952, p. 38). Cuando se construyen las ecuaciones de transformación (Transformaciones de Lorentz) que estipulan las reglas de traducción entre las mediciones de longitudes y comparación de movimientos para dos observadores en marcos de referencia diferentes, siempre que la velocidad de un sistema en relación con el otro se mantenga constante[4] y se asuma que la velocidad límite estipulada coincide con la velocidad de la luz en el vacío, se encuentra con sorpresa que: (i) las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo dicha transformación; (ii) la declaración "el evento A es simultaneo con el evento B (distante de A)" formulada por un observador ya no coincide con la declaración que emite el otro observador acerca de los mismos dos eventos (esto es, la simultaneidad de eventos distanciados es una relación relativa al marco de observación); (iii) los observadores ya no coinciden en sus lecturas de longitud y de intervalos temporales (una vara que en reposo mide un metro, reporta una lectura menor cuando el observador que la mide se encuentra

en movimiento y mayor es la diferencia de lecturas cuand
velocidad relativa de los dos sistemas –contracción de la lo
misma manera, si un observador encuentra que dos evento
en el mimo lugar para él, y que en consecuencia se puede
el mismo reloj, están distanciados por una hora, serán evalu
observador en movimiento, y que por ello tiene que hacer
diferentes, como si estuviesen distanciados por un tiempo
hora –dilatación del tiempo–. Como en el caso anterior,
diferencia si la velocidad relativa de los sistemas es mayor
un observador mide la masa inercial de un objeto se ve en
de asignarle valores mayores cuando el objeto incrementa
y lo hace de tal manera que dicho valor se acerca asintót
valor infinitamente grande cuando el cuerpo bordea la veloc
(v) no hay acción a distancia en el sentido esperado por Ne
principios de conservación de la energía y conservación
de movimiento se funden en un sólo principio. Dado que es
coinciden con valoraciones experimentales, sobre todo cua
altas velocidades, y ofrecen un sistema más simple para la f
la mecánica, incorporarlos a la manera de paradigma nos obl
nuestras expectativas básicas en relación con los fenón
Conviene, pues, reeducar nuestra física *naive*.

Mientras podemos estar dispuestos a aceptar el prin
sin mayores resistencias, la aceptación del segundo postu
constancia de la velocidad de la luz, nos tiene que ser in
la fuerza. Los comentaristas suelen tener posiciones muy
la hora de establecer las condiciones que llevaron a Einste
dicho enunciado a la manera de un postulado. Me inclino a
resistencia a admitir la posibilidad de una acción a distanci
el motivo central; sin embargo no estoy interesado ahora
favor de dicha hipótesis. Por lo pronto, quiero señalar que
de la publicación del artículo de Einstein, Poincaré ya había
proyecto para variar la presentación de la mecánica que in
como uno de sus principios básicos.

> De todos estos resultados, explica Poincaré, –si llegar
> surgiría una mecánica completamente nueva que, ant
> caracterizada por el siguiente hecho: ninguna velocidad p
> la de la luz…, porque los cuerpos opondrían una inerci
> causas que tendiesen a acelerar su movimiento, y esta
> infinita al aproximarnos a la velocidad de la luz. (Poincaré

En el año de 1908, tres años después de la aparición de la TER, el matemático ruso de origen alemán Hermann Minkowski presentó un impactante artículo en el que pretendía recoger los resultados básicos de la cinemática de la TER en un nuevo espacio geométrico 4-dimensional. En este nuevo marco la independencia de espacio y tiempo se pierde en favor de una integración esencial. En palabras de Minkowski: «*De aquí en adelante el espacio por sí mismo, y el tiempo por sí mismo, serán condenados a desvanecerse entre las meras sombras, y sólo una clase de unión de los dos se preservará como una realidad independiente*» (Minkowski, 1952, p. 75).

Los puntos del espacio 4-dimensional de Minkowski pueden ser denominados en forma general como *eventos*[5], tres de sus lecturas coordenadas pueden tener la interpretación clásica de coordenadas espaciales, en tanto que la cuarta coordenada bien puede leerse como la lectura temporal que define, por así decirlo, la fecha del evento para el observador particular que hace la lectura. Así las cosas, un evento se caracteriza por la cuádrupla (x, y, z, t). Si somos capaces de reconocer, por algún criterio que ahora no conviene dilucidar, el objeto material que ocupa un evento y logramos hacerlo durante un trayecto largo de nuestra contemplación, podemos imaginar que la línea que une todos aquellos puntos eventos consecutivos registra una historia o un lapso breve de la vida del objeto material en cuestión. Dicha línea se denomina una *línea-de-mundo*. Imaginemos ahora que representamos en un sistema ortogonal las coordenadas espaciales y la coordenada temporal en un marco de Minkowski (figura 1). Omitiremos, por asuntos de simplicidad gráfica, dos de las coordenadas espaciales. El eje horizontal captura las lecturas temporales, mientras el eje vertical hace lo propio con las lecturas espaciales en la dirección X. Las otras dos rectas representan líneas de mundo de rayos de luz que convergen y, a continuación, se expanden desde el origen del sistema. Los eventos que caen en el sector denominado *Futuro Absoluto* son eventos que, en principio, podían recibir el influjo causal de un evento localizado en el origen del sistema. Ello se justifica porque bien podemos concebir algún tipo de información que viaje desde el origen hasta dicho evento, en ese caso la información viajaría a una velocidad inferior a la velocidad de la luz y no hay, en ese sentido, restricción alguna. Otro observador que contempla los mismos eventos puede diferir en las lecturas temporales asociadas pero estará de acuerdo, en todos los casos, en que los eventos del futuro absoluto ocurren

[5] Minkowski usa la expresión *world point*.

después del evento presente en el origen del sistema. En fo
todos los eventos del sector denominado *Pasado Absoluto*
un influjo causal sobre el origen y todos los observadore
en que dichos eventos ocurrieron antes del evento presente
aunque difieran en las lecturas particulares. Algo muy diferer
los eventos en el sector denominado *Contemporaneidad P*
eventos son independientes causalmente del evento presente
En efecto, para que una información viajase desde el origen
de dichos puntos-de-mundo, tendría que hacerlo a una veloc
a la velocidad de la luz y este es un límite infranqueable.
observadores que contemplen que el evento del origen e
con alguno de los eventos de la contemporaneidad posible,
otros observadores pueden tener noticia primero del origen
evento, o viceversa.

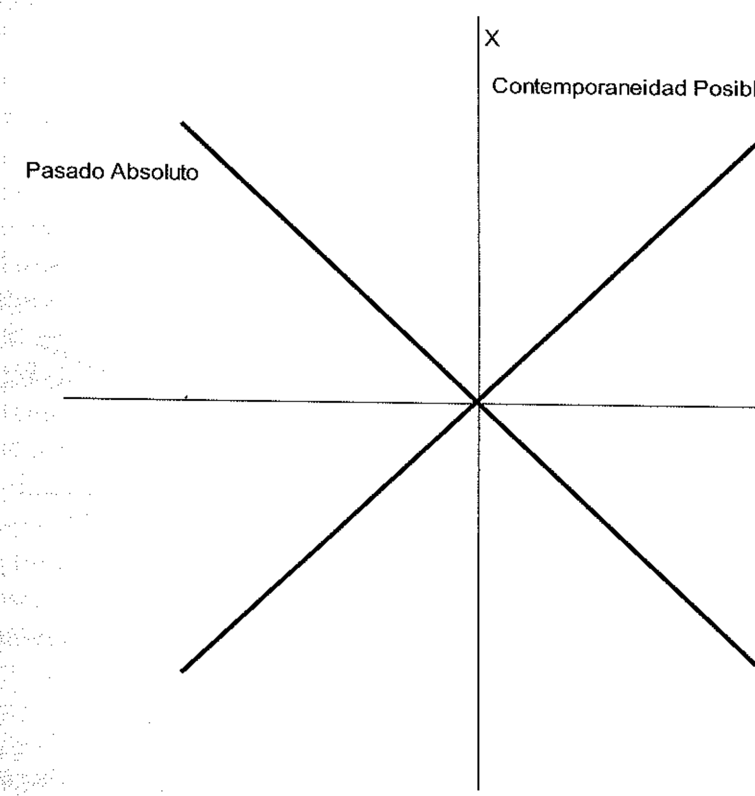

Figura 1. Clasificación de eventos

Ahora podemos agregar la línea-de-mundo de un segundo observador que pasa por el origen del sistema original justo cuando los relojes tanto de un sistema como del otro tienen una lectura "cero". Este observador se desplaza con velocidad constante. Dicha línea de mundo no puede dirigirse hacia las zonas de contemporaneidad posible. También podemos trazar la curva que une todos los eventos que el segundo observador encuentra simultáneos con la lectura $t=0$ de su cronómetro. En virtud de la relatividad de la simultaneidad, no podemos esperar que dicha recta coincida con el eje X del grafico original. A la línea de mundo del nuevo observador la denominaremos t' y sobre ella podremos ubicar las lecturas temporales que adelanta este nuevo observador. En forma análoga, a la recta que reúne los eventos simultáneos con $t = t' = 0$ para el segundo observador, la denominaremos X' y allí señalaremos las lecturas espaciales realizadas por el segundo observador (figura 2).

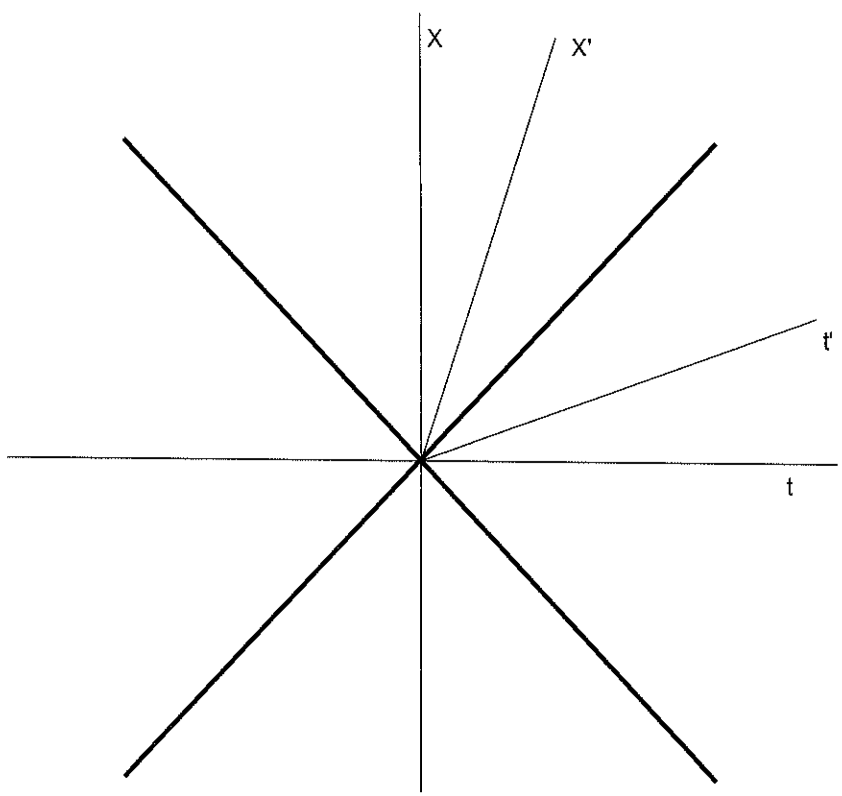

Figura 2. Comparación de observadores

Dados dos eventos cualesquiera A y B, a los que corre
siguientes determinaciones desde el punto de vista de un obse
(x_1, y_1, z_1, t_1), B (x_2, y_2, z_2, t_2), y desde el punto de vista de otr
O', que se desplaza con velocidad constante en relación al pri
$y'_1, z'_1, t'_1)$, B(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2), las transformaciones de Loren
la invarianza de la siguiente cantidad, a la que podemos denom
relativista por su similitud con la métrica pitagórica siempre
paralicemos por el hecho de admitir valores negativos[6]:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = \Delta$$

Si asumimos que $\Delta\rho^2 = 0$, y $t'_1 = t_1 = 0$, $x'_1 = x_1 = 0$ y supr
comodidad, los parámetros y y z, la ecuación se transforma e
lo que corresponde a la línea de mundo de un rayo de luz
origen y después se expande a partir de él[7]. Si asumimos
elegimos un sistema de unidades en el cual $c=1$ y suponemos
evento coincide en el origen de los dos sistemas, la ecuación
$t_2^2 - x_2^2 = t_2'^2 - x_2'^2 = 1$ (una hipérbola). Para los casos particu
que $x_2 = 0$ y $x'_2 = 0$, la hipérbola corta los ejes t y t' justo e
que determinan las unidades de medida temporal para los
correspondientes. La siguiente gráfica (figura 3) muestra la hi
bien podemos denominar *hipérbola de calibración*, y las corr
determinaciones de las unidades de los dos sistemas coorde
misma manera, podemos asumir $\Delta\rho^2 = -1$ y obtener la nueva
calibración que permite determinar las unidades de medida sol
y X' para los dos observadores en cuestión. La gráfica muestr
segunda hipérbola mencionada. Cuando las unidades de med
establecidas, los observadores pueden hacer las lecturas de las
que cada uno asigna a los eventos en los que pretende fijar la
figura siguiente (figura 4) muestra cómo se proyecta ortogo
evento B sobre cada uno de los sistemas coordenados y su
lectura de coordenadas debe ajustarse a las unidades de me
observador. La representación de Minkowski capta en forma
consecuencias que se derivan de la TER.

[6] La velocidad de la luz se nombra con c.

[7] Si el intervalo espacio-temporal entre dos eventos es tal que $\Delta\rho^2 = 0$, tal interv
Light-like. Si tal intervalo es $\Delta\rho^2 > 0$, él se denomina *Time-like*. Si dicho interval

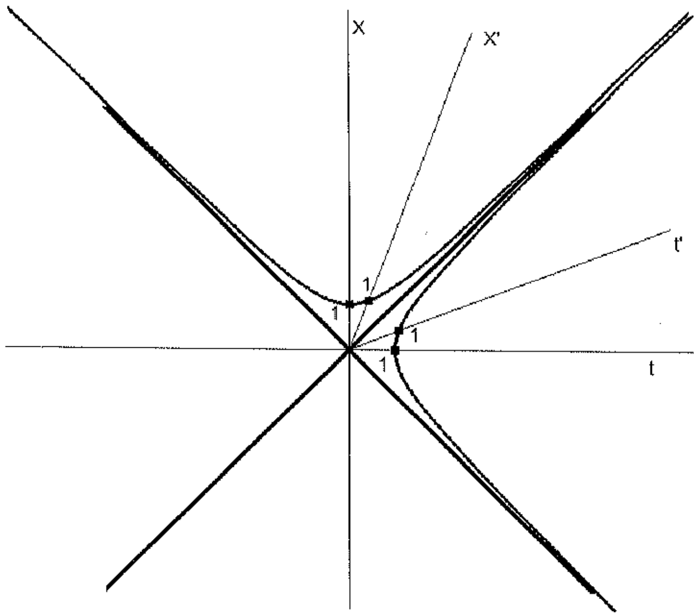

Figura 3. Hipérbolas de calibración

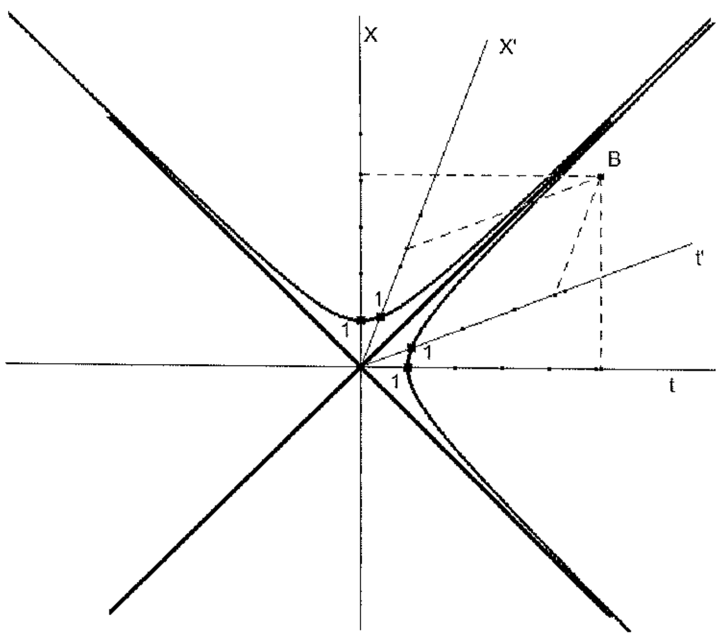

Figura 4. Lectura de coordenadas

No es nuestro interés extendernos en la presentación de
alcance del espacio de Minkowski, por lo pronto basta señalar
esquema de presentación captura en forma adecuada la estruc
de la cinemática relativista (al menos en el ámbito de la Teo
(ii) la comparación de lecturas espacio-temporales de dos
diferentes (siempre que sus velocidades relativas se manteng
para no hacer intervenir consideraciones propias de la Te
de la Relatividad) exige el uso de hipérbolas de calibración
adecuadamente los invariantes básicos de la teoría; y (iii) si
no hay velocidad infranqueable, esto es que la velocidad de
infinitamente grande, los conos de causalidad del espacio d
se plegarían contra los ejes verticales de los modelos de repr
en esos casos, las expectativas de la TER coincidirían con las
prescritas en las Transformaciones de Galileo.

DE REGRESO A LA GEOMETRÍA PROYECTIVA

Retomaremos ahora nuestra discusión central: ¿es posib
algún aspecto geométrico en nuestra descripción fenoménic
físico como si se hubiese impuesto *a priori*? Hemos esboza
adelantado por Bertrand Russell a finales del siglo XIX f
caben las siguientes observaciones centrales: (i) Poincaré
forma juiciosa la obscuridad metafísica que acompaña a
propuestos por el filósofo; (ii) Russell, por razones obvias,
ningún elemento que estuviese asociado con el desarrollo d
esta última parte pretendo aportar elementos que permita
nuevamente las intuiciones de Russell sin compromiso meta
y procurando atender los resultados relativistas resumidos en
de Minkowski. En particular, sugeriré que se puede adelanta
programa de Russell si hallamos una forma de interpretar l
de calibración de Minkowski sin hacer que los aspectos n
dominantes. Para efectos de la exposición, resumiré primero
a debatir, presentaré a continuación un breve esbozo de la ev
Geometría Proyectiva y exhibiré algunos de los resultados
para nuestra disertación; y, por último, expondré la direcci
se puede construir el ámbito de la reinterpretación de las h
calibración.

Resumen del problema. La existencia de geometrías no-eucl
dudas acerca de la pretendida conciencia de necesidad que del

la formulación de las propiedades del espacio, entendido éste como marco de la receptividad de un agente cognitivo racional. Con el ánimo de sostener un esquema argumentativo cercano a la defensa de una formulación *a priori* de las propiedades del espacio podemos aducir que la filosofía trascendental (i) no prohíbe que los matemáticos desarrollen estructuras internamente consistentes diferentes a la aproximación euclidiana; de hecho pueden hacerlo a la manera de *divertimentos* sin pretender referencia objetiva alguna; (ii) ni prohíbe que los físicos seleccionen una u otra de estas geometrías para intentar capturar en dicho lenguaje las leyes fundamentales que subsumen los fenómenos físicos; (iii) pero exige que la geometría que describe las propiedades del espacio de percepción cercana sea necesariamente la geometría euclidiana[8]. En otras palabras, aun cuando hay diversas creaciones formales de los matemáticos (a las cuales sólo hay que exigir coherencia interna: amplia libertad), y entre éstas creaciones sólo algunas son adecuadas para pretender enunciar las leyes físicas fundamentales (libertad restringida al éxito pragmático), en el ámbito de la percepción cercana, el sujeto racional tiene la obligación de circunscribir su espacio de recepción inmediata a los cánones de la geometría euclidiana. En ese orden de ideas, y parafraseando la exigencia de Riemann, según la cual el espacio debe tener curvaturas locales ajustadas a la métrica pitagórica, aun cuando globalmente la estructura métrica sea diferente a la euclidiana, el espacio de percepción local ha de ser euclidiano, no cabe otra posibilidad. Esta readecuación de la defensa de la postura trascendental kantiana demanda que una cierta propiedad innata de la mente humana, a saber, la visualización de espacios cercanos, nos obligue a adherirnos previamente a la geometría euclidiana. En otras palabras, mientras los defensores de

[8] Carnap explotó en forma brillante esta distinción en su tesis doctoral. Allí distingue entre espacio formal, cuyas construcciones se entienden a la manera de proposiciones analíticas *a priori*, espacio intuitivo que al ocuparse de *eidos* en el sentido husserliano, debía construir sus proposiciones a la manera de juicios sintéticos *a priori*, y finalmente el espacio físico que consiste en la elección del espacio formal más adecuado para escribir las leyes que estipulan algún tipo de orden en los fenómenos físicos, sus resultados deben concebirse a la manera de proposiciones sintéticas *a posteriori*. Carnap concluye:

> Las viejas controversias entre matemáticos, quienes disputaban las aseveraciones de Kant, y filósofos, quienes las defendían, no podían obviamente alcanzar ningún resultado, pues los dos bandos no estaban hablando del mismo objeto. El primero tenía en mente parcialmente el espacio formal (por ejemplo Couturat) y parcialmente el espacio físico (Riemann, Helmholtz, Poincaré), el último tenía en mente el espacio intuitivo. Así ambos bandos estaban en lo correcto y podrían haber sido fácilmente reconciliados si la claridad concerniente a los tres significados de espacio hubiese prevalecido. (Carnap, 1991, p. 47)

la posibilidad de otras formas de geometría[9] no demuestre
posibilidad de tener intuiciones que se adecuen a una visuali
no-euclidiana, la exigencia trascendental kantiana sigue in
Reichenbach en su influyente *The Philosophy of Space &*
48) propuso esta respuesta a la defensa neokantiana: la vi
la geometría euclidiana es el resultado de una habituación
el resultado de una prescripción *a priori*. Reichenbach se di
concebir experimentos mentales para familiarizarnos con la
otros mundos similares a los nuestros, salvo que los paráme
con la velocidad de la luz fuesen bastante reducidos. El filó
convencernos de que en dichos mundos es posible imagina
hubiesen desarrollado una habituación a una geometría a
expectativas relativistas.

La respuesta de Reichenbach a la exigencia neokantiana
el hecho de reconocer, de antemano, la dificultad que entrañ
elevada de la velocidad de la luz. En otras palabras, dado
estamos familiarizados con acontecimientos a bajas veloci
difícil admitir las dificultades que implican las predicciones
altas velocidades. De hecho, la aceptación del paradigma rela
admitir el postulado de la constancia de la velocidad de l
duda de que se trata de una formulación que en primera inst
las expectativas a las que nos hemos ido habituando con ba
experiencias de primera mano. Nos cuesta trabajo aceptar qu
de la luz no se altere en virtud del movimiento del sistema
adelanta la medición. El principio de la constancia de la ve
luz entorpecería cualquier intento en el que pretendamos u
de primera mano, de los axiomas relativistas. De hecho, di
se compromete con un rasgo métrico que caracteriza en for
el tipo de organización de nuestra experiencia. Su aceptaci
tan cuestionable como podría llegar a serlo cualquier formul
incluida en la geometría euclidiana: que el cuadrado de la
un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados
por ejemplo.

La primera aproximación al problema se puede plantear en
términos: ¿es posible estructurar una presentación de la teor
la relatividad que permita un transito más suave entre nuestras
familiares y la aceptación de los axiomas de dicha teoría?
principal dificultad proviene de los rasgos métricos imp

axioma que impone la constancia de la velocidad de la luz, el problema se puede reformular así: ¿es posible estructurar una presentación de la teoría especial de la relatividad que haga caso omiso de los compromisos métricos formulados, en primera aproximación, en el principio de la constancia de la velocidad de la luz?

Ahora bien, la geometría proyectiva surgió en principio del estudio de la geometrización de los fenómenos visuales. De hecho fueron los pintores del Renacimiento, preocupados por desarrollar técnicas que permitiesen representar en forma fiel un espacio tridimensional en un marco bidimensional, quienes abrieron la posibilidad para los desarrollos proyectivos. En ese orden de ideas, la geometría proyectiva está atada en forma más natural a la visualización inmediata que la misma geometría euclidiana. Si queremos crear un marco geométrico ajustado a los criterios proyectivos que impone la visualización inmediata sin que ello implique compromiso alguno con la geometría euclidiana y que, más bien, deje abierta la posibilidad para una habituación a la geometría de Minkowski, por ejemplo, hemos de luchar con el carácter no natural del principio de constancia de la velocidad de la luz. En otras palabras, el postulado de la constancia de la velocidad de la luz posee un compromiso métrico que no es fácil de incorporar en un modelo proyectivo. Así las cosas, podemos definir en los siguientes términos el rumbo de la exploración por seguir: dado que los resultados básicos de la cinemática relativista son capturados en el espacio de Minkowski gracias a las hipérbolas de calibración, queremos indagar acerca de la posibilidad de reinterpretar dichas hipérbolas en un espacio proyectivo. Si esta tarea se logra podremos defender, como pretendía Russell con una argumentación impregnada de idealismo y que no concebía elementos relativistas, la prioridad de la geometría proyectiva, dada su cercanía con los procesos naturales de la visualización –este punto marcaría una cercanía con el proyecto trascendental kantiano–, sin que de ella se desprenda un compromiso *a priori* con la geometría euclidiana –este punto marcaría un distanciamiento con el proyecto trascendental kantiano–.

Breve esbozo de la evolución y algunos resultados de la Geometría Proyectiva. La Geometría Proyectiva tuvo su antesala con el surgimiento de la perspectiva durante el denominado *Renacimiento Italiano*. El estudio de la percepción visual había hecho de la pirámide de Euclides su instrumento por excelencia. Este instrumento pide imaginar el ojo en un vértice de la pirámide, el objeto a ser contemplado en la base y los rayos visuales[10]

[10] Sin importar si salen del ojo o se dirigen a él.

conformando el cuerpo de la misma. En el siglo X d.C. el pe
conocido en occidente con el nombre de Alhacén adelant
cuidadoso del vértice de dicha pirámide. Alhacén sentó las b
propuesta puntillista de la percepción visual, en oposición a
holista propio de los acercamientos aristotélicos[11]. El arq
Battista Alberti complementó la pirámide de Euclides ante
plano de proyección pictórica. El pintor profesional debía, pue
su atención –desde el vértice de la pirámide– en la manera co
visuales, cuando atraviesan el velo de Alberti, calcan la huell
percibir. La siguiente figura ilustra la pirámide de Euclides y la
de Alberti (figura 5). El grabado que sigue a continuación (fig
una bellísima presentación del pintor alemán Alberto Dur
a los jóvenes aprendices que querían valerse de los nuevos
desarrollados en Italia[13]. El grabado también ilustra los pri
aproximación puntillista muy posiblemente tomados de la
Alhacén.

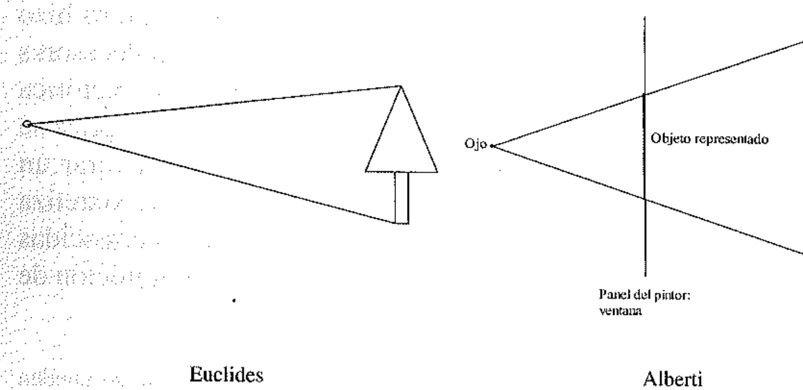

Figura 5. Pirámides de Euclides y Alberti

[11] Véase Alhacén (2001).

[12] Imagen extraida de Albrecht Durero (1970), Unterweisung de Messung, Wesb
Sönding oJ.G. p. 181.

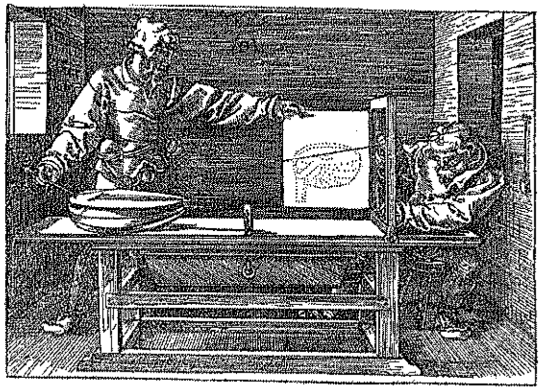

Figura 6. Grabado de Durero

El dispositivo del Velo de Alberti fue auxiliado con principios heurísticos de representación proyectiva que facilitaban la presentación pictórica de espacios tridimensionales. El mayor de los aportes proviene de la excelsa obra del pintor italiano conocido como Piero Della Francesca. Johannes Kepler recogió la influencia puntillista de los trabajos de Alhacén en Europa y quedó altamente impresionado por las presentaciones que Durero hizo de los desarrollos italianos. Sin el temor que albergaban sus predecesores se atrevió a postular la retina como el asiento de la proyección pictórica que servía de fondo para nuestro campo visual. En su tratado de óptica se atrevió también a formular la necesidad y posibilidad de estructurar un estudio unificado de las cónicas. La idea seminal de Kepler se sintetiza en la posibilidad de reunir en una sola curva a las tres cónicas conocidas por los griegos. Me voy a permitir citar en extenso la brillante intuición de Kepler:

> Las secciones de todos ellos [los conos], sin importar la clase, se pueden agrupar en cinco especies. Pues la curva sobre la superficie de un cono establecida por una sección es o bien recta, o una circunferencia, o una parábola, una hipérbola o una elipse. Hablando en forma análoga más bien que geométrica, existe entre estas curvas, en razón de sus propiedades, el siguiente orden: este va desde la línea recta a través de un número infinito de hipérbolas hasta la parábola; y desde allí a través de un número infinito de elipses a la circunferencia. La más obtusa de todas las hipérbolas es una línea recta; y la más aguda una parábola. De la misma manera, la más aguda de todas las elipses es una parábola; y la más obtusa una circunferencia. Luego la parábola, de un lado, posee en su naturaleza dos cosas infinitas –la hipérbola y la línea recta– y, del otro lado, dos cosas que son finitas y regresan sobre sí mismas –la elipse y la circunferencia–. Ella en sí misma se sostiene en un

lugar intermedio, con una naturaleza media. Pues aunque e
una limitación desde el otro lado, dado que entre más se ex
a ser paralela a sí misma,[14] y no expande sus brazos (por así
hace la hipérbola, pero regresa desde el abrazo del infinito, si
menos aunque siempre abarca más. En comparación con la
más abarca entre sus brazos, también busca extenderse más
de ideas, los límites opuestos son la circunferencia y la línea
es pura curvatura, el último es pura rectitud. La hipérbola,
elipse están ubicadas en lugares intermedios y participan tant
como de la rectitud, la parábola de manera equilibrada, la hip
magnitud de la rectitud y la elipse de la curvatura. Por esta r
como la hipérbola se extiende más, ella llega a ser más seme
recta, esto es, a sus asíntotas. Tan pronto como la elipse es
del centro, más emula la circularidad y finalmente se reúne d
misma. La parábola, en la posición intermedia, es siempre r
la hipérbola toda vez que ellas sean extendidas por idéntic
es siempre más recta que la elipse. Y dado que así como la
la recta llevan los extremos a reunirse, y la parábola reside
también, tal como todas las rectas son semejantes, y todas las
también lo son, de la misma manera todas las parábolas s
difieren únicamente en grado.
En forma adicional, hay en estas curvas ciertos puntos q
atención especial: estos tienen una definición precisa, más
menos que usted tome una definición o alguna propiedad a
nombre. Pues las líneas rectas trazadas desde estos puntos
que tocan la sección, en sus puntos de tangencia, forman
a aquellos que se construyen cuando los puntos opuestos s
mismos puntos de tangencia. En virtud de la similitud con el
de la luz,... llamaremos a estos puntos focos. Podríamos h
centros, dado que ellos están sobre los ejes de las secc
estudiosos de las cónicas denominaron a otro punto el cent
la hipérbola y la elipse. Así en la circunferencia existe un
es el mismo punto denominado centro; en la elipse hay d
igualmente distanciados del centro de la curva, y tanto más
que ella se torne más aguda. En la parábola, uno de sus foco
en el interior de la sección, mientras que el otro ha de supon
o bien por fuera, o bien en el interior de la sección, removid
infinita[16] del primero, así que la recta HG o IG trazada desde

[14] Quizá Kepler se refiere al hecho de que entre más se extiende la parábola a
tangentes tienden a ser verticales, si atendemos a la figura que acompaña la
Kepler.

[15] Kepler describe con un lenguaje más poético que técnico el contraste entre
hipérbola.

[16] Kepler no teme en reconocer una distancia infinita entre los dos focos. I

hasta cualquier punto de la sección G es paralela al eje DK. En la hipérbola, el foco externo F está más cercano al foco interno E en la medida en que la hipérbola se hace más obtusa. Y el foco que es externo a una de las secciones opuestas es interno a la otra, y viceversa.
En consecuencia, y por analogía, se sigue que el par de focos en una línea recta (hablamos de una línea recta, contrario a la costumbre, únicamente para completar nuestra analogía) coincide con la línea recta misma, y es singular, como en el caso de la circunferencia. Entonces en la circunferencia, el foco está justo en el centro, alejado tanto como es posible de la circunferencia circundante; en la elipse se aleja menos y en la parábola mucho menos; finalmente, en la línea recta, el foco se aleja de ella por la menor cantidad posible: esto es, cae sobre ella. Y así en los casos limites, la circunferencia y la recta, los focos llegan a reunirse, alejándose de la curva la mayor distancia en el primer caso, y cayendo justo sobre la recta en el último. En el medio, la parábola, ellos [los focos] están apartados una distancia infinita, mientras que en la elipse y en la hipérbola, las cuales están a los lados, los focos, apareados en sus funciones, están apartados por una distancia medible, el otro foco es interior a la elipse y exterior en el caso de la hipérbola. (Kepler, J., 2000, pp. 106-109).

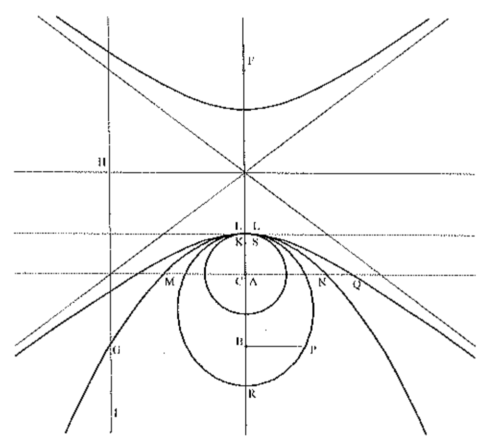

Figura 7. Kepler y el proyecto de la unificación de las cónicas

Los pintores nunca se dieron a la tarea de explorar los fundamentos de las técnicas que estaban desarrollando; a ellos les bastaba con sentirse satisfechos con los logros pictóricos que, ya de por sí, eran invaluables. Unos siglos más tarde los matemáticos profesionales llegaron a interesarse por los desarrollos perspectivos, Giovanni Battista Benedetti entre ellos. Quisieron inicialmente incorporar esos trabajos en el cuerpo euclidiano

por ejemplo, prefería referirse a dimensiones ilimitadas o indefinidas para reservar el adjetivo

sin llegar a pensar en la posibilidad de desarrollar un nuevo investigación. Fue el matemático y arquitecto francés Gira (1591 – 1661) el primero en presentar en forma consolidada de un nuevo campo de estudio de la geometría los desarroll en los aportes renacentistas. Desargues también recogió la i Kepler y puso en marcha el proyecto de construir una teoría u cónicas. Estos proyectos se reúnen en sus dos magnas obras (1636)[17] y *Traité des Coniques* (1639). La recepción inmedi de Desargues no fue la más afortunada. Ya había demasiad alrededor del nuevo proyecto cartesiano como para pedir esp nueva reorientación de la geometría. Las cosas en el siglo X favorablemente gracias a los trabajos iniciales de Poncelet y proveer un tratamiento algebraico adelantado por Félix Klein. proyectiva se formuló, entonces, como un proyecto autónor las puertas para ver realizado el sueño de Kepler. El proyect una teoría unificada de las cónicas salió a la luz en la obra G *Lage* (1847) de Karl Georg Christian von Staudt.

Mientras la geometría euclidiana se practica con regla y c ello admite la transferencia de medidas, la geometría proy formulación original, se adelanta tan sólo con regla sin grad cierra las puertas a los conceptos métricos implícitos en la de medidas. Los siguientes seis axiomas ilustran una de posibilidades de presentar el cuerpo axiomático básico de proyectiva plana (por razones de simplicidad omitimos la sistemas más complejos)[18]:

1. Cualesquiera dos puntos distintos son incidentes en so
2. Cualesquiera dos rectas son incidentes en al menos ur
3. Existen al menos cuatro puntos entre los cuales no hay colineales.
4. Los tres puntos diagonales de un cuadrángulo compl ningún caso colineales.

[17] Al título de la obra le acompaña el siguiente subtítulo: «*Méthode univers perspective les objets donnés réellement ou en devis, avec leurs proportions, mes sans employer aucun point qui soit hors du champú de l'ouvrage*» [traducción *general de poner en perspectiva los objetos…sin emplear ningún punto que re campo para la obra*].

[18] En la presentación de los resultados en los que se apoya la tesis del presente a excelente presentación de Coxeter (1987) inspirada en parte en la también exceler (1910). Algunos teoremas se presentarán con una indicación entre paréntesis de l

5. Si dos triángulos son perspectivos desde un punto, ellos lo son también desde una recta.
6. Si una proyectividad deja invariante cada uno de tres puntos sobre una recta, deja invariante cada punto sobre la recta.

El universo de un espacio proyectivo está poblado de puntos y rectas. No obstante, no se requiere ninguna definición original ni tampoco una intuición primitiva de ninguno de estos objetos. Tan sólo se requiere un criterio para establecer el tipo de relación de incidencia a la que se alude en (1) y en (2). En el plano proyectivo no hay rectas paralelas ((2) lo prohíbe). Estamos ante un cuadrángulo completo (4) cuando contamos con cuatro puntos (sin que tres de ellos sean colineales) entre los cuales se pueden concebir seis posibles parejas incidentes en seis rectas diferentes. El cuadrángulo completo está constituido por los cuatro puntos y las seis rectas. El axioma (5) es un enunciado del famoso teorema de Desargues; la figura 8 exhibe los triángulos ABC y A'B'C' perspectivos desde el punto O[19], dichos triángulos también son perspectivos desde la recta o[20]. En otras presentaciones de la geometría proyectiva (5) puede ser un teorema. Por último, una proyectividad elemental (6) es una correspondencia que asigna a cada punto incidente en una recta (o recta incidente con un punto) una recta incidente con un punto fijo (o, en el segundo caso, un punto incidente en una recta fija). Una proyectividad más compleja se obtiene cuando se cuenta con una composición de varias proyectividades simples, en ese caso, una proyectividad también puede llegar a ser una correspondencia que asocia los puntos de una recta (o las rectas de un haz) con los puntos de otra recta o de ella misma (o con las rectas de otro haz o él mismo)

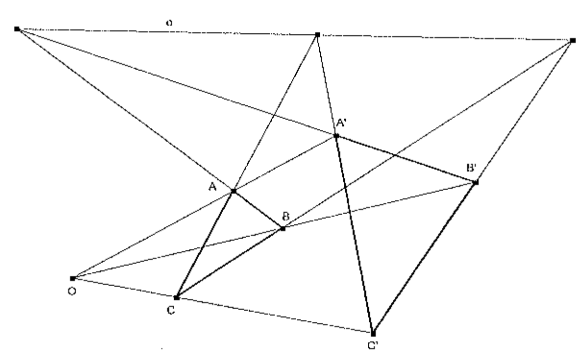

Figura 8. Teorema de Desargues, Axioma (5)

[19] Es decir, las rectas AA', BB', CC' son todas concurrentes en el punto O.

[20] Es decir, los tres puntos de incidencia de los pares de rectas (AB, A'B'), (AC, A'C'), (BC, B'C')

El primer resultado sorprendente de este cuerpo axiomátic principio de dualidad. Dado un teorema del sistema, podemos mutuamente las palabras *punto* y *recta* y hacer arreglos sintác y así obtener un nuevo teorema del sistema. En ese orden d vez que demostramos un teorema, demostramos realmente d resultados más importantes para nuestro propósito, quiero siguientes.

(1) Dada una recta o y tres puntos incidentes en ella A, B, construir un cuadrángulo completo con A y B como punt y C la intersección de otra de las rectas del cuadrángulo c caso, la intersección de la sexta recta del cuadrángulo con punto D) se dice el *conjugado armónico de C con respec* se nota así H(AB, CD). También se puede demostrar que muchos cuadrángulos que satisfacen la condición pero la d del punto D es independiente del cuadrángulo selecciona figura siguiente ilustra el caso.

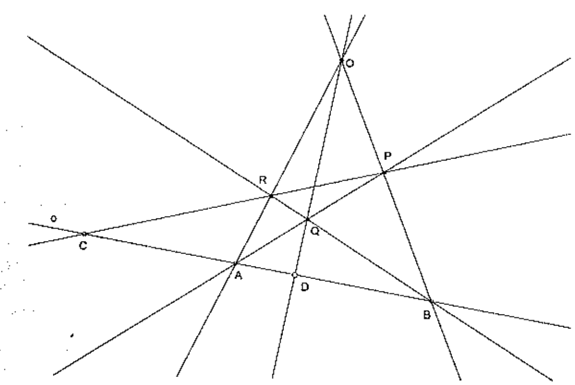

Figura 9. Relación armónica

(2) Si admitimos, en el caso de intentar una lectura p plano euclidiano, que C es un punto infinitamente alejado d mostrar que D cae en el punto medio de A y B. En la figur PR (paralela a o) busca a C en el infinito. Russell se vale de (inspirado en Klein) para insinuar, siempre que por lo pro las dificultades del continuo, que se puede introducir númer euclidiano interpretado proyectívamente. La idea consiste

[21] Esto se deriva fácilmente del hecho de que a partir del conjunto de axiomas se

convencionalmente 0 a A, 1 a D e ∞ a C, en consecuencia habría que asignarle 2 a B[22].

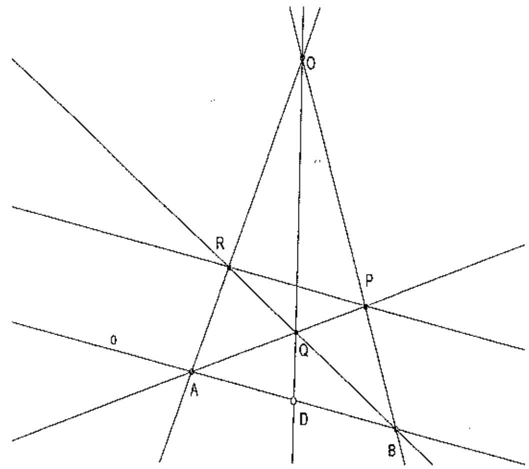

Figura 10. Conjugado armónico de un punto al infinito

(3) Una correlación es una transformación que a cada punto le asigna una recta y a cada recta le asigna un punto de tal manera que se preserva la relación de incidencia de acuerdo al principio de dualidad. La correlación es proyectiva si transforma cada forma unidimensional proyectívamente. Uno de los resultados más interesantes establece que si yo conozco cómo es que una correlación proyectiva transforma los cuatro vértices de un cuadrángulo completo en sus duales (es decir, en los cuatro lados de un cuadrilátero completo), entonces ya está dada unívocamente la forma como dicha correlación debe asignar puntos a rectas y rectas a puntos a cualquier ejemplar que tomemos del espacio proyectivo dado (6.42). El resultado es muy interesante porque él establece que una cierta exploración local en el espacio proyectivo determina el comportamiento global de la correlación dada. Es sorprendente que Russell hubiese omitido este aspecto central que le hubiese permitido hacer muchas asociaciones con los resultados de Riemann.

(4) Una polaridad es una correlación proyectiva de periodo 2. Es decir, asigna a cada punto A una recta a y a continuación asigna a la recta a nuevamente el punto A. En ese caso, a se dice *la polar* de A y A *el polo* de a. Cualquier correlación proyectiva que asocie cada uno de los tres vértices de un triangulo con su correspondiente lado opuesto es una polaridad y ella ya queda absolutamente determinada si conozco al menos otro punto

22 Véase Russell (1897), p. 126.

y su polar (7.21). Este resultado complementa la observaci
determinación local define un comportamiento global. Un tri
con tales características se dice *triangulo autopolar* y dado q
está ya unívocamente determinada si, además, conozco otr
polar p, dicha polaridad se puede enunciar con el símbolo (
figura 11 ilustra el caso en el que ABC es un triangulo auto
la polar de A es BC, la de B AC y la de C AB), P tiene co
este caso la polaridad ya está absolutamente determinada y
polar de Q, por ejemplo, es la recta q.

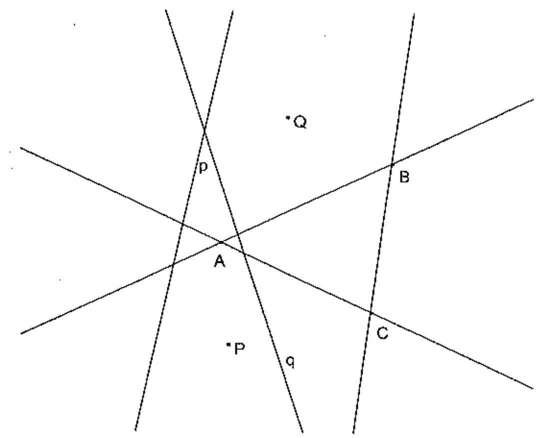

Figura 11. Polaridad (ABC)(Pp)

(5) Si ocurre que a la polar de un punto A es también
A, dicho punto se dice *autoconjugado*. No toda polarida
autoconjugados, en caso de tenerlos, la polaridad se dice *h*
caso contario se dice *elíptica*. Si una polaridad tiene puntos a
(al menos uno) se puede probar que (8.1): (i) la recta que
puntos autoconjugados no puede ser ella misma autocon
imposible que una recta tenga más de dos puntos autoco
si hay un punto autoconjugado P existe también otro so
incidente con P excepto en su polar p. En ese orden de
de todos los puntos autoconjugados se denomina una *cónic*
de todas las polares correspondientes define una envolvent
Una polaridad hiperbólica induce, pues, una partición de p
así: los puntos pueden ser (i) autoconjugados (puntos de
exteriores (incidentes en dos rectas autoconjugadas), (iii) int
incidentes en rectas autoconjugadas); las rectas pueden se

puntos autoconjugados), (iii) no-secantes (no autoconjugadas que carecen de puntos autoconjugados). La figura 12 muestra la cónica que resulta de la polaridad hiperbólica (ABC)(Pp). En ella se puede ver que P, Q, R son puntos autoconjugados, B es un punto exterior (incidente en dos tangentes), D es un punto interior (no incidente en ninguna tangente), p es una tangente, QR es una secante (incide en dos puntos autoconjugados), m es una no secante (no autoconjugada que carece de puntos autoconjugados). La gráfica a la derecha ilustra una porción de la envolvente de tangentes de (ABC)(Pp). Conviene advertir una diferencia en el estudio de las cónicas de Desargues y el estudio posibilitado en el siglo XIX. Desargues parte de las cónicas como objetos dados y de ellas él descubre buena parte de sus propiedades asociadas con las polaridades, de hecho lo hace usando complicadas relaciones métricas. En esta presentación hemos reconocido las propiedades polares para construir, a partir de ellas, los objetos denominados *cónicas*.

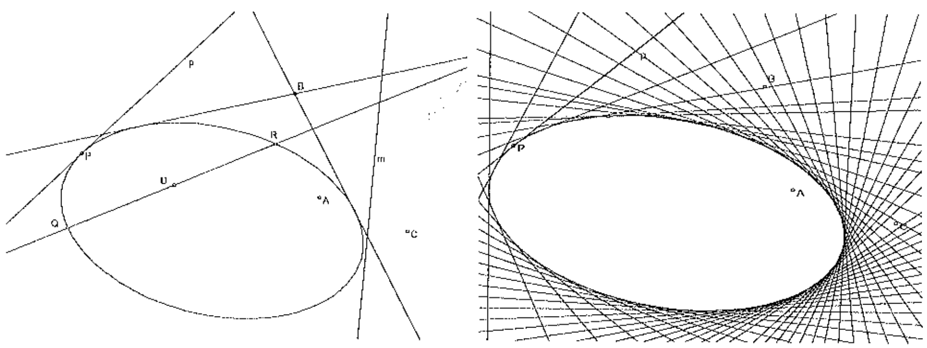

Figura 12. Cónica (ABC)(Pp)

(6) Si bien una cónica ya está bien definida si conozco un triangulo autopolar, un punto autoconjugado y su respectiva polar, ella también se determina unívocamente si conozco: (i) tres puntos autoconjugados y las polares de dos de ellos (8.41) o su forma dual: tres tangentes y los polos de dos de ellas; (ii) 5 puntos autoconjugados (no puede haber tres de ellos colineales) (9.21) o su forma dual: 5 tangentes (no puede haber tres de ellas concurrentes) (9.12).

Reinterpretación de las hipérbolas de calibración. La presentación proyectiva de las cónicas a partir de polaridades no supone distinción alguna entre hipérbolas, elipses o parábolas. Podemos, no obstante, hacer esfuerzos para concebir el plano euclidiano o el plano de Minkowski, por ejemplo,

como espacios proyectivos. Podemos, por ejemplo, asumir
paralelas son efectivamente concurrentes en un punto *al infi*
la brillante intuición de Kepler), otras dos rectas paralelas en
diferente a la de las anteriores rectas serían concurrentes co
infinito y todos los puntos al infinito serían incidentes con un
infinito. Para evitar que la noción de infinito aluda a algún c
podemos pasar de un plano proyectivo a un espacio afí
arbitrariamente una recta y todos los puntos incidentes en ella
la llamamos *recta al infinito* y a los puntos incidentes en ella *pu*
Con esa orientación metodológica en mente, un plano afín pu
como un plano proyectivo al que se le ha suprimido la recta
recta al infinito y los puntos que la conforman. En ese orden d
establecer que (i) una elipse es una polaridad hiperbólica para
al infinito es una no-secante; (ii) una parábola es una polarid
para la cual la recta al infinito es una tangente; (iii) una hi
polaridad hiperbólica para la cual la recta al infinito es una
centro de la cónica es el polo de la recta al infinito; (v) las tan
del centro de una hipérbola son las asíntotas de la misma.

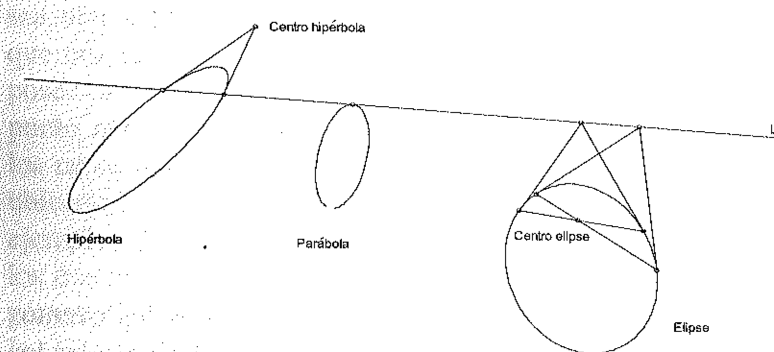

Figura 13. Polaridades hiperbólicas en un espacio afí

Haremos ahora el esfuerzo por concebir un espacio pr
que los puntos pudiesen aceptar la interpretación de event
de Minkowski y las rectas pudiesen aceptar una de tres in
(i) líneas de mundo de objetos que se desplazan a velocid
cualesquiera dos eventos en tal tipo de líneas son tales que ρ
de mundo de rayos de luz, cualesquiera dos eventos en tal

son tales que $\rho^2 = 0$; (iii) la clase que contiene todos los eventos simultáneos con un evento original dado, cualesquiera dos eventos de tal tipo de líneas son tales que $\rho^2 < 0$. Supondremos, por lo pronto, que es factible hallar una interpretación de los axiomas proyectivos en el universo de Minkowski[24]. En ese orden de ideas, podemos ahora invocar la línea de mundo de un observador en un plano de representación de Minkowski al que aun no le acompañamos con ningún criterio métrico. Esta línea bien puede ser la horizontal t en los anteriores diagramas de Minkowski. Consideremos dos eventos A y B sobre dicha línea e imaginemos un tercer evento C ubicado en el *horizonte* de dicha línea[25]. Podemos ahora hallar el conjugado armónico de C con respecto a A y B H(AB,CD). Por lo comentado en (1) y (2) de la sección anterior, esperamos que dicho evento caiga en el punto medio entre A y B. Ahora imaginamos las líneas de mundo de rayos de luz que convergen y se proyectan desde D. La siguiente figura ilustra los elementos considerados.

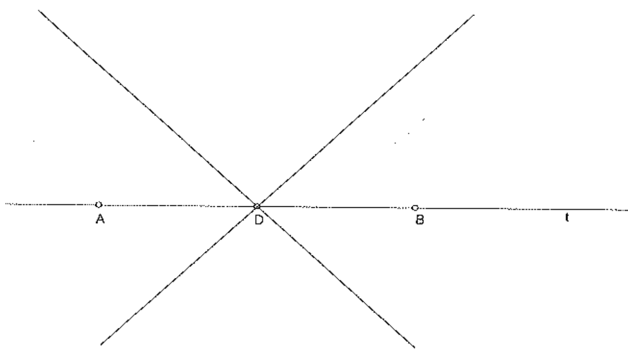

Figura 14. Minkowski reconsiderado

Ahora podemos concebir las rectas que reúnen (i) todos los eventos simultáneos con A, (ii) todos los eventos simultáneos con D, (iii) todos los eventos simultáneos con B. Estas rectas no deben ser concurrentes (no hay un evento simultaneo con A, B y D), por tanto asumiremos que se cortan en la recta al infinito.

---

[24] De hecho, si se asumen consideraciones métricas es posible mostrar que el espacio de Minkowski es un espacio métrico proyectivo y que todas las geometrías de Minkowski cuyos círculos son elipses y sólo elipses son euclidianas. Véase Busemann (1953), pp. 115, 141.

[25] Con la expresión *horizonte de dicha línea* me refiero a un evento del arroyo de las experiencias fenomenológicas del observador, reconocido este evento como absolutamente distante de cualquiera de los dos iniciales, siempre que haya una interpretación fenomenológica para *absolutamente distante*

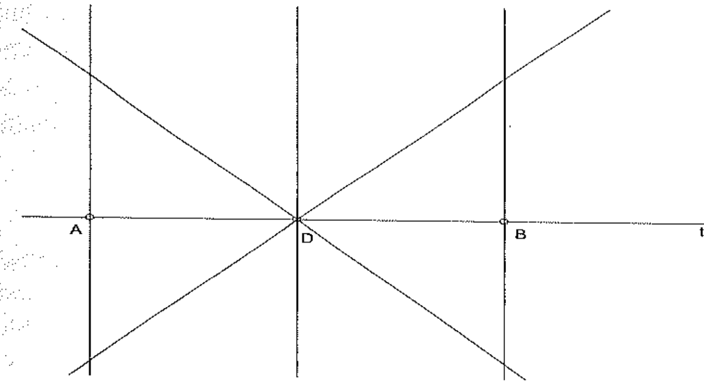

Figura 15. Minkowski reconsiderado

Ahora bien, si quiero reconstruir la hipérbola de ca
la estructura de Minkowski, puedo asumir que A y B
autoconjugados y las rectas que contienen los eventos sim
ellos son sus respectivas polares a y b. Nos faltaría (para us
comentado en (6(i)), otro punto autoconjugado. Si quiero que
sea, efectivamente, una hipérbola, debo garantizar que la rec
sea una secante. En ese caso basta con tomar el punto au
que nos falta justo sobre la recta al infinito y garantizar qu
posee otro punto autoconjugado. Para garantizar el caso toma
punto autoconjugado un punto sobre alguna de las líneas d
los rayos de luz ubicado en el horizonte. Imaginamos que e
ubicado en D, divisa hacia el horizonte y concibe en su camp
ejemplo, el punto en donde convergen las imágenes que tien
los dos rieles de un ferrocarril. También puede concebir el
perteneciendo a la línea de mundo de un rayo de luz, pertene
la clase de eventos que son simultáneos con el evento C, el
base para la determinación de D. Por razones de simetría fen
podemos imaginar que hay otro evento E' sobre la línea d
la luz que corre en la dirección contraria en la que se ubic
evento y que pertenece también a la clase de eventos simult
Este punto también sería autoconjugado y, en consecuenci
infinito tendría que ser necesariamente una tangente. El luga
de todos los puntos autoconjugados de la correlación hiperbo
a las condiciones mencionadas ha de ser, pues, una hipérbo
imaginar que C está infinitamente alejado de B. La siguiente
la construcción

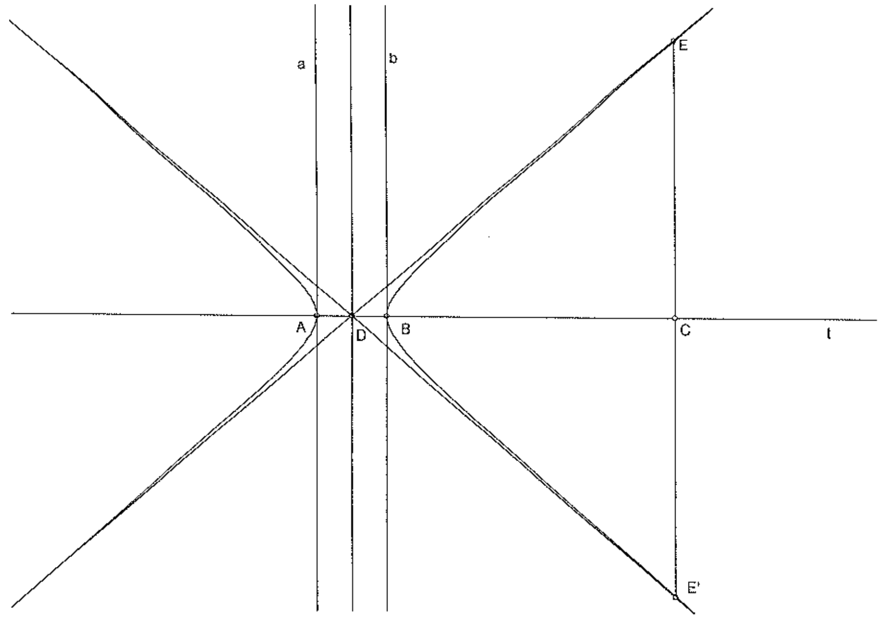

Figura 16. Construcción de una hipérbola de calibración

La geometría cuyos puntos pueden concebirse a la manera de eventos en un plano espacio-temporal de Minkowski y en el que pueden introducirse las líneas de mundo de rayos de luz, sin involucrar aun consideraciones métricas, da la posibilidad de construir las hipérbolas de calibración, si encontramos una forma de interpretar el protagonismo que pudiese desempeñar la polaridad hiperbólica que le asigna como polares a cada evento A y B las clases de eventos simultáneos con cada uno de ellos y hace de las líneas de mundo de la luz asíntotas de dicha polaridad. Dado que los conos de luz desempeñan un papel protagónico, bien podemos pensar que esta clase de geometría permite introducir de primera mano aspectos asociados con la visualización. En otras palabras, la geometría de Minkowski, interpretada como espacio formal para la geometría del espacio intuitivo –a la manera de Carnap– permite introducir observadores en forma natural. Conviene, entonces, pensar en la posibilidad de hacer fenomenología para ingeniarse una argumentación que permita introducir la polaridad hiperbólica que, en forma natural, permita construir las hipérbolas de calibración. Si esta empresa se logra adelantar con éxito, contaríamos con un espacio geométrico formal (de hecho proyectivo con una modificación que lo convierte en un espacio afín) que podríamos reconocer *a priori* para imponer las propiedades del espacio intuitivo, toda

vez que captura en forma natural el ámbito de la percepción o cercana y que captura también la exigencia básica de la el reconocimiento de un limite infranqueable para la tr información.

BIBLIOGRAFÍA

Alhacén (2001): *Theory of Visual Perception*, Philadelphia, American Philosoph crítica y traducción al inglés de Mark Smith.

Buekenhout, F. (editor) (1995): *Handbook of Incidence Geometry*, Amsterdam B. V.

Busemann, H. & Kelly, P. (1953): *Projective Geometry and Projective Me* Academic Press INC., Publishers.

Carnap, R. (1991): *Der Raum.* Topos Verlag.

Coxeter, H. S. M. (2000): *Projective Geometry*, New York, Springer-Verlag.

Desargues, G. (1864): *Oeuvres*, Paris, Leiber, Éditeur.

Durero, A. (1970): *Unterweisung der Messung*, Wiesbaden, Dr. Martin Sändig

Einstein, A. (1952): "On the electrodynamics of moving bodies", en Einstein, A. *of relativity*, New York, Dover Publications INC.

Friedman, M. (1992): *Kant and the Exact Sciences*, Cambridge, Mass, Harvard

Helmholtz, H. (1995): "Origin and Significance of Geometrical Axioms", en Hel *and Culture*, Chicago, The University of Chicago Press.

Jammer, M. (1982): *Concepts of Space*, New York, Dover Publications, INC.

Kant, I. (1993): *Kritik der reinen Vernunft*, Hamburg, Felix Meinen Verlag.

Kepler, J. (2000): *Optics, Paralipomena to Witelo & Optical part of Astrono* Mexico, Green Lion Press. Traducción al inglés de William Donahue.

Minkowski, H. (1952): "Space and Time", en Einstein, A. et al., *The Principle* York, Dover Publications INC.

Newton, I. (1977): *Óptica*, Madrid, Ediciones Alfaguara. Traducción al español

Poincaré, H. (1899): "Des Fondements de la Géométrie. A propos d'un livre de *de Metaphysique et de Morale*, 7, pp. 251-279

________ (1978): "Los principios de la física matemática", en Einstein, A. et *Relatividad* (selección de L. Pearce Williams), Madrid, Alianza Editorial, tra de Miguel Paredes.

Reichenbach, H. (1958): *The Philosophy of Space and Time*. New York, Dover

Russell, B. (1897): *An essay on the foundations of geometry*, Londres, Cam Press.

________ (1899): "Sur les Axiomes de la Géométrie", *Revue de Metaphysiqu* pp. 684-707.

Veblen, O. & Young, J. W. [1910]: *Projective Geometry*, New York, Bl Company.